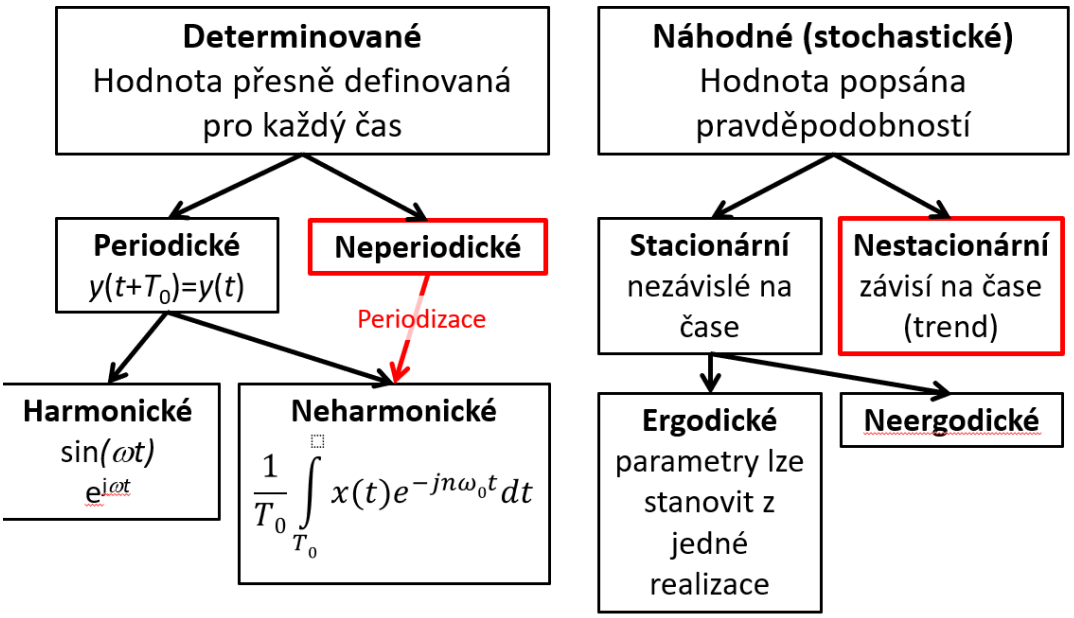
I10 - Spektrální analýza číslicových signálů a převzorkování. (Základy zpracování signálů)

Základní dělení – z pohledu determinovanosti



Vzájemná energie

Energie:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)\cdot x(t)^*|dt$$; (*komplexně sdružené)

Vzájemná energie dvou signálů:

- interakce mezi signály a jejich komponentami

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)\cdot y(t)^*|dt$$

Jak si to představit?

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty}|y(t)|^2dt$$

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

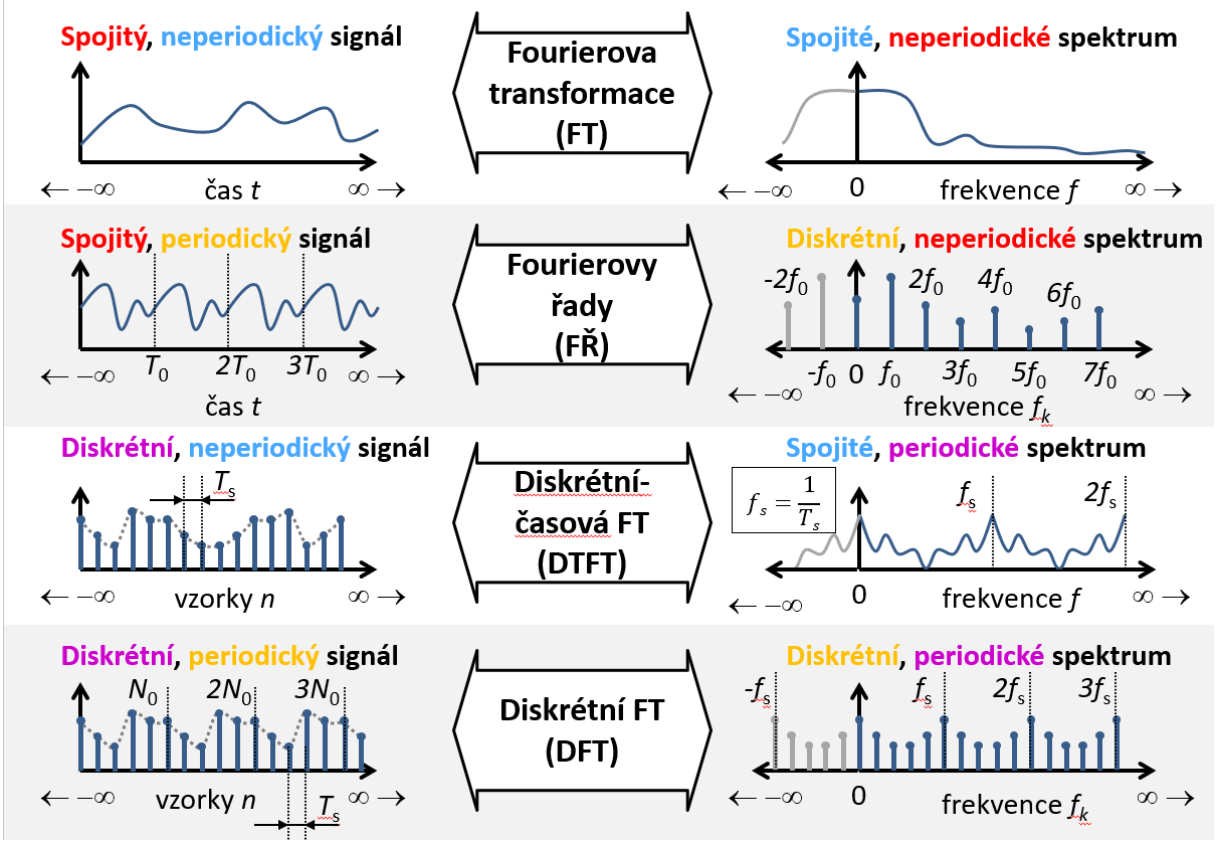
$$E_z \neq Ex + Ey$$

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty}|z(t)^2|dt$$

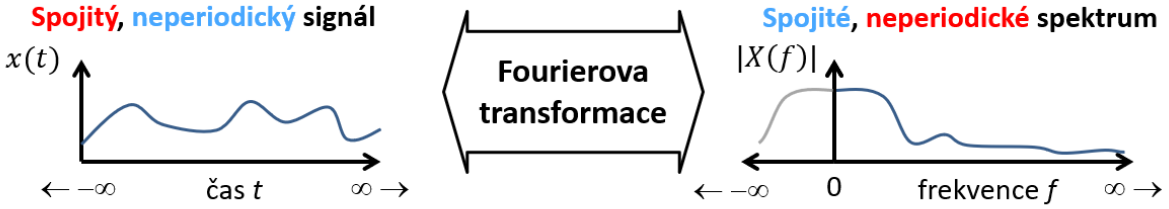
$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty}|[x(t)+y(t)]^2|dt$$

$$(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$$

$$E_z = Ey + Exy + Eyx + Ey$$



Obecná Fourierova transformace (FT)



