I8: Klasifikace soustav, popis spojitých a diskrétních soustav v časové a frekvenční oblasti, lineární a časově invariantní soustavy, konvoluce, stabilita soustavy. Pásmové signály, komplexní obálka, Hilbertova transformace. Typy základních analogových modulací. (Signály a soustavy)

Soustava - objekt (obvod, digitální filtr, přijímač, anténa, mikrofon, program,...), který pod vlivem vstupního signálu (buzení) produkuje výstupní signál (odezvu)

Klasifikace soustav

Spojité - Analogové filtry, biologické systémy

$$x(t)$$
 A $y(t) = A[x(t)]$

Příklad - obvod s rezistory, induktory a kapacitory

Diskrétní - Digitální filtry

$$x[k] \qquad A \qquad y[k] = A[x[k]]$$

Příklad - implementováno na nějakém procesoru (třeba microprocessor specializovaný Digital Signal Processor), který potřebné operace provádí. Je zde možné realizovat IIR filtry.

Smíšené - Vzorkovač a interpolátor

Vzorkovač převádí spojitý signál na diskrétní vzorky

Interpolátor z diskrétních vzorků tvoří spojitý tím, že "doplňuje hodnoty mezi vzorky" - interpoluje Příklady: vzorkovač - ADC (analog-discrete converter), interpoláror - DAC (naopak)

$$x(t) \qquad A \qquad y[k] = A[x(t)] \qquad x[k] \qquad A \qquad y(t) = A[x[k]]$$

Kauzální (příčinné) - Buzení je příčinou odezvy, odezva nemůže nastat dříve než buzení (fyzikálně realizovatelné)

$$x(t) = 0$$
, $\forall t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0$, $\forall t < t_0$

Nekauzální - nelze fyzikálně realizovat v reálném čase (reagují i na budoucí buzení)

- Ideální filtry
- Následné zpracování signálu (postprocessing)

Soustavy bez paměti – neobsahují paměť (odezva závisí pouze na hodnotě vstupního signálu v daném okamžiku) - např. rezistorová síť

Soustavy s pamětí – obsahují paměť (ukládají informaci o minulosti, budoucnosti) - např. soustavy s kapacitami a indukčnostmi

Stabilita

- Odezva systému na jakýkoliv omezený signál je také omezená
- Bounded-Input Bounded-Output (BIBO)
 - Je-li x(t) omezený vstupní signál, tedy $|x(t)| < \infty$, potom systém nazýváme stabilní ve smyslu BIBO pokud pro výstup platí $|y(t)| < \infty$ pro všechna t a všechny x(t).

$$|x(t)| \le M_x < \infty \Longrightarrow |y(t)| \le M_y < \infty$$

Linearita

- Lineární soustavy soustava je lineární pokud platí princip superpozice
 - Princip superpozice: Pokud odezva lineární soustavy na signál x_i(t) je y_i(t), potom odezva lineární soustavy na signál x(t), kde signál x(t) je lineární kombinací x_i(t)

$$x(t) = \sum_{i} \lambda_{i} x_{i}(t)$$
 je dána $y(t) = \sum_{i} \lambda_{i} y_{i}(t)$

lze zapsat jako

$$y(t) = \sum_{i} \lambda_{i} y_{i}(t) = A[x(t)] = A\left[\sum_{i} \lambda_{i} x_{i}(t)\right] = \sum_{i} \lambda_{i} A[x_{i}(t)]$$

Časová invariance

Popis spojitých a diskrétních soustav v časové a frekvenční oblasti

Nejobecnější popis soustavy - pomocí operátoru soustavy:

$$y(t) = A[x(t)] \text{ nebo } y[k] = A[x[k]]$$

LTI soustavy lze reprezentovat

- jejich impulzovou odezvou odezvou na Diracův impulz (jednotkový impulz): $h(t) = A[\delta(t)] \ (h[k] = A[\delta[k]])$
- soustavou lineárních diferenciálních rovnic s konst. koeficienty (diferenčních rovnic s konst koeficienty)
- přenosovou funkcí (frekv. charakteristikou) Fourierovou transformací (spoj.) nebo DtFT (disk.) impulzové odezvy systému:

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}\$$
 $H(\Omega) = \mathcal{F}\{h[k]\} = \text{DtFT}\{h[k]\}$

• $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j \arg H(\omega)}$ je rozklad frekvenční charakteristiky na amplitudovou a fázovou charakteristiku. Amplitudová udává amplitudu a fázová fázový posun (zpoždění) na dané frekvenci. Jinak řečeno, když projde signál soustavou, amplituda na každé frekvenci je násobena $|H(\omega)|$ a k fázi na této frekvenci je přičteno $argH(\omega)$.

