Pravděpodobnost a statistika - zkoušková písemka 22.6.2020

Jméno a příjmení	1	2	3	ústní	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 55 bodů)

Hokejisté jistého týmu vyšlou během utkání (hraného pouze na tři třetiny, tj. bez prodloužení) na branku průměrně 36 střel. Průměrně každá devátá střela skončí gólem. Druhá formace střílí 1,5-krát častěji než třetí formace a první formace dokonce dvakrát častěji než třetí formace. První formace má úspěšnost 15 % a druhá 10 %. Všechny střely, resp. góly, přicházejí zcela nezávisle na předešlých střelách, resp. gólech. Určete pravděpodobnost, že

- a) když vystřelí hráč třetí formace, padne gól (tj. jaká je úspěšnost třetí formace), (5 bodů)
- b) pokud padl gól, vstřelil ho hráč druhé formace, (5 bodů)
- c) během první třetiny vstřelí tento tým alespoň dva góly, (7 bodů)
- d) během prvních dvou třetin vstřelí tento tým maximálně tři góly, přičemž ani jeden z nich nepadne během prvních pěti minut druhé třetiny, kdy fanoušek ještě stojí frontu na pivo, (7 bodů) (pozn.: jedna třetina má 20 hracích minut ;-))
- e) na další gól tohoto týmu budou diváci čekat alespoň 10 hracích minut,
 (7 bodů)
- f) nejpozději pátá střela třetí formace skončí gólem, (7 bodů)
- g) ze 100 střel druhé formace padne alespoň 11 gólů (řešte pomocí CLV; 10 bodů).

Dále pak

h) spočtěte cov(X,Y), kde X popisuje pořadí formace a Y popisuje, zda tým vstřelí (Y=1) nebo nevstřelí (Y=0) gól, v příští vyslané střele a rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé. (7 bodů)

Úloha 2. (celkem 25 bodů)

U dvou různých algoritmů třídění náhodných, stejně dlouhých posloupností bylo sledováno, zda doba třídění nepřesáhne zvolený limit. Statistika je následující:

	úspěšný	neúspěšný
algoritmus 1	20	30
algoritmus 2	40	10

- a) Na hladině 5% statisticky otestujte, zda je úspěšnost třídění závislá na zvoleném algoritmu. (8 bodů)
- b) Definujte **obecně** nezávislost diskrétních náhodných veličin X a Y. (7 bodů)
- c) Co můžeme říct (o vzájemné (ne)závislosti náhodných veličin X a Y, o výsledku výpočtu apod.), vyjde-li nám korelace
 - (i) corr(X, Y) = -1,
 - (ii) corr(X, Y) = 0,
 - (iii) corr(X, Y) = 2.

(10 bodů)

Úloha 3. (celkem 20 bodů)

V krabici jsou červené, modré a bílé kuličky, které jsou buď duté nebo vyplněné. Z krabice vždy můžeme vytáhnout jen jednu kuličku, zjistit její parametry a před vytažením další kuličky ji musíme vrátit zpět. $100 \times$ jsme vytáhli kuličku a vypozorovali následující hodnoty:

	červená	modrá	bílá
dutá	10	10	20
vyplněná	10	20	30

Víme, že podíly (tj. pravděpodobnosti vytažení) červených, modrých a bílých kuliček jsou a-b, a, resp. a+b.

- a) Určete parametr a. (3 body)
- b) Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr b. (10 bodů)
- c) Na hladině 1% statisticky otestujte, zda je dutých a vyplněných kuliček v krabici stejný počet. (7 bodů)

Ústní část (celkem 10 bodů)

Uvažujte funkce

$$F(x) = \frac{\sin x}{2}, \ x \in (0, \pi); \quad G(x) = \sin x, \ x \in (0, \pi/2); \quad H(x) = \ln x, \ x \ge 1$$
$$= 0, \ x \notin (0, \pi) \qquad \qquad = 0, \ x \le 0 \qquad \qquad = 0, \ x < 1$$
$$= 1, \ x \ge \pi/2$$

Rozhodněte, která/které z nich jsou distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X. Pokud je/jsou, určete příslušnou hustotu pravděpodobnosti a spočtěte pravděpodobnost P(X>1). Pukud ne, uveďte stručně důvod, proč nemůže/nemohou být distribuční funkcí.