**Zkouška OPT 6.2.2024** | Jméno: Příjmení:

**Řešení pište do připravených mezer. Odevzdává se pouze tento čistopis.**
**Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu nestačí.**

---

1. Najděte vzdálenost množiny $\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\,\}$ od kružnice s poloměrem 1 a středem v bodě $(2,0)$.

   (a) **(2b)** Formulujte jako optimalizační úlohu (musí být zřejmé, co je účelová funkce, co proměnné a co případné omezující podmínky). Zvolte formulaci tak, aby šla dobře řešit. Formulaci ilustrujte obrázkem.

   (b) **(3b)** Úlohu vyřešte (najděte požadovanou vzdálenost). Na kalkulačce smíte použít jen operace plus, minus, krát, děleno a druhá odmocnina. Nedokážete-li úlohu takto vyřešit přesně, navrhněte vhodnou iterační metodu (tak, abychom strojové přesnoti dosáhli za co nejmenší počet iterací), napište vzorec pro iteraci metody (pro tuto konkrétní úlohu!) a navrhněte vhodný počáteční odhad.

   Minimalizuj $d^2 = \|(x,x^2)-(2,0)\|_2^2 = (x-2)^2+x^4$. Derivace rovna nule da $2x^3+x-2=0$. Newtonova metoda: $x \leftarrow x - \dfrac{2x^3+x-2}{6x^2+1} = \dfrac{4x^3+2}{6x^2+1}$, pocatecni odhad $x=1$. Po nekolika iteracich je $x = 0.835122348481367$, tedy $d = 1.357699386102247$.

---

2. **(3b)** Máme $m$ přímek v rovině, kde $i$-tá přímka má rovnici $\mathbf{p}_i^T\mathbf{x} = q_i$ pro dané $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^2$ a $q_i \in \mathbb{R}$. Hledáme bod, který minimalizuje součet čtverců vzdáleností od přímek. Formulujte úlohu ve tvaru $\min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{A}\mathbf{y}-\mathbf{b}\|_2$, tj. najděte $\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{y}$. (Nápověda: jak se počítá vzdálenost bodu od přímky?)

   Vzdálenost bodu $\mathbf{y}$ od $i$-té přímky je $\mathbf{p}_i^T\mathbf{y} - q_i$ za předpokladu, že $\|\mathbf{p}_i\|_2 = 1$. Tedy nechť $\mathbf{p}'_i = \mathbf{p}_i/\|\mathbf{p}_i\|_2$ a $q'_i = q'_i/\|\mathbf{p}_i\|_2$. Pak minimalizujeme $\sum_i (\mathbf{p}_i'^T\mathbf{y} - q'_i)^2$, tedy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{p}_1'^T\\ \vdots \\ \mathbf{p}_m'^T\end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}q'_1\\ \vdots\\ q'_m\end{bmatrix}$.

---

3. **(3b)** Je součin dvou regulárních matic regulární matice? Odpověď dokažte (postup důkazu napište **jasně**). (Nápověda: samozřejmě musíte použít definici regulární matice.)

   Matice $\mathbf{A}$ je regulární, právě když má inverzi, tj. existuje matice označená jako $\mathbf{A}^{-1}$ tak, že $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$. Z toho speciálně plyne (aby maticová násobení šla provést), že regulární matice musí být čtvercová.

