①

	A	B	C	
100 Kč	12	6	12	30
200 Kč	12	3	5	20
500 Kč	6	3	1	10
	30	12	18	60

a) $P(C \cap 500\text{Kč}) = \underline{\underline{\frac{1}{60}}}$ b) $P(500\text{Kč} \mid C) = \underline{\underline{\frac{1}{18}}}$ c) $P(C \mid 500\text{Kč}) = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$

d) X doba čekání na 500Kč voucher $\sim Exp(\frac{1}{2})$, tj.

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{a} \quad F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{pro } x > 0$$
$$= 0 \qquad\qquad = 0 \qquad \text{pro } x \leq 0$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - (1 - e^{-\frac{4}{2}}) = \underline{\underline{e^{-2}}}$$

nebo

$$= \int_4^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \left[-e^{-\frac{x}{2}}\right]_4^\infty = 0 - (-e^{-\frac{4}{2}}) = \underline{\underline{e^{-2}}}$$

NEBO.

Y počet uplatněných 500Kč voucherů za 4 dny $\sim Po(2)$, tj. $P(Y=k) = \frac{2^k}{k!}e^{-2}$ pro $k = 0, 1, \ldots$

$$P(Y=0) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} = \underline{\underline{e^{-2}}}$$

e) X počet voucherů uplatněných v sekt. A nebo C před prvním v B

$X \sim Geom(0{,}2)$, tj. $P(X=k) = 0{,}8^k\, 0{,}2$ pro $k = 0, 1, \ldots$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} 0{,}8^k\, 0{,}2 = 1 - \left(0{,}2\,\frac{1-0{,}8^4}{1-0{,}8}\right) = \underline{\underline{0{,}8^4}}$$

NEBO.

Y počet voucherů uplatněných v sekt B mezi prvními čtyřmi vouchery $\sim Binom(4, 0{,}2)$, tj. $P(Y=k) = \binom{4}{k} 0{,}2^k\, 0{,}8^{4-k}$ pro $k = 0, 1, \ldots, 4$

$$P(Y=0) = \binom{4}{0} 0{,}2^0\, 0{,}8^4 = \underline{\underline{0{,}8^4}}$$

f) X počet voucherů v hodnotě 100Kč nebo 200Kč uplatněných za den
Y — " ——— 500Kč — " ———

$X \sim Po(2{,}5)$, tj. $P(X=k) = \frac{2{,}5^k}{k!} e^{-2{,}5}$
$Y \sim Po(0{,}5)$, tj. $P(Y=k) = \frac{0{,}5^k}{k!} e^{-0{,}5}$ pro $k = 0, 1, \ldots$

$$P(X \leq 2, Y=0) = P(X \leq 2) \cdot P(Y=0) = \underline{\left(\frac{2{,}5^0}{0!} e^{-2{,}5} + \frac{2{,}5^1}{1!} e^{-2{,}5} + \frac{2{,}5^2}{2!} e^{-2{,}5}\right) \cdot \frac{0{,}5^0}{0!} e^{0{,}5}}$$

g) X počet voucherů uplatněných v sekt B mezi 10 uplatněnými vouchery

$X \sim Binom(10; 0{,}2)$, tj. $P(X=k) = \binom{10}{k} 0{,}2^k 0{,}8^{10-k}$ pro $k = 0, 1, \ldots, 10$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = \underline{1 - \left(\binom{10}{0} 0{,}2^0 0{,}8^{10} + \binom{10}{1} 0{,}2^1 0{,}8^9 + \binom{10}{2} 0{,}2^2 0{,}8^8\right)}$$

h) $X_i = 1$, je-li i-tý voucher uplatněný v sekt B
$X_i = 0$, — " ——— A nebo C

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ $X_i \sim Alt(0{,}2)$ $\forall i = 1, \ldots, 100$
$\Rightarrow \mathbb{E} X_i = 0{,}2$
$\operatorname{var} X_i = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$

