## Pravděpodobnost a statistika - zkoušková písemka 20.6.2011

Jméno a příjmení	1	2	3	4	celkem	známka

**Úloha 1.** Autoservis s otevírací dobou od 9:00 do 17:00 denně obdrží průměrně 16 zakázek. Doba do příchodu příští zakázky má exponenciální rozdělení.

- a) Určete pravděpodobnost, že na příští zakázku bude autoservis čekat alespoň 1.5 pracovní hodiny.
- b) Určete čas t tak, že s pravděpodobností 0.9 doba čekání na příští zakázku nepřekročí t.
- c) Určete pravděpodobnost, že všechny zakázky v daném dni přijdou do 15:00.
- d) Určete pravděpodobnost, že od 9:00 do 12:00 dostane servis maximálně 5 zakázek.
- e) Jaká je souvislost mezi exponenciálním a Poissonovým rozdělením?

**Úloha 2.** Na školním výletě 5.tříd je třeba děti rozdělit do tří přibližně stejně velkých skupin. Každému žákovi je tudíž přiděleno náhodné (reálné) číslo X rovnoměrně rozdělené mezi 0 a 1, přičemž pokud je číslo menší než 1/3, patří dítě do první skupiny, pokud číslo padne do intervalu 1/3 až 2/3, přidá se dítě ke druhé skupině, a děti s číslem nad 2/3 tvoří skupinu třetí.

- a) Určete distribuční funkci, hustotu, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.
- b) Určete pravděpodobnost, že číslo, které je náhodně vybranému dítěti přiřazeno, je z intevalu (0.7,1.2).
- c) Jaká je pravděpodobnost, že z deseti náhodně vybraných dětí jsou maximálně dvě ve třetí skupině?
- d) Jaká je pravděpodobnost, že z padesáti náhodně vybraných dětí je jich alespoň dvacet ve třetí skupině? (Použijte CLV)
- e) Určete distribuční funkci rozdělení náhodné veličiny  $Y = 3X^2 1$  (kde X je stále náhodné reálné číslo rovnoměrně rozdělené mezi 0 a 1).

**Úloha 3.** Biologové měřili na několika exemplářích výšku daného druhu rostliny. Naměřené hodnoty (v cm) jsou uvedeny v následující tabulce:

74	86	81	89	95	97	88	77	88	92	81	88	101	80	83
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	----	----

- a) Nakreslete histogram a boxplot těchto dat.
- b) Odhadněte z histogramu, jaké rozdělení má výška rostliny.
- c) Odhadněte střední hodnotu a rozptyl tohoto rozdělení z dat.  $(\sum x_i = 1300, \sum (x_i \bar{x})^2 = 797.33)$
- d) Jak je definovaná (teoretická) střední hodnota a (teoretický) rozptyl náhodné veličiny?
- e) Otestujte, zda je možné říct, že střední výška rostliny je 90cm. (Využijte faktu, že za jistých předpokladů má

$$\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \sqrt{n}$$

rozdělení  $t_{n-1}$ .)

**Úloha 4.** Uvažujme tenisový turnaj. Nechť náhodná veličina X označuje pohlaví náhodně vybraného hráče (X=0 pro chlapce a X=1 pro dívky) a Y označuje kategorii (Y=0 pro mladší žactvo, X=1 pro starší žactvo a Y=2 pro dorostence). Víme, že na turnaji je polovina hráčů z kategorie staršího žactva a zbytek je rozdělený půl na půl mezi zbylé kategorie, přičemž mezi mladšími žáky je polovina dívek, mezi staršími žáky je jich třetina a mezi dorostenci pouze čtvrtina.

- a) Určete sdružené (např. tabulkou) a marginální rozdělení X a Y.
- b) Spočtěte kovarianci cov(X,Y).
- c) Určete P(X < 1, Y = 0).

Na příštím turnaji se hráči sešli v následujícím složení:

	Y = 0	Y = 1	Y = 2
X = 0	10	30	20
X = 1	10	20	10

- d) Určete marginální rozdělení.
- e) Otestujte na datech z druhého turnaje, zda je možno považovat pohlaví a kategorie za nezávislé náhodné veličiny.

(Využijte faktu, že za jistých předpokladů má

$$\sum_{i} \sum_{j} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}\right)^{2}}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}}$$

rozdělení  $\chi^2_{(r-1)(c-1)}$  kde r je počet řádků a c je počet sloupců v tabulce.)