Fyzika 2
Online seminář č. 11
8. prosince 2020

Kvantová fyzika

Příklad 2.7

Určete jaká je pravděpodobnost T, že dojde k tunelování elektronu o energii $E = 5,1$ eV pravoúhlou potenciálovou bariérou o výšce $E_0 = 6,8$ eV o šířce $L = 750$ pm,
hmotnost elektronu je $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg , redukovaná Planckova konstanta je $\hbar = 1,05457.10^{-34}$ J $\cdot$ s

$$\left[T = \frac{1}{1 + \frac{E_0^2 \sinh^2 \left[\frac{L}{\hbar} \sqrt{2m_e(E_0 - E)} \right]}{4E(E_0 - E)}} = 0,000134 \right]$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{E_0^2 \sinh^2 (k \cdot L)}{4E(E_0 - E)}} \qquad E_0 > E \qquad k = \frac{\sqrt{2m(E_0 - E)}}{\hbar}$$

http://aldebaran.feld.cvut.cz/vyuka/konicek/F2-B1B02FY2/slajdy/slajdDt_15500.jpg
http://reseneulohy.cz/609/potencialova-bariera

Pravděpodobnost protunelování (neboli také koeficient transmise) částice o hmotnosti m a energii E potenciálovou bariérou výšky V_0 a šířky a je

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(\kappa a)}{4E(V_0 - E)}} = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(\kappa a)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)}},$$

kde

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

a) Pro tunelování elektronu o celkové energii $E = 5{,}1\,\mathrm{eV}$ pravoúhlou potenciálovou bariérou o výšce $V_0 = 6{,}8\,\mathrm{eV}$ a šířce $a = 750\,\mathrm{pm}$ získáme dosazením do úvodních vztahů následující.

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\,(6{,}8 - 5{,}1) \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}}{1{,}054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J.s}} \approx 6{,}683 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}^{-1}$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(\kappa a)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(5{,}01225)}{4} \cdot \frac{1}{\frac{5{,}1}{6{,}8}\left(1 - \frac{5{,}1}{6{,}8}\right)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{5643}{4} \cdot \frac{16}{3}} \approx \frac{1}{7525}$$

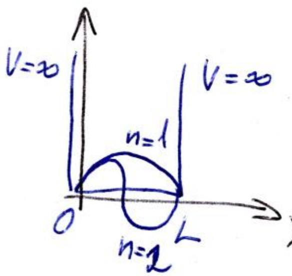
Úspěšně tedy protuneluje přibližně jeden elektron ze 7525.

Příklad 2.8

Částice s energií 2 000 keV se nachází v jednorozměrné nekonečně hluboké pravoúhlé potenciálové jámě. Víme, že je ve třetím excitovaném stavu (tj. $n = 4$).

a) Určete energii E_1 této částice v základním stavu. $\left[E_1 = \frac{E_4}{16} = 125 \text{ keV}\right]$

b) Předpokládejte, že se jedná o proton. Jaká je šířka jámy L ?
hmotnost protonu je $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$ kg , Planckova konstanta je $h = 6,62607 \cdot 10^{-34}$ J · s
$\left[L = \sqrt{\frac{2h^2}{m_p E_4}} = 4,047 \cdot 10^{-14} \text{ m}\right]$



Řešíme Schrödingerovou rovnici (bezčasovou) v intervalu $\langle 0; L \rangle$

pro $U=0$: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$ s okrajovými podmínkami $\psi(0)=\psi(L)=0$

$\psi_n(x) = C_n \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right) = \left[\lambda_n = \frac{2L}{n}\right] = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

- λ_n souvisí buď se Schrödingerovou rovnicí $\psi'' + k^2\psi = 0$ $\quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}\right)^2 = \frac{h^2}{2m}\frac{1}{\lambda_n^2} = \left[\lambda_n = \frac{2L}{n}\right] = \frac{h^2 n^2}{2mL^2}$$