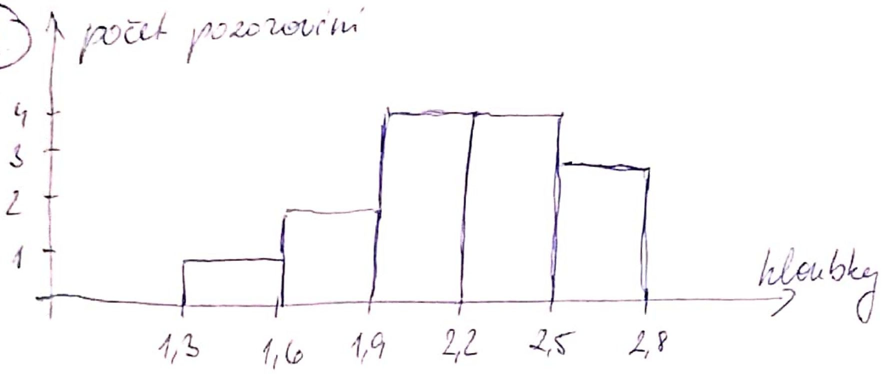
$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 25\right) = P\left(\underbrace{\frac{\sum X_i - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}16}}}_{} \geq \underbrace{\frac{25 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}16}}}_{}\right)$$

$$= P\left(Z \geq -1{,}25\right) = 1 - P(Z \leq -1{,}25) =$$

$$= 1 - \Phi(-1{,}25) = \Phi(1{,}25) = \underline{\underline{0{,}8944}}$$

②

a)



X … hloubka v dané oblasti [m]

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

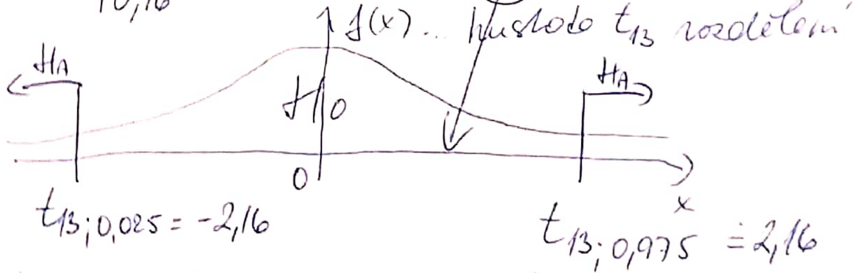
b) $\widehat{EX} = \overline{X}_{14} = \frac{30,1}{14} = \underline{\underline{2,15}}$, $\widehat{var X} = S^2_{14} = \frac{2,07}{13} \doteq \underline{\underline{0,16}}$

c) $H_0 : EX = 2$

$H_A : EX \neq 2$

$\alpha = 5\%$

$$T = \frac{2,15 - 2}{\sqrt{0,16}} \cdot \sqrt{14} \doteq \cancel{2,81}\ \boxed{1,4}$$



$\Rightarrow$ H_0 nezamítáme ve prospěch H_A : $EX \neq 2$ na hladině 5%

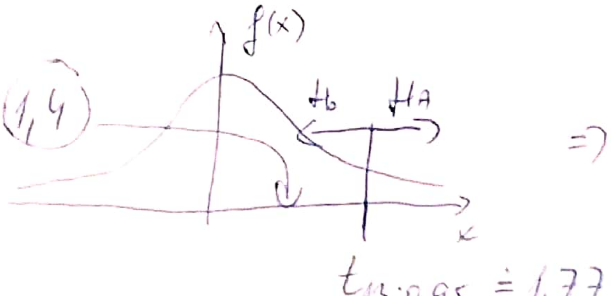
NEBO

$H_0 : EX = 2$

$H_A : EX > 2$

$\alpha = 5\%$

$T = 1,4$



$\Rightarrow$ H_0 nezamítáme ve prospěch H_A $EX > 2$ na hladině 5%

d) $X \sim N(2; 0,16)$

$$P(X > 1,8) = P\Big(\underbrace{\frac{X-2}{\sqrt{0,16}}}_{Z \sim N(0,1)} > \frac{1,8-2}{\sqrt{0,16}}\Big) = P(Z > -\tfrac{1}{2}) = 1 - P(Z \leq -\tfrac{1}{2}) = 1 - \Phi(-\tfrac{1}{2}) =$$

