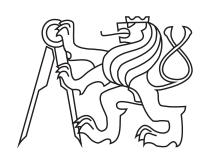
## ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



# SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z ANALÝZY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Miroslav Korbelář

Ркана 2016

### Předmluva

Tento text je určen pro studenty technických vysokých škol, zejména studentům Fakulty elektrotechnické ČVUT, k procvičení analýzy funkcí více proměnných, především diferenciálního a integrálního počtu. Sbírka obsahuje vzorová řešení příkladů k těmto tématům. K řešením jsou také připojena znění vět a definic a to tam, kde to slouží buď k připomenutí pojmu nebo k lepšímu pochopení postupu. Protože sbírka bude sloužit především jako podklad ke cvičením z předmětu Matematická analýza 2 a Matematika-vicedimenzionální kalkulus vyučovaných na FEL ČVUT, obsahuje také příklady z Fourieových řad.

Část příkladů byla vytvořena pedagogy vyučujími na FEL ČVUT a část byla převzata ze zdrojů uvedených na konci sbírky a byla doplněna řešeními.

Sbírka byla vytvořena s podporou grantu RPAPS č. 13101/105/1051603C005.

## Contents

1	Množiny v $\mathbb{R}^n$ jejich vlastnosti	4
2	Limity funkcí více proměnných	9
3	Derivace ve směru, gradient, totální diferenciál	13
4	Taylorův polynom, lokální extrémy	22
5	Vázané a absolutní extrémy	<b>2</b> 9
6	Dvojný integrál	39
7	Trojný integrál	50
8	Křivkový integrál	57
9	Plošný integrál	63
10	Integrální věty	66
11	Fourierovy řady	74

## 1 Množiny v $\mathbb{R}^n$ jejich vlastnosti

**Příklad 1.1.** Nechť  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  a nechť  $A^{\mathbf{c}} := \mathbb{R}^n \setminus A$  značí doplněk (complement) množiny  $A \ v \ \mathbb{R}^n$ . Ukažte, že platí:

(i) 
$$(\overline{A})^{\mathbf{c}} = (A^{\mathbf{c}})^{\circ}, \overline{(A^{\mathbf{c}})} = (A^{\circ})^{\mathbf{c}},$$

- (ii) A, B otevřené  $\Rightarrow A \cap B$  otevřená,
- (iii)  $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$ ,
- (iv)  $A, B uzavřené \Rightarrow A \cup B uzavřená,$
- (v)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

#### Řešení:

Pojem otevřená množina intuitivně zavádíme jako množinu, která s každým bodem obsahuje ještě dost prostoru kolem něj (je to kvůli pozdějšímu použití pro derivování - potřebujeme se k bodu přiblížit "odkudkoliv"). Přesněji:

Otevřená množina G je taková, že s každým bodem  $x_0 \in$  obsahuje i nějaké jeho okolí  $U_{\varepsilon}(x_0)$  v podobě tzv. otevřené koule s poloměrem  $\varepsilon > 0$  a středem v bodě  $x_0$ :

$$U_{\varepsilon}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_0|| < \varepsilon\}.$$

tj.

$$G$$
 je otevřená  $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$   $(\forall x_0 \in G) \ (\exists \ \varepsilon > 0) \ U_{\varepsilon}(x_0) \subseteq G$ 

Pojmem uzavřené množiny zase intuitivně myslíme takovou množinu, ze které nemůžeme vypadnout při "limitách posloupností," tj. taková množina obsahuje všechny body, ke kterým se můžeme z této množiny přiblížit libovolně blízko. Přesněji:

Uzavřená množina F je taková, že každý bod  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , jehož libovolné okolí  $U_{\varepsilon}(x_0)$  má s množinou F průnik, už musí ležet v F:

$$F \text{ je } uzav \check{r}en \acute{a} \stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \left( \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \right) \left( (\forall \ \varepsilon > 0) \ U_{\varepsilon}(x_0) \cap F \neq \emptyset \right) \Rightarrow x_0 \in F$$

Kupodivu, tyto dva pojmy jsou nakonec navzájem doplňkové v tom smyslu:

$$G$$
 je otevřená  $\iff$   $G^{\mathbf{c}}$  je uzavřená

$$F$$
 je uzavřená  $\Leftrightarrow$   $F^{\mathbf{c}}$  je otevřená

Připomeňme si ještě, že

•  $vnitřek\ A^\circ$  množiny A definujeme jako množinu všech bodů, které jsou v A i s nějakým okolím (neboli vnitřek je největší otevřená množina obsažená v A)

$$x \in A^{\circ} \iff (\exists \ \varepsilon > 0) \ U_{\varepsilon}(x) \subseteq A$$

•  $uz\acute{a}v\check{e}r$   $\overline{A}$  množiny A si definujeme jako množinu všech bodů, ke kterým se můžeme přiblížit libovolně blízko z množiny A.

$$x \in \overline{A} \iff (\forall \ \varepsilon > 0) \ U_{\varepsilon}(x) \cap A \neq \emptyset$$

•  $hranice \partial A$  množiny A je množina všech bodů, jejich libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku  $A^c$ 

$$x \in \partial A \stackrel{\text{def}}{\Longrightarrow} (\forall \ \varepsilon > 0) \ U_{\varepsilon}(x) \cap A \neq \emptyset \neq U_{\varepsilon}(x) \cap A^{\mathbf{c}}$$

Pro libovolnou množinu A se tak celý prostor  $\mathbb{R}^n$  vždy disjunktně rozloží (značeno pomocí " $\cup$ ") na vnitřek  $A^{\circ}$ , hranici  $\partial A$  a vnějšek  $(A^{\mathbf{c}})^{\circ}$ :

$$\mathbb{R}^n = A^{\circ} \cup \partial A \cup (A^{\mathbf{c}})^{\circ}$$

Kromě toho ještě platí:

- $\partial A = \overline{A} \setminus A^{\circ} = \overline{A} \cap \overline{A^{\mathbf{c}}}$
- Uzávěr $\overline{A}$ je uzavřená množina a sice nejmenší uzavřená, která obsahuje množinu A.
- A je otevřená  $\Leftrightarrow A = A^{\circ}$
- A je uzavřená  $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
- (i) Snadno teď máme:

$$x \in \left(\overline{A}\right)^{\mathbf{c}} \Leftrightarrow \neg \left[ (\forall \ \varepsilon > 0) \ U_{\varepsilon}(x) \cap A \neq \emptyset \right] \Leftrightarrow (\exists \ \varepsilon > 0) \ U_{\varepsilon}(x) \subseteq A^{\mathbf{c}} \Leftrightarrow x \in \left(A^{\mathbf{c}}\right)^{\circ}.$$

Tedy

$$\left(\overline{A}\right)^{\mathbf{c}} = \left(A^{\mathbf{c}}\right)^{\circ} . \tag{E.1}$$

Druhou rovnost dostaneme buď analogicky nebo přechodem k doplňkům  $A:=B^{\mathbf{c}}$  a následně aplikací doplňků:

$$\overline{A} \stackrel{\text{(E.1)}}{=} \left( (A^{\mathbf{c}})^{\circ} \right)^{\mathbf{c}} \quad \Rightarrow \quad \overline{(B^{\mathbf{c}})} = (B^{\circ})^{\mathbf{c}} \tag{E.2}$$

Tedy můžeme prohazovat pořadí uzávěru a doplňku, když pak uzávěr změníme na vnitřek.

- (ii) Jestliže A a B jsou otevřené, pak s každým bodem obsahují i nějakou otevřenou kouli. Když si vezmeme tu s menším poloměrem, bude obsažena v obou množinách, tedy v průniku. Takže  $A \cap B$  je také otevřená.
  - (iii) Použijeme základní vlastnosti vnitřku:

$$A^{\circ} \subseteq A$$
 (E.3)

$$(A^{\circ})^{\circ} = A^{\circ} \tag{E.4}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$$
 (E.5)

Teď ukážeme, že  $(A \cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cap B^{\circ}$ :

$$\left(A\cap B\subseteq A \And A\cap B\subseteq B\right) \stackrel{(\mathrm{E}.5)}{\Longrightarrow} \left((A\cap B)^\circ\subseteq A^\circ \And (A\cap B)^\circ\subseteq B^\circ\right) \implies (A\cap B)^\circ\subseteq A^\circ\cap B^\circ$$

A ještě zbývá udělat  $(A \cap B)^{\circ} \supseteq A^{\circ} \cap B^{\circ}$ :

$$A^{\circ}$$
 a  $B^{\circ}$  jsou otevřené  $\stackrel{(2)}{\Rightarrow}$   $A^{\circ} \cap B^{\circ}$  je otevřená  $\implies$   $(A^{\circ} \cap B^{\circ})^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$ 

Tedy

$$A^{\circ} \cap B^{\circ} \overset{(E.3)}{\subseteq} A \cap B \quad \overset{(E.5)}{\Longrightarrow} \quad A^{\circ} \cap B^{\circ} \overset{(E.4)}{=} (A^{\circ} \cap B^{\circ})^{\circ} \subseteq (A \cap B)^{\circ} \ .$$

Takže máme  $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$ .

(iv) Můžeme postupovat podobně jako v (2) a použít základní vlastnosti uzávěru:

$$A \subseteq \overline{A} \tag{E.6}$$

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$$
 (E.7)

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \subseteq \overline{B} \tag{E.8}$$

nebo můžeme využít dokázanou část (2) a přejdeme k doplňkům:

A,B uzavřené  $\Rightarrow A^{\mathbf{c}},B^{\mathbf{c}}$  otevřené  $\Rightarrow A^{\mathbf{c}}\cap B^{\mathbf{c}}=(A\cup B)^{\mathbf{c}}$  otevřená  $\Rightarrow A\cup B$  uzavřená.

(v) Můžeme postupovat podobně jako v (3) nebo můžeme využít dokázanou část (3) a přejdeme k doplňkům s pomocí (1):

$$\overline{A \cup B} = \left( (\overline{A \cup B})^{\mathbf{c}} \right)^{\mathbf{c}} \stackrel{\mathbf{(1)}}{=} \left( ((A \cup B)^{\mathbf{c}})^{\circ} \right)^{\mathbf{c}} = \left( (A^{\mathbf{c}} \cap B^{\mathbf{c}})^{\circ} \right)^{\mathbf{c}} \stackrel{\mathbf{(3)}}{=} \\
\stackrel{\mathbf{(3)}}{=} \left( (A^{\mathbf{c}})^{\circ} \cap (B^{\mathbf{c}})^{\circ} \right)^{\mathbf{c}} \stackrel{\mathbf{(1)}}{=} \left( (\overline{A})^{\mathbf{c}} \cap (\overline{B})^{\mathbf{c}} \right)^{\mathbf{c}} = \left( (\overline{A} \cup \overline{B})^{\mathbf{c}} \right)^{\mathbf{c}} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Jak je vidět, při základní "manipulaci" s uzávěry, vnitřky atd.. si do velké míry vystačíme s "algebraickým" popisem těchto pojmů (viz vlastnosti (E.3) - (E.8)) a nemusíme jít až do základní definice, která využívá pojem okolí.

**Příklad 1.2.** Najděte příklady, kdy uvedená tvrzení neplatí "pro zbylé možnosti," předchozího z příkladu, tj.

- (i)  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  jsou otevřené, ale  $\bigcap_n A_n$  už není otevřená,
- (ii)  $(A \cup B)^{\circ} \supseteq A^{\circ} \cup B^{\circ}$ ,
- (iii)  $A_n$  ,  $n \in \mathbb{N}$  jsou uzavřené, ale  $\bigcup_n A_n$  už není uzavřená,
- (iv)  $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$ .

#### Řešení:

- (i)  $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ . Pak je  $\bigcap_n A_n = \{0\}$ .
- (iii)  $A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ . Pak je  $\bigcup_n A_n = (-\infty, 0)$ .
- (ii), (iv)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x\}.$  Pak je

$$(A \cup B)^{\circ} = \mathbb{R}^2 \supseteq \mathbb{R}^2 \setminus \text{osa } y = A^{\circ} \cup B^{\circ}$$

 $\mathbf{a}$ 

$$\overline{A \cap B} = \emptyset \subsetneq \text{osa } y = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

**Příklad 1.3.** Ukažte, že uzávěr každé množiny M je sjednocení této množiny s množinou jejích hromadných bodů.

#### Řešení:

Plyne ihned z definic:

 $a \in \overline{M} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \ U_{\varepsilon}(a) \cap M \neq \emptyset$ a je hromadný bod  $M \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \ P_{\varepsilon}(a) \cap M \neq \emptyset$ 

**Příklad 1.4.** Sestrojte příklady neprázdných množin M v  $\mathbb{R}^2$ , že

- (i) nemá žádný vnitřní bod,
- (ii) nemá žádný hraniční bod,
- (iii) nemá žádný vnější bod,
- (iv) nemá žádný hromadný bod,
- (v) nemá žádný izolovaný bod.

#### Řešení:

- (i) jakákoliv spočetná množina (např.  $\mathbb{Q}^2$ ), kružnice, přímka (a mnoho dalších příkladů).
- (ii) Z požadavku  $\partial M = \emptyset$  plyne, že  $M^{\circ} \subseteq M \subseteq \overline{M} = \partial M \cup M^{\circ} = M^{\circ}$ , tedy  $M^{\circ} = M = \overline{M}$  a množina M je tak současně otevřená a uzavřená. Jediná taková neprázdná množina je pouze  $M = \mathbb{R}^2$ . (Pro podrobnosti viz příklad o souvislých množinách.)
- (iii) Vnějšek množiny je roven  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}$ , tedy potřebujeme, aby  $\overline{M} = \mathbb{R}^2$  (množina je tzv.  $hust\acute{a}$ ). Můžeme opět volit např.  $M = \mathbb{Q}^2$ .
  - (iv) jakákoliv konečná množina;  $\mathbb{N}^2$  (a mnoho dalších příkladů).
  - (v) jakákoliv otevřená množina (a mnoho dalších příkladů).

**Příklad 1.5.** Stanovte hromadné body množiny  $M = \{(1/n, 1/m) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$ 

#### Řešení:

Ukážeme, že množina hromadných bodů je

$$N = \{(1/n, 0), (0, 1/n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Zřejmě každý prvek N je hromadný bod M.

Naopak, nechť  $a \in \mathbb{R}^2$  je hromadný bod M, speciálně  $a \in \overline{M}$ . Protože jednotlivé projekce

$$\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \pi_1(x, y) := x, \quad \pi_2(x, y) := y$$

jsou spojité funkce, tak pro posloupnost  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq M$  takovou, že  $\lim_{n\to\infty}a_n=a$  je také  $\lim_{n\to\infty}\pi_i(a_n)=\pi_i(a)$ . Tedy

$$\pi_i(a) \subseteq \overline{\pi_i(M)} = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

pro i = 1, 2. Máme tak, že

$$a \in \left( \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \right)^2 = M \cup N.$$

Všechny body původní množiny M jsou ale izolované, tedy musí být  $a \in N$ .

Příklad 1.6. Určete vnitřek, hranici a uzávěr následujících množin:

- (i)  $M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 \le 3, a^2 4a + b^2 \le 0\};$
- (ii)  $M = \mathbb{Q}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $kde \mathbb{Q}$  je množina všech racionálních čísel.

#### Řešení:

(i) Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec můžeme první nerovnost upravit na  $(a+1)^2+b^2\leq 4$  neboli  $||(a,b)-(-1,0)||^2\leq 4$ . Podobně druhá nerovnost znamená  $||(a,b)-(2,0)||^2\leq 4$ . Množinu M proto můžeme vyjádřit jako

$$M = A \cap B$$
 , kde  $A = \overline{U}_2(-1,0)$  a  $B = \overline{U}_2(2,0)$ 

tedy jako průnik dvou uzavřených koulí (viz dále). Pro  $\varepsilon>0$  a  $x_0\in\mathbb{R}^2$  používáme značení

$$\overline{U}_{\varepsilon}(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x - x_0|| \le \varepsilon \}$$

Uzávěr M: Nyní víme, že obě množiny A i B jsou uzávěry nějakých množin, tedy jsou uzavřené. Množina M je jejich průnikem, tedy je také uzavřená a proto je uzávěrem sama sebe (neboli  $\overline{M} = M$ ).

Vnitřek M: Použijeme vztah  $M^{\circ} = (A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$ . Protože  $A^{\circ} = \left(\overline{U}_{2}(-1,0)\right)^{\circ} = U_{2}(-1,0)$  (což není těžké ukázat). Podobně to platí pro B a dostáváme tak

$$M^{\circ} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 < 3, a^2 - 4a + b^2 < 0\}.$$

Hranice M:

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^{\circ} =$$

$$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a^2 + 2a + b^2 = 3 \& a^2 - 4a + b^2 \le 0) \lor (a^2 + 2a + b^2 \le 3 \& a^2 - 4a + b^2 = 0)\}.$$

**Důležitá poznámka:** Nechť  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  je spojitá funkce. Pak množina

$$f^{-1}(-\infty,0) = \{a \in \mathbb{R}^2 \mid f(a) < 0\}$$

je otevřená množina (tj. vzor otevřeného intervalu  $(-\infty,0)\subseteq\mathbb{R}$  je otevřená množina). Podobně

$$f^{-1}(-\infty,0) = \{a \in D \mid f(a) < 0\}$$

je uzavřená množina (tj. vzor uzavřeného intervalu  $(-\infty,0) \subseteq \mathbb{R}$  je uzavřená množina).

Protože funkce  $f(a,b)=a^2+2a+b^2-3$  a  $g(a,b)=a^2-4a+b^2$  jsou spojité na celém  $\mathbb{R}^2$ , je množina

$$M = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 \le 3, a^2 - 4a + b^2 \le 0\}$$

uzavřená (neboli  $\overline{M} = M$ ) a množina

$$N = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + 2a + b^2 < 3, a^2 - 4a + b^2 < 0\}$$

je otevřená (neboli  $N^{\circ} = N$ ).

**POZOR!** Tímhle způsobem ale obecně nemusíme získat přímo vnitřek  $M^{\circ}$ , ale jen nějakou jeho podmnožinu  $N \subseteq M^{\circ}$ . Rovnost nemusí obecně nastat např. pro  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 \leq 0\}$  je

$${x \in \mathbb{R} \mid -x^2 < 0} = \mathbb{R} \setminus {0} \subsetneq \mathbb{R} = A^{\circ}.$$

Pro rovnost je potřeba použít větu o implicitní funkci. Z té pak plyne toto tvrzení:

**Věta**: Nechť  $U\subseteq\mathbb{R}^n$  je otevřená množina  $f:U\to\mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná funkce na U. Položme

$$A = \{ x \in U \mid f(x) \le 0 \}.$$

Pokud pro každé  $x_0 \in A$  takové, že  $f(x_0) = 0$ , je  $f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(x_0) \neq 0$ , pak

$$A^{\circ} = \{ x \in U \mid f(x) < 0 \}.$$

V našem případě opravdu pro  $f(a,b)=a^2+2a+b^2-3$  máme  $f'(a,b)=\left(\frac{\partial f}{\partial a},\frac{\partial f}{\partial b}\right)=\left(2a+2,2b\right)$ . Pokud by náhodou nastalo, že f'(a,b)=0, pak je a=-1 a b=0 a tudíž  $f(-1,0)=-4\neq 0$ . Podmínku z předchozí věty tak máme splněnou a proto opravdu  $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\mid a^2+2a+b^2<3\}$  je vnitřek množiny  $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\mid a^2+2a+b^2\leq 3\}$ .

(ii) Uvědomíme si, že v libovolném okolí libovolného  $r \in \mathbb{R}$  leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme  $|r_i - s_i| < \varepsilon$  pro i = 1, 2, 3 (kde  $r_i, s_i \in \mathbb{R}$  a  $\varepsilon > 0$ ) pak  $||(r_1, r_2, r_3) - (s_1, s_2, s_3)|| \le \sqrt{3} \cdot \varepsilon$ . Speciálně tedy v libovolném okolí bodu  $x \in \mathbb{R}^3$  leží jak nějaký prvek z  $\mathbb{Q}^3$ , tak nějaký prvek z  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$ . Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^3} = \mathbb{R}^3$$
,  $(\mathbb{Q}^3)^\circ = \emptyset$  a  $\partial \mathbb{Q}^3 = \overline{\mathbb{Q}^3} \setminus (\mathbb{Q}^3)^\circ = \mathbb{R}^3$ .

**Příklad 1.7.** Jaké jsou obojetné, tj. současně otevřené a uzavřené množiny v eukleidovském prostoru  $\mathbb{R}^n$ ?

#### Řešení:

Jediné takové dvě množiny jsou  $\emptyset$  a  $\mathbb{R}^n$ .

Abychom si to ověřili, použijeme následující pojem souvislé množiny, který intuitivně odpovídá tomu, že množinu nemůžeme "rozkouskovat" na oddělené bloky a tedy to, co se děje v jedné její části, ovlivňuje i celý zbytek této množiny (tento pojem se uplatní hlavně při spojitém rozšiřování funkci, existenci potenciálu atd.)

Množina  $A\subseteq\mathbb{R}^n$  se nazývá souvislá právě když nejde rozdělit pomocí dvou otevřených disjunktních neprázdných množin, tj.

$$A\subseteq \mathbb{R}^n \text{ je } \textit{souvisl\'a} \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \neg \Big[ (\exists \ U_1, U_2 \ \text{otevřen\'e a neprázdn\'e}) \quad A\subseteq U_1\cup U_2 \quad \& \quad U_1\cap U_2=\emptyset \Big]$$

Pokud by nyní existovala nějaká obojetná množina  $U \neq \emptyset$  v  $\mathbb{R}^n$ , taková, že také  $U \neq R^n$ , znamenalo by to, že  $\mathbb{R}^n$  se dá rozdělit pomocí dvou disjunktních neprázdných otevřených množin U a  $U^{\mathbf{c}}$ . Tedy  $\mathbb{R}^n$  by pak nebyla souvislá množina.

Dokázat, že  $\mathbb{R}^n$  je skutečně souvislá, dá trochu práci, ale zkusíme se podívat, jak by se to pro  $n \geq 2$  dalo udělat, pokud bychom už věděli, že  $\mathbb{R}$  je souvislá množina.

Budeme postupovat sporem.

• Předpokládejme, že  $\mathbb{R}^n$  není souvislá pro  $n \geq 2$ . Dá se tedy zapsat jako  $\mathbb{R}^n = U \cup V$ , kde U a V jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny.

- Zvolme si bod  $a \in U$  a  $b \in V$  a nechť  $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$  je obvyklá parametrizace přímky, která spojuje body a a b (tj.  $\varphi(t) = a + t(b a)$  pro  $t \in \mathbb{R}$ ).
- Zobrazení  $\varphi$  je tedy spojité a proto vzor  $\varphi^{-1}(U)$  otevřené množiny U je opět otevřená množina (a neprázdná, protože  $0 \in \varphi^{-1}(U)$ ).

Podobně i  $\varphi^{-1}(V)$  je otevřená a neprázdná množina (protože  $1\in \varphi^{-1}(V)$ ), která je navíc disjunktní s  $\varphi^{-1}(U)$ .

• A navíc určitě platí, že  $\mathbb{R}=\varphi^{-1}(U)\cup \varphi^{-1}(V)$ . To ale znamená, že  $\mathbb{R}$  není souvislá, což je spor!

 $\mathbb{R}^n$  tak musí být souvislá a proto nemá žádné další (neprázdné) obojetné množiny.

#### Příklad 1.8. Rozhodněte, zda množina je souvislá:

- $(i) \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq ||(x,y)|| < 5\},$
- (ii)  $\mathbb{Q}^2$ ,
- (iii)  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{"bod}, \text{"} \mathbb{R}^2 \setminus \text{"přímka,"}$
- (iv)  $\mathbb{R}^3 \setminus \text{"bod," } \mathbb{R}^3 \setminus \text{"přímka," } \mathbb{R}^3 \setminus \text{"rovina."}$

#### Řešení:

(i) Dokazovat souvislost jako takovou je trochu obtížnější. Pomůžeme si proto o něco silnějším pojmem:

Množina  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  se nazývá *obloukově souvislá*, pokud každé dva body  $a, b \in M$  existuje spojitá křivka  $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \to M$ , že  $\varphi(0) = a$  a  $\varphi(1) = b$ .

Veta: Každá obloukově souvislá množina je souvislá.

Pozor! Existují ale množiny, která jsou sice souvislé, ale nejsou obloukově souvislé, např.

$$A = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, \infty) \right\} \cup \left\{ 0 \right\} \times \left\langle -1, 1 \right\rangle$$

kde body na ose y nejdou propojit s grafem funkce  $\sin \frac{1}{x}$ .

Pro otevřené množiny ale oba pojmy splývají:

**Věta:** Nechť  $U\subseteq\mathbb{R}^n$  je otevřená množina. Pak je obloukově souvislá právě když je souvislá. (Otevřená souvislá množina se nazývá oblast.)

Množina  $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 3\leq ||(x,y)||<5\}$  je souvislá, protože se jedná o mezikruží, které je obloukově souvislé (body lze spojit např. soustřednými kružnicemi a ty pak propojit úsečkou směřující do počátku).

- (ii) Množina není souvislá, protože ji lze rozložit pomocí dvou neprázdných disjunktních otevřených množin A a B, např.  $A=\{(x,y\in\mathbb{R}^2)\mid x<\sqrt{2}\}$  a  $B=\{(x,y\in\mathbb{R}^2)\mid x>\sqrt{2}\}$ .
- (iii), (iv) souvislé jsou tyto množiny:  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{"bod,"} \mathbb{R}^3 \setminus \text{"přímka"}$  (protože jsou zjevně obloukově souvislé),
- a nesouvislé tyto:  $\mathbb{R}^2\setminus$  "přímka,"  $\mathbb{R}^3\setminus$  "rovina" (protože se zjevně dají napsat pomocí dvou otevřených poloprostorů).

9

## 2 Limity funkcí více proměnných

Příklad 2.1. Vyšetřete existenci limity a určete její (případnou) hodnotu:

(i) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$$

(ii) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$$

(iii) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2}$$

(iv) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$$

Řešení:

(i) Pro funkci  $f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$  je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Bod (0,0) je hromadným bodem množiny  $D_f$  (tedy má smysl ptát se na limitu f v tomto bodě). Limitu určíme podle věty o limitě složené funkce f(x,y) = h(g(x,y)), kde g(x,y) = x + y a  $h(z) = \frac{\sin(z)}{2}$ 

Pro korektní použití věty o limitě složené funkce ale ještě potřebujeme zajistit, aby

- buď v okolí bodu (0,0) bylo  $g(x,y) \neq 0$
- nebo aby funkce h byla spojitá v z=0.

První případ si můžeme zajistit tak, že omezíme definiční obor funkce g, tj. vezmeme  $D_g := D_f$  a druhý tak, že funkci h spojitě dodefinujeme v z = 0. Nyní tedy máme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x+y=0\quad \text{(protože $g$ je součet spojitých funkcí)},$$

$$\lim_{z \to 0} h(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

takže

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(g(x,y)) = 1.$$

(ii) Pro funkci  $f(x,y)=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm y\}.$$

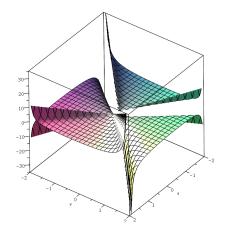
Zúžením f na osu x (tj. y = 0) dostáváme

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Na druhou stranu zúžením f na osu y (tj. x = 0) dostáváme

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{-y^2} = -1.$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.



(iii) Pro funkci  $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+2y^2}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Zúžením f na osu x (tj. y = 0) dostáváme

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = 0.$$

Na druhou stranu zúžením f na přímku x=y dostáváme

$$\lim_{x \to 0} f(x, x) = \lim_{y \to 0} \frac{2x^2}{x^2 + 2x^2} = \frac{2}{3}.$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.