   Nechť tedy $\mathbf{A},\mathbf{B}$ jsou regulární čtvercové (stejného rozměru, aby je šlo násobit). Chceme dokázat, že existuje matice $\mathbf{C}$ stejného rozměru tak, aby $\mathbf{ABC} = \mathbf{I} = \mathbf{CAB}$ ($\mathbf{C}$ bude tedy inverze matice $\mathbf{AB}$). No ale takovou matici $\mathbf{C}$ snadno najdeme třeba z rovnosti $\mathbf{ABC} = \mathbf{I}$: vynásobením rovnosti zleva nejdříva maticí $\mathbf{A}$ a potom maticí $\mathbf{B}$ dostaneme $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Zkontrolujeme, že tato matice $\mathbf{C}$ vyhovuje i druhé rovnosti: $\mathbf{CAB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

---

4. **(3b)** Jsou dány matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (libovolná, tj. ne nutně symetrická, positivně definitní, apod.) a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Napište postup (posloupnost kroků, nemusí to být kód v nějakém programovacím jazyce), jak rozhodnout, zda úloha $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x})$ má optimální řešení, a jestliže ho má, tak jak se nějaké optimální řešení najde.

   Funkce $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x}$ je kvadratická funkce, vše co potřebujete je tedy v §6.4 skript. Nebo úlohu můžeme vidět jako vyšetřování volných extrémů diferencovatelné funkce, o čemž je §10.1. Možný postup:

   1 Hodnota kvadratické formy $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ závisí jen na symetrické části matice $\mathbf{A}$, spočteme tedy nejprve tuto symetrickou část: $\mathbf{S} = (\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)/2$ je tato symetrická část. Teď tedy vyšetřujeme úlohu $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x})$.

   2 Najdeme stacionární bod/body: položíme derivaci rovnou nule, $\mathbf{0}^T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}(\mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T\mathbf{S}+\mathbf{b}^T$, po transpozici a úpravě $\mathbf{S}\mathbf{x} = -\mathbf{b}/2$ (tuto soustavu lze odvodit i doplněním na čtverec dle §6.4.1, což je o něco složitější). Tato lineární soustava buď má právě jedno řešení (to tehdy, když $\mathbf{S}$ je regulární; pak lze řešení spočítat inverzí, $\mathbf{x} = -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{b}/2$), nebo má nekonečně mnoho řešení ($\mathbf{S}$ singulární, $\mathbf{b} \in \operatorname{rng}\mathbf{S}$; pak nelze použít inverzi ale najdeme nějaké řešení soustavy např. Gaussovou eliminací), nebo nemá řešení ($\mathbf{S}$ singulární a $\mathbf{b} \notin \operatorname{rng}\mathbf{S}$). V posledním případě úloha určitě nemá optimální řešení.

   3 Jestliže existuje alespoň jeden stacionární bod, určíme definitnost matice $\mathbf{S}$ (pomocí symetrické Gaussovy eliminace nebo vlastních čísel). Jestliže $\mathbf{S}$ je positivně semidefinitní (všechna vlastní čísla nezáporná), tak všechny stacionární body jsou optimální řešení úlohy. Jinak je úloha neomezená (infimum je $-\infty$).

5. Hledáme lokální extrémy funkce $ax+by$ za podmínky $xy=1$, kde $a,b\in\mathbb{R}$ jsou známé a $x,y\in\mathbb{R}$ jsou proměnné.

   (a) **(2b)** Najděte všechny body splňující podmínku 1. řádu na lokální extrémy. Pro jaké hodnoty parametrů $a,b$ aspoň jeden takový bod existuje? (Nápověda: než začnete počítat, uvažte vhodnou metody řešení.)
   Můžeme vyjádřit $y=1/x$ z podmínky a dosadit do kritéria, tedy hledáme volné extrémy funkce $f(x)=ax+b/x$ na množině $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Stacionární podmínka (= podmínka prvního řádu) je $0=f'(x)=a-b/x^2$. Tato rovnice má řešení jen za podmínky $a\neq 0$ a $b/a\geq 0$. Pak je řešení $x=\pm\sqrt{b/a}$ a odpovídající $y=1/x=\pm\sqrt{a/b}$. Ovšem musíme předpokládat i $b\neq 0$, protože jinak by $x=\pm\sqrt{b/a}=0$ nemohlo splnit omezení $xy=1$. Odpověď: za podmínky $ab>0$ dva body podezřelé z lok. extrému jsou $(x,y)=\pm(\sqrt{b/a},\sqrt{a/b})$, jinak neexistuje ani jeden.

