Fyzika 2
Online seminář č. 9
24. listopadu 2020

Termodynamika

Příklad 4.11

Na počátku určitého polytropického děje objem a tlak byly $V_1 = 2,3\,\ell$ a $p_1 = 10^5$ Pa, na konci děje byly $V_2 = 4,1\,\ell$ a $p_2 = 0,5 \cdot 10^5$ Pa. Teplota na začátku děje byla $t_1 = 26^o$C, měrná tepelná kapacita kyslíku pro konstantní objem je $c_{VO} = 651\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, molární hmotnost kyslíku je $M_O = 15,9994\ \mathrm{kg \cdot kmol^{-1}}$, univerzální plynová konstanta je rovna $R = 8,3 \cdot 10^3\ \mathrm{J \cdot kmol^{-1} \cdot K^{-1}}$

Určete

a) exponent polytropické rovnice α $\left[\alpha = \dfrac{\ln\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)} = 1,199\right]$

b) práci vykonanou rozpínajícím se kyslíkem $\left[A = \dfrac{p_1 V_1}{\alpha - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\alpha-1}\right] = 125,6\ \mathrm{J}\right]$

c) množství tepla, které obdrží kyslík od okolního prostředí

$$\left[\Delta Q = \frac{p_1 V_1}{\alpha - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\alpha-1}\right] + \frac{2M_0}{R} c_{VO} \left(p_2 V_2 - p_1 V_1\right) = 62,86\ \mathrm{J}\right]$$

4.11

polytropický děj

$V_1 = 2{,}3\,l$; $p_1 = 10^5\,Pa$ $\longrightarrow$ $V_2 = 4{,}1\,l$; $p_2 = 0{,}5 \cdot 10^5\,Pa$

$t_1 = 26°C$ $T_1 = 299\,K$

kyslík : $c_{V0} = 651\,J\,kg^{-1}\,K^{-1}$; $M_0 = 15{,}9994\,kg/kmol$

a) $\alpha = ?$ b) $A = ?$ c) $Q = ?$

a) polytropický děj $\quad pV^\alpha = konst = p_1 V_1^\alpha = p_2 V_2^\alpha \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\alpha = \frac{p_2}{p_1}$

zlogaritmujeme $\quad \alpha \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \ln\frac{p_2}{p_1} \Rightarrow \alpha = \frac{\ln(p_2/p_1)}{\ln(V_2/V_1)}$

$$\alpha = \frac{\ln(0{,}5/1)}{\ln(2{,}3/4{,}1)} \doteq 1{,}2$$

b) práce: $\delta A = p\,dV$ $\quad$ polytropa: $pV^\alpha = p_1 V_1^\alpha \Rightarrow p = \frac{p_1 V_1^\alpha}{V^\alpha}$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\alpha}{V^\alpha} \cdot dV = p_1 V_1^\alpha \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\alpha} = [\alpha \neq 1] = p_1 V_1^\alpha \cdot \left.\frac{\frac{1}{V^{\alpha-1}}}{-(\alpha-1)}\right|_{V_1}^{V_2} =$$

$$= \frac{p_1 V_1^\alpha}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{V_1^{\alpha-1}} - \frac{1}{V_2^{\alpha-1}}\right] = \frac{p_1 V_1}{\alpha - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\alpha-1}\right] = \frac{10^5 \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{2{,}3}{4{,}1}\right)^{0{,}2}\right] = 125{,}6\,J$$

c) $Q = A + \Delta U \qquad A = \dfrac{p_1 V_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}\right]$ viz b)

$$\Delta U = m \cdot c_{V0} \cdot \Delta T = \left[\begin{matrix} n = \frac{m}{M_m} \\ m = n M_m \end{matrix}\right] = M_m \cdot n \cdot c_{V0} \cdot \Delta T = \left[M_m = 2M_0\right] = 2M_0 \cdot c_{V0} \cdot n \cdot (T_2 - T_1) =$$