Spojitý neperiodický signál $x(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i\omega t} df$$

FT

Inverzní

$$\omega = 2\pi f$$

Spojité spektrum $X(f)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

Vlastnosti:

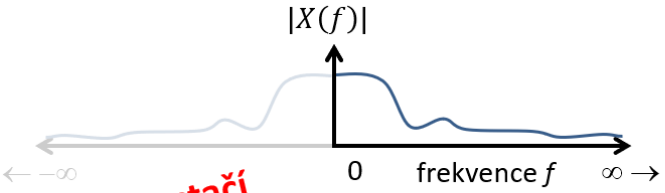
Spojitý signál $t \in (-\infty,\infty)$	→	Neperiodické spektrum $f \in (-\infty,\infty)$
Neperiodický signál	→	Spojité spektrum
Integrál $(-\infty,\infty)$	→	Záporné frekvence ???
Spektrum $X(f)$ sudá funkce	→	Zrcadlení kolem nuly
Komplexní exponenciála	→	Komplexní funkční hodnota !!!

Symetrie spektra $f \in (-\infty, \infty)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \qquad \omega = 2\pi f$$

frekvence ortogonální funkce
$2\pi f t \in (-\infty, \infty)$

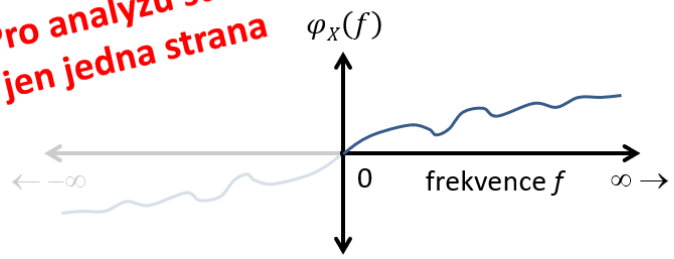
Absolutní spektrum $|X(f)|$



Sudá funkce

Pro analýzu stačí jen jedna strana

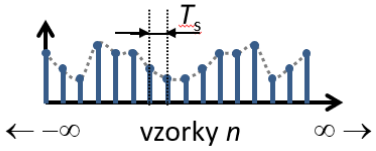
Fázové spektrum $\varphi_X(f)$



Lichá funkce

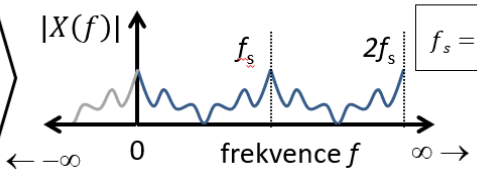
Diskrétní v čase Fourierova transformace (DTFT)

Diskrétní, **neperiodický** signál



Diskrétní-časová FT

Spojité, **periodické** spektrum



$f_s = \frac{1}{T_s}$

Diskrétní signál $x[n]$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(f) e^{i\Omega n} df$$

DTFT

Inverzní

$$\Omega = 2\pi f Ts = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

„$\int dt \rightarrow \Sigma \Delta t = \Sigma T_s$“

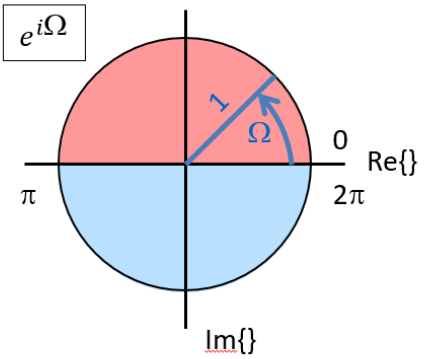
spojité periodické spektrum $X(f)$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i\Omega n}$$

Vlastnosti:

Diskrétní signál $n \in (-\infty, \infty)$	→	Periodické spektrum v $f \in (0, f_s)$
Neperiodický signál	→	Spojité spektrum
Komplexní exponenciála	→	Komplexní funkční hodnota
Vzorkovací čas T_s ($1/f_s$)	→	Pozor na vzorkovací teorém!

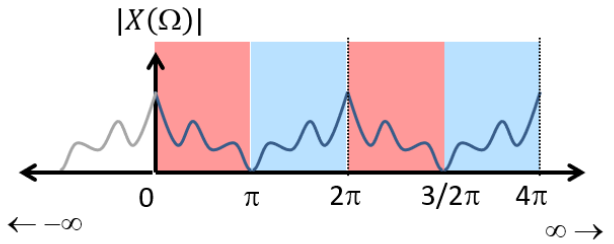
Diskrétní signál → periodické spektrum



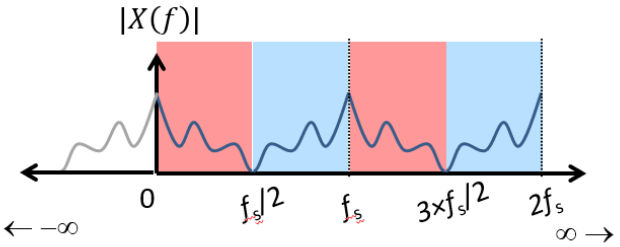
$$\Omega = 2\pi f Ts = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

$$T_s = \frac{1}{f_s}$$

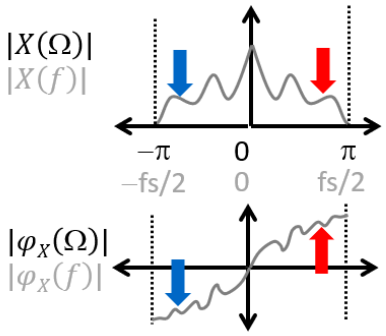
úhlová frekvence Ω



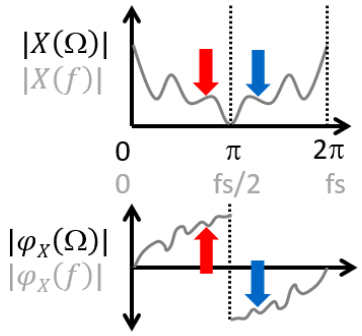
frekvence *f*



Periodické spektrum $\Omega\epsilon(-\pi,\pi)+k2\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$



