Zpracovaný otázky z Fyziky 2

Verze 2.0

146 zpracovanejch otázek + bonusový, Fyzika 2, zimní semestr 2016/17, přednášel Bednařík. Pokud najdete chybu, nebo vás napadne lepší řešení, případně vypracujete v LaTeXu samostatnou otázku, klidně mi to můžete poslat a postupně to vylepšit. Otázky jsem zpracoval z části z hecu, ale taky proto, že k předmětu vlastně nejsou žádný skripta.

☠ - značí smrtící otázku.

Vojta Illner
OES

---

1. Co je to termodynamická soustava, jaké termodynamické soustavy rozlišujeme

Jedná se o prostorově vymezený systém s nějakou hranicí, oddělující ho od okolí. Termodynamické systémy dělíme na

- izolované (s okolím se nic nevyměňuje)
- otevřené (opak izolovaného, např. živý organismus)
- uzavřené (vyměňuje jen energii)
- adiabatické (nevyměňuje se teplo)
- diatermické (vyměňuje se pouze teplo)

2. Čím se vyznačují intenzivní a extenzivní veličiny, jaký je rozdíl mezi stavovými a procesními veličinami?

Rozdělím termodynamický systém na dvě části - pokud se mi veličina v každé části změní je *extenzivní* (např. objem, vnitřní energie..). Pokud se nezmění (hustota, teplota), potom je *intenzivní*.

Stavové veličiny popisují stav systému a dají se dobře měřit ($T, V, P..$). Procesní se zabývají chováním systému. Záleží na jejich předchozích stavech (práce, teplo).

3.Jak zní I. a II. postulát termodynamiky? ☠

Pozor, nejsou to TD zákony ale postuláty!

1. Pokud na dostatečně dlouhou dobu izolujeme nějakou soustavu, sama přejde do rovnovážného stavu.
2. Stav homogenního systému je v rovnováze jednoznačně určen jeho souborem všech vnějších parametrů a jedním vnitřním (většinou teplota).

4. Jak je definován rovnovážný (kvazistatický děj), jaké termodynamické děje rozlišujeme?

Rovnovážný (kvazistatický) děj probíhá tak pomalu, že se jako soustava pořád nachází v rovnovážném stavu. Opak je děj nestatický.

Rozlišujeme děje izochorické, izotermické, izobarické, adiabatické.

5. Jak zní Nultý zákon termodynamiky? ☠

$$\boxed{A \odot B \wedge B \odot C \Rightarrow A \odot C}$$

Kde $\odot$ značí rovnováhu TS. Je to jakási tranzitivnost TD rovnováhy.

6. Jak je definována Celsiova a termodynamická (absolutní) teplotní stupnice?

Celsius - rovnovážný stav čisté vody a ledu za normálního tlaku je 0°C

- teplota varu vody (přeměna na páru) je 100°C

Kelvin - odvozen od trojného bodu vody (rovnovážný stav led-voda-pára), který odpovídá 273,16 K

7. Co je to vnitřní energie termodynamické soustavy?
Celkovou energii soustavy dělíme na:
$E_{celk} = E_{kyn} + E_{pot} + U$
Kynatická a potenciální jsou makroskopické formy energie, zato vnitřní, U, je mikroskopická forma, závisející např. na molekulové struktuře. Můžeme jí dělit na:
$U = E_k + E_p$
Kdy E_k souvisí s pohybem molekul vevnitř soustavy a E_p závisí na silách mezi nimi (gravitační, elmag..).

8. Jaké rozlišujeme mechanizmy přenosu energie. Co chápeme pod pojmem teplo?
Mechanismy přenosu energie jsou:

- hmotnostní tok
- koná se práce
- přenáší se teplo (vedením, prouděním či radiací)

Teplo je forma energie, která se přenáší mezi dvěma soustavami nebo mezi soustavou a jejím okolím jako důsledek jejich teplotního rozdílu.

9. Jak je definována objemová práce?

$$\boxed{\delta W = F\mathrm{d}s = P \cdot A\mathrm{d}s = P\mathrm{d}V}$$

dS značí posun pístu, P $= \dfrac{F}{A}$, kde A je plocha pístu.

10. Jak je definován ideální plyn? Napište stavovou rovnici ideálního plynu.
Vnitřní energie závisí jen na teplotě. Součin tlaku a objemu závisí taky jen na T.

$$\boxed{\frac{PV}{T} = konst \qquad \Rightarrow \qquad PV = nRT}$$

11. Napište I. zákon termodynamiky. Co je to kruhový děj?
První zákon TD (zachování energie). Teplo dodané soustavě se spotřebuje na zvýšení vnitřní energie a na práci soustavy.

$$\boxed{\begin{aligned} Q(\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}) = U(\mathrm{B}) - U(\mathrm{A}) + W(\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}) \\ Q = \triangle U + W \\ \delta Q = \mathrm{d}U + \delta W \end{aligned}}$$

Kruhový děj - soustava se vrací do bodu, ze kterého vyšla (vnitřní energie zůstává stejná).

12. Jak je definována tepelná kapacita? Napište Mayerův vztah. Napište kalorimetrickou rovnici.
Tepelná kapacita je definována jako množství tepla, které je potřeba na ohřátí soustavy o jeden stupeň.

$$\boxed{C = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}}$$

Měrná tepelná kapacita c - tepelná kapacita jednotkové hmotnosti látky [1 kg]. Platí vztah

$$C = mc$$

Molární tepelná kapacita c_m - tepelná kapacita na jednotku látkového množství [1 mol]. Platí

$$C = nc_m$$

Kde n je látkové množství. *Mayerův vztah* je

$$\boxed{c_p = c_V + R}$$

► Kde c_p a c_V jsou *molární tepelné konstanty* za stálého tlaku resp. objemu a R je *molární plynová konstanta.*
Kalorimetrická rovnice zní (ve stavu rovnováhy):

$$\boxed{m_1 c_1 (T_1 - T) = m_2 c_2 (T - T_2)}$$

Zde tedy n_1 a n_2 musí být logicky měrné tepelné kapacity.

13. Napište rovnici popisující I. termodynamický zákon pro ideální plyn.

$$\boxed{\delta Q = c_V \mathrm{d}T + P\mathrm{d}V}$$

14. Napište rovnici adiabaty.
Neboli také matematické vyjádření Poissonova zákona.

$$\boxed{PV^{\kappa} = \text{konst}}$$

15. Co chápeme pod pojmem tepelný stroj, cyklicky pracující tepelný stroj?
Tepelný stroj si s okolím vyměňuje pouze teplo a práci.
Cyklický - po vykonání celého cyklu se vrací do původního stavu

16. Napište Thomsonovu (Kelvinovu) formulaci II. termodynamického zákona.
Je nemožné odjímat cyklickým dějem jednomu tělesu teplo a beze zbytku jí přeměnit na práci.

17. Jak definujeme tepelný motor, čím jsou charakterizovány?
Tepelný motor převádí teplo na užitečnou práci. Pracuje cyklicky. Teplo mu dodává ohřívač a zbytkové teplo přijímá chladič.

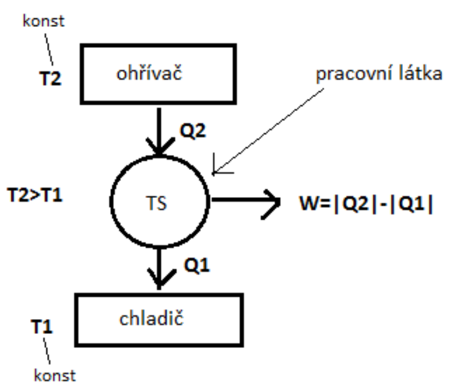
18. Jak je definována tepelná účinnost, nakreslete a popište principiální schéma tepelného motoru.

$$\eta = \frac{W}{|Q_2|}$$

Kde Q_2 je přivedené teplo z ohřívače. Pokud dosadíme za $W = |Q_2| - |Q_1|$:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_1|}{|Q_2|}$$

Vzhledem k tomu, že vždy $W < |Q_2|$ tak platí, že $\eta < 1$.

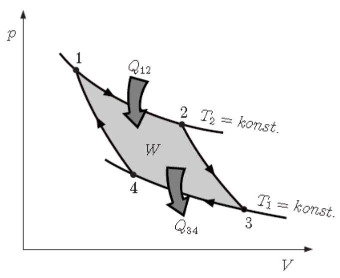


Obrázek 1: Schéma tepelného motoru

19. Popište Carnotův cyklus pomocí p-V diagramu.
Viz. obrázek 2

20. Napište vztah pro tepelnou účinnost ideálního tepelného motoru pracujícího na základě Carnotova cyklu.
Odvození možná jindy.

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}}$$



Obrázek 2: p-V diagram Carnotova cyklu

21. Napište znění Carnotových vět.

1. Mám dva tepelné stroje. Pokud jejich rezervoáry pracují na stejné teplotě, potom mají stejnou účinnost.
2. Účinnost vratného (ideálního) tep. stroje je vždy větší než účinnost nevratně pracujícího stroje, o stejných teplotách (nejde sestrojit perpetuum mobile druhého druhu).

22.Napište Clausiovu nerovnost.
Pro nevratný děj entropie vždy roste.
Odvodí se tak, že aproximujeme nějaký obecný vratný cyklus soustavou Carnotových cyklů.

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \frac{\delta Q}{T} \leq 0}$$

23.Napište matematický tvar I. termodynamického zákona pro vratné děje.
Platí $\mathrm{d}S = \dfrac{\delta Q}{T}$ tedy:

$$\boxed{\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - \delta W}$$

24. Jaké hodnoty nabývá entropie adiabaticky izolované soustavy?
Pro izolované soustavy entropie neklesá (Pro S platí •vratný děj - konst. •nevratný děj - roste).
Pokud je TS ve stavu nerovnováhy, budou probíhat nevratné děje a entropie roste. Pokud se dosáhne rovnováhy, bude hodnota entropie maximální. Nemůže klesnout, protože rovnovážný stav nepřejde sám od sebe do stavu nerovnovážného.

25. Napište znění III. termodynamického zákona. ☠
Žádným postupem nelze dosáhnout snížení T_{soustavy} při konečném počtu kroků na teplotu 0 K.

26.Co je to fáze, fázové rozhraní a skupenství?
Fáze je část soustavy, které je (pokud na ní nepůsobí vnější síly) fyzikálně a chemicky homogenní. Je oddělena *fázovým rozhraním. Skupenství* souvisí se stupněm uspořádanosti částic v soustavě a nemusí to být to samé jako fáze (např. grafit a diamant).

27. Jaké fázové přechody, skupenství a skupenské přeměny rozlišujeme?
Fázové přechody jsou:

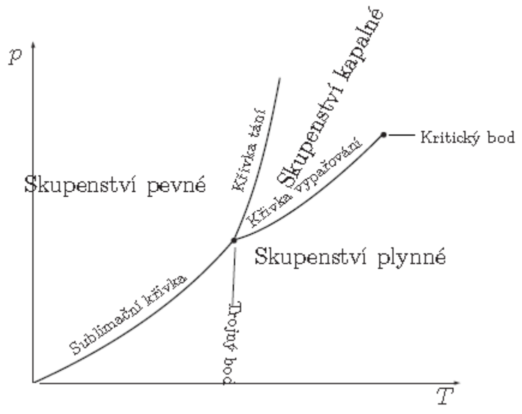
- 1. druhu - entropie a tzv. měrný objem ($v = \dfrac{1}{\rho}$) se mění skokem. Přijímá se nebo odevzdává teplo fázového přechodu. (např. změna skupenství).
- 2. druhu - Tady už se S a v mění spojitě. Příklad může být přechod železa z feromagnetického stavu do stavu paramagnetického.

28. Napište znění Clausiovy-Clapeyronovy rovnice.
Vztah mezi velikostí tepla fázového přechodu a změny objemu pro přechody 1. druhu.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}}$$

L je teplo fázového přechodu.

29. Nakreslete a popište fázový p-T diagram pro jednosložkovou soustavu.
Viz. obrázek 3



Obrázek 3: p-T fázový diagram

30.Jaké termodynamické potenciály rozlišujeme a jaké jsou vztahy mezi nimi?
• Vnitřní energie $\mathrm{d}U = \delta Q - \delta W$ • Entalpie $H = U + PV$

31. Napište Maxwellovy vztahy.
Jedná se o vztahy mezi termodynamickými parametry jednosložkového termodynamického systému s konstantním počtem částic, konajícího pouze objemovou práci.
Zaveďte si nějakou mnemotechnickou pomůcku!

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$$
$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

32.Napište postuláty kinetické teorie plynů.
1) *Látky kteréhokoliv skupenství se skládají z částic* (atomy, molekuly, ionty..).
Prostor, který zaujímá látka není beze zbytku vyplněn → struktura látky je nespojitá.
2) *Částice se v látkách neustále chaoticky pohybují* (pohyb posuvný, rotační nebo kmitavý). Hovoříme o *tepelném pohybu.*
Existuje ho několik typů, např. osmóza, difůze, transfůze nebo brownův pohyb.
3) *Částice látky libovolného skupenství na sebe vzájemně působí přitažlivými i odpudivými silami.* Jejich povaha je elektromagnetická.

33. Vysvětlete pojmy mikrostav, makrostav, fázový prostor, fázový objem makrostavu, konfigurační a impulzní prostor a jak je definován objemový element fázového prostoru.

Mikrostav - popisuje stav *všech* částic látky. Potřebuji tedy $6N$ veličin (N je počet částic, 3 zobecněné souřadnice $q_1q_2q_3$ a 3 zobecněné hybnosti $p_1p_2p_3$). V klasickém pojetí je v látce nekonečně mnoho mikrostavů.

Makrostav - Makroskopicky rozlišitelný stav, popisuji pomocí makroskopických veličin. Odpovídá velkému množství mikrostavů → čím je jich víc, tím je stav pravděpodobnější.

Fázový prostor - prostor o dimenzi $6N$, kde N je počet částic. Ve fázovém prostoru se jednotlivé mikrostavy (což je 6 veličin) zobrazí do jednoho bodu. Dostanu tak množinu bodů (mikrostavů). Pokud jich je hodně, můžou jednotlivé body representovat např. rozložení molekul v látce.

Fázový objem makrostavu - makrostav se, narozdíl od mikrostavu, zobrazí ve fázovém prostoru na *objem.* Fázový prostor dělíme na dva podprostory:

a) *Konfigurační* - jednozančně určuje *polohu* částic.

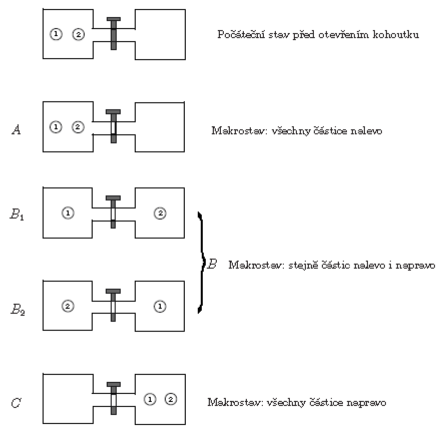
b) *Impulzní* - jednozančně určuje *pohybový stav* soustavy částic.

Fázový objem jde vyjádřit jako objemový integrál přes všechny souřadnice:

$$\Gamma = \int\int\cdots\int \underbrace{\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3\cdots\mathrm{d}q_N\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}p_3\cdots\mathrm{d}p_N}_{\mathrm{d}\Gamma}$$

Kde $\mathrm{d}\Gamma$ je objemový element fázového prostoru.

34. Jak je definována termodynamická rovnováha ve statistické termodynamice?
Rovnovážný stav - stav, kterému odpovídá největší množství mikrostavů (je nejpravděpodobnější). Princip je vidět na obrázku 4.



Obrázek 4: nádoba s plynem o dvou molekulách a odpovídající mikrostavy

35. Co je to mikrokanonický, kakonický a grandkanonický soubor?
(Bednařík na přednášce nedělal)

Mikrokanonický soubor - množina všech mikrostavů s hodnotami energie, objemu a počtu částic. Tento soubor popisuje izolovaný systém.

Kanonický - množina všech mikrostavů s hodnotami teploty, objemu a počtu částic. Popisuje izotermický a izochorický uzavřený systém (např rtuť v teploměru)

Grandkanonický - množina všech mikrostavů o hodnotách chemického potenciálu, objemu a teploty). Popisuje soustavu, která si s okolím vyměňuje energii a částice. (např sytá pára a pod ní kapalina, plnící funkci okolí (rezervoáru)).

36. Co nám vyjadřuje Ergodická hypotéza a Hypotéza apriorní pravděpodobnosti?
(Bednařík na přednášce nedělal)
Ergodická hypotéza - střední hodnota fyzikálních veličin v rovnovážném stavu, počítaná přes nějaký soubor se rovná *časové* střední hodnotě. (slouží ke zjednodušení výpočtů).

$$E(X)_s = E(X)_t$$

Hypotéza apriorní pravděpodobnosti - všechny dostupné mikrostavy se stejnou energií jsou stejně pravděpodobné.

37. Co plyne pro hustotu pravděpodobnosti z Liouvillova teorému?
Hustota pravděpodobnosti odpovídá hustotě bodů (reprezentující mikrostavy) ve fázovém prostoru. Pokud jich je hodně, lze na ně pohlížet jako na jednotlivé molekuly. A hustota pravděpodobnosti ρ popisuje i jejich hustotu.
Odvozením zjistíme, že ρ nezávisí na čase $\rightarrow$ bude tedy funkcí pouze konzervativních veličin. Ty známe v mechanice jen tři (mechanickou energii E, celkovou hybnost p, celkový moment sil L).
Vybereme takovou souřadnou soustavu, že $p = L = 0$. Takže platí, že *hustota pravděpodobnosti závisí pouze na celkové energii soustavy.*

$$\boxed{\rho = \rho(E)}$$

38. Čemu se rovná pravděpodobnost mikrostavu s energií E_i v případě mikrokanonického souboru?
Pravděpodobnost, že soustava je v mikrostavu s energií E_i a počet *všech* mikrostavů je Ω, platí:

$$\boxed{P(E_i) = \frac{1}{\Omega}}$$

39. Napište Boltzmannův vzorec pro entropii.
Mezi entropií S a logaritmem počtu všech mikrostavů je analogie

$$\boxed{S = \mathrm{k} \cdot \ln \Omega}$$

k je bolzmannova konstanta.

40. Jak zní Princip maxima entropie?
Pokud máme o rozdělení pravděpodobnosti jen částečné informace, tak nejpravděpodobnější rozdělení bude to, které má nejvyšší entropii.