$$= \left[\begin{matrix} nT = \frac{pV}{R} \\ n(T_2 - T_1) = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{R} \end{matrix}\right] = 2 \cdot M_0 \cdot c_{V0} \cdot \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{R}$$

$$\Delta U = 2 \cdot \frac{15{,}9994 \cdot 10^{-3}}{8{,}3} \cdot 651 \cdot (0{,}5 \cdot 10^5 \cdot 4{,}1 \cdot 10^{-3} - 10^5 \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-3})\ \mathrm{J} \doteq -62{,}7\ \mathrm{J}$$

$$Q = A + \Delta U = 62{,}9\ \mathrm{J}$$

Tepelné vlastnosti látek

Příklad 5.3

Měděná tyč délky $\ell_1 = 15$ cm je připojena k železné tyči stejného průřezu a délky $\ell_2 = 8$ cm. Volný konec měděné tyče udržujeme na stálé teplotě $t_1 = 150^o$ C, konec železné tyče na teplotě $t_2 = 20^o$ C. Vypočítejte

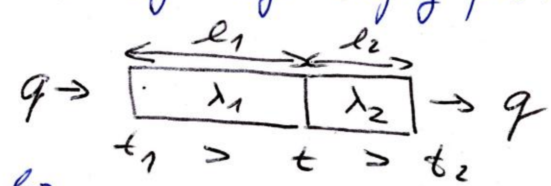
a) hustotu tepelného toku q v tyčích $\left[q = \dfrac{t_1 - t_2}{\dfrac{\ell_1}{\lambda_m} + \dfrac{\ell_2}{\lambda_z}} = 88,4 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \right]$

b) teplotu t_x na dotykové ploše tyčí $\left[t_x = \dfrac{\ell_2 \lambda_m t_1 + \ell_1 \lambda_z t_2}{\ell_2 \lambda_m + \ell_1 \lambda_z} = 116,9^o \text{ C} \right]$

součinitel tepelné vodivosti mědi je $\lambda_m = 401 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, součinitel tepelné vodivosti železa je $\lambda_z = 73 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Hustota tepelného toku $\vec{q} = -\lambda \nabla T$. Oba materiály mají stejný průřez, proto: $|q_1| = |q_2|$

$$|q_1| = |q_2| \Rightarrow \lambda_1 \frac{t_1 - t}{\ell_1} = \lambda_2 \frac{t - t_2}{\ell_2} = q$$



tzn. $t_1 - t = q \cdot \frac{\ell_1}{\lambda_1}$ a $t - t_2 = q \frac{\ell_2}{\lambda_2}$

dosazovat v metrech (rozdíl teplot klidně v °C)

sečteme rovnice: $t_1 - t_2 = q \left[\frac{\ell_1}{\lambda_1} + \frac{\ell_2}{\lambda_2} \right] \Rightarrow$ a) $q = \dfrac{t_1 - t_2}{\frac{\ell_1}{\lambda_1} + \frac{\ell_2}{\lambda_2}} = 88 \frac{kW}{m^2}$

b) $\lambda_1 \frac{t_1 - t}{\ell_1} = \lambda_2 \frac{t - t_2}{\ell_2} \Rightarrow \frac{\lambda_1 t_1}{\ell_1} + \frac{\lambda_2 t_2}{\ell_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\ell_2} + \frac{\lambda_1}{\ell_1} \right) \cdot t$

$t = \dfrac{\frac{\lambda_1 t_1}{\ell_1} + \frac{\lambda_2 t_2}{\ell_2}}{\lambda_2/\ell_2 + \lambda_1/\ell_1} = \dfrac{\lambda_1 t_1 \ell_2 + \lambda_2 t_2 \ell_1}{\lambda_2 \ell_1 + \lambda_1 \ell_2} =$ [dosazovat můžeme v °C i v cm] $= 117\,°C$