Ekvivalentní zobrazení



Příklad:

f_s=10 Hz

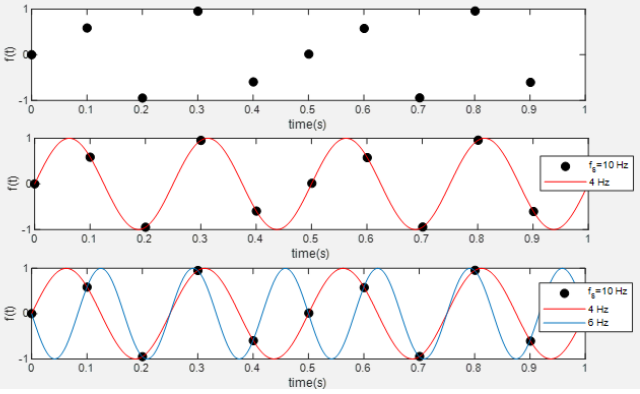
$f_s/2$=5 Hz

f_0=4 Hz

φ_0=0 rad

$f_0' = f_s - f_0$=6 Hz

$\varphi_0' = -\varphi_0$



Různá definice normalizace periody mezi DTF↔IDTF

FT - neřešíme periodu: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i\omega t}df \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$

FŘ - řešíme periodu na straně spektra $\tilde{x_n}(t) = \sum_{k=0}^{n} c[f_k]e^{ik\omega_0 t} \quad c[fk] = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-ik\omega_0 t}dt$

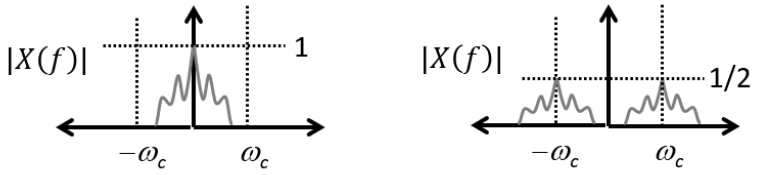
DTFT - řešíme periodu na straně času $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(f)e^{i\Omega n}df \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n}$

DFT - řešíme periodu na straně času $x[n] = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} X[f_k]e^{i\Omega_k n} \quad X[fk] = \sum_{n=1}^{N_0} x[n]e^{-i\Omega_k n}$

Věty o Fourierově transformaci

Linearita: $\mathcal{F}\{\lambda_x x(t) + \lambda_y y(t)\} = \mathcal{F}\{\lambda_x x(t)\} + \mathcal{F}\{\lambda_y y(t)\}$

Modulace: $\mathcal{F}\{x(t)\cdot\cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2}X(\omega-\omega_c) + \frac{1}{2}X(\omega+\omega_c)$



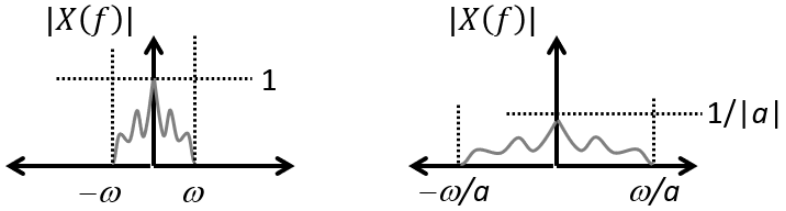
Posun v čase: $\mathcal{F}\{x(t-td)\} = X(\omega)e^{-i\omega td}$

Posun v čase ↔ posun fáze ve spektru

Věty o Fourierově transformaci

<u>Změna časového měřítka</u>: $\mathcal{F}\{x(a \cdot t))\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Zkrácení času ↔ zvětšení frekvence



<u>Komplexní sdružení</u>: $\mathcal{F}\{x(t)^*\} = X(-\omega)$

Pro *Re*{} signály ↔ bez změny, symetrické spektrum v 0

Konvoluce: $\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(\omega) \cdot Y(\omega)$

Konvoluce v čase ↔ skalární násobení spekter

Filtrace v čase ↔ váhování spektra

Parsevalova rovnost:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Energie **Výkonová spektrální hustota**

Energie signálu = Energie spektra

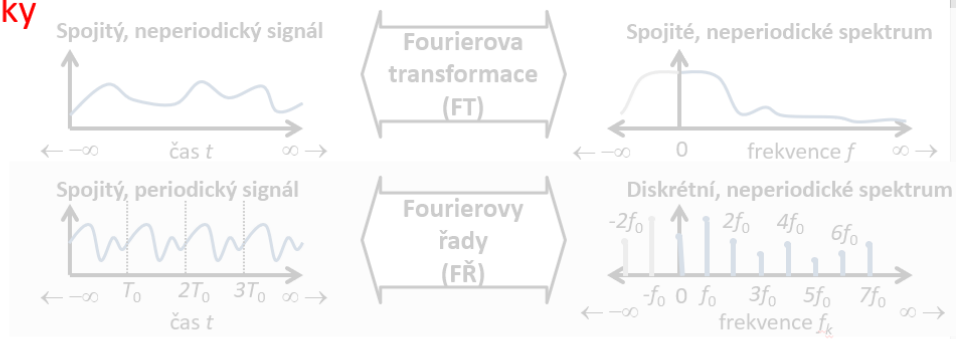
Signály z praxe, digitální zpracování a Fourierova transformace

Biologické signály, měření přírodních jevů apod.

- diskrétní
- neperiodický
- finitní

$n \notin (-\infty, \infty)$

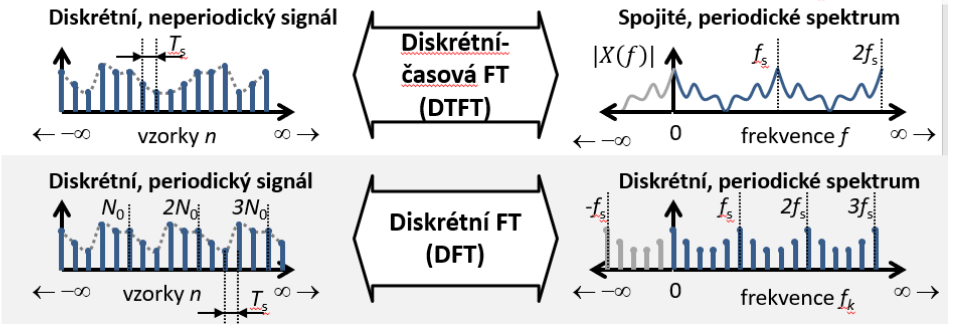
$n \in (1, N)$



požadavky:
$n \in (-\infty, \infty)$

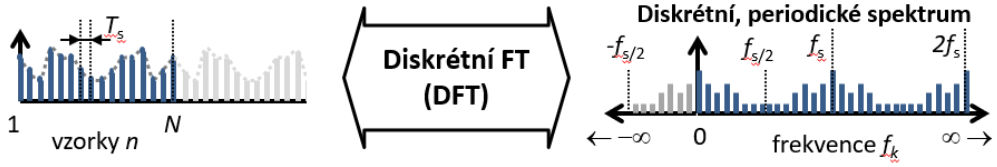
?

požadavky:
perioda N_0



Periodizace:

Budeme předstírat, že finitní signál $n \in (1, N)$ je jedna perioda



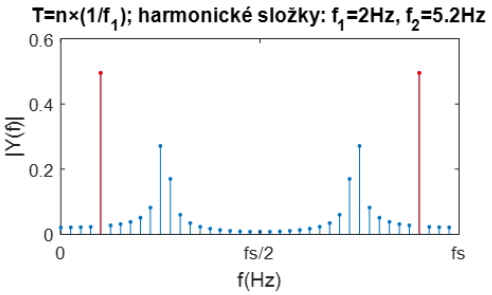
$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[f_k] e^{i\Omega_k n} \quad \underset{\text{Inverzní}}{\overset{\text{DFT}}{\rightleftarrows}} \quad X[fk] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x[n] e^{-i\Omega_k n}$$

Počet vzorků v „periodě“ N	→	Počet spektrálních čar ***K=N***
Vzorkovací čas T_s ($1/f_s$)	→	Pozor na vzorkovací teorém!
Zrcadlení ve spektru	→	$f_k' = f_s - f_k$ $\varphi_k' = -\varphi_k$

Omezení prosakování

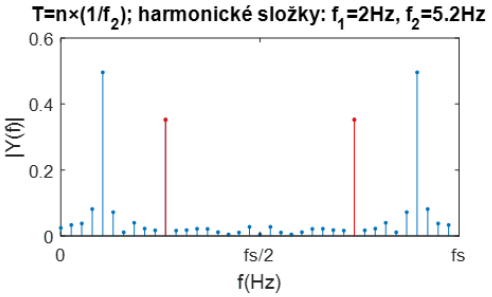
Délkou segmentu

- Celý násobek periody harmonické
- Pro úzkopásmový signál
- V praxi pouze vyjímečně

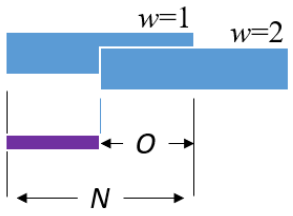


Př.: f_s=20 Hz
Zajímá nás 2 Hz složka
T_0=0.5s $\rightarrow N = r \cdot T_0 \cdot fs; r \in \mathbb{N}^+$
r=4 $\rightarrow$ T=2s $\rightarrow$ N=40

Zajímá nás 5.2 Hz složka
T_0=0,1923 s $\rightarrow N = r \cdot T_0 \cdot fs; r \in \mathbb{N}^+$
r=10 $\rightarrow$ T=1,9231s $\rightarrow$ N=38



Časová segmentace

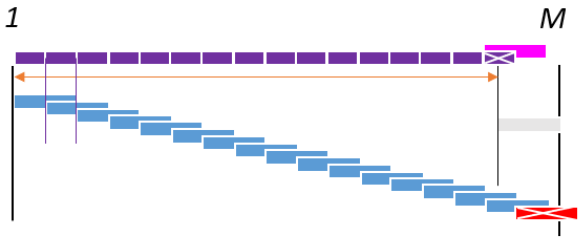


- Délka signálu M
- Délka segmentu N
- Negativní překryv O
- $O \in (0, N\text{-}1) \in \mathbb{N}$

Segment signálu

$y_w = y[m]$
$m \in \langle 1 + (N - O)(w - 1);\ wN - O(w - 1) \rangle$
$w \in \langle 1, \underbrace{floor\,[(M - N)/(N - O)] + 1}_{\text{Počet segmentů}} \rangle$

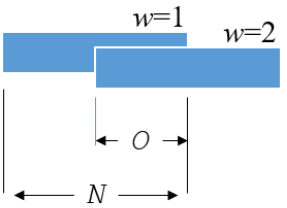
V MATLAB

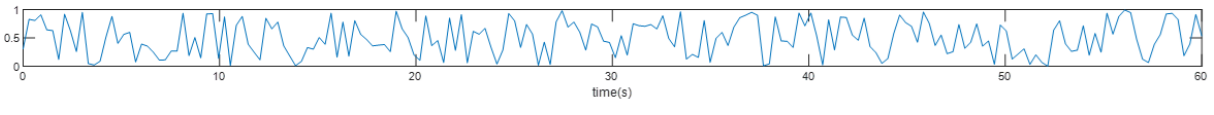


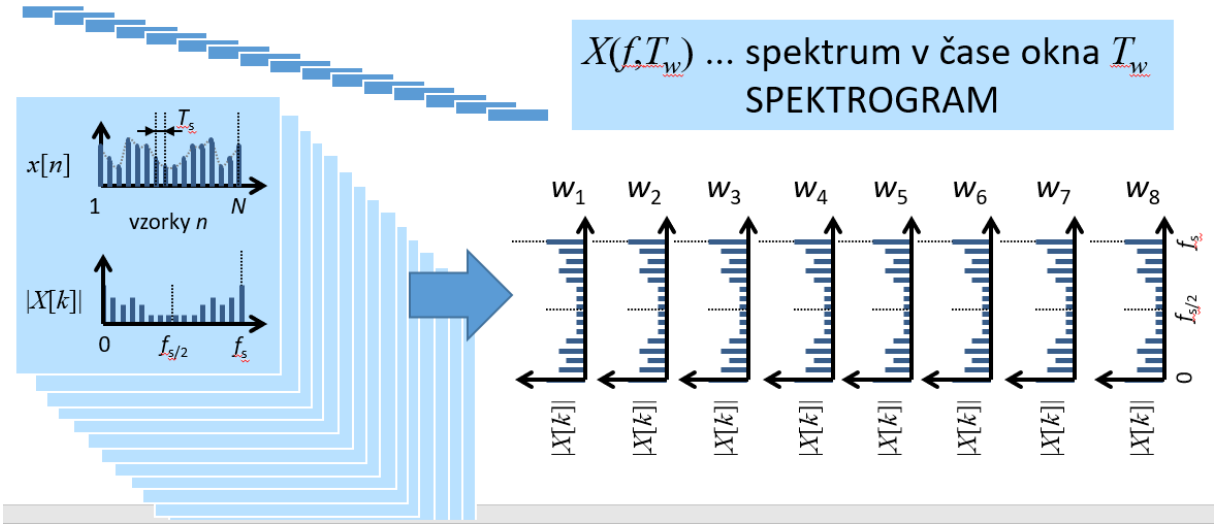

```
M=length(y);
start=1:N-O:M-N+1;
stop=start+N-1;

w=1;
yw=y(start(w):stop(w));
Tw=t(start(w)); % čas začátku segmentu
```

Spektrogram

- signál rozdělen do w časových oken délky N
- okna se mohou překrývat o O
- DFT pro každý segment