41. Napište vztah vyjadřující Boltzmannovo rozdělení.
Pravděpodobnost, že soustava je v mikrostavu s energií E_i je:

$$\boxed{P(E_i) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_i}{kT}} \qquad Z = \sum_{i=1}^{N} e^{-\frac{E_i}{kT}}}$$

42. Napište vtah vyjadřující partiční funkci.
Jedná se o fukci Z z předchozí otázky.

$$\boxed{Z = \sum_{i=1}^{N} e^{-\frac{E_i}{kT}}}$$

43. Napište vztah popisující Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení rychlostí ideálního plynu.
Hustota pravděpodobnosti rychlostí je (pro v rychlost částice a m hmotnost částice):

$$\boxed{\rho(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}$$

44. Odvoďte nejpravděpodobnější a střední rychlost molekuly ideálního jednoatomového plynu.
Využiju předchozí vzorec pro hustotu pravděpodobnosti rychlosti částic. a) Nejpravděpodobnější střední rychlost bude tam, kde má graf rozdělení hustoty svoje maximum. b) střední rychlost je průměr velikostí rychlostí všech molekul plynu.

a) Nejpravděpodobnější rychlost. Vezmu M-B vzorec, zderivuji a položím nule.

$$\rho(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} + v^2\left(-\frac{2mv}{2kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\right)\right) = 0$$
$$4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v\left(2 - v^2 \frac{m}{kT}\right) = 0$$

Z toho vyplývá, že rovnici vyhoví $v_1 = 0$, to bude minimum a v_2, které vyhoví rovnici $v^2 \frac{m}{kT} = 2$. To bude hledané maximum, které tedy je:

$\boxed{v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}$ což se dá převést na tvar (M_n je molární hmotnost) $\boxed{v = \sqrt{\frac{2RT}{M_n}}}$

b) Střední rychlost. Spočteme jako integrál přes všechny možné rychlosti $(0 \cdots \infty)$ z ρv.

$$\overline{v} = \int_0^\infty \rho v \, \mathrm{d}x$$
$$a = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \quad b = \frac{m}{2kT}$$
$$\overline{v} = \int_0^\infty v^3 e^{-bv} \, \mathrm{d}v = \left| v^2 = t \to 2v\mathrm{d}v = \mathrm{d}t \right| = \frac{a}{2} \int_0^\infty t e^{-bt} \, \mathrm{d}t = (\text{per partes}) \left| u = t \to u' = 1, v' = e^{-bt} \to v = -\frac{1}{b} e^{-bt} \right|$$
$$= \frac{a}{2}\left(\underbrace{\left[\frac{t}{-b} e^{-bt}\right]_0^\infty}_{0} - \int_0^\infty \frac{1}{-b} e^{-bt} \, \mathrm{d}t \right) = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{b}\left[-\frac{1}{b} e^{-bt}\right]_0^\infty\right) = \frac{a}{2b^2}$$

Pokud nyní dosadíme za a a b, dostanu výsledný vztah

$$\boxed{\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_n}}}$$

45. Jak zní ekvipartiční teorém?
Obecně platí, že pokud má částice (atom) stupeň volnosti i, pro jeho energii platí:

$$\boxed{E = \frac{i}{2}kT}$$

Kde k je boltzmannova konstanta. Pomocí ekvipartičního teorému se odvodí i vzorec pro střední hodnotu kinetické energie atomu ideálního, jednoatomového plynu

$$\boxed{< \frac{1}{2}mv^2 >= \frac{3}{2}kT}$$

Z čehož vyplývá, že U je funkcí pouze teploty.
(protože pro ideální plyn platí $U = N < E_k >$ kde N je počet částic (atomů) a $< E_k >$ je střední hodnota kinetické energie částice. Je tomu tak proto, protože v ideálním plynu platí $E_k >> E_p$.)

---

46. Napište kanonický tvar třírozměrné a jednorozměrné vlnové rovnice.
Obecně pro třírozměrné vlny platí

$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

u značí vzruch, poruchu, změnu oproti klidovému stavu. c reprezentuje vlastnosti prostředí a má rozměr rychlosti. Pro jednorozměrný případ má rovnice tvar (pro x jako nějaká prostorová souřadnice)

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

47. Co je to profil vlny? Jak se mění profil vlny v nedisipativním a bezdisperzním prostředí pří šíření vlny?
$u = u(x,t)$. Pokud dám $t = 0$ dostanu $u(x) = f(x)$. $\boxed{f(x)}$ se nazývá *profil vlny.* Plní funkci počáteční podmínky vlnové funkce u.
Předpokládáme, že profil se v čase nemění. V nějakém čase t bude mít stejný tvar jako v $t = 0$. Platí tedy potom rovnice

$$\boxed{u(x,t) = f(x - ct)}$$

48. Napište tvar vlnové rovnice pro retardované časy.
Pokud mám $u(0,t) = F(t)$, tak $F(t)$ se nazývá *oscilogram vlny.* Ten nemění svůj průběh ve směru osy x, ale zpožďuje se o čas $\frac{x}{c}$. Výraz

$$\tau_+ = t - \tfrac{x}{c}$$

se nazývá retardovaný (~~downův~~)(zpožděný) čas. Plus tam je proto, že to platí v kladném směru x. Řešení vlnové rovnice pak je

$$\boxed{u(x,t) = F(t - \frac{x}{c}) + G(t + \frac{x}{c})}$$

49. Napište vlnovou rovnici pro kulové vlny spolu s jejím obecným řešením.
Kouli BÚNO posadíme do počátku souřadnicové soustavy. r je potom vzdálenost od počátku. Vlnová rovnice pak má tvar

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \text{ Nebo taky } \boxed{\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}} - \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial^2 (ru)}{\partial t^2} = 0$$

A řešení pak je

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r}}$$

50. Napište d‘Alambertovo řešení jednorozměrné vlnové rovnice.

$$\boxed{u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)}$$

Jedná se tedy o dvě postupné vlny, šířící se opačnými směry.

51. Jak je definována fáze vlny a fázová rychlost?
Argumenty funkcí f a g se nazývají fáze

$$u(x,t) = f(\overbrace{x - ct}^{\text{fáze}}) + g(\overbrace{x + ct}^{\text{fáze}})$$

Fázová rychlost odpovídá rychlosti šíření profilu vlny. Definuje se jako

$$v_f = \frac{\triangle x}{\triangle t}$$

Pro nekonečně malé změny

$$\boxed{v_f = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

V opačném směru osy x bude rychlost s opačným znaménkem. Od Křihy známý tvar $v_f = \frac{\omega}{k}$ je odvozen v otázce 64.

52. Napište tvar vlnové rovnice popisující šíření vlny pouze jedním směrem
Tvar rovnice bude (pro kladný směr na x)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} = 0}$$

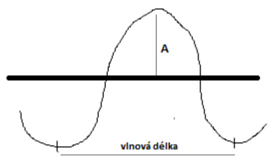
A řešení této rovnice je

$$u(x,t) = f(x - ct)$$

53. Jak je definována jednorozměrná harmonická vlna, vlnová délka, vlnové číslo, perioda, kmitočet a jaké vztahy platí mezi nimi?
1D harmonická vlna - ve všech bodech se mění harmonicky (popis pomocí cosinu a sinu). Pro řešení vlnové rovnice platí:

$$u(x,t) = A\cos[\overbrace{k(x - ct) + \delta}^{\text{fáze}}]$$

A je *amplituda*. k je *vlnové číslo*. δ je *klidová fáze*. Platí vztahy:



Obrázek 5: Krásně nakreslený obrázek pro amplitudu a vlnovou délku

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}} \qquad T = \frac{2\pi}{kc} \qquad kc = \omega \qquad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}$$

T je *perioda*, ω je *kruhový kmitočet* a ν je *frekvence*. Řešení pak můžu přepsat jako

$$u(x,t) = Acos[kx - \omega t + \delta]$$

54. Napište komplexní reprezentaci jednorozměrné harmonické vlny.
Využiju eulerův vzorec: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$. Stříška značí, že se jedná o obecně komplexní veličinu.

$$\hat{u}\ (x,t) = \hat{A}e^{j(kx - \omega t)}$$

Kde $\hat{A}$=$Ae^{j\delta}$. Reálné řešení rovnice pak je

$$\boxed{u(x,t) = \mathrm{Re}[\hat{A}e^{j(kx - \omega t)}]}$$

55. Jak je definována rovinná vlna? Co je to vlnoplocha?
Rovinná vlna - vlnoplocha je rovina.
Vlnoplocha - místa bodů, v nichž má fáze stejnou (konstantní) hodnotu. Rovnice rovinné vlnoplochy je $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = \text{konst.}$

56. Napište obecný tvar řešení vlnové rovnice pro rovinné vlny.
Pro polohový vektor $\mathbf{r}$ a vlnový vektor $\mathbf{k}$ je řešení vlnové rovnice

$$\boxed{u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - ct) + g(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} + ct)}$$

57. Napište obecný tvar řešení vlnové rovnice pro harmonické rovinné vlny.
Obecně:

$$\boxed{u(\mathbf{r}, t) = A\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta)}$$

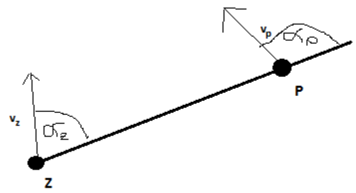
Komplexní notace:

$$u(\mathbf{r}, t) = \hat{A}e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

Pro 1D případ:

$$u(x, t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

58. Napište vztahy popisující Dopplerův jev.
Pro kruhový kmitočet pozorovatele (viz obr 6)



Obrázek 6: Názorný obrázek k této otázce

$$\boxed{\omega_p = \omega_z \left(\frac{c - \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{k}_0}{c - \mathbf{v}_z \cdot \mathbf{k}_0}\right) = \omega_z \left(\frac{c - v_p \cos\alpha_p}{c - v_z \cos\alpha_z}\right)}$$

59. Jak definujeme disperzi, co jsou to disperzní relace a disperzní rovnice?.
Disperze (obecně) - fázová rychlost vlny je závislá na její frekvenci. (disperze způsobí např lom světla na hranolu díky rozdílné vlnové délce barev).

$$\boxed{D(\omega, k) = 0} \quad \textit{disperzní relace}$$

A musí tedy platit:

$$\boxed{\omega = \omega(k)} \quad \boxed{k = k(\omega)}$$

k je vlnové číslo a ω je kruhový kmitočet. Disperze závisí jenom na vlastnosti prostředí.

60. Jak definujeme kvaziharmonickou vlnu?
Kvaziharmonická vlna je obecně vlnový balík (grupa). Skládá se z více harmonických postupných vln různých frekvencí.

61. Napište vztah popisující šíření kvaziharmonické vlny.

$$\boxed{u(x, t) = f(t - \frac{x}{v_g})e^{j(k(x - v_f t))}}$$

62. Jak je definována grupová rychlost?
Grupová rychlost popisuje šíření "balíku" vln (envelope). Definovaná je jako

$$\boxed{v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}}$$

63. Jakou rychlostí se šíří kvaziharmonická vlna? Jakou rychlostí se šíří energie kvaziharmonické vlny (vlnového balíku)?
Kvaziharmonická vlna (vlnový balík, grupa), se šíří grupovou rychlostí, stejně tak jako energie vlny.

64. Odvoďte vztah mezi grupovou a fázovou rychlostí.
Nejdřív odvodím vztah pro fázovou rychlost. Vyjdu z rovnice vlnoplochy pro 1D.

$$kx - \omega t = \text{konst}$$

Tohle *zdiferencuju*

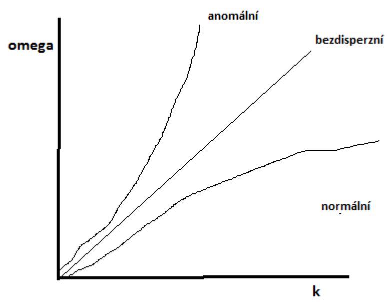
$$k\,\mathrm{d}x - \omega\,\mathrm{d}t = 0$$

$$v_f = \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \tfrac{\omega}{k}$$

Nyní to dosadím do definice grupové rychlosti

$$v_g = \tfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \tfrac{\mathrm{d}(v_f k)}{\mathrm{d}k} = \boxed{v_f + \frac{\mathrm{d}v_f}{\mathrm{d}k}k = \text{konst}}$$

65. Jak je definována normální a anomální disperze?
Pro normální dispezi platí, že grupová rychlost je menší než fázová. Pro anomální je tomu naopak. Když se rovnají, je prostředí bezdisperzní. Nakreslil jsem k tomu krásný obrázek 7.



Obrázek 7: Dobře čitelný graf k problematice disperze

66. Jak souvisí komplexní vlnové číslo, resp. komplexní kmitočet, s disipací energie vlnění?
Označím si vlnové číslo jako $k = \alpha + j\beta$ a dosadím do vlnové rovnice pro harmonickou rovinnou vlnu $u(r,t) = \hat{A}e^{j(kr-\omega t)}$.

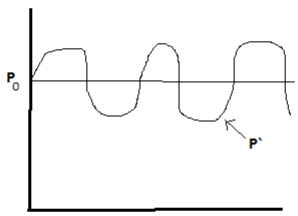
$$u(r,t) = \hat{A}e^{j(\alpha r + j\beta r - \omega t)}$$
$$u(r,t) = \hat{A}e^{-\beta r}e^{j(\alpha r - \omega t)}$$

Z čeho je vidět, že jak vlna postupuje dál a zvětšuje se r, bude se amplituda vlny více a více zatlumovat, díky záporné exponenciále.

67. Jak je definován akustický tlak, akustická rychlost. Jak se počítá hladina akustického tlaku?
Pro celkový tlak platí

$$P = P_0 + \grave{P}$$

Kde P je tlak prostředí (atmosférický) a $\grave{P}$ je akustický tlak. Ten souvisí se změnami tlaku při zřeďování a zhušťování prostředí. Akustický tlak se *superponuje* na atmosférický. V praxi to vypadá jako na obr 8.



Obrázek 8: Superponace akustického tlaku na atmosférický

Akustická rychlost **v** - vlivem zhušťování a zřeďování prostředí (šíření vzruchu) začnou částice kmitat kolem své rovnovážné polohy. Rychlost kmitání je ona **v**. Platí, že $|\mathbf{v}| << c$.
Hladina akustického tlaku je zavedena jako

$$\boxed{L_p = 20\log\frac{\grave{P}}{P_0} \quad [\mathrm{dB}]}$$

P_0 má hodnotu $2 \cdot 10^{-5}$ Pa.

68. Odvoďte vlnovou rovnici pro akustický tlak a akustickou rychlost.
Vyjdu ze 3 rovnic:

- $$\rho\Big[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\Big] = -\nabla P \quad \text{(stavová rovnice id. kapaliny)} \tag{1}$$
- $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad \text{(rovnice kontinuity)} \tag{2}$$
- $$P = P(\rho) \tag{3}$$

Dále víme, že platí vztahy

$$P = P_0 + \grave{P} \quad \rho = \rho_0 + \grave{\rho}$$
$$\left|\frac{\grave{P}}{P_0}\right| << 1 \quad \left|\frac{\grave{\rho}}{\rho_0}\right| << 1 \quad \left|\frac{v}{c_0}\right| << 1$$

To nám umožní linearizovat rovnice 1, 2 a 3:

$$\rho_0\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\grave{P} \tag{4}$$

$$\frac{\partial\grave{\rho}}{\partial t} + \rho_0\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{5}$$

$$P = P(\rho) \quad ??$$

Vezmeme si na paškál poslední rovnici. Provedeme si jisté zjednodušení. Bereme, že prostředí je ideální plyn a že akustická částice kmitá rychle a nevyměňuje si teplo. Jedná se tedy o adiabatický děj. Využiji tedy rovnici adiabaty:

$$PV^\gamma = P_0V_0^\gamma \to \frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \to \frac{P}{P_0} = \big(\frac{\rho}{\rho_0}\big)^\gamma \tag{6}$$

Nyní rozvedu taylorovým rozvojem rovnici 3

$$P = \overbrace{P(\rho_0)}^{P_0} + \big(\tfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\big)_{\rho_0}\overbrace{(\rho-\rho_0)}^{\grave{\rho}} + \tfrac{1}{2!}\tfrac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}\rho^2}(\rho-\rho_0)^2 \approx P_0 + \big(\tfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\big)_{\rho_0}\grave{\rho}$$

$$\to P - P_0 = \grave{P} = \big(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\big)_{\rho_0}\grave{\rho} \tag{7}$$

Dolní index ρ_0 znamená, že za ρ pak kvůli aproximaci budu dosazovat jen ρ_0. Nyní si za člen $\big(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\big)_{\rho_0}$ z poslední rovnice dosadím P rovnice 6.

$$\big(\tfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\big)_{\rho_0} = \big(\tfrac{P_0\gamma}{\rho_0^\gamma}\rho^{\gamma-1}\big)_{\rho_0} = \big(\tfrac{P_0\gamma}{\rho_0}\big(\tfrac{\rho}{\rho_0}\big)^{\gamma-1}\big)_{\rho_0} = \text{dosadím za } \rho\ \rho_0 \ = \tfrac{P_0\gamma}{\rho_0}$$

Výsledný výraz má rozměr rychlosti na druhou, tedy

$$c_0^2 = \frac{P_0\gamma}{\rho_0} \tag{8}$$

A výsledná linearizovaná rovnice 3 má tvar

$$\grave{P} = c_0^2\grave{\rho} \tag{9}$$

Z rovnice 9 dosadím výraz $\grave{\rho} = \frac{\grave{P}}{c_0^2}$ do rovnice 5. Dostanu

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\grave{P}}{\partial t} + \rho_0\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \to \nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{-1}{\rho_0c_0^2}\frac{\partial\grave{P}}{\partial t} \tag{10}$$

Tento výraz se nám bude hodit. Zdiverguji totiž rovnici 4. Po uplatnění operace mám

$$\rho_0 \frac{\partial(\nabla\cdot\mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla^2 \grave{P}$$

Když si za $\nabla\cdot\mathbf{v}$ dosadím z rovnice 10:

$$\frac{-\rho_0}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial^2 \grave{P}}{\partial t^2} = -\nabla^2 \grave{P}$$

Což je *vlnová rovnice pro akustický tlak*:

$$\boxed{\nabla^2 \grave{P} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \grave{P}}{\partial t^2}}$$

Nyní odvodíme vlnovou rovnici pro akustickou rychlost. Vezmu si rovnici 4

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \grave{P}$$

A tu zderivuji podle času

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -\nabla \frac{\partial \grave{P}}{\partial t} \tag{11}$$

Teď využiju první výraz v řádku 10 a upravím ho.

