15.2. Pro dané čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ chceme maximalizovat $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ z.p. $-1 \leq x_i \leq 1$

(a) vyřešte úvahou

- hledáme maximum na hyperkouli
- pro $c_i > 0$ $x_i = 1$

  pro $c_i < 0$ $x_i = -1$

(b) sestrojte duální úlohu, vyřešte úvahou

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad \qquad \min \sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)$$

$$\text{z.p. } x_i \leq 1 \qquad \qquad \text{z.p. } u_i \geq 0$$

$$x_i \geq -1 \qquad \qquad v_i \leq 0$$

$$x \in \mathbb{R} \qquad \qquad u_i + v_i = c_i$$

optimální hodnota bude $|c|$ - stejná jako v primární úloze

(c) napište podmínky komplementarity

$x_i = -1$ $\qquad x_i = 1$

$u_i = 0$ $\qquad v_i = 0$

(d) najděte číselné hodnoty optimálních primárních a duálních proměnných pro $n = 3$, $(c_1, c_2, c_3) = (-2, 3, 4)$

primární úloha: $x = (-1, 1, 1)$

duální úloha: $v = (0, 3, 4)$ $u = (2, 0, 0)$

15.3. Napište duální úlohu a podmínky komplementarity

(a) $\min 2x_1 - 3x_3 + x_4$ $\qquad$ $\max 5y_2 + 6y_3$ - duální úloha

z.p. $x_1 - x_2 - x_3 \geq 0$	z.p. $y_1 \geq 0$
$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 5$	$y_2 \geq 0$
$2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$	$y_3 \in \mathbb{R}$
$x_1 \geq 0$	$y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 2$
$x_2 \geq 0$	$-y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 0$
$x_3 \geq 0$	$-y_1 - 3y_2 - y_3 \leq -3$
$x_4 \geq 0$	$2y_3 \leq 1$

podmínky komplementarity

$$y_1(x_1-x_2-x_3)=0$$
$$y_2(-x_1+2x_2-3x_3-5)=0$$
$$x_1(y_1-y_2+2y_3-2)=0$$
$$x_2(-y_1+2y_2-y_3)=0$$
$$x_3(-y_1-3y_2-y_3+3)=0$$
$$x_4(2y_3-1)=0$$

(b) $\min_{x\in\mathbb{R}} \max_{i=1}^{n} |a_i - x|$

$$\begin{aligned} \min\ & t \\ \text{z.p.}\ & t+x \geq a_i \\ & t-x \geq -a_i \\ & t\in\mathbb{R} \\ & x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

duální úloha:

$$\begin{aligned} \max\ & a_i u - a_i v \\ \text{z.p.}\ & u \geq 0 \\ & v\geq 0 \\ & u+v=1 \\ & u-v=0 \end{aligned}$$

podmínky komplementarity:

$$u\cdot(t+x-a_i)=0$$
$$v\cdot(t-x+a_i)=0$$

(g) minimalizace maxima afinních funkcí

(ii) $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1}^{m} (a_i^T x + b_i)$

$$\begin{aligned} \min\ & t \\ \text{z.p.}\ & t - a_i x \geq b_i \\ & t\in\mathbb{R} \\ & x\in\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

duální úloha:

$$\begin{aligned} \max\ & \textstyle\sum_i u_i b_i \\ \text{z.p.}\ & u_i\geq 0 \\ & \textstyle\sum_i u_i = 1 \\ & \textstyle\sum_i -a_i u_i = 0 \end{aligned}$$

podmínky komplementarity:

$$(t-a_i x - b_i)\cdot u_i = 0$$