

# Úloha N 1

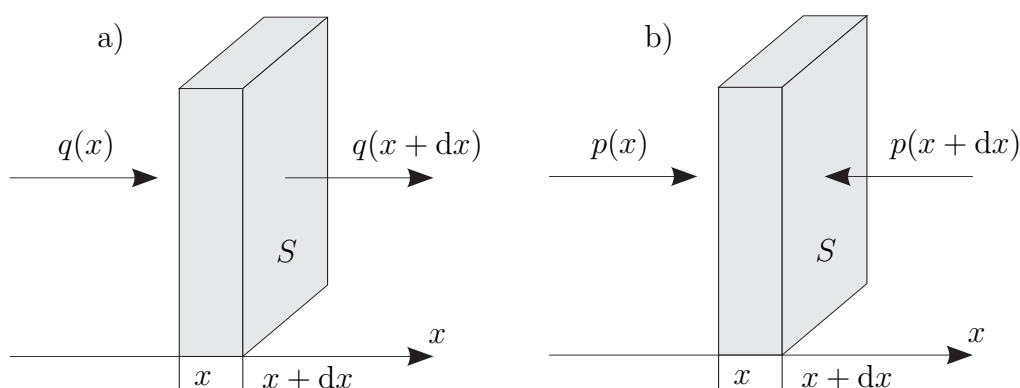
## Měření rychlosti zvuku ve vzduchu odrazem ultrazvukových impulsů

### 1.1 Úkol měření

Určete rychlost zvuku ve vzduchu pomocí měření doby mezi vysláním a registrací odražených ultrazvukových impulsů. Naměřenou hodnotu rychlosti zvuku porovnejte s hodnotou vypočtenou.

### 1.2 Linearizované rovnice zvukového pole

Na začátek si odvodíme základní vztahy pomocí nichž popisujeme zvukové pole a ukážeme si, že z nich lze sestavit vlnovou rovnici. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze jednorozměrný případ zvukového pole.



Obrázek 1.1: K rovnici kontinuity a k pohybové rovnici.

#### 1.2.1 Rovnice kontinuity

Provedeme odvození jednorozměrné rovnice kontinuity pro tekutinu pohybující se podél osy  $x$ , viz obrázek 1.1a). Do elementárního objemu  $dV$  přitéká tekutina s plošnou hustotou toku hmoty  $q(x)$ , zleva vytéká s plošnou hustotou hmoty  $q(x+dx)$ . Časová změna hmotnosti v elementu  $dV$  je tedy

$$\frac{dm}{dt} = S [q(x) - q(x+dx)], \quad (1.1)$$

kde  $m$  je hmotnost elementu objemu. Vzhledem k tomu, že hustota toku hmoty se na vzdálenosti  $dx$  změní jen málo, můžeme pomocí Taylorova rozvoje psát s dostatečnou přesností

$$q(x + dx) = q(x) + \frac{\partial q(x)}{\partial x} dx. \quad (1.2)$$

Protože pro hustotu toku hmoty platí  $q = \rho v$ , kde  $\rho$  je celková hustota,  $v$  je rychlost a pro hmotnost elementu objemu  $m = \rho S dx$ , dostaneme po dosazení (1.2) do (1.1) rovnici kontinuity v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}. \quad (1.3)$$

V akustice se celkovou hustotou  $\rho$  chápe hustota rovnovážná  $\rho_0$ , na kterou je nasuperponována tzv. hustota akustická  $\rho'$ , související se vzruchy šířícími se prostředím. Platí tedy  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , přičemž  $\rho' \ll \rho_0$ . Vzhledem k tomuto faktu a k rovněž k tomu, že hustota rovnovážná se s časem a v prostoru mění jen velice nepatrně, můžeme v rovnici kontinuity zanedbat členy  $\partial \rho_0 / \partial t$  a  $\partial(\rho' v) / \partial x$ , čímž dostaneme linearizovanou rovnici kontinuity ve tvaru

