Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (26.01.2023)

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					$\boldsymbol{\Sigma}$
Úloha	1	2	3	4	$\boldsymbol{\Sigma_1}$	1	2	3	4	$\boldsymbol{\Sigma_2}$	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a}\mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.** Mějme funkci

$$u(x,y) = e^{\alpha x}\cos y + xy^3 + \beta x^3 y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

(a) Určete všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takové, že $u(x,y)$ je harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$.

(b) Pro $\alpha = 1$ a $\beta = -1$ nalezněte funkci $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takovou, že $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ je celistvá funkce a platí $f(\frac{\pi}{2}i) = i$.

Úloha 2. Spočtěte

$$\int_C \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{z(z-\frac{\pi}{2})^3} + \frac{\sin(z^2)}{e^z(z+1)^4}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaný obdélník s vrcholy $\frac{\pi}{4}+i$, $\frac{\pi}{4}-i$, $\pi+i$ a $\pi-i$.

Úloha 3 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce

$$F(s) = \frac{1}{(s+3)^2(1-e^{-2s})}$$

ve tvaru Fourierovy řady.

(b) Určete Laplaceův vzor $g(t)$ funkce

$$G(s) = \frac{e^{-4s}}{s^2}.$$

(c) Pomocí Laplaceova obrazu $H(s)$ „pěkné“ funkce $h(t) \in L_0$ splňující $h(0) = 1$, $h'(0) = 2$, $h''(0) = 3$, vyjádřete

$$\mathscr{L}\left[h'''(t)\right](s).$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Nechť $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je posloupnost taková, že

$$\mathscr{Z}\left[b_n\right](z) = \frac{z-1-2i}{z}.$$

Pomocí Z-transformace nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 5y_n = \sum_{k=0}^{n} k b_{n-k}$$

splňující počáteční podmínky $y_0 = y_1 = 0$.

1 a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x}\cos y + y^3 + 3\beta x^2 y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos y + 6\beta x y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{\alpha x}\sin y + 3xy^2 + \beta x^3$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{\alpha x}\cos y + 6xy$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos y + 6\beta x y - e^{\alpha x}\cos y + 6xy$

$= (\alpha^2 - 1)e^{\alpha x}\cos y + 6(\beta+1)xy$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \iff \boxed{\alpha = \pm 1 \ \& \ \beta = -1}$

b) $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y + y^3 - 3x^2 y$

$\xRightarrow{\int dy} v(x,y) = \int e^x \cos y + y^3 - 3x^2 y \, dy = e^x \sin y + \frac{y^4}{4} - \frac{3x^2 y^2}{2} + C(x)$

- $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y - 3xy^2 + x^3$

$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y - 3xy^2 + C'(x)$ $\Rightarrow C'(x) = x^3$

- $C(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + K$, $K \in \mathbb{R}$.

$$v(x,y) = e^x \sin y + \frac{y^4}{4} + \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2y^2}{2} + K$$

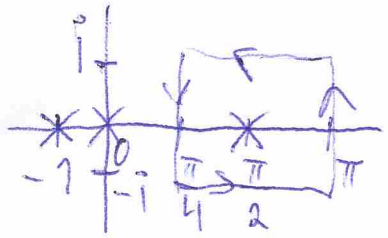
- $f\left(\frac{\pi}{2} i\right) = u\left(0, \frac{\pi}{2}\right) + i v\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = i$

$$v\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$1 + \frac{\pi^4}{64} + K = 1 \iff K = -\frac{\pi^4}{64}$$

$$v(x,y) = e^x \sin y + \frac{y^4}{4} + \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2y^2}{2} - \frac{\pi^4}{64}$$

2)



$$I \overset{?}{=} \int_C \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3} + \frac{\sin(z^2)}{e^z (z+1)^4}\,dz$$

- z Cauchyovy věty plyne $\int_C \frac{\sin(z^2)}{e^z(z+1)^4}dz = 0$, tedy

$$I = \int_C \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}$$

- $e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$

$$\left(e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}\right)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = ie^{iz} + 1\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = i^2 + 1 = 0$$

$$\left(e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}\right)''\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -e^{iz}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} \neq 0$$