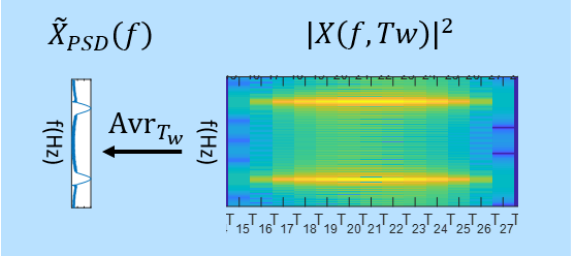
$X(f,T_w)$ ... spektrum v čase okna T_w
SPEKTROGRAM

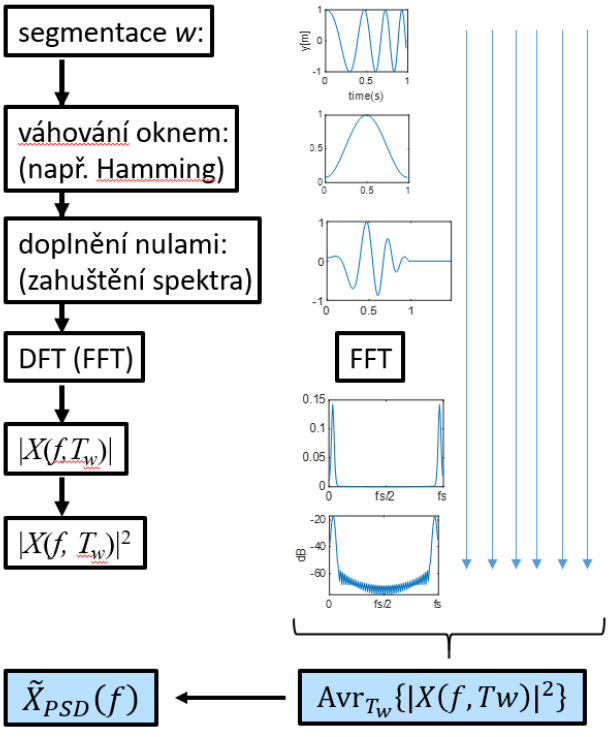
Odhad PSD

V literatuře často neodlišují „PSD“ a „odhad PSD“

Výpočet odhadu PSD (Welchova metoda):

- Časová segmentace
- Váhování oknem
- Doplnění nulami
- FFT
- Kvadrát modulu spektra
- Průměr přes všechny segmenty
- $\tilde{X}_{PSD}(f) = \mathrm{Avr}_{T_w}\{|X(f,Tw)|^2\}$

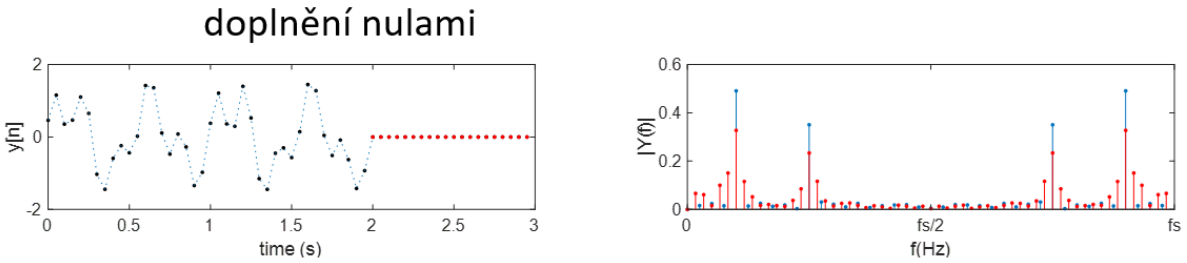




Shrnutí

Zahuštění spektra:

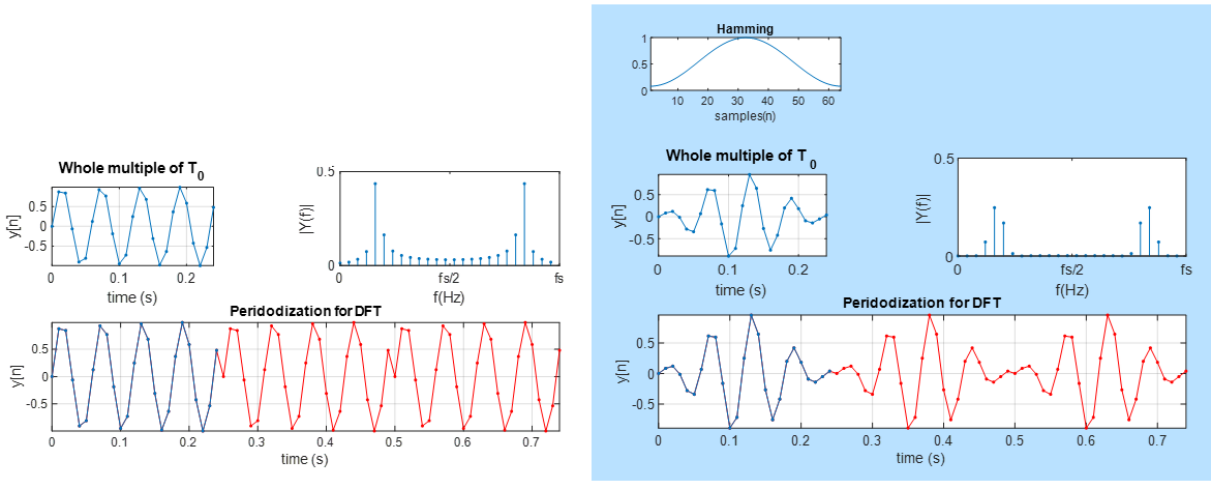
- Za signál vložíme nulové vzorky
- Nezmění se energie
- Zvýší se počet spektrálních čar
- Nepřidává informaci
- Užitečné pro porovnávání signálů s různým f_s nebo segmentací
- Optimalizace pro FFT: 2^n *vzorků*



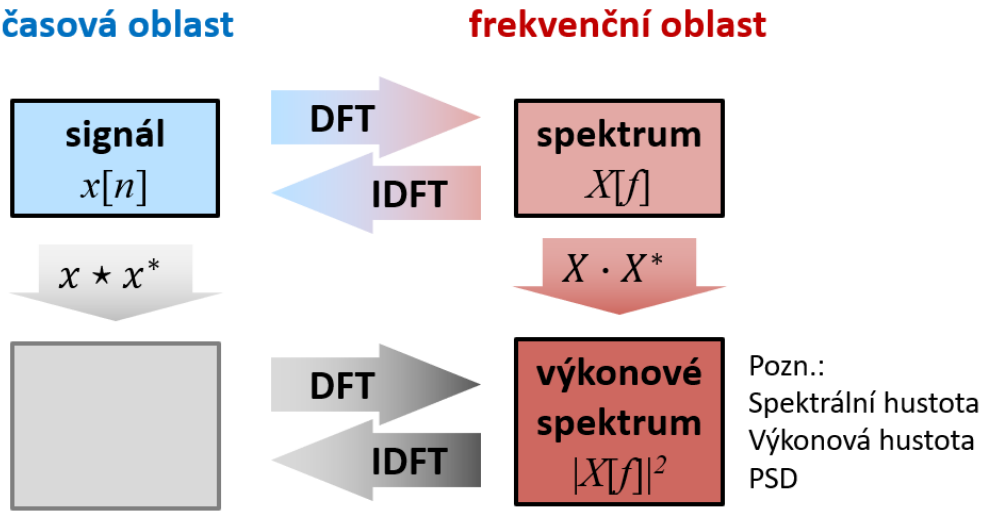
Shrnutí

Prosakování:

- Vzniká při periodizaci signálu pro DFT
- Nespojitost mezi periodami → vyšší harmonické složky
- Váhováním oknem minimalizujeme nespojitosti
- Rozmazání spektra heterodynním mísením



DSP čtyřúhelník



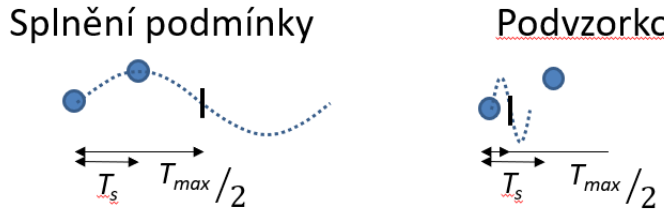
Převzorkování

Vzorkovací teorém

Rekonstrukce signálu

- mezi naměřenými hodnotami očekáváme spojité proložení

- pro rekonstrukci signálu se musí mezi dva sousední vzorky vejít více než půlperioda nejrychlejší harmonické složky



$$T_s < \frac{T_0}{2}$$

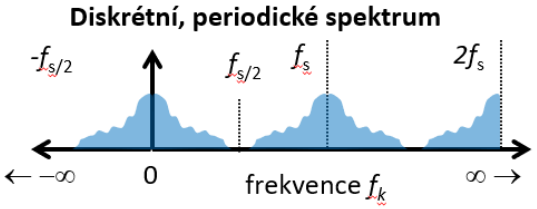
$$\frac{1}{f_s} < \frac{1}{2fmax}$$

$$f_s > 2fmax$$

$$f_{max} < {f_s}/{2}$$

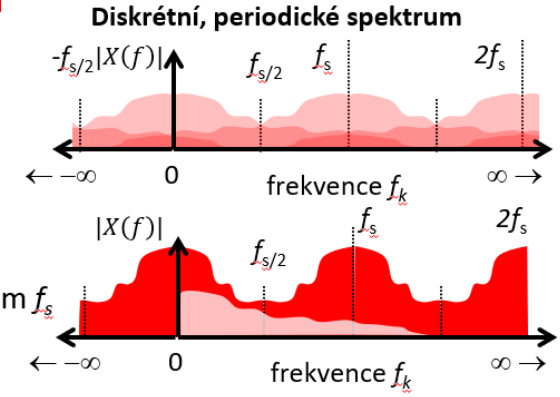
Vzorkovací teorém

$$f_{max} < f_s/2$$



Nedodržení teorému

$$f_{max} > f_s/2$$



Aliasing

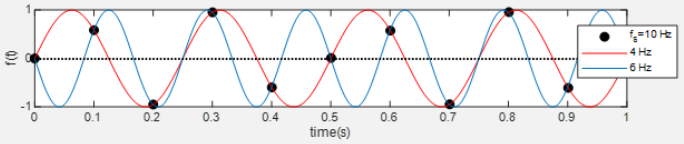
$$f > f_s/2$$

$$f_p(f) \triangleq |f + pfs|$$

... frekvence se zrcadlí kolem f_s
v jiné periodě spektra p

Příklad nejednoznačného vyjádření frekvence→ 6Hz složka se přičte ke 4Hz

f_s=10 Hz
$f_s/2$=5 Hz
f_0=6 Hz
$f_N(f_0)$=4 Hz



Převzorkování (resampling)

