

Úloha N 1

Studium polarizace světla – Fresnelovy vzorce

1.1 Úkol měření

1. Proměřte závislost intenzitních koeficientů odrazu elektromagnetické vlny (laserového paprsku) na dielektrickém rozhraní reprezentovaném optickým hranolem. Z naměřených hodnot určete Brewsterův úhel.
2. Nalezněte úhel dopadu, při kterém je deviace paprsku minimální, vypočtete s jeho pomocí index lomu hranolu a Brewsterův úhel.
3. Naměřené koeficienty odrazu v grafu porovnejte s teoretickými hodnotami pro zjištěný index lomu hranolu. Porovnejte Brewsterův úhel naměřený v bodě 1 s Brewsterovým úhlem vypočteným v bodě 2.

1.2 Odraz a lom světla na rozhraní dielektrik

V následujícím textu se budeme zabývat odrazem a lomem monochromatické rovinné elektromagnetické vlny dopadající na rovinné rozhraní dvou průhledných dielektrik. Dielektrika budeme považovat za nemagnetická, homogenní, izotropní a lineární, rovněž v nich zanedbáme absorpci světla.

K matematickému popisu použijeme komplexní symboliku¹, takže pro intenzitu elektrického pole vlny dopadající z prostředí 1 na rozhraní dielektrik budeme psát

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

kde \mathbf{k} je vlnový vektor² a ω je kruhový kmitočet. Dopadající vlna se na rozhraní částečně odráží (R – reflexe) a částečně prochází (T – transmise) do prostředí 2, takže pro příslušné vlny můžeme psát

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0R} e^{j(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega_R t)}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0T} e^{j(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega_T t)}.$$

V prostředí 1 je tedy kromě dopadající vlny přítomna i vlna odražená, výsledné pole je zde dáno superpozicí $\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}}_R$, v prostředí 2 je přítomna pouze vlna prošlá $\tilde{\mathbf{E}}_T$. Tato pole na sebe na

¹Skutečnému fyzikálnímu poli pak bude odpovídat reálná část příslušné komplexní funkce, tedy $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)] = [E_{0x} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \psi_x), E_{0y} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \psi_y), E_{0z} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \psi_z)]$.

²Vlna se šíří ve směru vlnového vektoru.

rozhraní dielektrik navazují podle *podmínek spojitosti*. Položíme-li rozhraní dielektrik do roviny xy , můžeme všechny tyto podmínky formálně zapsat ve tvaru

$$()e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + ()e^{j(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega_R t)} = ()e^{j(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega_T t)}, \quad z = 0, \quad (1.1)$$

kde obsah kulatých závorek závisí na konkrétní podmínce spojitosti (viz níže). Aby rovnost (1.1) mohla být splněna obecně pro *všechny body rozhraní a všechny časy*, musí platit

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega_R t = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega_T t, \quad z = 0. \quad (1.2)$$

Aby byla rovnost (1.2) splněna pro všechny časy, musí platit (což dostaneme například dosazením $\mathbf{r} = \mathbf{0}$)

$$\omega t = \omega_R t = \omega_T t \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_R = \omega_T,$$

což znamená, že vlna odrazem a průchodem do druhého prostředí nemění svůj kmitočet. Z podmínky (1.2) pak po rozepsání jednotlivých skalárních součinů plyne.

$$k_x x + k_y y = k_{Rx} x + k_{Ry} y = k_{Tx} x + k_{Ty} y. \quad (1.3)$$

Podmínka (1.3) může být opět obecně splněna pro všechna x a y pouze tehdy, pokud současně platí

$$k_x = k_{Rx} = k_{Tx} \quad \text{a} \quad k_y = k_{Ry} = k_{Ty}. \quad (1.4)$$

Natočíme-li dále pro jednoduchost souřadnice tak, viz obrázek 1.1, aby vlnový vektor \mathbf{k} ležel v rovině xz , snadno vyvodíme z podmínky (1.3) následující závěry.

Vlnové vektory \mathbf{k} , \mathbf{k}_R a \mathbf{k}_T leží v jedné rovině. Tato rovina je určena vlnovým vektorem \mathbf{k} a normálou k rozhraní (v tomto konkrétním případě se jedná o rovinu xz) a nazývá se *rovinou dopadu*.