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \grave{P}}{\partial t} + \rho_0 \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial \grave{P}}{\partial t} = -\rho_0 c_0^2 \nabla\cdot\mathbf{v}$$

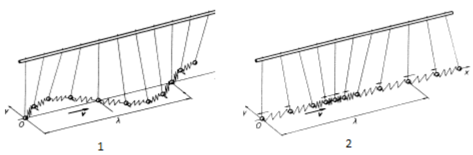
A toto dosadím do rovnice 11, takže mám

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \rho_0 c_0^2 \nabla^2 \cdot \mathbf{v}$$

Dostal jsem *vlnovou rovnici pro akustickou rychlost.* Uf

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{v} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}}$$

69. Jaký je rozdíl mezi podélnou a příčnou akustickou vlnou? Jaký typ akustické vlny se šíří v tekutinách?
Podélné vlnění - molekuly (částice) vlivem vlny kmitají kolem své střední hodnoty *ve směru* vlny.
Příčné vlnění - molekuly (částice) vlivem vlny kmitají kolem své střední hodnoty *kolmo* na směr vlny.
Příčné vlnění se vyskytuje pouze v pevných látkách nebo na hladině kapalin. Zvuk se šíří *podélně*, v některých pevných látkách se může šířit i příčně.
Viz obrázek 9.



Obrázek 9: Příčné a podélné vlnění

70. Odvoďte z Maxwellových rovnic telegrafní rovnice pro intenzitu elektrického pole a pro vektor magnetické indukce. Za jakých podmínek přejde telegrafní vlnová rovnice v kanonickou vlnovou rovnici?
Budeme se nacházet v dobře vodivém prostředí. Nejdříve chceme ukázat, že v maxwellových rovnicích, ze kterých budeme vycházet, nemusíme uvažovat volný náboj.
Vyjdu z následujících tří rovnic:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{12}$$

ρ je hustota volného nábojem, ϵ je permitivita.

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0 \tag{13}$$

Rovnice kontinuity elektrického náboje. $\mathbf{j}$ je proudová hustota.

$$\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E} \tag{14}$$

Ohmův zákon v diferenciálním tvaru. γ je měrná elektrická vodivost.

Z rovnice 14 si dosadím za $\mathbf{j}$ do 13.

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \gamma\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$$

Sem si dosadím za $\nabla \cdot \mathbf{E}$ z rovnice 12.

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \gamma\frac{\rho}{\varepsilon} = 0$$

Dostávám jednoduchou diferenciální rovnici. Zavzpomínáme na hodiny s Habalou a vyřešíme, např. separací.

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\gamma\frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho = -\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathrm{d}t$$
$$\int \frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho = \int -\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathrm{d}t$$
$$\ln\rho = -\frac{\gamma}{\varepsilon}t + C$$
$$e^{\ln\rho} = \rho = e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t+C}$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t} \tag{15}$$

ρ_0 je počáteční podmínka, určuje $\rho(t=0)$. Víme, že bude platit následující:

$$\begin{array}{ll} \gamma >> 1 & \text{(jsme v dobře vodivém prostředí)} \\ & \varepsilon << 1 \\ \longrightarrow & \frac{\gamma}{\varepsilon} >>>>>> 1 \end{array}$$

Když se podíváme na tvar rovnice 15 vidíme, že ρ bude hodně malé. Můžeme tedy prohlásit, že při řešení *nemusíme vůbec uvažovat volný náboj ve vodiči.* Maxwellovy rovnice pak mají následující tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{16}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{17}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{18}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \underbrace{\gamma\mathbf{E}}_{\mathbf{j}} + \varepsilon\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{19}$$

a) Rovnici pro intenzitu dostanu tak, že 19 zderivuju podle času.

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu\gamma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Dosadím z rovnice 18 za derivaci $\mathbf{B}$.

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \mu\gamma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Nyní uplatním identitu:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{20}$$

Takže dostanu:

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \nabla^2\mathbf{E} = \mu\gamma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Ale podle 16 je $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, takže mám finální tvar.

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu\gamma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{21}$$

b) Teď potřebuju rovnici pro $\mathbf{B}$. Začnu tak, že zrotuju opět rovnici 19.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu\gamma(\nabla \times \mathbf{E}) + \varepsilon\mu\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t}$$

Uplatním nám již známou identitu 20 na člen na levé straně. Za $\nabla \times \mathbf{E}$ dosadím z rovnice 18.

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B} = -\mu\gamma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Zase vidíme, že první člen na levé straně bude podle 17 nulový. Dostanu tedy hledanou rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{22}$$

Vlnové rovnice by však měly obsahovat rychlost vlny. Ta je v našem případě rychlost světla $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$. Pokud tedy dosadím c do rovnic 21 a 22, dostanu hledané *telegrafní rovnice*:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}}$$
$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{B} = \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}}$$

Tyto rovnice přejdou v kanonickou vlnovou rovnici pokud $\mu <<< 1$, takže první člen na pravé straně bychom mohli zanedbat. To by platilo v nevodivém prostředí.

71. Odvoďte disperzní relaci elektromagnetické vlny šířící se vodivým prostředím.
Obecná vlna je složená z rovinných vln tvaru $e^{j(kx-\omega t)}$. Pokud to dosadíme do telegrafní rovnice pro $\mathbf{E}$, dostanu následující disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2k^2 - jc^2\mu\gamma\omega$$

ω je kmitočet vlny, k je vlnové číslo, c rychlost světla, μ je permeabilita a γ je měrná elektrická vodivost. Vyjádřím si k:

$$-k^2 = -j\mu\gamma\omega - \frac{\omega^2}{c^2}$$
$$-k^2c^2 = -j\mu\gamma\omega c^2 - \omega^2$$

Pokud jsme v dobrém vodiči, bude vodivost μ hodně vysoká a na pravé straně rovnice převáží první člen. ω^2 tedy v rovnici zanedbáme a dostaneme:

$$-k^2c^2 \approx -j\mu\gamma\omega c^2$$
$$k^2 = j\mu\gamma\omega$$
$$k = \sqrt{j\mu\gamma\omega}$$

Pro komplexní jednotku platí $\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$.

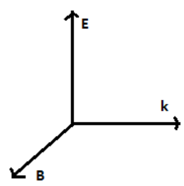
$$\boxed{k = \sqrt{\frac{\mu\gamma\omega}{2}} + j\sqrt{\frac{\mu\gamma\omega}{2}} = \alpha + j\beta}$$

Vidíme, že ve vodivém prostředí je k vždycky komplexní, což znamená, že se vlna bude zatlumovat.

72. Napište vztah mezi intenzitou elektrického pole, vektorem magnetické indukce a jednotkovým vektorem šíření rovinné elektromagnetické vlny. Graficky tento vztah znázorněte.
Z Maxwellových rovnic se odvodí vztah (odvození je provedeno na konci v bonusové části, protože to je taky jedna z otázek, co bývá u zkoušky).

$$\boxed{\frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{B}}$$

Z toho vyplývá, že veličiny $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ jsou na sebe navzájem kolmé a tvoří pravotočivou soustavu. Viz 10.



Obrázek 10: Pravotočivá soustava veličin $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$.

73. Je rovinná elektromagnetická vlna vlnou podélnou či příčnou? Napište vztah, ze kterého plyne odpověď na tuto otázku.
Co jsou to podélné a příčné vlny viz otázka 69.
Elektromagnetické vlny jsou vždycky vlny *příčné*. Plyne to z faktu, že obě pole ($\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$) jsou kolmé na směr šíření vlny, což víme ze vztahu

$$\frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{B}$$

74. Čemu se rovná index lomu pro nemagnetická prostředí?
Pro index lomu n platí

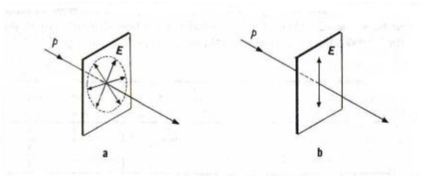
$$n = \frac{c_0}{c}.$$

Kde $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ a $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$. Dostanu tedy

$$n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}}$$

Pro nemagnetická prostředí je $\varepsilon_r = 1$, tedy $\boxed{n = \sqrt{\mu_r}}$.

75. Co chápeme pod pojmem polarizace vlny? Jaké druhy polarizace rozeznáváme?
Pokud vytvoříme rovinu kolmou na směr šíření vlny, vektor $\mathbf{E}$ bude mít pro promítnutí do roviny úplně náhodné směry. Taková vlna je *nepolarizovaná*. Pokud má stále stejný směr, mluvíme o *polarizované* vlně. Viz obrázek 11.



Obrázek 11: Nepolarizovaná a polarizovaná vlna

Polarizace může být:
- Eliptická
- Lineární
- Kruhová

Tvar polarizace bychom viděli, kdybychom se na vlnu koukali ve směru šíření.

76. Napište polarizační rovnici a podmínky pro jednotlivé druhy polarizace.
Necháme vlnu šířit do směru $\mathbf{z_0}$. Vektor $\mathbf{E}$ rozdělíme na dvě složky E_x a E_y. Obecně bude platit polarizační rovnice

$$\boxed{\left(\frac{E_\mathrm{x}}{E_\mathrm{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_\mathrm{y}}{E_\mathrm{y0}}\right)^2 - 2\frac{E_\mathrm{x}E_\mathrm{y}}{E_\mathrm{x0}E_\mathrm{y0}}\cos\alpha = \sin^2\alpha}$$

Což je *eliptická polarizace.*
Co je úhel α? Pokud vlnu rozdělím do dvou složek, budou mít tvar

$$E_\mathrm{x} = E_\mathrm{x0}\cos(kx - \omega t + \delta_1)$$
$$E_\mathrm{y} = E_\mathrm{y0}\cos(kx - \omega t + \delta_2)$$

Kde δ_1 a δ_2 jsou počáteční fáze. Pokud si označím $\varphi = kx - \omega t + \delta_1$ a $\alpha = \delta_2 - \delta_1$, dostanu

$$E_\mathrm{x} = E_\mathrm{x0}\cos(\varphi)$$
$$E_\mathrm{y} = E_\mathrm{y0}\cos(\varphi + \alpha)$$

Čili α značí vzájemný fázový rozdíl mezi oběma složkami intenzity.
Pokud by platilo $\alpha = n\pi$, rovnice se zredukuje a složky $\mathbf{E}$ budou:

$$E_\mathrm{x} = \frac{E_\mathrm{y0}}{E_\mathrm{x0}}E_\mathrm{y}$$
$$E_\mathrm{y} = -\frac{E_\mathrm{y0}}{E_\mathrm{x0}}E_\mathrm{x}$$

Což jsou rovnice přímek. Jedná se tedy o *lineární polarizaci.*
Pokud by platilo $\alpha = (2n+1)\pi$, bude mít rovnice tvar

$$\left(\frac{E_\mathrm{x}}{E_\mathrm{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_\mathrm{y}}{E_\mathrm{y0}}\right)^2 = 1 \qquad (E_\mathrm{x0} = E_\mathrm{y0})$$

Což je rovnice kružnice a jedná se tedy o *kruhovou polarizaci.*

77. Co chápeme pod pojmem interference vlnění? Jak je definována intenzita světla?.
Interference vlnění - skládání jednotlivých vln.
Intenzita světla I je definovaná jako časová střední hodnota velikosti poyntingova vektoru $\mathbf{S}$.

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$I = < |\mathbf{S}| >$$

78. Napište vztah pro intenzitu světla dvou rovinných lineárně polarizovaných harmonických vln s časově proměnnou počáteční fází. Dále ukažte, jak se redukuje tento vztah pro zcela koherentní a zcela nekoherentní vlny. Co chápeme pod pojmem koherence vlnění?

Pokud mám dvě rovinné, lineárně polarizované a harmonické vlny o intenzitách světla I_1 a I_2, pro výslednou intenzitu obou vln platí:

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\alpha\cos[(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r} + \varphi_2(t) - \varphi_1(t)]}$$

Kde $\mathbf{k}_1$ a $\mathbf{k}_2$ jsou příslušná vlnová čísla a $\mathbf{r}$ je polohový vektor. α je úhel mezi složkami elektrické intenzity těch dvou vln. φ_1 a φ_2 značí počáteční fázi vlny, která je nyní závislá na čase (souvisí s tím, že vyzařování ze zdroje je nespojité - jsou to pulzy).

Pokud bych chtěl střední hodnotu I (časovou), tak stačí udělat střední hodnotu ve výrazu v posledním cosinu, protože ten jediný záleží na čase a ostatní jsou konstanty.

Pro extrémní případy vln platí:

a) Vzájemně nijak nesouvisející vlny se nazývají *nekoherentní.* Znamená to, že $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ se mi nezávisle mění a všechny různé konfigurace jsou stejně pravděpodobné - časová střední hodnota je nulová. Nula mi vymaže celý člen úplně v pravo a má vztah

$$\boxed{I = I_1 + I_2}$$

Tedy nedochází k vůbec žádné interferenci.

b) Pokud jsou vlny naopak *zcela koherentní*, platí, že $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$.

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\alpha\cos[(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}]}$$

Koherence vlnění - vzájemná souvislost fáze a amplitudy dvou vlnění. Buď vychází ze dvou různých míst zářícího tělesa, nebo ze stejného místa, ale z časovým odstupem.

79. Nalezněte podmínky pro maxima a minima při interferenci dvou shodně polarizovaných vln mající stejnou amplitudu.

Pokud si označím s *geometrickou dráhu*, kterou vlna vykoná (vzdálenost), můžu přepsat vztah pro intenzitu dvou vln následovně (s ohledem na podmínky v otázce)

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\alpha\cos[k\underbrace{(s_2 - s_1)}_{\triangle s}]$$

Zavedu si ještě zjednodušující předpoklady $I_1 = I_2 = I_0$ a $\cos\alpha = 0$. Mám potom tvar

$$I = I_0 + I_0 + 2I_0\cos 0\cos(k\triangle s) = 2I_0[1+\cos(k\triangle s)] = 4I_0\cos^2\left(\tfrac{k\triangle s}{2}\right)$$

Teď budu hledat maxima a minima tohoto výrazu. Platí (pro $m = 0, 1, 2, 3\dots$)

$$4I_0\cos^2\left(\frac{k\triangle s}{2}\right) = \begin{cases} 1 \quad \frac{k\triangle s}{2} = m\pi \quad \triangle s = \frac{2m\pi}{k} \quad \rightarrow \quad \boxed{\triangle s = m\lambda} \text{ - maximum} \\ 0 \quad \frac{k\triangle s}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad \triangle s = \frac{(2m+1)\pi}{k} \quad \rightarrow \quad \boxed{\triangle s = (2m+1)\lambda} \text{ - minimum} \end{cases}$$

U šipky jsme použili vztahu, že $k = 2\pi/\lambda$.

80. Co chápeme pod pojmem koherenční délka. Napište vztah pro koherenční délku a jaká musí být splněna podmínka pro dráhový rozdíl, aby bylo možné považovat dvě vlny ještě za koherentní.

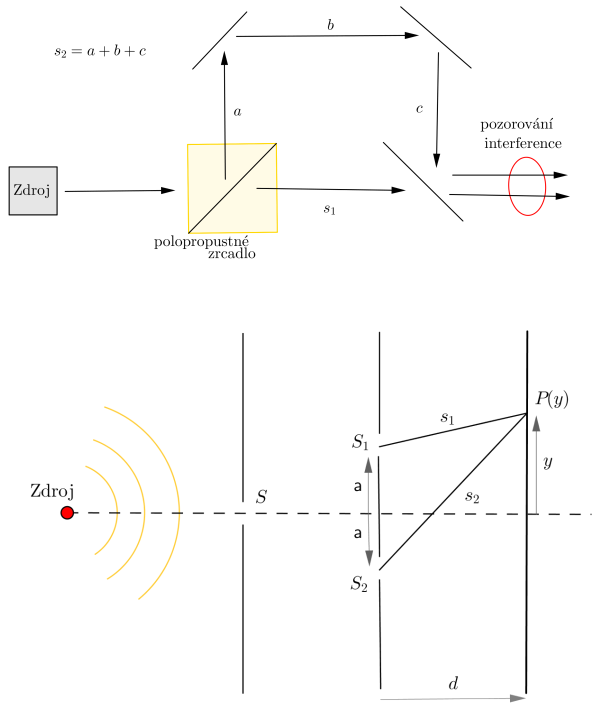
Koherentní délka l_c je vzdálenost, jakou urazí vlna za nějaký určitý čas τ_c, který značí dobu, za kterou se ze zdroje vyšle další impulz. Pokud má vlna rychlost c, platí tedy

$$\boxed{l_c = c\tau_c}$$

Podmínka, abych mohl pozorovat koherenci je, aby se za dobu, co světlo běží po delší dráze nevyslal další impulz, který už s původním nebude koherentní. Tedy

$$\boxed{\triangle s < l_c}$$

$\triangle s$ je rozdíl geometrických drah (viz obrázek).