   (b) **(2b)** Pro každý nalezený bod rozhodněte, zda je to extrém úlohy. Když ano, určete typ extrému (lokální/globální, minimum/maximum). To vše v závislosti na hodnotách parametrů $a,b$.
   Zderivujeme funkci $f$ podruhé: $f''(x)=(a-b/x^2)'=b/x^3$. Pro $b>0$ (tj. $a=0$, protože předpokládáme $b/a>0$) bude tedy bod $(x,y)=(\sqrt{b/a},\sqrt{a/b})$ lokální minimum a bod $(x,y)=-(\sqrt{b/a},\sqrt{a/b})$ lokální maximum. pro $b<0$ to bude naopak. Oba extrémy jsou zároveň globální, což lze vidět z obrázku.

   (c) **(3b)** Úlohu nyní zobecníme: hledáme lokální extrémy funkce $\mathbf{a}^T\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{y}$ za podmínky $\mathbf{x}^T\mathbf{y}=1$, kde $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ jsou známé a $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ jsou proměnné. Najděte všechny body splňující podmínku 1. řádu pro tuto úlohu (podmínky 2. řádu nemusíte ověřovat). Pro jaké vektory $\mathbf{a},\mathbf{b}$ budou takové body existovat?
   Tady je výhodné použít metodu Lagrangeových multiplikátorů. Lagr funkce $L(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda)=\mathbf{a}^T\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{y}+\lambda(1-\mathbf{x}^T\mathbf{y})$. Podmínka prvního řádu je soustava rovnic $L_{\mathbf{x}}=\mathbf{a}^T-\lambda\mathbf{y}^T=\mathbf{0}$, $L_{\mathbf{y}}=\mathbf{b}^T-\lambda\mathbf{x}^T=\mathbf{0}$, $\mathbf{x}^T\mathbf{y}=1$. Z prvních dvou vyjádříme $\mathbf{x},\mathbf{y}$ a dosadíme do třetí, čímž získáme $\mathbf{a}^T\mathbf{b}/\lambda^2=1$, tedy $\lambda=\pm 1/\sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}$. Po dosazení a úpravě máme dva body podezřelé z lok. extrému: $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\pm\frac{(\mathbf{b},\mathbf{a})}{\sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}}$, které ovšem existují jen za podmínky $\mathbf{a}^T\mathbf{b}>0$.

---

6. **(3b)** Obráběcí stroj umí vyrábět dva druhy výrobků (v jeden okamžik ovšem umí vyrábět jen jeden druh), šrouby a matky. Šrouby vyrábí rychlostí 200 kg/hod, matky rychlostí 140 kg/hod. Je určeno, že šroubů se nesmí vyrobit více než 6000 kg a matek se nesmí vyrobit více než 4000 kg. Z prodeje šroubů je zisk 25 Kč/kg, z prodeje matek 30 Kč/kg. Kolik máme vyrobit šroubů a kolik matek, chceme-li největší zisk a máme-li k dispozici 40 hodin práce stroje? Cenu za suroviny a za běh stroje nepočítáme. Napište jako lineární program (ale ten neřešte).

   Nejřprozenější formulace je $\max 25x+30y$ z.p. $x/200+y/140\leq 40$, $x\leq 6000$, $y\leq 4000$, $x,y\geq 0$ (význam $x,y$ je mnozstvi sroubu/matek).

   Jiná možná formulace je $\max 25\cdot 200x+30\cdot 140y$ z.p. $x+y\leq 40$, $200x\leq 6000$, $140y\leq 4000$, $x,y\geq 0$ (zde $x,y$ znamenají cas vyroby sroubu/matek).

7. Máme množinu $\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1-x-y-z)^2 \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\,\}$.

