Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (13.01.2023)

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					Σ
Úloha	1	2	3	4	Σ_1	1	2	3	4	Σ_2	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z^2+2z+1)}$$

do Laurentovy řady na maximálním prstencovým okolí bodu $z_0 = 1$ a určete parametry tohoto mezikruží.

(b) Určete $k \in \mathbb{Z}$ a $a \in \mathbb{C}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \frac{a}{(z-5)^k} - \frac{1}{(z-5)^6} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-5)^{3n-6}}{(-4)^n}, \ z \in P(5),$$

měla v bodě 5 odstranitelnou singularitu.

Úloha 2 ([10 bodů])**.** Spočtěte

$$\int_C \frac{1-\cos z}{z^4 - 2\pi z^3} + \frac{\sin(z^3)}{(z-4\pi)^4}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníku s vrcholy -1, $3\pi + i$ a $3\pi - i$.

Úloha 3 ([10 bodů])**.** Nechť $g(t) \in L^1(\mathbb{R})$ je spojitá funkce taková, že

$$\hat{g}(\omega) = \frac{2 + i\omega + i\omega^3}{(\omega + 2i)^2(1+\omega^2)^2}.$$

Nalezněte řešení integrodiferenciální rovnice

$$y'(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = g(t).$$

[Nápověda: Využijte faktu, že $\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.]

Úloha 4 ([10 bodů], podúloha (c) NEnavazuje na předchozí dvě)**.**

(a) Zapište funkci

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & \text{pokud } t \in [0,1), \\ 0, & \text{pokud } t \in [1,\pi), \\ \sin t, & \text{pokud } t \in [\pi,\infty), \end{cases}$$

pomocí Heavisideovy funkce.

(b) Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t)$ z bodu (a).

(c) Nechť $g(t) \in L_0$ je funkce splňující $g(t+5) = -g(t)$, $t \geq 0$. Pomocí Laplaceova obrazu $G(s)$ funkce $g(t)$ vyjádřete Laplaceovu transformaci periodické funkce $h(t)$ s periodou $T = 5$, která je na intervalu $[0,5)$ dána předpisem $h(t) = g(t)$.

1) a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z^2+2z+1)} = \frac{1}{(z-1)^3} \cdot \frac{1}{(z+1)^2}$

- $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$

$\left|-\frac{z-1}{2}\right| < 1 \iff |z-1| < 2$

- $\left(\frac{1}{z+1}\right)' = -\frac{1}{(z+1)^2}$

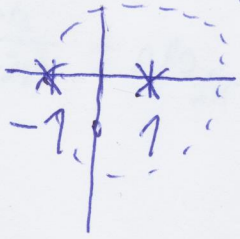
- $\frac{1}{(z+1)^2} = -\left(\frac{1}{z+1}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}$ ~~$\neq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{2^{n+1}}(z-1)^n$~~

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-1)^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-4}$

pro $0 < |z-1| < 2$

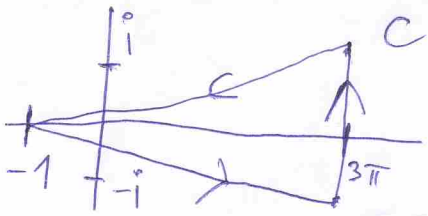
$z \in P(1,2)$



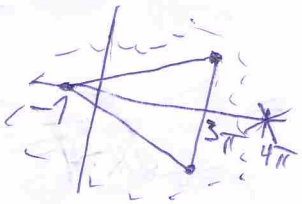
b) $g(z) = \frac{a}{(z-5)^2} - \frac{1}{(z-5)^6} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-5)^{3n-6}}{(-4)^n} = \frac{a}{(z-5)^2} - \frac{1}{(z-5)^6} + \frac{1}{(z-5)^6} - \frac{1}{4(z-5)^3} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(z-5)^{3n-6}}{(-4)^n}$

je-li $a = \frac{1}{4}$ a $k = 3$, pak $g(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(z-5)^{3n-6}}{(-4)^n}$

2) $\int_C \frac{1-\cos z}{z^4-2\pi z^3} + \frac{\sin(z^3)}{(z-4\pi)^4}\,dz =: I$



- $\int_C \frac{\sin(z^3)}{(z-4\pi)^4}\,dz = 0$ z Cauchyovy věty



Funkce $\frac{\sin(z^3)}{(z-4\pi)^4}$ je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti obsahující křivku C.

- $\int_C \frac{1-\cos z}{z^4-2\pi z^3} + \frac{\sin(z^3)}{(z-4\pi)^4}\,dz = \int_C \frac{1-\cos z}{z^4-2\pi z^3}\,dz$

integrál na pravé straně spočítáme pomocí reziduové věty

Křivka $z^4-2\pi z^3 = z^3(z-2\pi)$

- $0, 2\pi$ jsou izolované singulární funkce $\frac{1-\cos z}{z^4-2\pi z^3}$ | C, které leží uvnitř C

- Tedy $\int_C \frac{1-\cos z}{z^4-2\pi z^3}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}_0 \frac{1-\cos z}{z^3(z-2\pi)} + \operatorname{res}_{2\pi} \frac{1-\cos z}{z^3(z-2\pi)} \right)$

- $1-\cos z\big|_{z\in\{0,2\pi\}} = 1-1=0$
- $(1-\cos z)'\big|_{z\in\{0,2\pi\}} = \sin z\big|_{z\in\{0,2\pi\}} = 0$
- $(1-\cos z)''\big|_{z\in\{0,2\pi\}} = \cos z\big|_{z\in\{0,2\pi\}} = 1 \neq 0$

Body $0, 2\pi$ jsou 2-násobné kořeny čitatele.

