Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (14.02.2023)

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					Σ
Úloha	1	2	3	4	Σ_1	1	2	3	4	Σ_2	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Určete součet $f(z)$ mocninné řady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3n+1)}{4^{n+1}} z^{3n+2}$$

na jejím kruhu konvergence a určete parametry tohoto kruhu.

(b) Mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+2i)^n$$

má poloměr konvergence $R = 3$. Konverguje tato mocninná řada v bodě $z = -4i$?

(c) Určete koeficient $a \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \frac{a}{(z-2)^k} + \sum_{n=-2}^{\infty} 3^n (z-2)^{2n}, \ z \in P(2),$$

měla v bodě $z_0 = 2$ pól řádu 2.

Úloha 2 ([10 bodů])**.** Spočtěte

$$\int_C \frac{e^z}{z^2 - \pi^2} + \frac{e^{\frac{z}{2}i} + 1}{1 - \cos z} \, \mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy $2\pi + i$, $\pi - i$, $3\pi - i$.

Úloha 3 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Určete Laplaceovu transformaci periodické funkce $f(t)$ s periodou $T = 4$, která je na intervalu $[0, 4)$ dána předpisem

$$f(t) = e^{2t} \mathbb{1}(t-3), \ t \in [0, 4).$$

(b) Určete Laplaceův vzor $g(t)$ funkce

$$G(s) = \frac{e^{-4s}}{s^2 - 2is - 1}.$$

(c) Určete

$$\mathscr{L}\left[t^3 \cos(2t)\right](s).$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Pomocí Z-transformace nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} + y_{n+1} + 16 \sum_{k=0}^{n} 7^k y_{n-k} = 1$$

splňující počáteční podmínky $y_0 = 0$ a $y_1 = 1$.

1) a) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n+1)}{4^{n+1}}z^{3n+2}=\frac{z^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n+1)}{4^n}z^{3n}$

• $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n+1)}{4^n}z^{3n}$ $\xrightarrow{\text{integrace}}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{3n+1}}{4^n}=z\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z^3}{4}\right)^n$

$=z\frac{1}{1+\frac{z^3}{4}}=\frac{4z}{4+z^3}$

$\xrightarrow{\text{derivace}}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n+1)}{4^n}z^{3n}=\left(\frac{4z}{4+z^3}\right)'=\frac{4(4+z^3)-4z(3z^2)}{(4+z^3)^2}$

$=\frac{16-8z^3}{(4+z^3)^2}$

$\Rightarrow f(z)=\frac{z^2}{4}\frac{16-8z^3}{(4+z^3)^2}=\frac{4z^2-2z^5}{(4+z^3)^2}$ pro $|z|<\sqrt[3]{4}$

$\left|-\frac{z^3}{4}\right|<1\Leftrightarrow|z|<\sqrt[3]{4}$

$z\in U(0,\sqrt[3]{4})$

---

b) $|-4i+2i|=2<3\Rightarrow$ **ano, konverguje**

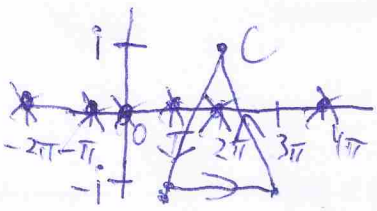
---

c) Pol $g(z)=\frac{a}{(z-2)^k}+\frac{1}{9(z-2)^4}+\frac{1}{3(z-2)^2}+1+3(z-2)^2+\dots$, $z\in P(2)$

– zvolíme-li $\boxed{k=4}$ a $\boxed{a=-\frac{1}{9}}$, pak $g(z)=\frac{1}{3(z-2)^2}+1+3(z-2)^2+\dots$

a tedy $g(z)$ má v $z_0=2$ pól řádu 2.

2) $I := \int_C \frac{e^z}{z^2-\pi^2} + \frac{e^{\frac{z}{2}i}+1}{1-\cos z}\,dz$



$z^2-\pi^2=0 \Leftrightarrow z=\pm\pi$

$1-\cos z=0 \Leftrightarrow z=2k\pi$ pro $k\in\mathbb{Z}$

- $\int_C \frac{e^z}{z^2-\pi^2}dz=0$ dle Cauchyovy věty, neboť integrand je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{-\pi,\pi\}$ a body $\pm\pi$ leží mimo C.