- nebo lze použít de Broglieovu hypotézu: $E = \frac{p^2}{2m} = \left[p = \frac{h}{\lambda}\right] = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \left[\lambda = \frac{2L}{n}\right] = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}$

a) $E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$ $\quad E_4 = \frac{4^2 h^2}{8mL^2}$ $\quad E_1 = \frac{E_4}{16} = \frac{2000}{16} \text{ keV} = 125 \text{ keV}$

b) $E_4 = \frac{4^2 h^2}{8m_p \cdot L^2} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{2h^2}{m_p E_4}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (6,626 \cdot 10^{-34})^2}{1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} \doteq 4 \cdot 10^{-14} \text{ m}$

Příklad 2.9

Vodíkový atom přejde ze stavu $n = 3$ do stavu $n = 1$. Přitom emituje emituje foton. Víme, že hmotnost elektronu je $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg , náboj elektronu je $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C , permitivita vakua je $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1} , Planckova konstanta je $h = 6,62607 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s , rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} .

a) Jaká je energie E emitovaného fotonu ? výsledek vyjádřete v Joulech i v elektronvoltech

$$\left[E = \frac{m_e e^4}{9\varepsilon_0^2 h^2} = 1,93 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = 12\ \mathrm{eV}\right]$$

b) Jaká je hybnost p emitovaného fotonu ? $\left[p = \dfrac{E}{c} = 6,5 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}\right]$

c) Jaká je vlnová délka λ emitovaného fotonu ? $\left[\lambda = \dfrac{hc}{E} = 103\ \mathrm{nm}\right]$

Energie elektronu v atomu vodíku : $E_n = -\dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\dfrac{1}{n^2} = -\dfrac{R}{n^2}$

a) $E_{31} = E_3 - E_1 = -\dfrac{R}{9} + \dfrac{R}{1} = \dfrac{8}{9}R = \dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = \dfrac{me^4}{9\varepsilon_0^2 h^2}$ $\quad E_{31} = \dfrac{9,1\cdot10^{-31}\cdot(1,6\cdot10^{-19})^4}{9\cdot(8,854\cdot10^{-12})^2\cdot(6,6\cdot10^{-34})^2} = 1,9\cdot10^{-18}\,\mathrm{J} = 12\,\mathrm{eV}$

b) pro fotony $E = p\cdot c \Rightarrow p = \dfrac{E_{31}}{c} = \dfrac{1,9\cdot10^{-18}}{3\cdot10^{8}} \doteq 6,5\cdot10^{-27}\ \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$

c) $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{c}{E/h} = \dfrac{hc}{E}$ $\quad \lambda = \dfrac{6,626\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{1,937\cdot10^{-18}}\,\mathrm{m} = 103\cdot10^{-9}\,\mathrm{m} = 103\,\mathrm{nm}$

Příklad 2.10

Ukažte na základě Pauliho principu, jaký je největší možný počet elektronů na čtvrté kvantové dráze [$N = 2n^2 = 32$]

n … hlavní kvantové číslo (u vodíku určují celkovou energii: $E_n = -\frac{R}{n^2}$)

l … vedlejší kvantové číslo (souvisí s orbitálním momentem hybnosti)

$l \in \langle 0; n-1 \rangle$ $l \in \mathbb{N}_0$ $\langle \hat{L} \rangle = \hbar \sqrt{l(l+1)}$

m … magnetické kvantové číslo $m = 0, \pm 1, \ldots \pm l$ (souvisí s $\hat{L}_z$)

s … spin (souvisí s vlastním momentem hybnosti) $\hat{s} = \hbar \sqrt{s(s+1)}$

$s = \pm \frac{1}{2}$ pro elektrony

Pro konkrétní hladinu (hlavní kvantové číslo) dostaneme max. počet e^-:

$$N = \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1}}_{\text{suma přes všechny vedlejší kvantová čísla}} \underbrace{2}_{\text{2x kvůli spinu}} \cdot \underbrace{(2l+1)}_{\text{počet různých magnetických kvantových čísel}} = 2 \cdot \left[2 \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n \right] = 2n^2$$

pro $n = 4$ $N = 2 \cdot 16 = 32$

$2n^2$

$n=1$ $\quad \ell=0$ $\quad m=0$

1 $\quad$ s $\quad \boxed{\uparrow\downarrow}$ spin $\pm\frac{1}{2}$ $\quad$ 2 $\quad = 2\cdot 1$

