MANUÁL
LGR 101

FROM DUMMIES FOR DUMMIES

by: Karolína Zapletalová, Daniel Švehla, Jiří Svítil

Vítejte v manuálu „Jak přežít LGR za tři dny“.

Pokud se tohoto textu chopíte pár hodin před zkouškou, buďto jste příkladem odvážné odhodlanosti, nebo prostě student, který ještě nepochopil, že není úplně nejlepší nechat vše na poslední chvíli.

Ale nezoufejte, já byla na stejném místě a nyní je tu moje cesta k úspěchu, abych vám pomohla navigovat temnými vodami definic, teorem a ukázkových příkladů.

Tento manuál je jako váš vlastní logický kompas, který vás provede neprozkoumanou džunglí grafů, aniž byste se ztratili. Ať už jste matematický Einstein nebo jen zoufalý student před zkouškou, zůstaňte s námi a uvidíte, že i logika a grafy mohou být zábavné – nebo aspoň snesitelné.

Tak pojďme na to!

PS: Ano už mi hrabe - Kája <3

Disclaimer:

Tento dokument je výsledkem intenzivního nočního maratónu studování, při kterém nechyběly ani káva a možná trocha šílenství. Berte to tak, že to je, jako byste se pokoušeli přeložit Shakespeara do Klingonštiny za použití překladače Google. Některé definice jsou zjednodušené, některé teorie jsou zkomolené a některé příklady jsou možná tak trochu... unikátní.

Dokument je zpracován s nejlepšími úmysly a cílem usnadnit vám přípravu na zkoušku, ale je možné, že obsahuje chyby, omylem, nebo kvůli únavě. Takže pokud narazíte na něco, co se zdá být zcela odlišné od toho, co vám řekl váš profesor, už jste byli varováni!

Pokud se dostanete do bodu, kde se vaše chápání LGR (logiky, grafů a reality) jeví jako by pocházelo z paralelního vesmíru, kde dva plus dva rovná se pět a kde grafy mají tendenci se chovat více jako špagety než matematické konstrukce, prosím, neobviňujte nás.

Šťastný boj s LGR a hodně štěstí! A nezapomeňte, studium je maraton, ne sprint - alespoň pro ty, kteří nečekají až na poslední tři dny před zkouškou.

OBSAH

LOGIKA

> Pravdivost tvrzení nemá s jeho uvěřitelností nic společného. A naopak.
>
> *The Notebooks of Lazarus Long*

Výroková logika:

Syntaxe a sémantika výrokové logiky

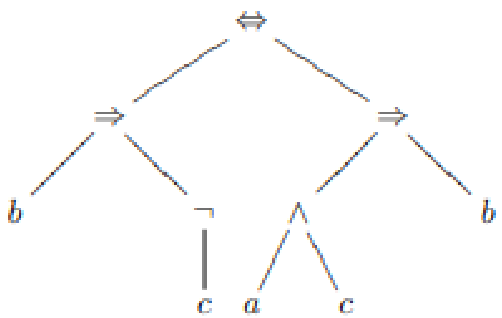
Definice: Máme danou neprázdnou množinu A tzv. **atomických výroků** (těch jim říkáme logické proměnné). Konečnou posloupnost prvků z množiny A, logických spojek a závorek nazýváme **výrokové formule** (zkráceně jen formule), jestliže vznikla podle následujících pravidel:

Každá logická proměnná (atomický výrok) $a \in A$ je *výroková formule*.
Jsou-li α, β výrokové formule, pak $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ a $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jsou *také výrokové formule*.
Nic jiného než to, co vzniklo pomocí konečně mnoha použití bodů 1 a 2, *není* výroková formule.
Všechny formule, které vznikly z logických proměnných množiny A, značíme P(A).

Spojka $\neg$ se nazývá *unární*, protože vytváří novou formuli z *jedné* existující formule.
Ostatní spojky se nazývají *binární*, protože vytvářejí novou formuli ze *dvou* formulí.
Množina atomických výroků (logických proměnných) - malá písmena anglické abecedy jako například a, b, c, ..., x, y, z nebo x1, x2, ...
Výrokové formule - malými řeckými písmeny, například α, β, γ, ... nebo ϕ, ψ, ...

Syntaktický strom formule slouží k vizualizaci způsobu, jak formule vzniká podle pravidel 1 a 2. Je to strom, kde každý vrchol, který není listem, je ohodnocen logickou spojkou. Binární spojky mají dva následníky a unární spojky mají pouze jednoho následníka.

V případě formulí ve tvaru $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ a $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ odpovídá levý následník formule α a pravý následník formule β. Listy stromu jsou ohodnoceny logickými proměnnými. Syntaktický strom nám umožňuje identifikovat všechny podformule formule α.



Pravdivostní ohodnocení, též pouze ohodnocení formulí, je zobrazení u:P(A) -> {0, 1}, které splňuje následující pravidla:

(způsob, jak přiřadit hodnoty "pravda" nebo "nepravda" formulím)

(1) negace $\neg\alpha$ je pravdivá právě tehdy, když α je nepravdivá
(2) konjunkce $\alpha \wedge \beta$ je pravdivá právě tehdy, když α i β jsou pravdivé
(3) disjunkce $\alpha \vee \beta$ je nepravdivá právě tehdy, když α i β jsou nepravdivé
(4) implikace $\alpha \Rightarrow \beta$ je nepravdivá právě tehdy, když α je pravdivá a β je nepravdivá
(5) ekvivalence $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je pravdivá právě tehdy, když obě formule α a β jsou buď obě pravdivé nebo obě nepravdivé.

Pravdivostní tabulky logických spojek slouží k vizualizaci vlastností ohodnocení formulí.

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Věta. Každé zobrazení u_0: A → {0, 1} jednoznačně určuje ohodnocení u : P(A) → {0, 1} takové, že $u_0(a) = u(a)$ pro všechna $a \in A$.

Důsledek: Dvě ohodnocení u, v:P(A) → {0, 1} jsou shodná právě tehdy, když pro všechny logické proměnné $x \in A$ platí $u(x) = v(x)$.

Definice:

Tautologie: Formule se nazývá tautologií, jestliže je pravdivá ve všech ohodnoceních. Tedy, v každém případě, ve kterém se přiřadí hodnoty logickým proměnným, je formule pravdivá.

Kontradikce: Formule se nazývá kontradikcí, jestliže je nepravdivá ve všech ohodnoceních. Tedy, bez ohledu na hodnoty logických proměnných, formule není nikdy pravdivá.

Splnitelná formule: Formule je splnitelná, jestliže existuje alespoň jedno ohodnocení, ve kterém je pravdivá. To znamená, že existuje přiřazení hodnot logickým proměnným, pro které je formule pravdivá.

Jak zjistit, že je formule tautologie/kontradikce/splnitelná bez využití tabulky?

$u((a \wedge b) \Rightarrow a)$ věřím, že to je tautologie, pokusím se to tedy vyvrátit a říct že je neplatná, to by znamenalo $u((a \wedge b) \Rightarrow a) = 0$ jenom když $u(a \wedge b) = 1$ a zároveň $u(a) = 0$, protože podle tabulky implikace je pouze $1 \Rightarrow 0 = 0$, $u(a \wedge b) = 1$ takže $u(a) = 1$ a $u(b) = 1$ protože pouze $1 \wedge 1 = 1$, ale **POZOR** tady máme **spor**, zároveň $u(a) = 0$ a $u(a) = 1$, což není možné a protože tohle je jediný způsob jak by celá formule mohla být nepravdivá (rovna nule) znamená to, že je vždy pravdivá a proto je tautologie.

Úplný systém logických spojek

Definice: Řekněme, že množina logických spojek Δ tvoří úplný systém logických spojek (též funkčně úplný systém logických spojek), jestliže pro každou formuli α existuje formule β, která je s ní tautologicky ekvivalentní a používá pouze spojky z množiny Δ.

To znamená, že pomocí spojek z množiny Δ je možné vyjádřit libovolnou logickou formuli α tak, aby tato nová formule β byla s α tautologicky ekvivalentní.

$(a \Rightarrow b) \mid=\mid (\neg a \lor b)$
$(a \lor b) \mid=\mid \neg(\neg a \land \neg b)$
$(a \land b) \mid=\mid \neg(\neg a \lor \neg b)$
$(a \lor b) \mid=\mid (\neg a \Rightarrow b)$
$(a \land b) \mid=\mid \neg(a \Rightarrow \neg b)$.

Tautologická/Sémantická ekvivalence

Definice: Řekněme, že formule ϕ a ψ jsou tautologicky ekvivalentní (také sémanticky ekvivalentní), jestliže pro každé ohodnocení u platí $u(\phi) = u(\psi)$. Fakt, že dvě formule ϕ a ψ jsou tautologicky ekvivalentní, zapisujeme $\phi \mid=\mid \psi$.

Pro každé formule α, β a γ platí:
- $\alpha \mid=\mid \alpha$,
- je-li $\alpha \mid=\mid \beta$, pak i $\beta \mid=\mid \alpha$,
- je-li $\alpha \mid=\mid \beta$ a $\beta \mid=\mid \gamma$, pak i $\alpha \mid=\mid \gamma$.

Pro každé formule α, β a γ platí:
- $\neg\neg\alpha \mid=\mid \alpha$;
- $\neg(\alpha \land \beta) \mid=\mid (\neg\alpha \lor \neg\beta)$, $\neg(\alpha \lor \beta) \mid=\mid (\neg\alpha \land \neg\beta)$ (de Morganova pravidla);
- $\alpha \land (\beta \lor \gamma) \mid=\mid (\alpha \land \beta) \lor (\alpha \land \gamma)$, $\alpha \lor (\beta \land \gamma) \mid=\mid (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)$ (distributivní zákony);
- $(\alpha \Rightarrow \beta) \mid=\mid (\neg\alpha \lor \beta)$.

Pro každé dvě formule α a β platí: $\alpha \mid=\mid \beta$ právě tehdy, když $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je tautologie.

CNF, DNF a Booleovský kalkul

Definice: Booleovou funkcí n proměnných, kde n je přirozené číslo, rozumíme každé zobrazení f: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, tj. zobrazení, které každé n-tici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nul a jedniček přiřazuje nulu nebo jedničku (označenou $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$).

Formule v disjunktivním normálním tvaru (DNF) je definována následovně:

Definice: Literál je logická proměnná nebo negace logické proměnné.
Minterm je literál nebo konjunkce konečně mnoha literálů.

Řekneme, že formule je v disjunktivním normálním tvaru, zkráceně v DNF, jestliže je složena z mintermů nebo disjunkcí konečně mnoha mintermů.

Formule v konjunktivním normálním tvaru (CNF) je definována následovně:

Definice: Maxterm je literál nebo disjunkce konečně mnoha literálů.

Řekneme, že formule je v konjunktivním normálním tvaru, zkráceně v CNF, jestliže je složena z maxtermů nebo konjunkcí konečně mnoha maxtermů.

Označme x = u(a) a y = u(b). Pak pro pravdivostní ohodnocení u platí:

u(a ∨ b)	= max{u(a), u(b)}	= max{x, y},
u(a ∧ b)	= min{u(a), u(b)}	= min{x, y},
u(¬a)	= 1 − u(a)	= 1 − x.

To motivuje zavedení booleovských operací (pro hodnoty 0, 1) takto:

logický součin	x · y = min{x, y},
logický součet	x + y = max{x, y},
doplněk	x = 1 − x.

Sémantický důsledek

Formule α je **logickým důsledkem** formule β, zapisujeme β ⊢ α, pokud existuje důkaz nebo odvození, ve kterém lze z formule β formálně odvodit formuli α pomocí pravidel logického odvozování.

Formule α je **sémantickým důsledkem** formule β, zapisujeme β ⊨ α, pokud všechna ohodnocení proměnných, která splňují formuli β, také splňují formuli α.

Definice: Řekněme, že **množina formulí S je pravdivá** v ohodnocení u, pokud každá formule z S je pravdivá v u, což znamená, že pro každou formuli ϕ ∈ S platí u(ϕ) = 1.

Uvědomte si, že **množina formulí S je nepravdivá** v ohodnocení u, pokud existuje alespoň jedna formule ϕ ∈ S, která je nepravdivá v u. Tedy existuje alespoň jedna formule z množiny S, která má pravdivostní hodnotu 0 v ohodnocení u.

Definice: Řekněme, že množina formulí S je **splnitelná**, pokud existuje takové ohodnocení proměnných u, ve kterém jsou všechny formule z S pravdivé. V opačném případě, pokud neexistuje žádné ohodnocení, ve kterém by byly všechny formule z S pravdivé, nazýváme množinu S nesplnitelnou.

Definice: Řekněme, že formule ϕ je **konsekventem** (**sémantickým** nebo **tautologickým důsledkem**) množiny formulí S, pokud je ϕ **pravdivá** v každém ohodnocení u, ve kterém je pravdivá i množina S.

S:= {a, a ⇒ b} , M:= b

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

S |= M, protože pro kladnou množinu S je kladná množina M

Pro každé dvě formule α a β platí: α |= β právě tehdy, když α ⇒ β je tautologie.
Pro množinu formulí S a formuli ϕ platí: S |= ϕ právě tehdy, když S ∪ {¬ϕ} je nesplnitelná.
Pro množinu formulí S a formule ϕ a ψ platí: S ∪ {ϕ} |= ψ právě tehdy, když S |= (ϕ ⇒ ψ).

Spojka	Zavedení spojky	Eliminace spojky
$\wedge$	$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\mathrm{i}\wedge$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\mathrm{e}\wedge_1 \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,\mathrm{e}\wedge_2$
$\vee$	$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,\mathrm{i}\vee_1 \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,\mathrm{i}\vee_2$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\,\mathrm{e}\vee$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \Rightarrow \psi}\,\mathrm{i}\Rightarrow$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}\,\mathrm{e}\Rightarrow$
$\Leftrightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}}{\varphi \Leftrightarrow \psi}\,\mathrm{i}\Leftrightarrow$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \Leftrightarrow \psi}{\psi}\,\mathrm{e}\Leftrightarrow_1 \qquad \dfrac{\varphi \Leftrightarrow \psi \quad \psi}{\varphi}\,\mathrm{e}\Leftrightarrow_2$
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\varphi}\,\mathrm{i}\neg$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\,\mathrm{e}\neg$
$\top$	$\dfrac{}{\top}\,\mathrm{i}\top$	není
$\bot$	není	$\dfrac{\bot}{\varphi}\,\mathrm{e}\bot$
$\neg\neg$	(netřeba) $\dfrac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\,\mathrm{i}\neg\neg$	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\,\mathrm{e}\neg\neg$

Pomocné pravidlo: pravidlo iterace (it).