Obrázek 12: Schéma Youngova pokusu

81. Nakreslete obrázek, který schematicky popisuje Youngův pokus. Odvoďte podmínky pro interferenční maxima a minima u interferenčního obrazce pozorovaného u Youngova pokusu.
Schéma Youngova pokusu je na obrázku. Mám nějaký zdroj světla (např. termický) a soustavu dvou zábran se štěrbinami. Bude mě zajímat, co uvidím v obecném bodě P(y) na stínítku.

s_1 a s_2 značí geometrické dráhy světla od průchodu štěrbinami. Pro ně bude platit (pythagoras)

$$s_1 = \sqrt{d^2 + (y-a)^2} = d\sqrt{1 + (\frac{y-a}{d})^2}$$

$$s_2 = \sqrt{d^2 + (y+a)^2} = d\sqrt{1 + (\frac{y+a}{d})^2}$$

Za předpokladu, že vzdálenost stínítek je mnohem větší než y a a, neboli $\frac{y+a}{d} << 1$, je možné aproximovat odmocninu následovně

$$s_1 \approx d\big(1 + \frac{1}{2}(\frac{y-a}{d})^2\big)$$

$$s_2 \approx d\big(1 + \frac{1}{2}(\frac{y+a}{d})^2\big)$$

V podmínce pro maxima a minima intenzity světla mi ale figuruje *dráhový rozdíl*, ten je v tomto případě

$$\triangle s = s_2 - s_1 = \frac{(y+a)^2}{2d} - \frac{(y-a)^2}{2d} = \frac{y^2 + 2ay + a^2 - y^2 + 2ay - a^2}{2d} = \frac{2a}{d}y$$

Pro jednotlivé extrémní případy platí:

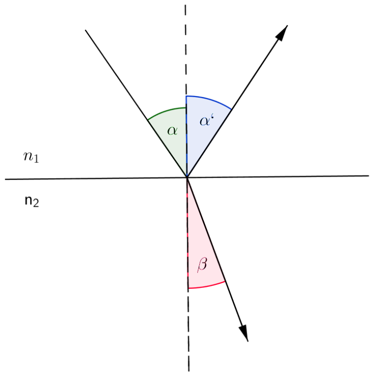
a) **Maxima** - z otázky 79 víme, že maximum nastane, pokud pro dráhový rozdíl dvou vln platí $\triangle s = m\lambda$. Tedy zde

$$\frac{2a}{d}y = m\lambda \quad \rightarrow \quad \boxed{y_{\max} = \frac{md}{2a}\lambda}$$

b) **Minima** - pro minima je dráhový rozdíl roven (viz. 79) $\triangle s = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$. Takže zde

$$\frac{2a}{d}y = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{y_{\min} = \frac{(2m+1)d}{a}\frac{\lambda}{4}}$$

Pro $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$



Obrázek 13: Zákon odrazu a lomu

82. Napište zákon odrazu a zákon lomu pro vlnu.

$$\boxed{\alpha = \alpha'}$$

Zákon odrazu

$$\boxed{n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta}$$

Zákon lomu (snellův)

83. Co nám vyjadřují Fresnelovy vzorce? Napište vztah pro výpočet Brewsterův úhlu. Co se stane se světlem dopadající na rozhraní dvou dielektrik pod Brewsterovým úhlem?
Fresnelovy vzorce (v otázce je naštěstí nechce přesně napsat) popisují koeficienty odrazivosti a propustnosti při šíření elektromagnetického záření na rozhraní dvou prostředí. Vycházejí z okrajových podmínek na rozhraní dvou prostředí a ukazují závislost odrazu a lomu na polarizaci záření. Koeficienty určují poměr intenzity světla odraženého a dopadajícího paprsku.
Brewsterův úhel je

$$\boxed{\alpha_{\mathrm{B}} = \arg\tan\frac{n_2}{n_1}} \qquad \text{pro} \quad n_1 < n_2$$

Pokud vlna dopadá přesně pod tímto úhlem, všechno polarizované světlo prochází do druhého prostředí bez jakéhokoliv odrazu. Pokud se jedná o nepolarizované světlo, bude odražená složka dokonale polarizovaná.

84. Odvoďte podmínku pro totální odraz.
Bude se jednat o případ, kdy paprsek, dopadající pod úhlem α_m, způsobí, že v daném prostředí bude úhel průchodu β roven $\frac{\pi}{2}$. (nakreslete si obrázek).
Ze snellova zákonu plyne

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

Protože $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$n_1 \sin\alpha_m = n_2$$
$$\sin\alpha_m = \frac{n_2}{n_1}$$
$$\boxed{\alpha_m = \arg\sin\frac{n_2}{n_1}} \qquad \text{za podmínky} \quad \boxed{n_2 < n_1}$$

α_m je *mezní úhel*, kdy se všechno světlo odrazí.

85. Odvoďte vztahy pro interferenční maxima a minima pro dvousvazkovou interferenci na tenké vrstvě.
Úvodní vztahy: optická dráha je rovná geometrické dráze, vynásobené příslušným indexem lomu pro dané prostředí, $l = ns$.
Pak také platí, že *pokud se světlo z řídkého prostředí láme na hranici z hustějším, jeho fáze se posune o* π. Čemuž odpovídá polovina vlnové délky. Optická dráha pak skokově naroste o $\frac{\lambda_0}{2}$.
Nyní se podíváme na obrázek 14 a vyjádříme si celkový rozdíl v optických drahách. Platí že (využijme $l = ns$)

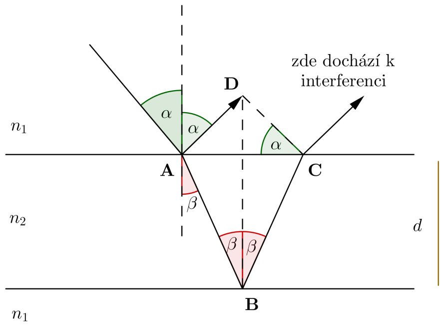
$$\triangle l = n_2(\overleftrightarrow{\mathrm{AB}} + \overleftrightarrow{\mathrm{BC}}) - n_1 \overleftrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$\overleftrightarrow{\mathrm{AB}} = \overleftrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{d}{\cos\beta}$$

$$\overleftrightarrow{\mathrm{AD}} = \overleftrightarrow{\mathrm{AC}} \sin\alpha = 2d\tan\beta\sin\alpha$$

Využiju snella ($\sin\alpha = \frac{n_2}{n_1}\sin\beta$):

$$\overleftrightarrow{\mathrm{AD}} = 2d\frac{n_2}{n_1}\tan\beta\sin\beta = \frac{2dn_2}{n_1}\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}$$



Obrázek 14: Dvousvazková interference

Tedy platí

$$\triangle l = \frac{2dn_2}{\cos\beta} - \frac{2dn_2}{\cos\beta}\sin^2\beta = \frac{2dn_2}{\cos\beta}(1-\sin^2\beta) = \frac{2dn_2}{\cos\beta}\cos^2\beta = 2dn_2\cos\beta$$

Musím však počítat s tím, že k rozdílu drah se mi přičte i fázový posun, popsaný v úvodu. Celkový rozdíl je tedy

$$\triangle l = \triangle l' + \frac{\lambda_0}{2} = 2dn_2\cos\beta + \frac{\lambda_0}{2}$$

Pokud tento výraz pondělím n_2 dostanu (podle $l = ns$) vzorec pro geometrický rozdíl drah

$$\triangle s = 2d\cos\beta + \frac{\lambda}{2}$$

Kde λ je vlnová délka související s prostředím n_2. Z otázky 79 (tuším) víme, že při interferenci nastane maximum při $\triangle s = m\lambda$ a minimum pro $\triangle s = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$. Tedy dostáváme

Maximum

$$2d\cos\beta = m\lambda - \frac{\lambda}{2} = (2m-1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\boxed{d\cos\beta = (2m-1)\frac{\lambda}{4}}$$

Minimum

$$\boxed{d\cos\beta = m\frac{\lambda}{2}}$$

Pozor! m nabývá hodnoty 1,2,3 ... Ne nuly! Potom bych totiž neměl nic co bych mohl interferovat.

86. Co rozumíme difrakcí? Napište Helmholtzovu rovnici. Co nám říká Kirchhoffova okrajová podmínka?
Difrakce vln je jakýkoliv odklon od přímočarého pohybu vlnění, který se nedá vysvětlit ani odrazem ani lomem ani nehomogenitou prostředí. Vlnovou rovnici lze přepsat v tzv. hemholtzově tvaru

$$\boxed{\nabla^2 u + k^2 u = 0}$$

Musí platit, že u je rovinná harmonická vlna.

87. Napište znění Huygensova-Fresnelova principu. Napište Kirchhoffův-Fresnelův integrál spolu s vysvětlujícím obrázkem.
Huygensův princip předpokládá, že v každém okamžiku lze každý bod na čele šířící se vlny chápat jako nový zdroj vlnění (sekundárních vln). Nový tvar čela vlny v čase o malý okamžik pozdějším lze pak určit jako vnější obálku vln, šířících se z těchto zdrojů.
Tento přístup však není úplně správný (například by se podle něj vlna vracela do zdroje, aniž by se od něčeho odrazila). Přesně to doformuloval Fresnel, zavedením tzv inklinačního faktoru.

88. Jaké jsou podmínky pro pozorování Fraunhoferovy difrakce? Odvoďte vztah pro Intenzitu světla na stínítku pro Fraunhoferovu difrakci na jednorozměrné štěrbině.
Podmínka pro Freuenhoferu difrakci je, že stínítko je dostatečně vzdálené od štěrbiny - můžu zanedbat křivost vlny a považovat ji za rovinnou.

89. Za jakých podmínek je možné použít geometrickou optiku? Co chápeme pod pojmem světelný paprsek. Jak je definována optická dráha? Jaký je rozdíl mezi geometrickou a optickou dráhou?
Geometrickou optiku využijeme, pokud je *vlnová délka vlny výrazně menší než rozměry překážek.* Znamená to, že interferenční a difrakční jevy nejsou tak výrazné.
Světelný paprsek je v homogenním prostředí přímka, se stejným směrem jako šíření světla. Je kolmý na vlnoplochu a má konstantní index lomu.
Optická dráha l je vzdálenost, kterou světlo urazí ve vakuu za stejnou dobu jako geometrickou dráhu.

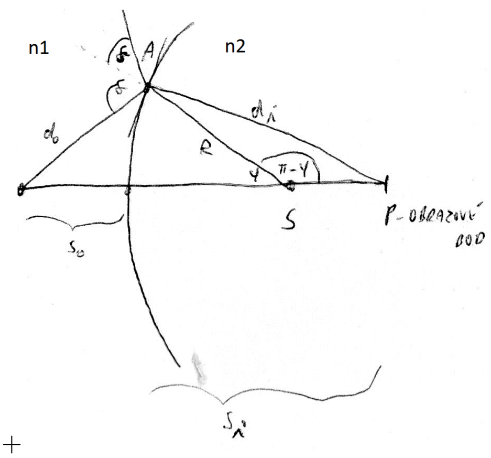
$$\boxed{l = ns}$$

Oproti tomu *geometrická dráha* s je vzdálenost, kterou světlo urazí v daném prostředí.

90. Jak zní Fermatův princip? Na základě Fermatova principu odvoďte zákon odrazu a zákon lomu.
Fermatův princip zní: *Optická dráha mezi body A a B bude taková, aby to trvalo co nejkratší dobu.*
Pomocí toho se dá odvodit zákon odrazu i lomu. Vyjádřím si jednotlivé dráhy mezi body, najdu kolik to trvá času a hledám minimum funkce, pomocí nulovosti derivace.

91. Co je to optická soustava, skutečný a zdánlivý obraz?
Optická soustava je souhrn lámavých a odrazových ploch, rozhraní optických prostředí a clon, které ovlivňují přechod světelných paprsků při vytváření obrazu pozorovaného předmětu.
Skutečný obraz je takový, jehož vzdálenost od vrcholu (průsečíku čočky a optické osy) je kladná. Takovýto obraz lze zobrazit na stínítko.
Zdánlivý obraz je naopak takový, jehož vzdálenost S_i je záporná, leží vpravo od vrcholu. Zdánlivý obraz nedokážeme zobrazit na stínítko.

92. Co chápeme pod pojmem paraxiální aproximace? Odvoďte Gaussovu a Newtonovu zobrazovací rovnici pro lom na kulové ploše. Co je to ohnisková vzdálenost? Jak je definováno příčné zvětšení?



Paraxiální aproximace znamená, že jsme relativně blízko optické osy a proto můžu aproximovat

$$S_0 \approx d_0$$
$$S_1 \approx d_1$$

Budu pracovat s optickými drahami. Bude pak platit, že nejkratší dráha je i nejrychlejší (tedy podle Fermatova principu ta jediná).
Určím si dráhu Z→A→P (bod Z je na obrázku ten úplně vlevo):

$$n_1 d_0 + n_2 d_i$$

Uplatním cosinové věty

$$n_1\sqrt{(S_0+R)^2 + R^2 - 2R(S_0+R)\cos\varphi} +$$
$$n_2\sqrt{(S_i-R)^2 + R^2 + 2R(S_i-R)\cos\varphi}$$

Teď hledám, kdy bude tato dráha nejkratší. Zderivuju podle φ

$$\frac{\mathrm{d\ ZAP}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{n_1 R(S_0+R)\sin\varphi}{d_0} - \frac{n_2 R(S_i-R)\sin\varphi}{d_i} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n_1(S_0+R)}{d_0} = \frac{n_2(S_i-R)}{d_i}$$

Nyní uplatníme tu slavnou paraxiální aproximaci

$$\Rightarrow \quad \frac{n_1(S_0+R)}{S_0} = \frac{n_2(S_i-R)}{S_i}$$

Dostanu *zobrazovací rovnici kulové plochy*

$$\boxed{\frac{n_1}{S_0} + \frac{n_2}{S_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}}$$

Pro $S_i \to \infty$ platí

$$S_0 = f_0 = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}$$

Kde f_0 je *předmětová ohnisková vzdálenost.* Naopak, pro $S_0 \to \infty$ bude platit

$$S_i = f_i = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$$

Kde f_i je *obrazová ohnisková vzdálenost.*
Pokud vezmu zobrazovací rovnici a podělím jí celou výrazem $\frac{R}{n_2-n_1}$, dostanu

$$\frac{n_1 R}{\frac{n_2-n_1}{S_0}} + \frac{n_2 R}{\frac{n_2-n_1}{S_i}} = 1$$

Což je ale

$$\boxed{\frac{f_0}{S_0} + \frac{f_i}{S_i} = 1} \qquad \textit{Gaussova zobrazovací rovnice}$$

Příčné zvětšení je definováno jako

$$\boxed{m = \frac{S_i}{S_0}}$$

93. Napište Gaussovu a Newtonovu zobrazovací rovnici tenké čočky. Jak je definována její optická mohutnost?
Pokud je čočka dostatečně tenká, pro její zobrazovací rovnici platí

$$\boxed{\frac{1}{S_0} + \frac{1}{S_i} = \frac{n_l - n}{n}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

n_l je index lomu pro materiál čočky a n je pro okolní prostředí
Pokud zase půjdu s S_i a S_0 do ∞. Dostanu *zobrazovací rovnici čočky*

$$\boxed{\frac{1}{S_0} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}}$$

A optická mohutnost je definována jako

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{f}} \qquad [\mathrm{m}^{-1} = \mathrm{dioptrie}]$$

94. Napište Gaussovu zobrazovací rovnici tenkého kulového zrcadla.

$$\boxed{\frac{1}{S_0} + \frac{1}{S_i} = \frac{2}{R}}$$

Pro případ kdy je střed zrcadla napravo od vrcholu.

95. Pro kulovou plochu, pro tenkou čočku a kulové zrcadlo proveďte základní grafické konstrukce zachycující skutečné a zdánlivé obrazy.

---

96. Jak je definován zářivý tok, intenzita vyzařování, pohltivost a emisivita? Co je to absolutně černé těleso.
Zářivý tok Φ je jakási analogie k elektrickému proudu I. Popisuje celkový přenos energie nějakou spojitou plochou S. Pokud $\mathrm{d}\mathcal{E}$ je energie záření, která za dobu $\mathrm{d}t$ projde přes plochu S ve zvoleném směru, je zářivý tok

$$\boxed{\Phi = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} \quad [\mathrm{W}]}$$

Intenzita vyzařování je spojená s určitým místem na povrchu tělesa. Vezmu zářivý tok $\mathrm{d}\Phi_e$, který v tomto místě prochází ploškou $\mathrm{d}S$. Intenzita vyzařování v daném místě je pak vyjádřená jako

$$\boxed{M_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}S} \quad [\mathrm{Wm}^{-2}]}$$

e tam znamená emise, vyzařování.
Pohltivost α je definována jako poměr pohlceného zářivého toku a toku dopadajícího na povrch. Odtud je zřejmé, že $0 \leq \alpha \leq 1$. Povrch, který má velkou pohltivost, se jeví jako tmavý, kdežto povrch s malou pohltivostí se jeví jako světlý.
Tepelné záření je veškeré elektromagnetické záření, která vyzařují všechna tělesa, v závislosti na jejich teplotě (většinou na úkor vnitřní energie). Pokud na těleso dopadá záření, je částečně odraženo, částečně pohlceno a část projde skrz. *Absolutně černé těleso* je takové, kde se veškeré záření pohltí. Platí tedy pro něj $\alpha = 1$.
Emisivita ε je poměr intenzity záření daného tělesa s intenzitou absolutně černého tělesa

$$\boxed{\varepsilon = \frac{M_e}{M_e^0}}$$

97. Zapište matematicky Kirchhoffův zákon vyzařování. Jaký je vztah mezi intenzitou vyzařování a objemovou hustotou energie tepelného záření? Co je to tepelné záření?

Pokud si představíme dutinu s malým otvorem, kam může proniknout záření, můžeme se na záření v dutině dívat jako na ideální plyn. Má svojí hustotu (tzv. hustotu zářivé energie ω) a tlak na plochu, na kterou dopadá (tlak záření). V souladu s termodynamikou, kdy je povrch dutiny o teplotě T a záření v ní ve vzájemné rovnováze, zní *Kirhoffův zákon vyzařování takto*:

$$\boxed{\frac{M_e}{\alpha} = f(T)}$$

Neboli *poměr intenzity vyzařování a pohltivosti závisí jen na termodynamické teplotě tělesa.* Pro intenzitu vyzařování, zářivý tok a hustotu zářivé energie platí vztah

$$\boxed{M_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}S} = \frac{c_0\omega}{4}}$$

c_0 je rychlost šíření tepelného záření ve vakuu. *Tepelné záření* je veškeré elektromagnetické záření, která vyzařují všechna tělesa v závislosti na svojí teplotě.

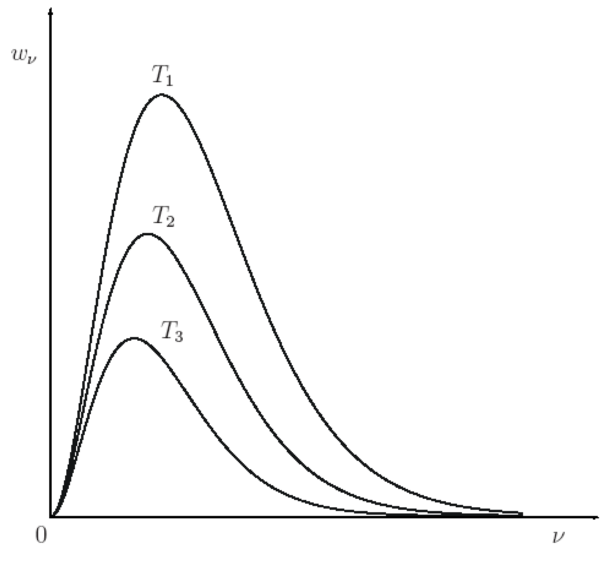
98. Napište Planckův vyzařovací zákon absolutně černého tělesa, zakreslete jeho průběh a z Plackova vyzařovacího zákona odvoďte Raygleighův-Jeansův a Wienův vyzařovací zákon. Co chápeme pod pojmem ultrafialová katastrofa? V čem se lišil přístup při odvození Raygleighova-Jeansova a Planckova vyzařovacího zákona? ☠

Planckův vyzařovací zákon zní

$$\boxed{\omega_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c_0^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}}$$

Kde ω_λ je spektrální hustota energie záření, h je planckova konstanta a k_B je boltzmannova konstanta, ν je kmitočet.