(iv) Pro funkci  $f(x,y)=(x^2+y^2)^{x^2y^2}=e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}$  je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Stačí tedy zjistit  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$ . Použijeme odhad

$$0 \le \left| x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) \right| \le \left( x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 \right) \cdot \left| \ln(x^2 + y^2) \right| = \left( x^2 + y^2 \right)^2 \cdot \left| \ln(x^2 + y^2) \right|.$$

Použitím věty o limitě složené funkce pro

$$q(x,y) = x^2 + y^2$$
 a  $h(z) = z^2 \ln z$ 

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0 \ \ \text{a} \ \ \lim_{z\to 0_+}h(z)=0 \ \ (\text{např. L'Hospitalovo pravidlo})$$

dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^2 \ln(x^2 + y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(g(x,y)) = 0.$$

Z věty o sevření pak máme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) = 0$$

tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2} = e^0 = 1.$$

#### Příklad 2.2. Vyšetřete existenci limity a určete její (případnou) hodnotu:

(i) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$$

(ii) 
$$\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$$

(iii) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

(iv) 
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$$

(v) 
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2y-1}{xy-1}$$

#### Řešení:

(i) Pro funkci 
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-1)^2}$$
 je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$$

a bod (0,1) je tedy hromadným bodem  $D_f$ . Pro limitu použijeme obvyklý trik, jak se zbavit odmocniny (tj. vzorec  $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ )

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1}=$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2 + (y-1)^2}{\left(x^2 + (y-1)^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} + 1\right)} = \frac{1}{2} .$$

(ii) Pro funkci  $f(x,y,z)=\frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$ je její definiční obor

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 1\}$$

a bod (1,1,1) je tedy hromadným bodem  $D_f$ . Stupně polynomů v čitateli i jmenovateli jsou stejné, takže spíš zkusíme, jestli limita vůbec existuje.

Zúžením f na přímku x=y=z (bez bodu (x,y,z)=(1,1,1)) dostáváme  $f(x,x,x)=\frac{x^3-x^3}{x^3-1}=0$ , takže

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to (1,1,1)\\ x=y=z}} f(x,y,z) = \lim_{x\to 1} f(x,x,x) = 0.$$

Na druhou stranu zúžením f na přímku x=y=1 (opět bez bodu (x,y,z)=(1,1,1)) dostáváme  $f(1,1,z)=\frac{z^2-z}{z-1}=z,$  takže

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(1,1,1)\\x=y=1}} f(x,y,z) = \lim_{z\to 1} f(1,1,z) = \lim_{z\to 1} z = 1.$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.

(iii) Pro funkci  $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$  je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

a má hromadný bod (0,0). Polynom v čitateli má vyšší stupeň než ve jmenovateli, takže spíš zkusíme ukázat, že limita existuje a bude nulová (což si můžeme otestovat zúžením f např. na souřadné osy). Použijeme opět odhady a pak větu o limitě sevřené funkce. Zřejmě platí

$$|x| \le \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|,$$

což je důležitá nerovnost, která se hodí na dokazování limit. Podobně  $|y| \leq ||(x,y)||$ , takže máme

$$0 \le \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| \le \frac{\|(x, y)\|^2 \cdot \|(x, y)\|^2}{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|^2.$$

Z definice limity snadno dostáváme, že  $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\|(x,y)\|^2=0$  (podobná tvrzení už můžeme brát skoro jako "fakt") a tedy z věty o limitě sevřené funkce je rovněž

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0 .$$

(iv) Na rozdíl od předchozího případu zde bude situace podstatně jiná a to kvůli nulovým hodnotám jmenovatele. Pro funkci  $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$  je její definiční obor

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -\sqrt[3]{x^2}\}$$

a zřejmě má hromadný bod (0,0).

Zúžením f na přímku x=0 (bez bodu (x,y)=(0,0)) dostáváme f(0,y)=0, takže

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x\to 0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 .$$

Pokud by tedy limita existovala, musí být rovna 0. Polynom v čitateli je nulový na osách x=0 a y=0, zatímco polynom ve jmenovateli je nulový na křivce  $y=-\sqrt[3]{x^2}$ . V bodech  $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$  takových, že  $y_0=-\sqrt[3]{x_0^2}$  a  $x_0\neq 0$  tedy máme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\0\neq y_0=-\sqrt[3]{x_0^2}}} \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^3} \right| = \frac{x_0^2y_0^2}{+\infty} = +\infty$$

(pokud na chvíli připustíme, že  $+\infty$  může také být limitou, kterou jinak smí podle naší definice být pouze prvek z  $\mathbb{R}$ .)

Pokud by funkce f měla v (0,0) limitu 0, musela by speciálně být na nějakém okolí (0,0) omezená, tj. existují K>0 a  $\varepsilon>0$ , že  $\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^3}\right|\leq K$  pro všechna  $(x,y)\in U_\varepsilon(0,0)\cap D_f$ .

V okolí  $U_{\varepsilon}(0,0)$  se ale také nacházejí body  $(x_0, -\sqrt[3]{x_0^2})$ , ve kterých je v limitě funkce f naopak neomezená.

To je spor a původní limita tedy NEEXISTUJE.

(v) Výraz v limitě má definiční obor

$$D: xy \neq 1$$
,

což jsou dvě větve hyperboly. Zkusíme přiblížení ve směru souřadných os. Přiblížením po přímce x=1 dostáváme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\x=1}}\frac{x^2y-1}{xy-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y-1}=1\ .$$

Na druhou stranu přiblížením po přímce y=1 dostáváme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\y=1}} \frac{x^2y-1}{xy-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2.$$

Původní limita tedy neexistuje.

### 3 Derivace ve směru, gradient, totální diferenciál

**Příklad 3.1.** Najděte gradient funkce  $f(x,y) = e^x \sin y$  v bodě  $a_0 = \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$  a rychlost růstu f v bodě  $a_0$  ve směru vektoru  $\vec{v} = (-1, 2)$ .

#### Řešení:

Gradient grad $f(a_0)$  je maticí (ve standardních souřadnicích) derivace  $f'(a_0)$  funkce f v bodě  $a_0$ . Postačující podmínkou pro existenci derivace funkce f v bodě  $a_0$  je existence spojitých parciálních derivací na nějakém okolí bodu  $a_0$  (což je v našem případě splněno).

$$\operatorname{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{|a_0} = \left(e^x \sin y, e^x \cos y\right)_{|a_0} = \left(e^{\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}\right)$$

Rychlost růstu  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0)$  funkce f v bodě  $a_0$  ve směru vektoru  $\vec{v}$  je dána

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = \operatorname{grad} f(a_0) \cdot \vec{v} = \left(e\frac{\sqrt{2}}{2}, e\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-1, 2) = e\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Příklad 3.2.** Najděte jednotkový směr největšího růstu funkce  $f(x, y, z) = xe^y + z^2$  v bodě  $a_0 = (1, \ln 2, \frac{1}{2})$ .

#### Řešení:

$$\operatorname{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{|a_0|} = (e^y, xe^y, 2z)_{|a_0|} = (2, 2, 1)$$

Jednotkový směr největšího růstu funkce f v bodě  $a_0$  je

$$\frac{1}{||\operatorname{grad} f(a_0)||} \cdot \operatorname{grad} f(a_0) = \frac{1}{||(2,2,1)||} \cdot (2,2,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Příklad 3.3. Určete derivaci funkce

- (i)  $f(x, y, z) = z^3 x^2 y$  v bodě a = (1, 6, 2) podle vektoru  $\vec{v} = (3, 4, 12)$ ,
- (ii)  $f(x,y) = e^x \cos y + 2y \ v \ bodě \ a = (0,0) \ podle \ vektoru \ \vec{v} = (-1,2).$

#### Řešení:

Derivace funkce f v bodě a podle vektoru  $\vec{v}$  je definovaná jako

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot \vec{v}) - f(a)}{t} .$$

Pokud ovšem existuje derivace  $f'_a$  funkce f v bodě a (tj. totální diferenciál), pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = f'(a)[\vec{v}] = \operatorname{grad} f(a) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot v_n$$

kde  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ .

(i) Pro $f(x,y,z)=z^3-x^2y$ a a=(1,6,2)máme

$$\operatorname{grad} f(a) = (-2xy, -x^2, 3z^2)_{|a|} = (-12, -1, 12)$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = (-12, -1, 12) \cdot \begin{pmatrix} 3\\4\\12 \end{pmatrix} = 104.$$

Pokud bychom brali derivaci podle SMĚRU  $\vec{v}$ , pak je potřeba vektor ještě znormovat, tj. použijeme vektor  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  a pak je  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}|_a = \frac{104}{13} = 8$ .

(ii) Pro  $f(x, y) = e^x \cos y + 2y$  a a = (0, 0) máme

$$\operatorname{grad} f(a) = (e^x \cos y, -e^x \sin y + 2)_{|a|} = (1, 2)$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(a) = (1,2) \cdot \left( \begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} \right) = 3 \ .$$

**Příklad 3.4.** Velmi unavený horolezec leze po ploše, která je grafem funkce  $f(x,y) = e^{xy} + \ln x$ . Právě se nachází v bodě  $A = (1,1,?) \in \mathbb{R}^3$ . Kterým ze dvou směrů

$$\mathbf{U} = (1, 2, ?)$$
  $a$   $\mathbf{V} = (2, 1, ?)$ 

(v tečné rovině grafu funkce f v bodě A) se má vydat, aby šel cestou menšího stoupání?

#### Řešení:

Pro  $a = (1,1) \in \mathbb{R}^2$  je f(a) = e, tedy A = (1,1,e). Spočítáme gradient (derivaci) funkce f:

grad 
$$f(1,1) = f'(1,1) = (ye^{xy} + \frac{1}{x}, xe^{xy})_{|(1,1)} = (e+1,e)$$

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce f v bodě a je

$$z = f(1,1) + f'(1,1) \left[ {x-1 \choose y-1} \right] = e + (e+1,e) {x-1 \choose y-1} = (e+1)x + ey - (e+1)$$

Vektory U a V leží v této tečné rovině (přesněji v jejím zaměření) právě když jsou kolmé na její normálový vektor  $\mathbf{N}=(e+1,e,-1)$  (tj. když  $\mathbf{U}\cdot\mathbf{N}=0=\mathbf{V}\cdot\mathbf{N}$ .) Máme tak, že  $\mathbf{U}=(1,2,3e+1)$  a  $\mathbf{V}=(2,1,3e+2)$ . Strmost stoupání je dána úhlem, který tyto vektory svírají s rovinou z=0, tedy  $\arctan\left(\frac{3e+1}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)$  pro  $\mathbf{U}$  a  $\arctan\left(\frac{3e+2}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)$  pro  $\mathbf{V}$ . Menší stoupání je tak ve směru vektoru  $\mathbf{U}$ .

#### Poznámky:

(1) Mohli jsme využít implicitního zadání grafu  $\Phi(x, y, z) = 0$  pro  $\Phi(x, y, z) := f(x, y) - z$ . Pak bychom rovnou dostali normálový vektor jako gradient  $\Phi$ , tj.  $\mathbf{N} = \operatorname{grad} \Phi(A)$ .

(2) Pokud položíme  $\mathbf{u}=(1,2)$  a  $\mathbf{v}=(2,1)$ , pak máme  $\mathbf{U}=\left(\mathbf{u},f'(a)[\mathbf{u}]\right)$  a  $\mathbf{V}=\left(\mathbf{v},f'(a)[\mathbf{v}]\right)$ . Pokud navíc platí  $||\mathbf{u}||=||\mathbf{v}||$  (jako v našem případě), pak pro strmost stoupání ve směru vektorů  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  stačí porovnat pouze jejich poslední složky, tj. hodnoty  $f'(a)[\mathbf{u}]$  a  $f'(a)[\mathbf{v}]$ .

**Příklad 3.5.** Předpokládejme, že výška terénu v  $\mathbb{R}^3$  je popsána grafem funkce  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ,  $f(x,y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 1}$ . V bodě A daném x = 2 a y = 1 upustíme míč. Určete směr (při pohledu shora, tj. v  $\mathbb{R}^2$ ), kterým se bude kutálet.

Dále určete, zda je strmější tečná rovina v bodě A nebo v bodě B daném x=0 a y=1 (tj. porovnejte úhly, které tyto roviny svírají se základnou z=0).

#### Řešení:

Míč se bude kutálet ve směru největšího spádu funkce, tj. proti směru gradientu

$$\operatorname{grad}(f)_{|A} = \left(-\frac{2x}{(x^2 + 2y^2 + 1)^2}, -\frac{4y}{(x^2 + 2y^2 + 1)^2}\right)_{|A} = \left(-\frac{4}{7^2}, -\frac{4}{7^2}\right)$$

tedy ve směru určeném např. vektorem  $\vec{v} = (1, 1)$  (směr je určen vektorem až na kladný násobek).

Normálový vektor tečné roviny grafu funkce ve zvoleném bodě je  $\left(\frac{\partial}{\partial} \frac{f}{x}, \frac{\partial}{\partial} \frac{f}{y}, -1\right)$ . Jde tedy o normálové vektory

$$ec{n}_A = \left(-rac{4}{7^2}, -rac{4}{7^2}, -1
ight)$$

a

$$\vec{n}_B = \left(0, -\frac{4}{3^2}, -1\right)$$

s normami  $\|\vec{n}_A\| = \sqrt{\frac{2^5}{7^4} + 1}$  a  $\|\vec{n}_B\| = \sqrt{\frac{2^4}{3^4} + 1}$ . Normálový vektor roviny z = 0 je  $\vec{e} = (0, 0, 1)$ . Úhly jednotlivých rovin jsou dány jako

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_A \cdot \vec{e}|}{||\vec{n}_A|| \cdot ||\vec{e}||} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2^5}{7^4} + 1}}$$

 $\mathbf{a}$ 

$$\cos(\beta) = \frac{|\vec{n}_B \cdot \vec{e}|}{||\vec{n}_B|| \cdot ||\vec{e}||} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2^4}{3^4} + 1}}$$

Porovnáním dostaneme

$$\cos(\alpha) \stackrel{?}{>} \cos(\beta) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{2^{5}}{7^{4}} + 1}} \stackrel{?}{>} \frac{1}{\sqrt{\frac{2^{4}}{3^{4}} + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2^{4}}{3^{4}} + 1} \stackrel{?}{>} \sqrt{\frac{2^{5}}{7^{4}} + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{4}}{3^{4}} \stackrel{?}{>} \frac{2^{5}}{7^{4}} \Leftrightarrow 7 \cdot 7^{3} \stackrel{?}{>} (2 \cdot 3) \cdot 3^{3} .$$

Poslední vztah platí, proto  $\cos(\alpha) > \cos(\beta)$  a tedy  $\alpha < \beta$  a v bodě B je rovina strmější.

#### Příklad 3.6. Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce

(i) 
$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 \ v \ bodě(1,1,?),$$

(ii) 
$$f(x,y) = xy + \sin(x+y) v \text{ bod} \check{e}(1,-1,?).$$

#### Řešení:

(i) Graf funkce f je  $\{(a,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=f(a)\}$ . Tečná rovina  $T_{(a_0,f_{a_0})}$  ke grafu f v bodě  $(a_0,f_{a_0})=(1,1,3)$  je dána rovnicí

$$z = f(a_0) + \operatorname{grad} f_{|a_0|} \cdot (a - a_0).$$

Máme  $\mathrm{grad} f_{|a_0} = (4x,2y)_{|a_0} = (4,2),$ tedy tečná rovina má rovnici

$$z = 3 + (4,2) \cdot (x-1,y-1) = 3 + 4(x-1) + 2(y-1)$$

neboli

$$4x + 2y - z = 3.$$

(ii) Graf funkce f je množina  $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y) \& (x,y) \in D_f\}$ . Tečná rovina  $T_{(x_0,y_0,z_0)}$ , ke grafu f v bodě  $(x_0,y_0,z_0) = (1,-1,-1)$ , kde  $z_0 = f(x_0,y_0) = -1$  je dána rovnicí

$$z = f(x_0, y_0) + \operatorname{grad} f_{|(x_0, y_0)|} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Máme

$$\operatorname{grad} f_{|(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{|(x_0,y_0)} = \left(y + \cos(x+y), x + \cos(x+y)\right)_{|(1,-1)} = (0,2),$$

tedy tečná rovina má rovnici

$$z = -1 + (0,2) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} = -1 + 2(y+1)$$

neboli

$$2y - z = -1.$$

**Příklad 3.7.** Nalezněte úhel, který v bodě (1,0,0) svírají grafy funkcí

$$f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$$
  $a \ g(x,y) = \sin(xy)$ .

#### Řešení:

Úhel, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory, tj. gradienty. Grafy si zadáme implicitně:

pro f to bude  $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0 \& (x, y) \neq (0, 0)\}, \text{ kde}$ 

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - z$$

a pro g to bude  $\Gamma_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x, y, z) = 0\}$ , kde

$$G(x, y, z) = \sin(xy) - z.$$

Normálové vektory tečných rovin jsou nyní

$$\vec{n}_1 = \operatorname{grad} F_{|(1,0,0)} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, -1\right)_{|(1,0,0)} = (1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } G_{|(1,0,0)} = \left(y\cos(xy), x\cos(xy), -1\right)_{|(1,0,0)} = (0,1,-1)$$

Úhel  $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  je nyní dán jako

$$\cos \alpha = \frac{\left| \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \right|}{\left| |\vec{n}_1| \right| \cdot \left| |\vec{n}_2| \right|} = \frac{1}{2},$$

tedy  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

**Příklad 3.8.** Určete gradienty funkcí  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  a  $g(x,y) = e^{\sin(xy)}$  v bodě (-1,0). Určete úhel, který v bodě (-1,0,1) svírají grafy těchto funkcí.

#### Řešení:

Gradienty jsou

$$\operatorname{grad} f_{|(-1,0)} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \right)_{|(-1,0)} = (-1,0)$$
$$\operatorname{grad} g_{|(-1,0)} = \left(y\cos(xy)e^{\sin(xy)}, x\cos(xy)e^{\sin(xy)}\right)_{|(-1,0)} = (0,-1)$$

Úhel, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory, tj. gradienty funkcí

$$F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z$$

a

$$G(x, y, z) = e^{\sin(xy)} - z.$$

Normálové vektory tečných rovin jsou nyní

$$\vec{n}_1 = \text{grad } F_{|(1,0,0)} = (-1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } G_{|(1,0,0)} = (0,-1,-1)$$

Úhel  $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  je nyní dán jako

$$\cos \alpha = \frac{\left| \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \right|}{\left| |\vec{n}_1| \right| \cdot \left| |\vec{n}_2| \right|} = \frac{1}{2},$$

tedy  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

**Příklad 3.9.** Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ , která

- (i) je rovnoběžná s rovinou 4x + 2y + z = 3,
- (ii) vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách.

#### Řešení:

Když je nějaká množina M zadaná jako vrstevnice nějaké spojitě diferencovatelné funkce (tj. rovností f(x, y, z) = 0), pak tečná rovina k M je kolmá ke gradientu funkce f (pokud je tento gradient nenulový), tj. gradient je její normálový vektor.

V našem případě si vezmeme  $f(x,y,z)=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}-1$ . Takže normálový vektor tečné roviny je

$$f'_{|a_0} = \operatorname{grad}(f)_{|a_0} = \left(\frac{2x}{25}, \frac{y}{8}, \frac{2z}{9}\right)$$

(i) Tečná rovina má být rovnoběžná s rovinou  $\rho:4x+2y+z=3$ , která má normálový vektor  $\vec{n}_{\rho}=(4,2,1)$ . To nastane právě když

$$\left(\frac{2x}{25},\frac{y}{8},\frac{2z}{9}\right)=\operatorname{grad}(f)_{|a_0}=\lambda\cdot\vec{n}_\rho=\lambda\cdot(4,2,1)$$

pro nějaké  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Tedy  $x = 50\lambda$ ,  $y = 16\lambda$  a  $z = \frac{9}{2}\lambda$ .

Současně má také platit, že

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$
.

Po dosazení pak dostaneme  $100\lambda^2 + 16\lambda^2 + \frac{9}{4}\lambda^2 = 1$  tedy  $\lambda = \pm 2/\sqrt{473}$ .

Hledané tečné roviny pak musí mít normáľový vektor  $\vec{n}_{\rho}$ , tedy rovnici 4x+2y+z=c, kde neznámé hodnoty  $c\in\mathbb{R}$  určíme dosazením spočítaných bodů  $(x_0,y_0,z_0)=\pm\frac{1}{\sqrt{473}}\cdot(100,32,9)$ , kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{473}$$

$$4x + 2y + z = -\sqrt{473}$$
.

(ii) Postupujeme podobně. Rovina, vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách, má normálový vektor  $\vec{n}=(1,1,1)$ . Tedy

$$\left(\frac{2x}{25},\frac{2y}{16},\frac{2z}{9}\right)=\operatorname{grad}(f)_{|_{u_0}}=\lambda\cdot\vec{n}=\lambda\cdot(1,1,1)$$

pro nějaké  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dostáváme  $\lambda = \pm 2/\sqrt{25}$  a tečné roviny jsou

$$x + y + z = 5\sqrt{2}$$

a

$$x + y + z = -5\sqrt{2}.$$

**Příklad 3.10.** Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ , která je rovnoběžná s rovinou  $\rho: 4x + 2y + z = 0$ .

#### Řešení:

Použijeme následující větu (důsledek věty o implicitní funkci):

**Věta:** Nechť G je otevřená množina v  $\mathbb{R}^n$ ,  $f:G\to\mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná na G. Nechť bod  $u_0\in G$  je takový, že  $f(u_0)=0$  a  $f'(u_0)\neq 0$ . Pak tečná rovina k nadploše (tzv. varietě)

$$M = \{ u \in G \mid f(u) = 0 \& f'(u_0) \neq 0 \}$$

v bodě  $u_0$  má rovnici

$$f'(u_0)(u - u_0) = 0.$$

V našem případě je  $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$  a  $G=\mathbb{R}^3$ . Protože pro  $u_0=(x,y,z)$  je derivace  $f'(u_0)=\operatorname{grad}(f)_{|u_0}=(2x,4y,2z)$  nulová pouze pro  $u_0=(0,0,0)$  (a  $f(0,0,0)=-1\neq 0$ ) můžeme použít uvedenou větu a normálový vektor tečné roviny v bodě  $u_0\in M$  je právě  $\operatorname{grad}(f)_{|u_0}$ . Tato rovina bude rovnoběžná s  $\rho$ , která má normálový vektor  $\vec{n}_\rho=(4,2,1)$ , právě když  $(2x,4y,2z)=\operatorname{grad}(f)_{|u_0}=\lambda\cdot\vec{n}_\rho=\lambda\cdot(4,2,1)$  pro nějaké  $\lambda\in\mathbb{R}$ , tedy  $(x,y,z)=(2\lambda,\lambda/2,\lambda/2)$ . Současně má také platit, že  $x^2+2y^2+z^2=1$ . Po dosazení pak dostaneme  $(2\lambda)^2+2(\lambda/2)^2+(\lambda/2)^2=1$  tedy  $\lambda=\pm 2/\sqrt{19}$ .

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor  $\vec{n}_{\rho}$ , tedy rovnici 4x + 2y + z = c, kde neznámé hodnoty  $c \in \mathbb{R}$  určíme dosazením spočítaných bodů  $u_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (4, 1, 1)$ , kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{19}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{19}.$$

#### Příklad 3.11. Najděte úhel sevřený dvěma plochami

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = 8$$
  $a (x-1)^{2} + (y-2)^{2} + (z-3)^{2} = 6$ 

 $v \ bod\check{e} \ a_0 = (2, 0, 2).$ 

#### Řešení:

Úhel sevřený dvěma rovinami je roven úhlu, který svírají přímky určené normálovými vektory těchto rovin. Podle předchozího je tedy

$$\vec{n}_1 = (2x, 2y, 2z)_{|a_0|} = (4, 0, 4)$$

a

$$\vec{n}_2 = (2(x-1), 2(y-2), 2(z-3))_{|_{a_0}} = (2, -4, -2).$$

Pro hledaný úhel  $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  pak je

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = 0$$

takže  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Příklad 3.12. Vyšetřete existenci derivace (totálního diferenciálu) v bodě (0,0) u funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} &, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 &, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

#### Řešení:

Podle definice je derivace f v bodě  $a_0=(0,0)$  takové lineární zobrazení  $f'_{|a_0}=L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},$  že

$$\lim_{a \to a_0} \frac{f(a) - f(a_0) - L(a - a_0)}{\|a - a_0\|} = 0.$$

Pokud derivace existuje, pak je jednoznačně určena parciálními derivacemi v daném bodě:

$$\frac{\partial f}{\partial x|_{(0,0)}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_{\parallel(0,0)}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$

Pro a = (x, y) tak je

$$L(a-a_0) = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = x.$$

Takže

$$\lim_{a \to a_0} \frac{f(a) - f(a_0) - L(a - a_0)}{\|a - a_0\|} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2 + y^2} - 0 - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{-xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Pokud si teď vezmeme zúžení výsledného výrazu např. pro x=y dostaneme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=y\\x=x}}\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\lim_{x\to0}\frac{-x^3}{(2x^2)^{3/2}}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{\sqrt{8}\cdot|x|}\ .$$

Tato limita ale neexistuje a tím spíš původní limita neexistuje (a už vůbec není nulová, jak bychom potřebovali). Derivace (totální diferenciál) v bodě (0,0) tedy neexistuje.

**Příklad 3.13.** Najděte derivaci složené funkce  $f \circ g$ , kde

(i) 
$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
,  $g(s,t) = \begin{pmatrix} st \\ s\cos t \\ s\sin t \end{pmatrix}$   $a f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ,  $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,

(ii) 
$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
,  $g(s,t) = \begin{pmatrix} st \\ e^{st} \\ t^2 \end{pmatrix}$   $a f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ,  $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ .

#### Řešení:

(i) Můžeme buď vyjádřit funkci  $h(s,t)=(f\circ g)(s,t)=(st)^2+(s\sin t)^2+(s\cos t)^2=s^2t^2+s^2$  a tu zderivovat

$$h'(s,t) = \left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right) = (2st^2 + 2s, 2s^2t)$$

nebo použít větu o derivaci složené funkce:

$$h'(s,t) = (f \circ g)'(s,t) = f'(g(s,t)) \circ g'(s,t) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right)_{|g(s,t)} \cdot \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial t} \\ \frac{\partial g_3}{\partial s} & \frac{\partial g_3}{\partial t} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 2x, & 2y, & 2z \end{array}\right)_{|g(s,t)|} \cdot \left(\begin{array}{cc} t & s \\ \cos t & -s \sin t \\ \sin t & s \cos t \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc} 2st, & 2s \cos t, & 2s \sin t \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} t & s \\ \cos t & -s \sin t \\ \sin t & s \cos t \end{array}\right) = (2st^2 + 2s, 2s^2t)$$

kde  $g_i(s,t)$  jsou jednotlivé složky zobrazení g. Přitom je třeba při derivování f mít stejně (zvolené) pořadí proměnných jako je pak pořadí jednotlivých složek  $g_i$  v matici derivace zobrazení g (tedy např. pokud bychom derivovali v pořadí podle y, z, x pak pořadí složek v matici derivace g bude odshora postupně  $g_2$ ,  $g_3$  a  $g_1$ .) Změna pořadí jen odpovídá tomu, že si matici derivace zvolíme v jiné bázi.

(ii) Postupujeme podobně:  $h(s,t) = (f \circ g)(s,t) = ste^{st} + t^2e^{st} + st^3$ 

$$h'(s,t) = \left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right) = \left((t+st^2+t^3)e^{st} + t^3, (s+s^2t+2t+st^2)e^{st} + 3st^2\right)$$

nebo

$$h'(s,t) = f'(g(s,t)) \circ g'(s,t) = \begin{pmatrix} y+z, & z+x, & x+y \end{pmatrix}_{|g(s,t)} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ te^{st} & se^{st} \\ 0 & 2t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{st} + t^2, & st+t^2, & e^{st} + st \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & s \\ te^{st} & se^{st} \\ 0 & 2t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (t+st^2+t^3)e^{st} + t^3, (s+s^2t+2t+st^2)e^{st} + 3st^2 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 3.14.** Najděte derivaci složeného zobrazení  $f \circ g$ , kde

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$
$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin(\alpha\beta) \end{pmatrix}.$$

#### Řešení:

Označme si jednotlivé složky zobrazení f jako  $f_1(x,y) = xy$  a  $f_2(x,y) = x^2 + y^2$ . Pro matici derivace zobrazení f pak máme

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

tedy v jednotlivých řádcích jsou zapsány gradienty jednotlivých složek.

