1.

	O (objednávka)	R (reklamace)	Z (zbytek)	Σ
E (email)	25	10	15	50
T (tel.)	32	4	4	40
P (pap. forma)	1	8	1	10
Σ	58	22	20	100

a) $P(R) = \frac{22}{100} = 0{,}22$ b) $P(T/R) = \frac{4}{22} = \frac{2}{11}$

c) X ... počet hovorů za 10 min. $\sim Po(\frac{2}{3})$, tj. $P(X=k) = \frac{(\frac{2}{3})^k}{k!} e^{-\frac{2}{3}}$ pro $k = 0, 1, \dots$

$P(X=0) = \frac{(\frac{2}{3})^0}{0!} \cdot e^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}}$

(NEBO TAKÉ:

Y doba do příštího hovoru [min.] $\sim Exp(\frac{1}{15})$, tj.

$f(x) = \frac{1}{15} e^{-\frac{x}{15}}$ a $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{15}}$ pro $x > 0$

$= 0$ $= 0$ pro $x \leq 0$

$P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-\frac{10}{15}}) = e^{-\frac{2}{3}}$

nebo

$= \int_{10}^{\infty} \frac{1}{15} e^{-\frac{x}{15}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{15}} \right]_{10}^{\infty} = e^{-\frac{2}{3}}$)

d) X ... viz c)

Y ... počet hovorů za zbylých 50 min. (tj. za dobu, kdy mezi 8:00 a 9:00 nebrali kávu) $\sim Po(\frac{10}{3})$, tj. $P(Y=k) = \frac{(\frac{10}{3})^k}{k!} e^{-\frac{10}{3}}$ pro $k = 0, 1, \dots$

$P(X=0, Y \leq 2) = P(X=0) \cdot P(Y \leq 2) = e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{(\frac{10}{3})^0}{0!} e^{-\frac{10}{3}} + \frac{(\frac{10}{3})^1}{1!} e^{-\frac{10}{3}} + \frac{(\frac{10}{3})^2}{2!} e^{-\frac{10}{3}} \right)$

e) X... počet emailů, kteří nejsou reklamace, před první e-mail reklamací

$X \sim Geom(0,2)$, tj. $P(X=k) = 0,8^k 0,2$ pro $k=0,1,\dots$

$$P(X \le 2) = \sum_{k=0}^{2} 0,8^k 0,2 = 0,2 \cdot \frac{1-0,8^3}{1-0,8} = \underline{\underline{1-0,8^3}}$$

(NEBO:

Y... počet reklamací mezi prvními třemi emaily

$Y \sim Binom(3; 0,2)$, tj. $P(Y=k) = \binom{3}{k} 0,2^k 0,8^{3-k}$ pro $k=0,1,2,3$

$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{3}{0} 0,2^0 0,8^3 = \underline{\underline{1-0,8^3}}$)

f) X... počet objednávek mezi pěti náhodně vybranými emaily

$X \sim Binom(5; 0,5)$, tj. $P(X=k) = \binom{5}{k} \underbrace{0,5^k 0,5^{5-k}}_{0,5^5 \text{ (pozn. :)}}$ pro $k=0,1,\dots,5$

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = \underline{\underline{1 - \left(\binom{5}{0} 0,5^0 0,5^5 + \binom{5}{1} 0,5^1 0,5^4\right) = 1 - 6 \cdot 0,5^5}}$$

g) $X_i = 1$, je-li i-tý otevřený email objednávka $\Rightarrow X_i \sim Alt(0,5) \Rightarrow$

$= 0$, není-li — " — — " — $\Rightarrow EX_i = 0,5, \; varX_i = 0,25$

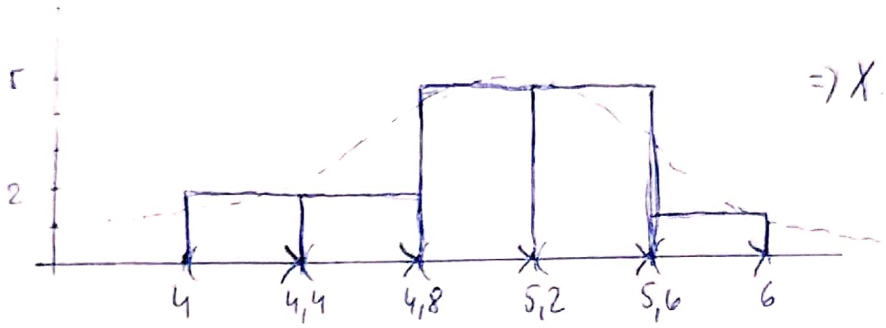
$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \ge 40\right) = P\left(\frac{\sum X_i - 100 \cdot 0,5}{\sqrt{100 \cdot 0,25}} \ge \frac{40 - 100 \cdot 0,5}{\sqrt{100 \cdot 0,25}}\right) =$$

$$= P(Z \ge -2) = 1 - P(Z \le -2) =$$

$$= 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = \underline{\underline{0,9772}}$$