Z rovnosti $k_x = k_{Rx}$ plyne $k \sin \theta = k_R \sin \theta_R$. Jelikož pro vlnové číslo v prostředí 1 platí $k = k_R = \omega/v_{f1}$, kde v_{f1} je fázová rychlost vlny v prostředí 1, dostaneme odtud

$$\sin \theta = \sin \theta_R \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_R \quad (\text{zákon odrazu}).$$

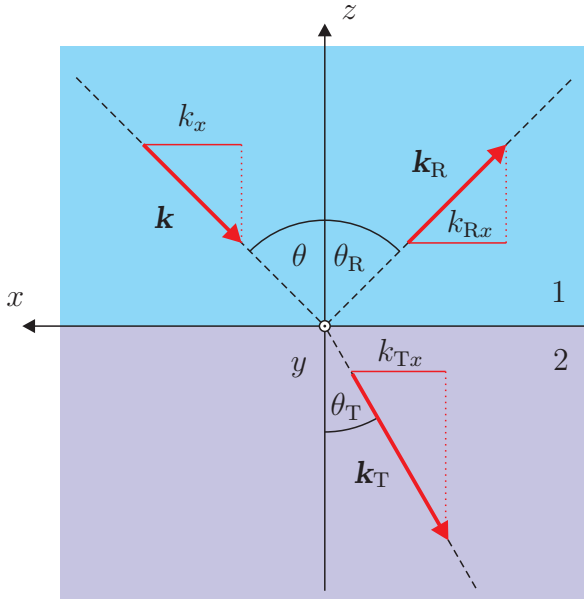
Z rovnosti $k_x = k_{Tx}$ plyne $k \sin \theta = k_T \sin \theta_T$. Jelikož $k = \omega/v_{f1}$ a $k_T = \omega/v_{f2}$, dostaneme odtud

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_T} = \frac{v_{f1}}{v_{f2}} \quad (\text{zákon lomu, Snellův zákon}). \quad (1.5)$$

Zavedeme-li index lomu v i -tém prostředí $n_i = c/v_{fi}$, kde c je rychlost světla ve vakuu, můžeme zákon lomu (1.5) přepsat jako

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_T} = \frac{n_2}{n_1} = n, \quad (1.6)$$

kde $n = n_2/n_1$ je relativní index lomu prostředí 2 (do něhož se vlna láme) vzhledem k prostředí 1 (ze kterého vlna na rozhraní dopadá).



Obrázek 1.1: Geometrie použitá pro odvození zákona odrazu a lomu.

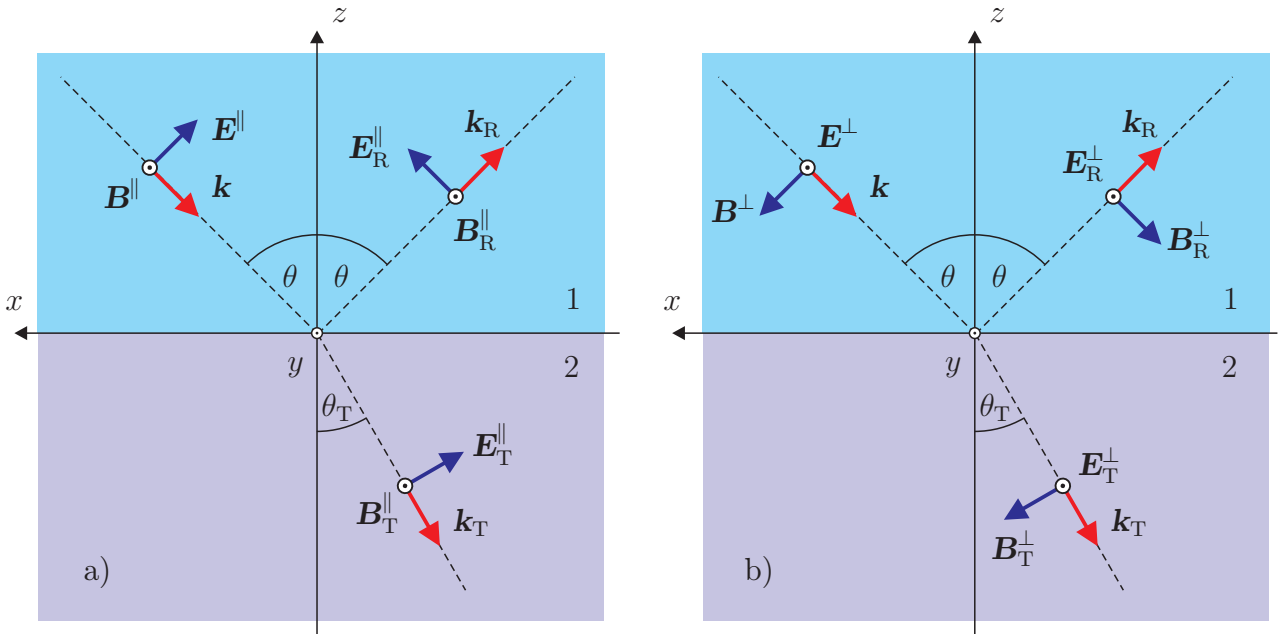
1.3 Polarizace světla při lomu a odrazu na rozhraní dielektrik

V dalším odstavci se budeme zabývat změnami intenzity elektrického pole, ke kterým dochází při lomu a odrazu elektromagnetické vlny.