Odvozené pravidlo LEM (zákon vyloučeného třetího, tertium non datur):

$$\dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\mathrm{LEM}$$

Predikátová logika:

Syntaxe predikátové logiky

Termy: intuitivně je dobré si termy představit jako objekty, o jejichž vlastnostech bude naše logika vypovídat. Termem může být buď proměnná nebo je term zkonstruován z jiných termů použitím funkčních symbolů.

Formule: intuitivně jsou to vlastnosti vytvořených objektů.

Atomické formule jsou nedělitelné logické formule.
Existují dva způsoby vytvoření atomické formule:
- jako rovnost termů (tvrdíme, že dva objekty jsou totožné) nebo
- jako aplikace predikátu na termy (predikát vyjadřuje atomickou vlastnost objektů).

Složité formule jsou vytvořeny kombinací formulí pomocí spojek z výrokové logiky:

(a) True: tt s aritou 0.
(b) Negace: ¬ s aritou 1.
(c) Konjunkce: ∧ s aritou 2.
(d) Disjunkce: ∨ s aritou 2.
(e) Implikace: ⇒ s aritou 2.
(f) Ekvivalence: ⇔ s aritou 2.

K těmto spojkám přidáváme ještě dvě speciální značky:
∀ (obecný kvantifikátor)
∃ (existenční kvantifikátor)

Arita je přirozené číslo, které udává, kolika objektů se daný predikát nebo funkční symbol týká, nebo kolik proměnných má funkční symbol.
Aritu nazýváme také četností predikátového symbolu nebo funkčního symbolu.

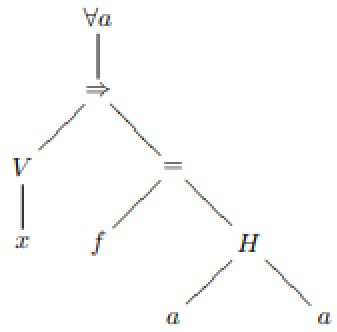
Jazyk predikátové logiky L obsahuje také speciální symboly:
Pred: Množina predikátových symbolů (není prázdná) P(x), Q(x, y), R(z)...
Kons: Množina konstantních symbolů (může být prázdná) a, b, c…
Func: Množina funkčních symbolů (může být prázdná) f(x), g(y), h(z)...

Množina termů je definována následujícími pravidly:
1. Každá proměnná a každý konstantní symbol je term.
2. Pokud je f funkčním symbolem s aritou n a t1, t2, ..., tn jsou termy, pak f(t1, t2, ..., tn) je také term.
3. Nic, co nevzniklo konečným použitím pravidel 1 a 2, není term.

Atomická formule je definována následujícím způsobem:
Atomická formule je řetězec P(t1, t2, ..., tn), kde P je predikátový symbol s kladnou aritou n a t1, t2, ..., tn jsou n-tice termů.
Může také být řetězec P, kde P je predikátový symbol s aritou 0.

Formule je potom definována následujícími pravidly:
1. Každá atomická formule je formule.
2. Pokud F je formule a ϕ a ψ jsou dvě formule, pak ¬ϕ, (ϕ ∧ ψ), (ϕ ∨ ψ), (ϕ ⇒ ψ), (ϕ ⇔ ψ) jsou opět formule.
3. Pokud ϕ je formule a x je proměnná, pak (∀x ϕ) a (∃x ϕ) jsou opět formule.
4. Nic, co nevzniklo pomocí konečného počtu použití pravidel 1 až 3, není formule.

Syntaktický strom formule:
Ke každé formuli predikátové logiky můžeme přiřadit její syntaktický strom, který je podobný syntaktickému stromu výrokových formulí. Rozdíl je v tom, že kvantifikátory jsou považovány za unární (mají pouze jednoho následovníka), a také vytváříme syntaktický strom pro termy. Listy syntaktického stromu jsou vždy ohodnoceny proměnnou, konstantním symbolem, predikátovým symbolem arity 0 nebo F.



Podformule:
Podformule formule ϕ je libovolný podřetězec ϕ, který je sám formulí.

Vázání proměnné je výskyt proměnné ve formuli, který je omezen kvantifikátorem.Výskyt proměnné x ve formuli ϕ je reprezentován listem syntaktického stromu obsahujícím tuto proměnnou. Výskyt proměnné x je vázaný ve formuli ϕ, jestliže při postupu od listu ohodnoceného touto x ve směru ke kořeni syntaktického stromu narazíme na kvantifikátor s touto proměnnou. (proměnná **a** v obrázku stromu)

Volný výskyt proměnné je výskyt proměnné ve formuli, který není vázán žádným kvantifikátorem.

Pokud je proměnná ve formuli vyskytující se **volně**, **může být nahrazena** jinou proměnnou nebo konstantou, **aniž by se změnil význam** formule. Nesmí se taky stát vázanou. Naopak, pokud je proměnná vázaná, nahrazení by mohlo změnit význam formule.

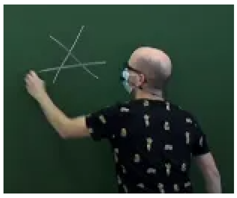
ϕ = (∀x P(x, y)) [x/y] (x bude nahrazena y) -> ϕ' = (∀y P(y, y)) y se stala **vázanou** - problém!

Sentence a otevřená formule:
Formule, která má **pouze vázané** výskyty proměnných, se nazývá sentence, tedy **uzavřená formule**. Formule, která má **pouze volné výskyty** proměnných, se říká **otevřená formule**.

Rovnost formulí:
Dvě formule jsou považovány za stejné, jestliže se **liší** pouze **legálním přejmenováním vázaných proměnných.**

Sémantika predikátové logiky (pravdivost)

Interpretace predikátů a funkčních symbolů
Ať L je jazyk predikátové logiky s množinou predikátů **Pred** a množinou funkčních symbolů **Func**. Interpretací predikátů a funkčních symbolů rozumíme následující:



1. **Množina U** zvaná **universum interpretace**.
Jinak: universum je „svět", jehož prvky popisují termy
a o vlastnostech těchto prvků mluví formule. (může být prázdná pouze pokud

interpretace neobsahuje konstanty - Dostál approved )

2. **Přiřazení [[−]]** ve své podstatě je funkce, která provádí přiřazení interpretací predikátovým a funkčním symbolům.

(a) Každému predikátu P s aritou n přiřazuje [[P]], což je množina uspořádaných n-tic prvků z univerza U. To znamená, že [[P]] obsahuje všechny n-tice objektů, které mají "vlastnost" P.

(b) Každému funkčnímu symbolu f s aritou n přiřazuje [[f]], což je funkce [[f]]: $U^n \to U$. To znamená, že [[f]] přijímá n-tici objektů a vytváří z nich další objekt.

Obecněji se přiřazení [[−]] může vyjádřit jako uspořádaná dvojice {U, [[−]]}, která zahrnuje univerzum U a přiřazení interpretací predikátovým a funkčním symbolům.

Kontext proměnných je definován jako zobrazení ρ, které každé proměnné $x \in Var$ přiřazuje prvek $\rho(x) \in U$, kde U je univerzum dané interpretace hU, [[−]]i.

Pro daný kontext proměnných ρ, proměnnou $x \in Var$ a prvek $d \in U$ označuje **ρ[x := d]** kontext proměnných, který má stejné hodnoty jako ρ, s výjimkou proměnné x, která je přiřazena hodnotou d. Tento **nový kontext** proměnných se nazývá **aktualizace** (**update**) kontextu ρ o hodnotu d v x.

Definice. Mějme interpretaci {U, [[−]]} a kontext proměnných ρ. Potom termy interpretujeme následujícím způsobem:

Pokud je **term** konstantním symbolem **a** ∈ **Kons**, pak jeho hodnota je prvek **[[a]]ρ = [[a]]** (to znamená, že konstantní symbol není ovlivněn kontextem proměnných, je ovlivněn interpretací)
Pokud je **term proměnnou x**, pak jeho hodnota je **[[x]]ρ = ρ(x)**

Příklad: f(t1, . . . , tn) term -> [[f(t1, . . . , tn)]]ρ = [[f]] ([[t1]]ρ, . . . , [[tn]]ρ)
Jinými slovy, hodnota termu f(t1, . . . , tn) se získá aplikací funkce [[f]] na n-tici prvků [[t1]]ρ, . . . , [[tn]]ρ z U.

Příklad: [[ϕ o ψ]] = [[o]] ([[ϕ]]ρ, [[ψ]]ρ)
[[o]] je jakákoliv funkce arity 2 (bere hodnoty v závorce a provede danou operaci)
[[ϕ]]ρ je zapsání ϕ v kontextu proměnných ρ, v zadání kontextu ρ tedy může být
ϕ -> 2, potom [[ϕ]]ρ = 2
[[ψ]]ρ to stejné, například [[ψ]]ρ = 3 a [[o]] je násobení, výsledkem je tedy 2*3 = 6
S tímto se poté může pracovat dál podle podmínek (např. že výsledky mají být sudé ect…)
[[P]] = {2 · z | z ∈ Z} pak tedy [[P]](6) = 1 je pravdivá
Více podrobné příklady budou dále, kde lze přiřazování krásně vidět.

Příklad s kvantifikátory:
∀x ϕ(x) je pravdivá právě tehdy, když formule ϕ je **pravdivá** v **každém** kontextu **ρ[x := d]**, kde **d** je **prvek U**.

∃x ϕ(x) je pravdivá právě tehdy, když formule ϕ je **pravdivá** v **alespoň jednom kontextu ρ[x := d]**, kde **d** je **prvek U**.

L = (U, [[ ]]), U = |N	interpretace L = {U, [[ ]] }
[[a]] = 2	konstantně 2
[[M]] = { (m, n) | m < n }	kontroluje zda je první hodnota menší, pak pravda
[[f]] = |N * |N -> N (m,n -> m+n)	z dvou hodnot sečte
ρ: y -> 4	v kontextu ρ je y 4

L |=ρ ∀xM(x, f(a, y)) je tahle formule pravdivá? pro všechny x z univerza U (v kontextu ρ)?
[[∀xM(x, f(a, y))]] ρ = 1?
[[ϕ]]ρ = [[∀xM(x, f(a, y))]] ρ pro všechny updaty x má být tahle formule pravdivá

pro všechny x má být podle zadání x < a+y -> x < 6
x může být jakýkoliv update z univerza U, který náleží přirozeným číslům
[[∀xM(x, f(a, y))]]ρ = [[M]] (x , [[f(a, y)]] ρ) = [[M]] (x ,[[f]] ([[a]], [[y]]ρ)) ->

Pro [[∀xM(x, f(a, y))]]ρ [x:= 1] -> [[M]] (1,6) = 1 je to pravda, 1 < 6
ale pro [[∀xM(x, f(a, y))]]ρ [x:= 8] -> [[M]] (8,6) = 0 je to nepravda, 8 !< 6
takže správná pravdivá formule je L |=ρ ∃xM(x, f(a, y))

Definice: Interpretace {U, [[−]]}, ve které je sentence ϕ **pravdivá**, se nazývá **model sentence** ϕ.

Definice:
Sentence ϕ se nazývá **tautologie**, jestliže je **pravdivá** v **každé** interpretaci.
Sentence ϕ se nazývá **kontradikce**, jestliže je **nepravdivá** v **každé** interpretaci.
Sentence ϕ se nazývá **splnitelná**, jestliže je **pravdivá** v **alespoň jedné** interpretaci.

Vždy hledáme obvious protipříklady.

Definice:
Množina sentencí M je **splnitelná**, jestliže **existuje alespoň jedna** interpretace {U, [[−]]}, ve které jsou **všechny sentencí z M pravdivé**. Takovou interpretaci pak nazýváme **model množiny sentencí** M.
Množina sentencí M je **nesplnitelná**, jestliže pro **každou** interpretaci {U, [[−]]} existuje formule z M, která je v {U, [[−]]} **nepravdivá**, tj. **nemá model**.
Z poslední definice vyplývá, že **prázdná množina** sentencí je **splnitelná**.

Tautologická ekvivalence

pouze pro sentence, tedy formule bez volných výskytů proměnných

Definice: Řekněme, že dvě sentence ϕ a ψ jsou tautologicky ekvivalentní, jestliže mají stejné modely, tj. jsou pravdivé ve stejných interpretacích. Tento fakt značíme jako ϕ |=| ψ.
Nechť ϕ a ψ jsou sentence. Pak platí:

ϕ |=| ψ právě tehdy, když ϕ ⇔ ψ je tautologie. (např. ¬(∀x P(x)) |=| (∃x ¬P(x)))

Sémantický důsledek

Definice: Je dána množina sentencí S a sentence ϕ. Řekneme, že ϕ je **sémantickým důsledkem**, tedy **konsekventem**, množiny S, jestliže každý model množiny S je také modelem sentence ϕ. Tento fakt značíme jako **S |= ϕ**.

Můžeme také říci, že sentence ϕ není konsekventem množiny sentencí S, jestliže existuje model množiny S, který není modelem sentence ϕ.

Příklad: ∀x∃yM(x, y) |= ∃y∀xM(x, y) platí že pro každé číslo existuje číslo větší, ale neplatí, že existuje nějaké číslo větší než všechny ostatní, existuje model množiny, ve kterém první sentence platí, ale druhá sentence neplatí, proto není sémantickým důsledkem

Nechť ϕ a ψ jsou sentence. Pak platí: **ϕ |=| ψ** právě tehdy, když **ϕ |= ψ a ψ |= ϕ**.
Obojí znamená, že sentence ϕ a ψ mají stejné modely.

Nechť ϕ a ψ jsou sentence. Pak platí: **ϕ |= ψ** právě tehdy, když **ϕ ⇒ ψ** je **tautologie**.
Obojí znamená, že neexistuje interpretace, která by byla modelem ϕ a nebyla modelem ψ.

Věta. Pro každou množinu sentencí S a každou sentenci ϕ platí:
S |= ϕ právě tehdy, když **S ∪ {¬ϕ}** je **nesplnitelná** množina.