(2)

a)



⇒ X ... čas k odehrání jednoho setu $\sim N(\mu, \sigma^2)$

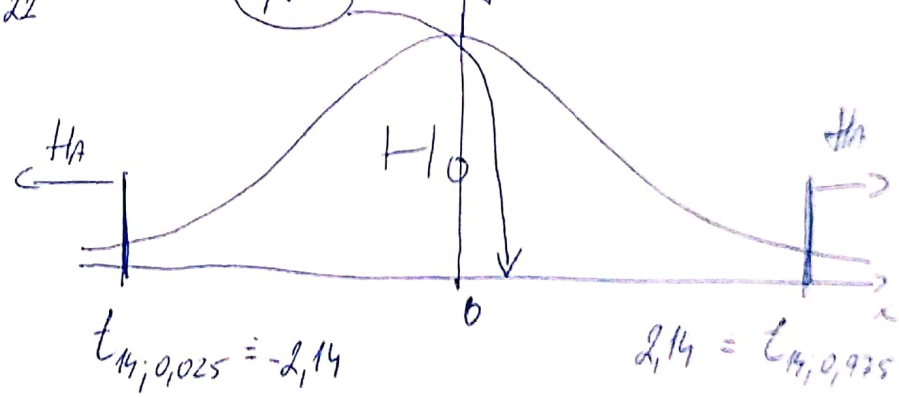
b) $\widehat{\mathbb{E}X} = \bar{X}_{15} = \frac{76,5}{15} = 5,1$ $\quad \widehat{var}X = S^2_{15} = \frac{3,14}{14} \doteq 0,22$

c) $H_0 : \mathbb{E}X = 5$

$H_A : \mathbb{E}X \neq 5$

$\alpha = 5\%$

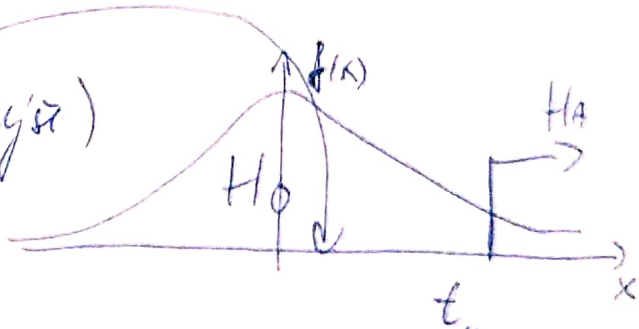
$T = \frac{5,1 - 5}{\sqrt{0,22}} \cdot \sqrt{15} \doteq 0,82$



⇒ H_0 nezamítáme ve prospěch $H_A : \mathbb{E}X \neq 5$ na hladině $\alpha = 5\%$

(PODR. H_0 $\mathbb{E}X = 5$
H_A $\mathbb{E}X > 5$
$\alpha = 5\%$

$T = 0,82$ (viz výš)



$t_{14;0,95} = 1,76$

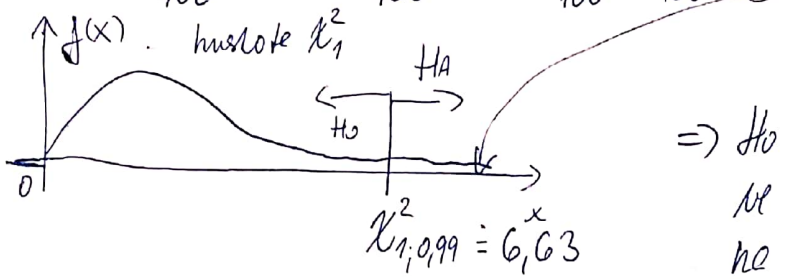
⇒ ani zde nezamítáme H_0, tentokrát ve prospěch H_A $\mathbb{E}X > 5$ na hladině $\alpha = 5\%$