K tomu využijeme známých *podmínek spojitosti*, které říkají, že pokud rozhraním dielektrik neprotékají žádné plošné proudy, jsou tečné složky intenzit elektrického a magnetického pole na rozhraní dielektrik spojitě. Jelikož obě dielektrika považujeme za nemagnetická a předpokládáme, že pro jejich permeability platí $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, kde μ_0 je magnetická konstanta (permeabilita vakua), můžeme v tomto případě podmínky spojitosti polí, viz vztah (1.1) a následující úvahy, formulovat jako

$$\tilde{E}_{0x} + \tilde{E}_{0Rx} = \tilde{E}_{0Tx}, \quad \tilde{E}_{0y} + \tilde{E}_{0Ry} = \tilde{E}_{0Ty}, \quad \tilde{B}_{0x} + \tilde{B}_{0Rx} = \tilde{B}_{0Tx}, \quad \tilde{B}_{0y} + \tilde{B}_{0Ry} = \tilde{B}_{0Ty}, \quad (1.7)$$

kde třetí a čtvrtá podmínka vychází ze spojitosti tečných složek intenzity magnetického pole a faktu, že permeabilita obou prostředí je stejná.



Obrázek 1.2: Geometrie použitá při odvození Fresnelových vzorců. a) elektrické pole polarizováno v rovině dopadu, b) elektrické pole polarizováno kolmo k rovině dopadu. Všimněte si, že všechny trojice \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{B} jsou pravotočivé.

Vzhledem k symetrii úlohy bude dále výhodné rozložit každou z vln na složku, kde vektor intenzity elektrického pole kmitá v rovině dopadu (označíme symbolem \parallel) a na složku, kde vektor intenzity elektrického pole kmitá kolmo k rovině dopadu (označíme symbolem \perp), viz obrázek 1.2.

V dalších úvahách využijeme vztah mezi složkami elektrického a magnetického pole v rovinné vlně

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 = \omega \tilde{\mathbf{B}}_0, \quad (1.8)$$

který plyne z Faradayova indukčního zákona. Odtud mj. vyplývá, že vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} jsou na sebe kolmé a kmitají ve fázi (\mathbf{k} je reálné). Vektory \mathbf{k} , \mathbf{E} a \mathbf{B} tvoří pravotočivý systém.

S využitím vztahu (1.8) můžeme, viz obrázek 1.2, psát

$$k \tilde{E}_0^{\parallel} = \omega \tilde{B}_0^{\parallel} \quad \Rightarrow \quad \tilde{B}_0^{\parallel} = \frac{\tilde{E}_0^{\parallel}}{v_{\text{fl}}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{B}_0^{\parallel} = \frac{n_1}{c} \tilde{E}_0^{\parallel}.$$

Obdobně bychom dostali

$$\tilde{B}_0^\perp = \frac{n_1}{c} \tilde{E}_0^\perp, \quad \tilde{B}_{R0}^\parallel = \frac{n_1}{c} \tilde{E}_{R0}^\parallel, \quad \tilde{B}_{R0}^\perp = \frac{n_1}{c} \tilde{E}_{R0}^\perp, \quad \tilde{B}_{T0}^\parallel = \frac{n_2}{c} \tilde{E}_{T0}^\parallel, \quad \tilde{B}_{T0}^\perp = \frac{n_2}{c} \tilde{E}_{T0}^\perp.$$

Zaměříme se nyní na složku vlny, jejíž intenzita elektrického pole kmitá v rovině dopadu. Ze čtvrté z podmínek (1.7), viz obrázek 1.2 a), přímo plyne

$$\tilde{B}_0^\parallel + \tilde{B}_{R0}^\parallel = \tilde{B}_{T0}^\parallel \quad \Rightarrow \quad n_1 \tilde{E}_0^\parallel + n_1 \tilde{E}_{R0}^\parallel = n_2 \tilde{E}_{T0}^\parallel. \quad (1.9)$$