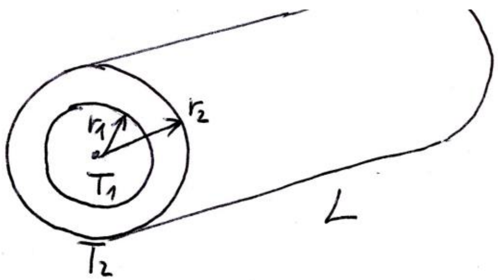
Příklad 5.4

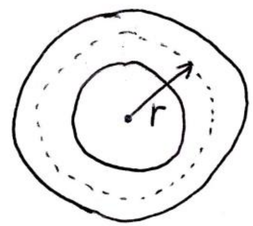
Měděná destička tloušťky $\ell_1 = 6$ mm je položena na železné destičce tloušťky $\ell_2 = 4$ mm. Vypočítejte, jaký by byl součinitel tepelné vodivosti λ destičky o tloušťce $\ell = 10$ mm, která by vedla teplo stejně, jako spojené destičky, součinitel tepelné vodivosti mědi je $\lambda_m = 401\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, součinitel tepelné vodivosti železa je $\lambda_z = 73\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ $\left[\lambda = \ell \cdot \frac{\lambda_m \lambda_z}{\ell_1 \lambda_z + \ell_2 \lambda_m} = 143,4\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}\right]$

Odevzdáváte v Moodle. Děkuji.

Příklad 5.7

Vypočítejte množství tepla Q, které za ustáleného tepelného toku projde za čas $t = 20$ s pláštěm měděné trubky, teplota na vnitřní ploše trubky je rovna $T_1 = 80^o$ C, na vnější $T_2 = 20^o$ C, vnitřní poloměr trubky je $r_1 = 10$ mm, vnější poloměr trubky $r_2 = 15$ mm, délka trubky $L = 2$ m, součinitel tepelné vodivosti mědi je $\lambda_m = 401 \ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ $\left[Q = \dfrac{2\pi\lambda L}{\ln\dfrac{r_1}{r_2}}(T_2 - T_1)t = 14,9 \cdot 10^6 \ \mathrm{J} \right]$





Plocha myšleného válce uvnitř trubky není konstantní, ale $S = 2\pi r \cdot L$

Proto není konstantní tepelný tok a musíme počítat s teplem Q.

$Q(r) = Q =$ konstantní

(teplo, které prochází skrze válec o poloměru r)

$$Q = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} \cdot S \cdot \tau = Q(r)$$

, kde dt je změna teploty na vzdálenosti dr.

$$Q = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} \cdot 2\pi r \cdot L \cdot \tau$$

$$-\frac{dr}{r} = \frac{2\pi\lambda L \cdot \tau \cdot dt}{Q}$$

$$-\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{2\pi\lambda L \cdot \tau}{Q} \int_{T_1}^{T_2} dt$$

$$-\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{2\pi\lambda L\tau \cdot (T_2 - T_1)}{Q} \Rightarrow Q = \frac{2\pi\lambda L}{\ln\frac{r_1}{r_2}}(T_2 - T_1) \cdot \tau$$

$Q = 14,9$ MJ

Příklad 5.8

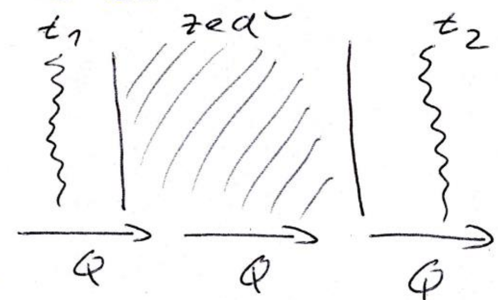
Kolik tepla projde za čas $\tau = 1$ hodina zdí o ploše $S = 1\ \mathrm{m}^2$ o síle $d = 45$ cm z místnosti o teplotě $t_1 = 20^o\mathrm{C}$ do venkovního mrazu $t_2 = -15^o\mathrm{C}$? Součinitel přestupu tepla z místnosti do zdi je $\alpha_1 = 29{,}302\ \mathrm{kJ}\cdot\ \mathrm{m}^{-2}\cdot\ \mathrm{hod}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$, součinitel přestupu tepla ze zdi do okolí $\alpha_2 = 83{,}72\ \mathrm{kJ}\cdot\ \mathrm{m}^{-2}\cdot\ \mathrm{hod}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ a měrná tepelná vodivost zdiva $\lambda = 3{,}1395\ \mathrm{kJ}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{hod}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.

