Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (19.01.2023)

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					$\boldsymbol{\Sigma}$
Úloha	1	2	3	4	$\boldsymbol{\Sigma_1}$	1	2	3	4	$\boldsymbol{\Sigma_2}$	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Nalezněte součet $f(z)$ mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{(n+1)3^{n+2}}$$

na jejím kruhu konvergence a určete parametry tohoto kruhu.

(b) Nechť má mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+5)^n$$

poloměr konvergence $R = 6$. Konverguje tato mocninná řada v bodě $z = 1 + i$?

(c) Určete hlavní část Laurentova rozvoje funkce

$$f(z) = (z-i)^2 + \frac{3}{(z-i)^5} + \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{n}{2}(z-i)^{3n}, \ z \in P(i),$$

v bodě $z_0 = i$.

Úloha 2 ([10 bodů])**.** Spočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 3 ([10 bodů], podúloha (c) NEnavazuje na předchozí dvě)**.**

(a) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(t) = \mathbb{1}(t+4) - \mathbb{1}(t-8), \ t \in \mathbb{R}.$$

[Nápověda: Transformaci počítejte z definice, integrál NEroztrhávejte.]

(b) Nalezněte Fourierovu řadu (v komplexním tvaru) funkce $g(t)$, která je zúžením funkce $f(t)$ na interval $[-10, 10]$.

(c) Pomocí Fourierovy transformace „dostatečně pěkné“ funkce $h(t) \in L^1(\mathbb{R})$ vyjádřete

$$\mathscr{F}\left[(te^{-\frac{t^2}{4}}) * h''(2t+4)\right](\omega)\,.$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Pomocí Z-transformace nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - 4y_n = (-2)^n$$

splňující počáteční podmínky $y_0 = 1$ a $y_1 = 0$.

1) a) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+3}}{(n+1)3^{n+2}}=\frac{z^2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}$

- $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\frac{3}{3-z}$

$\xrightarrow{\int dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}=\int\frac{3}{3-z}dz=-3\ln(3-z)+C$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}=-3\ln(3-z)+C\Big|_{z=0}$

$0=-3\ln 3+C$

$\Leftrightarrow C=3\ln 3$

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}=-3\ln(3-z)+3\ln 3=3(\ln 3-\ln(3-z))$

- $\left|\frac{z}{3}\right|<1\Leftrightarrow|z|<3$

$f(z)=\frac{z^2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)3^n}=\frac{z^2}{3}(\ln 3-\ln(3-z))$ za $|z|<3$

$z\in U(0,3)$

b) $|1+i-(-5)|=|6+i|=\sqrt{37}>6\Rightarrow$ ni konv v točki $1+i$

divergira

c) $f(z)=(z-i)^2+\frac{3}{(z-i)^5}+\frac{(-1)}{(z-i)^6}-\frac{1}{2(z-i)^3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2}(z-i)^{3n}$

~~dalam ca. $\frac{3}{(z-i)^5}$ $\frac{1}{(z-i)^6}$ $\frac{1}{2(z-i)^3}$~~

- Kluvni cast $= \frac{3}{(z-i)^5} - \frac{1}{(z-i)^6} - \frac{1}{2(z-i)^5}$

2) $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{(x^2-2x+2)^2}\,dx \right)$

$z^2 - 2z + 2 = 0$

$(z-1)^2 - 1 + 2 = 0$

$(z-1)^2 = -1$

$z - 1 = \pm i$

$z = 1 \pm i$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = 2\pi i \operatorname{res}_{1+i} \frac{e^{2iz}}{(z-1-i)^2(z-1+i)^2}$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to 1+i} \left(\frac{e^{2iz}}{(z-1+i)^2} \right)' = 2\pi i \lim_{z \to 1+i} \frac{2ie^{2iz}(z-1+i)^2 - 2(z-1+i)e^{2iz}}{(z-1+i)^4}$$