Pomocí systémové funkce soustavy

$$H_{\mathcal{L}}(p) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i p^i}{\sum_{i=0}^{m} a_i p^i} = A \frac{\prod_{i=1}^{M} (p - n_i)}{\prod_{i=1}^{m} (p - p_i)}$$

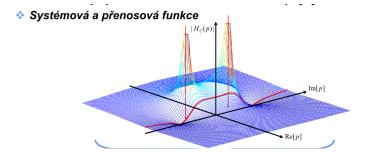
$$H_{\mathcal{Z}}(z) = \mathcal{Z}\left\{h[k]\right\} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{m} a_i z^{-i}} = A \frac{\prod_{i=1}^{M} (z^{-1} - n_i^{-1})}{\prod_{i=1}^{m} (z^{-1} - p_i^{-1})}$$

Ta se získá Laplaceovou transformací impulsové odezvy systému. Také lze získat podílem Laplaceových obrazů výstupního (Y) a vstupního (X) signálu. Pro diskrétní soustavy existuje analogický vztah se Z-transformací.

Ad podíl Lapl. obrazů výstupu a vstupu: Kořeny čitatele n_i jsou nuly. Kořeny jmenovatele p_i jsou póly. Z pólů se dá určit stabilita soustavy. Podmínky stability jsou póly v levé polorovině $Re\{\lambda\} < 0$ (pro Laplace) a uvnitř jednotkové kružnice $|\lambda| < 1$ (pro Z-transform). Pro stabilní soustavu lze také získat přenosovou funkci ze systémové - do argumentu se dá $j\omega$ ($j\Omega$ pro diskrétní). Vlastně se tak "plížíme" po imaginární ose systémové funkce.

Další perspektiva na "plachtový" model. Nuly přišpendlíme k zemi, póly vytáhneme nahoru:

$\bullet \ \, \text{Amplitudová charakteristika} \\ \bullet \ \, \text{Pro stabilní soustavu} \\ |H_{\mathcal{L}}(j\omega)| = |H_{\mathcal{F}}(\omega)| \\ |H_{\mathcal{L}}(j\omega)| = |H_{\mathcal{F}}(\omega)|$



Konvoluce

Konvoluce je operace, kterou lineární a časově invariantní soustava transformuje vstupní signál (buzení) x(t) na výstupní signál (odezvu) y(t)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$

Konvoluční integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau = s_1(t) * s_2(t)$$

(Oba vztahy na obrázku jsou stejné, jenom ten první má značení pro LTI soustavy (y - výstup, x - vstup, h - impulsní odezva). Jen aby nebylo nedorozumnění). Konvolučnímu integrálu se někdy říká konvoluční reprezentace soustavy.

- Komutativita: $h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$ "Nevadí prohodit operandy"
- Asociativita: $(h_1(t)*h_2(t))*h_3(t)=h_1(t)*(h_2(t)*h_3(t))$ "Nevadí přezávorkování"
- Distributivita: $x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$ "Jde roznásobit závorku součet konvolucí s jednotlivými imp. odezvami je to samé, jako konvoluce vstupu se součtem imp. odezev)

Pomocí konvoluce se tedy modeluje průchod soustavou pro LTI soustavy. Navíc, Fourierova transformace konvoluce dvou signálů je rovna násobení jejich spekter (věta o konvoluci), což může dost zjednodušit výpočet:

$$FT\{x(t) * y(t)\} = X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

Pásmové signály

Velké množství běžných signálů jsou nízkofrekvenční. To se nehodí z důvodu přenosu.

- Sdělovací kanál je nemůže efektivně přenést nízká frekvence znamená velkou vlnovou délku. Velikost antén se odvíjí od vlnové délky, kterou vysílají.
- Ve sdělovacím kanálu může být plno signálů ty by se navzájem překrývaly a rušily. Aby se to nedělo, je potřeba kmitočtové dělení.

Tento problém řeší přenos signálů pomocí *nosného signálu* (carrier signal). To je reálný harmonický signál s dostatečně vysokou frekvencí.

Tento nosný signál **je modulován** signálem, který chceme přenést. Moduluje se amplituda a fáze, popř. kombinace těch dvou. Výsledkem je *modulace*.

nf signál je modulační signál

$$s(t) = V(t) \cdot \cos\left(\omega_c t + \Theta(t)\right)$$

$$s_{_M}(t) \to V(t)$$

$$S_{_M}(t) \to \Theta(t)$$

$$\text{Úhlová modulace}$$

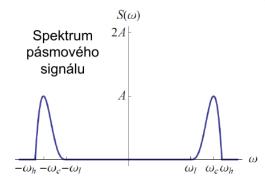
Pásmový signál - reálný signál, jehož spektrum je soustředěno kolem nosné frekvence, jinde (mimo pásmo) zanedbatelné. Obvykle pro nosnou frekvenci a šířku pásma platí

 $ω_{_{\mathcal{L}}} \gg 2\pi B$. Šířka pásma je definována jako rozdíl

horní a spodní

mezní frekvence (těch, které pásmo ohraničují.

$$B = (\omega_h - \omega_l) \frac{1}{2\pi} [Hz]$$



Komplexní obálka

Pásmový signál je reálný, proto má symetrii ve spektru - amplitudové je sudé a fázové liché. Pro jeho popis proto **stačí pouze jednostranné spektrum**.