Změna vzorkovacího kmitočtu

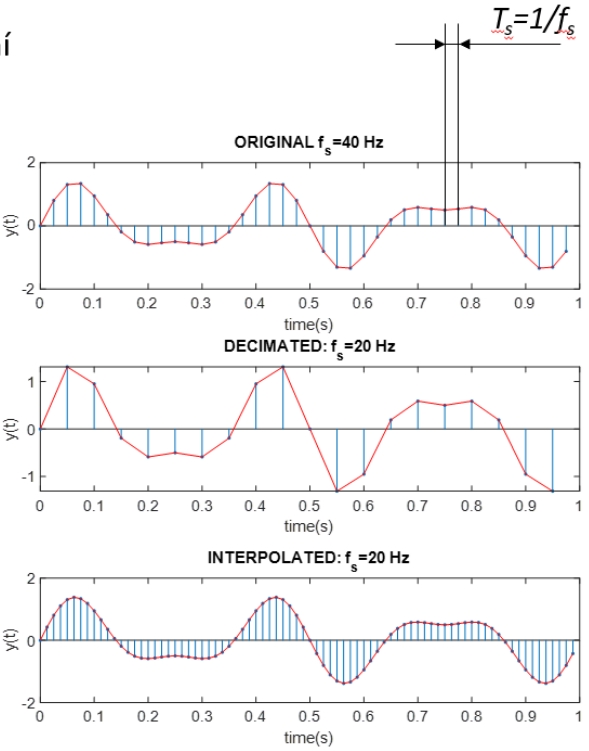
- Ekvidistantní (rovnoměrné) vzorkování

Decimace

- Snížení vzorkovacího kmitočtu
- Vynechání vzorků

Interpolace

- Zvýšení vzorkovacího kmitočtu
- Proložení hodnot



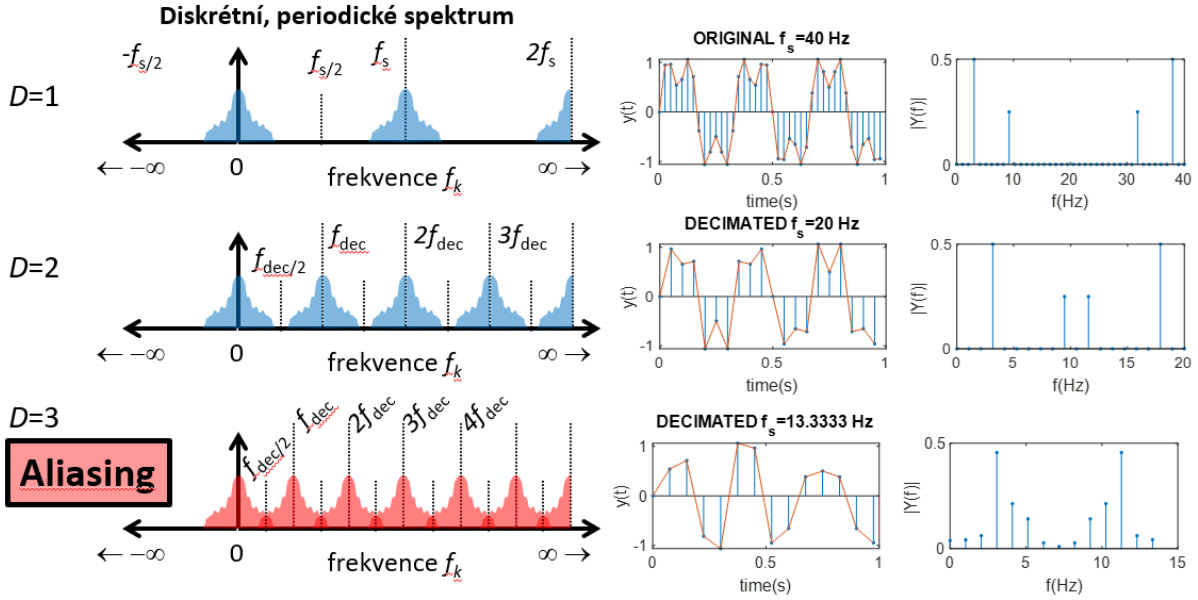
Proč převzorkovávat?

- snížení datového toku při nevyužití celého frekvenčního pásma $0 \div f_s/2$
- sjednocení signálů s různou f_s
- převzorkování na 2^N (FFT)

Decimace

- Snížení vzorkovacího kmitočtu
- Decimační faktor $D = \frac{f_s}{f_{dec}}; D \in \mathbb{Z}\,(1,2,3,\dots)$
- Výběr každého *D*-tého vzorku

$$f_{max} < f_s/2$$

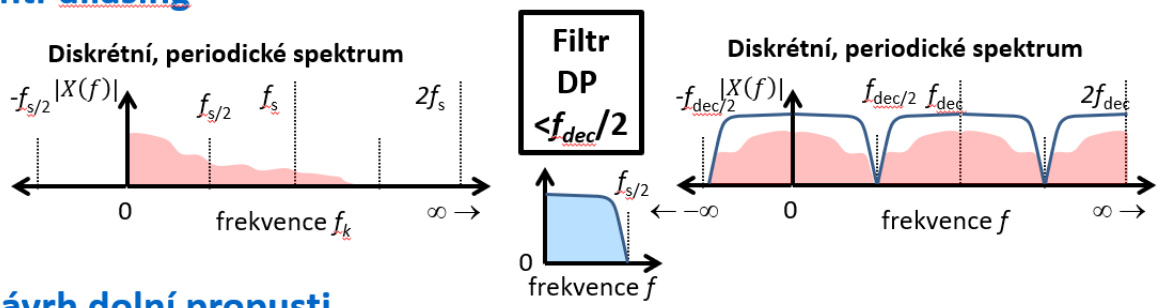


Decimace

- Decimační faktor $D = \frac{f_s}{f_{dec}}$
- $f_{dec} = \frac{f_s}{D}$, tj. nová vzorkovací frekvence

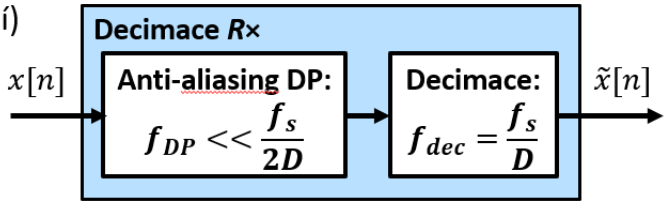
$D \in \mathbb{Z}\,(1,2,3,\dots)$
D společným násobkem f_s a f_{dec}
(celočíselně dělitelné)

Anti-aliasing



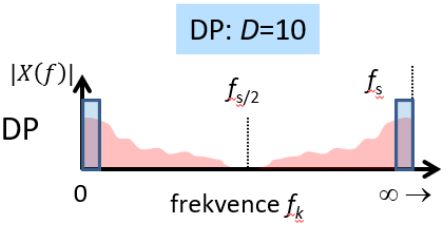
Návrh dolní propusti

- Ideální DP $f_0 = f_{dec}/2$ (**nemožné**)
- Optimálně $f_0 = (0{,}3 \div 0{,}4) f_{dec}$ (konečná strmost)
- FIR (kauzální, lineární fáze, stabilní)



Decimační faktor

- Decimační faktor $D = \frac{f_s}{f_{dec}}; D \in \mathbb{Z}\,(1,2,3,\dots)$
- Stupeň decimace limitován návrhem anti-aliasing DP
- D>10 (obtížný návrh) – velmi úzký propustný lalok

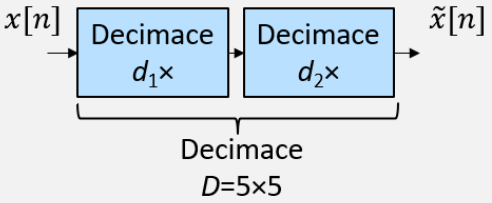


Postupná decimace pro R>10

- Postupně decimovat s d_k<10
- $D = \prod_k d_k\,;\;\; d \in \mathbb{Z}\,(1,2,3,\dots)$

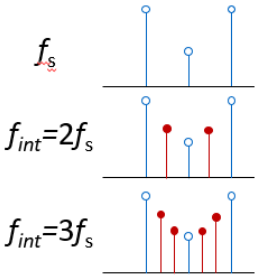
Př.: Invazivní EEG obsahuje složky až 1 kHz. Kvůli analýze zpoždění mezi kanály se vzorkuje 16 kHz. Pro vizuální on-line hodnocení postačí frekvence do 200 Hz. Datový tok při plné vzorkovacím kmitočtu je pro on-line režim výpočetně náročný a zahlcuje datovou síť během streamu. Decimujte signál pro potřeby on-line streamu.

f_s=16 kHz
f_{max}=200 Hz
f_{dec}=3·f_{max} (vzorkovací teorém + rezerva)
D=16.000/600=26,7 ($D \notin \mathbb{Z}$, společný násobek ???)
Hledáme násobky (<10) a zároveň dělitele f_s:
👍 **5×5=25 (f_{dec}=640 Hz)**
👎 **9×3=27 (f_{dec}=592.59 Hz)**



Interpolace

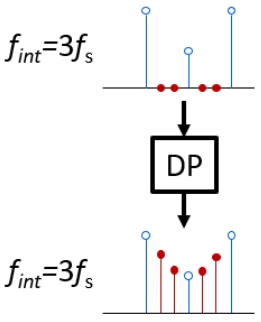
- Zvýšení vzorkovacího kmitočtu
- Interpolační faktor $I = \frac{f_{int}}{f_s}; I \in \mathbb{Z}\,(1,2,3,\dots)$
- Mezi každý vzorek vložíme (I-1) hodnot