Z první z podmínek (1.7) pak plyne (pozor na znaménka, kladný směr osy x je v tomto případě směr doleva)

$$-\tilde{E}_0^\parallel \cos \theta + \tilde{E}_{R0}^\parallel \cos \theta = -\tilde{E}_{T0}^\parallel \cos \theta_T. \quad (1.10)$$

Rovnice (1.9) a (1.10) tvoří lineární soustavu, jejímž vyřešením můžeme vyjádřit intenzity elektrického pole odražené a prošlé vlny. Snadno zjistíme, že platí

$$\tilde{E}_{R0}^\parallel = \tilde{E}_0^\parallel \frac{n \cos \theta - \cos \theta_T}{n \cos \theta + \cos \theta_T}, \quad \tilde{E}_{T0}^\parallel = \tilde{E}_0^\parallel \frac{2 \cos \theta}{n \cos \theta + \cos \theta_T}. \quad (1.11)$$

Zaměříme se dále na složku vlny, jejíž intenzita elektrického pole kmitá kolmo k rovině dopadu. Z druhé z podmínek (1.7), viz obrázek 1.2 b), přímo plyne

$$\tilde{E}_0^\perp + \tilde{E}_{R0}^\perp = \tilde{E}_{T0}^\perp, \quad (1.12)$$

ze třetí z podmínek (1.7) pak vyplývá

$$\tilde{B}_0^\perp \cos \theta - \tilde{B}_{R0}^\perp \cos \theta = \tilde{B}_{T0}^\perp \cos \theta_T \quad \Rightarrow \quad n_1 \tilde{E}_0^\perp \cos \theta - n_1 \tilde{E}_{R0}^\perp \cos \theta = n_2 \tilde{E}_{T0}^\perp \cos \theta_T. \quad (1.13)$$

Rovnice (1.12) a (1.13) tvoří lineární soustavu, jejímž vyřešením můžeme opět vyjádřit intenzity elektrického pole odražené a prošlé vlny. Snadno zjistíme, že platí

$$\tilde{E}_{R0}^\perp = \tilde{E}_0^\perp \frac{\cos \theta - n \cos \theta_T}{\cos \theta + n \cos \theta_T}, \quad \tilde{E}_{T0}^\perp = \tilde{E}_0^\perp \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + n \cos \theta_T}. \quad (1.14)$$

Vzorce (1.11) a (1.14) jsou tzv. Fresnelovy vzorce. Úhel lomu θ_T je s úhlem dopadu θ svázán Snellovým zákonem (1.6), vzorce je tedy možné vyjádřit i pouze pomocí úhlu dopadu.

Z Fresnelových vzorců vyplývá, že pokud je dopadající světlo nepolarizované (složky E^\parallel a E^\perp jsou zastoupeny rovnoměrně), průchodem a odrazem na dielektrickém rozhraní dochází k jeho částečné polarizaci.

Za určitých podmínek platí, že odražené světlo je zcela polarizované. To nastane, pokud bude platit, viz první z vzorců (1.11), že

$$n \cos \theta - \cos \theta_T = 0.$$

S využitím Snellova zákona (1.6) můžeme předchozí vzorec postupně upravit

$$n^2 \cos^2 \theta = \cos^2 \theta_T = 1 - \sin^2 \theta_T = \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{=1} - \frac{1}{n^2} \sin^2 \theta,$$

odkud ihned plyne

$$\tan \theta = n \equiv \tan \theta_B. \quad (1.15)$$

Úhel θ_B se nazývá Brewterův, pokud pod tímto úhlem dopadá světlo na rozhraní dielektrik, je odražené světlo lineárně polarizované v rovině kolmé k rovině dopadu (složka \tilde{E}_{R0}^\parallel je nulová³).

³Laskavý čtenář si jistě sám vyzkouší, že podobným způsobem nelze vynulovat složku \tilde{E}_{R0}^\perp , ani složky prošlého světla.