Pásmový signál a jeho spektrum

$$S(\omega) = FT\{s(t)\}$$

Analytický signál a jeho spektrum

$$Z(\omega) = FT\{z(t)\}$$

Výpočet ze spektra pásmového signálu

$$Z(\omega) = 2 \mathbb{I}(\omega) S(\omega)$$

Jednotkový skok tady vynuluje vše nalevo od nuly, tj. zanedbá levou stranu spektra. Přenásobení dvojkou "přidá, co se ztratilo na levé straně" - zachování energie.

Převod zpátky - spektrum se doplní symetricky.

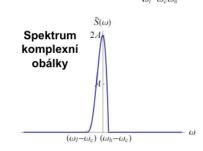
Převod z analytického signálu na komplexní obálku - posuneme spektrum doleva o nosnou frekvenci (CE znamená complex envelope):

Převod Z(ω) na spektrum CE

$$\tilde{S}(\omega) = Z(\omega + \omega_c)$$

Převod spektra CE na Z(ω)

$$Z(\omega) = \tilde{S}(\omega - \omega_c)$$



Hilbertova transformace

Když najdeme impulzní odezvu k přenosové funkci $2 \cdot 1(\omega)$, můžeme analytický signál získat konvolucí s původním signálem v čase. Potom:

 $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ je impulsní odezva takzvaného

Hilbertova transformátoru. Ten je jako soustava **nekauzální** (obviously - je imp. odezva je nenulová i před t=0. A taky

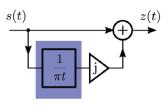
nestabilní (imp. odezva není absolutně integrovatelná).

Odpovídající impulsová odezva

$$FT^{-1}\{2\mathbb{I}(\omega)\} = \delta(t) + j\frac{1}{\pi t}$$

Analytický signál v časové oblasti

$$z(t) = s(t) * \left(\delta(t) + j\frac{1}{\pi t}\right) = s(t) + js(t) * \frac{1}{\pi t}$$



Hilbertův transformátor

Hilbertova transformace

Hilbertova transformace a její spektrum

$$\mathcal{H}\{s(t)\} = \widehat{s}(t)$$
$$FT\{\widehat{s}(t)\} = \widehat{S}(\omega)$$

Hilbertova transformace v časové oblasti

$$\mathcal{H}\{s(t)\} = \widehat{s}(t) = s(t) * \frac{1}{\pi t} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(u) \frac{1}{t - u} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t - u) \frac{1}{u} du$$

Přenosová funkce Hilbertova transformátoru: $H(\omega) = FT\{\frac{1}{\pi t}\} = -j \cdot sign(\omega)$

Hilbertka je lineární (založena na konvoluci, která je lineární). Na kladných kmitočtech realizuje fázové zpoždění o $\pi/2$.

Vlastnosti Hilbertovy transformace

- Součin nf a vf signálu
 - Platí

$$\mathcal{H}\{s_{nf}(t)s_{vf}(t)\} = s_{nf}(t)\mathcal{H}\{s_{vf}(t)\}$$

Podmínka nepřekrývajících se spekter

$$S_{nf}(\omega)$$
 $S_{vf}(\omega)$

- nf signál lze vytknout z operátoru Hilbertovy transformace
- Význam pro řešení amplitudové modulace (AM)
 - Modulační signál s_n(t)
 - Nosná vlna s_{vf}(t)

$$s_{vf}(t) = \cos(\omega_c t + \theta)$$

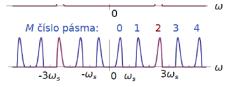
Komplexní obálka představuje komplexní nízkofrekvenční reprezentaci vysokofrekvenčního reálného signálu.

Vzorkovací podmínka pro pásmové signály je složitější.

$$\frac{2\omega_h}{M+1} < \omega_s < \frac{2\omega_d}{M}$$

Pro číslo pásma platí

$$M < \frac{\omega_d}{\omega_h - \omega_d}$$



Celé číslo (maximální hodnota určuje nejmenší možný vzorkovací kmitočet)

$$0 \le M \le \left\lfloor \frac{\omega_d}{\omega_h - \omega_d} \right\rfloor$$

Pro rekonstrukci signálu je krom vzorkovací frekvence tedy potřeba i číslo pásma M

Základní typy analogových modulací

Princip modulace - modulační signál, co nese zprávu, moduluje parametry nosného signálu.