- 0 je 3-násobný kořen jmenovatele
- 2π je 1-násobný kořen jmenovatele

0: $3-2=1$ ... jednoduchý pól

$$\operatorname{res}_0 \frac{1-\cos z}{z^3(z-2\pi)} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2(z-2\pi)} \overset{LH\ \frac{0}{0}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{3z^2-4\pi z} \overset{LH\ \frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{6z-4\pi} = -\frac{1}{4\pi}$$

2π: $2 \geq 1$ ... odstranitelná singularita $\Rightarrow \operatorname{res}_{2\pi} \frac{1-\cos z}{z^3(z-2\pi)} = 0$

$$I = 2\pi i\left(-\frac{1}{4\pi} + 0\right) = -\frac{i}{2}$$

$$y'(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} y(t-\tau)\,d\tau = g(t)$$

$$iw\,\hat{y}(w) + \mathcal{F}\left[e^{-|t|}\right](w)\,\hat{y}(w) = \hat{g}(w)$$

$$iw\,\hat{y}(w) + \frac{2}{1+w^2}\,\hat{y}(w) = \frac{2+iw+iw^3}{(w+2i)^2(1+w^2)^2}$$

$$\frac{2+iw+iw^3}{1+w^2}\,\hat{y}(w) = \frac{2+iw+iw^3}{(w+2i)^2(1+w^2)^2}$$

$$\hat{y}(w) = \frac{1}{(w+2i)^2(1+w^2)}$$

- $1+w^2 = 0 \iff w = \pm i$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(w+2i)^2(1+w^2)}\right](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwt}}{(w+2i)^2(1+w^2)}\,dw$$

- $\operatorname{res}_{-2i} \dfrac{e^{izt}}{(z+2i)^2(1+z^2)} \overset{\text{pol 2. orden}}{=} \lim_{z\to -2i}\left(\dfrac{e^{izt}}{1+z^2}\right)' = \lim_{z\to -2i} \dfrac{it e^{izt}(1+z^2) - 2z e^{izt}}{(1+z^2)^2}$

$$= \frac{it e^{2t}(-3) + 4i e^{2t}}{(-3)^2}$$

$$= \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}t\right) e^{2t} i$$

$$\operatorname{res}_{i} \frac{e^{izt}}{(z+2i)^2(1+z^2)} = \frac{e^{-t}}{(-9)\,2z\big|_{z=i}} = \frac{e^{-t}}{18}\,i$$

$$\operatorname{res}_{-i} \frac{e^{izt}}{(z+2i)^2(1+z^2)} = \frac{e^{t}}{-2z\big|_{z=-i}} \cdot \frac{1}{2\pi i} = -\frac{e^{t}}{2}\,i$$

$t \geq 0$:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{e^{izt}}{(z+2i)^2(1+z^2)} = -\frac{e^{-t}}{18}$$

$t < 0$:

$$y(t) = \frac{-1}{2\pi} 2\pi i \left(\operatorname{res}_{-i} \frac{e^{izt}}{(z+2i)^2(1+z^2)} + \operatorname{res}_{-2i} \frac{e^{izt}}{(z+2i)^2(1+z^2)} \right)$$

$$= -\frac{e^t}{2} - \left(\frac{1}{3}t - \frac{4}{9} \right) e^{2t}$$

a) $f(t) = t^2(\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t-1)) + \sin(t)\,\mathcal{H}(t-\pi)$

b) $\cdot\ \mathcal{L}[t^2](s) = \frac{2}{s^3}$

$\cdot\ \mathcal{L}[t^2\mathcal{H}(t-1)](s) = e^{-s}\,\mathcal{L}[(t+1)^2](s)$

$= e^{-s}\left(\mathcal{L}[t^2](s) + 2\,\mathcal{L}[t](s) + \mathcal{L}[1](s)\right)$

$= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$

$\cdot\ \mathcal{L}[\sin(t)\,\mathcal{H}(t-\pi)](s) = e^{-\pi s}\,\mathcal{L}[\sin(t+\pi)](s)$

$= -e^{-\pi s}\,\mathcal{L}[\sin t](s) = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right) - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

c) $\mathcal{L}[h(t)](s) = \frac{\mathcal{L}[g(t)(\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t-5))](s)}{1-e^{-5s}}$

$= \frac{G(s) - \mathcal{L}[g(t)\,\mathcal{H}(t-5)](s)}{1-e^{-5s}}$

$= \frac{G(s) - e^{-5s}\,\mathcal{L}[g(t+5)](s)}{1-e^{-5s}} = \frac{1+e^{-5s}}{1-e^{-5s}}\,G(s)$