1.4 Energetická bilance

Kromě amplitudy se průchodem a odrazem na dielektrickém rozhraní mění i intenzita vlny. Intenzita, tedy časová střední hodnota výkonu procházejícího kolmo jednotkovou plochou, je v případě dopadající, odražené a prošlé vlny dána vztahy

$$I = n_1 \frac{\varepsilon_0 c}{2} |E_0|^2, \quad I_R = n_1 \frac{\varepsilon_0 c}{2} |E_{R0}|^2, \quad I_T = n_2 \frac{\varepsilon_0 c}{2} |E_{T0}|^2,$$

kde ε_0 je elektrická konstanta (permitivita vakua). Podle zákona zachování energie musí být výkon J vlny dopadající na plochu A roven součtu výkonů vlny odražené J_R a vlny prošlé J_T touto plochou. Dopadá-li svazek světla na plochu A pod úhlem θ , je jeho kolmý průřez $A \cos \theta$, viz obrázek 1.3. Pro jednotlivé výkony tak dostaneme

$$J = I A \cos \theta, \quad J_R = I_R A \cos \theta, \quad J_T = I_T A \cos \theta_T.$$

Pomocí těchto výkonů pak můžeme definovat intenzitní koeficienty odrazu a propustnosti jako

$$R^{\parallel, \perp} = \frac{J_R^{\parallel, \perp}}{J^{\parallel, \perp}}, \quad T^{\parallel, \perp} = \frac{J_T^{\parallel, \perp}}{J^{\parallel, \perp}},$$

Dosazením do příslušných vzorců a po drobných úpravách dostaneme koeficienty reflexe

$$R^{\parallel} = \left(\frac{n \cos \theta - \cos \theta_T}{n \cos \theta + \cos \theta_T} \right)^2, \quad R^{\perp} = \left(\frac{\cos \theta - n \cos \theta_T}{\cos \theta + n \cos \theta_T} \right)^2 \quad (1.16)$$

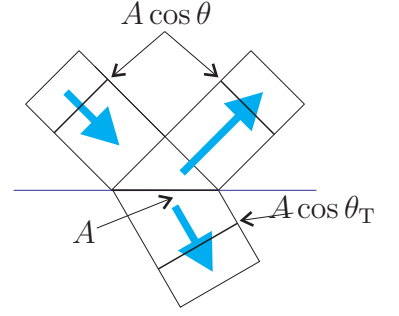
a koeficienty transmise

$$T^{\parallel} = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta \cos \theta_T}{(n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta_T)^2}, \quad T^{\perp} = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta \cos \theta_T}{(n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_T)^2}. \quad (1.17)$$

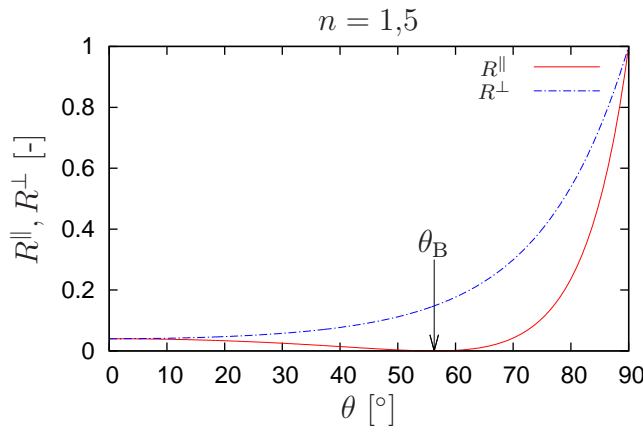
Z vzorců (1.16) a (1.17) je vidět, že platí

$$R^{\parallel} + T^{\parallel} = 1, \quad R^{\perp} + T^{\perp} = 1,$$

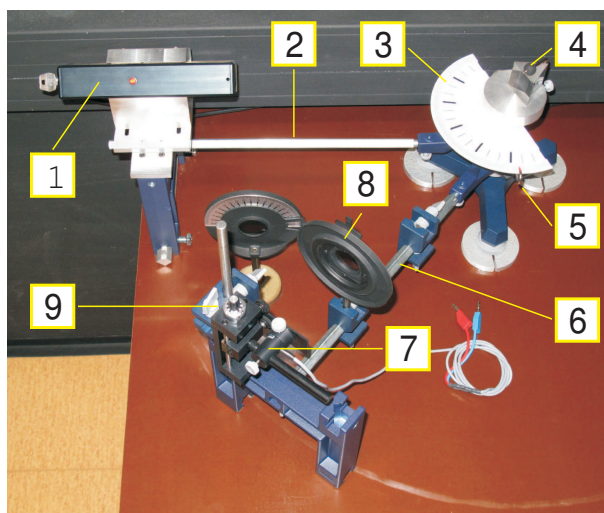
což je důsledek platnosti zákona zachování energie. Příklad průběhů koeficientů reflexe pro $n = 1,5$ je uveden na obrázku 1.4.



Obrázek 1.3: K energetické bilanci.



Obrázek 1.4: Koeficienty reflexe.