Spektrální hustotu bychom si také mohli vyjádřit pomocí vlnové délky při použití $\boxed{\nu = \frac{c_0}{\lambda}}$.



Obrázek 15: Závislost spektrální hustoty energie na kmitočtu podle planckova vyzařovacího zákona.$T_1 > T_2 > T_3$
®Bednarik

Raygleigh-Jeansův zákon

Pokud platí, že $h\nu << k_B T$, můžeme aproximovat exponenciální funkci takto

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \approx 1 + \frac{h\nu}{k_B T}$$

Pokud tento výraz dosadíme zpět do planckova zákona, dostanu po úpravách Raygleigh-Jeansův zákon:

$$\boxed{\omega_\lambda = \frac{8\pi\nu^2}{c_0^3}k_B T}$$

Tento vztah však platí pouze pro nižší kmitočty. Pokud bychom navíc zvyšovali kmitočet, bude nám růst i hustota nad všechny meze, což vede k nefyzikálním důsledkům a bordelu označovaného jako „ultrafialová katastrofa“.

Raygleigh-Jeansův zákon se od Planckova zákona liší tím, že nebere v úvahu kvantovou povahu vyzařování energie příslušného stavu. Ta se nevyzařuje spojitě, ale po *kvantech.* Energie stavu n je $E_n = nh\nu$.

Odvození Wienova vyzařovacího zákona

Zda naopak budeme předpokládat, že $h\nu >> k_B T$. Potom aproximujeme jmenovatele v planckovi následovně

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \approx e^{\frac{h\nu}{k_B T}}$$

Dosadíme zpět a dostaneme Wienův zákon:

$$\boxed{\omega_\lambda = \frac{8\pi h\nu^3}{c_0^3}e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}}$$

Který platí pouze pro vyšší kmitočty.

99. Z Planckova vyzařovacího zákona odvoďte Wienův posunovací zákon.

Z obrázku 15 je vidět, že uvedená závislost má pro určitý kmitočet $\nu_{\max}$ svoje maximum. Pokusíme se ho nalézt. Vezmu planckovu rovnici, tentokrát pro kmitočet (přepočtení $\nu = \frac{c_0}{\lambda}$) a zderivuji podle ν.

$$\frac{\mathrm{d}\omega_\nu}{\mathrm{d}\nu} = \frac{8\pi h}{c_0^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\Big(\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}\Big) = 0$$

Zavedu si substituci

$$x = \frac{h\nu}{k_B T} \quad \text{tedy} \quad \nu = \frac{k_B T}{h} x$$

To tam narvu a dostanu (za velkou konstantu před derivací jsem pro zjednodušení dal A).

$$A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \left(\frac{x^3}{e^x - 1} \right) = 0$$

$$\frac{3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$$

Tady stačí, když se bude čitatel rovnat nule. To vyřešíme numericky (lol jak to asi u tý zkoušky máme udělat) a dostanu

$$x_{\max} = 2,82144$$

To dosadím do výrazu pro kmitočet ν

$$\nu_{\max} = \frac{k_B T}{h} x_{\max}$$

Když to přepíšu, dostanu Wienův posunovací zákon:

$$\boxed{\nu_{\max} = C_\nu T}$$

Z tohoto zákona můžeme určovat teplotu těles, u kterých detekujeme záření. Zákon pro maximum vlnové délky zní

$$\lambda_{\max} = \frac{C_\nu}{T}$$

100. Z Planckova vyzařovacího zákona odvoďte Stefanův-Boltzmannův zákon pro intenzitu vyzařování.
Potřebovali bychom znát celkovou hustotu energie. Tu dostaneme integrací

$$\omega(T) = \int_0^\infty \omega_\nu \, \mathrm{d}\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c_0^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \mathrm{d}\nu$$

Použili jsme plancka pro kmitočet. Zavedu si substituci

$$x = \frac{h\nu}{k_B T} \quad \mathrm{d}x = \frac{h}{k_B T} \mathrm{d}\nu$$

Teď spočítáme ten integrál (nebudu to dělat!) a dostaneme vztah pro celkovou hustotu energie

$$\omega(T) = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c_0^3} T^4$$

Z otázky 97 víme že platí

$$M_e^0 = \frac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}S} = \frac{c_0 \omega}{4}$$

Za ω dosadíme náš krásný výsledek a máme

$$M_e^0 = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c_0^2} T^4$$

Což si přepíšeme a dostaneme *Stefanův-Boltzmannův zákon pro černá tělesa* (toto není míněno rasisticky)

$$\boxed{M_e^0 = \sigma T^4}$$

Kde σ je Stefan-Boltzmannova konstanta. Můžu si to ještě upravit pomocí vztahu pro emisivitu ε a dostanu obecný zákon pro všechna tělesa

$$M_e = \varepsilon \sigma T^4$$

---

101. Co je to fotoelektrický jev? Napište vztah pro kinetickou energii emitovaných elektronů. Odvoďte vztah mezi hybností fotonu a vlnovou délkou elektromagnetické vlny. Čemu se rovná kvantum energie?
Fotoelektrický jev - Pokud dopadá na nějaký povrch (nejčastěji kov) elektromagnetické záření, např. světlo, dochází k emisi elektronů z jeho povrchu, z důsledku absorpce záření. Tento jev není možné vysvětlit klasickou fyzikou, protože podle ní by kinetická energie emitovaných fotonů měla záviset na intenzitě dopadajícího světla (protože energie elektromagnetických vln souvisí s intenzitou záření). Ale ve skutečnosti tomu tak není, kinetická energie závisí na *kmitočtu* dopadajícího záření.
Pro kinetickou energii emitovaného elektronu platí zákon zachování energie. Pro $E = h\nu$ jako energie dopadajícího fotonu a A_v jako výstupní práce, představující minimální energii aby došlo k emisi fotonu, platí vztah

$$\boxed{E_{\text{kyn}} = E_{\text{fot}} - A_v = h\nu - A_v = h\nu - h\nu_0}$$

ν_0 se označuje jako mezní (prahový kmitočet). Pokud má dopadající světlo nižší kmitočet než ν_0, fotoemise se neobjevuje. *Kvantum energie* odpovídá energii jednoho fotonu, která je definovaná vztahem

$$\boxed{E = h\nu = \hbar\omega}$$

Vztah pro hybnost dostaneme z relativistického vzorce pro energii. Platí

$$E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + c^2p^2}$$

Foton má ale klidovou hmotnost m_0 nulovou! Jinak by totiž nemohl dosáhnout rychlosti světla, kterou se pohybuje. Máme tedy

$$E = \sqrt{c^2p^2} = cp$$

$$\Longrightarrow \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

Teď provedeme úpravy, abychom dostali vztah mezi hybností a vlnovou délkou.

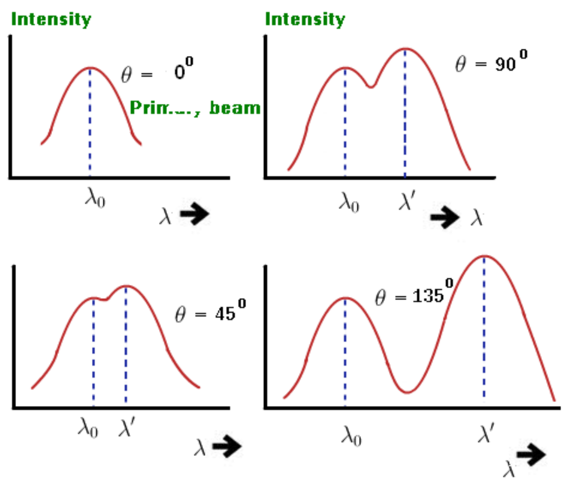
$$p = \tfrac{h\nu}{c} \;/\cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad p = \tfrac{h2\pi\nu}{2\pi c} = \tfrac{h\omega}{2\pi c}$$
$$(\omega = kc)$$
$$\Longrightarrow p = \tfrac{hk}{2\pi} = \boxed{\hbar k}$$
$$(k = \tfrac{2\pi}{\lambda}) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$$

102. V čem spočívá Comptonův jev?

Pokud záření s vysokou energií (nejčastěji rentgenové) dopadá na nějaký povrch, dochází k jeho odrazu, rozptylu. Rozptýlené světlo má však jiné vlnové délky a menší energii než dopadající. Je to způsobeno interakcí dopadajícího fotonu s elektronem látky, kterému foton předá část svojí energie a změní směr, i svou vlnovou délku. Výsledná vlnová délka λ' závisí na λ_0 dopadajícího světla a na úhlu φ, pod kterým dopadá na povrch látky:

$$\lambda' = \lambda_0 + \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi)$$

Kde m_0 je klidová hmotnost elektronu.



Obrázek 16: Výsledná vlnová délka rozptýleného světla, v závislosti na různých úhlech

103. Jaký byl hlavní nedostatek planetárního modelu atomu? Jak zní Bohrovy postuláty?

Planetární (Rutherfordův) model předpokládá, že přitažlivá elektrická (Coulombova) síla mezi jádrem a elektronem je vykompenzována odstředivou silou, působící na elektron.

Nevýhoda tohoto modelu je, že podle elektromagnetické teorie vyzařují elektrony, pohybující se se zrychlením, energii v podobě elektromagnetických vln. V planetárním, modelu jsou elektrony urychlovány dostředivou silou, tedy by časem ztrácely svojí energii, až by všechnu pozbyly a spadly na jádro. Atom by se tak stal *nestabilní* (v případě atomu vodíku by kolaps nastal za pouhých 10^{-16}s).

V realitě je ale atom vodíku *stabilní*. Musel přijít Bohr a podat jiné vysvětlení jak to v atomu funguje, který by byl v souladu s experimenty.

Bohrovy postuláty:

- Elektrony existují ve stacionárních stavech, kdy nevyzařují energii (existují stabilní dráhy elektronů).
- Jsou možné jen takové dráhy (energetické hladiny) na kterých je moment hybnosti přesně $L = n\hbar$, kde $n = 1, 2, 3\ldots$
- Přechod elektronu na jinou energetickou hladinu je spojen s vyzářením nebo pohlcením energie (fotonu).

104. Odvoďte vztah pro poloměry přípustných kruhových drah v Bohrově modelu? Odvoďte vztah pro energie odpovídajících jednotlivým přípustným kruhovým dráhám elektronu. Odvoďte vztah vyjadřující vlnové délky vyzařované atomem vodíku při přechodu mezi zvolenými energetickými stavy.

Bohrův poloměr

Vyjdeme z druhého Bohrova postulátu $L = n\hbar$.

$$r_n mv = n\hbar$$

Kde r_n je poloměr dráhy pro dané n. Vyjádříme si z rovnice rychlost. Úpravami dostaneme

$$2\pi r_n m v = nh$$
$$v = \frac{nh}{2\pi r_n m}$$

$$v^2 = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 r_n^2 m^2} \tag{23}$$

Nyní si zavedeme rovnost, kdy elektrická síla mezi elektronem a protonem v jádru (uvažujeme atom vodíku) bude vykompenzována odstředivou silou. Nyní již to bude platit, protože elektron na přípustné dráze nebude vyzařovat energii.

$$F_{\mathrm{el}} = F_{\mathrm{odst}}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Longrightarrow \quad v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r m} \tag{24}$$

Síla F_{el} je bez mínusu, protože nás zajímá jen velikost obou sil. Pokud si dám nyní do rovnosti oba výrazy pro v^2, dostanu

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n m} = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 r_n^2 m^2} \quad \Longrightarrow \quad r_n = \frac{n^2h^2 4\pi\varepsilon_0 r_n m}{4\pi^2 r_n^2 m^2 e^2} = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2} n^2$$

$$\boxed{r_n = a_0 n^2} \quad \text{kde} \quad \boxed{a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2}}$$

Energie přípustných drah
Celková energie se vypočte jako součet kinetické a potenciální.

$$E = T + U$$

Za kinetickou dosadím $T = \frac{1}{2}mv^2$ a za $U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n}$ (potenciální energie protonu a elektronu). Za v^2 si dosadím z rovnice 24 a dostávám

$$E = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n}$$

$$\boxed{E = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a_0 n^2}}$$

Změna energie při přechodu z jednoho stavu do druhého, by se pak jednoduše vypočetla jako $\triangle E = E_{n=j} - E_{n=i}$.
Vztah pro vlnové délky
Víme:

$$L = n\hbar$$
$$r_n m v = n\hbar \quad \Longrightarrow \quad r_n p = n\hbar$$
$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{(otázka 101.)} \quad \Longrightarrow \quad r_n\frac{h}{\lambda} = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}$$

$$\boxed{n\lambda = 2\pi r_n}$$

105. Napište vztah pro vlnovou délku materiálových vln a napište vztah mezi obvodem dovolených kruhových drah v Bohrově modelu a vlnovou délkou materiálové vlny.
V podstatě vezmu je rovnici $p = \frac{h}{\lambda}$ a výsledek z předchozí otázky

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} = \frac{h}{mv_n}$$

$$\boxed{n\lambda = 2\pi r_n}$$

106. Popište Davissonův-Germerův experiment a ukažte, jak potvrzuje existenci materiálových vln.
Experiment dokazuje Broglieho hypotézu o dualismu vlna-částice. ☺

107. Naznačte heuristický způsob odvození Schrödingerovy rovnice.
Provedeme úplné odvození pomocí příslušných operátorů.Volná částice, se bude chovat jako vlna, tedy bude mít vlnovou funkci (v komplexní notaci)

$$\psi = \psi_0 e^{j(\mathbf{kr} - \omega t)}$$

Pokud ale využiju vztahů ze 101. - $E = \hbar\omega$ a $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, dostanu pro nás mnohem přijatelnější tvar

$$\psi = \psi_0 e^{j(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\mathbf{r} - \frac{E}{\hbar}t)}$$

Nyní budeme hledat příslušné operátory, kterých využijeme při odvození. Díky 3. postulátu kvantové mechaniky víme, že fyzikální veličina A může nabývat pouze hodnot, které jsou vlastní čísla příslušného operátoru, operujícího na dané vlnové funkci. Neboli

$$\hat{A}\psi = A\psi$$

Konkrétně teď budeme hledat operátor hybnosti a celkové energie. Pro operátor hybnosti bude platit

$$\hat{\mathbf{p}}\psi = \mathbf{p}\psi \quad \text{neboli} \quad \hat{p_x}\psi = p_x\psi,\ \hat{p_y}\psi = p_y\psi,\ \hat{p_z}\psi = p_z\psi$$

Pro energii to platí úplně analogicky. Pokud tedy máme vlnovou rovnici ve tvaru

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{j}{\hbar}(p_x\mathbf{x}+p_y\mathbf{y}+p_z\mathbf{z}-Et)}$$

vidíme, že příslušný operátor hybnosti musí být

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{j}\frac{\partial}{\partial x} = -j\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{stejně tedy} \quad \hat{p}_y = -j\hbar\frac{\partial}{\partial y},\ \hat{p}_z = -j\hbar\frac{\partial}{\partial z} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\mathbf{p}} = -j\hbar\nabla$$

Zkuste jestli to vyjde! Obdobně pro celkovou energii musí platit

$$\hat{E} = j\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Ještě si vyjádříme operátor kinetické energie. Bude platit

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m^2v^2\frac{1}{m} = \frac{p^2}{2m}$$

Operátor pro hybnost ale známe, tedy

$$\hat{E}_k = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

Nyní už téměř máme výsledek. Schrődingerova rovnice je v podstatě vyjádření zákona zachování energie. Napíšu si ho ve tvaru

$$(\hat{E}_k + \hat{U})\psi = \hat{E}\psi$$

Tedy (jelikož platí, že $\hat{U} = U$) máme

$$\boxed{j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi}$$

☠

109. Napište Bornovu interpretaci vlnové funkce.
(přehodil jsem otázky 108 a 109, protože to dává větší smysl).
Bornova interpretace vlnové funkce ψ je, že kvadrát její velikosti je *hustota pravděpodobnosti výskytu částice.*
Neboli pro spojitou náhodnou veličinu $X =$„místo výskytu částice“, platí, že má hustotu

$$f_X = |\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*$$

Kde ψ^* značí komplexně sdruženou vlnovou funkci. Pokud bychom tedy například chtěli pravděpodobnost, že částice je mezi dvěma místy a a b (1D problém), dostaneme jí jako

$$\mathrm{P}[a \le X \le b] = \int_a^b |\psi|^2\,\mathrm{d}x$$

108. Napište standardní podmínky, které musí splňovat vlnová funkce.
Souvisí s předchozí otázkou (Bornovou interpretací). Jestliže je $|\psi|^2$ hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny, musí pro ní platit určité podmínky (viz. předmět PSI).
Konkrétně pro daný čas:

- $$\iiint\limits_{\substack{\text{celý}\\\text{prostor}}} |\psi|^2\,\mathrm{d}V = 1$$
- ψ je spojitá a jednoznačná.
- S kvadrátem integrovatelná a normovaná.
- Její první derivace jsou spojité, kromě míst s nekonečným potenciálem.

