5.1. $Ax = b$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \neq 0$

(a) $m < n \Rightarrow$ soustava má vždy řešení

<u>neplatí</u>

např. $A = [0, 0]$

$\vec{b}$ by musel být 0, ale ze zadání $b \neq 0$!

(b) $m > n \Rightarrow$ soustava nemá nikdy řešení

<u>neplatí</u>

např. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\rightsquigarrow x = 2$

(c) $m < n$, A má plnou hodnost $\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

platí

$A: m \to n$

$\operatorname{rng}(A) = m$

$\operatorname{null}(A) = n - m$ (protože $m < n$, bude mít null dimenzi alespoň 1)

↳ bude netriviální → nekonečně mnoho řešení

5.3.

$\vec{P}u = \vec{q}$

$\min_u \|\vec{P}u - \vec{q}\|^2$

(b) vzdálenost bodu $y \in \mathbb{R}^n$ od přímky $\{a + ts \mid t \in \mathbb{R}\}$ $a, s \in \mathbb{R}^n$

$$\min \|a + ts - y\|^2 = \min \sum_{i=1}^{n} (a_i + ts_i - y_i)^2 \Rightarrow \min \sum_{i=1}^{n} (a_i + ts_i - y_i)^2$$

úloha nejmenších čtverců: $\vec{a} + t\vec{s} - \vec{y} = 0$

$\min \|\vec{s}t + \vec{a} - \vec{y}\| \Rightarrow \vec{s}t = \vec{y} - \vec{a}$

$P = \vec{s}$

$\vec{q} = \vec{y} - \vec{a}$

$u = t$ (neznámá)

řešení: $\vec{s}^T \vec{s} t = \vec{s}^T (\vec{y} - \vec{a})$

$\|\vec{s}\| t = \vec{s}^T (\vec{y} - \vec{a})$

$$t = \frac{\vec{s}^T (\vec{y} - \vec{a})}{\|\vec{s}\|}$$

5.8. $\vec{u} = (2, 1, -3)$

$\vec{v} = (1, -1, 1)$

$\vec{x} = (2, 0, 1)$

(c) projekce na span $\{\vec{u}, \vec{v}\}$

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^TA) = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (A^TA)^{-1} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A(A^TA)^{-1} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 1 & -12 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 34 & -10 & -6 \\ -10 & 13 & -15 \\ -6 & -15 & 29 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = A(A^TA^{-1})A^T\vec{x} = \underline{\underline{\frac{1}{38}(62, -35, 17)}}$$

(d) projekce na span $\{u, v\}^\perp$

$$A^Tx = 0 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

báze: $\vec{b} = (2, 5, 3)$

projekce na kolmý doplněk:

$$d = b(b^Tb)^{-1}b^Tz = \frac{1}{\|b\|^2}b(b^Tz) = \frac{b^Tz}{\|b\|^2}b = \underline{\underline{\frac{1}{38}(14, 35, 21)}}$$

5.9.

$$X = \text{Span}\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \begin{pmatrix} -3/5 \\ 0 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} a_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} a_3 \\ \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1^T \cdot a_2 &= 0 \\ a_1^T \cdot a_3 &= -\frac{12}{25} + \frac{12}{25} = 0 \\ a_2^T \cdot a_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ortogonalni}$$

$$\left.\begin{aligned} \|a_1\| &= \sqrt{(-3/5)^2 + (4/5)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1 \\ \|a_2\| &= 1 \\ \|a_3\| &= \sqrt{(4/5)^2 + (3/5)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1 \end{aligned}\right\} \text{ortonormalni}$$

projektor na X: $\quad P = AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

projektor na $X^\perp$: $\quad P = I - AA^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.17. $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\| = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

$$\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\| = \begin{bmatrix} a^T & b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^T a + b^T b =$$

$$= a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + \ldots a_n \cdot a_n + b_1 \cdot b_1 + b_2 \cdot b_2 + \ldots b_n \cdot b_n = \|a\|^2 + \|b\|^2$$