Obrázek 1.5: Uspořádání experimentu.

1.5 Postup měření

1.5.1 Koeficienty odrazu

1. Zapněte digitální multimetr a tlačítkem s označením μA jej přepněte na rozsah⁴ „mikroampéry“.
2. Otočné rameno goniometru ([6], viz obrázek 1.5) natočte ve směru pevného ramene [2] na kterém je umístěný Nd:YVO₄ laser [1]. Otočnou stupnici [3] s optickým hranolem [4] natočte tak, aby pevný ukazatel [5] mířil přesně na střed stupnice.
3. Pomocí klíčku zapněte laser [1]. Laser je opatřený zeleným tlačítkem, které se spíná nasunutím speciálního nástavce a které zvyšuje výstupní výkon na 1 mW. Zkontrolujte, že je tlačítko sepnuto. Laserový paprsek by měl procházet před stěnou optického hranolu a neměl by se na ní odrážet. Pokud by tomu tak nebylo (na hranolu by byla vidět světelná stopa), požádejte o asistenci vyučujícího.
4. Zkontrolujte, zda světelná stopa laserového paprsku dopadá ve vertikálním směru do středu fotodetektoru [7], pokud ne, jeho výšku upravte otočným prvkem [9]. Současným otáčením stupnice i otočného ramene zkontrolujte, že paprsek dopadá zhruba do středu fotodetektoru v celém rozsahu goniometru. Pokud tomu tak není, požádejte o asistenci vyučujícího.
5. Mezi zapnutím laseru a začátkem vlastního měření by měla být prodleva alespoň 10 minut, po kterou se laser zahřívá a jeho výstupní výkon stabilizuje.
6. Změřte proud fotodetektorem i_{0t} v okamžiku, kdy na něj nedopadá laserový paprsek.
7. Stupnici a otočné rameno goniometru vraťte do výchozí polohy, viz krok 2 a 3.
8. Polarizační filtr nastavte na hodnotu 0°. Najděte takovou polohu otočného ramene, kdy je proud fotodetektorem maximální (laserový paprsek dopadá přesně do středu fotodetektoru).

⁴Multimetr se po zapnutí automaticky přepíná do režimu měření napětí. Pakliže je přívodní měřicí kabel zapojen do svorky pro měření proudu, multimetr pípáním signalizuje chybu a nelze ovládat. Vytáhněte měřicí kabel z proudové svorky, multimetr přepněte a měřicí kabel opět připojte do proudové svorky ($\mu\text{A}/\text{mA}$).

Odečtete proud fotodetektorem. Tento proud je přímo úměrný intenzitě vlny, jejíž intenzita elektrického pole je polarizována kolmo k rovině dopadu.

9. Otočnou stupnici s hranolem pootáčejte po 5° , vždy změřte maximální proud fotodetektorem tak, že najdete polohu otočného ramene, kdy paprsek dopadá přesně do středu fotodetektoru. Dbejte na skutečnost, že polohu otočného ramene musíte nastavit dosti pečlivě.

Rozmyslete si, v jakém vztahu je úhel dopadu na stěnu hranolu vzhledem k úhlu nastavovaném na stupnici goniometru.

10. Celé měření (od bodu 7) zopakujte s polarizačním filtrem nastaveným na hodnotu 90° . Tím budete měřit proud úměrný intenzitě vlny, jejíž intenzita elektrického pole je polarizována v rovině dopadu.

1.5.2 Index lomu optického hranolu

Laserový paprsek se na optickém hranolu jednak odráží a jednak jím prochází (láme se na něm). Paprsek lomeného světla je pozorovatelný na stěně laboratoře za goniometrem. Budete-li otočnou stupnici s hranolem otáčet z nulové polohy (ukazatel na středu stupnice) ve směru hodinových ručiček, světelná stopa se bude nejprve posouvat doprava, čímž bude celkové odchýlení paprsku (deviace) klesat. V jistém okamžiku se posuv světelné stopy zastaví a při dalším pootáčení stupnice s hranolem se světelná stopa začne posouvat směrem doleva, čímž deviace začne opět narůstat. Najděte takový úhel dopadu θ_{\min} , kdy je deviace paprsku minimální a pomocí vzorce

$$n = 2 \sin \theta_{\min}$$

vypočtete relativní index lomu hranolu n a jeho nejistotu. Odvození tohoto vzorce najdete v dodatku. Pomocí vzorce (1.15) vypočítejte Brewsterův úhel pro tento index lomu a určete jeho nejistotu.