(mit 2. Ableitung)

$$= 2\pi i \frac{2ie^{-2+2i}(-4) - 4ie^{-2+2i}}{16} = \frac{\pi i}{8}(-12)ie^{-2+2i}$$

$$= \frac{3\pi}{2} e^{-2+2i}$$

$$I = \operatorname{Re}\left(\frac{3\pi}{2} e^{-2+2i} \right) = \operatorname{Re}\left(\frac{3\pi}{2} e^{-2}(\cos 2 + i \sin 2) \right)$$

$$= \frac{3\pi}{2} e^{-2} \cos 2$$

3) a) $\hat{f}(\omega) = \int_{-4}^{8} e^{-i\omega t}\, dt \overset{\omega \neq 0}{=} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{t=-4}^{8} = \frac{1}{-i\omega}\left(e^{-8i\omega} - e^{4i\omega}\right)$

$= \frac{e^{-8i\omega} - e^{4i\omega}}{\omega} i \,, \quad \omega \neq 0$

$\hat{f}(0) = \int_{-4}^{8} dt = 12$

b) $c_n = \frac{1}{20}\int_{-10}^{10} g(t)\, e^{-\frac{\pi i n t}{10}}\, dt = \frac{1}{20}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\frac{\pi i n t}{10}}\, dt$

$= \frac{1}{20}\hat{f}\left(\frac{\pi n}{10}\right)$

Fourierova vrsta $g(t)$... $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{20}\hat{f}\left(\frac{\pi n}{10}\right) e^{\frac{\pi i n t}{10}} =$

$\frac{12}{20} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi i n}{5}} - e^{\frac{2\pi i n}{5}}}{2\pi n}\, i\, e^{\frac{\pi i n t}{10}}$

c) $\mathcal{F}[(te^{-\frac{t^2}{4}}) * h''(2t+4)](\omega) = \mathcal{F}[te^{-\frac{t^2}{4}}](\omega)\, \mathcal{F}[h''(2t+4)](\omega)$

$\cdot \mathcal{F}[te^{-\frac{t^2}{4}}](\omega) = i\frac{d}{d\omega}\left(2\sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2}\right) = -4\omega i\sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2}$

$\cdot \mathcal{F}[h''(2t+4)](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[h''(t+4)]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{2i\omega}\mathcal{F}[h''(t)]\left(\frac{\omega}{2}\right) =$

$= \frac{e^{2i\omega}}{2}\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

4) $y_{n+2} - 4y_n = (-2)^n \mid y_0 = 1, y_1 = 0$

$z^2 Y(z) - z^2 - 4Y(z) = \frac{z}{z+2}$

$(z^2-4)Y(z) = \frac{z}{z+2} + z^2$

$z^2 - 4 = (z-2)(z+2)$

$Y(z) = \frac{z}{(z+2)^2(z-2)} + \frac{z^2}{(z-2)(z+2)} = \frac{z^3+2z^2+z}{(z+2)^2(z-2)}$

$y_n = \operatorname{res}_{-2} \frac{z^{n+2}+2z^{n+1}+z^n}{(z+2)^2(z-2)} + \operatorname{res}_{2} \frac{z^{n+2}+2z^{n+1}+z^n}{(z+2)^2(z-2)}$

$\operatorname{res}_{2} \frac{z^{n+2}+2z^{n+1}+z^n}{(z+2)^2(z-2)} = \frac{2^{n+2}+2\cdot 2^{n+1}+2^n}{16} = \frac{2^n}{16}(4+4+1)$

$= \frac{9}{16}\cdot 2^n$

$\operatorname{res}_{-2} \frac{z^{n+2}+2z^{n+1}+z^n}{(z+2)^2(z-2)} \overset{\text{pol 2. rádu}}{=} \lim_{z\to -2}\left(\frac{z^{n+2}+2z^{n+1}+z^n}{z-2}\right)' =$

$= \lim_{z\to -2} \frac{((n+2)z^{n+1}+2(n+1)z^n+nz^{n-1})(z-2) - z^{n+2} - 2z^{n+1} - z^n}{(z-2)^2}$

$= \frac{-4((n+2)(-2)^{n+1}+2(n+1)(-2)^n+n(-2)^{n-1}) - (-2)^{n+2} - 2(-2)^{n+1} - (-2)^n}{16}$

$= \frac{(-2)^n}{16}\left(8(n+2) - 8(n+1) + 2n - 4 + 4 - 1\right) = \frac{2n+7}{16}(-2)^n$

$$y_n = \frac{9}{16} 2^n + \frac{2n+7}{16} (-2)^n \; ; \; n \in \mathbb{N}_0$$