Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (02.02.2023)

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					$\boldsymbol{\Sigma}$
Úloha	1	2	3	4	$\boldsymbol{\Sigma_1}$	1	2	3	4	$\boldsymbol{\Sigma_2}$	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúloha (c) NEnavazuje na přechozí)**.**

(a) Mějme funkci

$$u(x,y) = 2 + 3x - y + x^2 - y^2 - 4xy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, aby $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ byla celistvá funkce.

(b) Spočtěte $f'(1+i)$, kde $f(z)$ je funkce z (a).

(c) Určete všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \alpha z\bar{z} + i(\beta \mathrm{Im}\, z + 2\mathrm{Im}\,(z^2)),\ z \in \mathbb{C},$$

byla diferencovatelná na přímce $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, z = 1\}$.

Úloha 2 ([10 bodů])**.** Spočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\sin(2x)}{(x^2-6x+10)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 3 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je inverzní Z-transformace funkce

$$F(z) = z \ln\left(1 + \frac{3}{z^2}\right),\ z \in U(\infty).$$

Určete a_2, a_3, a_4, a_5.

[Nápověda: Nejprve pomocí známého rozvoje funkce $\ln z$ nalezněte Laurentův rozvoj funkce $F(z)$ na okolí ∞.]

(b) Určete Z-transformaci posloupnosti

$$\left((ni^n) * \sin\left(\frac{3\pi}{2}(n+2)\right)\right)_{n=0}^{\infty}.$$

(c) Určete c_2 a c_3 posloupnosti

$$(c_n)_{n=0}^{\infty} = (3^n)_{n=0}^{\infty} * (n^2)_{n=0}^{\infty}.$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení integrodiferenciální rovnice

$$y'(t) + 9\int_0^t y(\tau)e^{-6(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = e^t$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$.

1) a) $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3 + 2x - 4y$

$v(x,y) = \int 3 + 2x - 4y \, dy = 3y + 2xy - 2y^2 + C(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 1 + 2y + 4x$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x)$

$\Rightarrow C'(x) = 1 + 4x$

$C(x) = \int 1 + 4x \, dx = x + 2x^2 + K$, pour $K \in \mathbb{R}$.

- $v(x,y) = 3y + 2xy - 2y^2 + x + 2x^2 + K$.

b) $f'(1+i) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + i\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = 3 + 2 - 4 + i(2 + 1 + 4) = 1 + 7i$

c

a) $z = x + iy$

$z\bar{z} = x^2 + y^2$

$\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(x^2 + 2xyi - y^2) = 2xy$

$g(z) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + i(\beta y + 4xy)$

- $\mathrm{Re}\, g = u(x,y) = \alpha x^2 + \alpha y^2$
- $\mathrm{Im}\, g = v(x,y) = \beta y + 4xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\alpha x$

$-\frac{\partial v}{\partial y} = \beta + 4x$

$x = 1 \Rightarrow 2\alpha = \beta + 4$

$\beta = 2\alpha - 4$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\alpha y \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4y \quad \Rightarrow \quad 2\alpha y = -4y$$

$$2\alpha = -4$$

$$\boxed{\alpha = -2}$$

$$\boxed{\beta = -4 - 4 = -8}$$

2) $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)\sin(2x)}{(x^2-6x+10)^2}\,dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{2ix}}{(x^2-6x+10)^2}\,dx \right)$

- $z^2-6z+10=0$

$(z-3)^2+1=0$

$z=3\pm i$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{2ix}}{(x^2-6x+10)^2}\,dx = 2\pi i \operatorname{res}_{3+i} \frac{(z-3)e^{2iz}}{(z-3-i)^2(z-3+i)^2}$