$\Big\}$ 2-násobný kořen

- $\frac{\pi}{2}$ je 3-násobný kořen jmenovale — $\frac{\pi}{2}$ je jednoduchý pól

$$\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \frac{2}{\pi} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i + z - \frac{\pi}{2}}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

$$\overset{LH\ [\frac{0}{0}]}{=} \frac{2}{\pi} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{ie^{iz} + 1}{2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} \overset{LH\ [\frac{0}{0}]}{=} \frac{2}{\pi} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{-e^{iz}}{2} = -\frac{1}{\pi}$$

$$I = 2\pi i\left(-\frac{i}{\pi}\right) = \underline{\underline{2}}$$

3) a) $1-e^{-2\lambda}=0 \iff -2\lambda = 2k\pi i \iff \lambda = k\pi i$ pour $k \in \mathbb{Z}$

$$f(t) = \operatorname{Res}_{-3} \frac{e^{\lambda t}}{(\lambda+3)^2(1-e^{-2\lambda})} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{k\pi i} \frac{e^{\lambda t}}{(\lambda+3)^2(1-e^{-2\lambda})}$$

$$\operatorname{Res}_{-3} \frac{e^{\lambda t}}{(\lambda+3)^2(1-e^{-2\lambda})} \overset{\text{pôle 2 ordre}}{=} \lim_{\lambda \to -3} \left(\frac{e^{\lambda t}}{1-e^{-2\lambda}} \right)' = \lim_{\lambda \to -3} \frac{t e^{\lambda t}(1-e^{-2\lambda}) - 2e^{-2\lambda} e^{\lambda t}}{(1-e^{-2\lambda})^2}$$

$$= \frac{t e^{-3t}}{1-e^{6}} - \frac{2e^{6}}{(1-e^{6})^2} e^{-3t}$$

$$= \left(\frac{t}{1-e^{6}} - \frac{2e^{6}}{(1-e^{6})^2} \right) e^{-3t}$$

$$\operatorname{Res}_{k\pi i} \frac{e^{\lambda t}}{(\lambda+3)^2(1-e^{-2\lambda})} = \frac{e^{k\pi i t}}{(k\pi i+3)^2 \, 2e^{-2\lambda}}\Big|_{\lambda = k\pi i} = \frac{e^{k\pi i t}}{2(k\pi i+3)^2}$$

$$\boxed{f(t) = \left(\frac{t}{1-e^{6}} - \frac{2e^{6}}{(1-e^{6})^2} \right) e^{-3t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2(k\pi i+3)^2} e^{k\pi i t}}$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda^2}\right](t) = t$ $\quad \left[\mathcal{L}[t](\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\right]$

$$\boxed{g(t) = (t-4)\mathbb{1}(t-4)}$$

c) $$\boxed{\mathcal{L}[h'''(t)](\lambda) = \lambda^3 H(\lambda) - \lambda^2 - 2\lambda - 3}$$

4) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 5y_n = \sum_{k=0}^{n} k\, b_{n-k}$, $y_0 = y_1 = 0$

$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 5y_n = n * b_n$

$z^2 Y(z) - 2z Y(z) + 5 Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cdot \frac{z-1-2i}{z} = \frac{z-1-2i}{(z-1)^2}$

$(z^2 - 2z + 5) Y(z) = \frac{z-1-2i}{(z-1)^2}$

$z^2 - 2z + 5 = 0$
$(z-1)^2 + 4 = 0$
$z - 1 = \pm 2i$
$z = 1 \pm 2i$

$$Y(z) = \frac{1}{(z-1+2i)(z-1)^2}$$

$$y_n = \operatorname{res}_{1-2i} \frac{z^{n-1}}{(z-1+2i)(z-1)^2} + \operatorname{res}_{1} \frac{z^{n-1}}{(z-1+2i)(z-1)^2}$$

$$\operatorname{res}_{1-2i} \frac{z^{n-1}}{(z-1+2i)(z-1)^2} = \frac{(1-2i)^{n-1}}{(-2i)^2} = -\frac{(1-2i)^{n-1}}{4}$$

$$\operatorname{res}_{1} \frac{z^{n-1}}{(z-1+2i)(z-1)^2} \overset{\text{zur 2. Ableitung}}{=} \lim_{z \to 1} \left(\frac{z^{n-1}}{z-1+2i} \right)' = \lim_{z \to 1} \frac{(n-1) z^{n-2} (z-1+2i) - z^{n-1}}{(z-1+2i)^2}$$

$$= \frac{2i(n-1) - 1}{(2i)^2} = \frac{1 - 2i(n-1)}{4}$$

$$y_n = -\frac{(1-2i)^{n-1}}{4} + \frac{1-2i(n-1)}{4} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$