1. vzorový zápočtový test 2022/2023

středa 12. října 2022 13:44

Komplexní analýza

1. semestrální test (varianta XYZ)

Úloha 1 ([2 body]). Určete, v jakém kvadrantu leží komplexní číslo $e^{9-\frac{4\pi}{11}i}$.

Úloha 2 ([4 body]). Určete algebraický tvar komplexního číslo $\ln\left(\frac{1}{i-1}\right)$.

Úloha 3 ([4 body]). Z definice spočtěte

$$\int_C \operatorname{Im} z + 2\operatorname{Re} z \, dz,$$

kde C je úsečka s počátečním bodem -1 a koncovým i.

Komplexní analýza

1. semestrální test (varianta ZYX)

Úloha 1 ([2 body]). Vyjádřete funkci

$$f(z) = \sin(-6iz), \ z \in \mathbb{C},$$

pomocí exponenciální funkce.

Úloha 2 ([4 body]). V oboru komplexních čísel řešte rovnici $z^3 = -27i$.

Úloha 3 ([4 body]). Nalezněte reálnou část $u(x, y)$ a imaginární část $v(x, y)$ funkce

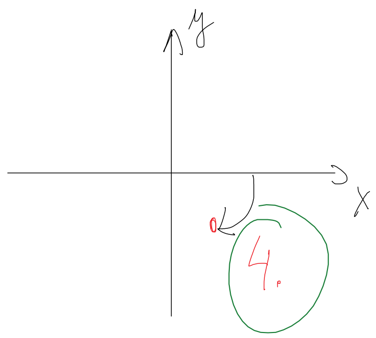
$$f(z) = |z + i|^2 - iz, \ z \in \mathbb{C},$$

a pomocí Cauchyho-Riemannových podmínek rozhodněte, zda je funkce f diferencovatelná v bodě $z = -i$.

XYZ) 1) $e^{9-\frac{4}{11}\pi i}$ kvadrant?

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$z = x+iy$



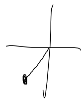
$0 < \frac{4}{11}\pi < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < -\frac{4\pi}{11} < 0$

2) $\ln\left(\frac{1}{i-1}\right)$ algebraický tvar?

- $\ln z = \ln|z| + i\arg z, \ z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.
- $\frac{1}{i-1} = \frac{-1-i}{1+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- $\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

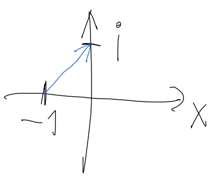
- $\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\arg\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$



$\left[-\pi + \frac{\pi}{4}\right]$

$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{1}{i-1}\right) = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{4}i$$

3) $\int_C \operatorname{Im} z + 2\operatorname{Re} z \, dz$, C úsečka z bodu -1 do bodu i



$\varphi(t) = -1 + t(i-(-1)) = -1 + t(i+1)$, $t \in [0,1]$

$\varphi'(t) = 1+i$ $\quad\left[-1 + t + ti\right]$

$$\int_C \operatorname{Im} z + 2\operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 \left[\operatorname{Im}\varphi(t) + 2\operatorname{Re}\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt$$

$$= (1+i)\int_0^1 t + 2(-1+t)\,dt$$

$$= (1+i)\left[\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + 2\left[-t+\frac{t^2}{2}\right]_0^1\right]$$

$$= (1+i)\left[\frac{1}{2} + 2\left(-1+\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{1+i}{2}.$$

2(Y)X) 1) $\sin(-6iz) = \frac{e^{i(-6iz)} - e^{-i(-6iz)}}{2i} = \frac{e^{6z} - e^{-6z}}{2i}$

Z(X) 1) $\sin(-6iz) = \dfrac{e - e}{2i} = \dfrac{e - e}{2i}$

$\left[\ \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\ \right]$

2) $z^3 = -27i$

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z$

$-27 = 27\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 27e^{-i\frac{\pi}{2}}$

tak nebo tak

$|z|^3(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = 27\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$|z|^3\left(e^{i\varphi}\right)^3 = 27e^{-i\frac{\pi}{2}}$

tak nebo tak

$|z|^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 27\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$|z|^3 e^{3\varphi i} = 27e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$|z|^3 = 27 \quad \& \quad 3\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\left[\ 3\varphi i = -i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}\ \right]$

$|z| = 3 \quad \& \quad \varphi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$

$$\boxed{z_k = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad k = 0, 1, 2}$$

3) $f(z) = |z+i|^2 - iz$

$z = x + iy$

$$f(z) = |x+iy+i|^2 - i(x+iy) = |x+(y+1)i|^2 - ix + y = x^2 + (y+1)^2 - ix + y$$

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = x^2 + (y+1)^2 + y$$

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x,y) = -x$$

- $f(z)$ diferencovatelná v bodě $z=-i$?

- $\frac{\partial u}{\partial x}(0,-1) = 2x\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial v}{\partial y}(0,-1) = 0\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}}$

$$=$$

- $\frac{\partial u}{\partial y}(0,-1) = 2(y+1)+1\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}} = 1$ $\qquad$ $\frac{\partial v}{\partial x}(0,-1) = -1\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}}$

$$= -$$

- C-R podmínky jsou v bodě $z=-i$ splněny, takže $f(z)$ je diferencovatelná v bodě $z=-i$.