Implementace

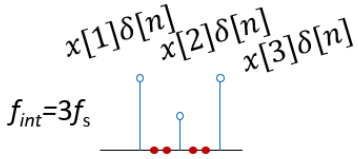
- DSP expandér
- Mezi vzorky vložíme (I-1) nul
- $y[n] = \begin{matrix} x[n/I] & n = I, 2I, \dots \\ 0 & \text{jinde} \end{matrix}$
- Filtrace dolní propustí FIR: $sinc(2\pi f_s/2)$

Digital to Analog Converter (DAC)

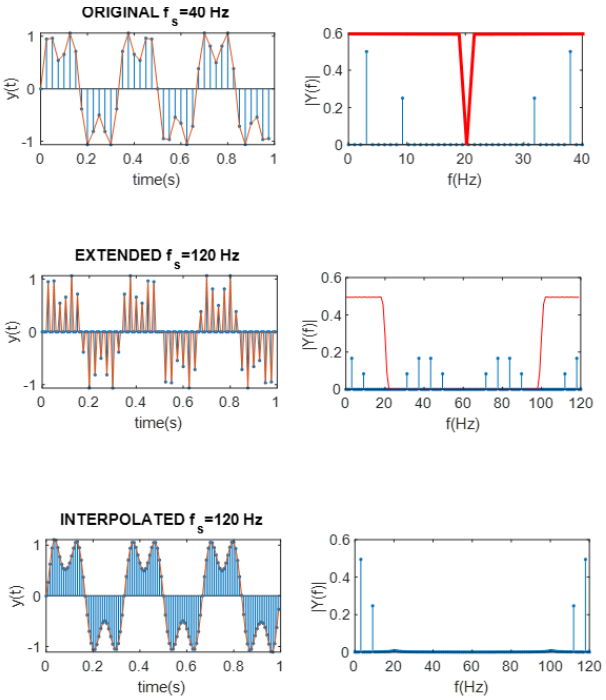


Co? Jak to funguje?

Implementace



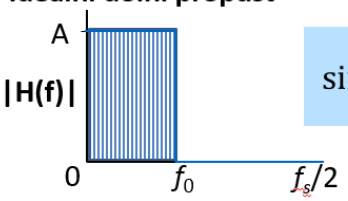
- Mezi vzorky vložíme (I-1) nul
- Použijeme dolní propust $f_{DP}=f_s/2$
- + zesílení (kompenzace energie signálu – Parsevalova rovnost)
- Výsledek filtrace – signál s omezeným spektrem



Rekonstrukční dolní propust

Reconstruction filter
Anti-imaging filter
Digital to analog converter (DAC)

Ideální dolní propust

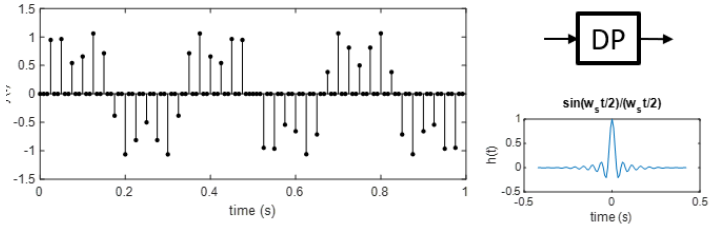


Impulzní odezva

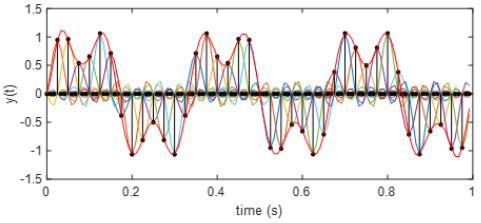
$$\mathrm{sinc}(2\pi f_0 t) = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t}$$

$f_0 = {}^{f_s}/_2$ … vzorkovací kmitočet před interpolací

$$\mathrm{sinc}(2\pi f_0 t) = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t}$$



Součet impulzních odezev



Převzorkování v neceločíselném poměru

Největší společný dělitel *K*

- mezi vstupním a výstupním vzorkovacím kmitočtem

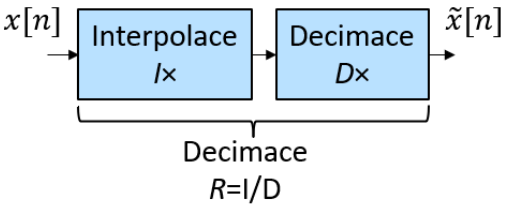
Určíme faktory

- $D=f_{in}/K$
- $I=f_{out}/K$

Interpolace + Decimace

- Interpolujeme na $I \cdot f_{in}$
- Decimujeme na $\frac{I \cdot f_{in}}{D}$

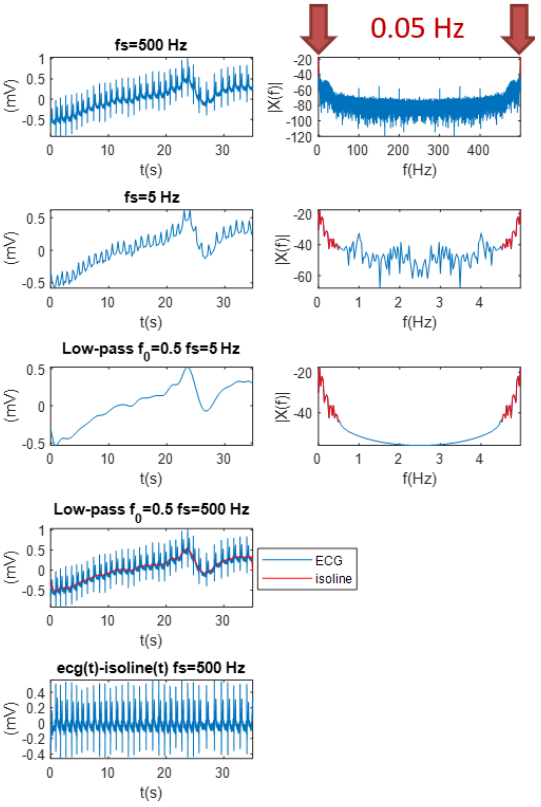
$$R = \frac{I}{D}$$



Převzorkování a filtrace

Odstranění extrémně pomalých složek

- **izolinie:** půlčlánkový potenciál na elektrodě, pohybové artefakty, tepelný drift senzorů a zesilovačů, ...
- filtrace horní propustí (HP), mezní kmitočet f_0=0.05 Hz
- **Jak navrhnout filtr, když f_s>>>f_0?** (možná FIR obrovského řádu)



Řešení:

- od signálu odečteme izolinii
- izolinie (dolní propust): stejný problém s návrhem filtru
- decimace (malé *fs*)
- návrh DP, filtrace: izolinie
- interpolace (původní *fs*)
- odečtení signálu a izolinie