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.4)$$

### 1.2.2 Pohybová rovnice

Odvodíme jednorozměrnou pohybovou rovnici pro dokonalou tekutinu, viz obrázek 1.1b). Na element působí zleva tlak okolní kapaliny  $p(x)$ , zprava tlak  $p(x + dx)$ . Zanedbáme-li objemové síly, mezi něž patří například gravitace či síly setrvačné, můžeme pohybovou rovnici psát ve tvaru

$$m \frac{\partial v}{\partial t} = S [p(x) - p(x + dx)]. \quad (1.5)$$

Vzhledem k tomu, že tlak se na elementární vzdálenosti  $dx$  příliš nezmění, můžeme pomocí Taylorova rozvoje psát s dostatečnou přesností

$$p(x + dx) = p(x) + \frac{\partial p(x)}{\partial x} dx. \quad (1.6)$$

Po dosazení (1.6) do (1.5) a s využitím vztahu  $m = \rho S dx$  dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.7)$$

Celkový tlak  $p$  v akustice obvykle chápeme jako superpozici tlaku akustického  $p'$ , který souvisí se vzruchy šířícími se prostředím, na rovnovážný tlak prostředí (barometrický tlak)  $p_0$ , přičemž obvykle platí, že  $p' \ll p_0$  a že časová a prostorová změna tlaku rovnovážného je velice pomalá. Za těchto předpokladů můžeme pohybovou rovnici linearizovat do tvaru

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (1.8)$$

### 1.2.3 Stavová rovnice

Při šíření zvukové vlny ve vzduchu dochází k velmi rychlému zhušťování a zředování plynu, který je navíc velmi špatný vodič tepla. Z tohoto důvodu můžeme dosti dobře předpokládat, že nedochází k jeho výměně a že se tedy jedná o adiabatický proces, který je možné popsat adiabatickou stavovou rovnicí

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma \quad \implies \quad \frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (1.9)$$

kde  $V$  je objem a  $\gamma$  je adiabatický exponent. Budeme-li uvažovat pouze malé vzruchy šířící se prostředím, můžeme vztah (1.9) linearizovat. Taylorovým rozvojem vzorce (1.9) v okolí bodu  $\rho_0$  dostaneme po zanedbání členů řádu druhého a vyšších

$$p - p_0 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}(\rho - \rho_0), \quad (1.10)$$

což zapisujeme častěji ve tvaru

$$p' = c_0^2 \rho', \quad (1.11)$$

kde

$$c_0^2 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad (1.12)$$

je druhá mocnina rychlosti zvuku. Výše uvedený vzorec můžeme ještě upravit ze stavové rovnice ideálního plynu postupně dostaneme

$$pV = nRT \quad \rightarrow \quad p \frac{m}{\rho} = nRT \quad \rightarrow \quad p = \frac{n}{m} \rho RT \quad \rightarrow \quad p = \frac{\rho RT}{M},$$

kde  $R$  je molární plynová konstanta,  $T$  je termodynamická teplota,  $n$  je počet molů plynu a  $M$  je molární hmotnost tohoto plynu.

Dosadíme-li poslední vztah do vzorce pro rychlost zvuku (1.12), dostaneme

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma R}{M} T}, \quad (1.13)$$

odkud plyne, že při dané teplotě je rychlost zvuku větší v plynech s menší molární hmotností a že pro daný plyn je rychlost zvuku úměrná odmocnině termodynamické teploty. Pro teplotu ve stupních Celsia  $\theta$  dostaneme s použitím vztahu  $T = T_0 + \theta$  ( $T_0 = 273,15$  K) vzorec (1.13) ve tvaru

