Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (24.01.2023)

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					$\boldsymbol{\Sigma}$
Úloha	1	2	3	4	$\boldsymbol{\Sigma_1}$	1	2	3	4	$\boldsymbol{\Sigma_2}$	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Nalezněte součet $f(z)$ mocninné řady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+3}}{n! 4^n}$$

na jejím kruhu konvergence a určete parametry tohoto kruhu.

(b) Určete $\operatorname{res}_0 \frac{f(z)}{z^4}$, kde $f(z)$ je funkce z (a).

(c) Nechť má Laurentova řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z+i)^n$$

vnitřní poloměr konvergence $r = 4$ a vnější $R = 10$. Konverguje tato Laurentova řada v bodě $z = 2 + i$?

Úloha 2 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{\sin z + z - \pi}{(1 + e^{iz})^2}.$$

(b) Spočtěte

$$\int_C \frac{2}{z+2i} + \frac{3}{z-i} + \frac{4}{(z-i)^2} + z^{10} \cos(8z^3)\, \mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z - i| = 1$.

Úloha 3 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Určete Z-transformaci posloupnosti

$$\left(\left(n \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3) \right) \right) * \frac{4^n}{n!} \right)_{n=0}^{\infty}.$$

(b) Určete a_0, a_5 a a_{10}, kde $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je inverzní Z-transformace funkce

$$F(z) = \frac{3}{z^{12}} + \frac{4}{z^{10}} + \frac{10}{z^9} + \frac{7}{z^5} + 8 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{z^{2n}}, \ z \in U(\infty).$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení integrodiferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = t + \int_0^t \tau e^{t-\tau}\, \mathrm{d}\tau$$

splňující počáteční podmínky $y(0) = y'(0) = 0$.

1) a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+3}}{n! 4^n} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+2}}{n! 4^n}$

$\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+2}}{n! 4^n} dz \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+3}}{n! 4^n} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-z^2}{4}\right)^n}{n!}$

$= z^3 e^{-\frac{z^2}{4}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+2}}{n! 4^n} = \left(z^3 e^{-\frac{z^2}{4}}\right)' = 3z^2 e^{-\frac{z^2}{4}} - \frac{z^4}{2} e^{-\frac{z^2}{4}} = \left(3z^2 - \frac{z^4}{2}\right) e^{-\frac{z^2}{4}}$

$f(z) = z\left(3z^2 - \frac{z^4}{2}\right) e^{-\frac{z^2}{4}} = \left(3z^3 - \frac{z^5}{2}\right) e^{-\frac{z^2}{4}}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$

$z \in U(0, \infty)$

---

b) $|2+i-(-i)| = |2+2i| = \sqrt{8} < 4$

Laurentův řad v $z = 2+i$ diverguje.

---

b) $\frac{f(z)}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n+3}}{n! 4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) z^{2n-1}}{n! 4^n}$, $z \in P(0)$

$\operatorname{res}_0 \frac{f(z)}{z^4} = \left. \frac{(-1)^n (2n+3)}{n! 4^n} \right|_{n=0} = 3$

2) a) $f(z) = \frac{\sin z + z - \pi}{(1+e^{iz})^2}$

- $1+e^{iz} = 0 \Leftrightarrow iz = i\pi + 2k\pi i \Leftrightarrow z = \pi + 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$
- $(1+e^{iz})^2\big|_{z=\pi+2k\pi} = 0$

$$\left((1+e^{iz})^2\right)'\Big|_{z=\pi+2k\pi} = 2(1+e^{iz})ie^{iz}\Big|_{z=\pi+2k\pi} = 0$$

$$\left((1+e^{iz})^2\right)''\Big|_{z=\pi+2k\pi} = -2e^{2iz} - 2(1+e^{iz})e^{iz}\Big|_{z=\pi+2k\pi} = -2-0 \neq 0$$

- Body $\pi + 2k\pi$ jsou 2-násobné kořeny jmenovatele.

