### Pravděpodobnost a statistika - zkoušková písemka 24.6.2020

Jméno a příjmení	1	2	3	ústní	celkem	známka

#### **Úloha 1.** (celkem 55 bodů)

Telefon v jistém call-centru je vybavený zábavným doplňkem - krabicí, v níž jsou kuličky žluté, zelené, nebo bílé barvy z různých materiálů a v různých velikostech. Vždycky, když zazvoní telefon, vypadne náhodně vybraná kulička. Tu operátoři po zvednutí telefonu vrátí zpět do krabice. Skleněných kuliček je v krabici 1/4, dřevěných 1/2, ostatní kuličky jsou hliněné. Poměry žlutých, zelených a bílých kuliček jsou 3:1:1 mezi skleněnými a hliněnými kuličkami a 1:3:1 mezi kuličkami dřevěnými. Průměr kuličky [v cm] je náhodná veličina s rozdělením Ro(1,3), která je nezávislá jak na barvě, tak na materiálu kuličky. Telefon zazvoní průměrně čtyřikrát za 10 minut. Určete pravděpodobnost, že

- a) při zazvonění telefonu vypadne kulička, která je zelená nebo dřevěná (5 bodů)
- b) vypadne-li žlutá kulička, bude skleněná, (5 bodů)
- c) náhodně vypadnutá kulička je bílá a má v průměru nejvýše 2,2 cm, (7 bodů)
- d) během půl hodiny vypadnou z krabice alespoň dvě dřevěné kuličky, (7 bodů)
- e) na první vypadnutí zelené kuličky budeme čekat nejvýše čtvrt hodiny, (7 bodů)
- f) nejpozději čtvrtá vypadnutá kulička je hliněná, (7 bodů)
- g) mezi prvními pěti vypadnutými kuličkami je nejvýše jedna dřevěná žlutá kulička, (7 bodů)
- h) pokud by operátoři kuličky do krabice nevraceli, nýbrž vždy po vypadnutí je navlékali na nit těsně za sebou tak, aby středy kuliček ležely v jedné přímce, vešla by se řada 75 kuliček na nit dlouhou 1,4 m (řešte pomocí CLV; 10 bodů).

#### **Úloha 2.** (celkem 30 bodů)

Na úvodním kurzu potápění se nově zapsaní účastníci pokoušeli potopit co nejníže bez dýchacího přístroje. Naměřené hloubky (v m) jsou uvedeny v následující tabulce:

4.4   3.4   3.2   4.2   3.0   4.9   4.2	3.4   3.4   3	3.0 3.6 3.3	4.0   2.7   4.4   3.9
---	---------------	-------------	-----------------------

a) Nakreslete histogram a odhadněte z něj, jaké rozdělení má náhodná veličina udávající hloubku příštího potopení náhodně vybraného účastníka kurzu (včetně odhadu střední hodnoty a rozptylu). (8 bodů)

(hint: 
$$\sum x_i = 59$$
,  $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 5.7175$ )

- b) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda je střední hloubka potopení náhodně vybraného účastníka 4 m, proti alternativní hypotéze, že
  - (i) střední hloubka potopení není 4 m. (7 bodů)
  - (ii) střední hloubka potopení je menší než 4 m. (8 bodů)

V mezičase začal pomocník instruktora hledat ve vybavení, které je smíchané v jedné velké krabici, jeden konkrétní předmět. Jelikož je však zmatkář, místo toho, aby nepotřebné kusy odložil stranou, hodil je vždy zpět do krabice. Než hledaný předmět našel, vytáhl 11 kusů brýlí, 14 šnorchlů a 5 párů ploutví.

d) Statisticky otestujte na hladině 1%, zda je počet brýlí, šnorchlů a párů ploutví v krabici přibližně stejný. (7 bodů)

## Úloha 3. (celkem 15 bodů)

Uvažujte následující počty zákusků a chlebíčků prodaných ve dvou sledovaných cukrárnách během jednoho (ještě předkorovavirového) týdne:

	zákusky	chlebíčky
Dolce Vita	40	20
Fontána	20	20

- a) Odhadněte z dat marginální rozdělení náhodného vektoru (X,Y), kde X popisuje cukrárnu (X=1 pro Dolce Vita a X=0 pro Fontánu) a Y popisuje vybranou lahůdku (Y=1 pro zákusek a Y=0 pro chlebíček). (3 body)
- b) Statisticky otestujte na vámi zvolené hladině, zda můžeme považovat zákazníkem vybraný druh lahůdky za nezávislý na volbě cukrárny. (7 bodů)
- b) Definujte nezávislost náhodných veličin X a Y. (5 bodů)

# Ústní část (celkem 10 bodů)

O náhodných veličinách X a Y se sdruženými a marginálními pravděpodobnostmi uvedenými v následující tabulce

$X \downarrow Y \rightarrow$	1	0	
1	a	b	1/2
0	c	d	e
	1/2	f	

rozhodněte, zda můžeme nalézt parametry  $a,\,b,\,c,\,d,\,e$  a f tak, aby

- (i) corr(X,Y) = 0,
- (ii) corr(X, Y) = -1,
- (iii) corr(X, Y) = 2.

Pokud ano, určete dané parametry, pokud ne, zdůvodněte proč.