$n=2$ $\quad \ell=0$ $\quad m=0$

2 $\quad$ s $\quad \boxed{\uparrow\downarrow}$ $\quad$ 2

$\ell=1$ $\quad m=-1 \quad m=0 \quad m=1$

2 $\quad$ p $\quad \boxed{\uparrow\downarrow \mid \uparrow\downarrow \mid \uparrow\downarrow}$ $\quad$ 6

$\left.\begin{matrix}2\\6\end{matrix}\right\} 8 = 2\cdot 2^2$

$n=3$ $\quad \ell=0$ $\quad m=0$

3 $\quad$ s $\quad \boxed{\uparrow\downarrow}$ $\quad$ 2

$\ell=1$ $\quad m=-1 \quad m=0 \quad m=1$

3 $\quad$ p $\quad \boxed{\uparrow\downarrow \mid \uparrow\downarrow \mid \uparrow\downarrow}$ $\quad$ 6

$\ell=2$ $\quad m=-2 \quad m=-1 \quad m=0 \quad m=1 \quad m=2$

3 $\quad$ d $\quad \boxed{\uparrow\downarrow \mid \uparrow\downarrow \mid \uparrow\downarrow \mid \uparrow\downarrow \mid \uparrow\downarrow}$ $\quad$ 8

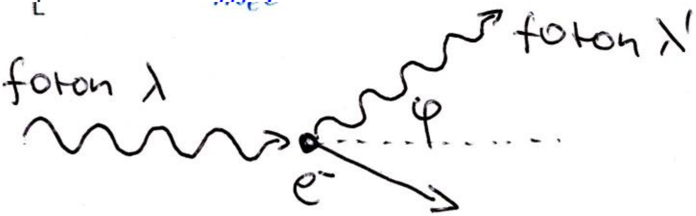
$\left.\begin{matrix}2\\6\\8\end{matrix}\right\} 18 = 2\cdot 3^2$

Příklad 2.11 compton

Americký fyzik Richard Holly Compton studoval v roce 1922 rozptyl rentgenového záření na parafínu (Comptonův rozptyl). Vazebná energie elektronu v parafínu je mnohem menší než energie záření, Compton proto pokládal elektrony za volné. Překvapivé je, že rozptýlená vlnová délka fotonu je větší, než vlnová délka dopadajícího fotonu. Dochází k rozptylu fotonu na volném eletronu. Experiment prokazuje částicovou povahu světla. Nobelova cena udělena v roce 1927.

Svazek paprsků X se rozptyluje na volných elektronech. Pod úhlem φ =45^o od směru šíření svazku mají rozptýlené paprsky vlnovou délku $\lambda' = 2,2 \cdot 10^{-12}$ m. Jaká je vlnová délka λ dopadajících paprsků X? Planckova konstanta je $h = 6,62607 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s , rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} , klidová hmotnost elektronu je $m_{e0} = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg

$$\left[\lambda = \lambda' - \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\varphi) = 1,49 \cdot 10^{-12}\ \text{m}\right]$$



z relativistického zákona zachování hybnosti a energie odvodíme:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} \cdot (1 - \cos\varphi)$$

$$\lambda = \lambda' - \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\varphi)$$

$$\lambda = 2,2 \cdot 10^{-12} - \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \text{m}$$

$$\lambda = 2,2 \cdot 10^{-12} - 0,71 \cdot 10^{-13}\ \text{m}$$

$$\lambda = 1,49 \cdot 10^{-12}\ \text{m} = 1,49\ \text{pm}$$

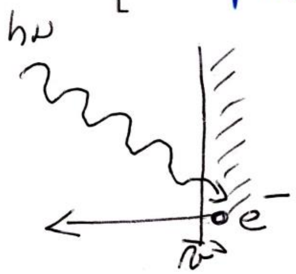
Příklad 2.14

Výstupní práce daného kovu je Φ=1,8 eV. Planckova konstanta je $h = 6,62607 \cdot 10^{-34}$ J · s , náboj elektronu je $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C , hmotnost elektronu je $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg , rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1} .