- $\sin z + z - \pi\big|_{z=\pi+2k\pi} = 0 + 2k\pi = 2k\pi$

- Pokud $z = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, není to kořen čitatele
- Body $z = (2k+1)\pi$, $k \neq 0$, jsou tedy póly 2. řádu

- $z = \pi\big|_{k=0} = 0$.

$$(\sin z + z - \pi)\big|_{z=\pi} = 0$$

$$(\sin z + z - \pi)'\big|_{z=\pi} = \cos z + 1\big|_{z=\pi} = 0$$

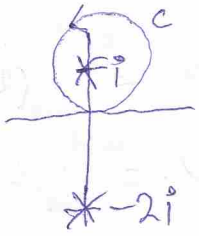
$$(\sin z + z - \pi)''\big|_{z=\pi} = -\sin z\big|_{z=\pi} = 0$$

$$(\sin z + z - \pi)'''\big|_{z=\pi} = -\cos z\big|_{z=\pi} = 1 \neq 0$$

Bod $z = \pi$ je 3-násobný kořen čitatele.

Bod $z = \pi$ je odstranitelná singularita.

b) $\int_c \frac{2}{z+2i} + \frac{3}{z-i} + \frac{4}{(z-i)^2} + z^{20}\cos(8z^3)\,dz =: I$



- Díky Cauchyově větě platí $\int_c \frac{2}{z+2i} + z^{20}\cos(8z^3)\,dz = 0$
- $I = \int_c \frac{3}{z-i} + \frac{4}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i \left(\frac{3}{z-i} + \frac{4}{(z-i)^2}\right) = 2\pi i \cdot 3 = \underline{\underline{6\pi i}}$

3) a) $\mathcal{Z}\left[\left(n\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right) * \frac{4^n}{n!}\right](z) = \mathcal{Z}\left[n\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right](z)\,\mathcal{Z}\left[\frac{4^n}{n!}\right](z)$

- $\mathcal{Z}\left[n\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right](z) = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right](z)$
- $\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right](z) = z^3\,\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right](z) - 0\cdot z^3 - 1\cdot z^2 - 0\cdot z$
$= z^3\frac{z}{z^2+1} - z^2 = \frac{z^4 - z^4 - z^2}{z^2+1} = -\frac{z^2}{z^2+1}$
- $\mathcal{Z}\left[n\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right](z) = -z\left(-\frac{z^2}{z^2+1}\right)' = z\,\frac{2z(z^2+1) - 2z^3}{(z^2+1)^2} = \frac{2z^2}{(z^2+1)^2}$
- $\mathcal{Z}\left[\frac{4^n}{n!}\right](z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!\,z^n} = e^{\frac{4}{z}}$
- $\mathcal{Z}\left[\left(n\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+3)\right)\right) * \frac{4^n}{n!}\right](z) = \underline{\frac{2z^2}{(z^2+1)^2}\cdot e^{\frac{4}{z}}}\ ,\ z\in U(\infty)$

---

b) absolutní člen: $8+1 = 9 = a_0$

koeficient u z^{-5}: $7+0 = 7 = a_5$

koeficient u z^{-10}: $4+(25+1) = 30 = a_{10}$

4) $y''(t) - y(t) = t + \int_0^t \tau e^{t-\tau}\,d\tau$, $y(0) = y'(0) = 0$

$y''(t) - y(t) = t + t * e^t$

$s^2 Y(s) - Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-1}$

$(s^2-1)Y(s) = \frac{s}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s(s-1)}$

$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)^2(s+1)}$

$y(t) = res_0 \frac{e^{st}}{s(s-1)^2(s+1)} + res_1 \frac{e^{st}}{s(s-1)^2(s+1)} + res_{-1} \frac{e^{st}}{s(s-1)^2(s+1)}$

$res_0 \frac{e^{st}}{s(s-1)^2(s+1)} = \frac{1}{1} = 1$

$res_{-1} \frac{e^{st}}{s(s-1)^2(s+1)} = \frac{e^{-t}}{(-1)\cdot 4} = -\frac{e^{-t}}{4}$

$res_1 \frac{e^{st}}{s(s-1)^2(s+1)} \overset{\text{pol 2. řádu}}{=} \lim_{s\to 1}\left(\frac{e^{st}}{s(s+1)}\right)' = \lim_{s\to 1} \frac{te^{st}s(s+1) - (2s+1)e^{st}}{s^2(s+1)^2} =$

$= \frac{2te^t - 3e^t}{4} = \frac{2t-3}{4}e^t$

$y(t) = 1 + \frac{2t-3}{4}e^t - \frac{e^{-t}}{4}$, $t \geq 0$