$$\left[Q = Q = \tau S \frac{t_1 - t_2}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{d}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_2}} = 184{,}787\ \mathrm{kJ}\right]$$

Oproti předchozím úlohám nyní řešíme také vliv rozhraní mezi plynem a pevnou látkou.

U zdi má vzduch jinou teplotu než uprostřed místnosti, resp. venku daleko od zdi.

Na situaci se tak můžeme dívat tak, že teplo prochází nejdříve skrz chladnější vrstvu vzduchu u vnitřní zdi, pak skrze zeď a nakonec skrz venkovní vrstvu vzduchu na vnější straně zdi.



Tepelný odpor jednotlivých vrstev můžeme sečíst.

Vrstvu vzduchu necharakterizujeme pomocí $\frac{1}{\lambda}\frac{d}{S}$, protože „d" neznáme. Vrstvu charakterizujeme pomocí $\frac{1}{\alpha\cdot S}$

Kvůli proudění vzduchu je součin přestupu tepla ze zdi do okolí α_2 větší.

$$R_{CELKEM} = \frac{1}{\alpha_1\cdot S} + \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{d}{S} + \frac{1}{\alpha_2\cdot S}$$

$$Q = \tau\cdot\frac{t_1 - t_2}{R} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}\cdot S\cdot\tau = \left[\begin{array}{l}\text{můžeme dosazovat} \\ \text{v hodinách} \\ \text{i nechat kJ}\end{array}\right] = 185\ \mathrm{kJ}$$

→ vyjdou kJ

Příklad 5.9 Majitel měl na chatě jednoduchá okna o rozměrech 60 cm × 120 cm, tloušťka skla je d =3 mm, součinitel tepelné vodivosti skla je $\lambda_s = 0,75\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ součinitel přestupu tepla je stejný pro všechna prostředí $\alpha = 20\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$. Jaký je poměr nového a původního tepelného toku v následujících případech?

a) Aby zlepšil tepelnou izolaci, rozhodl se pro silnější sklo. Na jednom okně odstranil tmel vyměnil sklo za jiné s dvojnásobnou tloušťkou. [$p_1 = 0,963$]

b) Jeho syn přidal druhé sklo stejné tloušťky na rám tak, že mezi skly nechal velmi malou mezeru. [$p_2 = 0,5$]

c) Jeho dcera přidala druhé sklo stejné tloušťky na rám tak, že mezi skly vznikla mezera h = 1 cm, součinitel tepelné vodivosti vzduchu je $\lambda_v = 0,026\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ [$p_3 = 0,175$]

Tepelný tok jedním sklem o tloušťce d a tepelné vodivosti λ_s:

$$q_0 = |\vec{q}| = \frac{\Delta t}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha}}$$ kde zahrnujeme 2x součinitel přestupu tepla α.

a) 2x tlustší sklo $d_a = 2d \Rightarrow q_a = \dfrac{\Delta t}{\frac{1}{\alpha} + \frac{2d}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha}} \Rightarrow \dfrac{q_a}{q_0} = \dfrac{\frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{2d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}} \doteq 0,96$

b) 2x sklo + tenká mezera $q_b = \dfrac{\Delta t}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha}}$ $\dfrac{q_b}{q_0} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

c) Chytrá horákyně:
2x sklo + silnější mezera h $q_c = \dfrac{\Delta t}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha} + \frac{h}{\lambda_v} + \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha}}$ $\dfrac{q_c}{q_0} \doteq 0,16$