$$= \Phi(\tfrac{1}{2}) = \underline{\underline{0,6915}}$$

③

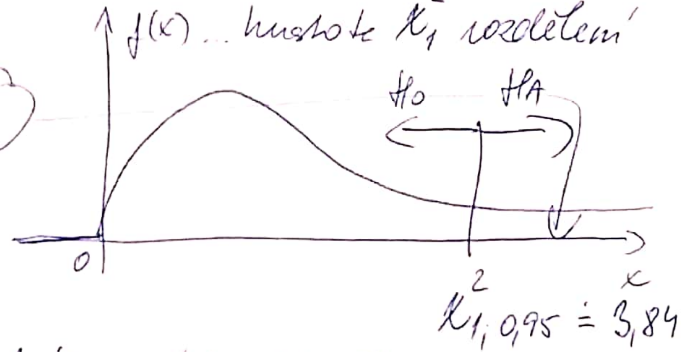
	pivo	víno	tvrdý alk.	
M	40	10	10	60
Ž	20	10	10	40
	60	20	20	100

a) $H_0: p_M = p_Ž = \frac{1}{2}$, kde p_M, resp $p_Ž$, je pst, že si alkoholický nápoj objedná muž, resp žena

$H_A: p_M \neq p_Ž$

$\alpha = 5\%$

$$\chi^2 = \frac{(60-50)^2}{50} + \frac{(40-50)^2}{50} = \boxed{4}$$



=> <u>H_0 zamítáme</u> ve prospěch H_A na hladině 5%

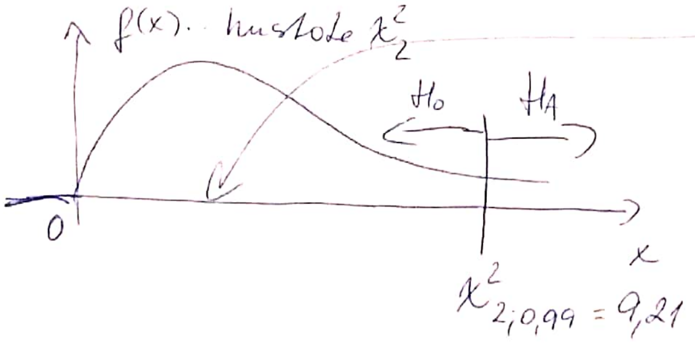
b) H_0: typ alko-nápoje a pohlaví jsou nezávislé

H_A: — " — nejsou — " —

$\alpha = 1\%$

$$\chi^2 = \frac{\left(40 - \overset{36}{\frac{60 \cdot 60}{100}}\right)^2}{\underset{36}{\frac{60 \cdot 60}{100}}} + \frac{(10-12)^2}{12} + \frac{(10-12)^2}{12} + \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(10-8)^2}{8} + \frac{(10-8)^2}{8} =$$

$$= \frac{16}{36} + 2 \cdot \frac{4}{12} + \frac{16}{24} + 2 \cdot \frac{4}{8} = \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \boxed{2,\overline{7}}$$



=> H_0 nezamítáme ve prospěch H_A na hladině 1%

c) A… jev „host je žena"
B… jev „host si objednal čaj / kávu"

	K/Č	CH. N.	…	Σ
M	30	10	…	100
Ž	30	30	-	100
Σ	60	40	…	200

$P(A) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{60}{200} = \frac{3}{10}$

$P(A \cap B) = \frac{30}{200} = \frac{3}{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ tyto jevy jsou nezávislé

d) A… jev „host je muž" $\Rightarrow P(A) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$
B… jev „host si objednal chlazené nealko" $\Rightarrow P(B) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$
$P(A \cap B) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ tyto jevy nejsou nezávislé

ÚSTNÍ ČÁST

Diskrétní náh. vel. X a Y jsou nezávislé, jestliže $P(X=i, Y=j) = P(X=i) \cdot P(Y=j)$ (popř. i $P(X \leq i, Y \leq j) = P(X \leq i) \cdot P(Y \leq j)$ pro… →) pro $\forall i, j \in \mathbb{R}$

Z vlastnosti psti je zřejmé, že $j = k = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$ a $l = 1$

(i) jelikož X, Y nezávislé $\Rightarrow \mathrm{corr}(X, Y) = 0$, jsou zbylé parametry:
$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, $d = \frac{1}{6}$, $e = \frac{1}{9}$, $f = \frac{1}{18}$,
$g = \frac{1}{12}$, $h = \frac{1}{18}$, $i = \frac{1}{36}$

(ii) jelikož pro $Y = aX + b$ a X platí $a > 0 \Rightarrow \mathrm{corr}(X, Y) = 1$ a jelikož $Y = 3X$, jsou parametry $a = \frac{1}{2}$, $e = \frac{1}{3}$, $i = \frac{1}{6}$ a $b = c = d = f = g = h = 0$