1.5.3 Zpracování naměřených hodnot

Proud fotodetektorem je přímo úměrný intenzitě dopadající vlny, takže intenzitní koeficient odrazu pro daný úhel dopadu a polarizaci vlny můžete vypočítat pomocí vztahu

$$R_{\theta}^{\parallel,\perp} = \frac{i_{\theta}^{\parallel,\perp} - i_{0t}}{i_{90^\circ}^{\parallel,\perp} - i_{0t}},$$

kde proud $i_{90^\circ}^{\parallel,\perp}$ je proud fotodetektorem naměřený v kroku 8 bodu 1.5.1, kdy laserový paprsek prochází před optickým hranolem, a je úměrný intenzitě dopadající vlny (pro danou polarizaci).

Naměřené koeficienty odrazu vynesete do grafu (jako body) spolu s teoretickými průběhy, viz vzorce 1.16, do kterých dosadíte index lomu naměřený v rámci bodu 1.5.2. K tomuto účelu můžete použít skript na serveru <http://herodes.feld.cvut.cz> – Studium polarizace světla - Fresnelovy vzorce (GRAF). Porovnejte Brewsterův úhel určený (odhadnutý) v bodě 1.5.1 s hodnotou vypočtenou v bodě 1.5.2.

1.5.4 Bezpečnost práce při měření

Laserový paprsek obecně může neopatrnému experimentátorovi poškodit zrak. Laser použitý v tomto experimentu spadá do tzv. třídy 2, což znamená, že přímý pohled do paprsku je možný, před poškozením oka chrání mrkací reflex. Předpokládá se ovšem, že mezi zasažením paprskem a mrknutím (případně odkloněním hlavy) neuběhne doba delší, než 0,25 s.

Při měření se i tak držte následujících pokynů. Nedívejte se do laserového paprsku. Při měření byste měli neustále mít pod kontrolou, kam se odráží paprsek od hranolu. Z toho důvodu otáčejte současně vždy otočnou stupnicí i ramenem goniometru tak, aby odražený paprsek dopadal neustále na fotodetektor. Při práci byste neměli mít nekryté hodinky či jiné šperky, které by se mohly dostat do dráhy laserového paprsku a způsobit jeho odraz. Po skončení měření laser vypněte pomocí klíčku.

1.6 Použitá literatura

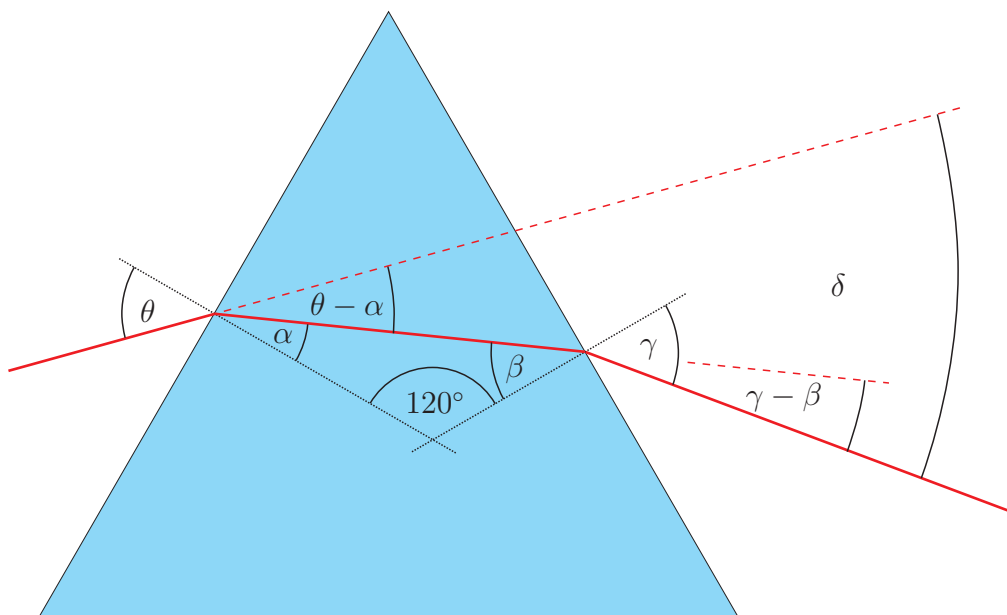
1. David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, New Jersey, 1999.
2. Petr Malý, *Optika*, Karolinum, Praha, 2008.
3. B. Klimeš, J. Kracík, A. Ženíšek: *Základy fyziky II*, Academia, Praha, 1982.