   (a) **(2b)** Je tato množina konvexní? Odpověď odůvodněte (nemusíte dokazovat algebraicky z definice konvexnní množiny).

   Bez toho, abychom si množinu uměli představit/nakreslit, ihned vidíme, že je konvexní, protože $(1-x-y-z)^2$ je konvexni funkce, a subkontura konvexní funkce je knnvexní množina. Množina je tedy průniken subkontury výšky nula této funkce (což je knvexní množina, viz věta ve skriptech) a poloprostorů $x \geq 0$ a $y \geq 0$.

   (b) **(1b)** Je tato množina konvexní mnohostěn? Odpověď odůvodněte.

   To ze zadání ihned nevidíme, ale musíme si všimnout, že $(1-x-y-z)^2 \leq 0$ je totez jako $x+y+z=1$. Tedy podminky jsou linearni a je to konvexni mnohosten (z definice konvexního mnohostěnu jako množiny řešení soustavy konečně mnoha lineárních rovnic a nerovnic).

   Můžeme si tento mnohostěn i nakreslit (i když to není pro nezbytné): je to průnik roviny $x+y+z=1$ a polorovin $x \geq 0$ a $y \geq 0$.

   (c) **(2b)** Jestliže ano, najděte všechny extrémní body tohoto mnohostěnu (pokud to uděláte úvahou, tak odůvodněte správnost výsledku).

   Jedna možnost je extremální body vykoukat z obrázku.

   Jinak ale postupujeme jako ve skriptech v §13.3.1. Tento postup sice předpokládá mnohostěn popsaný soustavou lin. nerovnic, ale naši rovnici $x+y+z=1$ si můžeme představit jako dvě nerovnice $x+y+z \geq 1$ a $-x-y-z \geq -1$ (ale to vlastně není nutné). Extremální body získáme tak, že vždy zkusíme nějakou podmnožinu nerovnic změnit na rovnice (tj. učinit aktivními) a když daná soustava rovnic bude mít právě jedno řešení a to navíc bude ležet v mnohostěnu, tak toto její řešení je extremální bod.

   Zde máme jen dvě nerovnice, $x \geq 0$ a $y \geq 0$. Když nezměníme žádnou z nich na rovnici, tak máme soustavu $x+y+z=1$, která zjevně má víc než jedno řešení. Když zkusíme změnit $x \geq 0$ na $x=0$, tak máme soustavu $x+y+z=1$, $x=0$, která má také více řešení. Když ale změníme obě nerovnice $x \geq 0$, $y \geq 0$ na rovnice, tak vzniklá soustava $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ má právě jedno řešení $(x,y,z)=(0,0,1)$, a to leží v mnohostěnu. Je to tedy jediný extremální bod.

---

8. **(3b)** Najděte vzdálenost (ve Frobeniově normě) matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.528 & 0.896 & -0.72 \\ -1.204 & -0.528 & 0.96 \end{bmatrix}$ k nejbližší matici hodnosti jedna. Odpověď bude hledaná vzdálenost (tj. jediné číslo). Nápověda: $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.64 & -0.6 \\ -0.48 & 0.8 \\ 0.6 & 0 \end{bmatrix}$.

Tato úloha jde řešit pomocí SVD (věta Eckart-Young). SVD matice $\mathbf{A}$ sice nemáme, ale nápověda nám napovídá matice $\mathbf{U}, \mathbf{V}$. Musíme z nich spočítat matici $\mathbf{S}$. Ověříme přímým výpočtem, že $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$ a $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$ (jak se v SVD předpokládá). Když rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ vynásobíme zleva $\mathbf{U}^T$ a zprava $\mathbf{V}$, dostaneme $\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{S}$ což, jak ručně spočítáme, dá $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$. Ale pozor: násobení maticí $\mathbf{V}$ zprava nebyla ekvivalentní operace (protože matice je obdélníková), tedy sice platí $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \implies \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{S}$ ale obecně neplatí $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \impliedby \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{S}$. Proto musíme udělat zkoušku, že rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ opravdu platí (a ona platí, zadání není tak zlomyslné).