Přirozená dedukce v predikátové logice

Definice: Sentence ϕ je **logickým důsledkem množiny** předpokladů S, což znamená, že ϕ logicky vyplývá z S, právě tehdy, když existuje odvození z S takové, že posledním odvozeným výrokem je ϕ. Tuto relaci zapisujeme jako **S ⊢ ϕ.**

Věta o úplnosti říká, že pro libovolnou množinu výroků S a výrok ϕ platí, že S logicky vyplývá z ϕ **(S ⊢ ϕ)** právě tehdy, když každý model, ve kterém jsou všechny výroky ze S pravdivé, také platí výrok ϕ **(S |= ϕ).**

Kvantifikátor	Zavedení kvantifikátoru	Eliminace kvantifikátoru
$\forall x$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \vdots \\ \varphi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \varphi}$ i$\forall$x	$\dfrac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]}$ e$\forall$x
$\exists x$	$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi}$ i$\exists$x	$\dfrac{\exists x \varphi \quad \boxed{\begin{array}{l} x_0 : \quad \varphi[x_0/x] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi}$ e$\exists$x

	Zavedení	Eliminace	Symetrie	Transitivita
Pravidlo pro rovnost	$\dfrac{}{t = t}$ i=	$\dfrac{t_1 = t_2 \quad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]}$ e=	$\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}$ sym=	$\dfrac{t_1 = t_2 \quad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}$ trans=

Ukázkové otázky u zkoušky minimální části

Úloha 1 (2 body, testuje schopnost detekovat sémantickou ekvivalenci)

Rozhodněte, které z následujících formulí jsou sémanticky ekvivalentní formuli $a \vee b \Rightarrow \neg c$

a) $c \Rightarrow \neg(a \vee b)$
b) $(a \Rightarrow \neg b) \Rightarrow c$
c) $\neg c \Rightarrow \neg(a \vee b)$
d) $((a \vee b) \vee \neg c)$
e) $c \Rightarrow (a \wedge \neg b)$

(a ∨ b) ⇒ ¬ c

a	b	c	
0	0	0	pravda
0	1	0	pravda
0	0	1	pravda
0	1	1	nepravda
1	0	0	pravda
1	1	0	pravda
1	0	1	nepravda
1	1	1	nepravda

a) je sémanticky ekvivalentní, je pravdivá pro stejné případy
b) není, protože tahle formule je pravdivá pro všechny případy kdy je a = 0
c) není, protože tahle formule je pravdivá pro všechny případy kdy je c = 1
d) není, protože tahle formule je pravdivá vždy když buď a nebo b = 1
e) není, protože tahle formule není pravdivá pro případ kdy a i b = 0 a c = 1

Aby byly ekvivalentní musí být pravdivé ve stejných ohodnoceních

Úloha 2 (2 body, testuje schopnost detekovat tautologie)

Rozhodněte, které z následujících sentencí predikátové logiky jsou tautologie.

a) ∀x ∃y (x = y).
b) ∃y ∀x (x = y).
c) ∀x ∀y (x = y).
d) ∃x ∃y (x = y).
e) ∀y ∃x (x = y).

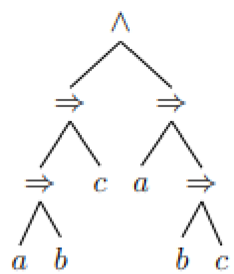
---

tautologie vyvracíme protipříkladem:

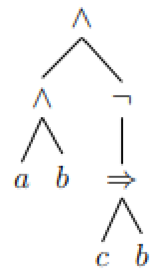
a) pravda - pro všechny x existuje update [y:= x] že x=y neboli x=x
b) nepravda - existuje update kdy neplatí, [x:= -x], pak x=-x
c) nepravda - update [y:= x] a [x:= -x], pak x=-x
d) nepravda - neplatí v prázdném universu
e) pravda - pro všechny y existuje update [x:= y] že y=y

Úloha 1 (1 bod)

Zakreslete syntaktický strom následující formule ϕ výrokové logiky:
ϕ = ((a ⇒ b) ⇒ c) ∧ (a ⇒ (b ⇒ c))



Začínáme hlavní spojkou, ta která spojuje dva největší “kusy” formule,
tedy $\wedge$, to nám rozdělí formuli na dvě podformule,
kde opakujeme hledání hlavní spojky a rozdělujeme dál
Zapište formuli ψ výrokové logiky danou následujícím syntaktickým stromem:



Tady začínáme taky od kořene, spojky $\wedge$, rozděluje dvě podformule,
pokračuje teda první po jedné větvi, nejlépe po levé a začnu zapisovat od
nejvíce levého listu, když narazím na spojku, přidám i pravou větev téhle spojky
$a \wedge b$, když postupuji nahoru tuhle formuli se spojkou dám pro přehlednost
a konvenci do závorky $(a \wedge b) \wedge$
teď pokračuji pravou větví dolů, $(a \wedge b) \wedge \neg(c \Rightarrow b)$

Úloha 2 (1 bod)

Rozhodněte, které z následujících formulí výrokové logiky jsou splnitelné:

1. $(a \Rightarrow b) \wedge \neg(a \vee b)$.
Potřebujeme ohodnocení, ve kterém jsou pravdivé obě části konjunkce. Pravá část je negace disjunkce, bude pravdivá, když a i b jsou nepravdivé. Zkusíme tedy ohodnocení, kde a = b = 0. Pro levou část, implikace $a \Rightarrow b$, je tato pravdivá pro dané ohodnocení (pamatujeme si pravdivostní tabulku). Takže, první formule **je splnitelná**.

2. $\neg(\neg a \vee \neg(b \wedge c))$.
Druhá formule je negace disjunkce. Použijeme De Morganův zákon $\neg(\phi \vee \psi) \mathrel{|\!=\!|} \neg\phi \wedge \neg\psi$, abychom formuli převedli na $\neg\neg a \wedge \neg\neg(b \wedge c)$. Po odstranění dvojitých negací vidíme, že můžeme ověřit splnitelnost formule $a \wedge (b \wedge c)$. Pravdivostní ohodnocení u pro a = b = c = 1 **splňuje** tuto formuli.

3. $(a \vee b) \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)$.
Pravá část konjunkce je sémanticky ekvivalentní s formulí $a \vee b$. Takže se můžeme ptát, zda je splnitelná formule $(a \vee b) \wedge (a \vee b)$, což je sémanticky ekvivalentní s formulí $(a \vee b)$. Tato formule **je splnitelná**.

4. $((a \vee b) \vee c) \Rightarrow (\neg a \wedge \neg b)$.
Hlavní spojka je implikace. Hledáme ohodnocení, které hodnotí předpoklad jako nepravdivý. Předpoklad je disjunkce tří atomických formulí, takže je můžeme všechny ohodnotit jako nepravdivé. Tím se celá formule stává **splnitelnou**.

5. $\bot \vee (a \Rightarrow \bot)$.
Levá strana nikdy platit nebude, soustředíme se tedy na pravou stranu. Jak jsme si ukázali v tabulce logických spojek, tak pokud bude a nepravdivé, tak je pravá strana splňena a sentence je tedy celá **splnitelná**. (nepravda implikuje cokoliv)

Úloha 3 (2 body)

Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:
Pred = {P, Q, R}, ar(P) = ar(Q) = 1, ar(R) = 2,
Func = {f}, ar(f) = 1,
Kons = {a}.
Jsou dány formule predikátové logiky
$\phi = \forall x R(x, y)$ a **$\psi = \exists y R(x, f(y))$**
(kde x, y a z jsou proměnné).
Dále je **term s** definován **jako f(f(x))** a **term t jako** proměnná **y**.

Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Term t je volný pro proměnnou x ve formuli ϕ.
x není ve formuli volná proměnná, proto nemůžeme nahradit, proto nezáleží na termu, **pravdivé**
2. Term t je volný pro proměnnou y ve formuli ϕ.
y se nachází jako volný výskyt, dosadím term t, který je definován jako y, tím pádem jsme za y dosadili y a nic se nemění, **pravdivé**

3. Term t je volný pro proměnnou x ve formuli ψ.
x je ve formuli volný, tak chci dosadit term t, který je y, ale jejda pozor, to by nám změnilo na vázaný, protože máme kvantifikátor y, **není pravdivý**

4. Term t je volný pro proměnnou y ve formuli ψ.
y nemá v ψ volné výskyty, toto tvrzení je tedy okamžitě **pravdivé**

5. Term s je volný pro proměnnou x ve formuli ψ.
x je volný, můžu dosadit, získám ∃yR(f(f(x)), f(y)), ale proměnná x je stále volná, **pravdivé**

Úloha 4 (2 body)

Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:
Pred = {P, Q, R}, ar(P) = ar(Q) = 1, ar(R) = 2,
Func = {f}, ar(f) = 1,
Kons = {a}.
Interpretace I jazyka L je dána následovně (připomenutí: 0 je přirozené číslo):
U = N

[[P]] = {0, 3, 12}	P kóduje vlastnost „být číslo 0, 3 nebo 12“
[[Q]] = {4 · z | z ∈ N}	Q kóduje vlastnost „být násobkem čtyřky“
[[R]] = {(m, n) ∈ N × N | m < n}	R kóduje vztah „být ostře menší než“
[[f]] : N → N n → n + 5	f kóduje funkci „přičítání pětky“
[[a]] = 2	a odkazuje na číslo 2

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.
1. ∀x∀y(R(x, y) ⇒ P(x)).
Ať si vezmu jakákoli dvě přirozená čísla n a m taková, že n < m, pak je n buď 0, 3, nebo 12. To zjevně **není pravda**.

2. ∃xR(a, x).
Nějaké přirozené číslo je větší než 2. To zjevně **pravda je**.

3. ∃x(P(x) ∧ ∀y(Q(y) ⇒ R(x, y))).
Některé z čísel 0, 3, 12 (označím ho n) má tu vlastnost, že každé přirozené číslo m dělitelné čtyřmi je větší než n. To **není pravda**: Pro 12 mohu vybrat třeba 8 (číslo osm je dělitelné čtyřmi, ale není větší než dvanáct), pro 3 mohu vybrat 0 (nula je také dělitelná čtyřmi, ale není větší než tři), a pro 0 mohu ostatně také vybrat 0 (nula není ostře větší než nula).

4. ∀x∃y(R(x, y) ∧ P(f(x))).
Ke každému přirozenému číslu n existuje přirozené číslo m, které je větší, a navíc má číslo n + 5 tu vlastnost, že je to 0, 3, nebo 12. To **není pravda**: vezměme si třeba přirozené číslo 4. Číslo 4 + 5 (tedy 9) není ani 0, ani 3, ani 12.

5. $\exists y \forall x (Q(x) \Rightarrow R(y, f(x)))$**.**
Existuje přirozené číslo m s tou vlastností, že pro každé přirozené n, které je dělitelné čtyřmi, je $m < n + 5$. To **je pravda**, mohu si zvolit například $m = 0$.

Časté otázky u zkoušky standardní část

Otázka 1.

rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x(B(x) \Rightarrow (\exists yM(x, y) \Rightarrow \exists yM(y, x))),$$

$$\forall x(\exists yM(y, x) \Rightarrow M(x, x)),$$

$$\neg \exists xM(x, x)$$

$$\vdash \ \forall x(B(x) \Rightarrow \forall y\neg M(x, y))$$

(Všichni blonďatí milovníci jsou milováni. Všichni, kdo jsou milováni, milují sami sebe. Nikdo nemiluje sám sebe. Proto blonďatí nikoho nemilují.)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení

1.	$\forall x(B(x) \Rightarrow (\exists yM(x,y) \Rightarrow \exists yM(y,x)))$	P
2.	$\forall x(\exists yM(y,x) \Rightarrow M(x,x))$	P
3.	$\neg\exists xM(x,x)$	P
4.	x_0	D
5.	$B(x_0)$	P
6.	$B(x_0) \Rightarrow (\exists yM(x_0,y) \Rightarrow \exists yM(y,x_0))$	e$\forall x$, 1
7.	$\exists yM(x_0,y) \Rightarrow \exists yM(y,x_0)$	e$\Rightarrow$, 5, 6
8.	y_0	D
9.	$M(x_0,y_0)$	P
10.	$\exists yM(x_0,y)$	i$\exists y$, 9
11.	$\exists yM(y,x_0)$	e$\Rightarrow$, 9, 7
12.	$\exists yM(y,x_0) \Rightarrow M(x_0,x_0)$	e$\forall x$, 2
13.	$M(x_0,x_0)$	e$\Rightarrow$, 11, 12
14.	$\exists xM(x,x)$	i$\exists x$, 13
15.	$\perp$	e$\neg$, 14, 3
16.	$\neg M(x_0,y_0)$	i$\neg$, 9–15
17.	$\forall y\neg M(x_0,y)$	i$\forall y$, 8–16
18.	$B(x_0) \Rightarrow \forall y\neg M(x_0,y)$	i$\Rightarrow$, 5–17
19.	$\forall x(B(x) \Rightarrow \forall y\neg M(x,y))$	i$\forall x$, 4–18

Otázka 2.

Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{$$

$$\forall x \forall y((\neg(x = y) \land M(x, y)) \Rightarrow \neg M(y, x)),$$

$$\forall x M(a, x),$$

$$\exists y \forall z M(z, y),$$

$$\exists x \exists y \neg(x = y)$$

$$\}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Řešení

Interpretace I:

U = {u,v}

[[a]] = u

[[M]] = {(u,v), (v,v), (u,u)}

Tyto typy otázek lze podle mě řešit nejlépe tak, že jdeme od nejslabšího tvrzení a přidáváme do universa prvky tak, aby byly sentence pravdivé.

Toto je pouze pro vysvětlení ve zkoušce není snad potřeba:

1. sentence $\forall x \forall y((\neg(x = y) \land M(x, y)) \Rightarrow \neg M(y, x))$
   - 1.1. x=u,y=u
     - 1.1.1. implikace automaticky platí
   - 1.2. x=u,y=v
     - 1.2.1. předpoklad implikace platí -> ¬M(v,u) je true
   - 1.3. x=v,y=u
     - 1.3.1. implikace automaticky platí M(v,u) vrací false
   - 1.4. x=v,y=v
     - 1.4.1. implikace automaticky platí
   - 1.5. platí
2. sentence $\forall x M(a, x)$
   - 2.1. x=u
     - 2.1.1. M(u,u) vrací true
   - 2.2. x=v
     - 2.2.1. M(u,v) vrací true
   - 2.3. platí
3. $\exists y \forall z M(z, y)$
   - 3.1. y=v

3.1.1. z=u

3.1.1.1. M(u,v) vrací truth

3.1.2. z=v

3.1.2.1. M(v,v) vrací truth

3.2. platí

4. $\exists x \exists y \neg(x = y)$

4.1. x=u,y=v

4.1.1. (u=v) vrací false, negace false je truth

4.2. platí

Otázka 3.

Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$P(b) \land Q(b),\ \forall x(P(x) \Rightarrow x = a) \vdash Q(a)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení

1.	$P(b) \land Q(b)$	P
2.	$\forall x(P(x) \Rightarrow x = a)$	P
3.	$P(b)$	$e\land_1$,1
4.	$P(b) \Rightarrow b = a$	$e\forall$ 2,3
5.	$b=a$	e
6.	$Q(b)$	$e\land_2$,1
7.	$Q(a)$	e=5,6

Otázka 4.

Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

M = {

$\exists x \exists y O(x, y)$,

$\forall x(K(x) \Rightarrow Z(x))$,

$\forall x(\exists y(K(y) \land O(x, y)) \Rightarrow \exists y(Z(y) \land O(x, y)))$

}

Řešení

U = {u}

[[O]] = { (x,y) | x = y } nebo [[O]] = { (u,u) }

[[K]] = { u }

[[Z]] = { u }

Otázka 5.