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M} \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right)}, \quad (1.14)$$

který pro  $\theta \ll T_0$  můžeme linearizovat prvními dvěma členy Taylorova polynomu, čímž dostaneme vzorec

$$c_0 \approx \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma R}{M T_0}} \theta \quad (1.15)$$

a po dosazení příslušných hodnot pro vzduch ( $\gamma = 7/5$ ,  $R = 8,3 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ ,  $M = 28,96 \text{ g mol}^{-1}$ ) dostaneme známý vzorec

$$c_0 \approx 331,06 + 0,61\theta \quad [\text{m/s}, ^\circ\text{C}]. \quad (1.16)$$

## 1.2.4 Vlnová rovnice

Jednorozměrné linearizované rovnice pro zvukové pole (1.4), (1.8), (1.11) tvoří pro bezetrátové prostředí uzavřenou soustavu parciálních diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.17a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (1.17b)$$

$$p' = c_0^2 \rho'. \quad (1.17c)$$

Tuto soustavu můžeme přepsat následujícím způsobem (vyloučíme akustickou rychlost a hustotu). Rovnici (1.17a) zderivujeme podle času a rovnici (1.17b) zderivujeme podle prostorové souřadnice, takže dostaneme

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}, \quad (1.18a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}. \quad (1.18b)$$

Z těchto rovnic vyloučíme smíšenou derivaci a za akustickou hustotu dosadíme ze vztahu (1.17c). Tím dostaneme vlnovou rovnici pro akustický tlak ve tvaru

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \quad (1.19)$$

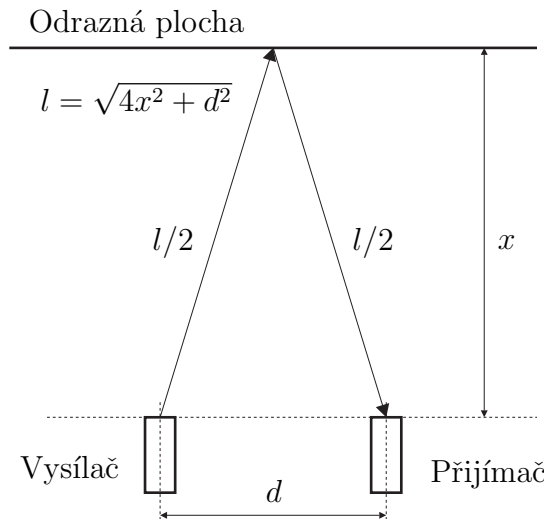
Přímým výpočtem (provedením příslušných derivací) snadno ověříme, že řešení vlnové rovnice můžeme napsat ve tvaru superpozice

$$p'(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t), \quad (1.20)$$

kde funkce  $f$  popisuje vlnu pohybující se v kladném směru osy  $x$  rychlostí  $c_0$  a funkce  $g$  pak vlnu pohybující se stejnou rychlostí ve směru opačném. Tvar funkcí  $f$  a  $g$  souvisí s počátečními a okrajovými podmínkami daného problému.

### 1.3 Měření rychlosti zvuku

Aparatura pro měření rychlosti je velmi jednoduchá, funguje na principu sonaru a schematicky je znázorněna na obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: Uspořádání experimentu.

Z ultrazvukového vysílače se vyšle krátký puls, který se šíří vzduchem jako zvuková vlna a po odrazu od stínítka je zachycen ultrazvukovým přijímačem. Z doby mezi vysláním a registrací odraženého pulsu a ze známé vzdálenosti  $l$  (viz obrázek 1.2) můžeme vypočítat rychlost zvuku  $c_0$ . Pro různé vzdálenosti  $l_i$  obdržíme různé doby  $\Delta t_i$ . Protože pro rovnoměrný pohyb platí známý vztah  $s = vt + s_0$ , kde  $s$ ,  $s_0$  je dráha a  $v$  je rychlost, můžeme rychlost zvuku vypočítat tak, že naměřené hodnoty  $\Delta t_i$ ,  $l_i$  pomocí metody nejmenších čtverců aproximujeme přímkou  $l = A\Delta t + B$ , takže pro rychlost zvuku dostaneme  $c_0 = A$ .