a) Jaký je brzdný potenciál U_b pro světlo o vlnové délce λ=400 nm? $\left[U_b = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - \Phi\right) = 1,3 \text{ V}\right]$

b) Jaká je největší rychlost v_m fotoelektronů při opuštění povrchu kovu?

$$\left[v_m = \sqrt{\frac{2}{m_e}\left(\frac{hc}{\lambda} - \Phi\right)} = 676197,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$$



Fotoelektrický jev (FFE) :

$E_{\text{fotonu}} = E_{\substack{\text{kinetická} \\ \text{elektronu}}} + A_{\substack{\text{výstupní} \\ \text{z kovu}}}$

$h\nu = \frac{1}{2} m_e v^2 + \Phi$

a) elektrony o maximální (počáteční) kinetické energii

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = h\nu - \Phi$$

brzdíme elektrickým polem tak, že $E_{\text{kinetická}} = E_{\text{potenciální}}$

$$\frac{1}{2} m v^2 = e \cdot U_b$$

tedy $eU_b = h\nu - \Phi$ $\qquad \nu = \frac{c}{\lambda}$

$$eU_b = \frac{hc}{\lambda} - \Phi$$

$$U_b = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - \Phi\right)$$

$$U_b = \frac{1}{1,602 \cdot 10^{-19}} \cdot \left(\frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{400 \cdot 10^{-9}} - 1,8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\right) = 1,3 \text{ V}$$

b) $\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{hc}{\lambda} - \Phi$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m_e}\left(\frac{hc}{\lambda} - \Phi\right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{9,109 \cdot 10^{-31}}\left(\frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{400 \cdot 10^{-9}} - 1,8 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\right)} \text{ m/s} = 677 \ \frac{\text{km}}{\text{s}} \ll c$$

můžeme použít nerelativ. vzorce

Příklad 2.15

Družice na oběžné dráze se může nabíjet v důsledku fotoefektu, protože světlo Slunce vyráží elektrony z jejího vnějšího povrchu. Družice se musí navrhovat tak, aby se toto nabíjení minimalizovalo. Předpokládejme, že povrch družice pokryjeme platinou, kovem o velmi vysoké výstupní práci (Φ=5,32 eV). Najděte nejdelší vlnovou délku λ dopadajícího slunečního světla, které může vyrazit elektrony z platiny. Planckova konstanta je $h = 6,62607 \cdot 10^{-34}$ J · s , rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^{8}$ m · s^{-1} .

$$\left[\lambda = \frac{hc}{\Phi} = 233 \text{ nm}\right]$$

Opět fotoelektrický jev: $h\nu = h\frac{c}{\lambda} = E_{kin} + \Phi$

tzn. k fotoefektu dojde pouze pokud

$$h\frac{c}{\lambda} \geq \Phi$$

$$\lambda_{MIN} = \frac{hc}{\Phi}$$

$$\lambda_{MIN} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 5,32} \text{ m} = 233 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Příklad 2.17

Předpokládejte, že relativní účinnost povrchu cesia o výstupní práci Φ=1,80 eV je $\eta = 1,0 \cdot 10^{-16}$; v průměru je tedy emitován jeden elektron na $n = 10^{16}$ fotonů, které dopadají na povrch. Jaký změříte proud elektronů emitovaných tímto povrchem, když jej ozáříme laserem o vlnové délce λ=600 nm a výkonu P=2,00 mW, pokud měříme všechny emitované elektrony?
Planckova konstanta je $h = 6,62607 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s , rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^{8}$ m $\cdot$ s^{-1} , náboj elektronu je $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C $\left[I = \frac{Pe\lambda}{hc}\eta = 9,67 \cdot 10^{-20} \text{ A} \right]$

Odevzdáváte v Moodle. Děkuji.