Rozhodněte, zda platí následující důsledek:

$\forall x((\exists y M(x, y)) \Rightarrow \exists y(M(x, y) \land \forall z M(y, z)))$

$\exists x \exists y M(x, y)$

$\vdash \exists x \forall y M(x, y)$

Řešení:

1.	$\forall x((\exists y M(x,y)) \Rightarrow \exists y(M(x,y) \land \forall z M(y,z)))$	P
2.	$\exists x \exists y M(x,y)$	P
3.	$a : \exists y M(a,y)$	W
4.	$(\exists y M(a,y)) \Rightarrow \exists y(M(a,y) \land \forall z M(y,z))$	e$\forall x$, 3
5.	$\exists y(M(a,y) \land \forall z M(y,z))$	e$\Rightarrow$, 3, 4
6.	$b : M(a,b) \land \forall z M(b,z)$	W
7.	$\forall z M(b,z)$	e$\land_2$, 5
8.	y_0	D
9.	$M(b,y_0)$	e$\forall z$, 7
10.	$\forall y M(b,y)$	i$\forall y$, 8–9
11.	$\exists x \forall y M(x,y)$	i$\exists x$, 10
12.	$\exists x \forall y M(x,y)$	e$\exists y$, 5, 6–11
13.	$\exists x \forall y M(x,y)$	e$\exists x$, 2, 3–12

Otázka 6.

Rozhodněte, zda platí následující množina sentencí:

S = {

∃x∃yR(x, y),

∃x∀y(x = y),

∃x∃y¬R(x, y)

} Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor

Řešení

není splnitelná

1.	$\exists x \exists y R(x,y)$	P
2.	$\exists x \forall y (x = y)$	P
3.	$\exists x \exists y \neg R(x,y)$	P
4.	$a : \forall y (a = y)$	W
5.	$b : \exists y R(b,y)$	W
6.	$c : R(b,c)$	W
7.	$a = b$	e$\forall y$, 4
8.	$b = a$	sym$=$, 7
9.	$a = c$	e$\forall y$, 4
10.	$c = a$	sym$=$, 9
11.	$R(a,c)$	e$=$, 8, 6
12.	$R(a,a)$	e$=$, 10, 11
13.	$R(a,a)$	e$\exists y$, 5, 6–12
14.	$R(a,a)$	e$\exists x$, 1, 5–13
15.	$b : \exists y \neg R(b,y)$	W
16.	$c : \neg R(b,c)$	W
17.	$a = b$	e$\forall y$, 4
18.	$b = a$	sym$=$, 17
19.	$a = c$	e$\forall y$, 4
20.	$c = a$	sym$=$, 19
21.	$\neg R(a,c)$	e$=$, 18, 16
22.	$\neg R(a,a)$	e$=$, 20, 21
23.	$\neg R(a,a)$	e$\exists y$, 15, 16–22
24.	$\neg R(a,a)$	e$\exists x$, 3, 15–23
25.	$\bot$	e$\neg$, 14, 24
26.	$\bot$	e$\exists x$, 2, 4–25

Otázka 7.

Rozhodněte, zda platí následující důsledek:

∃x(P(x) ∧ ∀y(P(y) ⇒ x = y))

I- ∃xP(x) ∧ ∀y∀z((P(y) ∧ P(z)) ⇒ y = z)

Řešení

1.	$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$	P
2.	$x_0 : P(x_0) \land \forall y(P(y) \Rightarrow x_0 = y)$	W
3.	$P(x_0)$	e$\land_1$, 2
4.	$\exists x P(x)$	i$\exists x$, 2
5.	$\forall y(P(y) \Rightarrow x_0 = y)$	e$\land_2$, 2
6.	y_0	D
7.	z_0	D
8.	$P(y_0) \land P(z_0)$	P
9.	$P(y_0)$	e$\land_1$, 8
10.	$P(z_0)$	e$\land_2$, 8
11.	$P(y_0) \Rightarrow x_0 = y_0$	e$\forall y$, 2
12.	$P(z_0) \Rightarrow x_0 = z_0$	e$\forall y$, 2
13.	$x_0 = y_0$	e$\Rightarrow$, 9, 11
14.	$x_0 = z_0$	e$\Rightarrow$, 10, 12
15.	$y_0 = z_0$	e$=$, 13, 14
16.	$(P(y_0) \land P(z_0)) \Rightarrow y_0 = z_0$	i$\Rightarrow$, 8–15
17.	$\forall z(P(y_0) \land P(z)) \Rightarrow y_0 = z$	i$\forall z$, 7–16
18.	$\forall y \forall z(P(y) \land P(z)) \Rightarrow y = z$	i$\forall y$, 6–17
19.	$\exists x P(x) \land \forall y \forall z(P(y) \land P(z)) \Rightarrow y = z$	i$\land$, 4, 18
20.	$\exists x P(x) \land \forall y \forall z((P(y) \land P(z)) \Rightarrow y = z)$	e$\exists x$, 1, 2–19

Otázka 8.

Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná

$M = \{$

$\neg\forall x P(x),$

$\neg\forall x \neg P(x),$

$\exists x \neg P(x),$

$\exists x P(x)$

$\}$

Řešení

1. začněme od nejjednodušší sentence - tu většinou poznáme tak, že obsahuje kvantifikátor $\exists$. Máme tedy na výběr mezi 3. a 4. sentencí. 4 sentence - $\exists x P(x)$ - je jednodušší tak začnu s ní. Aby platila, bude nám stačit interpretace s univerzem o jednom prvku U = {u} a predikátový symbol P(x) = {u}.
2. Dále se přesuneme k třetí sentenci - $\exists x \neg P(x)$. Zde ale nastává problém, jelikož náš jediný prvek univerza tuto sentenci nesplňuje, rozšířím si tedy univerzum o další prvek U = {u,v} a zkontroluju, zda tato nová interpretace nerozbila minulé sentence, se kterými jsme pracovali v minulém(ých) bodu(ech). Sentenci $\exists x P(x)$ naše nová interpretace stále splňuje, takže můžeme pokračovat
3. Kouknu se na první a druhou sentenci a ověřím, zda je naše nejaktuálnější interpretace splňuje. Zjistím že ano - došli jsme tedy k řešení.
4. Množina sentencí **je splnitelná v interpretaci L, kde U = {u,v} a [[P]] = {u}**

TLDR

Začneme od sentence, která nám připadá nejjednodušší a vytvoříme interpretaci, která ji splňuje. Následně se přesouváme postupně k dalším sentencím a interpretaci upravujeme, když ji nesplňuje. Vždy když interpretaci upravíme, tak se vrátíme ke všem předchozím sentencím se kterými jsme pracovali a ověříme, jestli stále platí pro naše nové universum. To pořád opakujeme dokola, než najdeme řešení. Pokud budeš mít u testu problém tímto způsobem interpretaci najít, tak **velmi pravděpodobně množina splnitelná není.**

Otázka 9.

Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$\forall x(\exists y(M(x, y) \vee M(y, x)) \Rightarrow M(x, x))$

$\exists x \exists y M(x, y)$

$\vdash \exists x M(x, x)$

(Každý, kdo miluje či je milován, miluje sám sebe. Někdo někoho miluje. Tedy někdo miluje sám sebe.)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x(\exists y(M(x,y) \vee M(y,x)) \Rightarrow M(x,x))$	P
2.	$\exists x \exists y M(x,y)$	P
3.	$x_0 : \exists y M(x_0, y)$	W
4.	$y_0 : M(x_0, y_0)$	W
5.	$M(x_0, y_0) \vee M(y_0, x_0)$	i$\vee_1$, 4
6.	$\exists y(M(x_0, y) \vee M(y, x_0))$	i$\exists y$, 5
7.	$\exists y(M(x_0, y) \vee M(y, x_0))$	e$\exists y$, 3, 4–6
8.	$\exists y(M(x_0, y) \vee M(y, x_0)) \Rightarrow M(x_0, x_0)$	e$\forall x$, 1
9.	$M(x_0, x_0)$	e$\Rightarrow$, 7, 8
10.	$\exists x M(x,x)$	i$\forall x$, 9
11.	$\exists x M(x,x)$	e$\exists x$, 2, 3–10

Otázka 10.

Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{$$

$$(\forall x P(x)) \Rightarrow (\forall x Q(x)),$$

$$\exists y (P(y) \land \neg Q(y)),$$

$$\forall z \neg Q(z)$$

$$\}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Řešení

1. Začněme od nejjednodušší sentence, v tomto případě začneme s poslední $\forall z \neg Q(z)$, protože z ní můžeme odvodit predikátový symbol Q. Pokud chceme aby tato sentence platila, tak Q musí vždy "vracet" negaci. Predikátový symbol Q tedy musí být [[Q]] = {∅}. Rovnou si také zavedu nějaké univerzum, zatím o jednom prvku U = {u}. *(Univerzum může být sice pro splnění poslední sentence klidně prázdné, ale osobně se mi nad tím takhle lépe přemýšlí.)*
2. Přesuňme se ke druhé sentenci $\exists y (P(y) \land \neg Q(y))$. Část $\neg Q(y)$ můžeme ignorovat, jelikož už víme z minulého bodu, že vždy platí. Stačí nám tedy určit predikátový symbol P, zvolím třeba [[P]] = {u}.
3. Přesuneme se k první sentenci $(\forall x P(x)) \Rightarrow (\forall x Q(x))$ a ověříme, jestli ji naše aktuální interpretace splňuje. Zjistím že ne, musím tedy zkusit interpretaci nějak upravit. Rozšířím univerzum o další prvek na U = {u,v}, nyní první sentenci naše interpretace splňuje. Musíme ale ověřit, zda tato změna naší interpretace nerozbila splnitelnost ostatních sentencích. Máme štěstí - nerozbila - došli jsme tedy k řešení.
4. **Je splnitelná pro interpretaci L, kde U = {u,v}, [[P]] = {u} a [[Q]] =** ∅

TLDR

Začneme od sentence, která nám připadá nejjednodušší a vytvoříme interpretaci, která ji splňuje. Následně se přesouváme postupně k dalším sentencím a interpretaci upravujeme, když ji nesplňuje. Vždy když interpretaci upravíme, tak se vrátíme ke všem předchozím sentencím se kterými jsme pracovali a ověříme, jestli stále platí pro naše nové univerzum. To pořád opakujeme dokola než najdeme řešení. Pokud budeš mít u testu problém tímto způsobem interpretaci najít, tak **velmi pravděpodobně množina splnitelná není.**

Otázka 11.

Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y)) \vdash \forall z \neg(P(z) \wedge Q(z))$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje

Řešení

1.	$\forall x \forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y))$	P
2.	z_0	D
3.	$P(z_0) \wedge Q(z_0)$	P
4.	$\forall y((P(z_0) \wedge (z_0 = y)) \Rightarrow \neg Q(y))$	e$\forall x$, 1
5.	$(P(z_0) \wedge (z_0 = z_0)) \Rightarrow \neg Q(z_0)$	e$\forall y$, 4
6.	$P(z_0)$	e$\wedge_1$, 3
7.	$z_0 = z_0$	i=
8.	$P(z_0) \wedge (z_0 = z_0)$	i$\wedge$, 6, 7
9.	$\neg Q(z_0)$	e$\Rightarrow$, 8, 5
10.	$Q(z_0)$	e$\wedge_2$, 3
11.	$\perp$	e$\neg$, 10, 9
12.	$\neg(P(z_0) \wedge Q(z_0))$	i$\neg$, 3–11
13.	$\forall z \neg(P(z) \wedge Q(z))$	i$\forall z$, 2–12

Otázka 12.

Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

M = {

$\forall x S(x, x)$,

$(\forall x \exists y S(y, x)) \Rightarrow (\exists y \forall x \neg S(x, y))$

}

Pokud je množina M splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z M spor.

Řešení

Neplatí:

1.	$\forall x S(x, x)$	P
2.	$(\forall x \exists y S(y, x)) \Rightarrow (\exists y \forall x \neg S(x, y))$	P
3.	x_0	D
4.	$S(x_0, x_0)$	e$\forall x$, 1
5.	$\exists y S(y, x_0)$	i$\exists y$, 4
6.	$\forall x \exists y S(y, x)$	i$\forall x$, 3–5
7.	$\exists y \forall x \neg S(x, y)$	e$\Rightarrow$, 6, 2
8.	$y_0 : \forall x \neg S(x, y_0)$	W
9.	$\neg S(y_0, y_0)$	e$\forall x$, 8
10.	$S(y_0, y_0)$	e$\forall x$, 1
11.	$\perp$	e$\neg$, 10, 9
12.	$\perp$	e$\exists y$, 7, 8–11

Otázka 13.

Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$\forall x \forall y((\exists z M(y, z)) \Rightarrow M(x, y)),\ \exists x \exists y M(x, y) \mid\!- \forall x \forall y M(x, y)$

(Každý miluje milovníka. Někdo někoho miluje. Proto všichni všechny milují.)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení

Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x \forall y((\exists z M(y,z)) \Rightarrow M(x,y))$	P
2.	$\exists x \exists y M(x,y)$	P
3.	y_0	D
4.	$\forall y((\exists z M(y,z)) \Rightarrow M(y_0,y))$	e$\forall x$, 1
5.	$a_0 : \exists y M(a_0,y)$	W
6.	$(\exists z M(a_0,z)) \Rightarrow M(y_0,a_0)$	e$\forall y$, 4
7.	$b_0 : M(a_0,b_0)$	W
8.	$\exists z M(a_0,z)$	i$\exists z$, 7
9.	$M(y_0,a_0)$	e$\Rightarrow$, 8, 6
10.	$M(y_0,a_0)$	e$\exists y$, 5, 7–9
11.	$\exists z M(y_0,z)$	i$\exists z$, 10
12.	$\exists z M(y_0,z)$	e$\exists x$, 2, 5–11
13.	$\forall y \exists z M(y,z)$	i$\forall y$, 3–12
14.	x_0	D
15.	y_0	D
16.	$\forall y((\exists z M(y,z)) \Rightarrow M(x_0,y))$	e$\forall x$, 1
17.	$(\exists z M(y_0,z)) \Rightarrow M(x_0,y_0)$	e$\forall y$, 16
18.	$\exists z M(y_0,z)$	e$\forall y$, 13
19.	$M(x_0,y_0)$	e$\Rightarrow$, 18, 17
20.	$\forall y M(x_0,y)$	i$\forall y$, 15–19
21.	$\forall x \forall y M(x,y)$	i$\forall x$, 14–20

Premisa: Každý miluje milovníka.
Premisa: Někdo někoho miluje.