Podobně pro  $g_1(\alpha, \beta) = \cos \alpha$  a  $g_2(\alpha, \beta) = -\sin(\alpha\beta)$  bude

$$g' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_2}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & 0 \\ -\beta \cos(\alpha \beta) & -\alpha \cos(\alpha \beta) \end{pmatrix}.$$

Takže derivace  $f \circ g$  bude

$$(f \circ g)' = f'_{|g} \circ g' = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}_{ \begin{array}{c} x = \cos \alpha \\ y = -\sin(\alpha\beta) \end{array}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha & 0 \\ -\beta \cos(\alpha\beta) & -\alpha \cos(\alpha\beta) \end{array} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin(\alpha\beta) & \cos\alpha \\ 2\cos\alpha & -2\sin(\alpha\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ -\beta\cos(\alpha\beta) & -\alpha\cos(\alpha\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\alpha\beta)\sin\alpha - \beta\cos(\alpha\beta)\cos\alpha & -\alpha\cos(\alpha\beta)\cos\alpha \\ -2\cos\alpha\sin\alpha + 2\beta\sin(\alpha\beta)\cos(\alpha\beta) & 2\alpha\sin(\alpha\beta)\cos(\alpha\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\alpha\beta)\sin\alpha - \beta\cos(\alpha\beta)\cos\alpha & -\alpha\cos(\alpha\beta)\cos\alpha \\ -\sin(2\alpha) + \beta\sin(2\alpha\beta) & \alpha\sin(2\alpha\beta) \end{pmatrix}.$$

Složky se dají také vypočítat řetízkovým pravidlem bez sestavování matic. Složky zobrazení  $f \circ g$  budou  $(f \circ g)_i = f_i(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$ , kde proměnné x a y jsou závislé na  $\alpha$  a  $\beta$  jako  $x(\alpha, \beta) = g_1(\alpha, \beta)$  a  $y(\alpha, \beta) = g_2(\alpha, \beta)$ . Matice derivace složeného zobrazení bude mít tvar

$$(f \circ g)' = \begin{pmatrix} \frac{\partial (f \circ g)_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial (f \circ g)_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial (f \circ g)_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial (f \circ g)_2}{\partial \beta} \end{pmatrix}$$

a podle řetízkového pravidla budeme mít např.

$$\frac{\partial (f \circ g)_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial f_2 (\cos \alpha, -\sin(\alpha \beta))}{\partial \alpha} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \cos \alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial (-\sin(\alpha \beta))}{\partial \alpha} =$$

$$= 2x \cdot (-\sin \alpha) + 2y \cdot (-\beta \cos(\alpha \beta)) = -2\cos \alpha \cdot \sin \alpha + 2\beta \sin(\alpha \beta) \cdot \cos(\alpha \beta) .$$

**Příklad 3.15.** Najděte derivaci funkce z = f(x, y), která splňuje rovnici  $z^3 - 3xyz = 2$  pro všechna (x, y) z vhodného definičního oboru funkce. Postupujte nejdříve obecně a pak v bodě (x, y, z) = (1, 1, 2).

#### Řešení:

Funkci z sice neumíme nějak jednoduše explicitně vyjádřit, ale i tak můžeme zjistit její parciální derivace. Na obě strany rovnosti použijeme  $\frac{\partial}{\partial x}$  a  $\frac{\partial}{\partial y}$ , přičemž využijeme řetízkové pravidlo (z je závislé na proměnných x a y):

$$0 = \frac{\partial 2}{\partial x} = \frac{\partial (z^3 - 3xyz)}{\partial x} = 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy \frac{\partial z}{\partial x}$$
$$0 = \frac{\partial 2}{\partial y} = \frac{\partial (z^3 - 3xyz)}{\partial y} = 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - 3xz - 3xy \frac{\partial z}{\partial y}$$

a odsud si parciální derivace vyjádříme:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}$$

To samozřejmě děláme za předpokladu, že  $3z^2 - 3xy \neq 0$ . Tento výraz je právě parciální derivaci podle  $\tilde{x}$  funkce  $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ,  $\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{z}^3 - 3\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} - 2$  tří NEZÁVISLÝCH proměnných, která určuje původní rovnici jako  $\Phi(x, y, z(x, y)) = 0$  (tzv. implicitně určená funkce). Tedy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}} = 3\tilde{z}^2 - 3\tilde{x}\tilde{y} \ .$$

V bodě z(1,1)=2, který splňuje implicitní rovnici a ve kterém je výraz  $3z^2-3xy\neq 0$ , pak dostáváme

$$\begin{split} \frac{\partial z}{\partial x}_{|(1,1)} &= \frac{1\cdot 2}{2^2-1\cdot 1} = \frac{2}{3} \\ \frac{\partial z}{\partial y}_{|(1,1)} &= \frac{1\cdot 2}{2^2-1\cdot 1} = \frac{2}{3} \;. \end{split}$$

**Příklad 3.16.** Najděte derivaci zobrazení 
$$\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} f(x+y,z) \\ f\left(\frac{y}{y},\frac{y}{z}\right) \end{pmatrix}$$
, kde  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  je spojitě

#### Řešení:

Složky zobrazení  $\Phi$ označme  $\Phi_1$  a  $\Phi_2.$  Potřebujeme sestavit matici

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

K výpočtu jednotlivých složek použijeme řetízkové pravidlo. K tomu si potřebujeme nějak označit proměnné funkce f, např. jako f(u, v). Pak můžeme psát

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial f(x+y,z)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) \cdot \frac{\partial (x+y)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z) \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z)$$

a podobně

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial f(x+y,z)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z) \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial f(x+y,z)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x+y,z) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z) \cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z)$$

a pro druhou složku budeme mít

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot \frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot 0 = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = \frac{\partial f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$$

Celkem tedy máme

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) & \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,z) & \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,z) \\ \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) & -\frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) + \frac{1}{z} \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) & -\frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \end{pmatrix}.$$

## 4 Taylorův polynom, lokální extrémy

**Příklad 4.1.** Ortogonální transformací převeďte homogenní kvadratický polynom (tedy kvadratickou formu)  $g(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$  na diagonální tvar.

#### Řešení:

(i) Matice  $(g)_{\mathcal{B}}$  kvadratické formy g v dané bázi  $\mathcal{B}$  je jednoznačně určena vztahem

$$g(u) = (u)_{\mathcal{B}}^T \cdot (g)_{\mathcal{B}} \cdot (u)_{\mathcal{B}}$$

pro všechna  $u \in V$ , kde  $(u)_{\mathcal{B}}$  je souřadnicový zápis vektoru u v bázi  $\mathcal{B}.$ 

Ve standardní bázi  $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$  (tj.  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ) pro  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  tedy máme

$$(u)_{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)$$
 a

$$g(u) = (x, y) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

takže  $\mathbb{A}=(g)_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&5\end{pmatrix}$ . Novou ortonormální bázi, ve které bude mít g diagonální tvar, najdeme jako vlastní (normované) vektory matice  $\mathbb{A}$ . Tedy potřebujeme spočítat kořeny polynomu  $p(\lambda)=\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E})=\begin{vmatrix}5-\lambda&-3\\-3&5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)^2-9$ . Tedy  $\lambda_1=2$  a  $\lambda_2=8$ . Po dosazení pak pro  $\lambda_1=2$  je vlastní (normovaný) vektor např.  $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$  a pro  $\lambda_2=8$  je vlastní (normovaný) vektor např.  $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$  a hledaná ortonormální báze je  $\mathcal{B}=(u_1,u_2)$ . Matice přechodu  $\mathbb{M}=\mathcal{E}(id)_{\mathcal{B}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1&-1\end{pmatrix}$  mezi bázemi  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{E}$  je pak ortogonální, tedy  $\mathbb{M}\mathbb{M}^T=\mathbb{E}=\mathbb{M}^T\mathbb{M}$  a  $\mathbb{M}^{-1}=\mathbb{M}^T$ . V nové bázi  $\mathcal{B}$  má matice formy g diagonální tvar  $(g)_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}$ . To můžeme ověřit např. i takto: pro přechod mezi souřadnicemi vektoru u v různých bázích máme vztah  $(u)_{\mathcal{E}}=\mathcal{E}(id)_{\mathcal{B}}\cdot(u)_{\mathcal{B}}=\mathbb{M}\cdot(u)_{\mathcal{B}}$  a ten dosadíme do vyjádření formy

$$g(u) = (u)_{\mathcal{E}}^{T}(g)_{\mathcal{E}}(u)_{\mathcal{E}} = \left(\mathbb{M} \cdot (u)_{\mathcal{B}}\right)^{T}(g)_{\mathcal{E}}\left(\mathbb{M} \cdot (u)_{\mathcal{B}}\right) = (u)_{\mathcal{B}}^{T}\left(\mathbb{M}^{T}(g)_{\mathcal{E}}\mathbb{M}\right)(u)_{\mathcal{B}}$$

tedy v bázi  $\mathcal{B}$  má forma matici

$$(g)_{\mathcal{B}} = \mathbb{M}^T(g)_{\mathcal{E}}\mathbb{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(ii) Pokud by nás zajímalo nalezení jakékoliv báze (ne nutně ortogonální), ve které bude mít forma diagonální matici (tzv. polární báze) můžeme postupovat doplňováním na čtverec (tj. použijeme vzorec  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ):

$$g(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 5\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{5}y + \left(\frac{3}{5}y\right)^2\right) - 5\left(\frac{3}{5}y\right)^2 + 5y^2 = 5\left(x - \frac{3}{5}y\right)^2 + \frac{16}{5}y^2$$

V nových souřadnicích  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  odpovídajících nové bázi  $\mathcal{B}'$  má tedy forma tvar

$$g(x', y') = 5(x')^2 + \frac{16}{5}(y')^2$$

a proto je pozitivně definitní. Příslušná matice přechodu  $_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  pak ale není ortogonální - matice se odvodí ze vztahu

$$_{\mathcal{B}'}(id)_{\mathcal{E}} \cdot (u)_{\mathcal{E}} = (u)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (u)_{\mathcal{E}}$$

pro všechna  $u \in \mathbb{R}^2$ .

(iii) K pouhé definitnosti pak také stačí ověřit podmínky Sylvestrova kritéria, tj. znaménka hlavních subdeterminantů matice  $\mathbb{A} = (g)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{split} &\Delta_1 = 5 > 0 \\ &\Delta_2 = 5 \cdot 5 - (-3) \cdot (-3) = 16 > 0 \\ &\text{Tedy forma } g \text{ je pozitivně definitní.} \end{split}$$

**Příklad 4.2.** Najděte Taylorův polynom druhého řádu pro funkci f v okolí bodu  $a_0$ :

(i) 
$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$
,  $a_0 = (1, 2, 1)$ ,

(ii) 
$$f(x, y, z) = xe^y \cos z$$
,  $a_0 = (0, 0, 0)$ .

#### Řešení:

(i) Taylorův polynom řádu (nejvýše) 2, který aproximuje funkci f v bodě  $a_0$ , je dán vztahem:

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)\vec{h} + \frac{1}{2!}f''(a_0)(\vec{h}, \vec{h})$$

kde  $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$ . Máme

$$f'(a_0) = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2)_{|a_0|} = (4, 4, 12)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{pmatrix}_{|a_0|} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 12 \\ 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = 4 + (4, 4, 12) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2, h_3) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 12 \\ 12 & 12 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 4 + 4h_1 + 4h_2 + 12h_3 + 4h_1h_2 + 12h_1h_3 + h_2^2 + 12h_2h_3 + 12h_3^2.$$

Polynom lze v tomto případě také získat přímo dosazením do původní funkce, kde si v rozvoji vezmeme pouze členy do stupně nejvýše 2:

$$f(1+h_1,2+h_2,1+h_3) = (1+h_1)(2+h_2)^2(1+h_3)^3 = (1+h_1)(4+4h_2+h_2^2)(1+3h_3+3h_3^2+h_3^3) =$$

$$= 4+4h_1+4h_2+12h_3+4h_1h_2+12h_1h_3+h_2^2+12h_2h_3+12h_3^2+\text{vyšš\'i členy}.$$

(ii) Podobně dostaneme:

$$f'(a_0) = (e^y \cos z, xe^y \cos z, -xe^y \sin z)_{|a_0|} = (1, 0, 0)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ e^y \cos z & x e^y \cos z & -x e^y \sin z \\ -e^y \sin z & -x e^y \sin z & -x e^y \cos \end{pmatrix}_{a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = h_1 + h_1 h_2.$$

Polynom lze i v tomto případě také získat rozvojem jednotlivých funkcí jedné proměnné v daných bodech:

$$e^{h_2} = 1 + h_2 + \varphi(h_2)$$
  
 $\cos h_3 = 1 + \psi(h_3)$ 

kde  $\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$  a  $\lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{t} = 0$ .

$$f(0+h_1, 0+h_2, 0+h_3) = h_1 e^{h_2} \cos h_3 = h_1 \Big( 1 + h_2 + \varphi(h_2) \Big) \Big( 1 + \psi(h_3) \Big) =$$
$$= h_1 + h_1 h_2 + \Omega(\vec{h})$$

kde  $\Omega(\vec{h}) = h_1 \varphi(h_2) + (h_1 + h_1 h_2 + h_1 \varphi(h_2)) \psi(h_3).$ 

Ukážeme, že platí  $\lim_{\vec{h}\to 0}\frac{\Omega(\vec{h})}{||\vec{h}||^2}=0$  a tedy jsme skutečně tímto způsobem našli hledaný Taylorův polynom:

$$\begin{split} \frac{|\Omega(\vec{h})|}{||\vec{h}||^2} &\leq \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|} \frac{|h_1h_2|}{||\vec{h}||^2} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} \frac{|h_1h_3|}{||\vec{h}||^2} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} \frac{|h_1h_2h_3|}{||\vec{h}||^2} + \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|} \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} \frac{|h_1h_2h_3|}{||\vec{h}||^2} \leq \\ &\leq \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} + \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} ||\vec{h}|| + \frac{|\varphi(h_2)|}{|h_2|} \frac{|\psi(h_3)|}{|h_3|} ||\vec{h}|| \to 0 \end{split}$$

pro  $\vec{h} \to 0$ , protože  $|h_i| \le ||\vec{h}||$  pro všechna i = 1, 2, 3. Uvedené odhady platí i když je náhodou  $h_i = 0$  pro nějaké i = 1, 2, 3.

**Příklad 4.3.** Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 

$$f(x,y) = e^{x^2 + y^2} - \cos(x - y)$$

 $v \ bodě \ a = (0,0) \ a \ podle \ tohoto \ polynomu \ rozhodněte, zda \ má funkce \ v \ tomto \ bodě \ minimum, \ maximum$ nebo sedlový bod.

Řešení:

$$f'_{|(0,0)} = \left(2xe^{x^2+y^2} + \sin(x-y), 2ye^{x^2+y^2} - \sin(x-y)\right)_{|(0,0)} = (0,0)$$

$$f''_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2} + \cos(x-y) & 4xye^{x^2+y^2} - \cos(x-y) \\ 4xye^{x^2+y^2} - \cos(x-y) & 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2} + \cos(x-y) \end{pmatrix}_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pro  $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$  máme

$$T_2(\vec{h}) = f(0,0) + f'_{|(0,0)}\vec{h} + \frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\vec{h},\vec{h}) = \frac{1}{2}(h_1,h_2) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2.$$

Podle Sylvestrova kritéria ( $\Delta_1=3>0,\,\Delta_2=8>0$ ) je matice  $f_{(0,0)}''$  pozitivně definitní, takže v bodě a = (0,0) je lokální minimum.

Jiné řešení: Polynom lze také získat Taylorovými polynomy funkcí jedné proměnné:

$$e^t = 1 + t + \varphi(t) \cdot |t|$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \psi(t) \cdot |t|^2$$

kde  $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0$  a  $\lim_{t\to 0} \psi(t) = 0$ .

$$f(h_1, h_2) = e^{h_1^2 + h_2^2} - \cos(h_1 - h_2) = 1 + h_1^2 + h_2^2 + \varphi(h_1^2 + h_2^2) - \left(1 - \frac{(h_1 - h_2)^2}{2} + \psi(h_1 - h_2)\right) =$$

$$= \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2 + \Omega(\vec{h}),$$

kde  $\Omega(\vec{h}) = \varphi(h_1^2 + h_2^2) \cdot |h_1^2 + h_2^2| - \psi(h_1 - h_2) \cdot |h_1 - h_2|^2$ . Výraz  $T(h_1, h_2) = \frac{3}{2}h_1^2 - h_1h_2 + \frac{3}{2}h_2^2$  je hledaným Taylorovým polynomem stupně nejvýše 2, protože  $\lim_{\vec{h}\to 0} \frac{\Omega(\vec{h})}{||\vec{h}||^2} = 0$ :

$$\frac{|\Omega(\vec{h})|}{||\vec{h}||^2} \le |\varphi(||\vec{h}||^2)| + |\psi(h_1 - h_2)| \cdot \frac{|h_1 - h_2|^2}{||\vec{h}||^2} \le |\varphi(||\vec{h}||^2)| + 4|\psi(h_1 - h_2)| \to 0$$

pro  $\vec{h} \to 0$ , protože  $|h_1 - h_2|^2 \le (|h_1| + |h_2|)^2 \le (2||\vec{h}||)^2$ .

**Příklad 4.4.** Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 

$$f(x,y) = e^{2xy} - y^2$$

v bodě a = (0,0) a podle tohoto polynomu rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Řešení:

$$\begin{split} f'_{|(0,0)} &= \left(2ye^{2xy}, 2xe^{2xy} - 2y\right)_{|(0,0)} = (0,0) \\ f''_{(0,0)} &= \left(\begin{array}{cc} 4y^2e^{2xy} & 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} \\ 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} & 4x^2e^{2xy} - 2 \end{array}\right)_{|(0,0)} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{array}\right) \end{split}$$

Pro  $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$  máme

$$T_2(\vec{h}) = f(0,0) + f'_{|(0,0)}\vec{h} + \frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\vec{h},\vec{h}) = 1 + \frac{1}{2}(h_1,h_2)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 1 + 2h_1h_2 - h_2^2.$$

Kvadratická forma

$$g(h_1, h_2) = 2h_1h_2 - h_2^2 = h_2(2h_1 - h_2)$$

druhé derivace je indefinitní (např. g(1,1) = 1 > 0 a g(0,1) = -1 < 0). V bodě a = (0,0) je tedy sedlový bod funkce f.

Jiné řešení: Polynom lze také získat Taylorovým polynomem funkce jedné proměnné:

$$e^t = 1 + t + \varphi(t) \cdot |t|$$

kde  $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0$ .

$$f(h_1, h_2) = e^{2h_1h_2} - h_2^2 = 1 + 2h_1h_2 + \varphi(2h_1h_2) \cdot |2h_1h_2| - h_2^2 =$$
$$= 1 + 2h_1h_2 - h_2^2 + \Omega(\vec{h}),$$

kde  $\Omega(\vec{h}) = \varphi(2h_1h_2) \cdot |2h_1h_2|.$ 

Výraz  $T(h_1, h_2) = 1 + 2h_1h_2 - h_2^2$  je hledaným Taylorovým polynomem stupně nejvýše 2, protože  $\lim_{\vec{k} \to 0} \frac{\Omega(\vec{h})}{||\vec{h}||^2} = 0$ :

$$\frac{|\Omega(\vec{h})|}{||\vec{h}||^2} \leq \left|\varphi(2h_1h_2)\right| \cdot \frac{|2h_1h_2|}{||\vec{h}||^2} \leq 4 \cdot \left|\varphi(2h_1h_2)\right| \to 0$$

pro  $\vec{h} \to 0$ , protože  $|h_i| \le ||\vec{h}||$  pro i = 1, 2.

**Příklad 4.5.** Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 

$$f(x,y) = e^{xy} - 2xy$$

v bodě a=(0,0) a podle tohoto polynomu rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

#### Řešení:

Funkce je symetrická vzhledem k záměně proměnných, což usnadňuje výpočet.

$$f'_{|(0,0)} = \left(ye^{xy} - 2y, xe^{xy} - 2x\right)_{|(0,0)} = (0,0)$$

$$f''_{(0,0)} = \left(\begin{array}{cc} y^2e^{xy} & e^{xy} + xye^{xy} - 2\\ e^{xy} + xye^{xy} - 2 & x^2e^{xy} \end{array}\right)_{|(0,0)} = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1\\ -1 & 0 \end{array}\right)$$

Pro  $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$  máme

$$T_2(\vec{h}) = f(0,0) + f'_{|(0,0)}\vec{h} + \frac{1}{2!}f''_{|(0,0)}(\vec{h},\vec{h}) = 1 + \frac{1}{2}(h_1,h_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 1 - h_1h_2.$$

Kvadratická forma

$$Q(\vec{h}) := f''_{|(0,0)}(\vec{h}, \vec{h}) = -2h_1h_2$$

druhé derivace je indefinitní (např. Q(1,1) = -1 > 0 a Q(-1,1) = 1 < 0). V bodě a = (0,0) je tedy SEDLO.

Příklad 4.6. Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(i) 
$$f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$$

(ii) 
$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$$

(iii) 
$$f(x,y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2$$
.

#### Řešení:

(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'_{|(x,y)} = (3x^2 - 2y, -3y^2 - 2x)$$

Tedy  $f'_{|(x,y)}=0$  právě když  $3x^2=2y$  a  $-3y^2=2x$ , což je právě když (x,y)=(0,0) nebo  $(x,y)=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ . V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

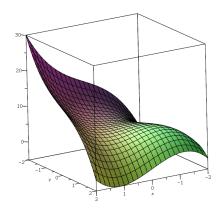
$$f_{\mid (x,y)}^{"} = \left(\begin{array}{cc} 6x & -2\\ -2 & -6y \end{array}\right)$$

Pro (x,y)=(0,0) je  $f_{|(0,0)}''=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ . Tedy pro  $\vec{h}=(h_1,h_2)^T\in\mathbb{R}^2$  je  $f_{|(0,0)}''(\vec{h},\vec{h})=0$ 

 $-4h_1h_2$  a tato forma nabývá libovolných hodnoť (je indefinitní). V bodě (0,0) je tedy sedlo.

Pro 
$$(x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$
 je  $f''_{|(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})|} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ . Podle Sylvestrova kritéria  $(\Delta_1 = -4 < 0, -4)$ 

 $\Delta_2 = 16 - 4 = 12 > 0$ ) je forma negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) maximum. Toto maximum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení  $f(x,0) = x^3 + 6$ ).



(ii) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu:

$$f'_{|(x,y)} = (4x + 3y - 5, 3x + 8y + 2)$$

Tedy  $f'_{|(x,y)} = 0$  právě když (x,y) = (2,-1). Druhá derivace

$$f_{\mid (x,y)}^{\prime\prime} = \left(\begin{array}{cc} 4 & 3\\ 3 & 8 \end{array}\right)$$

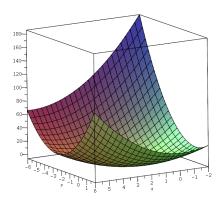
je podle Sylvestrova kritéria pozitivně definitní, tedy v(2,-1) je (ostré) lokální minimum f(2,-1) = -6. Toto minimum je ve skutečnosti i globální, což plyne buď z klasifikace všech možných grafů polynomů stupně nejvýše dva o dvou proměnných (jde o speciální případ tzv. kvadrik) a nebo si pomůžeme opět doplněním na čtverec:

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y =$$

$$= 2\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4}y + 2 \cdot x \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 2 \cdot \frac{3}{4}y \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}y\right)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2\right) + \frac{15}{4}y - \frac{9}{8}y^2 - \frac{25}{8} + 4y^2 + 2y =$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}y^2 + \frac{23}{4}y - \frac{25}{8} = 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}(y+1)^2 - 6$$

Tedy skutečně  $f(x,y) \ge -6$  a rovnost nastává pro  $x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4} = 0$  a y + 1 = 0 neboli (x,y) = (2,-1).



#### Poznámka:

Obecně můžeme použít i následující přístup: Každý polynom f v proměnných  $x_1, \ldots, x_n$  stupně nejvýše dva můžeme pro  $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$  vyjádřit jako

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$$

pro vhodnou symetrickou matici A, vektor  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$  a  $c \in \mathbb{R}$ .

Předpokládejme nyní, že  $f'_{|\vec{x}_0|} = 0$  pro nějaké  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Pro derivace obecně máme:

$$f'_{|\vec{x}}(\vec{h}) = \vec{h}^T \mathbb{A} \vec{x} + \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{h} + 2 \vec{b}^T \vec{h} = 2 (\vec{x}^T \mathbb{A} + \vec{b}^T) \vec{h}$$

$$f_{|\vec{x}|}^{"}(\vec{h}, \vec{k}) = 2\vec{h}^T \mathbb{A} \vec{k}$$

Tedy  $f'_{|\vec{x}_0} = 0$  právě když  $\vec{x}_0^T \mathbb{A} + \vec{b}^T = 0^T$ , tj.  $\mathbb{A}\vec{x}_0 = -\vec{b}$ . Posunutím souřadnic pak dostaneme tvar:

$$f(\vec{y} + \vec{x}_0) = (\vec{y} + \vec{x}_0)^T \mathbb{A}(\vec{y} + \vec{x}_0) + 2\vec{b}^T (\vec{y} + \vec{x}_0) + c =$$

$$= \vec{y}^T \mathbb{A} \vec{y} + 2\vec{y}^T \mathbb{A} \vec{x}_0 + \vec{x}_0^T \mathbb{A} \vec{x}_0 + 2\vec{b}^T \vec{y} + 2\vec{b}^T \vec{x}_0 + c =$$

$$= \vec{y}^T \mathbb{A} \vec{y} - 2\vec{y}^T \vec{b} - \vec{x}_0^T \vec{b} + 2\vec{b}^T \vec{y} + 2\vec{b}^T \vec{x}_0 + c =$$

$$= \vec{y}^T \mathbb{A} \vec{y} - \vec{x}_0^T \mathbb{A} \vec{x}_0 + c.$$

Protože matice druhé derivace je  $f''_{|\vec{x}|} = 2\mathbb{A}$ , tak pokud je tato forma pozitivně definitní, pak  $\vec{y}^T \mathbb{A} \vec{y} \geq 0$ , tedy

$$f(\vec{y} + \vec{x}_0) = \vec{y}^T A \vec{y} - \vec{x}_0^T A \vec{x}_0 + c \ge -\vec{x}_0^T A \vec{x}_0 + c$$

a rovnost nastává právě pro  $\vec{y}=0$ . Tedy v bodě  $\vec{x}=\vec{x}_0$  je ostré globální minimum a  $f(\vec{x}_0)=-\vec{x}_0^T\mathbb{A}\vec{x}_0+c$ .

V našem případě máme:

$$f(x,y) = (x,y) \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\left(-\frac{5}{2},1\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

takže 
$$\vec{x}_0 = -\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{23} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
 jak už víme.

(iii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'_{|(x,y)} = (6y - 3x^2, 6x - 6y^2)$$

Tedy  $f'_{|(x,y)}=0$  právě když  $2y=x^2$  a  $x=y^2$ . Tedy  $2y=y^4$  a řešení jsou tak (x,y)=(0,0) nebo  $(x,y)=(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$ . V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f_{\mid (x,y)}^{"} = \left( \begin{array}{cc} -6x & 6\\ 6 & -12y \end{array} \right)$$

Pro 
$$(x,y) = (0,0)$$
 je  $f''_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ . Tedy pro  $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$  je

$$f_{|(0,0)}^{"}(\vec{h},\vec{h}) = 12 \cdot h_1 h_2$$

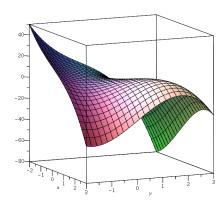
a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě (0,0) je tedy SEDLO.

Pro 
$$(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$$
 je

$$f_{|(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})}'' = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6\\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ( $\Delta_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0$ ,  $\Delta_2 = 72\sqrt[3]{8} - 36 = 72 \cdot 2 - 36 > 0$ ) je forma daná druhou derivaci negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení  $f(x,0) = -x^3 + 2$ .



## 5 Vázané a absolutní extrémy

Příklad 5.1. Najděte nejmenší a největší hodnoty

- (i) funkce f(x,y) = x y + 3 za podmínky  $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$ ,
- (ii) funkce f(x,y) = 2x y + 1 za podmínky  $x^2 + 2x + y^2 = 0$ ,
- (iii) funkce f(x,y) = 6 4x 3y za podmínky  $x^2 + y^2 = 4y 2x$ ,
- (iv) funkce f(x,y,z)=x-y+3z s vazebnou podmínkou  $x^2+y^2+4z^2=4$ .

