Pravděpodobnost a statistika - zkoušková písemka 7.6.2021

| Jméno a příjmení | 1 | 2 | 3 | ústní | celkem | známka |
|------------------|---|---|---|-------|--------|--------|
| | | | | | | |

Úloha 1. (celkem 50 bodů)

Firma rozdává svým zaměstnancům coby jednu z forem odměn slevové vouchery na nákup v libovolném obchodě jistého obchodního centra. Vouchery mají hodnotu 100 Kč, 200 Kč a 500 Kč a v těchto hodnotách jsou vydávány v poměru 3:2:1. Bylo vypozorováno, že zaměstnanci uplatní polovinu voucherů v sektoru A obchodního centra, 20% v sektoru B a zbytek v sektoru C. Zároveň bylo vypozorováno, že z voucherů uplatněných v sektoru A je jich 40% v hodnotě 100 Kč a 40% v hodnotě 200 Kč, z voucherů uplatněných v sektoru B je jich 50% v hodnotě 100 Kč a 25% v hodnotě 200 Kč. Zákazníci průměrně uplatní v obchodním centru 3 vouchery za den. Uplatňování voucherů je rovnoměrné a nezávisí jedno na druhém ani na hodnotách voucherů. Spočtěte pravděpodobnost, že

- a) příští voucher bude uplatněný v sektoru C a bude v hodnotě 500 Kč, (5 bodů)
- b) příští voucher uplatněný v sektoru C bude v hodnotě 500 Kč, (5 bodů)
- c) příští voucher v hodnotě 500 Kč bude uplatněný v sektoru C, (5 bodů)
- d) na příští uplatnění voucheru v hodnotě 500 Kč bude obchodní centrum čekat alespoň 4 dny, (7 bodů)
- e) nejdříve pátý uplatněný voucher je uplatněný v sektoru B, (7 bodů)
- f) během zítřka budou v obchodním centru uplatněny nejvýše 2 vouchery a přitom žádný z nich nebude v hodnotě 500 Kč, (7 bodů)
- g) z 10 uplatněných voucherů jsou alespoň 3 uplatněné v sektoru B (7 bodů)
- h) ze 100 uplatněných voucherů je jich alespoň 25 uplatněných v sektoru B. (Rešte pomocí CLV; 7 bodů)

Úloha 2. (celkem 27 bodů)

Mezi dvěma ostrůvky je kritické místo pro plachetnice s delším kýlem, které chtějí proplout, neboť je v místě malá hloubka a navíc dno je písčité, takže hloubka je proměnlivá. Místo je proto průběžně kontrolováno a hloubka na ceduli umístěné na viditelném místě pro proplouvající lodě zveřejňována. Turista, který po dobu dvou týdnů každé ráno chodil do kavárny poblíž ukazatele, sledoval zveřejněné hloubky (přičemž za 24 hodin se dno změní natolik, že lze naměřené hloubky považovat za nezávislé náhodné veličiny). Vypozoroval následující hodnoty [v metrech]:

| 1.64 | 2.3 | 2.74 | 2.42 | 2.38 | 1.81 | 2.53 | 1.92 | 2.23 | 1.32 | 1.96 | 2.07 | 2.12 | 2.66 |
|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|

a) Nakreslete histogram a odhadněte z něj a/nebo z povahy dat, jaké rozdělení má náhodná veličina popisující hloubku v dané oblasti. (7 bodů)

- b) Odhadněte z dat střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny z otázky a). (5 bodů) (hint: $\sum x_i = 30.1$, $\sum (x_i \bar{x})^2 \doteq 2.07$)
- c) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda je střední hloubka v dané oblasti rovna 2 m. (8 bodů)
- d) Předpokládejte (bez ohledu na výsledek v bodě c)), že střední hloubka je 2 m a rozptyl hloubky je 0.16 [m²]. Spočtěte pravděpodobnost, že plachetnice s ponorem 1.8 m zítra v 8:00 ráno daným místem propluje. (7 bodů)

Úloha 3. (celkem 23 bodů)

Několik restaurací v jedné ulici zaznamenávalo u náhodně vybraných hostů, jaký druh nápoje si objednali jako první v den otevření zahrádek po covidu:

| $pohlaví \downarrow nápoj \rightarrow$ | káva/čaj | chlazené nealko | pivo | víno | tvrdý alkohol |
|--|----------|-----------------|------|------|---------------|
| muži | 30 | 10 | 40 | 10 | 10 |
| ženy | 30 | 30 | 20 | 10 | 10 |

- a) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda počet mužů a žen, **kteří si objednali** alkoholický nápoj, přibližně stejný. (7 bodů)
- b) Statisticky otestujte na hladině 1%, zda je obliba uvedených **tří typů alkoholických** nápojů závislá na pohlaví. (8 bodů)

Dále předpokládejme, že všechny relativní četnosti (tj. poměry) uvedené v tabulce přesně odpovídají těm, které bychom získali mezi všemi hosty daných restaurací. Rozhodněte, zda jsou následující jevy nezávislé:

- c) "host je žena" a "host si objednal čaj nebo kávu", (4 body)
- d) "host je muž" a "host si objednal chlazené nealko", (4 body)

a řádně matematicky zdůvodněte.

Ústní část (celkem 10 bodů)

Definujte nejprve **obecně** nezávislost diskrétních náhodných veličin X a Y. Poté pro náhodné veličiny X a Y se sdruženými a marginálními pravděpodobnostmi uvedenými v následující tabulce

| $X \downarrow Y \rightarrow$ | 3 | 6 | 9 | \sum |
|------------------------------|-----|-----|---|--------|
| 1 | a | b | c | 1/2 |
| 2 | d | e | f | 1/3 |
| 3 | g | h | i | j |
| \sum | 1/2 | 1/3 | k | l |

určete parametry a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k a l tak, aby

- (i) corr(X, Y) = 0,
- (ii) corr(X, Y) = 1

(stačí jedna kombinace těchto parametrů pro každý z případů (i) a (ii)).