- $\operatorname{res}_{3+i} \frac{(z-3)e^{2iz}}{(z-3-i)^2(z-3+i)^2} \overset{\text{pol 2. rádu}}{=} \lim_{z\to 3+i} \left(\frac{(z-3)e^{2iz}}{(z-3+i)^2} \right)' = \lim_{z\to 3+i} e^{2iz} - 2i(z-3)$

$$= \lim_{z\to 3+i} \frac{(e^{2iz}+2i(z-3)e^{2iz})(z-3+i)^2 - 2(z-3+i)(z-3)e^{2iz}}{(z-3+i)^4}$$

$$= \frac{(1*-2)e^{-2+6i}(-4) - 2(2i)i\,e^{-2+6i}}{16} = \frac{(4+4)e^{-2+6i}}{16}$$

$$= \frac{e^{-2+6i}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{2ix}}{(x^2-6x+10)^2}\,dx = 2\pi i \frac{e^{-2+6i}}{2} = e^{-2+6i}\pi i$$

$$I = \operatorname{Im}(\pi i e^{-2+6i}) = \operatorname{Im}(\pi i e^{-2}(\cos 6 + i\sin 6))$$

$$= \boxed{\frac{\pi\cos 6}{e^2}}$$

3) a) $F(z) = z \ln\left(1+\frac{3}{z^2}\right) = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{3}{z^2}\right)^n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, 3^n}{n\, z^{2n-1}} = \frac{3}{z} - \frac{9}{2z^3} + \frac{27}{3z^5} + \dots$$

$a_2 = 0$
$a_3 = -\frac{9}{2}$
$a_4 = 0$
$a_5 = 9$

b) $\mathcal{Z}\left[(n\,i^n) * \sin\left(\frac{3\pi}{2}(n+2)\right)\right](z) = \mathcal{Z}[n\,i^n](z) \cdot \mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}(n+2)\right)\right](z)$

$\cdot\ \mathcal{Z}[n\,i^n](z) = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[i^n](z) = -z \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-i}\right)' = -z \frac{z-i-z}{(z-i)^2}$

$$= \frac{z}{(z-i)^2}\, i$$

$\cdot\ \mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}(n+2)\right)\right](z) = z^2 \mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}n\right)\right](z) - \sin(0)\cdot z^2 - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) z$

$$= z^2 \frac{-z}{z^2+1} + z = \frac{-z^3+z^3+z}{z^2+1} = \frac{z}{z^2+1}$$

$$\mathcal{Z}\left[(n\,i^n) * \sin\left(\frac{3\pi}{2}(n+2)\right)\right](z) = \frac{z^2}{(z-i)^2(z^2+1)}\, i = \frac{z^2}{(z-i)^3(z+i)}\, i$$

c) $c_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k (n-k)^{k2}$

$$c_2 = \sum_{k=0}^{2} 3^k (2-k)^2 = 4+3+0 = 7$$

$$c_3 = \sum_{k=0}^{3} 3^k (3-k)^2 = 9+3\cdot 4+9 = 30$$

4) $y'(t)+9\int_0^t y(\tau)e^{-6(t-\tau)}d\tau = e^t \mid y(0)=1$

$y'(t)+9y(t)*e^{-6t}=e^t$

$sY(s)-1+9Y(s)\frac{1}{s+6}=\frac{1}{s-1}$

$\frac{s^2+6s+9}{s+6}Y(s)=\frac{s}{s-1}$

$s^2+6s+9=(s+3)^2$

$\cdot\ Y(s)=\frac{s^2+6s}{(s-1)(s+3)^2}$

$\cdot y(t)=\operatorname{res}_1\frac{s^2+6s}{(s-1)(s+3)^2}e^{st}+\operatorname{res}_{-3}\frac{s^2+6s}{(s-1)(s+3)^2}e^{st}$

$\cdot \operatorname{res}_1\frac{s^2+6s}{(s-1)(s+3)^2}e^{st}=\frac{1+6}{4^2}e^t=\frac{7}{16}e^t$

$\cdot \operatorname{res}_{-3}\frac{(s^2+6s)e^{st}}{(s-1)(s+3)^2}\overset{\text{pot 2. reda}}{=}\lim_{s\to-3}\left(\frac{(s^2+6s)e^{st}}{s-1}\right)'=$

$=\lim_{s\to-3}\frac{(2s+6)e^{st}+t(s^2+6s)e^{st})(s-1)-(s^2+6s)e^{st}}{(s-1)^2}=$

$=\frac{-4t(-9)e^{-3t}+9e^{-3t}}{16}=\frac{9(4t+1)e^{-3t}}{16}$

$$\boxed{y(t)=\frac{7}{16}e^t+\frac{9(4t+1)}{16}e^{-3t}}$$