Načrtněte útvary určené těmito vazbami.

#### Řešení:

(i) V našem případě můžeme položit  $U=\mathbb{R}^2$  a  $\Phi(x,y)=3x^2+5xy+3y^2-1$ . Protože

$$\Phi'_{|(x,y)} = (6x + 5y, 5x + 6y)$$

tak  $\Phi'_{|(x,y)}$  není regulární (tj. v tomto případě  $\Phi'_{|(x,y)}=0$ ) právě když (x,y)=(0,0). Nemůže se tedy stát, aby  $\Phi(x,y)=0$  a  $\Phi'_{|(x,y)}=0$ . Takže v každém bodě množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1\}$$

je  $\Phi'_{|(x,y)}$  regulární. Pro bod  $a=(x,y)\in M$  lokálního extrému f na M teď existuje  $\lambda\in\mathbb{R}$ , že

$$(1,-1) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda \left(6x + 5y, 5x + 6y\right)$$

 $\mathbf{a}$ 

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme x = -y a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:

$$(1,-1), (-1,1)$$

s hodnotami

$$f(1,-1) = 5, \quad f(-1,1) = 1.$$

Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že  $M = \Phi^{-1}(\{0\})$ , neboli že je to vzor uzavřené množiny  $\{0\}$  při spojitém zobrazení  $\Phi$ ). Doplněním na čtverec

$$1 = 3x^{2} + 5xy + 3y^{2} = 3\left(x + \frac{5}{6}y\right)^{2} + \frac{11}{12}y^{2}$$

zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma  $Q(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2$  je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima a minima v bodech (1,-1) a (-1,1).

(ii) Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro kružnici  $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid g(x,y)=0\}$ , kde  $g(x,y)=x^2+2x+y^2=(x+1)^2+y^2-1$ . Pro extrém a=(x,y) na M existuje  $\lambda\in\mathbb{R}$ , že

$$(2,-1) = f'_{|a} = \lambda g'_{|a} = \lambda \cdot (2(x+1), 2y)$$

a

$$(x+1)^2 + y^2 = 1.$$

Vyjádříme x a y pomocí  $\lambda$  a dosadíme do vazby. Dostaneme  $\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$  a kandidáty na extrémy:

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right), \quad \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

s hodnotami

$$f\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \sqrt{5} - 1, \quad f\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} - 1, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\sqrt{5} - 1.$$

Množina M je uzavřená a omezená a spojitá funkce f tak v těchto kandidátech skutečně nabývá svého maxima a minima.

(iii) Útvar je kružnice  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ . Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém a = (x, y) na kružnici existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$ , že

$$(-4, -3) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda \cdot (2(x+1), 2(y-2))$$

a

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Vyjádříme  $x+1=-\frac{2}{\lambda}$  a  $y-2=-\frac{3}{2\lambda}$  a dosadíme do zbývající rovnice. Dostaneme  $\lambda=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$  a kandidáty na extrémy:

$$\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}-1, -\frac{3\sqrt{5}}{5}+2\right), \quad \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}-1, \frac{3\sqrt{5}}{5}+2\right)$$

s odpovídajícími hodnotami po řadě

$$5\sqrt{5} + 4$$
,  $-5\sqrt{5} + 4$ .

Kružnice je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak v těchto bodech nabývá po řadě svého maxima a minima.

(iv) Použijeme věty:

 ${f Věta}$ : Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. kompaktní) množině nabývá svého maxima i minima

**Věta**: Nechť  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina  $k \leq n$  a  $f: U \to \mathbb{R}$  a  $\Phi: U \to \mathbb{R}^k$  jsou spojitě diferencovatelná zobrazení na U. Položme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0 \ \& \ \Phi'_{|a} \text{ je regulární}\}.$$

Jestliže  $a_0 \in M$  je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M, pak existují  $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  (tzv. Langrangeovy multiplikátory), že

$$f'(a_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i'(a_0),$$

kde  $g_i$  jsou jednotlivé složky zobrazení  $\Phi$ , tj.  $\Phi(a) = (g_1(a), \dots, g_k(a))$ .

(Regularita derivace znamená, že její matice má maximální možnou hodnost, tedy hodnost k, tj. její řádky jsou lineárně nezávislé. Množina M se pak nazývá varieta (angl. manifold) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice dim M = n - k. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru  $\mathbb{R}^n$  sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením  $\Phi$ .)

V našem případě můžeme položit  $U = \mathbb{R}^3$  a  $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$ . Protože

$$\Phi'_{|(x,y,z)} = (2x, 2y, 8z)$$

tak  $\Phi'_{|(x,y,z)}=0$  právě když (x,y,z)=(0,0,0), což ale zase nemůže splnit vazbu. Takže v každém bodě množiny

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$$

je  $\Phi'_{|(x,y,z)} \neq 0$ . Pro bod  $a=(x,y,z) \in M$  lokálního extrému f na M teď existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$ , že

$$(1, -1, 3) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda (2x, 2y, 8z)$$

a

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 4.$$

Proto musí být  $\lambda \neq 0$  a vyjádřením proměnných

$$x = \frac{1}{2\lambda}$$
  $y = -\frac{1}{2\lambda}$   $z = \frac{3}{8\lambda}$ 

a dosazením do vazby získáme řešení  $a=\pm\frac{2}{\sqrt{17}}(4,-4,3)$  a  $\lambda=\pm\frac{\sqrt{17}}{16}$ . Protože f nabývá extrému na M (neboť M je evidentně omezená a uzavřená), jsou uvedené body skutečně (absolutní) extrémy a funkční hodnoty jsou  $f(a)=\pm2\sqrt{17}$ .

**Příklad 5.2.** Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ,

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$$

na kružnici  $x^2 + y^2 = 4$ .

#### Řešení:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro kružnici  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ , kde  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ . Pro extrém a = (x, y) na M existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$ , že

$$(2x + 2y, -2y + 2x) = f'_{|a} = \lambda g'_{|a} = \lambda \cdot (2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Rovnice tedy vyjadřují to, že hledáme vektor  $\vec{a}=(x,y)^T$  takový, že  $||\vec{a}||=2$  a

$$\left(\begin{array}{cc} 1-\lambda & 1\\ 1 & -1-\lambda \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x\\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0\\ 0 \end{array}\right).$$

Tato soustava má netriviální řešení právě když determinant soustavy je roven nule, tj.  $-(1-\lambda)(1+\lambda)-1=0$ , tedy  $\lambda=\pm\sqrt{2}$ . Jde v podstatě o hledání vlastních čísel matice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  a jejích vlastních vektorů s normou rovnou 2.

Pro  $\lambda = \sqrt{2}$  dostáváme:

$$a_1 = \pm \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot (1, \sqrt{2} - 1)$$

s funkční hodnotou

$$f(a_1) = 4\sqrt{2}$$
.

Pro  $\lambda = -\sqrt{2}$  dostáváme:

$$a_2 = \pm \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot (-1, \sqrt{2} + 1)$$

s funkční hodnotou

$$f(a_2) = -4\sqrt{2}.$$

Množina M je uzavřená a omezená a spojitá funkce f tak v těchto bodech skutečně nabývá svého

**Příklad 5.3.** Kruhový talíř o rovnici  $x^2 + y^2 \le 1$  je zahřátý na teplotu  $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ . Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

#### Řešení:

Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu. Vyšetření extrému T na uzavřené a omezené množině  $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 1\}$  rozdělíme na případ (volného) extrému na otevřené množině

$$A^{\circ} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

a případ vázaného extrému na

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Jestliže  $a=(x,y)\in A^\circ$  je extrémT na A, pak je i extrémem T na  $A^\circ.$  Takže musí platit, že

$$T'_{|a} = (2x - 1, 4y) = 0$$

tedy  $a=(\frac{1}{2},0)$  a skutečně je pak  $a\in A^\circ$ . Jestliže  $a=(x,y)\in\partial A$  je extrém T na A, pak je i (vázaným) extrémem T na  $\partial A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid\Phi(x,y)=0\}$ , kde  $\Phi(x,y)=x^2+y^2-1$ . Musí tedy existovat  $\lambda\in\mathbb{R}$ , že

$$(2x-1,4y) = T'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda (2x,2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Dostáváme  $a = \pm (1,0)$  nebo  $a = (-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$ . Teď víme, že jedinými možnými kandidáty na extrémy jsou body

$$\left(\frac{1}{2},0\right)$$
,  $(1,0)$ ,  $(-1,0)$ ,  $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  a  $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

Protože T nabývá na (uzavřené a omezené) množině A extrému, porovnáním funkčních hodnot

$$T\left(\frac{1}{2},0\right) = -\frac{1}{4}, \quad T(1,0) = 0, \quad T(-1,0) = 2, \quad T\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} = T\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

zjistíme, že T nabývá minima v  $\left(\frac{1}{2},0\right)$  a maxima v  $\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

**Příklad 5.4.** Najděte absolutní extrémy funkce  $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$  na množině  $|x| + |y| \le 1$ .

#### Řešení:

Množina  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \le 1\}$  je čtverec a je zřejmě omezená i uzavřená (je vzorem uzavřeného intervalu  $(-\infty, 1)$  při spojitém zobrazení  $\Psi(x, y) = |x| + |y|$ ).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$A^{\circ} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$$

a vázaného extrému na množině

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\},\$$

kterou ale tentokrát nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou čtyři otevřené úsečky (hrany čtverce) a čtyři body (vrcholy čtverce). Procházení těchto možností si usnadníme použitím symetrií  $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  takových, že zachovávají jak množinu  $\partial A$ , tak danou funkci f. Tedy má platit, že  $\varphi(\partial A) = \partial A$  a  $f \circ \varphi = f$ .

Můžeme si zvolit tyto tři (neidentické) symetrie:

$$(x,y) \mapsto (-x,-y)$$
 (středová souměrnost)

$$(x,y) \mapsto (y,x)$$
 (souměrnost podle osy  $x=y$ )

$$(x,y) \mapsto (-y,-x)$$
 (souměrnost podle osy  $x=-y$ )

#### Extrém na $A^{\circ}$ :

$$f'_{|a}=(2x-y,2y-x)=0$$
nastává právě pro $a=(0,0)\in A^\circ$ s hodnotou  $f(0,0)=0.$ 

#### Extrém na $\partial A$ :

Díky symetriím stačí vyšetřit extrém na

$$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$$
 s vazbou  $\Phi_1(x,y) = x + y - 1$ 

a na

$$U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \ y < 0\}$$
 s vazbou  $\Phi_2(x,y) = x - y - 1$ 

tj. hrany čtverce A bez koncových bodů (a dále už pak jen vrchol (1,0) čtverce A jako samostatnou

Pro extrém na  $U_1$  má tedy existovat  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ , že

$$(2x - y, 2y - x) = f'_{|a|} = \lambda_1 \Phi'_{1|a} = \lambda_1 (1, 1)$$

a

$$x + y = 1$$

tedy 
$$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in U_1$$
 a  $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$  Podobně pro extrém na  $U_2$  má existovat  $\lambda_2\in\mathbb{R}$ , že

$$(2x - y, 2y - x) = f'_{|a|} = \lambda_2 \Phi'_{2|a|} = \lambda_2 (1, -1)$$

a

$$x - y = 1$$

tedy 
$$(x,y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in U_2$$
 a  $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ .  
Zbývá bod  $(1,0)$  s hodnotou  $f(1,0) = 1$ .

Minimum tedy nabývá funkce v bodě (0,0) a maximum ve vrcholech čtverce (které jsme získali z bodu (1,0) pomocí symetrií).

Příklad 5.5. Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

#### Řešení:

Zadání příkladu lze interpretovat také tak, že hledáme maximální objem kvádru, který se vejde do pravidelného trojbokého jehlanu, jehož jeden vrchol je společný s vrcholem kvádrů. Intuitivně lze očekávat, že maximální takový objem bude odpovídat krychli.

Hledáme sice jen kladná čísla, ale pro využití věty o nabytí maxima (a minima) spojité funkce je potřeba pracovat s množinou, která je *uzavřená* (a omezená). Budeme tedy hledat body maxima funkce

$$f(x, y, z) = xyz$$

na množině

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0 \& x + y + z = 100\},\$$

(což je trojúhelník i s okraji), tj. hledáme nezáporná čísla. Množina A je zřejmě uzavřená a omezená. Vyšetření rozdělíme na obvyklý vázaný extrém v otevřené množině

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\},\$$

tedy na  $A \cap U = \{(x, y, z) \in U \mid \Phi(x, y, z) = 0\}$  s vazbou  $\Phi(x, y, z) = x + y + z - 100$  (trojúhelník bez okrajů) a na případ  $A \setminus U$  (okraje trojúhelníka).

Na okrajích trojúhelníka je funkce f nulová a zřejmě tu nabývá svého minima (protože na zbytku množiny A je f nenulová).

Pro bod extrému  $a=(x,y,z)\in A\cap U$  pak musí existovat  $\lambda\in\mathbb{R}$ , že

$$(yz, xz, xy) = f'_{|a} = \lambda \Phi'_{|a} = \lambda (1, 1, 1)$$

a

$$x + y + z = 100$$

takže  $a=\frac{100}{3}(1,1,1)$  a  $f\left(\frac{100}{3},\frac{100}{3},\frac{100}{3}\right)=\left(\frac{100}{3}\right)^3$  a tento bod je tak jediným bodem maxima funkce f na A.

**Příklad 5.6.** Určete největší a nejmenší hodnoty funkce f(x, y, z) = xyz na množině M dané podmínkami

$$x + y + z = 5 \qquad a \qquad xy + yz + zx = 8.$$

#### Řešení:

Tentokrát máme vazby dvě a budeme tedy potřebovat ověřit jejich nezávislost (v bodech množiny M), tj. lineární nezávislost gradientů vazeb v příslušných bodech.

Položme

$$\Phi_1(x, y, z) = x + y + z - 5$$

a

$$\Phi_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8.$$

Pak je 
$$M = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(a) = 0 \& \Phi_2(a) = 0\}.$$

uzavřenost M:

Množiny  $\{a \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_i(a) = 0\}$  je vzorem jednobodové (a tedy uzavřené) množiny  $\{0\}$  při spojitých zobrazeních  $\Phi_i$  a jsou tudíž uzavřené. Množina M je jejich průnikem a proto je také uzavřená.

omezenost M:

Buď si vyjádříme jednu proměnnou z první rovnice (např. z = 5 - x - y), dosadíme do druhé a tu přepíšeme doplněním na čtverec:

$$xy + (x+y)(5-x-y) = 8$$
$$x^{2} + y^{2} + xy - 5x - 5y = -8$$
$$\left(x + \frac{y}{2} - \frac{5}{2}\right)^{2} + \frac{3}{4}\left(y - \frac{5}{3}\right)^{2} = \frac{1}{3}$$

nebo použijeme jednodušší a elegantnější postup, který využije konkrétního tvaru rovnic:

$$5^{2} = (x + y + z)^{2} = x^{2} + y^{2} + z^{2} + 2(xy + yz + zx) = x^{2} + y^{2} + z^{2} + 2 \cdot 8$$
$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = 5^{2} - 2 \cdot 8 = 9$$

V každém případě vidíme, že proměnné jsou omezené a tedy i množina M je omezená.

nezávislost vazeb:

Potřebujeme ukázat, že pro a=(x,y,z) platí:

$$\Phi_1(a) = 0 \quad \& \quad \Phi_2(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{grad}(\Phi_1)_{|a} \ \, \text{a} \quad \operatorname{grad}(\Phi_2)_{|a} \ \, \text{jsou lineárně nezávislé}.$$

Máme

$$\operatorname{grad}(\Phi_1)_{|a} = (1, 1, 1)$$
  
 $\operatorname{grad}(\Phi_2)_{|a} = (y + z, z + x, x + y).$ 

Tyto vektory jsou lineárně závislé právě když y+z=z+x=x+y neboli když x=y=z. Pokud by přitom mělo platit  $\Phi_1(a)=0$  a  $\Phi_2(a)=0$ , pak dostáváme, že 3x=5 a  $3x^2=8$ , což nelze splnit. Pro body z M tak máme opravdu nezávislost vazeb.

Teď konečně můžeme (korektně!) použít větu o Lagrangeových multiplikátorech:

Pro bod  $a=(x,y,z)\in M$  absolutního (a tedy i lokálního) extrému f na M teď existuji  $\lambda,\mu\in\mathbb{R},$  že

$$(yz, zx, xy) = \text{grad}(f)_{|a} = \lambda \cdot \text{grad}(\Phi_1)_{|a} + \mu \cdot \text{grad}(\Phi_2)_{|a} = \lambda(1, 1, 1) + \mu(y + z, z + x, x + y)$$

a

$$x + y + z = 5$$
 a  $xy + yz + zx = 8$ .

Když teď od sebe např. odečteme první dvě rovnice

$$yz = \lambda - \mu(y+z)$$

$$zx = \lambda - \mu(z+x)$$

dostaneme  $z(y-x)=\mu(y-x)$ , což dává podmínku buď x=y nebo  $z=\mu$ . Symetricky dostaneme další podmínku y=z nebo  $x=\mu$ . Odsud snadno plyne, že vždy je buď x=y nebo y=z nebo  $x=\mu=z$ , tedy že dvě souřadnice jsou vždy stejné. Stačí tedy vyřešit jednu z verzí a další už dostaneme permutacemi souřadnic.

Např. z podmínky x=y dostáváme dosazením do vazeb řešení (x,y,z)=(2,2,1) nebo  $(x,y,z)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$ . Hodnoty parametru  $\lambda$  ani  $\mu$  už zjišťovat nemusíme, podezřelé body teď mohou být už jentyto:

$$a = (2, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2)$$
 kde  $f(a) = 4$ 

a

$$a = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$
 kde  $f(a) = \frac{112}{27}$ .

Protože funkce f je spojitá a množina M je omezená a uzavřená, nabývá f v prvních bodech minimum a v druhých maximum (protože  $\frac{112}{27} > 4$ ).

**Příklad 5.7.** Na elipse  $M: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  nalezněte body, které mají největší a nejmenší vzdálenost od přímky p: 3x + y - 9 = 0.

#### Řešení:

Příklad můžeme řešit několika způsoby:

(1) Použijeme explicitní tvar funkce vyjadřující vzdálenost bodu  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  od přímky dané rovnicí  $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$ , a sice  $f(x,y) = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ .

**Odvození vzorce:** Uděláme to rovnou pro vzdálenost bodů od roviny v $\mathbb{R}^3$  (pro  $\mathbb{R}^2$  je analogické odvození úplně stejné). Nechť rovina  $\rho$  v $\mathbb{R}^3$  má rovnici  $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta = 0$ . Její normálový vektor je tedy  $n = (\alpha, \beta, \gamma)$  a rovnici pro bod  $a' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$  pak můžeme napsat pomocí skalárního součinu jako  $n \cdot a' = -\delta$ . Zvolme si nyní nějaký bod  $b \in \mathbb{R}^3$  v rovině  $\rho$ . Vzdálenost bodu  $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  od roviny  $\rho$  je nyní dána jako velikost kolmého průmětu vektoru a - b do směru normálového vektoru n, tedy pomocí vztahu

$$\left|(a-b)\cdot \frac{n}{\|n\|}\right|$$

Protože bod bje v rovině  $\rho,$  platí  $n\cdot b=-\delta.$  Můžeme tedy psát

$$\left|(a-b)\cdot\frac{n}{\|n\|}\right|=\frac{|a\cdot n-b\cdot n|}{\|n\|}=\frac{|a\cdot n+\delta|}{\|n\|}=\frac{|\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

Budeme tedy hledat maximum a minimum funkce

$$f(x,y) = \frac{|3x + y - 9|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

za podmínky  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Protože f není všude diferencovatelná, můžeme si pomoci buď tak, že

• si vezmeme místo toho ekvivalentní zadání, kde hledáme minimum a maximum funkce

$$g(x,y) = 10 \cdot (f(x,y))^2 = (3x + y - 9)^2$$

(snažíme se o co nejjednodušší tvar, bez zbytečných konstant) nebo

• si všimneme, že M nemá průnik s přímkou p, což znamená, že leží v jedné z otevřených polorovin určených přímkou p (protože M je souvislá množina - je totiž obloukově souvislá). V tom případě je výraz 3x + y - 9 na všech bodech z M vždy buď jen kladný nebo jen záporný. Hledání extrému funkce f pak ekvivalentně odpovídá hledání extrému funkce

$$h(x,y) = 3x + y - 9.$$

Zvolíme si druhou variantu (i když ani první není o nic těžší).

Pro body na elipse M dané vazbou  $\Phi(x,y):=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1 (=0)$  je zřejmě  $\operatorname{grad}(\Phi)=\left(\frac{x}{2},\frac{2y}{9}\right)\neq 0$ . Pro bod  $a=(x,y)\in M$  absolutního extrému h na elipse M existuje  $\lambda\in\mathbb{R}$ , že

$$(3, 1) = \operatorname{grad}(h)_{|a} = \lambda \cdot \operatorname{grad}(\Phi)_{|a} = \lambda \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Z prvních dvou rovnic dostaneme

$$\lambda \frac{x}{2} = 3 \cdot \lambda \frac{2y}{9},$$

tedy  $\lambda = 0$  nebo  $y = \frac{3}{4}x$ .

Pokud  $\lambda = 0$ , pak platí 3x + y - 9 = 0 a tudíž hledáme průnik elipsy s přímkou p, který je ale prázdný.

Takže zbývá případ  $y = \frac{3}{4}x$ , který po dosazení do rovnice elipsy dává rovnici:

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{\left(\frac{3}{4}x\right)^2}{9} = \frac{5}{16}x^2$$

tedy body  $(x,y)=\pm\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ . V těch funkce f vzdálenosti od přímky nabývá hodnot  $\frac{9-3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$  a  $\frac{9+3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ .

(2) Použijeme "intuitivní" náhled, který je ale vlastně pouze jinou verzí prvního postupu (díky němuž je také korektnost druhého postupu zaručena):

**Tvrzení:** Pokud je množina M (daná vazbou)

- uzavřená,
- omezená a
- má tečny ve všech svých bodech,

pak body z M, které jsou od přímky p nejdál nebo nejblíže, musí mít svou tečnu rovnoběžnou s touto přímkou.

Pro náš konkrétní případ je elipsa M vrstevnicí (vazbové) funkce  $\Phi(x,y):=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1$ , takže normála kolmá na tečnu v bodě  $a=(x,y)\in M$  je gradientem funkce  $\Phi$ . Hledáme tedy body  $a=(x,y)\in M$ , ve kterých je normála kM násobkem normály přímky p. Pak tedy existuje  $\lambda\in\mathbb{R}$ , že

$$\left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right) = \operatorname{grad}(\Phi)_{|a} = \lambda \cdot (3, 1)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Není překvapením, že z první podmínky opět dostáváme rovnici  $y = \frac{3}{4}x$  a tedy i stejné řešení jako v prvním postupu.

**Poznámka:** Představme si, co by mohlo stát, pokud bychom neměli zaručeny všechny výše zmíněné předpoklady množiny M, pro kterou zjišťujeme vzdálenosti bodu od přímky p metodou tečen:

- M má tečny ve všech svých bodech a je omezená, ale NENÍ uzavřená: za M stačí vzít např. naší elipsu, ze
  které jsme odstranili právě tyto extrémní body (extrémy prostě v množině obsažené nejsou, přestože bychom je
  formálně z postupu získali).
- M má tečny ve všech svých bodech a je uzavřená, ale NENÍ omezená: za M stačí vzít např. hyperbolu s asymptotou p (zde žádné extrémní body ani existovat nemohou).
- M je omezená a uzavřená, ale NEMÁ tečny ve všech svých bodech: za M stačí vzít např. vhodné natočený trojúhelník) (extrémy sice budou existovat, ale pouze pomocí tečen je nenajdeme).
- (3) Použijeme postup, který se dá aplikovat pro vzdálenost obecných útvarů v rovině (případně v prostoru). To, co je na něm obecně těžší, je najít nakonec řešení výsledných rovnic. V našem případě ale problémy nebudou.

Uvažujme funkci (kvadrát) vzdáleností dvou bodů (x, y) a (u, v) jako

$$h(x, y, u, v) = (x - u)^{2} + (y - v)^{2}$$

a budeme hledat její extrémy za podmínek  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  a 3u + v - 9 = 0. Protože ale jedna z podmínek dává neomezenou množinu (konkrétně je to přímka p), tak maximum funkce nebude existovat a postup je použitelný jen na hledání minima (a to ještě budeme muset správně odůvodnit).

Máme tedy dvě vazby

$$\Phi_1(x, y, u, v) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$$

a

$$\Phi_2(x, y, u, v) = 3u + v - 9$$

s gradienty

$$\operatorname{grad}(\Phi_1)_{|a} = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 0, 0\right)$$
$$\operatorname{grad}(\Phi_2)_{|a} = (0, 0, 3, 1)$$

kde a = (x, y, u, v). Označme si

$$K = \{ a \in \mathbb{R}^4 \mid \Phi_1(a) = 0 \& \Phi_2(a) = 0 \}.$$

Pro body  $a \in K$  jsou gradienty evidentně lineárně nezávislé a pro body extrému funkce f na K pak existují  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , že

$$\left(2(x-u), 2(y-v), 2(u-x), 2(v-y)\right) = \operatorname{grad}(h)_{|a} = \lambda \cdot \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 0, 0\right) + \mu \cdot (0, 0, 3, 1)$$

a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$
 a  $3u + v - 9 = 0$ 

(neboli máme 6 rovnic o 6-ti neznámých!). Naštěstí jsou rovnice poměrně jednoduché. Postupně dostaneme

$$\lambda \frac{x}{2} = 2(x - u) = -3\mu$$

$$\lambda \frac{2y}{9} = 2(y - v) = -\mu$$

tedy opět rovnici  $\lambda\left(\frac{x}{2}-\frac{2y}{3}\right)=0$ , kde případ  $\lambda=0$  opět nemá řešení. Zbytek pak opět dává

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

$$(x_2, y_2) = -\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

a pomocí rovnice x-u=3(y-v) dopočítáme odpovídající body na přímce

$$(u_1, v_1) = \left(\frac{27\sqrt{5} - 9}{10\sqrt{5}}, \frac{9\sqrt{5} + 27}{10\sqrt{5}}\right)$$

$$(u_2, v_2) = \left(\frac{27\sqrt{5} + 9}{10\sqrt{5}}, \frac{9\sqrt{5} - 27}{10\sqrt{5}}\right).$$

Pro funkční hodnoty (neboli hodnoty extrémních vzdálenosti) bodů  $a_i = (x_i, y_i, u_i, v_i)$  platí

$$h(a_1) < h(a_2)$$
.

Množina daná vazbami K je teď sice uzavřená, ale NENÍ omezená. Na druhou stranu pro  $a \in K$  a  $||a|| \to \infty$  jdou hodnoty h(a) také do nekonečna (protože elipsa je omezená). Nyní si stačí vzít dostatečně velkou uzavřenou kouli B tak, aby na množině  $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$  byly hodnoty funkce h větší než např.  $h(a_2) + 1$ . A dále:

- Na uzavřené a nyní už omezené množině  $K \cap B$  bude spojitá funkce h nabývat svého maxima i minima.
- Na množině  $K \cap \partial B$  budou hodnoty funkce h větší nebo rovny hodnotě  $h(a_2)+1$  (díky spojitosti h a díky jejím hodnotám na  $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$ ).
- Na množině  $K \cap B^{\circ}$  (díky otevřenosti množiny  $B^{\circ}$ ) pak můžeme (a vlastně jsme to už udělali) použít obvyklý způsob vyšetření vázaných extrémů pomocí Langrangeových multiplikátorů. Výsledkem jsou podezřelé body  $a_1$  a  $a_2$  (které se evidentně musí nacházet v  $K \cap B^{\circ}$  díky svým funkčním hodnotám $h(a_1) < h(a_2) < h(a_2) + 1$ ).
- Absolutní minimum funkce h na množině  $K \cap B$  se tedy NEMŮŽE nacházet na "okraji"  $K \cap \partial B$  protože tam je funkce "moc velká" a může to tedy být jedině bod  $a_1$ . Současně i na množině  $K \cap (\mathbb{R}^4 \setminus B)$  je funkce "moc velká," a bod  $a_1$  je tak opravdu absolutní minimum funkce h na původní množině K.

