Pravděpodobnost a statistika - zkoušková písemka 15.6.2011

Jméno a příjmení	1	2	3	4	celkem	známka

Úloha 1. Rybář chytí za den průměrně 8 ryb, přičemž průměrně každá čtvrtá ryba je okoun. Rybář denně sedí u vody v době 9:00-13:00. Určete pravděpodobnost, že

- a) během dopoledne (tj. do 12:00) chytí rybář maximálně 5 ryb, přičemž všechny je chytí až po desáté hodině,
- b) během odpoledne (tj. od 12:00) chytí rybář alespoň 2 okouny,
- c) doba čekání na ulovení ryby bude kratší než 1 hodina,
- d) v pěti po sobě chycených rybách budou maximálně 2 okouni,
- e) v daný den bude nejpozději 5.chycená ryba okoun.

Úloha 2. Každý čtvrtý člověk, který se dostaví na krevní testy kvůli jisté chorobě, má méně než 20 let. U těchto lidí je choroba zjištěna ve 25% případů, u osob starších než 20 let je choroba zjištěna v 50% případů.

- a) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný zdravý člověk, který se dostavil na testy, má méně než 20 let.
- b) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný člověk, který se dostavil na testy, trpí danou chorobou.
- c) Určete pravděpodobnost, že ze 112 náhodně vybraných lidí, kteří se dostavili na testy, jich trpí danou chorobou alespoň 40. (Použijte CLV)
- d) Definujte podmíněnou pravděpodobnost.
- e) Napište Bayesovu větu. (Nezapomeňte na předpoklady!)

Úloha 3. V 16 po sobě jdoucích pracovních dnech sledoval jistý výrobce automobilů počet prodaných vozů. Tyto počty jsou uvedeny v následující tabulce:

- a) Nakreslete histogram a empirickou distribuční funkci těchto dat.
- b) Určete, jaké rozdělení mají tato data, a metodou maximální věrohodnosti určete parametr tohoto rozdělení.
- c) Spočtěte výběrový průměr z dat. Jak souvisí s teoretickou střední hodnotou?
- d) Definujte nestrannost odhadu obecného parametru θ .
- e) Otestujte na hladině 5%, zda je možné říct, že střední počet prodaných aut za den je roven 3.

(Využijte faktu, že za jistých předpokladů má intervalový odhad o spolehlivosti $(1-\alpha)$ tvar

$$(\bar{X}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}),$$

a vztahu mezi střední hodnotou a rozptylem u Poissonova rozdělení.)

Úloha 4. Při 120 hodech kostkou padla 15× jednička, 23× dvojka, 18× trojka, 21× čtverka a 20× pětka.

a) Otestujte na hladině 5%, zda je kostka v pořádku.
(Využijte faktu, že za jistých předpokladů má

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$$

rozdělení χ^2_{k-1} .)

- b) Předpokládejme, že kostka je v pořádku. Jaké rozdělení má náhodná veličina X_1 udávající počet padlých šestek (v oněch 120 hodech)?
- c) Označme X_2 náhodnou veličinu udávající počet padlých jedniček (v oněch 120 hodech). Jsou X_1 a X_2 nezávislé? Odpověď řádně zdůvodněte.
- d) Definujte nezávislost náhodných veličin X a Y.
- e) Definujte korelaci $\operatorname{corr}(X,Y)$ a napište její souvislost s nezávislostí náhodných veličin X a Y.