Odpovídejte celou větou (na každou otázku) a každé své tvrzení řádně zdůvodněte. Dodržujte a ve svém řešení vyznačte dělení jednotlivých úloh na podúlohy.

Část A (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

1. Ať $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou matice, pro které má smysl součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Pak *nutně* platí:
   (a) $\mathrm{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \geq \mathrm{rank}(\mathbf{A})$.
   (b) Každý sloupec $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je lineární kombinací sloupců $\mathbf{A}$.
   (c) Pokud je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ čtvecová a $\mathbf{B}$ má lineárně nezávislé sloupce, pak $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq 0$.
   (d) Pokud má smysl i součin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, pak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

2. Ať $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je uspořádaná ortogonální báze podprostoru $\mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem. Pak *nutně* platí:
   (a) Pro libovolné $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, kde $\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3 \rangle = 0$, je $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ uspořádaná ortogonální báze lineárního podprostoru $\mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
   (b) Platí $\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_2 \rangle = 0$.
   (c) Seznam $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$ je uspořádaná báze prostoru $\mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
   (d) Pro libovolný vektor $\mathbf{b} \notin \mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ takový, že $\langle \mathbf{b} \mid \mathbf{v}_1 \rangle = 0$, platí $\mathbf{b} = \mathbf{o}$.

3. Ať $\mathbf{A}$ je matice typu 2×2, ať $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ ani $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_2$ nemá řešení. Pak *nutně* platí:
   (a) $\mathbf{A}$ je regulární.
   (b) $\mathbf{A}$ je nulová matice.
   (c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nemá řešení.
   (d) Sloupce matice $\mathbf{A}$ jsou lineárně závislé.

   nap matice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ neni reg, nema reseni pro e1 ani e2, neni nulova, ale ma reseni pro (1, 1)

4. Mějme tři čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ rozměrů $n \times n$, $\mathbf{O}$ je nulová matice $n \times n$.
   (a) $\det\left(\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{array}\right)\right) \neq \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{C})$. $= \det(A) \cdot \det(C)$
   (b) $\det((\mathbf{A} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}) = (\det(\mathbf{A}) - \det(\mathbf{A})) \cdot \det(\mathbf{B})$. jako numericky to pravda je, ale det(a-b) != det(a) - det(b) obecne
   (c) $5 \cdot \det(\mathbf{B}) + \det(\mathbf{C}) \neq \det(5 \cdot \mathbf{B}) + \det(\mathbf{C})$. $= 5^n \cdot \det(B) + |C|$
   (d) $\det(\mathbf{E}_n) \cdot \det(\mathbf{E}_n^{-1}) \neq -1$. $= 1$

Část B (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

Dokažte, že pokud má reálná matice $\mathbf{A}$ typu 2×2 vlastní vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ příslušné různým nenulovým vlastním číslům a_1 a a_2, pak je $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ lineárně nezávislý seznam vektorů v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

Část C (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručné zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

Lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zadáno přiřazeními

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte hodnotu $\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Nalezněte matici $\mathbf{A}$ zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2 prostoru $\mathbb{R}^2$. Diagonalisujte $\mathbf{A}$. Závěrečnou odpověď zapište celou větou.