Takto tedy vypadá korektní zdůvodnění, že námi nalezený bod je minimum v případě, že množina daná vazbou sice nebyla omezená, ale na druhou stranu zase funkce "v nekonečnu roste do nekonečna."

A co bod  $a_2$ ? Abychom zjistili, jak to vypadá zde, bylo by potřeba dalšího rozboru pomocí vyšších derivací. Intuitivně se zdá, že v něm nejspíš bude sedlo (z hlediska naší volby množiny K a funkce h). To už by ale byl poměrně náročný postup a, jak je vidět, třetí přístup se hodí opravdu jen k určení vzdálenosti množin (tj. minima funkce h).

**Příklad 5.8.** Najděte vzdálenost paraboly  $M: y = x^2$  od přímky p: y = x - 2.

# Řešení:

Můžeme použít některý z předchozích postupů, ale musíme si uvědomit, že parabola není omezená množina (i když je uzavřená a má tečny ve všech svých bodech). Naštěstí ale funkce vzdálenosti bodů paraboly M od přímky p i zde "v nekonečnu roste do nekonečna." Minimum vzdálenosti tedy musí být nabyto v nějakém bodě M a v něm musí být tečna rovnoběžná s přímkou p.

Směrnici  $\alpha \in \mathbb{R}$  tečny v bodě  $a \in M$ , který je grafem funkce  $g(x) = x^2$ , můžeme získat také právě pomocí derivace této funkce jedné proměnné, tj.  $\alpha = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ . Směrnice přímky p je zřejmě 1. Takže z 2x = 1 plyne  $x = \frac{1}{2}$  a tedy  $y = x^2 = \frac{1}{2}$ .

Takže z 2x=1 plyne  $x=\frac{1}{2}$  a tedy  $y=x^2=\frac{1}{4}$ . Vzdálenost  $\rho$  bodu  $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\in M$  od přímky  $p:\ x'-y'-2=0$  je tedy podle obecného vzorce

$$\rho = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

**Příklad 5.9.** V rovině 2x + y - z = 1 nalezněte bod, pro nějž je součet čtverců vzdálenosti od bodů A = (1, 1, 1) a B = (2, 3, 4) minimální.

# Řešení:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro rovinu  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$ , kde g(x, y, z) = 2x + y - z - 1 a funkci

$$f(x, y, z) = (x - 1)^{2} + (y - 1)^{2} + (z - 1)^{2} + (z - 2)^{2} + (y - 3)^{2} + (z - 4)^{2}$$

vyjadřující součet čtverců vzdálenosti bodu (x,y,z) od bodů A=(1,1,1) a B=(2,3,4). Pro extrém a=(x,y,z) na M existuje  $\lambda\in\mathbb{R}$ , že

$$\left(2(x-3), 2(y-4), 2(z-5)\right) = f'_{|a} = \lambda g'_{|a} = \lambda \cdot (2, 1, -1)$$

$$2x + y - z = 1.$$

Dostaneme  $\lambda=-\frac{4}{3}$  a  $a=\left(\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{17}{3}\right)$  s funkční hodnotou  $f\left(\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{17}{3}\right)=\frac{92}{3}$ . K nabytí minima funkce v tomto bodě bychom (kromě uzavřenosti M) potřebovali také její omezenost, kterou nemáme. Pomůžeme si proto odhadem. Pro  $U \in \mathbb{R}^3$  máme z trojúhelníkové

$$f(U) = ||U - A||^2 + ||U - B||^2 \ge \left(||U|| - ||A||\right)^2 + \left(||U|| - ||B||\right)^2 \to +\infty$$

pro  $||U|| \to +\infty$ . Existuje tedy K > 0 takové, že pro každé  $U \in \mathbb{R}^3$  splňující  $||U|| \geq K$  bude  $f(U) \ge f(a) + 1 = \frac{92}{3} + 1.$ 

Nyní máme, že

- na množině  $M_1=M\cap\{U\in\mathbb{R}^3\mid ||U||\geq K\}$  má funkce hodnotu vždy alespoň f(a)+1. na množině  $M_2=M\cap\{U\in\mathbb{R}^3\mid ||U||\leq K\}$ , která je uzavřená i omezená nabývá svého minima.

To nemůže být vázáno na okraj (kde je opět hodnota alespoň f(a) + 1), tedy to může být pouze v nalezeném bodě  $a = (\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{17}{3})$ , který nutně kvůli své funkční hodnotě f(a) musí ležet v  $M_2$ .

Celkově tedy funkce f skutečně nabývá na M svého (jediného) minima v bodě  $a = (\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{17}{3})$ .

#### 6 Dvojný integrál

**Příklad 6.1.** Změňte pořadí integrace následujících integrálů:

(i) 
$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\sin x} f(x, y) \ dy \ dx$$

(ii) 
$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{x} f(x,y) dy dx + \int_{1}^{2} \int_{0}^{2-x} f(x,y) dy dx$$

(iii) 
$$\int_{0}^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) dy dx, kde \ a > 0 \ je \ parametr.$$

# Řešení:

Použijeme Fubiniho větu: Nechť

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$  je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f: D \to \mathbb{R}$  je měřitelná funkce (tj. funkce, kterou má smysl vůbec integrovat, např. spojitá) a
- $\bullet$ dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj.  $\iint |f| \ dS < \infty$  (např. pokud funkce je omezená).

Pak existuje dvojný integrál  $\iint f \ dS$  a platí

$$\int_{\pi_2(D)} \left( \int_{(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D} f(x, y) \ dx \right) dy = \iint_D f \ dS = \int_{\pi_1(D)} \left( \int_{(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap D} f(x, y) \ dy \right) dx,$$

kde  $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  jsou projekce na jednotlivé osy, tedy  $\pi_1(x, y) = x$  a  $\pi_2(x, y) = y$ .

Poznámka: Předpoklad konečnosti integrálu z absolutní hodnoty funkce je podstatný! Např. pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

na  $D = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \setminus \{(0, 0)\}$  je

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy \right) \, dx = \int_0^1 \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \left[ \arctan(x) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \right) \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{-x}{x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=1} \, dy = \int_0^1 \frac{-1}{y^2 + 1} \, dy = \left[ -\arctan(y) \right]_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}$$

což mimo jiné ukazuje na to, že

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| \, dx \, dy = \infty.$$

V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(i) Základní oblast integrace je

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi \& 0 \le y \le \sin x\}.$$

Máme

$$\pi_1(D) = \langle 0, \pi \rangle$$

a

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap D = \langle 0, \sin x \rangle.$$

Po výměně pořadí integrace máme

$$\pi_2(D) = \langle 0, 1 \rangle$$

a pro řezy ve směru osy x z nerovnosti  $y \leq \sin x$  odvodíme:

$$\arcsin y \le \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & , x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ \pi - x & , x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}$$

**Pozor!** arcsin a sin jsou vůči sobě inverzní jen pro úhly v intervalu  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Využijeme tudíž sin  $x = \sin(\pi - x)$  a pro  $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$  už je  $\pi - x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle$ , takže

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$$

Takže dostáváme  $\arcsin y \le x \le \pi - \arcsin y$ , tudíž

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle \arcsin y, \pi - \arcsin y \rangle.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\sin x} f(x,y) \ dy \ dx = \int_{0}^{1} \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y) \ dx \ dy.$$

(ii) Základní oblasti integrace jsou

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \& 0 \le y \le x\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 2 \& 0 < y < 2 - x\}.$$

Množiny  $D_1$  a  $D_2$  se překrývají pouze v úsečce  $\{1\} \times \langle 0, 1 \rangle$ , která na hodnotu integrálu nemá vliv. Funkci f tak můžeme prostě integrovat na sjednocení obou oblastí  $D = D_1 \cup D_2$ .

**Pozor!** Toto sjednocení není samozřejmá věc! Pokud by se totiž oblasti překrývaly na nějaké "podstatnější" množině, bylo pak na tomto průniku potřeba integrovat funkci dvakrát (příspěvek z každé oblasti  $D_i$ ). Přesněji, platí

$$\iint\limits_{D_1} f \; dS \; \; + \; \; \iint\limits_{D_2} f \; dS = \iint\limits_{D_1 \backslash D_2} f \; dS \; \; + \; \; \iint\limits_{D_1 \cap D_2} f \; dS \; \; + \; \; \iint\limits_{D_2 \backslash D_1} f \; dS$$

Takže  $\pi_2(D)=\langle 0,1\rangle$  a  $(\mathbb{R}\times\{y\})\cap D=\langle y,2-y\rangle$ . Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{x} f(x,y) \ dy \ dx + \int_{1}^{2} \int_{0}^{2-x} f(x,y) \ dy \ dx = \int_{0}^{1} \int_{y}^{2-y} f(x,y) \ dx \ dy.$$

(iii) Základní oblast integrace je

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2a \& \sqrt{2ax - x^2} \le y \le \sqrt{2ax} \}.$$

Oblast je tedy se shora omezená parabolou  $y^2=2ax$  a že zdola polovinou kružnice  $2ax-x^2=y^2$  (neboli ekvivalentně  $(x-a)^2+y^2=a^2$ ). Rozdělíme si ji na tři části (tento návod poskytuje obrázek)

$$D_1 := D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge a\}$$

$$D_2 := D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le a \& x \le a\}$$

a

$$D_3 := D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le a \& x \ge a\}.$$

Teď si oblasti  $D_i$  vyjádříme podle řezu v proměnné x (pomocí křivek  $y^2 = 2ax$  a  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ):

 $D_1:$ 

$$a \le y \le 2a, \quad \frac{y^2}{2a} \le x \le a$$

 $D_2$ :

$$0 \le y \le a$$
,  $\frac{y^2}{2a} \le x \le a - \sqrt{a^2 - y^2}$ 

 $D_3$ :

$$0 \le y \le a, \quad a + \sqrt{a^2 - y^2} \le x \le 2a$$

Takže výsledek je

$$\iint_{D} f \, dS = \iint_{D_{1}} f \, dS + \iint_{D_{2}} f \, dS + \iint_{D_{3}} f \, dS =$$

$$= \int_{a}^{2a} \int_{\frac{y^{2}}{2}}^{a} f(x,y) \, dx \, dy + \int_{0}^{a} \int_{\frac{y^{2}}{2}}^{a-\sqrt{a^{2}-y^{2}}} f(x,y) \, dx \, dy + \int_{0}^{a} \int_{a+\sqrt{a^{2}-y^{2}}}^{2a} f(x,y) \, dx \, dy.$$

Příklad 6.2. Určete vhodné pořadí integrace a spočítejte integrál:

(i) 
$$\int_{0}^{2} \int_{0}^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy dx$$

(ii) 
$$\int_{0}^{8} \int_{3/x}^{2} \frac{dy \ dx}{y^4 + 1}$$

#### Řešení

(i) Pro výpočet integrálu bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2 \& 0 \le y \le 4 - x^2 \& y \ne 4\}.$$

Funkce  $f(x,y) = \frac{xe^{2y}}{4-y}$  na množině D není omezená.

**Proč:** Množina D je ohraničená parabolou  $y=4-x^2$ . Klidně si ale můžeme dovolit vzít i jinou parabolu, která už bude ležet ve vnitřku D, tedy vhodné  $\lambda>0$  tak, aby  $(x,4-\lambda x^2)\in D$ . Pak budeme mít

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=4-\lambda x^2,\ x>0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0+} \frac{xe^{2(4-\lambda x^2)}}{\lambda x^2} = +\infty.$$

Není tedy jasné, jestli je $\int\limits_D |f|\ dS < \infty$ a jestli tedy vůbec můžeme použít Fubiniovu větu o záměně integrace. Pomůžeme si teď dodatkem:

Věta: Nechť

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$  je oblast integrace
- $f:D\to\mathbb{R}$  je nezáporná měřitelná funkce a
- jeden z integrálů vzniklých postupnou integrací podle proměnných je konečný.

Pak i integrál v opačném pořadí integrace je konečný a oba se rovnají (a funkce má dvojný integrál  $\iint\limits_E f\ dS$ ).

Kromě toho ještě připomeňme, jak je definován integrál  $\iint_E f\ dS$ , pokud je funkce f nebo oblast E integrace neomezená. Pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. absolutně konvergentní, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{E_{-r}}|f|\ dS=:\iint\limits_{E}|f|\ dS<\infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$  takovou, že f na  $E_n$  je omezená a  $E = \cup_n E_n$ . V tom případě pro integrál platí Fubiniho věta (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině).

Máme tedy

$$\pi_2(D) = \langle 0, 4 \rangle$$

a

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle 0, \sqrt{4-y} \rangle.$$

Dostáváme tak

$$\int_{0}^{2} \int_{0}^{4-x^{2}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy dx = \int_{0}^{4} \left( \int_{0}^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx \right) dy = \int_{0}^{4} \left[ \frac{x^{2}e^{2y}}{2(4-y)} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} dy =$$

$$= \int_{0}^{4} \frac{e^{2y}}{2} dy = \left[ \frac{e^{2y}}{4} \right]_{y=0}^{y=4} = \frac{e^{8}-1}{4}.$$

(ii) Opět bude výhodnější vyměnit pořadí integrace. Máme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 8 \& \sqrt[3]{x} \le y \le 2\},\$$

takže

$$\pi_2(D) = \langle 0, 2 \rangle$$

a

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap D = \langle 0, y^3 \rangle.$$

Dostáváme tak

$$\int_{0}^{8} \int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dy \, dx}{y^4 + 1} = \int_{0}^{2} \left( \int_{0}^{y^3} \frac{1}{y^4 + 1} \, dx \right) \, dy = \int_{0}^{2} \frac{y^3}{y^4 + 1} dy =$$

$$= \left[ \frac{\ln(y^4 + 1)}{4} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

Příklad 6.3. Vypočítejte integrál

$$\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) \ dx \ dy$$

přechodem do polárních souřadnic.

#### Řešení:

Základní oblast integrace je

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2 \& 0 \le x \le \sqrt{4 - y^2}\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x, y \& x^2 + y^2 \le 4\},$$

tedy čtvrtkruh.

Použijeme **Větu o substituci:** Nechť  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  je oblast integrace,  $f: U \to \mathbb{R}$  je měřitelná funkce s konečným integrálem a  $\Phi: U \to \mathbb{R}^2$  je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- $\Phi$  je prosté a spojitě diferencovatelné na  $U^{\circ}$  (tj. na vnitřku U) a
- množina  $U \setminus U^{\circ} \subseteq \partial U$ ) má nulovou míru (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový; obvykle to jsou křivky, úsečky atd, které mají nulový obsah.)

Pak

$$\iint\limits_{\Phi(U)} f \ dS = \iint\limits_{U} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \ dS.$$

 $\text{Polární souřadnice jsou určeny zobrazením } \Phi: \langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \to \mathbb{R}^2, \, \text{kde } \Phi \left( \begin{array}{c} r \\ \varphi \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{array} \right).$ 

Máme  $\Phi'_{|(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$  a det  $\Phi'_{|(r,\varphi)} = r$ . Protože D je čtvrtina kruhu, snadno ji zparametrizu jeme  $D = \Phi(U)$ , kde  $U = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Na  $D^{\circ}$  je  $\Phi$  zřejmě prosté a spojitě diferencovatelné a množina  $\partial D$  se skládá ze dvou úseček a oblouku kružnice, což jsou množiny míry nula. Celkem tak dostáváme:

$$\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^{2}}} (x^{2}+y^{2}) dx dy = \iint_{D=\Phi(U)} (x^{2}+y^{2}) dS =$$

$$= \iint_{U} r^{2} \cdot r dS = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{0}^{2} r^{3} dr \right) d\varphi = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{r^{4}}{4} \right]_{r=0}^{r=2} d\varphi = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 4 d\varphi = 2\pi.$$

# Příklad 6.4. Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + y^2} \ dS$$

použitím polárních souřadnic, kde D je ohraničeno křivkou  $r=1+\cos\varphi$ .

#### Řešení:

V polárních souřadnicích (viz předchozí příklad) je oblast dána jako

$$U = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \varphi \le 2\pi \& 0 \le r \le 1 + \cos \varphi\}$$

položíme tedy  $D := \Phi(U)$  (což je mimochodem v kartézských souřadnicích plocha ohraničená křivkou nazývanou kardioida). Použitím věty o substituci dostaneme

$$\iint_{D=\Phi(U)} \sqrt{x^2 + y^2} \, dS = \iint_{U} r \cdot r \, dS =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left( \int_{0}^{1+\cos\varphi} r^2 \, dr \right) \, d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1+\cos\varphi} \, d\varphi = \frac{1}{3} \int_{0}^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^3 \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{0}^{2\pi} (\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 1) \, d\varphi = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi.$$

Pro jednotlivé integrály jsme použili vztahy (pro  $n \ge 0$ ):

$$\int_{0}^{2\pi} \cos^{2n+1} \varphi \ d\varphi = \int_{0-\frac{\pi}{2}}^{2\pi - \frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \varphi \ d\varphi = \begin{bmatrix} \alpha = \varphi - \frac{\pi}{2} \\ d\alpha = d\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1} \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \ d\alpha = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1} \alpha \ d\alpha = 0.$$

(plyne z periodicity a lichosti funkcí) a dále podobně:

$$\int_{0}^{2\pi} \cos^2 \varphi \ d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \sin^2 \varphi \ d\varphi$$

a současně

$$\int_{0}^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \ d\varphi = \int_{0}^{2\pi} 1 \ d\varphi = 2\pi$$

tedy

$$\int_{0}^{2\pi} \cos^2 \varphi \ d\varphi = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

$$\iint\limits_{E} xe^{-y} \frac{\sin y}{y} \ dS$$

pro neomezenou množinu  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{y}{2}\}.$ 

#### Řešení:

Zopakujme si, že pokud je v integrálu  $\iint_E f \ dS$  funkce f nebo oblast E integrace neomezená, pak je takový integrál určen (jako konečná) hodnota, pouze pokud je tzv. absolutně konvergentní, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{E_{rr}}|f|\ dS=:\iint\limits_{E}|f|\ dS<\infty$$

pro nějakou posloupnost omezených oblastí  $E_1\subseteq E_2\subseteq\cdots\subseteq E_n\subseteq E_{n+1}\subseteq\cdots$  takovou, že f na  $E_n$  je omezená a  $E=\cup_n E_n$ .

V našem případě tedy máme  $f(x,y)=xe^{-y}\frac{\sin y}{y}$ . Nejdříve potřebujeme ověřit existenci zadaného integrálu, tj. absolutní konvergenci. Na E máme

$$\left| xe^{-y} \frac{\sin y}{y} \right| \le xe^{-y}.$$

Pro tuto nezápornou funkci (tzv. *majorantu*) můžeme tedy použít Fubiniho větu (pokud nám při postupné integraci nakonec vyjde konečná hodnota):

$$\iint\limits_{E} x e^{-y} \ dS = \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\frac{y}{2}} x e^{-y} \ dx \ dy = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{y^{2}}{8} e^{-y} \ dy = \int\limits_{0}^{\infty} \left( \frac{y^{2}}{8} e^{-\frac{y}{2}} \right) e^{-\frac{y}{2}} \ dy \leq \int\limits_{0}^{\infty} K \cdot e^{-\frac{y}{2}} \ dy < \infty$$

kde jsme použili to, že  $|\frac{y^2}{8}e^{-\frac{y}{2}}| \leq K$  pro vhodnou konstantu K>0 (tato funkce je spojitá a jde k nule v nekonečnu).

Integrál z |f| je proto konečný a my tak můžeme použít Fubiniho větu (v analogické podobě jako pro omezenou funkci na omezené množině). Můžeme proto psát:

$$\iint_{E} xe^{-y} \frac{\sin y}{y} dS = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\frac{y}{2}} xe^{-y} \frac{\sin y}{y} dx dy = \frac{1}{8} \int_{0}^{\infty} y(e^{-y} \sin y) dy =$$

$$= \left[ \int_{h'(y)=e^{-y} \sin y, \ h(y)=-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y + \sin y)} \right] =$$

$$= \frac{1}{8} \left[ y \left( -\frac{e^{-y}}{2} \right) (\cos y + \sin y) \right]_{y=0}^{y=\infty} - \frac{1}{8} \int_{0}^{\infty} -\frac{e^{-y}}{2} (\cos y + \sin y) dy =$$

$$= \frac{1}{16} \int_{0}^{\infty} e^{-y} (\cos y + \sin y) dy = \frac{1}{16} \left[ -e^{-y} \cos y \right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{16}.$$

**Poznámka:** K odvození neurčitých integrálů jsme použili následující postup (jednodušší než opakovaná metoda per partes) využívající funkce komplexní proměnné:

$$\int e^{-y} \cos y \, dy + \mathbf{i} \int e^{-y} \sin y \, dy = \int e^{-y} (\cos y + \mathbf{i} \sin y) \, dy = \int e^{-y} e^{\mathbf{i}y} \, dy =$$

$$= \int e^{(\mathbf{i}-1)y} \, dy = \frac{e^{(\mathbf{i}-1)y}}{\mathbf{i}-1} + C = -\frac{\mathbf{i}+1}{2} e^{-y} (\cos y + \mathbf{i} \sin y) + C =$$

$$= \left[ -\frac{e^{-y}}{2} (\cos y - \sin y) \right] + \mathbf{i} \left[ -\frac{e^{-y}}{2} (\cos y + \sin y) \right] + C.$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí pak dostáváme:

$$\int e^{-y} \cos y \, dy = -\frac{e^{-y}}{2} (\cos y - \sin y) + C_1$$

a

$$\int e^{-y} \sin y \, dy = -\frac{e^{-y}}{2} (\cos y + \sin y) + C_2,$$

kde  $C_1$ ,  $C_2$  a C jsou konstanty.

Integrály lze odvodit ještě "heuristicky" - primitivní funkce bude nejspíš obsahovat  $e^{-y}\cos y$  a  $e^{-y}\sin y$ . Zkusíme si je tedy zderivovat:

$$\frac{d}{dy}\left(e^{-y}\cos y\right) = -e^{-y}(\sin y + \cos y)$$

$$\frac{d}{dy}\left(e^{-y}\sin y\right) = -e^{-y}(\sin y - \cos y)$$

a integrály z původních funkcí teď najdeme prostě jen lineární kombinací rovnic:

$$e^{-y}\sin y = \frac{d}{dy}\left(-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y + \sin y)\right)$$

$$e^{-y}\cos y = \frac{d}{dy}\left(-\frac{e^{-y}}{2}(\cos y - \sin y)\right).$$

**Příklad 6.6.** Použijte substituci u = x + 2y, v = x - y pro výpočet integrálu

$$\int_{0}^{\frac{2}{3}} \int_{y}^{2-2y} (x+2y)e^{y-x} dx dy.$$

#### Řešení:

Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le \frac{2}{3}, \quad y \le x \le 2 - 2y.$$

Jde o trojúhelník s vrcholy (0,0),  $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$  a (2,0). Substituce  $\Phi$  je lineární zobrazení, které je zadáno svou inverzí, tedy

$$\left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right) = \Phi^{-1} \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right).$$

Trojúhelník lze vyjádřit jako tzv. konvexní obal ze svých vrcholů (tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje dané vrcholy - pro body  $A_1, \ldots, A_n$  je konvexní obal  $[A_1, \ldots, A_n]_{\alpha}$  dán jako

$$[A_1, \dots, A_n]_{\alpha} = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \mid 0 \le \lambda_1, \dots, \lambda_n \& \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}\}.$$

Protože (prosté) lineární zobrazení  $\Phi$  konvexní obaly zachovává, je množina U taková, že  $\Phi(U)=E$ , daná také jako konvexní obal z vrcholů

$$\Phi^{-1}(0,0) = (0,0)$$

$$\Phi^{-1}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (2, 0)$$

$$\Phi^{-1}(2,0) = (2,2).$$

Tedy

$$U: \quad 0 \leq v \leq u, \quad \ 0 \leq u \leq 2.$$

Dále je  $(\Phi^{-1})'=({1\atop 1-1}),$  det  $\Phi'={1\over \det(\Phi^{-1})'}=-{1\over 3}.$  Po substituci pak máme

$$\int_{0}^{\frac{2}{3}} \int_{y}^{2-2y} (x+2y)e^{y-x} dx dy = \iint_{E-\Phi(U)} (x+2y)e^{y-x} dS = \iint_{U} ue^{-v} \cdot \frac{1}{3} dS =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{0}^{2} \int_{0}^{u} u e^{-v} dv du = \frac{1}{3} \int_{0}^{2} u \left[ -e^{-v} \right]_{v=0}^{v=u} du = \frac{1}{3} \int_{0}^{2} u (1 - e^{-u}) du = \frac{1}{3} \left[ \frac{u^{2}}{2} + (u+1)e^{-u} \right]_{u=0}^{u=2} = 1 + e^{-2}.$$

# Příklad 6.7. Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_{E} \frac{y}{x} e^{xy} \ dS$$

pro množinu E v prvním kvadrantu omezenou křivkami xy=2, xy=4, y=2x a  $y=\frac{x}{2}$ .

#### Řešení:

Oblast integrace je

$$E: \quad 0 < x, y, \quad \frac{x}{2} \le y \le 2x. \quad \frac{2}{x} \le y \le \frac{4}{x}$$

neboli

$$E: \quad 0 < x, y, \quad \frac{1}{2} \le \frac{y}{x} \le 2, \quad 2 \le xy \le 4.$$

Vzhledem ke tvaru oblasti i funkce bude výhodné zavést nové souřadnice

$$u = \frac{y}{x}$$
 a  $v = xy$ 

(které odpovídají přímkám procházející počátkem a hyperbolám). Předpis pro nové proměnné ale odpovídá předpokládané inverzi zobrazení  $\Phi$ , které použijeme pro substituci do našeho integrálu. Měli bychom tedy ještě ověřit, jestli toto zobrazení  $\Phi$  vůbec existuje a jestli je prosté - vyjádříme tudíž proměnné x a y pomocí proměnných u a v a dostaneme tak (za předpokladu, že x, y > 0)

$$x = \sqrt{\frac{v}{u}}$$
 a  $y = \sqrt{uv}$ .

Definujeme si tedy zobrazení

$$\Phi: (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(u, v) = \left(\sqrt{\frac{v}{u}}, \sqrt{uv}\right)$$

jehož inverze je

$$\Phi^{-1}:(0,+\infty)^2\to\mathbb{R}^2,\qquad \Phi^{-1}(x,y)=\Big(\frac{y}{x},xy\Big).$$

Determinant  $\Phi'$  se snadněji spočítá pomocí inverzního zobrazení (kde se nevyskytují odmocniny):

$$(\Phi^{-1})' = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}, \quad \det(\Phi^{-1})' = -2\frac{y}{x}$$

a tedy

$$\det \Phi'_{|(u,v)} = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'} \Big|_{\Phi(u,v)} = -\frac{1}{2u}.$$

Parametrizace U oblasti  $E = \Phi(U)$  je

$$U: \frac{1}{2} \le u \le 2, \quad 2 \le v \le 4.$$

Můžeme tedy psát

$$\iint_{E=\Phi(U)} \frac{y}{x} e^{xy} dS = \iint_{U} u e^{v} \left| -\frac{1}{2u} \right| dS = \frac{1}{2} \int_{2}^{4} \int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{v} du dv = \frac{3}{4} (e^{4} - e^{2}).$$

#### Příklad 6.8. Najděte hmotnost a polohu těžiště

- (i) trojúhelníku s vrcholy (0,0), (1,1), (4,0), jehož hustota je rovna  $\rho(x,y)=x$ .
- (ii) části roviny ohraničené parabolou  $y = 9 x^2$  a osou x, jejíž hustota je rovna  $\rho(x, y) = y$ .