Z první premisy můžeme odvodit, že pokud je někdo milovníkem (tj. miluje někoho), je milován všemi. Druhá premisa nám potom říká, že existuje alespoň jedna osoba, která miluje někoho (tedy je milovníkem).
Z těchto dvou premis lze odvodit, že tato osoba, která je identifikována jako milovník podle druhé premissy, je milována všemi podle první premisy. Tím pádem všichni jsou milovníci a tím pádem všichni milují všechny.

Otázka 14.

Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$S = \{$

$\exists x(R(x, x) \land \forall y Q(x, y)),$

$\neg \exists x((\exists y R(x, y)) \land Q(x, x))$

$\}$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Řešení

Na první pohled se zdá, že tato množina sentencí S není splnitelná, ale pojďme se podívat na podrobný myšlenkový pochod, abychom tento úsudek ověřili.

Máme dvě věty ve množině S:

∃x(R(x, x) ∧ ∀yQ(x, y)): Existuje nějaký x, takový že R(x, x) (x se vztahuje na sebe) a zároveň pro všechny y platí, že Q(x, y) (x se vztahuje na všechny y).

¬∃x((∃yR(x, y)) ∧ Q(x, x)): Neexistuje takový x, pro který by existoval nějaký y tak, že R(x, y) (x se vztahuje na nějaký y) a zároveň Q(x, x) (x se vztahuje na sebe).

Pokud vezmeme první větu, vidíme, že existuje nějaký x, který se vztahuje na sebe (R(x, x)) a na všechny y (Q(x, y)). Takže to je potvrzení, že takový x existuje.

Nicméně, podle druhé věty takový x nemůže existovat, protože druhá věta říká, že neexistuje x, který by se vztahoval na nějaký y (včetně sebe, tedy R(x, x)) a zároveň Q(x, x).

Je zřejmé, že existují kontradikce mezi těmito dvěma větami. Pokud je pravdivá první věta, pak druhá věta nemůže být pravdivá, a naopak. Tedy obě věty nemohou být pravdivé současně, což znamená, že množina S není splnitelná.

Množina S není splnitelná. Předvedeme odvození sporu přirozenou dedukcí.

1.	$\exists x(R(x,x) \land \forall y Q(x,y))$	P
2.	$\neg\exists x((\exists y R(x,y)) \land Q(x,x))$	P
3.	$x_0 : R(x_0,x_0) \land \forall y Q(x_0,y)$	W
4.	$R(x_0,x_0)$	e$\land_1$, 3
5.	$\exists y R(x_0,y)$	i$\exists y$, 5
6.	$\forall y Q(x_0,y)$	e$\land_2$, 3
7.	$Q(x_0,x_0)$	e$\forall y$, 6
8.	$\exists y R(x_0,y) \land Q(x_0,x_0)$	i$\land$, 5, 7
9.	$\exists x(\exists y R(x,y) \land Q(x,x))$	i$\exists x$, 8
10.	$\bot$	e$\neg$, 9, 2
11.	$\bot$	e$\exists x$, 1, 3–10

Otázka 15.

Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \Rightarrow x = y)) \vdash P(a) \Rightarrow \forall y(a = y)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení

Premisa říká, že existuje právě jedno x, které splňuje vlastnost P. Takže pokud a splňuje P, pak a musí být toto jediné x.

Nicméně závěr tvrdí, že pokud a splňuje P, pak a musí být rovno všem y, což je silnější tvrzení než premisa. Závěr by platil jen v případě, že existuje pouze jediný prvek v univerzální množině, což premisa nezaručuje.

Tedy důsledek neplatí.

Řešení Daný důsledek neplatí. To ukážeme konstrukcí interpretace $\mathcal{I}$, v níž bude předpoklad pravdivý, ale závěr nepravdivý.

Nechť $\mathcal{I}$ je interpretace s dvouprvkovým universem $U = \{u, v\}$, nechť $[\![P]\!] = \{u\}$ a $[\![a]\!] = u$.

Pak je v $\mathcal{I}$ sentence

$$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$$

pravdivá, neboť existuje prvek universa (u), který má vlastnost $[\![P]\!]$, a všechny další prvky s vlastností $[\![P]\!]$ jsou mu rovny: prvek u je totiž *jediným* prvkem s danou vlastností. Oproti tomu je implikace

$$P(a) \Rightarrow \forall y(a = y)$$

v interpretaci $\mathcal{I}$ nepravdivá: předpoklad $P(a)$ je sice pravdivý (prvek $u = [\![a]\!]$ má vlastnost $[\![P]\!]$), ale závěr (sentence $\forall y(a = y)$) pravdivý není. Ne všechny prvky universa U jsou rovny prvku $u = [\![a]\!]$ (prvek v není roven prvku u).

Alternativní řešení

Nechť naše universum je množina U obsahuje prvky {a, b}, kde a ≠ b, a nechť P(x) je vlastnost "x je a".

Podle naší premisy $\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$, máme, že "a" je jediný prvek, který splňuje P.

Pokud se nyní podíváme na závěr $P(a) \Rightarrow \forall y(a = y)$, pak P(a) je pravdivé, protože "a" splňuje P. Ale závěr nám říká, že pokud P(a) platí, pak a musí být rovno všem y. To ovšem není pravda, protože v naší univerzální množině existuje prvek "b", který je různý od "a". Tedy v tomto případě je premisa pravdivá, ale závěr je nepravdivý, což znamená, že daný důsledek neplatí.

Otázka 16.

Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

M = {$\forall x \neg S(x, x)$, $\forall x \exists y S(x, y)$, $\forall x \forall y \forall z((S(x, y) \land S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$}

Pokud je množina M splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte

přirozenou dedukcí z M spor.

Řešení

Množina M je splnitelná, pokud předpokládáme nekonečný počet prvků. První věta vyžaduje, aby se žádný prvek nevztahoval sám na sebe. Druhá věta říká, že každý prvek se musí vztahovat na nějaký jiný prvek. Třetí věta udává, že vztah je tranzitivní. Tyto podmínky jsou splnitelné pouze v nekonečné množině prvků, kde můžeme vytvořit nekonečný "řetězec" prvků bez cyklů.

Řešení Množina M je splnitelná. Jejím modelem je například interpretace $\mathcal{I}$, jejímž universem U je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$, a kde $[\![S]\!] = \{(m, n) \mid m < n\}$.

Sentence $\forall x \neg S(x, x)$ je v $\mathcal{I}$ pravdivá, neboť žádné přirozené číslo není menší než ono samo. Sentence $\forall x \exists y S(x, y)$ je v $\mathcal{I}$ pravdivá, neboť ke každému přirozenému číslu existuje větší přirozené číslo. Sentence $\forall x \forall y \forall z((S(x, y) \land S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ je v $\mathcal{I}$ pravdivá, neboť vztah „být menší než" je na množině přirozených čísel transitivní.

Alternativní řešení

Univerzum U, kterou budeme používat, bude množina přirozených čísel N = {0, 1, 2, 3, ...}.

Definujeme relaci S tak, že pro každé x z N platí S((m,n) || m < n).

Lišácké řešení alá Dostál 

Universum si určíme jako prázdnou množinu.

Naše množina je automaticky platná, protože naše sentence obsahují pouze kvantifikátor $\forall$, který je pokaždý platný na prázdné množině.

GRAFY

Základní pojmy:

Neorientovaný graf je trojice G = (V, E, ε), kde:

V je neprázdná **konečná množina vrcholů** (též zvaných uzlů)
E je **konečná množina** jmen **hran** (**neorientované**, nemají směr)
ε je přiřazení, které každé hraně e ∈ E přiřazuje množinu {u, v} (kde u, v ∈ V jsou vrcholy) a nazývá se **vztah incidence**.

Orientovaný graf G je trojice (V, E, ε), kde:

V je neprázdná **konečná množina vrcholů** (též nazývaných uzly).
E je **konečná množina** jmen **hran** (též nazývaných **orientované hrany**).
ε je přiřazení, které každé hraně **e** ∈ E přiřazuje **uspořádanou dvojici vrcholů** a nazývá se **vztah incidence**.

Jestliže ε(e) = (u, v) pro u, v ∈ V, říkáme, že vrchol u je počáteční vrchol hrany e a vrchol v je koncový vrchol hrany e.
Jestliže počáteční a koncový vrchol jsou stejné, říkáme, že hrana e je orientovaná smyčka.
Orientovaný graf může být ohodnocený - každá orientovaná hrana má pak cenu

Paralelní hrany:

Jestliže v grafu existují dvě různé hrany e1, e2, pro které platí, že ε(e1) = ε(e2), říkáme, že tyto hrany jsou paralelní.

Prostý graf:

Graf (orientovaný nebo neorientovaný) se nazývá prostý graf, pokud neobsahuje žádné paralelní hrany.

Pro každý graf G (orientovaný nebo neorientovaný) platí $\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|$ kde |E| značí počet hran grafu G.
Důsledek: Každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

Úplný graf:

Úplný graf je takový graf, kde je každý vrchol s každým jiným propojen hranou. Značíme K_n, kde n je počet vrcholů grafu. Úplný graf K_n má $\frac{n(n-1)}{2}$ hran.

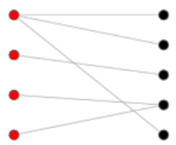
Diskrétní graf:

Diskrétní graf je speciální typ grafu, který se skládá z konečné množiny vrcholů a žádných hran mezi nimi.

Bipartitní graf:

Bipartitní graf je graf, ve kterém můžeme rozdělit množinu vrcholů na 2 takové podmnožiny, kde žádné vrcholy jedné množiny nejsou spojeny hranou.

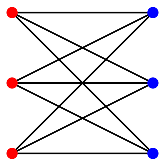
- Nejdelší cesta v bipartitním grafu je n-1 kde n je počet vrcholů.



Úplný bipartitní graf:

Bipartitní graf, který obsahuje všechny možné hrany, značíme $K_{m, n}$, kde m a n jsou podmnožiny vrcholů tvořící graf.

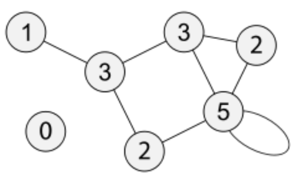
- Úplný bipartitní graf $K_{m, n}$ má m*n hran



Stupeň vrcholu:

Stupeň vrcholu v je počet hran vycházejících z vrcholu v. Značíme d(v) nebo deg(v).

- u orientovaného grafu navíc rozdělujeme podle orientace hrany - d_{out} a d_{in}



Acyklický graf:

Graf, ve kterém neexistuje žádný orientovaný cyklus, tedy se nedá projít z vrcholu zpět do něj samého po orientovaných hranách.
Zdroj: Vrchol, který nemá žádnou přicházející orientovanou hranu, tj. žádná hrana nevstupuje do zdrojového vrcholu. $d_{in}(v) = 0$
Výlevka: Vrchol, který nemá žádnou výstupní orientovanou hranu, tj. žádná hrana nevystupuje z výlevkového vrcholu. $d_{out}(v) = 0$

Prostý a obyčejný graf:

V prostém grafu mohou být smyčky - “hrany” z vrcholu s do vrcholu s. V obyčejném ne. Obyčejný graf je tedy podtypem prostého - čili žádné paralelní hrany ani žádné smyčky.

- **smyčky se do stupně vrcholu započítávají dvakrát !**

Regulární graf:

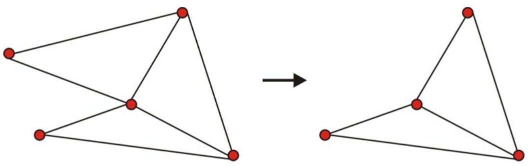
Regulární graf (nebo r-regulární) je graf, kde každý vrchol má stejný stupeň r.

- úplný bipartitní graf $K_{m, n}$ je regulární, když m = n

Podgraf:

Graf $G' = (V', E')$ je podgrafem grafu $G = (V, E)$, pokud $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

- Podgraf G' je faktor grafu G, pokud obsahuje všechny jeho vrcholy - $V' = V$



Faktor grafu

Faktor grafu G je podgraf grafu G, který obsahuje všechny vrcholy grafu G, ale ne nutně všechny jeho hrany.

Isomorfní grafy

Mějme dva grafy - graf G_1 a graf G_2. Tyto grafy jsou isomorfní, pokud existuje bijekce:

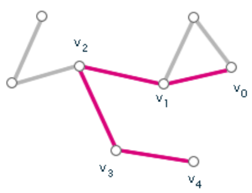
$f : V_1 \rightarrow V_2$ tak, že $\{u, v\} \in E_1$ právě tehdy, když $\{f (u), f (v)\} \in E_2$.

- Česky: ať posuneš jakkoliv vrcholy jednoho grafu, všechny hrany grafů se nebudou **nikdy** překrývat, právě pokud **jsou** grafy isomorfní
- Pokud chceš zjistit, zda jsou grafy isomorfní, vytvoř tabulku vrcholů podle jejich stupňů. Podle věty o skóre, když mají dva grafy jiné skóre jsou nutně neizomorfní (tedy jiné), když mají stejné skóre můžou i nemusí být isomorfní.

Cesta

Nechť $n \geq 0$. Cesta (délky n) je graf isomorfního grafu s množinou vrcholů $V = \{0, 1, \ldots, n\}$ a s množinou hran $E = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \ldots \{n - 1, n\}\}$. Značíme ji P_n.

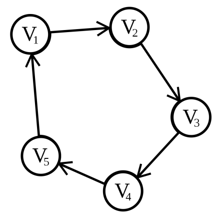
- Česky: vem si nějaké 2 vrcholy grafu, pokud se můžeš po hranách dostat z jednoho do druhého, tak existuje mezi nimi cesta. Cesta uvádí hrany, po který vede. Každý vrchol můžeš navštívit pouze jednou. Délka cesty je počet hran.
- **Triviální cesta** je jednovrcholový graf bez hran, triviální cesta je tedy délky 0



Kružnice

Nechť $n \geq 3$. Kružnice (délky n) je graf isomorfního grafu s množinou vrcholů $V = \{1, \ldots, n\}$ a s množinou hran $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots \{n - 1, n\}, \{n, 1\}, \}$. Značíme ji C_n.

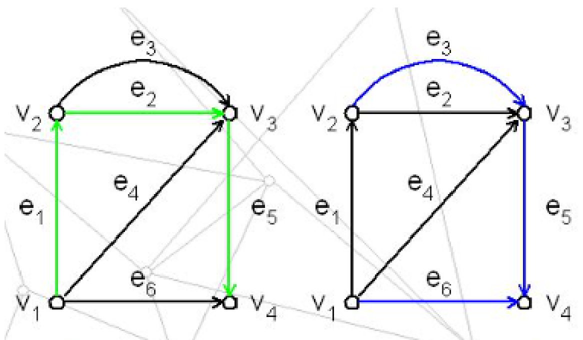
- Česky: vem si nějaký jeden vrchol B, který má alespoň stupeň 2. Pokud existuje cesta z vrcholu B zpátky do vrcholu B, tak vrchol B a všechny vrcholy po cestě tvoří dohromady kružnici.
- Každý vrchol kružnice musí mít stupeň s >= 2
- Graf bez kružnic nazýváme **les (kdo to vymyslel…)**



Sled

Sled (délky k) v grafu G je posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ taková, že hrana e_i je incidentní s vrcholy $v_i{-}1$ a v_i pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$.