## 1.4 Pokyny pro měření

### 1.4.1 Postup měření

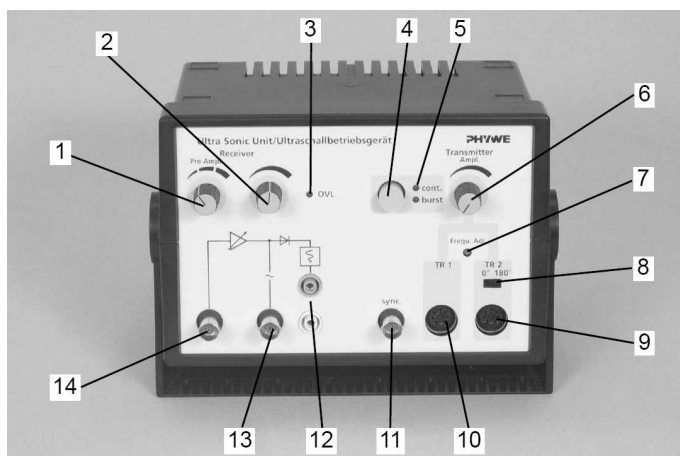
1. Zkontrolujte zapojení přístrojů.
2. Změřte časový odstup vyslaného a přijatého impulsu pro alespoň 10 různých vzdáleností odrazné plochy.
3. Pomocí metody nejmenších čtverců vypočítejte rychlost zvuku ve vzduchu. Tuto hodnotu porovnejte s hodnotou vypočtenou pro danou teplotu pomocí vzorce (1.16). K výpočtu rychlosti zvuku a vytvoření grafu použijte nástroj *Univerzální nástroj pro kreslení grafů*, který najdete na serveru **Herodes** (<http://herodes.feld.cvut.cz/mereni/>).

### 1.4.2 Zapojení přístrojů

Kabely a jednotlivé přístroje není třeba po ukončení měření rozpojovat, a proto tak zbytečně nečinite. V případě, že některé kabely budou přeci jen rozpojeny (nebo něco nebude fungovat), je níže uveden postup zapojení.

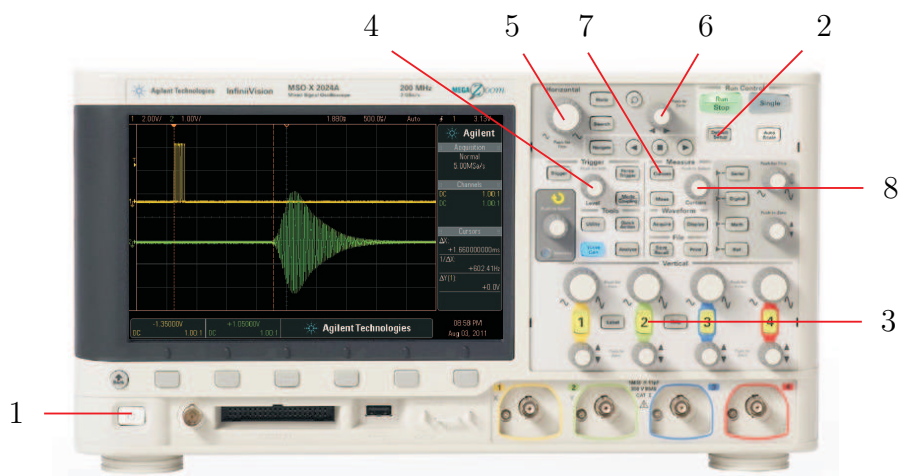
Zapojte UZV vysílač do konektoru TR1 UZV jednotky (10, obr. 1.3) a UZV jednotku přepněte pomocí tlačítka 4 do pulsního režimu (Burst). Zapojte UZV přijímač do vstupního BNC konektoru UZV jednotky (14, obr. 1.3). Aby zesilovač UZV jednotky nebyl přebuzen, což je indikováno světelnou diodou OVL (3, obr. 1.3), nastavte amplitudu výstupního signálu (potenciometr 6), případně zesílení vstupního zesilovače (přepínač 1 a potenciometr 2) tak, aby dioda právě zhasla.

