Pravděpodobnost a statistika - zkoušková písemka 2.6.2021

Jméno a příjmení	1	2	3	ústní	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 60 bodů)

Na letišti mezi dvěma terminály trvá cesta pěšky 8 minut. Transfer přijíždí pravidelně jednou za 10 minut a jede 2 minuty. Průměrně přijdou na zastávku transferu 2 cestující za minutu. Cestující přicházejí na zastávku transferu rovnoměrně, nezávisle na sobě, přičemž se vždy podívají na jízdní řád transferu a poté zvolí časově výhodnější přepravu. V daném místě letiště se pohybuje stejný počet cestujících mužů a žen. Jako příruční zavazadla mají pouze batohy nebo tašky přes rameno, přičemž batoh má 60% mužů a 10% žen. Určete

a) rozdělení náhodné veličiny popisující dobu čekání na transfer pro náhodně vybraného cestujícího, který se rozhodl na základě výše uvedených předpokladů transfer použít. (7 bodů)

Dále spočtěte pravděpodobnost, že

- b) náhodně vybraný cestující je žena s batohem, (5 bodů)
- c) náhodně vybraný cestující s batohem je žena, (5 bodů)
- d) náhodně vybraný cestující zvolil cestu pěšky, (7 bodů)
- e) pokud se cestující rozhodl(a) pro transfer, bude na něj čekat nejvýše 5 minut, (7 bodů)
- f) další cestující přijde na zastávku nejdříve za 1,5 minuty, (7 bodů)
- g) nejpozději třetí muž přicházející na zastávku transferu bude mít tašku přes rameno, (7 bodů)
- h) mezi pěti ženami přicházejícími na zastávku transferu bude mít nejvýše jedna z nich batoh, (7 bodů)
- i) mezi 100 ženami přicházejícími na zastávku transferu bude mít nejvýše 7 z nich batoh. (Řešte pomocí CLV; 8 bodů)

Úloha 2. (celkem 24 bodů)

Při plavbě lodí mezi dvěma ostrovy kormidelník zaznamenával jednou za 10 minut hodnotu z hloubkoměru (a to při dostatečné vzdálenosti od pobřeží, aby bylo možné považovat naměřené hloubky za stejně rozdělené náhodné veličiny). Zjistil následující hodnoty [v metrech]:

72.4	77.3	84.3	79.1	74.5	80.8	74.4	71.8	77.0	78.1	83.7	80.0

- a) Nakreslete histogram a odhadněte z něj a/nebo z povahy dat, jaké rozdělení má náhodná veličina popisující hloubku v dané oblasti. (7 bodů)
- b) Odhadněte z dat střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny z otázky a). (5 bodů) (hint: $\sum x_i = 933.4$, $\sum (x_i \bar{x})^2 = 181.18$)
- c) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda je střední hloubka v dané oblasti rovna 80 m, proti
 - (i) oboustranné alternativě, (6 bodů)
 - (ii) jednostranné alternativě, která přirozeně vyplývá z odhadu střední hodnoty v bodě b). (6 bodů)

Úloha 3. (celkem 16 bodů)

Několik restaurací v jedné ulici zaznamenávalo u náhodně vybraných hostů, jaký druh nápoje si objednali jako první v den otevření zahrádek po covidu:

pohlaví \downarrow nápoj \rightarrow	káva/čaj	chlazené nealko	pivo	víno	tvrdý alkohol
muži	5	5	50	5	15
ženy	25	15	10	15	5

- a) Statisticky otestujte na hladině 1%, zda byly uvedené typy nápojů přibližně stejně oblíbené coby první pocovidový nápoj. (8 bodů)
- b) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda je obliba uvedených **tří typů alkoholických** nápojů závislá na pohlaví. (8 bodů)

Ústní část (celkem 10 bodů)

Uvažujte náhodné veličiny X a Y se sdruženou hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} \pi^{-1} & \text{pro } x^2 + y^2 \le 1\\ 0 & \text{pro } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

- (i) Určete $P(X > \sqrt{2}/2, Y > \sqrt{2}/2)$.
- (ii) Určete $P(0 < X < \sqrt{2}/2, 0 < Y < \sqrt{2}/2)$.
- (iii) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé, a své rozhodnutí stručně zdůvodněte.

(Hint: Nakreslete si graf sdružené hustoty ve 2D.)