110. Proveďte odvození bezčasové Schrödingerovy rovnice pomocí metody separace.
Budeme zatím uvažovat jen 1D případ, pak to zobecníme. Metoda separace spočívá v rozdělení funkce, která obecně záleží na více proměnných do součinu funkcí, závisející jen na jedné proměnné. Tedy pro vlnovou funkci

$$\psi(x,t) = T(t)\Phi(x)$$

A tento součin dosadím do obecné Schrödingerovy rovnice (pro 1D)

$$j\hbar\Phi\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\hbar^2}{2m}T\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} + U\Phi T$$

Některé funkce jsme mohli z derivace vytknout, protože nezáleží na proměnné, podle které se derivuje.
Teď přijde důležitý krok, kterej je si třeba zapamatovat. Celou rovnici vynásobím $\frac{1}{T\Phi}$. Tím pádem mám

$$j\hbar\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} + U$$

Pokud platí, že potenciální energie je nezávislá na čase, $U = U(x)$, zjistíme z rozměrové analýzy, že obě strany rovnice mají stejný rozměr - energii. Což dává smysl, protože podělením rovnice členem $T\Phi$ jsme vlastně dělili ψ. A jelikož rovnice je vyjádření zákona zachování energie, $E\psi = (E_k + U)\psi$, vydělením ψ mám $E = E_k + U$, což má opravdu na obou stranách rozměr energie.
Bude nás zajímat pouze bezčasový tvar. Jelikož se obě strany rovnají energii, můžu napsat

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} + U = E$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} + U\Phi = E\Phi$$

Což je hledaný stacionární tvar Schrödingera. Obecně

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi + U\Phi = E\Phi}$$

Rovnice se také občas píše pomocí hamiltoniánu, $H = E_k + U$. Tedy $\hat{H} = \hat{E}_k + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U$. A rovnice má jednoduchý tvar

$$\boxed{\hat{H}\Phi = E\Phi}$$

111. Dokažte, že hustota pravděpodobnosti pro výskyt částice nezávisí na čase.
V předchozí otázce jsme položili pravou stranu Schrödingera rovnou E. To samé ale bude platit i pro levou stranu, s funkcí $T(t)$.

$$j\hbar\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = E \quad \Longrightarrow \quad j\hbar\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = ET$$

Máme tady jednoduchou diferenciální rovnici, kde můžeme řešení dokonce hned uhodnout.

$$T = e^{(E/j\hbar)t} = e^{-j(E/\hbar)t}$$

Hustota pravděpodobnosti výskytu částice je $|\psi|^2$. Můžu psát

$$|\psi|^2 = \psi\psi^* = T\Phi\cdot T^*\Phi^* = \Phi\Phi^*\cdot TT^* = \Phi\Phi^*\cdot\underbrace{e^{-j(E/\hbar)t}\cdot e^{j(E/\hbar)t}}_{1} = \Phi\Phi^* = |\Phi|^2$$

QED.

112. Napište vlnovou funkci pro volnou částici a ukažte, že je řešením Schrödingerovy rovnice.
Podle úprav v otázce 107 víme, že vlnová funkce pro částici je

$$\psi = \psi_0 e^{j(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\mathbf{r} - \frac{E}{\hbar}t)}$$

Zbytek otázky je už jen čisté dosazení ψ do Schrödingera. Je jasné, že to musí vyjít, protože postupujeme naopak, než při odvozování. Po dosazení dostanu

$$E\psi - \frac{1}{2}mv^2 + U\psi$$

Což je ZZE, který určitě platí.

113. Napište, co chápeme pod pojmem operátor, vlastní funkce a vlastní hodnota operátoru, jak je definován skalární součin funkcí, ortogonalita funkcí, jak je definován hermitovský operátor a jaké má vlastnosti, jak je definován komutátor.
Operátor $\hat{A}$ je *zobrazení*, které funkci f zobrazí na funkci g.

$$\hat{A}f = g$$

Kde $f \in \mathbf{X}$ a $g \in \mathbf{Y}$. Pomocí operátorů pak v kvantové mechanice určujeme jednotlivé fyzikální veličiny. Pokud máme

$$\hat{A}f = \lambda f$$

tak f se nazývá *vlastní funkce* a λ *vlastní číslo* (hodnota) operátoru.
Skalární součin dvou *funkcí* f a g se definuje jako

$$< f|g >= |\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x| \quad \text{pro všechna} \quad f, g \in \mathcal{L}^2$$

$\mathcal{L}^2$ je prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem.
Funkce jsou *ortogonální*, pokud platí, že skalární součin je nulový, $< f|g >= 0$.
Hermitovský operátor $\hat{A}$ - působí v obou částech skalárního součinu stejně, tedy platí pro něj

$$< x|\hat{A}y >=< \hat{A}x|y >$$

Díky tomu pro hermitovský operátor například platí

$$\iiint \psi^* \hat{A}\psi \,\mathrm{d}V = \iiint (\hat{A}\psi)^* \psi \,\mathrm{d}V$$

Kde jsme zaměnili působení operátoru ve skalárním součinu, což podle výše uvedeného musí dávat stejné výsledky.
Konečně *komutátor* dvou operátoru se definuje jako

$$[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a} = \begin{cases} = 0 & \text{operátory spolu komutují} \\ \neq 0 & \text{nekomutují} \end{cases}$$

114. Napište postuláty kvantové mechaniky.
Postuláty jsou:

1. Vlnová funkce ψ nese veškerou informaci o systému (částici).
2. Každé měřitelné fyzikální veličině lze přiřadit lineární hermitovský operátor, který operuje na příslušné vlnové funkci. Lineární - platí princip superpozice, tedy $\hat{A}(x + y) = \hat{A}x + \hat{A}y$ a $\hat{A}(cx) = c\hat{A}x$.
3. Postulát o kvantování - měření fyzikální veličiny může nabývat pouze hodnot rovnajícím se vlastním číslům příslušného operátoru. Tedy $\hat{A}\psi = A\psi$.
4. Redukce vlnové funkce - naměřením hodnoty A_n přejde systém do stavu ψ_n. Vlastní měření nám tak ovlivní stav.
5. Postulát o časové Schrödingerově rovnici - vývoj stavu daného systému v čase je popsán rovnicí

$$j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

115. Jakou podmínku musí splňovat operátory, aby měly společné vlastní funkce?
Operátory spolu musí komutovat, tj. $\hat{a}\hat{b} = \hat{b}\hat{a}$. Jinak bychom nemohli příslušné veličiny měřit zároveň, tedy bych měl i jinou vlnovou funkci ψ.

116. Napište operátory základních fyzikálních veličin známých z klasické mechaniky.
Většinu již máme odvozenou z minula. Platí

$$\text{Celková energie} \qquad \hat{E} = j\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\text{Hybnost} \qquad \hat{\mathbf{p}} = -j\hbar\nabla$$

$$\text{Poloha} \qquad \hat{x} = x$$

$$\text{Kinetická energie} \qquad \hat{E}_k = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

$$\text{Potenciální energie} \qquad \hat{U} = U$$

$$\text{Moment hybnosti} \qquad \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -j\hbar\frac{\partial}{\partial x} & -j\hbar\frac{\partial}{\partial y} & -j\hbar\frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = -j\hbar(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$$

117. Dokažte, že zda vybrané operátory spolu komutují.
To tady asi nebudu dělat, prostě by se daný operátor nacpal do komutátoru a zkoumali bychom, jestli vyjde nula či ne. Abychom měli na co operátor uplatnit, uplatním ho třeba na vlnovou funkci a ve výsledku jí zase podělím - $[\hat{a}, \hat{b}] = ?$
Komutuje spolu například velikost momentu hybnosti $\hat{L}^2$ a jedna jeho složka, třeba $\hat{L}_z$. Ale souřadnice polohy $\hat{x}$ a složka hybnosti $\hat{p}_z$ spolu například nekomutují.

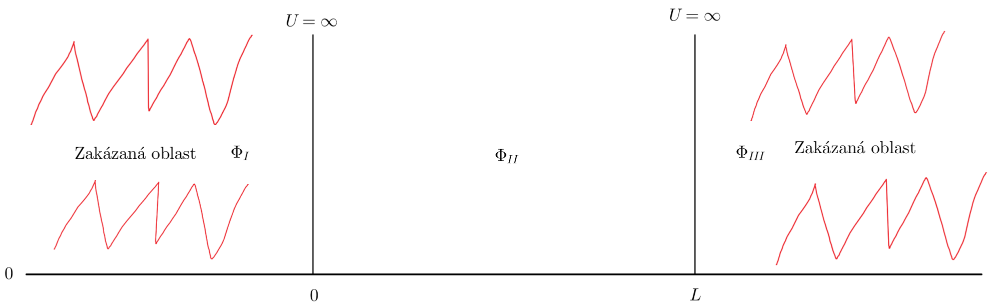
118. Napište Heisenbergovy relace neurčitosti. ☠
Relace nám říkají, že čím přesněji změříme polohu, tím méně víme o hybnosti a naopak. $\triangle$ značí nejistotu měření.

$$\boxed{\begin{array}{c} \triangle x \triangle p_x \geq \frac{\hbar}{2} \\ \triangle y \triangle p_y \geq \frac{\hbar}{2} \\ \triangle z \triangle p_z \geq \frac{\hbar}{2} \end{array}}$$

A také

$$\boxed{\triangle t \triangle E \geq \frac{\hbar}{2}}$$

119. Nalezněte vlastní hodnoty a funkce hamiltoniánu pro případ částice uvězněné v jednorozměrné nekonečné potenciálové jámě.
(na tohle se Bednařík dost často ptá na ústní)
Schéma problému je na obrázku 17. Částice je uvězněná v prostoru ohraničeném potenciálovými bariérami, které jsou tak vysoké, že před ně částice nemůže projít. Potenciálovou jámu si lze představit např. jako elektron uvězněný mezi dvěma protony.



Obrázek 17: 1D potenciálová jáma

Čas zde nebude hrát žádnou roli, využiju tedy stacionární tvar Schrödingera.

$$\hat{H}\Phi = E\Phi$$

Kde vidíme, že vlastní číslo (hodnota) hamiltoniánu je E a vlastní funkce Φ. Jelikož pro oblast I a III je pravděpodobnost výskytu nulová, stačí nám zjistit pouze Φ_{II}. Hamiltonián si přepíšeme jako součet kinetické a potenciální energie

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x^2} + U\Phi_{II} = E\Phi_{II}$$

Provádíme už derivaci jen podle x, protože to je jediná proměnná, kterou tu máme. Dále víme, že pokud jsme v jámě, je ve všech místech $U = 0$ (kromě míst kde je bariéra, viz obrázek). Rovnice se zjednoduší na

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x^2} = E\Phi_{II}$$

Provedu jen úpravy, aby se rovnice líp řešila. Převedu výraz s celkovou energií doleva a celý výraz vynásobím $-\frac{2m}{\hbar^2}$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x^2} - E\Phi_{II} = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{-2m}{\hbar^2}$$

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\Phi_{II} = 0$$

A mám tu diferenciální rovnici. Řešení se dá uhodnout (Bednařík jí neřešil) ale v rámci tréninku si jí tady vyřešíme, například pomocí Laplaceovy transformace (a u zkoušky budete za mástry).
Rovnici si přepíšu jako

$$f(x)'' + Bf(x) = 0 \qquad \text{s počátečními podmínkami} \qquad \begin{array}{c} f(0) = 0 \\ f'(0) = C \end{array}$$

Kde $f = \Phi_{II}$ a $B = \frac{2mE}{\hbar^2}$. První počáteční podmínka plyne z toho, že pravděpodobnost, že částice se bude vyskytovat v místě $x = 0$ (první bariéra), je nulová, Podmínku $f(L) = 0$ uplatníme později. Hodnotu derivace v 0 neznáme, položíme jí proto rovnou nějaké konstantě.
A provedeme Laplase (proměnnou v LT volím např. p)

$$p^2F(p) - p\underbrace{f(0)}_{0} - f'(0) + BF(p) = 0$$

$$p^2F(p) - C + BF(p) = 0$$

$$(p^2 + B)F(p) = C \quad \Longrightarrow \quad F(p) = C\frac{1}{p^2 + B} = C\frac{1}{p^2 + (\sqrt{B})^2}$$

Konstantu C půjde určitě nějak přespat jako součin dvou jiných konstant $C = A\sqrt{B}$. Budu mít

$$F(p) = A\frac{\sqrt{B}}{p^2 + (\sqrt{B})^2} \qquad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad f(x) = A\sin(\sqrt{B}x)$$

Tedy

$$\Phi_{II} = A\sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right)$$

Z podmínky pro druhou bariéru, $\Phi_{II}(L) = 0$, zjistíme výraz pro celkovou energii E, tedy vlastní číslo hamiltoniánu. Víme, že

$$\Phi_{II}(L) = A\sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L\right) = 0$$

Řešení $A = 0$ nedává smysl, musí se nule tedy rovnat sinus. Ten je nula v celých násobcích π. Takže

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L = n\pi \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}$$

Z čehož je vidět, že velikost energie je kvantovaná, může nabývat jen určitých násobků konkrétní hodnoty. $n = 1, 2, 3\ldots$ se nazývá *hlavní kvantové číslo* a určuje právě velikost energie.
K určení vlastní funkce, tedy Φ_{II}, nám zbývá určit konstantu A. Tu určíme z podmínky pro vlnovou funkci. Jelikož je její kvadrát velikosti roven hustotě pravděpodobnosti výskytu částice, musíme integrací přes celý prostor dostat přesně 1 (zde stačí pouze od 0 do L, jinde je Φ_{II} stejně nula).

$$\int_0^L |\Phi_{II}|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^L A^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right)\mathrm{d}x = 1$$

Integrál spočítáme pomocí vzorce $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$.

$$\int_0^L A^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right)\mathrm{d}x = A^2\int_0^L \frac{1}{2}\mathrm{d}x - A^2\int_0^L \frac{1}{2}\cos(2\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Ale ten druhý integrál bude nulový! Proč? Pokud bychom provedli integraci celého výrazu, z cosinu se stane sinus + konstanty okolo. Meze integrálu jsou 0 a L. Pokud tedy do sinu dosadím za $x = 0$, dostanu určitě nulu ($\sin(0) = 0$). Pokud dosadím $x = L$, bude výraz v sinu dvojnásobek $\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L$, což je ale z druhé podmínky n-násobek π! Tedy celý výraz v sinu bude $2n$-násobek π, což je taky nula.
Tím se nám výpočet dost zjednoduší. Po výpočtu jednoduchého prvního integrálu dostaneme

$$A^2\frac{L}{2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

A pro vlastní funkci hamiltoniánu v 1D ∞ potenciálové jámě platí

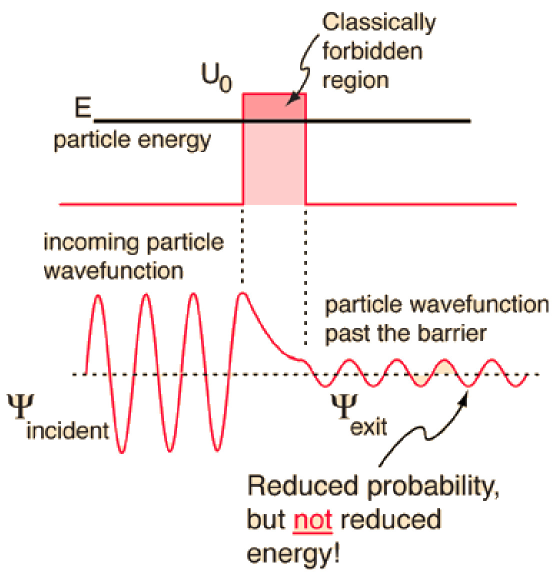
$$\boxed{\Phi_{II} = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right)}$$

120. Vysvětlete tunelový jev

Mám nějakou částici s určitou energií E, například elektron. Budu uvažovat pro zjednodušení 1D případ. Na osu x umístím v oblasti od $x = 0$ do $x = L$ potenciálovou bariéru, s velikostí potenciálu E_{p0}. Očekáváme, že pokud bude $E < E_{\mathrm{p0}}$, nemůže elektron bariérou projít, stejně jako kopnutý míč nikdy nepřekoná kopec, pokud do něj nekopneme takovou silou a udělíme energii, aby mohl kopec překonat.
V praxi se však děje něco jiného. Jelikož se elektron zároveň chová jako vlna, má konečnou pravděpodobnost, že projde (*protuneluje se*) bariérou a objeví se na druhé straně. Pravděpodobnost, že částice (vlna) projde skrz se nazývá *koeficient průchodu T* a počítá se jako

$$T = e^{-2\kappa L} \qquad \text{kde} \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m(E_{\mathrm{p0}} - E)}{\hbar^2}}$$

Aplikace tunelového jevu je například tunelová dioda, kdy můžeme zapínat a vypínat proud elektronů změnou výšky bariéry. Tuto změnu je možné provést velmi rychle.



Obrázek 18: Výsledná vlnová délka rozptýleného světla, v závislosti na různých úhlech

121. Ukažte, že dochází k disperzi vlnové funkce, a že vlnový balík se pohybuje rychlostí (grupovou) shodnou s rychlostí částice.

Nejdříve ukážeme, čemu se rovná grupová rychlost. Vyjdu z definice a poté uplatním relativistický vzorec pro energii.

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \quad /\cdot\hbar = \frac{\mathrm{d}\hbar\omega}{\mathrm{d}\hbar k} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\sqrt{p^2c^2 + (m_0c^2)^2}$$

$$= \frac{2pc^2}{2\sqrt{p^2c^2 + (m_0c^2)^2}} = \frac{pc^2}{E}$$

Tento vztah si dále upravím. Ze STR vychází i další známý vzorec pro energii $E = m(v)c^2$. Za hybnost dosadím klasicky $p = m(v)v$. $m(v)$ je relativistická hmotnost. Takže

$$v_g = \frac{pc^2}{E} = \frac{m(v)vc^2}{m(v)c^2} = v$$

Tedy grupová rychlost je stejná jako rychlost částice.

Nyní si spočítám fázovou rychlost. Obdobnými úpravami mám

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad /\cdot\hbar = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{m(v)c^2}{m(v)v} = \frac{c^2}{v}$$

Vidíme, že $v_g \neq v_f$, tedy dochází k disperzi.

122. Napište Schrödingerovu rovnici pro atom vodíku. Ukažte, které operátory spolu komutují a jaké jsou jejich vlastní čísla, jakých hodnot mohou nabývat. Jakými čísly je určena vlnová funkce elektronu vodíku?

Atom vodíku se skládá z jednoho protonu a jednoho elektronu. Bezčasová Schrödingerova rovnice má tvar

$$\hat{H}\Phi = E\Phi$$

Operátor kinetické energie je nám již známý, zde si můžu i vyjádřit operátor potenciální energie $\hat{U} = U$, kde U je elektrostatická potenciální energie protonu a elektronu. Rovnice má tedy tvar

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\Phi = E\Phi}$$

Kde hodnota E je shodná s energiemi Bohrova atomu vodíku. Pokud bychom chtěli z této rovnice určit přesný předpis pro Φ, dostaneme se do slušnýho fekálu, kdy diferenciální rovnici řešíme separací proměnných ve sférických souřadnicích. Společně spolu můžu měřit veličiny (operátory spolu komutují):

$$[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0 \qquad [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0 \qquad [\hat{L}^2, L_z] = 0$$

L^2 je kvadrát velikosti momentu hybnosti a L_z je velikost jedné jeho složky (může to být i x nebo y atd.).