- Česky: vyberme si nějaký bod a vydáme se na výlet po hranách, postupně si zapisujme navštívené vrcholy a hrany, výsledná posloupnost je **sled**
- pokud $v_0 = v_k$, tak nazýváme sled **uzavřený** (skončili jsme na vrcholu na kterém jsme začali)
- **Triviální** sled je takový sled, který obsahuje jediný vrchol a žádnou hranu



Zelená čára je sled na orientovaném grafu, modrá čára na neorientovaném.

Tah

Tah v grafu G je sled, ve kterém se neopakují hrany. **Pozor**, neplatí pro triviální sled

Uzavřený tah

Uzavřený tah je uzavřený sled, ve kterém se neopakují hrany.

Cesta - když už víme, co je to tah

Cesta v grafu G je tah, ve kterém se neopakují vrcholy.

Kružnice - když už víme, co je to tah (pro prostý graf)

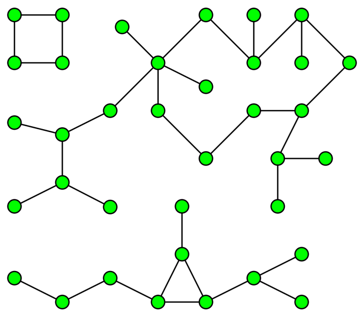
Kružnice v grafu G je uzavřený tah s alespoň jednou hranou, ve kterém se neopakují vrcholy s výjimkou v0 = vk.

Souvislý graf

Souvislý graf je takový graf, pokud mezi jakoukoliv kombinací dvou jeho vrcholů existuje cesta.

Komponenty souvislosti*

Komponenta souvislosti je maximální množina vrcholů A, pro kterou platí, že indukovaný podgraf určený A je souvislý.
Maximální množina zde znamená, že nelze přidat žádný další vrchol k množině A tak, aby indukovaný podgraf tímto rozšířením zůstal souvislý.

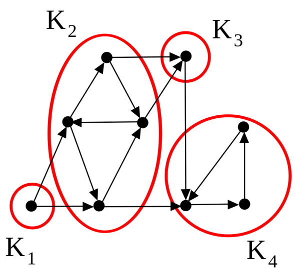


Silně souvislý graf

Řekněme, že **orientovaný** graf G je **silně souvislý**, jestliže mezi každou dvojicí vrcholů u a v existuje orientovaná cesta **z u do v** a orientovaná cesta **z v do u.**

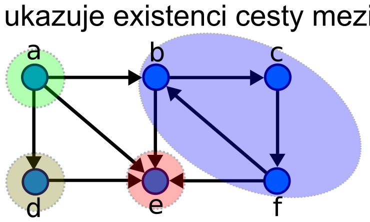
Silně souvislé komponenty souvislosti

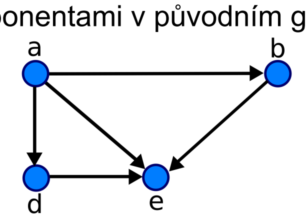
Mějme daný **orientovaný** graf G. **Silně souvislá komponenta souvislosti** je maximální množina vrcholů A, pro kterou platí, že z každého vrcholu v množině A je možné dosáhnout každého jiného vrcholu v této množině **pomocí orientované cesty**.

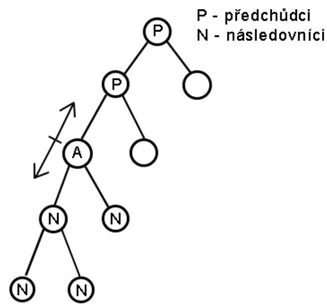


Kondenzace grafu

Kondenzace grafu je proces, kdy se všechny silně souvislé komponenty v orientovaném grafu nahradí jedinými vrcholy, takže každý nový vrchol představuje jednu silně souvislou komponentu z původního grafu. Výsledný graf je orientovaný acyklický graf, kde každá hrana ukazuje existenci cesty mezi komponentami v původním grafu.







Strom

Strom je souvislý graf neobsahující žádnou kružnici

- Strom má vždy alespoň 2 vrcholy
- Strom má vždy alespoň 2 vrcholy stupně 1
- Strom má vždy n-1 hran, kde n je počet vrcholů

Kořen stromu

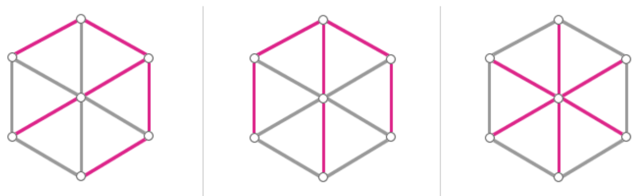
Kořen stromu je vrchol grafu G, ze kterého vede **orientovaná** cesta do všech ostatních vrcholů grafu G.

- Kořen stromu může tedy být pouze v **orientovaném grafu**
- Orientovaný graf, který má kořen a je strom, nazýváme **kořenový strom**
    - Pokud **existuje hrana (u, v)** v grafu G, říkáme, že **vrchol u** je **předchůdce** vrcholu **v** a vrchol **v** je **následník** vrcholu **u**.
    - Vrchol, který **nemá následníka**, se nazývá **listem**.

Kostra grafu

Faktor grafu G, který je stromem, je kostra.

- je možné se dostat z každého bodu do každého
- kostra neobsahuje žádné kružnice



Minimální kostra

Minimální kostra **ohodnoceného** grafu G je taková kostra, která má nejmenší součet cen hran ze všech možných koster grafu G.

- hrana = kost, cenu si představte jako délku hrany = délku kosti

Kruskalův algoritmus

je algoritmus pro hledání minimální kostry v ohodnoceném grafu.

1. Začněte s prázdnou množinou, která představuje minimální kostru.
2. Seřaďte hrany grafu podle jejich ohodnocení (vzestupně nebo sestupně).
3. Procházejte seřazené hrany postupně a pro každou hranu:
    a. Pokud přidání této hrany do minimální kostry nevytváří kružnice (cyklus v orientovaném grafu), přidejte ji do kostry.
    b. Jinak tuto hranu ignorujte.
4. Pokračujte, dokud nejsou projety všechny hrany.
5. Na konci algoritmu budete mít minimální kostru grafu.

Eulerovský tah

Eulerovský tah v neorientovaném grafu G je tah, který obsahuje všechny hrany a všechny vrcholy grafu G.

- Pokud se úloha ptá, zda jde nakreslit graf jedním tahem, tak hledáš, zda v grafu existuje **eulerovský tah**
- Pokud v grafu existuje uzavřený eulerovský tah, nazýváme ho **eulerovský graf**

Uzavřený eulerovský tah

Eulerovský tah v neorientovaném grafu G je uzavřený tah, který obsahuje všechny hrany a všechny vrcholy grafu G.

- Pokud se úloha ptá, zda jde nakreslit graf jedním tahem tak, že začneš a skončíš ve stejném vrcholu, tak hledáte, zda má graf **uzavřený eulerovský tah**

Eulerovský graf

Eulerovský graf je graf ve kterém existuje uzavřený Eulerovský tah

takový graf má **buď všechny vrcholy sudého stupně** -> potom má uzavřený eulerovský tah

nebo má **právě dva liché vrcholy u,v** -> potom má eulerovský tah, kde tah začíná ve vrcholu u a končí ve vrcholu v

Nezávislost grafu

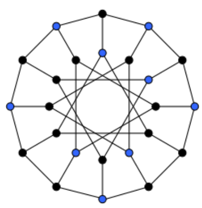
Nezávislá množina v grafu je taková množina vrcholů, ve které neexistují žádné hrany mezi těmito vrcholy. To znamená, že žádné dva vrcholy v této množině nejsou spojeny hranou.

Nezávislost grafu G je počet vrcholů v **největší** nezávislé množině grafu G. Označuje se symbolem **$\alpha(G)$**.

Tvrzení: Pro libovolný graf G o n vrcholech platí:

1. $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq n$ (χ je barevnost)

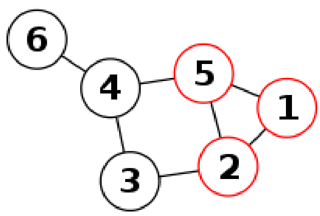
2. $\alpha(G) + \chi(G) \leq n + 1$



Klikovost grafu

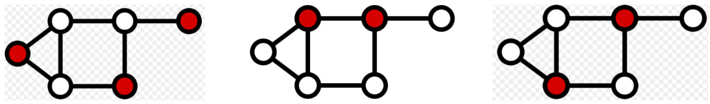
Klikovost grafu je **maximální** počet vrcholů, které tvoří kliku (úplný podgraf, kde jsou každé dva různé vrcholy spojeny hranou) v daném grafu. Jinými slovy, klikovost grafu udává velikost největší kliky, kterou lze v daném grafu nalézt. Značí se **$\omega(G)$**

Tvrzení: Pro libovolný graf G platí: **$\omega(G) \leq \chi(G)$**



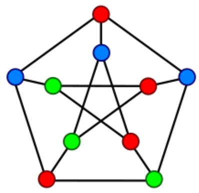
Dominance grafu

Dominancí grafu označujeme mohutnost **minimální** dominující množiny vrcholů. Dominující množinou je taková množina vrcholů, která svou množinou sousedních vrcholů pokrývá všechny zbývající vrcholy grafu. **β(G)**



Barevnost grafu

Nechť G je neorientovaný graf. Barevnost grafu G je **minimální** počet barev potřebný k přiřazení každému vrcholu grafu tak, aby žádní dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu. Značíme **χ(G).**



Sekvenční barvení

Označme Δ **největší stupeň vrcholu grafu G**. Pak **χ(G) ≤ Δ + 1**.

Následující postup obarví graf Δ **+ 1** barvami. Označme množinu barev B = {1, ..., Δ + 1}.

1. Seřadíme vrcholy grafu do posloupnosti (libovolně)
   v1, v2, . . . , vn
2. Probíráme vrcholy v tomto pořadí a vrcholu vi přiřadíme vždy tu nejmenší barvu, kterou nemá žádný jeho soused.

Algoritmus sekvenčního barvení poskytuje **horní odhad** pro barevnost grafu. Nicméně, tento odhad může být velmi vzdálený od skutečné barevnosti grafu. Konkrétně existují dvojbarvé grafy, které mohou být obarveny n/2 barvami (kde n je počet vrcholů grafu) při nevhodném uspořádání vrcholů v kroku 1 algoritmu.

Pro každý neorientovaný graf G bez smyček platí: **α(G) + χ(G) ≤ n + 1**,
kde n je počet vrcholů grafu G.

Připomeňme, že **α(G)** je **nezávislost** grafu G, tj. počet vrcholů v nejpočetnější nezávislé množině grafu G.

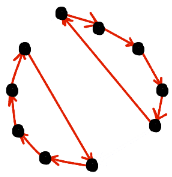
Ukázkové otázky u zkoušky minimální části

Úloha (2 body, testuje porozumění silné souvislosti)
Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

a) Každý silně souvislý orientovaný graf obsahuje cyklus.
b) Každý orientovaný graf o 10 vrcholech, který má přesně dvě silně souvislé komponenty, obsahuje alespoň 11 hran.
c) Každý orientovaný graf G má více vrcholů, než má kondensace grafu G.
d) Pro každý orientovaný graf G platí: Pokud je každá hrana v G součástí nějakého cyklu, pak je G silně souvislý.
e) Žádný acyklický graf není silně souvislý.

---

a) **nepravdivé**, pro graf o jednom vrcholu bezesmyčky není cyklus, přestože to je silně souvislý orientovaný graf
b) **nepravda**, stačí když dvě silně souvislé komponenty nepropojovat, mít dvě kružnice a máme tak 10 hran



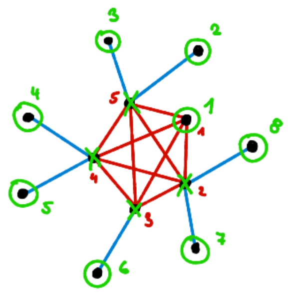
c) **nepravda** pro více příkladů, nejjednodušeji graf o jednom vrcholu má po kondesaci opět jeden vrchol, to je rovnost ne ostrá nerovnost, když graf nemá silnou komponentu souvislosti budou se vrcholy rovnat
d) **není to pravda**, pokud máme orientovaný graf který se skládá z dvou nezávislých cyklů, tak není souvislý a nemůže být silně souvislý, protože se nedá z jakéhokoliv bodu dostat do jakéhokoliv jiného bodu
e) **nepravda**, pro graf o jednom vrcholu bezesmyčky je silně souvislý (jinak nejsou silně souvislé)

Úloha (2 body, testuje porozumění barevnosti, klik, nezávislých množin)
Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

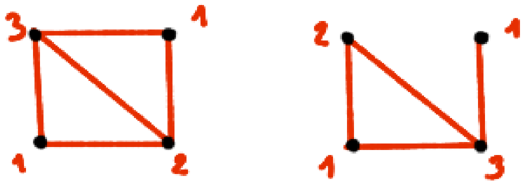
a) Lze zkonstruovat graf o 12 vrcholech, který má klikovost 5 a nezávislost 8.
b) Každý graf s barevností 6 má nezávislost alespoň 6.
c) Pokud algoritmus sekvenčního barvení obarvil graf G osmi barvami, pak jeho barevnost nemůže být menší než 4.
d) Každý graf s klikovostí 5 má barevnost 5.
e) Existují alespoň dva neisomorfní grafy se čtyřmi vrcholy, které mají barevnost 3.

