7.1. Jsou dána čísla $c_{ij} \in \mathbb{R}$ $i,j = 1,\dots n$
Minimalizujeme výraz $\sum_i \sum_j c_{ij} x_i x_j$
$x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ za podmínky $\sum_i x_i^2 = 1$

$\min \{ x^T C x \mid x^T x = 1 \}$
řešení: nejmenší vlastní číslo matice $\frac{1}{2}(C+C^T)$

7.2. Bude výsledek platit i pokud matice C nebude symetrická?
Ne, musíme vytvořit symetrickou matici $\frac{1}{2}(C+C^T)$
(každá kvadratická forma má symetrickou matici)

7.5. Omezení: x musí být kolmé na vlastní vektory $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$
$\max \{ x^T A x \mid x^T x = 1,\ v_1^T x = \dots = v_k^T x = 0 \}$

$C = V \Lambda V^T$
změna souřadnic $y = V^T x \rightarrow \max \{ y^T \Lambda y \mid y^T y = 1,\ v_i^T x = 0 \}$
$v_i^T x = 0 \Rightarrow y_1 = \dots = y_k = 0$
$y^T y = 1 \Rightarrow y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2 = 1$

7.6. Jsou-li $x_1,\dots,x_k$ sloupce matice X, dokažte:
$tr \langle X^T A X \rangle = \langle AX, X \rangle = \langle A, XX^T \rangle = x_1^T A x_1 + \dots + x_k^T A x_k$

$\langle AX, X \rangle = tr\left((AX)^T X \right) = tr\left(X^T A X \right)$
$\langle A, XX^T \rangle = \langle XX^T, A \rangle = tr\left((XX^T)^T A \right) = tr\left(XX^T A \right) = tr\left(X^T A X \right)$
$C = X^T A X \quad c_{ij} = x_i^T A x_j \rightarrow$ stopa $\sum_j c_{jj} = x_1^T A x_1 + \dots x_k^T A x_k$

7.13. Komutuje operace ortogonální projekce s operací těžiště?
ANO

projekce: PA
těžiště: $\frac{1}{m} A 1$ $\qquad P(\frac{1}{m} A 1) = \frac{1}{m} (PA) 1$ ✓