Vlastní čísla příslušných operátorů budou:

$$\text{Pro hamiltonián } \hat{H} \qquad E_n = \boxed{-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}} \quad \text{viz Bohrův model}$$

$$\text{Pro kvadrát velikosti momentu hybnosti } \hat{L}^2 \quad \boxed{L^2 = \hbar^2 l(l+1)}$$

$$\text{Pro jeho velikost jedné složky } \hat{L}_y \quad \boxed{L_z = \hbar m_l}$$

Kde $n = 1, 2, 3\ldots$, $l = 0, 1\ldots, n-1$ a $m_l = -l\ldots 0\ldots l$ jsou *kvantová čísla*. Vidíme, že vlastní čísla jsou jejich násobek určité fixní hodnoty, tedy jsou kvantována. V principu je tedy vlnová funkce elektronu v atomu vodíku Φ dána těmito třemi čísly:

$$\hat{H}\Phi_{n,l,m_l} = E_n\Phi_{n,l,m_l}$$

Celá otázka, týkající se kvantových čísel je č. 126.

123. Nalezněte vztah pro velikost orbitálního magnetického dipólového momentu a jeho z-tovou složku pro případ elektron vodíku. Jak je zaveden Bohrův magneton?
Na nalezení dipólového momentu beru elektron orbitující okolo protonu jako proudovou smyčku. Víme, že dipólový moment se s dobrou přesností spočítá jako $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$. I je proud ve smyčce a $\mathbf{S}$ je orientovaná plocha smyčky. Bude zde platit, že

$$S = \pi r^2 \qquad I = \frac{\triangle Q}{\triangle t} = \frac{-e}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{-ev}{2\pi r}$$

A tedy

$$m = IS = -\frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = -\frac{evr}{2} \quad \Big/ \cdot \frac{m}{m} = -\frac{ermv}{2m} = -\frac{eL}{2m}$$

Z předchozí otázky víme, že kvadrát velikosti momentu hybnosti je kvantovaný - $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$. Z toho vyplývá $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ a to dosadíme:

$$m = -\frac{eL}{2m} = -\frac{e\hbar\sqrt{l(l+1)}}{2m} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{m = -m_\mathrm{b}\sqrt{l(l+1)}} \quad \text{kde} \quad \boxed{m_\mathrm{b} = \frac{e\hbar}{2m}}$$

m_b se nazývá *Bohrův magneton.* Pokud bychom místo veliksoti L uvažovali jen průmět do z-složky, bude platit $L_z = \hbar m_l$ a tedy

$$m_z = -\frac{eL_z}{2m} = -\frac{m\hbar}{2m}m_l \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{m_z = -m_\mathrm{b}m_l}$$

124. Co nám demonstruje Sternův-Gerlachův experiment? Jaké závěry byly postulovány na základě tohoto experimentu?
Experiment dokázal, že velikost vnitřního momentu hybnosti elektronu $\mathbf{S}$ je také kvantovaná a závisí na spinovém čísle s. Vnitřní moment hybnosti elektronu je jedna z jeho základních charakteristik a nazývá se také jednoduše *spin.*
Libovolně zvolená složka spinu je také kvantována, závisející na na hodnotě magnetického spinového čísla m_s, které se tak stává naším 4. kvantovým číslem.

125. Co chápeme pod pojmem spin, jakých hodnot nabývá vlastní moment hybnosti elektronu a jeho z-tová složka? Jak se liší spinová vlnová funkce od vlnové funkce, která je řešením Schrödingerovy rovnice?
Spin $\mathbf{S}$ - vlastní moment hybnosti částice (elektronu).
Jeho velikost je kvantovaná podle

$$\boxed{|\mathbf{S}| = \hbar\sqrt{s(s+1)}}$$

Kde $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \ldots$ je spinové číslo. Jedna zvolená složka $\mathbf{S}$ (projekce spinu do lib. osy), řekněme do z, je také kvantována:

$$\boxed{S_z = m_s\hbar}$$

Kde $m_s = \pm\frac{1}{2}$ je magnetické spinové číslo.
Pokud tedy mám atomy s více elektrony, musím je od sebe ještě odlišit svým spinem. Tedy k charakterizaci vlnové funkce budu už potřebovat 4 kvantová čísla.

$$\Phi = \Phi_{n,l,m_l,m_s}$$

126. Jaká rozlišujeme kvantová čísla, co chápeme pod pojmem jednoelektronová aproximace? ☠
Kvantová čísla máme 4:

- Hlavní kvantové číslo n - určuje hodnotu energie. $n = 1, 2, 3\ldots$
- Vedlejší kvantové číslo l - určuje velikost momentu hybnosti. $l = 0, 1, \ldots, n-1$
- Magnetické kvantové číslo m_l - projekce momentu hybnosti do libovolné osy (popisuje jednu složku vektoru). $m_l = -l\ldots, 0, \ldots l$
- Magnetické spinové kvantové číslo m_s - určuje projekci spinu do libovolné osy. $m_s = \pm\frac{1}{2}$

Jednoelektronová aproximace (dojde na ní později) - v atomech zanedbám vzájemné působení elektronů mezi sebou.

127. Co jsou to nerozlišitelné částice, symetrická a antisymetrická vlnová funkce. Pro které skupiny částic se používá symetrické, a pro které antisymetrické vlnové funkce?
Nerozlišitelné částice - nejsem schopen rozeznat jednu od druhé, pokud je zaměním, nepoznám změnu. Jejich pravděpodobnosti výskytu se rovnají.
Pokud

$$\text{vyměním dvojici částic} \begin{cases} \text{systém } \Phi \text{ se nezmění - } \textit{symetrická} \\ \Phi \text{ změní znaménko - } \textit{antisymetrická} \end{cases}$$

Bosony - částice se symetrickou vlnovou funkcí. Mají celočíselný spin.
Fermiony - částice s antisymetrickou vlnovou funkcí, s poločíselným spinem. Např. protony a elektrony.

128. Pomocí antisymetrické funkce vysvětlete Pauliho vylučovací princip. Jaké je jeho znění pro elektrony v atomech?

Pauliho vylučovací princip - žádné dva nerozlišitelné fermiony nemohou být v atomu ve stejném kvantovém stavu (mají všechna kvantová čísla stejná).
Fermiony jsou částice s poločíselným spinem a mají tedy antisymetrickou vlnovou funkci. Tam platí, že pokud zaměním dvě částice, změní se mi znaménko u vlnové funkce.
Zároveň platí, že vlnovou funkci více částic, napíšu jako součin jednotlivých vlnových funkcí pro každou částici zvlášť. Uvažuji tedy dvě částice, jednu ve kvantovém stavu a a druhou ve stavu b. Jejich společná vlnová funkce je

$$\Phi_I = \Phi_1(a)\Phi_2(b)$$

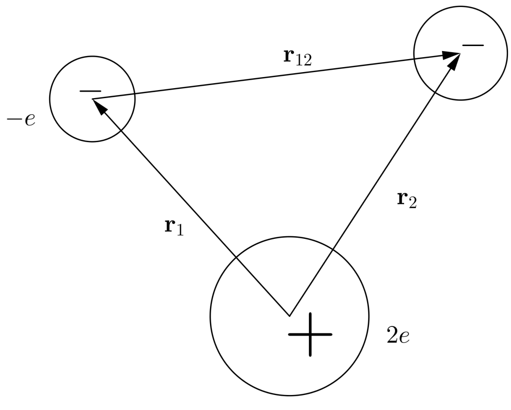
Pokud to prohodím, částice 1 bude ve stavu b a částice 2 ve stavu a:

$$\Phi_{II} = -\Phi_1(b)\Phi_2(a)$$

Je ale úplně stejná pravděpodobnost, že stav obou částic bude buď Φ_I nebo Φ_{II}. Vhodným popisem systému dvou částic je tedy jejich lineární kombinace:

$$\Phi_\mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_1(a)\Phi_2(b) - \Phi_1(b)\Phi_2(a)]$$

Kde člen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tam je kvůli normovací podmínce pro vlnovou funkci.
Z posledního členu je ale vidět, že pokud by částice byly ve stejném stavu a $a = b$, vyšlo by $\Phi_\mathrm{A} = 0$. Což je neplatný stav, který nemůže nastat a dvě částice tedy nemohou být ve stejném stavu - Pauliho princip je potvrzen.



Obrázek 19: Atom helia

129. Napište Schrödingerovu rovnici pro elektrony atomu hélia.

Schematický nákres atomu helia je na obrázku. Vyjádříme si vztah pro celkovou potenciální energii

$$U = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2} - \frac{1}{r_{12}}\right) \overset{\text{jednoel. approx}}{=} \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2}\right)$$

A bezčasová Schrödingerova rovnice má tvar

$$\boxed{\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_1^2\Phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_2^2\Phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2}\right)\Phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = E\Phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)}$$

Kde pokud $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, tak v ∇_1 jsou parciální derivace podle prvních souřadnic a v ∇_2 podle druhých.

130. Popis elektronů v jádře atomů, jednoelektronová aproximace, slupky, podslupky a notace pro elektrony v jednotlivých podslupkách.

Elektron je v atomu plně popsán svými kvantovými čísly.
Elektrony se stejným číslem n, mají zhruba stejnou energii a jsou tedy ve stejné vzdálenosti od jádra. Říká se, že tyto elektrony obsazují atomovou *slupku*. Jednotlivé slupky se označují velkými písmeny

$$\begin{array}{rcccccc} n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ & K & L & M & N & O & \ldots \end{array}$$

Energie elektronů však do jisté míry závisí i na čísle l (ne tolik jako na n). Je-li velké, má rozdělení pravděpodobnosti výskytu zhruba kruhové obrysy, při menším l spíše eliptické. Elektron s malým l se tedy pravděpodobněji nalézá poblíž jádra, než elektron s velkým l. Pro zvětšující se l se tedy snižuje celková energie a naopak roste energie vazebná.
Elektrony ve stejné slupce se stejným l tvoří *podslupku*. Pro hodnoty l platí

$$\begin{array}{rccccccc} l = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ & s & p & d & f & g & h & \ldots \end{array}$$

Tedy například konfigurace $1s^2$ znamená, že podslupka $1s$ $(n = 1, l = 0)$ obsahuje dva elektrony.

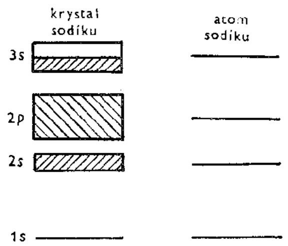
131. Vysvětlete pomocí kvantové mechaniky kovalentní vazbu.

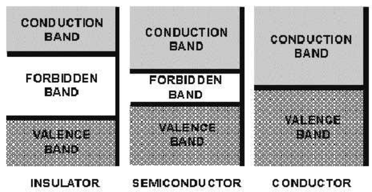
Molekula je stabilní uspořádání dvou a více elektronů. Energie takto spojeného systému je nižší, než energie oddělených atomů. Pokud nějaký typ interakce snižuje celkovou energii mezi atomy, mohou vytvořit molekulu. Pokud je tomu naopak atomy se odpuzují.
Pokud se budou dva atomy stále více k sobě přibližovat, mohou nastat 3 krajní případy. Vznikne *kovalentní* vazba, *iontová*, nebo žádná.
Kovalentní vazba vznikne tak, že elektrony budou společné oběma elektronům, dojde k tzv. sdílení elektronů. Tyto elektrony kolují mezi atomy, tím pádem stráví více času v prostoru mezi nimi než jinde. Elektrony jsou záporně nabité, tady dojde k vzájemnému přitahování obou protonů - vzniká přitažlivá síla. Příkladem je například molekula vodíku H_2.

Vazba lze vysvětlit i kvantovou mechanikou následovně. Proton představuje pro elektron, orbitující kolem něho, potenciálovou jámu (krabici). Pokud mám dva atomy, s dvěma protony, jsou to tedy v podstatě dvě potenciálové jámy vedle sebe. Podle klasické mechaniky není možné, aby elektron zábranou mezi dvěma systémy pronikl. Víme však, že platí jev kvantového tunelování a částice má nenulovou pravděpodobnost, že bariérou projde a dostane se do druhé jámy, resp. začne orbitovat druhý proton. Při blízké vzdálenosti přejde elektron od jednoho atomu k druhému přibližně každých 10^{-15} s a považujeme ho tedy za společný pro oba atomy (sdílení elektronu).
Aby mohl výše zmíněný princip tvořit vazby v molekule, musíme dokázat, že snižuje celkovou energii systému. Podle Heisenbergova principu neurčitosti platí, že pokud zvyšuji neurčitost určení polohy, snižuje se mi neurčitost hybnosti a tedy i kinetické energie elektronu. Pokud je sdílený oběma atomy, je méně omezený v pohybu než pro jeden, tedy bude mít menší kinetickou energii.

132. Vysvětlete vznik energetických pásů u pevných látek. Pomocí teorie energetických pásů vysvětlete chování vodičů, izolantů a polovodičů.

Jednotlivé atomy mají své charakteristické energetické hladiny. Pokud však máme pevnou krystalickou látku, kde jsou řádově *miliardy* atomů, které jsou blízko sebe, nelze jednotlivé hladiny atomů od sebe diskrétně rozlišit. Přejdou tedy v *energetické pásy*. Elektrony mohou mít v pevné látce jen ty energie, které patří do příslušného energetického pásu. Jednotlivé pásy se mohou překrývat i nemusí - vzniká tak tzv. zakázaný pás, představující oblast energií, které elektrony nemohou mít.
Na obrázku je vidět rozdíl hladin atomu a krystalu pevné látky sodíku.





- *Vodič* má pás plně obsazený elektrony (vodivostní) a prázdný (bez elektronů) velice blízko sebe, či přímo na sebe přiléhající. Elektronům tak staří jen velice malá energie, aby přešli z jednoho pásu do druhého a podíleli se tak na vedení el. proudu
- *Izolanty* - vodivostní a prázdný pás nejsou blízko u sebe, mají mezi sebou zakázaný pás s takovou šířkou, že na přeskočení z jednoho do druhého by elektrony potřebovali velkou energii.
- *Polovodiře* - opět se mezi prázdným a vodivostním nachází zakázaný pás, má však menší tloušťku než u izolantu. Navíc může záviset na vnějších vlivech, jako například teplotě.

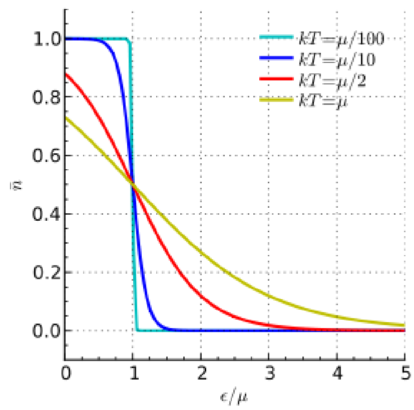
133. Uveďte vztah pro Fermiho-Diracovu distribuci, zakreslete její průběh.

Rozdělení platí pro nerozlišitelné částice, řídící se Pauliho vylučovacím principem. Má tvar

$$\boxed{n_i = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} + 1}}$$

Kde n_i je střední počet částic s energií E a μ je tzv. Fermiho energie. k je Boltzmannova konstanta a T je teplota.
Fermiho energie hodnota termodynamické práce, která je potřeba na přenesení jednoho elektronu do systému.

Obrázek 20: Průběh F-D rozdělení pro různé teploty



134. Jak je definován standardní model vesmíru?

Veškerá hmota je tvořena 6ti leptony a 6ti kvarky, které na sebe působí čtyřmi druhy interakcí.

135. Jaké základní interakce rozlišujeme, uspořádejte je podle velikosti a dosahu.

	síla	dosah
silná	10	10^{-15}
elektromagnetická	10^{-2}	∞
slabá	10^{-13}	10^{-18}
gravitační	10^{-38}	∞

136. Co jsou to leptony? Jaké leptony známe?
Leptony nepodstupují silnou interakci. Jsou to fundamentální částice bez vnitřní struktury. Každá má svojí antičástici a neutrino (neutrální částici).

částice	náboj [e]	antičástice	náboj [e]
elektron e^-	-1	pozitron e^+	1
elektronové neutrino ν_e	0	elektronové antineutrino $\bar{\nu_e}$	0
mion μ^-	-1	antimion μ^+	1
mionové neutrino ν_μ	0	mionové antineutrino $\bar{\nu_\mu}$	0
tauon τ^+	-1	antitauon τ^-	1
tauonové neutrino ν_τ	0	tauonové antineutrino $\bar{\nu_\tau}$	0

137. Co jsou to hadrony, baryony, mezony?
Hadrony - částice, které *mají vnitřní strukturu* (narozdíl od leptonů). Jsou tvořeny kvarky až šesti druhů. Dále je dělíme na

- *Bariony* - mají poločíselný spin (fermiony) a skládají se ze tří kvarků.
- *Mezony* - celočíselný spin (bosony) a jsou složeny z kvarku a antikvarku.

138. Jak je definováno protonové, neutronové a hmotnostní číslo, co je to izotop?

$$^{\mathrm{A}}_{\mathrm{z}}\mathrm{X}$$

A se nazývá nukleonové (hmotnostní) číslo a značí počet nukleonů v jádru. **z** je protonové číslo a udává počet protonů v jádru. Neutronové číslo se moc nepoužívá, ale asi by značilo počet neutronů v jádru.
Nuklid je látka složená z atomů stejného prvku, se stejným **A**. *Izotop* je označení pro nuklid v rámci souboru více nuklidů jednoho prvku.