---

a) ano, takže když máš klikovost 5, pouze jeden vrchol z kliky může být nezávislý 12-5=7, když zbylé vrcholy napojím na jiné vrcholy z kliky než ten jeden nezávislý a zároveň je nenapojím na sebe, tak mohou být všechny vrcholy nezávislé
tedy 1+7=8



b) protipříklad, využiji vzorce $\alpha(G) + \chi(G) \leq n + 1$ a úplného grafu o 6 vrcholech $\alpha(G) + 6 \leq 6 + 1$, $\alpha(G) \leq 1$, nezávislost pro úplný graf o 6 vrcholech a barevnosti je jedna což není alepoň šest
c) nepravda, nemáme jak dokázat, že graf nelze vybarvit třemi či dokonce dvěma barvami, sekvenční barvení je horní hranice a neříká nám o grafu dostatek informací
d) nepravda, protipříklad je složitý, ale podle lemmata/věty platí $\omega(G) \leq \chi(G)$ (Dostál approved )
e) ano, i víc

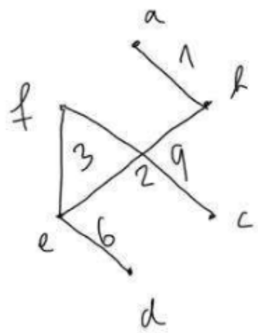


Úloha (1 bod, testuje schopnost nalézt minimální kostru)

Je zadán ohodnocený graf G (množinou vrcholů a seznamem hran spolu s cenou). Pokud má minimální kostru, zapište její cenu a množinu hran, která ji tvoří. Pokud minimální kostru nemá, odpovězte “G nemá minimální kostru.”

hrana	$\{a,b\}$	$\{a,d\}$	$\{a,e\}$	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{b,e\}$	$\{b,f\}$	$\{c,e\}$	$\{c,f\}$	$\{d,e\}$	$\{e,f\}$
cena	1	8	4	11	7	2	5	10	9	6	3

zabralo by to dlouho, popíšu postup, seřadím hrany podle ceny, postupně je přidávám do kostry dokud ne nebude tvořit kruh, pokud by se přidáním do kostry vytvořil tuhle hranu nepřidám a pokračuju dál, když spojím všechny vrcholy, tak vím, že zbylé hrany by pouze tvořily kruhy, sečtu ceny a nakreslím kostru, zde nám vyjde cena kostry 21



Úloha 5 (2 body)

Neorientovaný graf G je dán šesti prvkovou množinou vrcholů V = {a, b, c, x, y, z} a množinou hran, která je popsána následujícím seznamem:
hrana {a, b} {a, x} {a, z} {b, c} {b, x} {c, y} {c, z}
Rozhodněte, která tvrzení o grafu G platí:
1. G je souvislý.
Nakreslím a vidím, že je souvislý

2. G je eulerovský.
Že G není eulerovský, euler musí mít samé sudé.

3. G má barevnost 2.
Že G nemá barevnost 2, vidím z toho, že obsahuje trojúhelník (určený vrcholy a, b a x).

4. G neobsahuje kružnice.
Že G obsahuje kružnici, vidím z toho, že obsahuje trojúhelník.

5. G obsahuje nějakou tříprvkovou nezávislou množinu vrcholů.
Vidím, že y a z tvoří dvouprvkovou nezávislou množinu vrcholů, a druhým pohledem vidím, že není maximální: mohu přidat i vrchol b a množina {b, y, z} bude stále nezávislá. Graf G tedy obsahuje tříprvkovou nezávislou množinu vrcholů.

Úloha 6 (2 body)

Je dán orientovaný graf H, o kterém víte jen to, že je **acyklický** a že má **7 vrcholů**.
Která z následujících tvrzení o něm **nutně** platí také?
1. H není silně souvislý.
Ano, H není silně souvislý. Má více než jeden vrchol (dokonce 7), a kdyby byl silně souvislý, určitě by obsahoval cyklus. Cykly ale H ze zadání neobsahuje.

2. H má alespoň 6 hran.
Počet hran v H není specifikovaný, a sedmi-vrcholový acyklický graf, který má méně než 6 hran, existuje. Vezměme například diskrétní graf o sedmi vrcholech. (Diskrétní graf je graf neobsahující žádné hrany).

3. H je (brán jako neorientovaný graf) souvislý.
Už z předchozího tvrzení vidím, že diskrétní graf splňuje specifikaci, a přitom není souvislý.
Třetí tvrzení tedy neplatí

4. H obsahuje nějaký vrchol v, pro který platí dout(v) = 0.
Každý acyklický graf obsahuje vrchol, který je výlevka. Tedy to **platí** i pro H.

5. H obsahuje nějaký vrchol u, pro který platí din(u) > 0.
Toto tvrzení neplatí, což vidím znovu z příkladu diskrétního grafu. Tam má každý vrchol vstupní stupeň 0.

1. Časté otázky u zkoušky standardní části

všechny následující otázky jsou za 10 bodů u zkoušky

Otázka 1.

Sestrojte pro každé přirozené k > 1 prostý graf, který má 2k vrcholů, každý vrchol má stupeň k, a nejkratší kružnice v něm má délku 4 (obsahuje 4 hrany).

(Pečlivě popište strukturu grafu. Pojmenujte vrcholy a precisně popište, které dvojice vrcholů jsou spojeny hranou. Důkladně argumentujte, že ve vašem grafu nejsou kružnice délky kratší než 4.)

Řešení:

Vytvoříme úplný bipartitní graf s 2k vrcholy.

Důkaz:

Graf G nemá kružnice o délce 1 ani o délce 2, protože nepodporuje smyčky a paralelní hrany

1. Graf G je úplný a bipartitní, má 2k vrcholů kde k>1
2. Označme si vrcholy: v levé paritě (levá strana bipartitního grafu) jako $L_1,...,L_k$ a v pravé paritě (pravá strana bipartitního grafu) jako $R_1,...,R_k$
   2.1. Předpokládejme že v Graf G existuje kružnice o délce 3
   2.2. Poté nutně musí existovat vrcholy L_x, R_y, L_z nebo R_x, L_y, R_z tak že mezi nimi existuje hrana.
   2.3. spor - mezi L_x a L_z ale hrana existovat nemůže, protože mají stejnou paritu, to samé platí pro R_x a R_z
3. V grafu G neexistuje kružnice o délce 3

Otázka 2.

Dokažte, že v každém stromu s alespoň dvěma vrcholy existují alespoň dva vrcholy stupně 1.

Řešení

Nechť S je strom s n>=2 vrcholy.

Ze stromu S vybereme nejdelší cestu C, ta má délku l <=n-1

v_0 - počáteční vrchol cesty C, v_l - konečný vrchol cesty C

Cesta C: v_0-....-v_l

$d(v_0)$>=1, $d(v_l)$>=1

1. Může nastat $d(v_0) > 1$ P
2. Potom existuje hrana v_0 do w
3. Leží w na cestě c?
   a. Ano P
   b. Potom by v S existovala kružnice
   c. Spor - S je strom (nemá kružnice)

d. Ne P
e. Potom cesta C’ z w do v_l je delší než C
f. Spor - C je nejdelší cesta

4. Spor - každá možnost vyústila ve spor

Nemůže tudíž nastat $d(v_0) > 1$ proto $d(v_0) <= 1$ a $d(v_0) >= 1$ potom $d(v_0) = 1$ a v_0 je list

Analogicky lze pro v_l viz https://www.youtube.com/watch?v=UM9JU_FRDFo 8:10

Alternativní řešení:

Vrchol stupně 1 v grafu je vrchol, který je spojen pouze s jedním jiným vrcholem. V kontextu stromů se takové vrcholy často nazývají listy.

Představme si strom s alespoň dvěma vrcholy.

V případě, že strom má pouze dva vrcholy, pak jsou oba vrcholy spojeny přímo s sebou a jsou jediné v stromu, takže mají stupeň 1.

Pokud má strom více než dva vrcholy, pak vždy existuje alespoň jedna hrana spojující dva vrcholy, která nemůže být součástí žádného cyklu (protože stromy nemají cykly). Tyto dva vrcholy spojené touto hranou budou mít stupeň alespoň 1. Alespoň jeden z těchto vrcholů nemůže mít žádné další sousední vrcholy (jinak by vytvořil cyklus), takže má stupeň přesně 1

Takže v každém stromu s alespoň dvěma vrcholy existují alespoň dva vrcholy stupně 1.

Otázka 3.

Ukažte, že jakékoliv dvě nejdelší cesty v souvislém grafu mají společný vrchol.

(Cesta v grafu je nejdelší, pokud v daném grafu neexistuje žádná delší cesta. V grafu může existovat více nejdelších cest, pak ale mají nutně stejnou délku.)

Řešení

Nechť spojitý graf G má více než jednu nejdelší cestu. Vezměme libovolné dvě různé nejdelší cesty C,D z grafu G.

1. Předpokládejme že C,D nemají společný vrchol.
2. Protože G je souvislý tak existují 2 vrcholy $u \in C$ a $v \in D$ mezi kterými vede cesta, která neobsahuje vrcholy z C nebo D (kromě u,v). Vybereme nejkratší takovou cestu X.
3. Z cesty C si vybereme ten hraniční vrchol w_{start} který je vzdálenější od vrcholu u. Z cesty D si vyberu ten hraniční vrchol w_{end} který je vzdálenější od vrcholu v.
4. Poté cesta z w_{start} přes vrcholy u a v (mezi kterými vede cesta X) do vrcholu w_{end}, která je delší než cesta C nebo D (každý úsek na cestách C, D, který jsme si vybrali, musí mít alespoň ½ délky cesty nebo více a cesta X musí mít délku alespoň 1, takže po sečtení délek všech úseků a cesty X musíme dostat delší cestu než C nebo D)
5. Spor

Předpoklad je nepravdivý, C a D musí mít společný vrchol

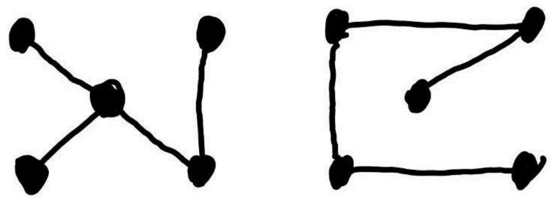
Otázka 4.

Pro obyčejný neorientovaný graf G = (V, E) nazveme jeho doplňkem obyčejný neorientovaný graf G_{dop} = (V, E'), který má množinu vrcholů shodnou s grafem G, a v jeho množině hran E' jsou právě ty hrany, které v množině hran E nejsou.

A. *Sestrojte souvislý (obyčejný neorientovaný) graf G takový, že G_{dop} je také souvislý.*
B. *Dokažte, že pro každý (obyčejný neorientovaný) graf G platí: Pokud je G nesouvislý, pak je G_{dop} souvislý.*

Řešení

A. Můžeme sestrojit např. graf nalevo jehož doplněk je graf napravo (G_{dop})



B. Důkaz:
   a. V nesouvislém grafu G,
      existují n >= 2 komponent souvislosti A_1, A_2 …. A_n
   b. Vezměme si vrcholy u,v takže u∈A_i a v∈A_j (vezmeme si vrcholy z libovolných komponent souvislosti)
      i. Pokud i ≠ j tak v doplňku G_{dop} existuje hrana {u,v} (podle definice doplňku)
      ii. pokud i=j tak existuje cesta u-w-v, kde w∈A_t kde t ≠ i. Protože musí existovat hrana z u-w a z w-v, viz “i.”

Otázka 5.

Nechť má graf G barevnost χ(G). Dokažte, že počet jeho hran je nejméně:

[χ(G) · (χ(G) − 1)]/2

(Upozornění: graf G není nutně úplný graf)

Řešení - (Dostál approved )

1. Budeme používat termín množina barvy jako neprázdnou množinu vrcholů se stejnou barvou
2. Nechť A_1 až A_k, kde k = χ(G), jsou množiny barvy na grafu G, obarveného minimálním počtem barev
3. Protože mezi každou množinou barvy musí existovat hrana do každé jiné množiny barvy můžeme si udělat úplný graf H kde vrcholy reprezentují množiny barvy
4. Víme že v úplném grafu H je počet hran roven [n*(n-1)]/2, kde n je počet vrcholů v grafu H
5. V našem grafu H máme χ(G) vrcholů, tedy máme [χ(G) · (χ(G) − 1)]/2 hran
6. protože každá množina barvy musí obsahovat minimálně 1 vrchol, pak v grafu G musí existovat minimálně 1 vrchol za každou množinu barvy, takže v grafu G musí být minimálně χ(G) vrcholů a minimálně [χ(G) · (χ(G) − 1)]/2 hran

Otázka 6.

Dokažte, že každý orientovaný acyklický graf G obsahuje vrchol v, pro který platí

$d_{out}(v) = 0$

Řešení

C je nejdelší cesta v grafu G

v_0 je první vrchol v cestě C

v_n je poslední vrchol v cestě C

1. Předpokládejme že $d_{out}(v_n) >= 1$
2. Existuje vrchol w a hrana e takže e = (v_n, w)
    a. Předpokládejme w $\in$ C
    b. potom existuje cesta z w->v_n
    c. takže existuje cyklus v_n->w->...->v_n
    d. spor - graf je acyklický

    e. Předpokládejme že w $\notin$ C
    f. potom existuje cesta v_0->....->v_n->w, která je delší než cesta C
    g. spor - C je nejdelší cesta
3. Spor ani jedna z možností není pravdivá

platí negace $d_{out}(v_n) >= 1$

takže platí $d_{out}(v_n) = 0$

Alternativní řešení:

Orientovaný acyklický graf je orientovaný graf, který neobsahuje žádný orientovaný cyklus.

Stupeň výstupu (dout) vrcholu v je počet hran, které z vrcholu vycházejí.

Předpokládejme, že existuje graf, který neobsahuje vrchol s dout(v) = 0. To znamená, že každý vrchol v grafu má hranu, která z něj vede do jiného vrcholu. Sledujeme-li cestu podél těchto hran, nikdy se nedostaneme do situace, kdy bychom nemohli pokračovat, protože každý vrchol má výstupní hranu. Nicméně, protože graf je konečný, musíme se nakonec vrátit do vrcholu, který jsme již navštívili, což vytvoří orientovaný cyklus. Toto je však v rozporu s předpokladem, že graf je acyklický.

Tedy, naše předpoklady vedly k rozporu, což znamená, že naše původní předpoklady musely být nesprávné. Z toho vyplývá, že musí existovat alespoň jeden vrchol v orientovaném acyklickém grafu, který má dout(v) = 0.

Otázka 7.

Dokažte, že pro každý souvislý orientovaný graf G platí:

G je silně souvislý právě tehdy, když každá jeho hrana leží v nějakém cyklu.