Teď už máme vše k nasazení věty Eckarta a Younga. Z ní plyne, že hledaná vzdálenost je rovna součtu singulárních čísel, která jsme při aproximatice vynulovali. Zde to bylo jediné číslo $\sigma_2 = 0.5$.

9. Maximalizujeme funkci $f(x_1, x_2) = \min\{\, 2x_1 - x_2 - 3,\ 1 - x_1,\ x_2 - 2,\ x_1 + x_2 \,\}$.

(a) **(2b)** Napište úlohu jako lineární program. Pokud to nejde, odůvodněte a další úkoly už nedělejte.

(b) **(2b)** Napište k němu duální úlohu. Výsledek zjednodušte (rozhodně jej nenechte v maticové formě).

Primár uděláme podle §12.1.1 ve skriptech, duál podle kuchařky v §15.1 (kterou máte asi na taháku). Napíšeme primár i duál společně:

$$\begin{aligned} \max\ & z \\ \text{za podm.}\ & 2x_1 - x_2 - z \geq 3 \\ & -x_1 - z \geq -1 \\ & x_2 - z \geq 2 \\ & x_1 + x_2 - z \geq 0 \\ & x_1 \in \mathbb{R} \\ & x_2 \in \mathbb{R} \\ & z \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min\ & 3y_1 - y_2 + 2y_3 \\ \text{za podm.}\ & y_1 \leq 0 \\ & y_2 \leq 0 \\ & y_3 \leq 0 \\ & y_4 \leq 0 \\ & 2y_1 - y_2 + y_4 = 0 \\ & -y_1 + y_3 + y_4 = 0 \\ & -y_1 - y_2 - y_3 - y_4 = 1 \end{aligned}$$

(c) **(2b)** Napište podmínky komplementarity pro obdrženou primární a duální úlohu.

V každém řádku musí být aspoň jedna nerovost aktivní, u rovností je to splněné implicitně. Tedy

$$\begin{aligned} (2x_1 - x_2 - z - 3)y_1 &= 0 \\ (-x_1 - z + 1)y_2 &= 0 \\ (x_2 - z - 2)y_3 &= 0 \\ (x_1 + x_2 - z)y_4 &= 0 \end{aligned}$$

(d) **(2b)** Tvrdíme, že maximum funkce $f$ se nabývá v bodě $(x_1, x_2) = (1, 2)$. Je to pravda? Odpověď dokažte.

Nejjednodušší je zkusit najít bod, ve kterém má funkce $f$ vyšší hodnotu než v daném bodě $(x_1, x_2) = (1, 2)$. Takový bod je např. $(0, 3)$, protože $f(0, 3) = \min\{0, -2, 1, 3) = -2 \geq -3 = f(1, 2)$. Tedy bod $(1, 2)$ není optimální.

Pokud vás tohle nenapadlo, můžeme použít komplementaritu (jako v Příkladu 15.3 ze skript). Pro $(x_1, x_2) = (1, 2)$ bude zbývající primární proměnná $z$ rovna $z = f(x_1, x_2) = -3$. Aby bod $(x_1, x_2, z) = (1, 2, -3)$ byl pro primár optimální, dle Věty o komplementaritě musí existovat $y_1, \ldots, y_4$ přípustná pro duál a splňující podmínky komplementarity. V tomto bodě je aktivní jen první primární omezení (protože $2x_1 - x_2 - 3 = -3$, $1 - x_1 = 0$, $x_2 - 2 = 0$, $x_1 + x_2 = 3$), tedy musí být $y_2 = y_3 = y_4 = 0$. K tomu se nám ovšem nepodaří najít $y_4$ tak, aby platila duálnkí omezení. Tedy bod $(x_1, x_2) = (1, 2)$ není optimální pro primár.