# Řešení:

(i) Oblast integrace je

$$E: 0 \le y \le 1, \quad y \le x \le 4 - 3y.$$

Jednotlivé integrály tedy jsou

hmotnost:

$$m = \iint_{E} \rho \ dS = \int_{0}^{1} \left( \int_{y}^{4-3y} x \ dx \right) dy = \int_{0}^{1} \left[ \frac{x^{2}}{2} \right]_{x=y}^{x=4-3y} dy =$$
$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{1} (3y - 4)^{2} - y^{2} \ dy = \frac{1}{2} \left[ \frac{(3y - 4)^{3}}{9} - \frac{y^{3}}{3} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{10}{3}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m} \iint_E x \rho(x, y) \ dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \left( \int_y^{4-3y} x^2 \ dx \right) \ dy = \frac{1}{10} \int_0^1 \left[ x^3 \right]_{x=y}^{x=4-3y} \ dy = \frac{1}{10} \int_0^1 (4-3y)^3 - y^3 \ dy = \left[ -\frac{(4-3y)^4}{120} - \frac{y^4}{40} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{21}{10}$$

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m} \iint_E y \rho(x, y) \ dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \left( \int_y^{4-3y} xy \ dx \right) \ dy = \frac{3}{20} \int_0^1 \left[ x^2 y \right]_{x=y}^{x=4-3y} \ dy =$$

$$= \frac{3}{20} \int_0^1 y (4-3y)^2 - y^3 \ dy = \frac{12}{5} \int_0^1 y^3 - 3y^2 + 2y \ dy = \frac{12}{5} \left[ \frac{y^4}{4} - y^3 + y^2 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{5}.$$

(ii) Oblast integrace is

$$E: -3 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 9 - x^2.$$

hmotnost:

$$m = \iint_{E} \rho \, dS = \int_{-3}^{3} \left( \int_{0}^{9-x^{2}} y \, dy \right) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^{3} \left[ y^{2} \right]_{0}^{9-x^{2}} \, dx = \int_{0}^{3} (x^{2} - 9)^{2} \, dx =$$

$$= \left[ \frac{x^{5}}{5} - 6x^{3} + 81y \right]_{x=0}^{x=3} = \frac{648}{5}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m} \iint_E x \rho(x, y) \ dS = \frac{1}{m} \int_{-3}^3 x \left( \int_0^{9-x^2} y \ dy \right) \ dx = 0$$

(je to lichá funkce na množině symetrické podle osy y) y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m} \iint_E y \rho(x, y) \ dS = \frac{1}{m} \int_{-3}^3 \left( \int_0^{9-x^2} y^2 \ dy \right) \ dx = \frac{1}{3m} \int_{-3}^3 \left[ y^3 \right]_{y=0}^{y=9-x^2} \ dx = \frac{2}{3m} \int_0^3 (3^2 - x^2)^3 \ dx = \frac{5}{3 \cdot 324} \left[ 3^6 x - 3^4 x^3 + \frac{3^3}{5} x^5 - \frac{x^7}{7} \right]_{x=0}^{x=3} = \frac{36}{7}.$$

Příklad 6.9. K výpočtu integrálu

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{2} (e^{y^{2}} + 2xy) dy dx$$

zvolte vhodný způsob integrace.

#### Řešení:

Použijeme změnu pořadí integrace jednotlivých proměnných. Oblast integrace je

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \& 2x \le y \le 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2 \& 0 \le x \le \frac{y}{2}\}.$$

$$\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{2x}^{2}\left(e^{y^{2}}+2xy\right)\ dy\ dx = \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{\frac{y}{2}}\left(e^{y^{2}}+2xy\right)\ dx\ dy = \int\limits_{0}^{2}\frac{y}{2}e^{y^{2}}+\frac{y^{3}}{4}\ dy = \left[\frac{e^{y^{2}}}{4}+\frac{y^{4}}{16}\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{e^{4}+3}{4}.$$

Jiné, mnohem náročnější řešení: Použijeme substituci polárních souřadnic  $\Phi$ 

$$\Phi: \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}, \quad \det\Phi' = r$$

oblasti

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \& 2x \le y \le 2\}$$

s parametrizací  $E = \Phi(U)$  jako

$$U = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r\cos\varphi \leq 1 \ \& \ 2r\cos\varphi \leq r\sin\varphi \leq 2 \ \& \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Ta se po úpravách zjednoduší na

$$U = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le \frac{2}{\sin \varphi} \& \arctan 2 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \}.$$

Pak máme

$$\iint_{E=\Phi(U)} \left(e^{y^2} + 2xy\right) dS = \iint_{U} \left(e^{r^2 \sin^2 \varphi} + 2r^2 \sin \varphi \cos \varphi\right) r dS =$$

$$= \int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{2\pi}{\sin \varphi}} \left(e^{r^2 \sin^2 \varphi} + 2r^2 \sin \varphi \cos \varphi\right) r dr d\varphi =$$

$$= \int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{r^2 \sin^2 \varphi}}{2 \sin^2 \varphi} + \frac{r^4 \sin \varphi \cos \varphi}{2}\right]_{r=0}^{r=\frac{2}{\sin \varphi}} d\varphi = \int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^4 - 1}{2 \sin^2 \varphi} + \frac{8 \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} d\varphi =$$

$$= \left[\frac{1 - e^4}{2} \cot g(\varphi) - \frac{4}{\sin^2 \varphi}\right]_{\varphi = \arctan 2}^{\varphi = \frac{\pi}{2}} =$$

$$= -4 - \frac{1 - e^4}{2} \frac{1}{\tan(\arctan 2)} + 4\left(1 + \frac{1}{\left(\tan(\arctan 2)\right)^2}\right) = \frac{e^4 + 3}{4}.$$

Příklad 6.10. Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál

$$\iint\limits_{\Gamma} e^{y^3} \sqrt{xy - y^2} \ dS,$$

kde oblast E je omezená přímkami y = x, x = 10y a y = 1. Tuto oblast načrtněte.

#### Řešení

Oblast E je trojúhelník s vrcholy (0,0), (1,1) a (10,1) a pro výraz pod odmocninou tak máme  $xy - y^2 = y(x-y) \ge 0$ . Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad y \le x \le 10y$$

$$\iint_{E} e^{y^{3}} \sqrt{xy - y^{2}} \, dS = \int_{0}^{1} \int_{y}^{10y} e^{y^{3}} \sqrt{xy - y^{2}} \, dx \, dy = \int_{0}^{1} \left[ e^{y^{3}} \frac{2}{3} \cdot \frac{(xy - y^{2})^{3/2}}{y} \right]_{x=y}^{x=10y} \, dy =$$

$$= \int_{0}^{1} e^{y^{3}} \frac{2}{3} \cdot \frac{(9y^{2})^{3/2}}{y} \, dy = 6 \int_{0}^{1} 3y^{2} e^{y^{3}} \, dy = 6 \left[ e^{y^{3}} \right]_{y=0}^{y=1} = 6(e-1) \, .$$

# Příklad 6.11. K výpočtu integrálu

$$\iint_E x \cos(x^2 + y) \ dS$$

 $kde\ E: -\sqrt{\pi} \le x \le 0,\ 0 \le y \le \pi,\ zvolte\ vhodný\ způsob\ integrace.$ 

#### Řešení:

Oblast E je obdélník. Můžeme použít integraci jak podle x tak podle y:

$$\iint_{E} x \cos(x^{2} + y) \ dS = \int_{0}^{\pi} \int_{-\sqrt{\pi}}^{0} x \cos(x^{2} + y) \ dx \ dy = \int_{0}^{\pi} \left[ \frac{\sin(x^{2} + y)}{2} \right]_{x = -\sqrt{\pi}}^{x = 0} \ dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} \sin(y) - \sin(y + \pi) \ dy = \int_{0}^{\pi} \sin(y) \ dy = \left[ -\cos(y) \right]_{y = 0}^{y = \pi} = 2$$

nebo

$$\iint_{E} x \cos(x^{2} + y) \ dS = \int_{-\sqrt{\pi}}^{0} \int_{0}^{\pi} x \cos(x^{2} + y) \ dy \ dx = \int_{-\sqrt{\pi}}^{0} \left[ x \sin(x^{2} + y) \right]_{y=0}^{y=\pi} \ dx = \int_{0}^{0} x \sin(x^{2} + \pi) - x \sin(x^{2}) \ dx = \int_{0}^{0} -2x \sin(x^{2}) \ dx = \left[ \cos(x^{2}) \right]_{x=-\sqrt{\pi}}^{x=0} = 2.$$

Příklad 6.12. Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál

$$\iint\limits_{E} x^2 \cdot |y| \ dS,$$

kde oblast je  $E: x^2 + y^2 \le 2$ . Tuto oblast načrtněte.

#### Řešení

Oblast je kruh o poloměru  $\sqrt{2}$ . K výpočtu použijeme sférické souřadnice:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$0 \le r \le \sqrt{2}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\iint_E x^2 \cdot |y| \ dS = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\varphi \cdot |r\sin\varphi| \cdot r \ d\varphi \ dr = \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^4 \ dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi |\sin\varphi| \ d\varphi\right) = 0$$

$$=\frac{(\sqrt{2})^5}{5}\cdot\left(2\int\limits_0^\pi\cos^2\varphi\sin\varphi\ d\varphi\right)=\frac{8\sqrt{2}}{5}\cdot\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}=\frac{16\sqrt{2}}{15}\ .$$

Příklad 6.13. Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iint\limits_{E} e^{\frac{x}{y}} \ dS,$$

 $kde\ E\ je\ oblast\ v\ prvním\ kvadrantu\ omezená\ křivkami\ x=y^2,\ x=0\ a\ y=1.$ 

## Řešení:

Oblast integrace

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y^2 \& 0 < y \le 1\}$$

je omezená, ale u funkce  $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$  zúžené na E to není jasné - problémový je bod (0,0). Vyšetříme tedy chování f na E v tomto bodě. Protože pro  $(x,y)\in E$  máme  $0\leq x\leq y^2$  a 0< y, tak  $0\leq \frac{x}{y}\leq y$  a tedy

$$1 < e^{\frac{x}{y}} < e^y \to 1$$

pro  $(x,y) \to (0,0)$  a proto  $\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in E}} e^{\frac{x}{y}} = 1$ . Funkce f je proto na E omezená a spojitá a integrál

tedy existuje.

Pro výpočet použijeme Fubiniho větu

$$\iint\limits_{E} e^{\frac{x}{y}} \ dS = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{y^{2}} e^{\frac{x}{y}} \ dx \ dy = \int\limits_{0}^{1} \left[ y e^{\frac{x}{y}} \right]_{x=0}^{x=y^{2}} \ dy = \int\limits_{0}^{1} y e^{y} - y \ dy = \left[ (y-1)e^{y} - \frac{y^{2}}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}.$$

# 7 Trojný integrál

Příklad 7.1. Vypočtěte

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2) dz dy dx.$$

# Řešení:

Oblast integrace je

$$E: |x| \le 2$$
 &  $|y| \le \sqrt{4-x^2}$  &  $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$ 

neboli

$$E: \quad x^2 \le 4 \quad \& \quad x^2 + y^2 \le 4 \quad \& \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2$$

a tedy

$$E: \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2,$$

což je kužel s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. K výpočtu integrálu použijeme *cylindrické souřadnice*:

$$\Phi: \langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \text{kde} \quad \Phi: \quad y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

tj.

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det \Phi' = r \ .$$

Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U: \quad 0 \le r \le z \le 2 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$
.

Můžeme tedy psát

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2) dz dy dx = \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2) dV =$$

$$= \iiint_{U} r^2 \cdot r dV = \int_{0}^{2} \int_{0}^{z} \int_{0}^{2\pi} r^3 d\varphi dr dz = 2\pi \int_{0}^{2} \int_{0}^{z} r^3 dr dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{0}^{2} z^4 dz = \frac{\pi}{10} \cdot 2^5 = \frac{16}{5}\pi.$$

# Příklad 7.2. Vypočtěte

$$\iiint_{E} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}} \ dV,$$

 $kde\ E:\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1.$ 

#### Řešení:

Věta o substituci má analogický tvar a podmínky (pouze "zanedbatelné" množiny nyní zahrnují i plochy, roviny atd.):

$$\iiint_{\Phi(U)} f \ dV = \iiint_{U} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \ dV.$$

Použijeme sférické souřadnice:

$$\begin{aligned} x &= (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ \Psi : \langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \to \mathbb{R}^3, \quad \text{kde} \quad \Psi : \quad y &= (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}.$$

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

takže pro determinant máme

$$\det \Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1} \cdot \det(\Phi_1)' = \tilde{r}_{|\Phi_1} \cdot r = (r \sin \vartheta) \cdot r = r^2 \sin \vartheta.$$

Zvolíme si parametrizaci koule  $E = \Psi(U)$  jako

$$U: \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \;.$$

Takže můžeme psát

$$\iint_{E=\Psi(U)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4}} \ dV = \iiint_{U} \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \vartheta + 4}} \ dV =$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \vartheta + 4}} \ d\varphi \ d\vartheta \ dr = 2\pi \int_{0}^{1} \int_{0}^{\pi} \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \vartheta + 4}} \ d\vartheta \ dr =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} \left[ r \frac{\sqrt{r^2 - 4r \cos \vartheta + 4}}{2} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} dr = \pi \int_{0}^{1} r \left( \sqrt{r^2 + 4r + 4} - \sqrt{r^2 - 4r + 4} \right) dr =$$

$$= \pi \int_{0}^{1} r \left( |r + 2| - |r - 2| \right) dr = \pi \int_{0}^{1} r \left( r + 2 - (2 - r) \right) dr = 2\pi \int_{0}^{1} r^2 dr = \frac{2}{3}\pi.$$

# Příklad 7.3. Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \quad \& \quad z \cdot \tan(\alpha) \ge \sqrt{x^2 + y^2},$$

s hustotou  $\rho = 1$ , kde R > 0 a  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  jsou parametry.

#### Řešení:

Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem  $2\alpha$ , jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít opět sférické souřadnice

$$\begin{array}{rcl}
x & = & r \sin \vartheta \cos \varphi \\
\Psi : & y & = & r \sin \vartheta \sin \varphi \\
z & = & r \cos \vartheta
\end{array}$$

Parametrizace  $E = \Psi(U)$  pak bude

$$U: \quad 0 \leq r \leq R \qquad \& \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \qquad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \alpha$$

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$m = \iiint_{E=\Psi(U)} 1 \ dV = \iiint_{U} r^2 \sin \vartheta \ dV = \int_{0}^{R} \int_{0}^{\alpha} \int_{0}^{2\pi} r^2 \sin \vartheta \ d\varphi \ d\vartheta \ dr =$$
$$= 2\pi \int_{0}^{R} \int_{0}^{\alpha} r^2 \sin \vartheta \ d\vartheta \ dr = 2\pi (1 - \cos \alpha) \int_{0}^{R} r^2 \ dr = \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos \alpha).$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$=\frac{\pi}{m}\left(\int\limits_0^R r^3\ dr\right)\cdot\left(\int\limits_0^\alpha \sin 2\vartheta\ d\vartheta\right)=\frac{\pi R^4}{8m}(1-\cos 2\alpha)=\frac{3R}{16}\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{1-\cos \alpha}=\frac{3R}{8}(1+\cos \alpha).$$

**Příklad 7.4.** Určete těžiště homogenního kužele s výškou h > 0 a poloměrem podstavy R > 0.

# Řešení:

Kužel

$$E: 0 \le z \le H \& \sqrt{x^2 + y^2} \le \frac{R}{h} \cdot z,$$

tentokrát pro změnu zintegrujeme tak, že ho nejdříve rozřežeme horizontálně na kruhy a ty pak zintegrujeme v závislosti na výšce. Využijeme známý vzorec na obsah kruhu o daném poloměru.

hmotnost:

$$m = \iiint_E 1 \ dV = \int_0^h \left( \iint_{\sqrt{x^2 + y^2} \le \frac{R}{h} \cdot z} 1 \ dx dy \right) \ dz = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot z^2 \ dz = \frac{\pi}{3} R^2 h$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_E z \ dV = \frac{1}{m} \int_0^h \left( \iint_{\sqrt{x^2 + y^2} \le \frac{R}{h} \cdot z} z \ dx dy \right) \ dz = \frac{1}{m} \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot z^3 \ dz = \frac{1}{m} \frac{\pi}{4} R^2 h^2 = \frac{3}{4} h \ .$$

Z postupu je vidět, že při integraci záleží pouze na ploše horizontálních řezu (přesněji na závislostí plochy na výšce) a tedy stejný výsledek (těžiště je ve čtvrtině výšky nad podstavou) dostaneme pro "kužel" s jakýmkoliv tvarem podstavy (např. pyramidu atd.).

# Příklad 7.5. Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \quad \& \quad x, y, z \ge 0,$$

s hustotou  $\rho = 1$ , kde a, b, c > 0 jsou parametry.

## Řešení:

Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sférické souřadnice  $\Phi$  (které parametrizují tento elipsoid):

$$\begin{array}{rcl} x/a & = & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \Phi: & y/b & = & r\sin\vartheta\sin\varphi \\ & z/c & = & r\cos\vartheta \end{array},$$

které vzniknou složením "klasických" sférických souřadnic  $\Psi$  a lineární transformace  $\mathcal{L}$ , která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \qquad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}'_{|\Phi} \circ \Psi'$$
 a  $\det \Phi' = (\det \mathcal{L}'_{|\Phi}) \cdot (\det \Psi') = abc \cdot r^2 \sin \vartheta$ ,

protože

$$\mathcal{L}' = \left( \begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{array} \right).$$

Parametrizace U oblasti  $E = \Phi(U)$  je

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Výpočet hmotnosti E si usnadníme znalostí objemu koule K o poloměru 1 a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého elipsoidu F. Protože  $F = \mathcal{L}(K)$ , máme:

$$m = \iiint_E 1 \ dV = \frac{1}{8} \iiint_{F=\mathcal{L}(K)} 1 \ dV = \frac{1}{8} \iiint_K |\det \mathcal{L}'| \ dV =$$
$$= \frac{abc}{8} \iiint_K 1 \ dV = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi abc}{6}.$$

Pro zjištění těžiště  $T=(T_1,T_2,T_3)$  se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např.  $T_3$ ), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_{E = \Phi(U)} z \ dV = \frac{1}{m} \iiint_{U} (cr \cos \vartheta) \cdot (abcr^2 \sin \vartheta) \ dV =$$

$$=\frac{3c}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}r^3\sin 2\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr=\frac{3c}{\pi}\left(\int\limits_0^1r^3\ dr\right)\cdot\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\vartheta\ d\vartheta\right)\cdot\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}1\ d\varphi\right)=\frac{3}{8}c.$$

Podobně tedy budeme mít  $T_1 = \frac{3}{8}a$  a  $T_2 = \frac{3}{8}b$ .

**Příklad 7.6.** Vypočtěte moment setrvačnosti rotačního paraboloidu E o výšce h a poloměru postavy R vzhledem k ose, která prochází těžištěm E a je kolmá k ose rotační symetrie paraboloidu E (tzv. ekvatoriální moment).

#### Řešení:

Oblast integrace je

$$E: \quad \frac{h}{R^2}(x^2+y^2) \le z \le h.$$

Určíme těžiště tělesa E pomocí cylindrických souřadnic

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ \Phi : & y & = & r\sin\varphi \\ z & = & z \end{array}$$

a parametrizace  $E = \Phi(U)$ 

$$U: \quad \frac{hr^2}{R^2} \le z \le h \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ .$$

hmotnost:

$$\begin{split} m &= \iiint\limits_{E = \Phi(U)} 1 \ dV = \iiint\limits_{U} r \ dV = \int\limits_{0}^{R} \int\limits_{\frac{hr^{2}}{R^{2}}}^{h} \int\limits_{0}^{2\pi} r \ d\varphi \ dz \ dr = \\ &= 2\pi \int\limits_{0}^{R} r \left( h - \frac{hr^{2}}{R^{2}} \right) \ dr = 2\pi h \left[ \frac{r^{2}}{2} - \frac{r^{4}}{4R^{2}} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi h R^{2}}{2}. \end{split}$$

Těleso E je rotačně symetrické podle osy z, takže je potřeba určit pouze z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_{3} = \frac{1}{m} \iiint_{E=\Phi(U)} z \ dV = \frac{1}{m} \iiint_{U} zr \ dV = \frac{1}{m} \int_{0}^{R} \int_{\frac{hr^{2}}{R^{2}}}^{h} \int_{0}^{2\pi} zr \ d\varphi \ dz \ dr =$$

$$= \frac{4}{hR^{2}} \int_{0}^{R} \int_{\frac{hr^{2}}{R^{2}}}^{h} zr \ dz \ dr = \frac{2}{hR^{2}} \int_{0}^{R} r \left(h^{2} - \frac{h^{2}r^{4}}{R^{4}}\right) \ dr = \frac{2h}{R^{2}} \left[\frac{r^{2}}{2} - \frac{r^{6}}{6R^{4}}\right]_{r=0}^{r=R} = \frac{2}{3}h.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na osu z a procházející těžištěm nebude (vzhledem k symetrii tělesa E podle osy z) záviset na konkrétní volbě směru této osy. Zvolíme si ji tedy např. rovnoběžnou s osou x - tj. osa p bude mít rovnice y=0 a  $z=\frac{2}{3}h$ . Hledaný moment setrvačnosti pak bude

$$M = \iiint_E \left(\rho_p(x, y, z)\right)^2 dV,$$

kde  $\rho_p(x,y,z)=y^2+\left(z-\frac23h\right)^2$  je čtverec vzdálenosti bodu (x,y,z) od přímky p. K výpočtu momentu použijeme opět transformaci  $\Phi$ :

$$M = \iiint_{E = \Phi(U)} y^2 + \left(z - \frac{2}{3}h\right)^2 dV = \iiint_{U} r^3 \sin^2 \vartheta + r\left(z - \frac{2}{3}h\right)^2 dV =$$

$$= \int_{0}^{R} \int_{hr^2}^{h} \int_{0}^{2\pi} r^3 \sin^2 \vartheta + r\left(z - \frac{2}{3}h\right)^2 d\varphi dz dr = \pi \int_{0}^{R} \int_{hr^2}^{h} r^3 + 2r\left(z - \frac{2}{3}h\right)^2 dz dr =$$

$$=\pi\int\limits_0^R hr^3\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)+\frac{2}{3}r\left[\left(z-\frac{2}{3}h\right)^3\right]_{z=\frac{hr^2}{R^2}}^{z=h} dr =\pi h\int\limits_0^R r^3-\frac{r^5}{R^2}+\frac{2}{81}rh^2-\frac{2}{3}h^2r\left(\frac{r^2}{R^2}-\frac{2}{3}\right)^3 dr =$$

$$=\pi h\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{6}+\frac{R^2h^2}{81}-\left[\frac{h^2R^2}{12}\left(\frac{r^2}{R^2}-\frac{2}{3}\right)^4\right]_{r=0}^{r=R}\right)=\frac{\pi hR^2}{12}\left(R^2+\frac{h^2}{3}\right).$$

# Příklad 7.7. Vypočtěte

$$\iiint\limits_E y\ dV,$$

kde E je ohraničeno shora rovinou z=x+2y a leží nad oblastí v rovině z=0 ohraničené křivkami  $y=x^2,\ y=0,\ x=1.$ 

#### Řešení:

Oblast integrace je

$$E: 0 \le z \le x + 2y, 0 \le y \le x^2, 0 \le x \le 1.$$

I zde platí

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  je oblast integrace a  $f: E \to \mathbb{R}$  je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint\limits_E f \ dV = \iint\limits_{\pi(E)} \ \left( \int\limits_{(\{x\} \times \{y\} \times \mathbb{R}) \cap E} f(x,y,z) \ dz \right) dS,$$

kde  $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$  je projekce,  $\pi(x, y, z) = (x, y)$  a dS znamená integraci podle zbylých proměnných, tj. x a y. Případně:

$$\iint \iint_E f \ dV = \iint_{\pi_1(E)} \left( \iint_{(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap \pi_1, \gamma(E)} \left( \iint_{(\{x\} \times \{y\} \times \mathbb{R}) \cap E} f(x, y, z) \ dz \right) dy \right) dx,$$

kde  $\pi_{1,2}, \pi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$  jsou projekce,  $\pi_{1,2}(x,y,z) = (x,y)$  a  $\pi_1(x,y,z) = x$ .

$$\iiint_E y \ dV = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y \ dz \ dy \ dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} y(x+2y) \ dy \ dx = \int_0^1 \left[ \frac{y^2}{2}x + \frac{2y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x^2} \ dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3} \ dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.$$

# Příklad 7.8. Vypočtěte

$$\iiint_E xyz \ dV,$$

 $kde\ E\ je\ ohraničeno\ plochami\ y=x^2,\ x=y^2,\ z=xy\ a\ z=0.$ 

# Řešení:

Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le xy, \quad x^2 \le y \le \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Máme tedy

$$\iiint_E xyz \ dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{xy} xyz \ dz \ dy \ dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2} \ dy \ dx = \frac{1}{8} \int_0^1 x^5 - x^{11} \ dx = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{96}.$$

# Příklad 7.9. Vypočtěte

$$\iiint\limits_E xy\ dV,$$

 $kde\ E\ je\ \check{c}ty\check{r}st\check{e}n\ s\ vrcholy\ (0,0,0),\ (0,1,0),\ (1,1,0)\ a\ (0,1,1).$ 

#### Řešení

Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami  $x=0,\,y=1,\,z=0$  a z=y-x. Tedy můžeme psát např.

$$E: 0 \le z \le y - x, 0 \le x \le y, 0 \le y \le 1.$$

Máme tedy

$$\iiint_E xy \ dV = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{y-x} xy \ dz \ dx \ dy = \int_0^1 \int_0^y y^2 x - x^2 y \ dx \ dy = \int_0^1 \left[ y^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=y} \ dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3} \ dy = \left[ \frac{y^5}{30} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}.$$

# Příklad 7.10. Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iiint\limits_{E}|z|\ dV,$$

 $kde\ E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1 \& |z| \le 3 \& y \ge 0\}.$ 

# Řešení:

Oblast E je polovina válce. K výpočtu integrálu použijeme cylindrické souřadnice:

$$\Phi(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z), \quad \det \Phi' = r$$

s parametrizací oblasti  $E = \Phi(U)$  jako

$$U = \{ (r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 1 \& |z| \le 3 \& 0 \le \varphi \le \pi \}.$$

$$\iiint\limits_{E=\Phi(U)}|z|\ dV=\iiint\limits_{U}|z|r\ dV=\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{-3}^{3}|z|r\ dz\ d\varphi\ dr=\left(\int\limits_{-3}^{3}|z|\ dz\right)\cdot\left(\int\limits_{0}^{\pi}1\ d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_{0}^{1}r\ dr\right)=\frac{9}{2}\pi.$$

# Příklad 7.11. Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iiint x^2 \ dV,$$

 $kde\ E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 \ \& \ 0 \le y \ \& \ x \le 0\}.$ 

## Řešení:

Oblast E je čtvrtina kužele. K výpočtu integrálu použijeme cylindrické souřadnice:

$$\Phi(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z), \quad \det \Phi' = r$$

s parametrizací oblasti $E=\Phi(U)$ jako

$$U=\{(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3\mid 0\leq r\leq z\leq 2\ \&\ \frac{\pi}{2}\leq \varphi\leq \pi\}.$$

$$\begin{split} \iiint\limits_{E=\Phi(U)} x^2 \ dV &= \iiint\limits_{U} r^3 \cos^2 \varphi \ dV = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int\limits_{0}^{2} \int\limits_{0}^{z} r^3 \cos^2 \varphi \ dr \ dz d\varphi = \frac{1}{4} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int\limits_{0}^{2} z^4 \cos^2 \varphi \ dz d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \left( \int\limits_{0}^{2} z^4 \ dz \right) \cdot \left( \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 \varphi \ d\varphi \right) = \frac{8}{5} \pi. \end{split}$$

# 8 Křivkový integrál

**Příklad 8.1.** Integrujte funkci  $f(x,y)=\frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}$  podél křivky  $\Gamma$ :  $y=\frac{x^2}{2}$  od bodu  $A=(1,\frac{1}{2})$  do bodu B=(0,0).

#### Řešení:

Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int_{\Gamma} f \ ds = \int_{a}^{b} f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)|| \ dt,$$

kde  $\varphi$  je vhodná parametrizace křivky  $\Gamma$ , tj. zobrazení  $\varphi:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}^n$ , které je

- spojité a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu  $\langle a, b \rangle$  (to abychom mohli křivky navazovat na sebe),
- $\varphi$  je prosté na  $\langle a, b \rangle$  až na konečně mnoho vyjímek  $t_1, \ldots, t_n \in \langle a, b \rangle$  (křivka může protínat sama sebe),
- $\varphi(\langle a, b \rangle) = \Gamma$ .