Řešení

Důkaz implikace: G je silně souvislý -> *každá jeho hrana leží v nějakém cyklu.*

1. Graf G je silně souvislý graf
2. Můžeme si vzít libovolnou hranu $e \in E(G)$, e = (u,v), kde $u,v \in V(G)$
3. Protože graf G je silně souvislý, existuje cesta C z v->u
4. takže existuje cyklus u-(e)>v->...C...->u a e je jeho součástí
5. každá hrana leží v nějakém cyklu

Důkaz implikace: Každá hrana leží v nějakém cyklu -> G je silně souvislý

1. Graf G je souvislý a má každou hranu v nějakém cyklu
2. $u,v \in V(G)$
3. Existuje neorientovaná cesta C (skutečný termín, lze také říct polocesta) z u do v, protože graf je souvislý
4. Každá hrana e na neorientované cestě C, která jde proti směru u->v, může být nahrazena cestou, která je zaručena tím, že e je součástí cyklu.
5. po nahrazení všech hran které na polocestě C jdou proti směru u->v vznikne sled, který lze zkrátit na cestu
6. Potom existuje cesta z libovolného bodu u do libovolného bodu v
7. Graf G je silně souvislý

Pokud chce někdo komplikovanější důkaz proč první implikace musí být pravda

Důkaz implikace G je silně souvislý -> hrana je součástí cyklu

1. Graf G je silně souvislý graf
2. hrana $e \in E(G)$, e = (u,v), kde $u,v \in V(G)$
   2.1. předpokládejme, že e není součástí cyklu
      2.1.1. Předpokládejme $d_{out}(v) = 0$
      2.1.2. u je libovolný vrchol grafu G
      2.1.3. protože graf G je silně souvislý musí existovat cesta z v do u
      2.1.4. ale $d_{out}(v) = 0$, takže z něho žádná cesta nevede
      2.1.5. spor - graf je silně souvislý, takže cesta z u do v musí existovat
   2.2. neplatí $d_{out}(v)=0$
      2.2.1. předpokládejme $d_{out}(v) >= 1$
      2.2.2. potom existuje hrana $f \in E(G)$, tak že f = (v, w), kde $w \in V(G)$
      2.2.3. potom existuje cesta z vrcholu w do vrcholu u, protože graf G je silně souvislý
      2.2.4. potom existuje cyklus v->w->....->u->v skrz hranu e (hrana e = (u,v))
      2.2.5. spor - hrana e není součástí cyklu
   2.3. neplatí $d_{out}(v) >= 1$
   2.4. takže neplatí $d_{out}(v) >=0$
   2.5. spor - vrchol v nemůže mít hodnotu $d_{out}(v)$ mimo $<0,\infty)$
3. hrana e nemůže nebýt součástí cyklu
4. hrana e je součástí cyklu

Alternativní řešení:

Silně souvislý graf je orientovaný graf, v němž je možné se dostat z libovolného vrcholu do libovolného jiného vrcholu.

Cyklus v grafu je cesta, která začíná a končí ve stejném vrcholu.

Důkaz:

(=>) Předpokládejme, že G je silně souvislý graf. Potom, pro každou hranu (u, v) v G, existuje cesta z vrcholu v do vrcholu u (protože G je silně souvislý). Tato cesta spolu s hranou (u, v) tvoří cyklus. Takže každá hrana leží v nějakém cyklu.

(<=) Předpokládejme, že každá hrana v G leží v nějakém cyklu. Chceme ukázat, že G je silně souvislý. Vybereme libovolné dva vrcholy u a v v G. Pokud existuje hrana z u do v, pak můžeme dojít z u do v přímo. Pokud taková hrana neexistuje, pak existuje cesta z u do nějakého vrcholu w a z w do v (protože každá hrana leží v nějakém cyklu). Takže můžeme dojít z u do v přes w. Tím je ukázáno, že G je silně souvislý.

Otázka 8.

Dokažte, že každý neorientovaný graf G, ve kterém má každý vrchol stupeň alespoň 2, obsahuje kružnici.

Řešení:

1. G je neorientovaný graf kde každý vrchol má stupeň alespoň 2
2. Nechť C je nejdelší cesta v grafu G, C začíná ve vrcholu $v_1 \in V(G)$ a končí ve vrcholu $v_n \in V(G)$
3. $d(v_n) >= 2$
4. Jedna hrana vrcholu v_n vede do cesty C na vrchol v_{n-1}, ale minimálně jeden další “trčí” z vrcholu v_n a vede do vrcholu $w \in V(G)$
    4.1. Předpokládejme, že vrchol w není na cestě C
    4.2. Potom existuje delší cesta v_1->....->v_n->w než cesta C
    4.3. spor C je nejdelší cesta
5. vrchol w nemůže nebýt na cestě C
6. vrchol w je na cestě C
7. poté G obsahuje kružnici, protože z v_n vede hrana zpátky na cestu C

Alternativní řešení:

Představme si, že začínáme v libovolném vrcholu grafu G a následujeme cestu do libovolného jiného vrcholu bez návratu zpět. Vzhledem k tomu, že každý vrchol má stupeň alespoň 2, vždy můžeme pokračovat na cestě.

Jelikož graf je konečný, tato cesta se nakonec musí vrátit do některého již navštíveného vrcholu. Tím se vytvoří kružnice. To je v rozporu s naším předpokladem, že jsme sledovali cestu bez návratu zpět, což znamená, že naše původní předpoklady musely být nesprávné.

Z toho vyplývá, že musí existovat alespoň jeden cyklus v grafu G. Tedy, každý neorientovaný graf G, ve kterém má každý vrchol stupeň alespoň 2, obsahuje kružnici.

Otázka 9.

Neorientovaný graf G nazveme kritickým, pokud pro každý jeho podgraf H ≠ G platí χ(H)<(G). Dokažte, že každý kritický graf je souvislý.

Řešení:

strašně se mi to nechce dokazovat a jsem si celkem jistý, že jsme to nebrali, ale podle oficiálního řešení to má být takto:

Řešení Tvrzení dokážeme obměnou. To znamená, že dokážeme, že každý nesouvislý graf je nekritický (není kritický).

Mějme nesouvislý graf G s komponentami souvislosti $S_1, \ldots, S_k$, kde $k > 1$. Barevnost grafu G, to jest $\chi(G)$, můžeme spočítat jako

$$\chi(G) = \max_{i=1,\ldots,k} \chi(S_i).$$

(Myšlenka argumentu je, že každou komponentu můžeme barvit nezávisle na ostatních.) Pro některou z komponent souvislosti grafu G (označme ji například jako S_j) platí

$$\chi(S_j) = \chi(G).$$

(Myšlenka tohoto argumentu je, že na některou z komponent souvislosti bude třeba nejvíce barev.) Komponenta souvislosti S_j grafu G je podgrafem grafu G, není celým grafem G (neboť G má komponent souvislosti více), a přitom pro ni neplatí $\chi(S_j) < \chi(G)$. Graf G tedy není kritický.

Alternativní řešení:

Provedeme sporem, předpokládáme že existuje graf G který není souvislý, to znamená že jde rozdělit alespoň na dvě skupiny mezi kterými nevede hrana. Představme si třeba kritický graf G o dvou vrcholech co nejsou propojeny hranou.
Barevnost podgrafu H, v našem případě jednoho vrcholu se pak bude rovnat barevnosti grafu G, to je ale spor protože musí platit χ(H) < χ(G).
Tedy každý kritický kraf musí být souvislý.

Otázka 10.

Dokažte, že pro libovolný (obyčejný) neorientovaný graf G platí α(G) · χ(G) ≥ n.

(Připomenutí značení: α(G) označuje nezávislost grafu G, χ(G) označuje barevnost grafu G.)

Řešení

Vrcholy obarvené stejnou barvou tvoří nezávislou množinu

Graf G obarvený χ(G) barvami -> existuje χ(G) nezávislých množin

Každá množina obsahuje maximálně α(G) vrcholů, to znamená, že pokud v každé nezávislé množině bude α(G) vrcholů, tak α(G) · χ(G) = n, kde n je počet vrcholů v grafu.

Pokud bude jen v některých (ne ve všech) množinách α(G) vrcholů, tak α(G) · χ(G) > n, kde n je počet vrcholů v grafu.

Takže α(G) · χ(G) ≥ n

Otázka 11.

*Ať je G souvislý neorientovaný graf a všechny jeho vrcholy mají sudý stupeň. Označme jako (G − v) graf, který vznikne z grafu G po odstranění vrcholu v a hran incidentních s vrcholem v. Označme jako pk(G − v) počet komponent souvislosti grafu G − v. Ukažte, že pro libovolný vrchol v grafu G platí pk(G − v) ≤ ½*d(v)*

Řešení

Označme d(v) stupeň vrcholu v, tedy počet hran incidentních s vrcholem v. Vrchol v má sudý stupeň, takže d(v) = 2k pro nějaké přirozené číslo k.

Pokud odstraníme vrchol v a všechny jeho incidentní hrany, zůstanou nám vrcholy, které byly sousedy vrcholu v. Tyto vrcholy tvoří “k” disjunktních komponent souvislosti, protože každá z těchto komponent je spojena s vrcholem **v** přesně přes dvě hrany.

Tedy pk(G − v), počet komponent souvislosti grafu G − v, je menší nebo roven k, což je polovina stupně vrcholu v (d(v) = 2k -> k = d(v)/2), tedy pk(G − v) ≤ ½*d(v).

Řešení potenciálně opravené

Označme d(v) stupeň vrcholu v, tedy počet hran incidentních s vrcholem v. Vrchol v má sudý stupeň, takže d(v) = 2k pro nějaké přirozené číslo k.

Pokud odstraníme vrchol v a všechny jeho incidentní hrany, zůstanou nám vrcholy, které byly sousedy vrcholu v. Tyto vrcholy tvoří “k” disjunktních komponent souvislosti, protože každá z těchto komponent je spojena s vrcholem **v** přesně přes 2 hrany.

Tedy pk(G − v), počet komponent souvislosti grafu G − v, je menší nebo roven k, což je polovina stupně vrcholu v (d(v) = 2k -> k = d(v)/2), tedy pk(G − v) ≤ ½*d(v).

Otázka 12.

Jsou dány dvě kupky sirek (Kupka 1 a Kupka 2), Kupka 1 obsahuje 3 sirky, Kupka 2 obsahuje 2 sirky. Dva hráči (Hráč 1 a Hráč 2) hrají hru s následujícími pravidly:

1. Hráči se střídají na tahu, začíná Hráč 1.

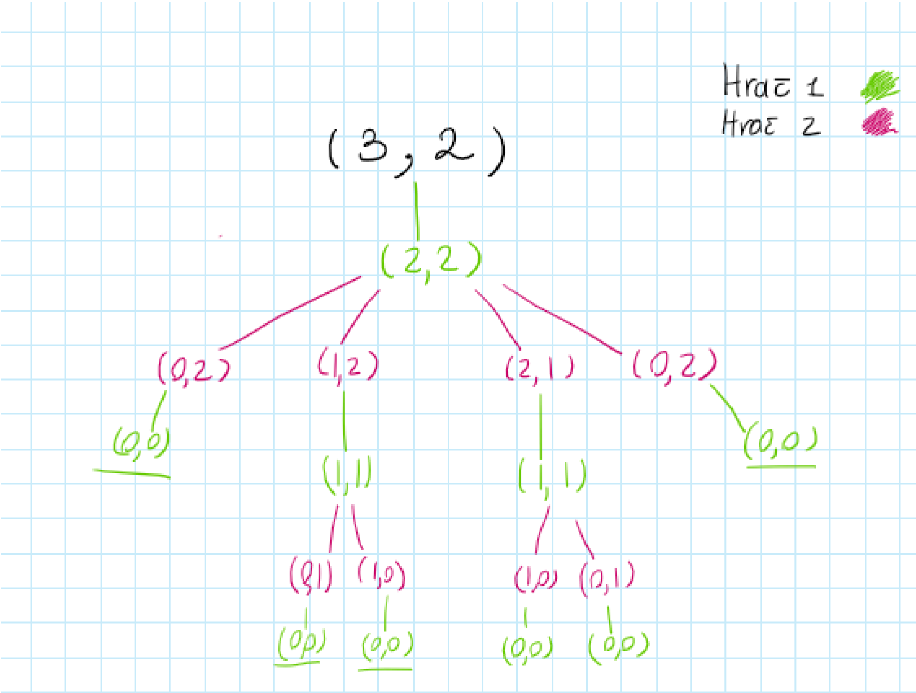
2. Hráč na tahu si vybere jednu z kupek (obsahující n > 0 sirek) a odebere z ní x sirek

(1 ≤ x ≤ n).

3. Vyhrává hráč, po jehož tahu jsou obě kupky sirek prázdné (obsahují 0 sirek).

Má některý z hráčů výherní strategii? Pokud ano, který? Pokud ne, dokažte proč. (Sestavte graf odpovídající stavovému prostoru hry ze zadání. Rozhodněte, zda může Hráč 1 či Hráč 2 vždy volit svůj tah tak, aby si zachoval možnost výhry pro libovolný protihráčův následující protitah.)

Řešení



Začněme tím, že nakreslíme graf, který reprezentuje stavový strom. Jeho kořenem bude (3,2) a potom budou hráči střídat. Při tvorbě grafu můžeme vidět, že hráč 1 má pouze jednu možnost, jak táhnout tak aby měl zaručenou výhru. Budeme dělat stavový strom pro výherní strategii první hráče.

Vyhrává ten hráč, který jako první má možnost ponechat stejný počet sirek v obou kupkách po svém tahu. Pokud bude hráč hrát podle stavového stromu má zaručenou výhru.

Alternativní řešení:

V této hře má Hráč 1 výherní strategii.

Strategie pro Hráče 1 je následující:

Hráč 1 si vybere kupku s 3 sirka a odstraní 2 z nich. Poté jsou v Kupce 1 jedna zápalka a v Kupce 2 jsou dvě zápalky.

Nyní Hráč 1 může reagovat na jakýkoli tah Hráče 2 tak, aby vyhrál:

- Pokud Hráč 2 vezme všechny sirky z Kupky 2, pak Hráč 1 vezme poslední sirku z Kupky 1 a vyhrává.
- Pokud Hráč 2 vezme všechny sirky z Kupky 1, pak Hráč 1 vezme obě sirky z Kupky 2 a vyhrává.
- Pokud Hráč 2 vezme jednu sirku z Kupky 2, Hráč 1 vezme druhou sirku z Kupky 2. Ať Hráč 2 vezme jakoukoli sirku, Hráč 1 vezme zbývající sirku a vyhrává.
- Pokud Hráč 2 vezme jednu sirku z Kupky 1, Hráč 1 vezme dvě sirky z Kupky 2. Bez ohledu na to, jakou sirku Hráč 2 vezme, Hráč 1 vezme poslední sirku a vyhrává.

Tedy Hráč 1 má výherní strategii pro tuto hru.

Alternativní vysvětlení:

Tento úkol patří do tzv. kombinatorických her. Ve kterých hráči táhnou do jádra aby hru vyhráli.

Jádro hry představuje množinu strategií, ve které žádný hráč nemá motivaci odchýlit se od své strategie, pokud všichni ostatní hráči také zůstávají v jádru. V podstatě jde o koncept stability, kdy žádný hráč nemá motivaci odejít ze současného stavu hry.

Tah do jádra je tedy strategie, ve které hráči provádějí své tahy s cílem dosáhnout nebo zůstat v jádru hry. Hráči se snaží nalézt takové tahy, které minimalizují možnost odchylky ostatních hráčů a zároveň maximalizují svůj vlastní výsledek.

V tomto případě je na grafu v první řešení ukázáno jak musí hrát hráč 1 aby zůstal v jádře a tím pádem vyhrál hru.