(3) a) $H_0: p_P = p_V = \frac{1}{2}$, kde p_P, resp. p_V je pst, že náhodně vybrané jídlo (např. při kontrole účtenek) je bylo objednáno v poledne, resp. večer

$H_A: p_P \neq p_V$

$\alpha = 1\%$

$$\chi^2 = \frac{(120-100)^2}{100} + \frac{(80-100)^2}{100} = \frac{400}{100} + \frac{400}{100} = 8$$



$\Rightarrow$ H_0 zamítáme ve prospěch H_A na hladině $\alpha = 1\%$ (tedy zamítáme, že počty jsou přibližně stejné)

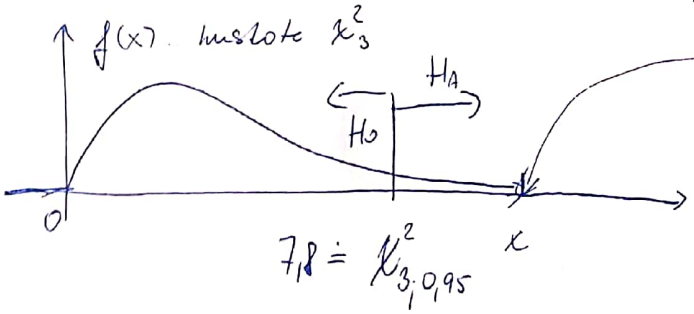
b) H_0: jídlo a denní doba jsou nezávislé

H_A: — " — nejsou — " —

$\alpha = 5\%$

$$\chi^2 = \frac{(40-\frac{120\cdot 50}{200})^2}{\frac{120\cdot 50}{200}\cdot\frac{30}{30}} + \frac{(40-\frac{30}{25})^2}{\frac{25}{30}} + \frac{(30-30)^2}{30} + \frac{(10-30)^2}{30} +$$

$$+ \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(40-20)^2}{20} = 50$$



$\Rightarrow$ H_0 zamítáme ve prospěch H_A na hladině $\alpha = 5\%$

c) Náhodná X... počet chuťovek mezi třemi večerními objednávkami

$X \sim Binom(3; \frac{40}{80}) = Binom(3; 0,5)$, tj. $P(X=k) = \binom{3}{k} 0,5^k 0,5^{3-k}$

pro $k = 0,1,2,3$ opět $0,5^3$

$$P(X=0) = \binom{3}{0} 0,5^3 = 0,5^3$$

d) $P(k/r) + P(v/h) + P(p/v) + P(ch) = 1 = p+\varepsilon + p+\varepsilon + p + p+2\varepsilon$

$1 = 4p \Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{4}$

$L(\varepsilon) = \left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)^{40} \cdot \left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)^{40} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{30} \left(\frac{1}{4}-2\varepsilon\right)^{10} = \left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)^{80} \left(\frac{1}{4}\right)^{30} \cdot \left(\frac{1}{4}-2\varepsilon\right)^{10}$

$\ell(\varepsilon) = \ln L(\varepsilon) = 80 \ln\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right) + 30 \ln\frac{1}{4} + 10 \ln\left(\frac{1}{4}-2\varepsilon\right)$

$\ell'(\varepsilon) = 80 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}+\varepsilon} + 0 + 10 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}-2\varepsilon} \cdot (-2) \Rightarrow \frac{80}{\frac{1}{4}+\varepsilon} = \frac{20}{\frac{1}{4}-2\varepsilon} \quad / \cdot \frac{(\frac{1}{4}+\varepsilon)\cdot(\frac{1}{4}-2\varepsilon)}{20}$

$1 - 8\varepsilon = \frac{1}{4} + \varepsilon$

$\frac{3}{4} = 9\varepsilon \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

ÚSTNÍ ČÁST:

(i) X a Y jsou nezávislé, jestliže $h(x,y) = f(x) \cdot g(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow h(x,y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}xy + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}$ pro $x \in (1,3)$ & $y \in (0,2)$

$= 0$ pro $x \notin (1,3)$ nebo $y \notin (0,2)$

(ii) Při sdružené hustotě $h(x,y)$ & (i) jsou X a Y nezávislé $\Rightarrow$ $cov(X,Y) = 0$

(iii) —— | | —— $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(X>2, Y<1) = P(X>2) \cdot P(Y<1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$