Tady v té sekci je hlavně potřeba znát, jaké jsou typy modulací, co dělají a co mají za vlastnosti. Věci jako činitel hloubky modulace tam dávám pro úplnost.

Analogové modulace – vstup $s_{_{M}}(t)$ modulační signál (většinou spojitý)

- Amplitudové modulace AM (amplitude modulation)
 - DSB, SC, SSB (USB, LSB), VSB, QAM, ...
- Úhlová modulace (s konstantní obálkou)
 - Fázová modulace PM (phase modulation)
 - Frekvenční (kmitočtová) modulace FM (frequency modulation)
- · Impulsová modulace
 - PAM, PWM, PPM
 - PCM, Delta, předchůdce digitálních modulací

Amplitudová modulace

- Modulační signál ovládá amplitudu nosné V(t), fáze(t) je konstantní
 - Amplitudové modulace jsou lineární

Úhlová modulace

- Modulační signál ovládá fázi(t) nebo okamžitý kmitočet, obálka V(t) je Konstantní
 - Konstantní obálka je energeticky výhodná (napájení z baterie)
 - Úhlové modulace jsou nelineární

Některé modulace (např. SSB, QAM) ovládají amplitudu i fázi

Patří mezi amplitudové modulace z důvodu proměnné obálky V(t)

Amplitudová modulace

Amplitudová modulace AM (s nosnou vlnou)

$$s_{AM}(t) = A_c \cdot (1 + m \cdot s_M(t)) \cdot \cos(\omega_c t)$$

Spektrum modulovaného signálu

$$S_{AM}(\omega) = \pi A_c \cdot \left(\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c) \right) + \frac{mA_c}{2} \left(S_M(\omega - \omega_c) + S_M(\omega + \omega_c) \right)$$

Nejstarší a nejčastější způsob amplitudové modulace (AM radio)

- Amplituda nosné přímo ovládána modulačním signálem
- Činitel hloubky modulace (pro modulační signál menší než 1)

$$m \, [\%], \, |s_{_{M}}(t)| \leq 1$$

Jednoduchý modulátor

Časově ovládaný spínač, jednokvadrantová násobička

Velmi jednoduchý demodulátor

- Obálkový detektor, detektor s usměrňovačem
- Podmínka pro správnou detekci obálkovým detektorem $m \le 100\%$

Nevýhody AM

- Nízká energetická účinnost většina výkonu v nosné vlně
- Postranní pásma nesou stejnou informaci spektrum neefektivní

Úhlová modulace

Dělí se na fázovou (PM) a kmitočtovou (FM).

Ve zkratce: u fázové modulace modulační signál moduluje okamžitou fázi signálu, u kmitočtové okamžitou frekvenci (wow).

Jsou si podobné, protože okamžitý kmitočet je derivací fáze (stejně jako okamžitá rychlost je derivací polohy). PM a FM modulátor/demodulátor může být zaměněn při vhodném předzpracování modulačního/modulovaného signálu

Pro detaily - přednáška 10, s. 42-49

Úhlová modulace

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \Theta(t))$$
 $s_M(t) \to \Theta(t)$

* Fázová modulace (PM)

$$s_{PM}(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + k_P \cdot s_M(t))$$

Index fázové modulace – činitel úměrnosti k_p [rad]

$$\Theta(t) = k_P \cdot s_M(t)$$

Kmitočtová modulace (FM)

$$s_{FM}(t) = A_c \cdot \cos\left(\omega_c t + k_F \cdot \int_{-\infty}^t s_M(\tau) d\tau\right)$$

- Činitel úměrnosti k_F[rad-1]
- Obě modulace jsou velice podobné
 - Okamžitý kmitočet je derivací fáze

$$\omega_i(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt} = k_F \cdot s_M(t)$$

$$\Theta(t) = k_F \int_{-\infty}^{t} s_M(\tau) d\tau$$

Parametry úhlových modulací - pro úplnost a rozhled, kdyby někdo rejpal

Úhlová modulace pro harmonický modulační signál

Fázová modulace (PM) – okamžitá fázová odchylka

• Fázový zdvih (největší možná změna fáze) $\Delta\Theta_{_{PM}}$ [rad]

Fázová modulace (PM) - okamžitý kmitočet

• Kmitočtový zdvih (největší odchylka kmitočtu od nosné) $\Delta\Omega_{_{PM}}$ [rad]

Kmitočtová modulace (FM) – okamžitá kmitočtová odchylka

• Kmitočtový zdvih $\Omega\Delta_{_{FM}}$ [rad/s]

Kmitočtová modulace (FM) – okamžitá fázová odchylka

• Index kmitočtové modulace (fázový zdvih) β [rad]