Propojte synchronizační výstup UZV jednotky (BNC konektor 11) se vstupem 1 osciloskopu. Propojte analogový výstup UZV jednotky (BNC konektor 13) se vstupem 2 osciloskopu.



Obrázek 1.3: Ultrazvuková (UZV) jednotka. 1 - třístupňový otočný přepínač zesílení vstupního signálu; 2 - potenciometr plynulého zesílení vstupního signálu; 3 - LED indikace přebuzení zesilovače (OVERLOADED), 4, 5 - Tlačítka nastavení operačního módu s indikací LED, cont. indikuje nepřetržitý režim, burst pulsní režim; 6 - potenciometr nastavení amplitudy výstupního UZV signálu; 7 - korekce kmitočtu UZV signálu; 8 - přepínač fáze výstupního UZV signálu; 9, 10 - konektory pro připojení UZV měničů (vysílačů); 11 - analogový výstup budicího signálu; 12 - usměrněný výstup zesíleného signálu vstupního UZV měniče, tento výstup je propojen s analogovým vstupem řídicí jednotky goniometru; 13 - střídavý výstup zesíleného signálu vstupního UZV měniče; 14 - vstup pro připojení UZV měniče (přijímače).

### 1.4.3 Nastavení a ovládání osciloskopu Agilent DSO-X 2012A



Obrázek 1.4: Osciloskop Agilent DSO-X 2012A.

- Zapněte osciloskop pomocí vypínače (1, viz obr. 1.4) umístěného na osciloskopu vlevo dole.
- Stiskem tlačítka *Default setup* (2, obr. 1.4) obnovíte výchozí nastavení (osciloskop uvedete do přesně definovaného stavu).
- Stiskněte tlačítko 2 (3, obr. 1.4), tím zapnete druhý kanál (tlačítko se rozsvítí).
- Otáčením ovládacím prvku *Level* v sekci *Trigger* (4, obr. 1.4) nastavte úroveň vstupního signálu pro synchronizaci na vysílaný (synchronizační) puls. Obraz na displeji osciloskopu by se měl zastavit.
- Pomocí ovládacího prvku *Horizontal* v sekci *Horizontal* (5, obr. 1.4) a ovládacího prvku se šipkami doprava a doleva (6, obr. 1.4) upravte zobrazení tak, abyste dobře viděli synchronizační a přijatý puls. Pomocí rotačních prvků v sekci *Vertical* upravte velikost zobrazení impulsů.
- Stiskem tlačítka *Cursors* umístěného v sekci *Measure* (7, obr. 1.4) zobrazte kurzory (na obrazovce by se měla objevit svislá čára na začátku synchronizačního pulsu).
- Stiskem rotačního prvku *Cursors* umístěného v sekci *Measure* (8, obr. 1.4) zobrazíte menu, v němž vyberete (otáčením tohoto prvku) požadovaný kurzor (*X1*, *X2*), výběr potvrdíte opětovným stisknutím tohoto ovládacího prvku. Jeho dalším otáčením nastavíte požadovanou polohu kurzoru (začátek pulsu). Po té, co oba kurzory budou na svých místech, odečtete jejich časovou vzdálenost  $\Delta X$  na displeji osciloskopu.

## 1.5 Použitá literatura

1. Zdeněk Škvor: Akustika a elektroakustika, *Academia*, Praha, 2001
2. Jiří Bajer: Mechanika 3, *Univerzita Palackého v Olomouci*, Olomouc, 2006.

6. září 2011, Milan Červenka, [milan.cervenka@fel.cvut.cz](mailto:milan.cervenka@fel.cvut.cz)