139. Napište empirický vztah pro poloměr jádra v závislosti na jeho hmotnostním čísle.

$$\boxed{r_{\mathrm{j}} = 1,3A^{1/3} \cdot 10^{-15} \;\; [\mathrm{m}]}$$

Bonus - pokud si zadefinujeme tzv. atomovou hmotnostní jednotku pomocí hmotnosti izotopu uhlíku, dostaneme jednoduchý vztah pro hmotnost jádra.

$$m_{\mathrm{u}} = \frac{1}{12} m\left({}^{12}_{6}\mathrm{C}\right) \approx 1,6 \cdot 10^{-27} \;\; [\mathrm{kg}]$$

A potom

$$m_{\mathrm{j}} = m_{\mathrm{u}} A \;\; [\mathrm{kg}]$$

140. Jak je definována vazbová energie jádra?
Vazbová, nebo taky vazební energie souvisí se všemi pracemi spojenými s vytvořením jádra. Při vzniku jádra se uvolňuje a naopak, je rovna energii kterou je třeba dodat, abychom jádro rozebrali na jednotlivé nukleony. Do velké míry tak určuje velikost vazeb mezi nimi.
Hodnotou se rovná energetickému ekvivalentu rozdílu hmot jádra a jeho stavebních částic. Pokud mám

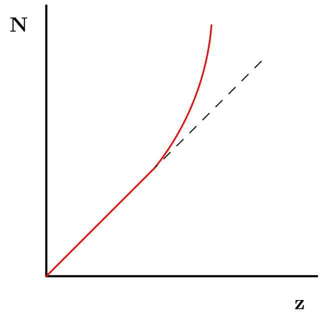
$$\triangle m = \mathbf{z} m_{\mathrm{p}} + (\mathbf{A} - \mathbf{z}) m_{\mathrm{n}} - \underbrace{m(\mathbf{z}, \mathbf{A})}_{\text{celk. } m \text{ jádra}}$$

se vazební energie vypočítá jako

$$\boxed{E = \triangle m c_0^2}$$

141. Co nám popisuje slupkový model jádra atomu?
Je to jakási analogie mezi celkovým modelem atomu. Nukleony obsazují jednotlivé energetické slupky, stejně jako elektrony v atomovém obalu.

142. Vysvětlete proč jádro drží pohromadě. Zakreslete a vysvětlete závislost mezi počtem protonů a neutronů v jádře.
Jádro je nejstabilnější, pokud jsou plně obsazeny všechny jeho energetické hladiny.
Mezi nukleony působí přitažlivé síly (silná interakce). Pokud je jádro velké, interagují jen s těmi nejbližšími, díky tomu, že silná interakce má jen velmi krátký dosah. Jednotlivé protony však na sebe působí odpudivou *elektrostatickou* silou, která je sice slabší, zato má mnohem delší dosah než síla silná. Ve stabilním stavu jsou obě síly v rovnováze, případně převládá silná interakce.
Pokud bychom ale do jádra sypali další a další protony, budou obsazovat vyšší energetické hladiny a jádro bude velké. Elektrostatická odpudivá síla pak může převážit přitažlivou silnou a jádro se stane nestabilní.



Obrázek 21: Závislost počtu nukleonů a protonů

143. Co je to radioaktivita? Definujte exponenciální zákon rozpadu,poločas rozpadu, aktivitu.
Nuklidy se dělí na

$$\text{Nuklidy} \begin{cases} \text{stabilní} \\ \text{nestabilní (radionuklidy)} \end{cases}$$

které se ještě dělí na umělé a přirozené. U radionuklidů dochází ke spontánní přeměně (rozpadu), což je spojeno s vyzářením částic. - *Radioaktivita*.
Rozpad jader popisuje následující zákon

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \lambda n}$$

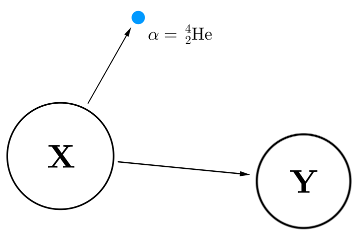
Kde n je počet částic v daném časovém okamžiku. $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$ je rychlost rozpadu jader, neboli tzv. *aktivita* a λ je rozpadová konstanta.
Pokud si budu chtít vyjádřit přímý vztah pro n, stačí tuto diferenciální rovnici vyřešit. To dokonce můžeme i uhodnout:

$$\boxed{n = n_0 e^{-\lambda t}}$$

Kde jsme konstantu, která se objeví při řešení, označili n_0 a značí počet částic v čase $t = 0$.
Poločas rozpadu T - čas, kdy už se mi rozpadla přesně polovina částic z původního počtu n_0. Vztah pro T určíme z posledního vztahu. Budeme mít totiž

$$\frac{n_0}{2} = n_0 e^{-\lambda T} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{T = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

144. Popište a vysvětlete radioaktivitu α.

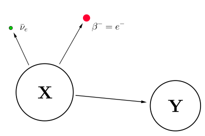


$${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{z}}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{\mathrm{A-4}}_{\mathrm{z-2}}\mathrm{Y} + {}^{4}{}_{2}\mathrm{X}$$

Jedná se o diskrétní (čárové) přeměny, kdy se jádro snaží snížit svojí velikost, aby bylo stabilnější. Spontánně tak přechází z méně stabilního stavu do stabilnějšího vyzářením částice α - jádra helia. Jsou extrémně stabilní.

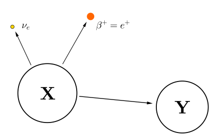
145. Popište a vysvětlete radioaktivitu β (β^-, β^+ a elektronový záchyt).
Jedná se o spojitou přeměnu jader, kdy při β^- se z jádra uvolňuje elektron a elektronové antineutrino, při β^+ je to pozitron a elektronové neutrino. Jedná se podobně jako rozpad alfa o prostředek, kterým může jádro změnit poměr neutronů a protonů a dosáhnout tak větší stability. Beta částice mají větší pronikavost než alfa.

β^-



$${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{z}}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{z+1}}\mathrm{Y} + e^- + \bar{\nu}_e$$

β^+

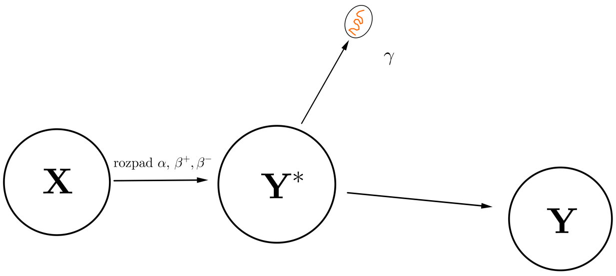


$${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{z}}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{z-1}}\mathrm{Y} + e^+ + \nu_e$$

Záchyt elektronu - jedná se o jakousi alternativu k beta rozpadu u atomů s přebytkem protonů. Jádro zde pohltí jeden elektron z vnitřních slupek obalu. Tím se proton v jádře změní na neutron, spolu s emisí elektronového neutrina.

$$^{\mathrm{A}}_{\mathrm{z}}\mathrm{X} + e^- \longrightarrow {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{z\text{-}1}}\mathrm{Y} + \nu_e$$

146. Popište a vysvětlete radioaktivitu γ.
Záření gamma je často spojeno s některým z předchozích. Pokud jádro vyzáří některou z částic, může se dostat do excitovaného stavu (elektrony v obalu atomu obsazují vyšší energetické hladiny než je základní stav). Z excitovaného stavu zpět do základního s nižší energií, může přejít vyzářením fotonu (částici γ) o velké energii. Záření gamma je tak pro živý organismus nejnebezpečnější a také potřebuji nejsilnější zábranu, abych ho odstínil. Čistý gamma zářič neexistuje v přírodě.



Bonus

aneb co už není v otázkách, ale u zkoušky můžete dostat

Napište van der Waalsovu stavovou rovnici.
(Hodně častá otázka)
Rovnice bere v úvahu vzájemné interakce mezi částicemi (molekulami), které snižují celkový tlak např. na stěny nádoby. Pro *molární objem* $V_m = \frac{V}{n}$, kde n je látkové množství a a, b konstanty, charakteristické pro každý plyn (určíme experimentálně) a p klasicky tlak, má rovnice tvar

$$\boxed{\left(p - \frac{a}{V_m^2}\right)\left(V_m - b\right) = RT}$$

Napište obecný Fourierův zákon.

$$\boxed{\dot{\mathbf{q}} = -\lambda \nabla T}$$

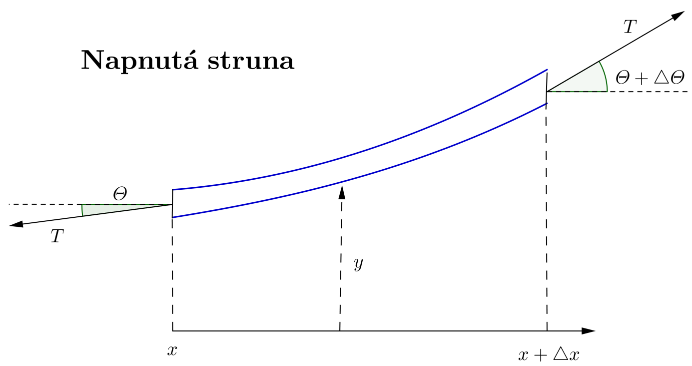
Rovnice vyjadřuje vedení tepla. $\dot{\mathbf{q}}$ je hustota tepelného toku, λ je součinitel tepelné vodivosti a ∇T je gradient teploty.

Napište Wiedermannův-Franzův zákon.

$$\boxed{\frac{\lambda}{\gamma} = LT}$$

Kde λ je součinitel tepelné vodivosti, γ je elektrická vodivost a L je Lorentzova konstanta (T je teplota).

Odvoďte kanonický tvar vlnové rovnice.
Odvození je skutečnou oslavou fyzikálního přístupu k věci. Budu uvažovat strunu, napnutou mezi dvěma body, která je na obou stranách vychylována nějakou silou T (dejme tomu, že na obou stranách stejnou).



Vlivem vychýlení nebude úhel Θ na obou stranách stejný, napravo se bude lišit o hodnotu $\triangle\Theta$. Také uvažuji, že body na struně se mohou hýbat jen do směru y a x-ová pozice je fixní.
Nyní si vyjádřím sílu, která na strunu působí. Jelikož se struny prohýbá pouze do y stačí mi pouze ypsylonová složka této síly. Ta bude rovna součtu sil, které strunu napínají nalevo a napravo (taky do příslušného směru).

$$F_y = -T\sin\Theta + T\sin(\Theta + \triangle\Theta)$$

Siny příslušných úhlů tam jsou kvůli zmíněnému směru pouze do y. Mínus u prvního členu na pravé straně je tam proto, protože tato síla strunu táhne dolů, do záporného směru y.
Teď provedeme klasické fyzikální zjednodušení. Bereme, že úhly Θ a $\Theta + \triangle\Theta$ jsou velmi malé a můžu psát

$$\sin\Theta \approx \Theta \qquad \sin(\Theta + \triangle\Theta) \approx \Theta + \triangle\Theta$$

A pro sílu působící na strunu do směru y platí:

$$F_y = -T\Theta + T\Theta + T\triangle\Theta = T\triangle\Theta$$

Tento výsledek si zatím ponecháme. Pro sílu totiž bude taky určitě platit 2. Newtonův zákon

$$F_y = ma = m\ddot{y} = \mu\triangle x\ddot{y}$$

Kde μ je hmotnost na jednotku délky, tedy $\mu\triangle x$ je hmotnost celé struny. To si dám do rovnosti s naším prvním výsledkem

$$\mu\triangle x\ddot{y} = T\triangle\Theta \tag{25}$$

Hodilo by se nám teď zjistit, kolik je vlastně to Θ. Můžu využít, že derivace je směrnice grafu, tedy tangens nějakého úhlu. Pokud za tento úhel zvolím zrovna Θ a prohnutí struny bude malé, můžu zhruba psát

$$\tan\Theta \approx \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

A tuto rovnici ještě zderivuji podle x. Na levé straně mám složenou funkci, nejdříve provedu derivaci vnější (tangens) a pak vnitřní funkce (Θ). Mám tedy

$$\frac{1}{\cos^2\Theta}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

Protože derivace funkce tangens je cosinus na druhou v převrácené hodnotě. Zase využijeme zjednodušení, že Θ je malý úhel. Pak totiž můžeme psát $\cos^2\Theta \approx 1$. Takže

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\triangle\Theta}{\triangle x} \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle\Theta = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\triangle x$$

A tento získaný výraz pro thetu dosadím do naší rovnice pro sílu (číslo 25). Napíšu si rovnou $\ddot{y}$ jako druhou časovou derivaci a mám

$$\mu\triangle x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = T\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\triangle x$$

Vidím, že můžu zahodit člen $\triangle x$. Pak ještě převedu T doleva.

$$\frac{\mu}{T}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

Podívám se na rozměr členu $\frac{\mu}{T}$ a vidím, že je: $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{J}}\right] = \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg\ m^2 s^{-2}}}\right] = \left[\mathrm{m^{-2}\ s^2}\right]$, takže můžu psát $\frac{\mu}{T} = \frac{1}{c^2}$, kde c je rychlost kmitání struny. *A mám finální tvar*

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}$$

Z Maxwellových rovnic odvoďte vztah mezi vlnovým vektorem, intenzitou elektrického pole a magnetickou indukcí.
Potřebuji dostat vztah, známý z otázky 72. Stačí v podstatě jen vyjít z Faradayova indukčního zákona a pohrát si s diferenciálními operátory. Budu dokazovat následující

$$\text{(i)}\quad \nabla\cdot\mathbf{E} = j\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} \qquad \text{(ii)}\quad \nabla\times\mathbf{E} = j\mathbf{k}\times\mathbf{E} \qquad \text{(iii)}\quad \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -j\omega\mathbf{B}$$

Důkaz: Obě fyzikální veličiny si popíšu komplexní obecnou, harmonickou, vlnovou funkcí, tedy např. pro intenzitu $\mathbf{E} = \mathbf{E_0}e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)}$.

(i)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \frac{\partial \left[\mathbf{E_0} e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\mathbf{E_0} e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)}\right]}{\partial y} + \frac{\partial \left[\mathbf{E_0} e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)}\right]}{\partial z}$$

A jelikož platí, že $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ dostanu

$$\frac{\partial \left[\mathbf{E_0} e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\mathbf{E_0} e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)}\right]}{\partial y} + \frac{\partial \left[\mathbf{E_0} e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)}\right]}{\partial z} = jk_x\mathbf{E} + jk_y\mathbf{E} + jk_z\mathbf{E} = j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \quad \checkmark$$

(ii)

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \\ \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

$$= \left(jk_y E_z - jk_z E_y, jk_z E_x - jk_x E_z, jk_x E_y - jk_y E_x \right) = j\mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad \checkmark$$

(iii)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B_0} e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi)} = -j\omega\mathbf{B} \quad \checkmark$$

QED.
V otázce na odvození telegrafních rovnic jsme ukázali, že pokud jsem ve vodivém prostředí, nemusím téměř vůbec uvažovat volný náboj. Vezmu si tedy Maxwellky:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad j\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{B} \end{aligned}$$

V první rovnici je na pravé straně nula právě díky $\rho_{\text{v. náb.}} = 0$.
Vidíme, že směr šíření vlny je kolmý jak na vektor intenzity tak indukce. Celkovou polohu těchto tří vektorů odvodíme z Faradayova indukčního zákona:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad j\mathbf{k} \times \mathbf{E} = j\omega\mathbf{B} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{B}}$$

A jelikož $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ a $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$, musí tedy platit, že $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

Odvoďte rovnici adiabaty.
(credits: Tonda Krpenský)
Začnu z definice entalpie H. Jeden z důvodů jejího zavedení bylo, že je má úplný diferenciál, narozdíl od např. objemové práce.

$$H = U + pV$$

A tuto rovnici zdiferencuju (úplně pravý člen jako složenou funkci)

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V + U\mathrm{d}p \tag{26}$$

Pro diferenciál vnitřní energie platí 1. termodynamický zákon

$$\mathrm{d}U = \delta Q - \delta W = \delta Q - p\mathrm{d}V \tag{27}$$

A to dosadím zpět do diferenciálu entalpie (rovnice 26). Mám

$$\mathrm{d}H = \delta Q + V\mathrm{d}p \tag{28}$$

Potřeboval bych do hry dostat příslušné tepelné kapacity. Budu uvažovat tep. kapacitu za konstantního tlaku. Pokud mám ale tlak konstantní, je člen $\mathrm{d}p = 0$. Pro diferenciál entalpie pak platí

$$\mathrm{d}H = \delta Q$$

Definice tepelné kapacity je kolik musim přivést tepla na ohřátí soustavy o jeden stupeň. Tedy konkrétně pro C_p:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right)_p = \left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}\right)_p \qquad \text{jelikož } H = H(T) \quad \Longrightarrow \quad C_p = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}$$

A tedy

$$\mathrm{d}H = C_p \mathrm{d}T \tag{29}$$

Obdobně budu postupovat i v případě tepelné konstanty za konstantního objemu. Akorát vyjdu z rovnice 27. Opět prohlásím, že při $V = \text{konst}$ je $\mathrm{d}V = 0$ a mám

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right)_V = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}\right)_V \qquad \text{protože } U = U(T) \quad \text{!pro ideální plyn!} \quad \Longrightarrow \quad C_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}$$

Takže

$$\mathrm{d}U = C_V \mathrm{d}T \tag{30}$$

Tyto nové poznatky (rovnice 29 a 30) dosadím do původních rovnic pro entalpii a vnitřní energii (27 a 28). Dostanu pak soustavu

$$C_p \mathrm{d}T = \delta Q + V\mathrm{d}p$$
$$C_V \mathrm{d}T = \delta Q - p\mathrm{d}V$$

Rovnice adiabaty platí pro adiabatický děj (překvapivě). Tedy $\delta Q = 0$ a z soustavy mám jen

$$C_p \mathrm{d}T = V\mathrm{d}p$$
$$C_V \mathrm{d}T = -p\mathrm{d}V$$

Tyto dvě rovnice podělím a dostanu jednu

$$-\frac{V\mathrm{d}p}{p\mathrm{d}V} = \frac{C_p}{C_V} = \kappa$$

Kde už mám adiabatickou konstantu κ, tzv. Poissonův poměr. Tímto vlastně dostávám jednoduchou diferenciální rovnici (řešíme metodou separace)

$$\frac{1}{p}\mathrm{d}p = -\kappa \frac{1}{V}\mathrm{d}V$$

$$\int \frac{1}{p}\mathrm{d}p = -\kappa \int \frac{1}{V}\mathrm{d}V$$

$$\ln(p) + C_1 = -\kappa \ln(V) + C_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(p) + \ln(V^\kappa) = \ln(C) \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(PV^\kappa) = \ln(C)$$

Z toho tedy plyne

$$\boxed{PV^\kappa = \text{konst}}$$

Jak zní zákon zachování energie elektromagnetického pole?

Diferenciální tvar:

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0}$$

Kde ω je objemová hustota energie a S je množství energie, které projde danou plochou za jednotku času.

Integrální tvar:

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \oiint_{\mathbf{A}} \mathbf{S} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}}$$

Kde W je celková energie.

Interpretace zákona je, že úbytek energie za jednotku času v ploše, je roven vyteklé energii danou plochou (rovnice kontinuity).

Hodně štěstí u zkoušky!