1.7 Dodatek – průchod světla hranolem

Vyšetříme průchod paprsku optickým hranolem. Předpokládejme, že hranol o průřezu rovnostranného trojúhelníku vyrobený z materiálu o indexu lomu n_2 je umístěn v prostředí o indexu lomu n_1 . Paprsek do hranolu vstupuje pod úhlem θ , viz obrázek 1.6. S využitím Snellova zákona můžeme psát

$$\sin \theta = n \sin \alpha, \quad (1.18)$$

kde $n = n_2/n_1$ je relativní index lomu hranolu vzhledem k okolnímu prostředí.



Obrázek 1.6: Průchod paprsku optickým hranolem.

S využitím Snellova zákona můžeme rovněž psát

$$\sin \gamma = n \sin \beta. \quad (1.19)$$

Velikost úhlů α a β je vzájemně svázána relací, viz obrázek 1.6,

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}. \quad (1.20)$$

Na první lámavé stěně se paprsek odchýlí o úhel $\theta - \alpha$, na druhé stěně pak o úhel $\gamma - \beta$, takže pro celkovou odchylku paprsku, neboli deviaci, po průchodu hranolem můžeme psát

$$\delta = \theta - \alpha + \gamma - \beta = \theta + \gamma - \frac{\pi}{3}. \quad (1.21)$$

Poslední vztah můžeme kombinací vzorců (1.18), (1.19) a (1.20) vyjádřit jako

$$\delta = \theta + \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \frac{\sin \theta}{2} \right] - \frac{\pi}{3}. \quad (1.22)$$

Vzorec (1.22) vyjadřuje závislost deviace paprsku na úhlu dopadu, viz příklad na obrázku 1.7. Dá se ukázat, že tato funkce má jedno minimum, tedy existuje takový úhel dopadu θ_{\min} , při kterém je deviace minimální. Tento úhel je možné nalézt derivováním vztahu (1.22), což je poměrně pracné, takže hledaný úhel dopadu nalezneme jinak.

Podmínku pro extrém můžeme formálně vyjádřit derivováním vztahu (1.21) jako

$$\frac{d\delta}{d\theta} = 1 + \frac{d\gamma}{d\theta} \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.23)$$

Vypočítáme diferenciály vztahů (1.18) a (1.19) a vypočteme jejich podíl

$$\cos \theta d\theta = n \cos \alpha d\alpha, \quad \cos \gamma d\gamma = n \cos \beta d\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos \gamma d\gamma}{\cos \theta d\theta} = \frac{\cos \beta d\beta}{\cos \alpha d\alpha}.$$

Protože platí, viz vztah (1.20)

$$d\alpha = -d\beta,$$

můžeme poslední vztah přepsat jako

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{\cos \beta \cos \theta}{\cos \alpha \cos \gamma},$$

takže podmínka pro extrém (1.23) má tvar

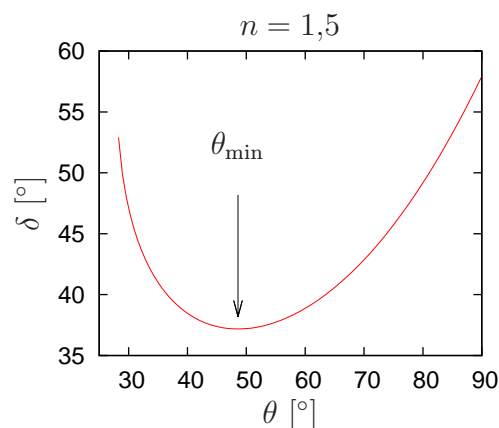
$$\frac{\cos \beta \cos \theta}{\cos \alpha \cos \gamma} = 1.$$

Tato rovnost bude splněna, pokud bude platit $\alpha = \beta$ a $\gamma = \theta$.

Tato situace zřejmě nastane v okamžiku, kdy paprsek bude hranolem procházet tak, že bude kolmý k ose, která dělí na dvě poloviny úhel, jež svírají lámavé stěny (tzv. lámavý úhel). Jelikož v tomto případě, viz vztah (1.20), platí $\alpha = \beta = \pi/6$, dosazením do vzorce (1.18) můžeme psát

$$n = 2 \sin \theta_{\min}. \quad (1.24)$$

Vzorec (1.24) můžeme použít k určení relativního indexu lomu hranolu, pokud se nám podaří změřit úhel dopadu, při kterém je deviace minimální.



Obrázek 1.7: Deviace jako funkce úhlu dopadu pro $n = 1,5$.