Jako parametrizaci si zvolíme  $\varphi(t)=\left(1-t,\frac{(1-t)^2}{2}\right)$  pro  $t\in\langle0,1\rangle$ , které zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky. Pak je

$$\varphi'(t) = (-1, t - 1)$$
 a  $||\varphi'(t)|| = \sqrt{1 + (t - 1)^2}$ .

Takže

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_{0}^{1} \frac{1 - t + \frac{(1 - t)^{4}}{4}}{\sqrt{1 + (1 - t)^{2}}} \cdot \sqrt{1 + (t - 1)^{2}} \, dt = \int_{0}^{1} 1 - t + \frac{(1 - t)^{4}}{4} \, dt = \left[ \frac{u = 1 - t}{du = -dt} \right] =$$

$$= -\int_{1}^{0} u + \frac{u^{4}}{4} \, du = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}.$$

Příklad 8.2. Vypočítejte křivkový integrál

$$\int\limits_{\Gamma} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) \ ds,$$

#### Řešení:

Rovnice asteroidy se podobá rovnici kružnice, až na jiné exponenty. Zparametrizujeme ji proto upravenými polárními souřadnicemi, které budou mít také vhodné exponenty:

$$\varphi: \begin{array}{l} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{array}$$

pro  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Pak je

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(-3a\cos^2 t \cdot \sin t, \ 3a\sin^2 t \cdot \cos t\right)$$

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{(3a\cos t \cdot \sin t)^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3a |\cos t \cdot \sin t|.$$

Využijeme toho, že asteroida i funkce jsou symetrické podle souřadných os, takže stačí počítat jen na čtvrtině asteroidy:

$$\int_{\Gamma} \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds = \int_{0}^{2\pi} a^{\frac{4}{3}} \left(\cos^{4} t + \sin^{4} t\right) \cdot 3a \left|\cos t \cdot \sin t\right| dt =$$

$$=12\cdot a^{\frac{7}{3}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^{5}t\cdot\sin t+\sin^{5}t\cdot\cos t\right)\ dt=2a^{\frac{7}{3}}\left[-\cos^{6}t+\sin^{6}t\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}=4a^{\frac{7}{3}}\ .$$

**Příklad 8.3.** Integrujte funkci f(x,y) = x + y podél křivky  $C: x^2 + y^2 = 4$  v prvním kvadrantu od bodu A = (2,0) do bodu B = (0,2).

#### Řešení:

Jako parametrizaci si zvolíme např. polární souřadnice  $\varphi(t) = \left(2\cos(t), 2\sin(t)\right)$  pro  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Pak je

$$\varphi'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t)) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = 2.$$

Takže

$$\int_{C} f \ ds = 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) + \sin(t) \ dt = 4 \Big[ \sin(t) - \cos(t) \Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 8.$$

Příklad 8.4. Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{\Gamma} xy \ ds,$$

 $kde \; \Gamma: \; \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1 \; \; \& \; \; x,y \geq 0 \; s \; parametry \; a \neq b.$ 

## Řešení:

Křivka je jedna čtvrtina elipsy a proto zvolíme na parametrizaci upravené polární souřadnice

$$\frac{x}{a} = \cos t$$
 
$$\varphi:$$
 
$$\frac{y}{b} = \sin t$$

pro  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Pak máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(-a\sin t, \ b\cos t\right)$$

$$\begin{aligned} ||\varphi'(t)|| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \ . \end{aligned}$$
 Takže 
$$\int_{\Gamma} xy \ ds = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ab \cos t \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \ dt = \left[ \frac{u = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{du = 2(a^2 - b^2) \sin t \cos t} \right] = \\ &= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \int_{0}^{a^2} \sqrt{u} \ du = \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} \left[ u^{\frac{3}{2}} \right]_{u = b^2}^{u = a^2} = \frac{ab(a^3 - b^3)}{3(a^2 - b^2)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)} \ . \end{aligned}$$

**Příklad 8.5.** Částice se pohybuje tak, že poloha v čase t je určena jako  $\varphi(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{t^2}{2}\right)$ . Určete délku dráhy, kterou urazí v časovém intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

#### Řešení:

Křivka leží v plášti válce  $x^2+y^2=1$  a je to postupně se roztahující šroubovice. Délka křivky  $\Gamma$  se pak vypočítá jako integrál z konstantní funkce f=1 podél dané křivky

$$\ell(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} 1 \ ds = \int\limits_{a}^{b} ||\varphi'(t)|| \ dt \ .$$

Máme tedy

$$\varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t), t)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + t^2} = \sqrt{1 + t^2},$$

takže dostáváme

$$\ell(\Gamma) = \int_{\Gamma} 1 \ ds = \int_{0}^{1} \sqrt{1 + t^2} \ dt = \begin{bmatrix} t = \sinh(\alpha) \\ dt = \cosh(\alpha) d\alpha \end{bmatrix} = \int_{0}^{\arcsin(1)} \sqrt{1 + \sinh^2(\alpha)} \cdot \cosh(\alpha) \ d\alpha = \int_{0}^{\det(1)} \int_{0}^{\det(1)}$$

$$= \int_{0}^{\operatorname{arcsinh}(1) = \ln(1+\sqrt{1+1^2})} \cosh^2(\alpha) \ d\alpha = \int_{0}^{\ln(1+\sqrt{2})} \left(\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\right)^2 \ d\alpha = \frac{1}{4} \int_{0}^{\ln(1+\sqrt{2})} 2 + e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} \ d\alpha = \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8} \left[e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}\right]_{\alpha=0}^{\alpha=\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8} \left((1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right) = \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{8} \left(3 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) \ .$$

Poznámka k substituci: Protože graf funkce  $u=\sqrt{1+t^2}$  je částí hyperboly  $(u^2-t^2=1)$ , je vhodné použít substituci pomocí hyperbolických funkcí

$$\cosh(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \quad \text{ a } \quad \sinh(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \ .$$

Jde o rozklad funkce  $e^{\alpha}$  na sudou a lichou funkci, tj.  $e^{\alpha} = \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)$ . Podobně se pro parametrizaci kružnice  $u = \sqrt{1 - t^2}$  zase používají goniometrické funkce  $\sin(\alpha)$  a  $\cos(\alpha)$ . Také vztahy vypadají v něčem podobně:

$$\cosh^{2}(\alpha) - \sinh^{2}(\alpha) = 1,$$
  $\sinh'(\alpha) = \cosh(\alpha)$  
$$\cosh^{2}(\alpha) + \sinh^{2}(\alpha) = \cosh(2\alpha),$$
  $\cosh'(\alpha) = \sinh(\alpha)$ 

Vyřešením kvadratické rovnice dostaneme vyjádření inverzní funkce pro  $t = \sinh(\alpha)$ :

$$\operatorname{arcsinh}(\alpha) = \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right).$$

**Příklad 8.6.** Spočítejte délku části kuželové spirály C s  $n \in \mathbb{N}$  závity definované parametrizací  $\varphi$ :  $\langle 0, 2n\pi \rangle \to \mathbb{R}^3$ ,

$$\varphi(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t).$$

#### Řešení:

Křivka leží v plášti kužele  $x^2+y^2=z^2$ . Délka křivky  $\mathcal C$  s parametrizací  $\varphi$  se pak vypočítá jako

$$L(\mathcal{C}) = \int_{a}^{b} ||\varphi'(t)|| \ dt \ \left( = \int_{\mathcal{C}} 1 \ ds \right),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce f=1 podél dané křivky  $\mathcal{C}$ . Máme tedy

$$\varphi'(t) = (\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t), 1)$$

 $\mathbf{a}$ 

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{\left(\cos(t) - t\sin(t)\right)^2 + \left(\sin(t) + t\cos(t)\right)^2 + 1^2} = \sqrt{2 + t^2},$$

takže dostáváme

$$L(\mathcal{C}) = \int\limits_{\mathcal{C}} 1 \ ds = \int\limits_{0}^{2n\pi} \sqrt{2+t^2} \ dt = \left[ \begin{smallmatrix} t = \sqrt{2}u \\ dt = \sqrt{2}du \end{smallmatrix} \right] = 2 \int\limits_{0}^{\sqrt{2}n\pi} \sqrt{1+u^2} \ du = \left[ \begin{smallmatrix} u = \sinh(x) \\ du = \cosh(x)dx \end{smallmatrix} \right] = 0$$

$$=2\int_{0}^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)}\cosh^{2}(u)\ du = \int_{0}^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)}1 + \cosh(2u)\ du = \left[u + \frac{\sinh(2u)}{2}\right]_{u=0}^{u = \operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} = \left[u + \sinh(u)\cosh(u)\right]_{u=0}^{u = \operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} = \left[u + \sinh(u)\sqrt{1 + \sinh(u)^{2}}\right]_{u=0}^{u = \operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}n\pi)} = \arctan(\sqrt{2}n\pi) + \sqrt{2}n\pi\sqrt{1 + 2n^{2}\pi^{2}} = \ln\left(\sqrt{2}n\pi + \sqrt{1 + 2n^{2}\pi^{2}}\right) + \sqrt{2}n\pi\sqrt{1 + 2n^{2}\pi^{2}}.$$

**Poznámka:** Opět jsme využili vztahy pro hyperbolické funkce  $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  a  $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \qquad \qquad \sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x), \qquad \cosh'(x) = \sinh(x)$$

Sečtením dostaneme

$$\cosh^2(x) = \frac{1 + \cosh(2x)}{2}$$

a zderivováním tohoto vztahu pak

$$2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$$
.

Inverzní funkci pro  $u = \sinh(x)$  už známe:

$$\operatorname{arcsinh}(u) = \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right).$$

Příklad 8.7. Dokažte, že následující pole jsou konzervativní a najděte jejich potenciál.

(i) 
$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y, y^2 + x, ze^z)$$
.

(ii) 
$$\vec{F}(x,y,z) = \left(3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2}, -\frac{1}{x+z}, \frac{y}{(x+z)^2}\right).$$

# Řešení:

Práce síly  $\vec{F}$  v oblasti U (tj. otevřené souvislé množině) z bodu A do bodu B nezávisí na dráze právě když pole má potenciál, tj. existuje funkce  $f: U \to \mathbb{R}$ , že grad $(f) = \vec{F}$ .

Pokud je oblast U navíc jednoduše souvislá (tj. jakákoliv uzavřená křivka v U se dá v rámci Uspojitě stáhnout do bodu), pak toto nastává právě když  $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$  na celém U.

Příkladem jednoduše souvislé oblasti je  $\mathbb{R}^n$  nebo  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

Příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá je  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^3 \setminus$  "osa x'' nebo torus (tj. "pneumatika").

V našem případě je oblastí celé  $\mathbb{R}^3$ , tedy jednoduše souvislá oblast. Pole rotace je definováno jako

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

kde  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

# (i) Po dosazení máme

$$rot(\vec{F}) = (0 - 0, 0 - 0, 1 - 1) = \vec{0},$$

tedy rotace je nulová na celém  $\mathbb{R}^3$  a pole  $\vec{F}$  má potenciál.

Potenciál je funkce  $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$  taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + x \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z . {3}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y,z) = \int (x^2 + y) dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y,z),$$

kde  $C:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^{2} + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^{3}}{3} + xy + C(y, z) \right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = y^2.$$

Dostáváme  $C(y,z)=\int y^2\ dy=\frac{y^3}{3}+D(z)$ , kde  $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z) \right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže  $D(z)=\int ze^z\ dz=(z-1)e^z+K$ , kde  $K\in\mathbb{R}$  je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z - 1)e^z + K.$$

(ii) Podobně jako v předchozím příkladu máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2}, \quad \frac{2y}{(x+z)^3} - \frac{2y}{(x+z)^3}, \quad \frac{1}{(x+z)^2} - \frac{1}{(x+z)^2}\right) = \vec{0}.$$

Rotace je opět nulová na celém  $\mathbb{R}^3$  a pole  $\vec{F}$  má potenciál.

Pro potenciál f máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x+z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y}{(x+z)^2} .$$
(5)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y}{(x+z)^2} . agen{6}$$

Začneme třeba druhou rovnici:

$$f(x, y, z) = \int -\frac{1}{x+z} dy = -\frac{y}{x+z} + C(x, z),$$

kde  $C:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$  je neznámá funkce závislá nyní pouze na x a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do třetí rovnice

$$-\frac{y}{(x+z)^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{y}{x+z} + C(x,z) \right) = -\frac{y}{(x+z)^2} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Dostáváme C(x,z) = D(x), kde  $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  je opět neznámá funkce závislá pouze na x. Dostáváme tedy zatím

$$f(x, y, z) = -\frac{y}{x + z} + D(x)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$3x^{2} + \frac{y}{(x+z)^{2}} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{y}{x+z} + D(x) \right) = \frac{y}{(x+z)^{2}} + \frac{\partial D}{\partial x}.$$

Takže  $D(x)=\int 3x^2\ dx=x^3+K,$  kde  $K\in\mathbb{R}$  je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = -\frac{y}{x + z} + x^3 + K.$$

 $\mathbf{Poznámka}:$  Jestliže pole  $\vec{F}$  vznikne jako gradient f, pak jeho rotace je nulová a tato nulovost vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací funkce f. Nulová rotace je ale jen nutnou podmínkou pro existenci potenciálu v případě, že oblast není jednoduše souvislá, jak ukazuje příklad vektorového pole

$$\vec{F}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0\right)$$

na množině  $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2\neq 0\},$  která není jednoduše souvislá.

$$rot(\vec{F}) = \left(0, 0, -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right) = \vec{0}$$

ale práce síly  $\vec{F}$  podél kružnice  $\Gamma:\varphi(\alpha)=(\cos\alpha,\sin\alpha,0),\,\alpha\in\langle0,2\pi\rangle$  je nenulová:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{0}^{2\pi} (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_{0}^{2\pi} 1 d\alpha = 2\pi.$$

Pole tedy nemá potenciál na celém U. Na druhé straně, na určitých podmnožinách U lze potenciál pole  $\vec{F}$  nalézt, např.

$$f_1(x, y, z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$
 na  $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$ 

nebo

$$f_2(x, y, z) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right)$$
 na  $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\}$ 

**Příklad 8.8.** Najděte práci síly  $\vec{F} = (y+z, z+x, x+y)$  vykonané na částici podél křivky C s parametrizací  $\varphi(t)=(t,t^2,t^4),\ t\in\langle 0,1\rangle.$  Její orientace je indukována touto parametrizací.

#### Řešení:

Integrál spočítáme podle vztahu

$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{a}^{b} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Máme

$$\varphi'(t) = (1, 2t, 4t^3)$$

a tedy

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_{0}^{1} (t^2 + t^4, t^4 + t, t + t^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix} dt = \int\limits_{0}^{1} 3t^2 + 5t^4 + 6t^5 dt = \left[ t^3 + t^5 + t^6 \right]_{0}^{1} = 3.$$

# 9 Plošný integrál

Příklad 9.1. Najděte velikost plochy

- (i) části roviny x + 2y + z = 4, která leží uvnitř válce  $x^2 + y^2 = 4$ ,
- (ii) paraboloidu  $z = x^2 + y^2$ , která leží pod rovinou z = 9.

# Řešení:

Plocha je určena jako  $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+2y+z=4\ \&\ x^2+y^2\le 4\}.$  Její obsah spočítáme podle vztahu

$$\iint\limits_{M} 1 \ dS = \iint\limits_{U} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \ dS,$$

kde  $\Phi$  je vhodná parametrizace ploch<br/>yM,tj. zobrazení  $\Phi:U\to\mathbb{R}^3,$ kde<br/>  $U\subseteq\mathbb{R}^2,$ které je

- spojitě diferencovatelné a prosté na  $U^{\circ}$ ,
- $\Phi(U) = M$
- matice  $\Phi'$  má hodnost 2 na  $U^\circ$  (neboli  $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \neq 0$  na  $U^\circ$ ).
- (i) Protože plocha M je grafem funkce f(x,y) = 4 x 2y s definičním oborem

$$U: \quad x^2 + y^2 < 4,$$

jako parametrizaci si jednoduše zvolíme

$$\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y)) = (x, y, 4 - x - 2y)$$

pro  $(x, y) \in U$ . Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, -1)$$
  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, -2)$ 

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 2, 1) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{6},$$

takže  $\Phi$  zřejmě splňuje všechny uvedené podmínky.

Můžeme tedy psát

$$\iint\limits_{M} 1 \ dS = \iint\limits_{U} \sqrt{6} \ dS = \sqrt{6} \iint\limits_{U} 1 \ dS = \sqrt{6} \cdot 4\pi,$$

protože obsah kruhu U o poloměru 2 je  $4\pi$ .

(ii) Plocha je určena jako

$$M: \quad x^2 + y^2 = z \& z \le 9.$$

Jako parametrizaci si zvolíme

$$\Phi(x,y) = (x,y,x^2 + y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2 + y^2 \le 9.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}.$$

Takže

$$\iint_{M} 1 \ dS = \iint_{U} \sqrt{4(x^{2} + y^{2}) + 1} \ dS = \begin{bmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ (r, \varphi) \in \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \end{bmatrix} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{3} r \sqrt{4r^{2} + 1} \ dr \ d\varphi = \begin{bmatrix} \int_{0}^{2\pi} r \sqrt{4r^{2} + 1} \ dr \end{bmatrix} \cdot \left( \int_{0}^{2\pi} 1 \ d\varphi \right) = \left[ \frac{(4r^{2} + 1)^{\frac{3}{2}}}{12} \right]_{r=0}^{r=3} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} \left( 37^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$$

# Příklad 9.2. Spočítejte

$$\iint\limits_{M} z \ dS,$$

 $kde\ M\ je\ \check{c}\acute{a}st\acute{\iota}\ v\acute{a}lce\ x^2+y^2=1\ mezi\ rovinami\ z=0\ a\ z=x+1.$ 

# Řešení:

Integrál z funkce  $f: M \to \mathbb{R}$  je určený jako

$$\iint\limits_{M} f \ dS = \iint\limits_{U} f(\Phi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \ dS \ ,$$

kde  $\Phi$  je opět vhodná parametrizace.

Plocha je určena jako

$$M: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad 0 \le z \le x + 1.$$

Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le z \le 1 + \cos \varphi.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\| = 1.$$

Takže pro funkci f(x, y, z) = z máme

$$\iint_{M} f \, dS = \iint_{U} z \, dS = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1 + \cos \varphi} z \, dz \, d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \frac{(1 + \cos \varphi)^{2}}{2} \, d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos \varphi + \frac{\cos^{2} \varphi}{2}\right) \, d\varphi = \pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

# Příklad 9.3. Spočítejte

$$\iint_{M} yz \ dS,$$

 $kde\ M\ je\ povrch\ popsan\acute{y}\ parametricky\ rovnicemi\ x=uv,\ y=u+v,\ z=u-v\ a\ u^2+v^2\leq 1.$ 

#### Řešení:

Plochu máme nyní definovanou jako  $M = \Phi(U)$ , kde

$$U: u^2 + v^2 < 1$$

a  $\Phi: U \to \mathbb{R}^3$ ,

$$\Phi(u,v) = (uv, u + v, u - v).$$

Ověříme ještě, že  $\Phi$  je skutečně parametrizace plochy M (tj.  $\Phi$  je prosté a hodnost derivace  $\Phi'$  je 2). Prostota  $\Phi$  plyne z toho, ze druhá a třetí souřadnice tohoto zobrazení (tj. y=u+v a z=u-v) tvoří regulární lineární zobrazení (které je prosté). Hodnost derivace ověříme jako v předchozím případě pomocí vektorového součinu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (v, 1, 1)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (u, 1, -1)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-2, v + u, v - u) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{2(u^2 + v^2) + 4} \neq 0.$$

Pro integrál pak máme

$$\iint_{M} yz \ dS = \iint_{U} (u^{2} - v^{2}) \sqrt{2(u^{2} + v^{2}) + 4} \ dS = \begin{bmatrix} u = r \cos \varphi \\ v = r \sin \varphi \\ (r,\varphi) \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,2\pi \rangle \end{bmatrix} = 2\pi \ 1$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} r^{3} (\cos^{2} \varphi - \sin^{2} \varphi) \sqrt{2r^{2} + 4} \ dr \ d\varphi = \left( \int_{0}^{3} r^{3} \sqrt{2r^{2} + 4} \ dr \right) \cdot \left( \int_{0}^{2\pi} \cos 2\varphi \ d\varphi \right) = 0,$$

protože druhý integrál je nulový.

**Poznámka:** Můžeme ještě určit, jak vlastně plocha M vypadá. Z rovnic y=u+v a z=u-v dostaneme  $u=\frac{z+y}{2}$  a  $v=\frac{y-z}{2}$ . Takže  $x=uv=\frac{y^2-z^2}{4}$  a  $1\geq u^2+v^2=\frac{z^2+y^2}{4}$ . Celkově tedy máme vztahy

$$y^2 - z^2 = 4x$$
,  $y^2 + z^2 < 4$ 

což je část hyperbolického paraboloidu (tj. sedlo) nacházející se uvnitř válce s osou x a poloměrem 2.

# Příklad 9.4. Spočítejte

$$\iint\limits_{M} x^2 z + y^2 z \ dS,$$

kde M je povrch polokoule  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \ge 0$ .

## Řešení:

Plochu  $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=4\ \&\ z\geq 0\}$  parametrizujeme pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (2\sin\vartheta\cos\varphi, 2\sin\vartheta\sin\varphi, 2\cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Dále máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-2\sin\vartheta\sin\varphi, 2\sin\vartheta\cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = (2\cos\vartheta\cos\varphi, 2\cos\vartheta\sin\varphi, -2\sin\vartheta).$$

Výpočet normy vektorového součinu si zjednodušíme tím, že si všimneme, že dané vektory jsou na sebe kolmé, tj.  $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$ . Pak je

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = 4 |\sin \vartheta|.$$

Máme tedy

$$\iint_{M} x^{2}z + y^{2}z \, dS = \iint_{U} \left( 8\sin^{2}\theta \cos\theta \right) \cdot 4|\sin\theta| \, dS = \left( \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^{3}\theta \cos\theta \, d\theta \right) \cdot \left( \int_{0}^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) =$$

$$= 2\pi \left[ 8\sin^{4}\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 16\pi.$$

# 10 Integrální věty

**Příklad 10.1.** Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly  $\vec{F}(x,y,z) = (2xy^3, 4x^2y^2)$  vykonané na částici podél křivky  $\Gamma$ , která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami y=0, x=1 a  $y=x^3$  v prvním kvadrantu. Křivka  $\Gamma$  je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

#### Řešení:

Máme tedy oblast

$$M: 0 \le x \le 1$$
 &  $0 \le y \le x^3$ .

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Podle Greenovy věty tedy pro pole  $\vec{F} = (F_1, F_2)$  máme

$$\int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{M} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right|$ . Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru" v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry" pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír" na okraji oblasti.

Máme tedy

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int\limits_{\Gamma=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \ dS = \iint\limits_{M} 2xy^2 \ dS = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{x^3} 2xy^2 \ dy \ dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{2}{3}x^{10} \ dx = \frac{2}{33}.$$

# Řešení:

Orientace okraje  $\partial M$  je v tomto případě daná vnější normálou.

V našem případě máme

$$M: x^2 + y^2 + z^2 \le 1$$

a

$$\partial M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ .$$

Gaussovu větu teď ověříme tak, že zjistíme, zda oba integrály dávají stejnou hodnotu.

Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

 $\mathbf{a}$ 

$$\iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F}) \ dV = \iiint\limits_{M} 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \ dV = \begin{bmatrix} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \\ (r, \varphi, \vartheta) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \end{bmatrix} = 0$$

$$=\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^13r^2\cdot|r^2\sin\vartheta|\ dr\ d\varphi\ d\vartheta=\left(\int\limits_0^13r^4\ dr\right)\cdot\left(\int\limits_0^{2\pi}1\ d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^\pi\sin\vartheta\ d\vartheta\right)=\frac{3}{5}\cdot2\pi\cdot2=\frac{12}{5}\pi.$$

Pro druhý integrál si zvolíme parametrizaci  $\partial M$  pomocí sférických souřadnic

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta),$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \ .$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad = \quad (\; -\sin\vartheta\sin\varphi, \; \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad 0 \quad )$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \quad = \quad (\quad \cos \vartheta \cos \varphi, \ \cos \vartheta \sin \varphi, \, - \sin \vartheta \, )$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = -\sin\vartheta \cdot (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) = -\sin\vartheta \cdot \vec{\Phi}(\varphi, \vartheta).$$

Vektor  $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$  tedy má směr normály směřující dovnitř. Protože plochu máme orientovanou směrem ven, musíme při výpočtu toku pole vzít tento vektor s opačným znaménkem, tj.  $-\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ . Dosazením tedy obdržíme

$$\begin{split} \iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint\limits_{U} \vec{F}(\Phi(\varphi, \vartheta)) \cdot \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) dS = \iint\limits_{U} \vec{F}(\Phi(\varphi, \vartheta)) \cdot \left( \sin \vartheta \cdot \vec{\Phi}(\varphi, \vartheta) \right) \, dS = \\ &= \int\limits_{0}^{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \sin \vartheta \left( \sin^{4} \vartheta \cos^{4} \varphi + \sin^{4} \vartheta \sin^{4} \varphi + \cos^{4} \vartheta \right) \, d\varphi \, \, d\vartheta = \\ &= \left( \int\limits_{0}^{\pi} \sin^{5} \vartheta \, \, d\vartheta \right) \cdot \left( \int\limits_{0}^{2\pi} \cos^{4} \varphi + \sin^{4} \varphi \, \, d\varphi \right) + \left( \int\limits_{0}^{\pi} \cos^{4} \vartheta \sin \vartheta \, \, d\vartheta \right) \cdot \left( \int\limits_{0}^{2\pi} 1 \, \, d\varphi \right). \end{split}$$

Pro první dva integrály máme díky posunutí a symetriím, že

$$\int_{0}^{2\pi} \cos^{4} \varphi \ d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \sin^{4} \varphi \ d\varphi = 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{4} \varphi \ d\varphi$$

a

$$\int\limits_{0}^{\pi}\sin^{5}\vartheta\ d\vartheta=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{5}\vartheta\ d\vartheta.$$

Pro  $n \ge 2$  spočítáme tedy integrál

$$A_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \alpha \ d\alpha = \left[ -\cos \alpha \cdot \sin^{n-1} \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} \alpha \cdot \cos^2 \alpha \ d\alpha =$$
$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} \alpha \cdot (1-\sin^2 \alpha) \ d\alpha = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n.$$

Tedy máme  $A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}$  a  $A_2 = \frac{\pi}{4}$  a  $A_0 = 1$ . Dokončením výpočtu dostáváme

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \dots = \left(2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4}\right) + \left(\left[-\frac{\cos^5 \vartheta}{5}\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}\right) \cdot \left(2\pi\right) = \frac{8}{5}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{12}{5}\pi,$$

a Gaussova věta je tak ověřena.

**Příklad 10.3.** Spočítejte tok pole  $\vec{F} = (e^y, ye^x, x^2y)$  částí paraboloidu  $z = x^2 + y^2$ ,  $0 \le x \le 1$ ,  $0 \le y \le 1$  s horní orientací.

# Řešení:

Plocha M je grafem funkce  $f(x,y) = x^2 + y^2$ , takže ji přirozeně parametrizujeme pomocí

$$\Phi(x,y) = \left(x,y,f(x,y)\right) = (x,y,x^2 + y^2)$$

s definičním oborem

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \& 0 \le y \le 1\}.$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

Třetí složka vektoru  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  je kladná, tedy tento normálový vektor odpovídá zadané orientací plochy "nahoru." Máme tak

$$\begin{split} \iint_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{U} \vec{F}(\Phi(x,y)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dS = \iint_{U} \left( e^{y}, y e^{x}, x^{2} y \right) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} dS = \\ &= \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left( -2x e^{y} - 2y^{2} e^{x} + x^{2} y \right) dx dy = \int_{0}^{1} -e^{y} - 2y^{2} (e^{1} - 1) + \frac{y}{3} dy = -(e - 1) - \frac{2}{3} (e - 1) + \frac{1}{6} = \\ &= \frac{11}{6} - \frac{5}{3} e. \end{split}$$

**Příklad 10.4.** Ověřte Gaussovu větu pro pole  $\vec{F} = (3x, xy, 2xz)$  a krychli  $M = (0, 1)^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ .

# Řešení:

Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3 + x + 2x = 3 + 3x$$

$$\iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F}) \ dV = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1} (3+3x) \ dx \ dy \ dz = \left( \int\limits_{0}^{1} 3+3x \ dx \right) \cdot \left( \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1} 1 \ dy \ dz \right) = \frac{9}{2}.$$

Integrál přes okraj rozdělíme na jednotlivé stěny  $(\partial M)_i$ ,  $i=1,\ldots,6$  a pro vztah

$$I_i := \iint\limits_{(\partial M)_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U_i} \vec{F}(\Phi_i) \cdot \vec{n}_i \ dS$$

použijeme parametrizace  $\Phi_i$ , kde  $U_i = \langle 0, 1 \rangle^2$ , a příslušné orientace  $(\partial M)_i$  pomocí normovaných normálových vektorů  $\vec{n}_i$ :

$$\begin{split} \Phi_1(x,y) &= (x,y,1), \quad \vec{n}_1 = (0,0,1), \quad I_1 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (3x,xy,2x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, dx \, dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 2x \, dx \, dy = 1 \\ \Phi_2(x,y) &= (x,y,0), \quad \vec{n}_2 = (0,0,-1), \quad I_2 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (3x,xy,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \, dx \, dy = 0 \\ \Phi_3(x,z) &= (x,1,z), \quad \vec{n}_3 = (0,1,0), \quad I_3 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (3x,x,2xz) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \, dx \, dz = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 x \, dx \, dz = \frac{1}{2} \\ \Phi_4(x,z) &= (x,0,z), \quad \vec{n}_4 = (0,-1,0), \quad I_4 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (3x,0,2xz) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \, dx \, dz = 0 \\ \Phi_5(y,z) &= (1,y,z), \quad \vec{n}_5 = (1,0,0), \quad I_5 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (3,y,2z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \, dy \, dz = 3 \\ \Phi_6(y,z) &= (0,y,z), \quad \vec{n}_6 = (-1,0,0), \quad I_6 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (0,0,0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \, dy \, dz = 0. \end{split}$$
 Tedy 
$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{S} = I_1 + \dots + I_6 = 1 + \frac{1}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

a Gaussova věta je tak ověřena.

**Příklad 10.5.** Vypočtěte průtok kapaliny, která proteče oblastí  $x^2 + y^2 \le R^2$ ,  $0 \le z \le a$  (kde a > 0, R > 0 jsou parametry), je-li rychlost proudění  $\vec{F} = (xz, yz, xy)$ .

# Řešení:

Oblast M je válec o poloměru R a výšce a. Integrály v Gaussově větě udávají rozdíl toho, co do oblasti přiteče a co z oblasti odteče (např. pro konstantní proudění je přítok roven odtoku a integrály jsou nulové), ale neříkají nám kolik kapaliny se celkově v objemu vymění (např. při velkém konstantním proudění to bude více než při malém). Abychom toto zjistili, je potřeba v integrálu toku pole přes povrch vzít zvlášť kladnou část integrované funkce, tj.  $\vec{F} \cdot \vec{n} > 0$  v daném bodě (ta odpovídá tomu, co odtéká), a zvlášť zápornou část, tj.  $\vec{F} \cdot \vec{n} < 0$  v daném bodě (ta odpovídá tomu, co vtéká).

Nechť  $\vec{n}$  představuje vnější normované normálové pole na okraji  $\partial M$ . Pak pro

$$\mathrm{odtok} := \iint\limits_{\partial M} \max\{0, \vec{F} \cdot \vec{n}\} \ dS$$

přítok := 
$$\left| \iint\limits_{\partial M} \min\{0, \vec{F} \cdot \vec{n}\} \; dS \; \right|$$

máme podle Gaussovy věty

odtok - přítok = 
$$\iint_{\partial M} \vec{F} \cdot \vec{n} \ dS = \iiint_{M} \operatorname{div}(\vec{F}) \ dV.$$

Výpočet toku přes  $\partial M$  rozdělíme na horní podstavu  $(\partial M)_1$ , dolní podstavu  $(\partial M)_2$  a plášť  $(\partial M)_3$ . Pro horní podstavu použijeme parametrizaci

$$\Phi_1(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, a) \text{ pro } U_1 = \langle 0, R \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$$

a vnější normálové pole

$$\vec{n}_1 = (0, 0, 1).$$

Tedy

$$\begin{split} \iint\limits_{(\partial M)_1} \max\{0,\vec{F}\cdot\vec{n}_1\} \ dS &= \iint\limits_{(\partial M)_1} \max\{0,xy\} \ dS = 2 \iint\limits_{\langle 0,R\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} r^3 \sin\varphi\cos\varphi \ dS = \\ &= \left(\int\limits_0^R r^3 \ dr\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin2\varphi \ d\varphi\right) = \frac{R^4}{4} \cdot \left[\frac{-\cos2\varphi}{2}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4}{4}. \end{split}$$

Podobně pro dolní podstavu použijeme parametrizaci

$$\Phi_2(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0) \text{ pro } U_2 = \langle 0, R \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$$

a vnější normálové pole

$$\vec{n}_2 = (0, 0, -1).$$

Tedy

$$\begin{split} \iint\limits_{(\partial M)_2} \max\{0,\vec{F}\cdot\vec{n}_2\} \ dS &= \iint\limits_{(\partial M)_2} \max\{0,-xy\} \ dS = 2 \iint\limits_{\langle 0,R\rangle\times\langle\frac{\pi}{2},\pi\rangle} -r^3\sin\varphi\cos\varphi \ dS = \\ &= \left(\int\limits_0^R r^3 \ dr\right) \cdot \left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\sin2\varphi \ d\varphi\right) = \frac{R^4}{4} \cdot \left[\frac{\cos2\varphi}{2}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\pi} = \frac{R^4}{4}. \end{split}$$

Konečně pro plášť použijeme parametrizaci

$$\Phi_3(\varphi, z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z) \text{ pro } U_3 = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, a \rangle.$$

Pak je

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)$$
$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

a vektorový součin

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$$

odpovídá vnější orientaci. Tedy

$$\begin{split} \iint\limits_{(\partial M)_3} \max\{0,\vec{F}\cdot\vec{n}\} \; dS &= \iint\limits_{U_3} \max\left\{0,\vec{F}\left(\Phi_3(\varphi,z)\right)\cdot \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)\right\} \; dS = \\ &= \iint\limits_{U_3} \max\left\{0,(zR\cos\varphi,zR\sin\varphi,R^2\sin\varphi\cos\varphi)\cdot \left(\frac{R\cos\varphi}{R\sin\varphi}\right)\right\} \; dS = \iint\limits_{U_3} \max\{0,zR^2\} \; dS = \\ &= \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} zR^2 \; d\varphi \; dz = \left(\int\limits_0^a zR^2 \; dz\right)\cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} 1 \; d\varphi\right) = \pi R^2 a^2. \end{split}$$

Celkově tedy máme

$$odtok = \frac{R^4}{2} + \pi R^2 a^2.$$

Přítok pak spočítáme pomocí Gaussovy věty:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 2z$$

$$\iiint_{M} \operatorname{div}(\vec{F}) \ dV = \iiint_{M} 2z \ dV = \begin{bmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ (r, \varphi, z) \in \langle 0, R \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, a \rangle \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{0}^{a} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} 2zr \ dr \ d\varphi \ dz = \left(\int_{0}^{a} z \ dz\right) \cdot \left(\int_{0}^{2\pi} 1 \ d\varphi\right) \cdot \left(\int_{0}^{R} 2r \ dr\right) = \pi R^{2} a^{2}.$$

Tedy

$$p\check{r}itok = odtok - \pi R^2 a^2 = \frac{R^4}{2}.$$

**Závěr:** Do oblasti přiteče (za jednotku času)  $\frac{R^4}{2}$  objemových jednotek kapaliny a odteče  $\frac{R^4}{2} + \pi R^2 a^2$  objemových jednotek kapaliny. Oblast tak za jednotku času ztratí  $\pi R^2 a^2$  objemových jednotek kapaliny.

Příklad 10.6. Vypočtěte plošný integrál

$$\iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

 $kde\ \vec{F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)\ a\ M\ je\ sféra\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2\ s\ vnější\ orientací\ a\ R>0$  je parametr.

# Řešení:

Tok vektorového pole  $\vec{F}: M \to \mathbb{R}^3$  orientovanou plochou  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  se spočítá jako

$$\iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U} \vec{F} \left( \Phi(u, v) \right) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dS ,$$

kde  $\Phi: U \to M$  je opět vhodná parametrizace,  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , a orientace daná vektorovým polem  $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$  souhlasí se zadanou parametrizací plochy M. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

Integrál spočítáme podle definice (ale lze použít i Gaussovu větu, protože jde o uzavřenou plochu). Plochu M zparametrizujeme přirozeně pomocí posunutých sférických souřadnic:

$$x - a = R \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$\Phi: y - b = R \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z - c = R \cos \vartheta$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \pi$$
.

Máme

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} & = & \Big( \begin{array}{cc} -R \sin \vartheta \sin \varphi, & R \sin \vartheta \cos \varphi, \end{array} & 0 \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \left( R \cos \vartheta \cos \varphi, R \cos \vartheta \sin \varphi, -R \sin \vartheta \right)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = -R \sin \vartheta \cdot \left( R \sin \vartheta \cos \varphi, R \sin \vartheta \sin \varphi, R \cos \vartheta \right) = -R \sin \vartheta \cdot \left( x - a, \ y - b, \ z - c \right).$$

Vektor (x-a, y-b, z-c) míří směrem od bodu (a,b,c) k bodu  $(x,y,z) \in M$ . Takže vektorový součin má opačný směr, než zadaná vnější orientace sféry M. Proto místo  $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$  vezmeme v integrálu  $\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$ . Pro skalární součin vektoru v integrálu tedy máme

$$(\vec{F} \circ \Phi) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) =$$

$$=R\sin\vartheta\cdot\left((a+R\sin\vartheta\cos\varphi)^2,\;(b+R\sin\vartheta\sin\varphi)^2,\;(c+R\cos\vartheta)^2\right)\cdot\left(\begin{array}{c}R\sin\vartheta\cos\varphi\\R\sin\vartheta\sin\varphi\\R\cos\vartheta\end{array}\right)=\\ =R^2\sin\vartheta\cdot\left[2R(a\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+b\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+c\cos^2\vartheta)+c^2\cos\vartheta+R^2\cos^3\vartheta+\cdots\right]$$

kde tečky znamenají výrazy, ze kterých se dá vytknout bud pouze " $\sin \varphi$ " nebo pouze " $\cos \varphi$ " a to v liché mocnině. V integrálu pak tyto výrazy dají nulu. Takže už můžeme psát

$$\begin{split} \iint_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \\ = \iint_{0 \le \varphi \le 2\pi} R^{2} \sin \vartheta \cdot \left[ 2R \left( a \cos^{2} \varphi \sin^{2} \vartheta + b \sin^{2} \varphi \sin^{2} \vartheta + c \cos^{2} \vartheta \right) + c^{2} \cos \vartheta + R^{2} \cos^{3} \vartheta \right] \, d\varphi \, d\vartheta = \\ &= \int_{0}^{\pi} R^{2} \sin \vartheta \cdot \left[ 2R \left( \pi a \sin^{2} \vartheta + \pi b \sin^{2} \vartheta + 2\pi c \cos^{2} \vartheta \right) + 2\pi c^{2} \cos \vartheta + 2\pi R^{2} \cos^{3} \vartheta \right] \, d\vartheta = \\ &= 2R^{3} \pi (a + b) \cdot \left( \int_{0}^{\pi} \sin^{3} \vartheta \, d\vartheta \right) + 4R^{3} \pi c \cdot \left( \int_{0}^{\pi} \cos^{2} \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) + \\ &+ R^{2} \pi c^{2} \cdot \left( \int_{0}^{\pi} \sin(2\vartheta) \, d\vartheta \right) + 2R^{4} \pi \cdot \left( \int_{0}^{\pi} \cos^{3} \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = \\ &= 2R^{3} \pi (a + b) \cdot \left( \int_{0}^{\pi} (1 - \cos^{2} \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \right) + 4R^{3} \pi c \cdot \left[ -\frac{\cos^{3} \vartheta}{3} \right]_{\vartheta = 0}^{\vartheta = \pi} + 2R^{4} \pi \cdot \left[ -\frac{\cos^{4} \vartheta}{4} \right]_{\vartheta = 0}^{\vartheta = \pi} = \\ &= 2R^{3} \pi (a + b) \cdot \left( 2 - \frac{2}{3} \right) + 4R^{3} \pi c \cdot \frac{2}{3} \quad = \quad \frac{8\pi R^{3}}{3} (a + b + c) \; . \end{split}$$

Příklad 10.7. Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde

- (i)  $\vec{F}(x,y,z) = (y^2-z^2,z^2-x^2,x^2-y^2)$  a M je řez kostky  $J = \langle 0,a \rangle^3$  rovinou  $x+y+z = \frac{3a}{2}$ . Orientace je určena pořadím bodů  $\left(\frac{a}{2},a,0\right), \left(a,0,\frac{a}{2}\right)$  a  $\left(a,\frac{a}{2},0\right)$ .
- (ii)  $\vec{F}(x,y,z) = (y^2,z^2,x^2)$  a M je trojúhelník (a,0,0), (0,a,0) a (0,0,a). Orientace je daná uvedeným pořadím vrcholů.

Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^3$  (orientovaná plocha, jejíž je křivka nyní okrajem, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (vztyčený palec poblíž okraje ukazuje směr orientace plochy a prsty směr orientace okraje).

(i) Množina Mje pravidelný šestiúhelník s hranou o délce  $\frac{\sqrt{2}}{2}a.$  Dále máme

$$rot(\vec{F}) = (-2y - 2z, -2x - 2z, -2x - 2y).$$

Podle zadání je normálové vektorové pole orientované plochy M určené (normovaným) vektorem roviny, ve které plocha leží, a sice  $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$  (směru vektoru také odpovídá zadání). K výpočtu využijeme

- definici toku pole plochou,
- toho, že plocha splňuje rovnici  $x+y+z=\frac{3a}{2}$  a
- toho, že známe velikost plochy pravidelného šestiúhelníku:

$$\iint_{M} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{M} \left( \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \right) \, dS = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \iint_{M} x + y + z \, dS = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \iint_{M} \frac{3a}{2} \, dS =$$

$$= -2\sqrt{3}a \iint_{M} 1 \, dS = -2\sqrt{3}a \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} a^{2} = -\frac{9}{2}a^{3} .$$

(ii) Budeme postupovat podobně jako v (i). Množina M je rovnostranný trojúhelník s hranou o délce  $\sqrt{2}a$  a leží v rovině x+y+z=a. Dále máme

$$rot(\vec{F}) = (-2z, -2x, -2y).$$

Normálové vektorové pole orientované plochy M je opět  $\vec{n}=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$ . Výpočet provedeme podobně:

$$\iint_{M} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{M} \left( \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \right) dS = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \iint_{M} x + y + z \ dS = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \iint_{M} a \ dS =$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^{2} = -a^{3} .$$

Příklad 10.8. Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

 $kde \ \vec{F}(x,y,z) = (xyz,x,e^{xy}\cos z) \ a \ M \ je \ polosf\'era \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ a \ z \geq 0 \ s \ orientac\'i \ sm\'erem \ vzh\'uru.$ 

## Řešení:

Máme

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \& \quad z > 0$$

a

$$\partial M: x^2 + y^2 = 1 \& z = 0.$$

Plocha M je orientovaná směrem "nahoru" a orientace jejího okraje  $\partial M$  tedy odpovídá orientaci dané např. parametrizací  $\varphi(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$  pro  $0 \le \alpha \le 2\pi$ .

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$$

$$\iint_{M} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{0}^{2\pi} (0, \cos \alpha, e^{\sin \alpha \cos \alpha}) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_{0}^{2\pi} \cos^{2} \alpha \ d\alpha = \pi.$$

**Příklad 10.9.** Použitím Gaussovy věty spočítejte tok pole  $\vec{F} = (3y^2z^3, 9x^2yz^2, -4xy^2)$  povrchem krychle  $M = \langle 0, 1 \rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ .

#### Řešení:

Gaussova věta

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F}) \ dV$$

dává do souvislosti tok pole  $\vec{F}$  přes okraj  $\partial M$  oblasti M v  $\mathbb{R}^3$  s integrálem přes tuto oblast M. Funkce

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v M se nazývá divergence pole  $\vec{F}$  a interpretuje se jako "zdroj" pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok" pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole" v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

Pro použití Gaussovy věty předpokládáme vnější orientaci povrchu krychle  $\partial M$ . Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 9x^2z^2$$

 $\mathbf{a}$ 

$$\iint\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{M} \operatorname{div}(\vec{F}) \; dV = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1} 9x^{2}z^{2} \; dx \; dy \; dz = \left(\int\limits_{0}^{1} 9x^{2} \; dx\right) \cdot \left(\int\limits_{0}^{1} 1 \; dy\right) \cdot \left(\int\limits_{0}^{1} z^{2} \; dz\right) = 1.$$

# 11 Fourierovy řady

**Příklad 11.1.** Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce  $f(t) = t^2$  na [-1, 1).

# Řešení:

**Definice:** Nechť f je T-periodická funkce, která je integrabilní na intervalu [0,T].

Její **Fourierovu řadu** definujeme jako  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right]$ , kde  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  je její frekvence,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt$$
, for  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

a

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt$$
, for  $k \in \mathbb{N}$ .

Toto pak zapisujeme jako

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right]$$

**Tvrzení:** (i) Pokud f je lichá, pak  $a_k = 0$  a  $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt$ .

(ii) Pokud 
$$f$$
je sudá, pak $b_k=0$  a  $a_k=\frac{4}{T}\int\limits_0^{T/2}f(t)\cos(k\omega t)\,dt.$ 

Pro naši funkci f máme T=2, takže  $\omega=\pi$ . Dostáváme tak

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 t^2 \cos(k\pi t) dt = \frac{4\cos(k\pi)}{\pi^2 k^2} = \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2},$$

$$b_k = \frac{2}{2} \int_1^1 t^2 \sin(k\pi t) dt = 0.$$

Tudíž máme

$$f \sim \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos(k\pi t).$$

**Jordanovo kritérium:** Nechť f je T-periodická funkce, která je po částech spojitá na nějakém intervalu I délky T. Předpokládejme, že její derivace f' je po částech spojitá na I.

Nechť  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right]$ . Pak pro každé  $t \in \mathbb{R}$  platí

$$\lim_{N \to \infty} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left[ a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right] \right) = \frac{1}{2} [f(t^-) + f(t^+)].$$

Pokud je f navíc spojitá  $\mathbb{R}$ , pak  $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right]$  konverguje k f stejnoměrně.

Pro náš příklad tudíž pro  $t \in [-1,1]$  dostáváme, že  $t^2 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos(k\pi t)$ .

Speciálně pro t=0 pak takto získáme vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

a pro t=1 pak podobně

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

# Příklad 11.2. Mějme funkci

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0,1), \\ 0 & , t \in [1,2). \end{cases}$$

 $Ur\check{c}ete$ 

- (i) Fourierovu řadu
- (ii) sinovou Fourierovu řadu
- (iii) kosinovou Fourierovu řadu

příslušného periodického rozšíření funkce f.

#### Řešení

**Definice:** Nechť f je funkce spojitá na [0,L). Její sinová Fourierova  $\check{r}ada$  je definována jako Fourierova řada jejího lichého periodického rozšíření a její kosinová Fourierova  $\check{r}ada$  je definována jako Fourierova řada jejího sudého periodického rozšíření.

**Tvrzení:** Sinová Fourierova řada funkce f je trigonometrická řada s koeficienty  $a_k = 0$ ,  $b_k = \frac{2}{L} \int\limits_0^L f(t) \sin(k\omega t) \, dt$  a  $\omega = \frac{\pi}{L}$ .

Kosinová Fourierova řada funkce f je trigonometrická řada s koeficienty  $b_k = 0, a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos(k\omega t) dt$  a  $\omega = \frac{\pi}{L}$ .

**Poznámka**: Součet sinové Fourierovy řady je T=2L-periodické rozšíření funkce f do liché funkce. Součet kosinové Fourierovy řady je T=2L-periodické rozšíření funkce f do sudé funkce. Oba součty je potřeba ještě upravit pomocí Jordanova kritéria.

V našem případě je

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0,1) \\ 0 & , t \in [1,2) \end{cases}$$

(i) Pro Fourierovu řadu funkce f máme:  $T=2,\,\omega=\pi.$ 

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 dt = 1.$$

75

$$a_k = \frac{2}{2} \int_0^1 \cos(k\pi t) \, dt = \left[ \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) \right]_{t=0}^{t=1} = 0.$$

$$b_k = \frac{2}{2} \int_0^1 \sin(k\pi t) \, dt = \left[ -\frac{1}{k\pi} \cos(k\pi t) \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{k\pi} \left[ 1 - \cos(k\pi) \right] =$$

$$= \frac{1}{k\pi} \left[ 1 - (-1)^k \right] = \begin{cases} 0 & , k \text{ sud\'e}, \\ \frac{2}{(2k+1)\pi} & , k \text{ lich\'e}. \end{cases}$$

Takže

$$f \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} [1 - (-1)^k] \sin(k\pi t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi t).$$

(ii) Pro sinovou Fourierovu řadu funkce fmáme:  $L=2,\,T=4,\,\omega=\frac{\pi}{2},\,a_k=0.$ 

$$b_k = \frac{2}{2} \int_0^1 \sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right) dt = \left[-\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{k\pi} \left[\cos(k\pi) - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Takže sinová Fourierova řada funkce f je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left[ (-1)^k - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right] \sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right).$$

(iii) Pro kosinovou Fourierovu řadu funkce fmáme:  $L=2,\,T=4,\,\omega=\frac{\pi}{2},\,b_k=0,$ 

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^1 dt = 1.$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_0^1 \cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right) dt = \left[\frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

Takže kosinová Fourierova řada funkce f je

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right).$$

Speciálně platí  $a_{2k}=0,\,a_{2k+1}=(-1)^{k+1}\frac{2}{(2k+1)\pi},\,$ takže řadu můžeme psát jako

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{(2k+1)\pi} \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}t\right).$$

**Příklad 11.3.** Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce  $f(t) = \sin t$ ,  $0 \le t < \frac{\pi}{2}$ . Určete funkci, ke které tato Fourierova řada konverguje.

# Řešení:

Perioda naší funkce je  $T = \frac{\pi}{2}$ , takže  $\omega = 4$ . Funkce f není ani lichá ani sudá. Spočítáme koeficienty Fourierovy řady funkce f:

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \frac{4}{\pi} \Big[ -\cos t \Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_k = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos(4kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(4k+1)t - \sin(4k-1)t) dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(4k+1)t}{4k+1} + \frac{\cos(4k-1)t}{4k-1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k-1} \right) = \frac{-4}{\pi(16k^2 - 1)}.$$

$$b_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin(4kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -\cos(4k+1)t + \cos(4k-1)t \right) dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\sin(4k+1)t}{4k+1} + \frac{\cos(4k-1)t}{4k-1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left( -\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k-1} \right) = \frac{-16}{\pi(16k^2 - 1)}.$$

Takže dostáváme

$$f \sim \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(16k^2 - 1)} (\cos 4kt + 4k\sin 4kt), \ t \in \mathbb{R}.$$

Periodické rozšíření naší funkce f není spojité v bodech  $t=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$  V těchto bodech Fourierova řada konverguje k hodnotě  $\frac{1}{2}[f(t^-)+f(t^+)]=\frac{1}{2}.$  Ve všech ostatních bodech konverguje řada k periodickému rozšíření funkce f podle Jordanova kritéria.

**Příklad 11.4.** Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce  $f(t) = |t|, -1 \le t < 1$ .

#### Řešení:

Perioda rozšíření bude T=2, takže  $\omega=\frac{2\pi}{2}$ . Rozšíření funkce f je sudé, takže  $b_k=0$ . Zbylé koeficienty Fourierovy řady jsou tyto:

$$a_0 = 2 \cdot \frac{2}{2} \int_0^1 t \, dt = 2 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} dt = 1;$$

$$a_k = 2 \int_0^1 t \cos k\pi t \, dt = 2 \left[ t \frac{\sin k\pi t}{k\pi} + \frac{\cos k\pi t}{k^2\pi^2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{k^2\pi^2} (\cos k\pi - 1).$$

Protože pro sudé k je  $\cos k\pi=1$ , máme  $a_k=0$ . Podobně, pro liché k=2n+1 je  $\cos(2n+1)\pi=-1$ , takže  $a_{2n+1}=\frac{-4}{\pi^2(2n+1)^2}$ .

Protože periodické rozšíření funkce f je spojité, tak Fourierova řada k němu konverguje stejnoměrně na celém  $\mathbb R$ . Proto můžeme napsat dokonce

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2} \cos(2n+1)\pi t, -1 \le t < 1.$$

**Příklad 11.5.** Určete sinovou Fourierovu řadu příslušného periodického rozšíření funkce  $f(t) = \sin t$ ,  $0 \le t < \frac{\pi}{2}$ . Určete funkci, ke které tato Fourierova řada konverguje.

#### Řešení:

K určení sinové Fourierovy řady funkce definované na intervalu [0, L), musíme začít s lichým rozšířením funkce f na interval [-L, L).

Budeme tak mít  $L=\frac{\pi}{2}$  a liché rozšíření naší funkce na interval  $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$  tak bude opět funkce sinus. Proto sinová Fourierova řada funkce  $f(t)=\sin t,\ 0\leq t<\frac{\pi}{2}$  je totéž jako Fourierova řada funkce  $f(t)=\sin t,\ -\frac{\pi}{2}\leq t<\frac{\pi}{2}$ . Z lichosti plyne, že všechny koeficienty  $a_k$  jsou nulové. Pro koeficienty  $b_k$  máme

$$b_k = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin(2kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left( -\cos(2k+1)t + \cos(2k-1)t \right) dt =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}+\frac{\cos(2k-1)t}{2k-1}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}+\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right)=\frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}.$$

Dostáváme tak

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2 - 1)} \sin 2kt, \ t \in \mathbb{R}.$$

Liché periodické rozšíření funkce f není spojité v bodech  $t=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$  V těchto bodech konverguje sinová Fourierova řada k hodnotě  $\frac{1}{2}[f(t^-)+f(t^+)]=0$ . Ve všech ostatních bodech konverguje sinová Fourierova řada k lichému periodickému rozšíření funkce f.

## Příklad 11.6. Mějme funkci

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0,1), \\ -2 & , t \in [1,2). \end{cases}$$

Určete Fourierovu řadu příslušného periodického rozšíření funkce f.

#### Řešení

Pro Fourierovu řadu máme T=2, takže  $\omega=\pi$ . Určíme koeficienty:

$$a_0 = \frac{2}{2} \left( \int_0^1 1 \, dt + \int_1^2 -2 \, dt \right) = -1;$$
 
$$a_k = \frac{2}{2} \left( \int_0^1 \cos k\pi t \, dt - 2 \int_1^2 \cos k\pi t \, dt \right) = 0;$$
 
$$b_k = \frac{2}{2} \left( \int_0^1 \sin k\pi t \, dt - 2 \int_1^2 \sin k\pi t \, dt \right) = \frac{3}{k\pi} \left[ 1 - (-1)^k \right] = \begin{cases} 0 & , \ k \text{ sud\'e}, \\ \frac{6}{k\pi} & , \ k \text{ lich\'e}. \end{cases}$$

Proto pro lichá čísla k = 2n + 1 dostaneme tvar

$$f \sim -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k\pi} \left[ 1 - (-1)^k \right] \sin k\pi t = -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\pi t, \ t \in \mathbb{R}.$$

# Literatura

# References

- [1] J. Stewart: Calculus, Brooks-Cole, 1991.
- [2] G. Thomas, R. Finney: Calculus and analytic geometry Part 2, Addison-Wesley, 1996.
- [3] J. Hamhalter, J. Tišer: Diferenciální počet funkcí více proměnných, ČVUT, 2005.
- [4] J. Hamhalter, J. Tišer: Integrální počet funkcí více proměnných, ČVUT, 2005.