- $I=\int_C \frac{e^{\frac{z}{2}i}+1}{1-\cos z}dz = 2\pi i \operatorname{res}_{2\pi}\frac{e^{\frac{z}{2}i}+1}{1-\cos z}$

- $e^{\frac{z}{2}i}+1\Big|_{z=2\pi} = e^{\pi i}+1=-1+1=0$

$(e^{\frac{z}{2}i}+1)'\Big|_{z=2\pi} = \frac{i}{2}e^{\frac{z}{2}i}\Big|_{z=2\pi} = -\frac{i}{2}\neq 0$ ⟹ 1-násobný kořen

$1-\cos z\Big|_{z=2\pi}=0$

$(1-\cos z)'\Big|_{z=2\pi} = \sin z\Big|_{z=2\pi}=0$

$(1-\cos z)''\Big|_{z=2\pi} = \cos z\Big|_{z=2\pi}=1\neq 0$ ⟹ 2-násobný kořen

⟹ jednoduchý pól

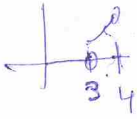
- $\operatorname{res}_{2\pi}\frac{e^{\frac{z}{2}i}+1}{1-\cos z} = \lim_{z\to 2\pi}\frac{(z-2\pi)(e^{\frac{z}{2}i}+1)}{1-\cos z} \overset{LH\ \frac{0}{0}}{=} \lim_{z\to 2\pi}\frac{e^{\frac{z}{2}i}+1+\frac{i}{2}e^{\frac{z}{2}i}(z-2\pi)}{\sin z} =$

$\overset{LH\ \frac{0}{0}}{=} \lim_{z\to 2\pi}\frac{\frac{i}{2}e^{\frac{z}{2}i}-\frac{1}{4}e^{\frac{z}{2}i}(z-2\pi)+\frac{i}{2}e^{\frac{z}{2}i}}{\cos z} = -\frac{i}{2}-\frac{i}{2}=-i$

$$\boxed{I = 2\pi i(-i) = 2\pi}$$

3) a) $F(s) = \dfrac{\mathcal{L}[f(t)(1(t)-1(t-4))]}{1-e^{-4s}} =$

$= \dfrac{1}{1-e^{-4s}} \left(\mathcal{L}[e^{2t}(1(t-3)-1(t-4))](s) \right)$



- $\mathcal{L}[e^{2t}1(t-3)](s) = e^{-3s}\mathcal{L}[e^{2(t+3)}](s) = e^{-3s+6}\mathcal{L}[e^{2t}](s)$
$= e^{6-3s}\dfrac{1}{s-2}$

- $\mathcal{L}[e^{2t}1(t-4)](s) = e^{-4s}\mathcal{L}[e^{2(t+4)}](s) = e^{8-4s}\dfrac{1}{s-2}$

$\Rightarrow \boxed{F(s) = \dfrac{1}{1-e^{-4s}}\left(e^{6-3s}-e^{8-4s}\right)\dfrac{1}{s-2}}$

b) $G(s) = \underbrace{\dfrac{1}{s^2-2is-1}}_{=:H(s)} e^{-4s}$

- $s^2-2is-1 = (s-i)^2$

$h(t) = \operatorname{res}_i \dfrac{e^{st}}{(s-i)^2} \overset{\text{pol 2. Ordn.}}{=} \lim_{s\to i}(e^{st})' = \lim_{s\to i} t e^{st} = te^{it}$

$\boxed{g(t) = h(t-4)1(t-4) = (t-4)e^{i(t-4)}1(t-4)}$

c) $\mathcal{L}[t^3\cos(2t)](s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[t^3 e^{2it}](s) + \mathcal{L}[t^3 e^{-2it}](s)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[t^3](s-2i) + \mathcal{L}[t^3](s+2i)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{6}{(s-2i)^4} + \frac{6}{(s+2i)^4}\right) = \boxed{\frac{3}{(s-2i)^4} + \frac{3}{(s+2i)^4}}$

4) $y_{n+2} + y_{n+1} + 16 \sum_{k=0}^{n} 7^k y_{n-k} = 1 \quad | \; y_0 = 0 \; | \; y_1 = 1$

$y_{n+2} + y_{n+1} + 16 (7^n * y_n) = 1$

$z^2 Y(z) - z + z Y(z) + \frac{16z}{z-7} Y(z) = \frac{z}{z-1}$

$\left(z^2 + z + \frac{16z}{z-7}\right) Y(z) = \frac{z^2}{z-1}$

$z \left(\frac{z^2 - 7z + z - 7 + 16}{z-7}\right) Y(z) = \frac{z^2}{z-1}$

$\frac{z^2 - 6z + 9}{z-7} Y(z) = \frac{z}{z-1}$ $\qquad z^2 - 6z + 9 = (z-3)^2$

- $Y(z) = \frac{z(z-7)}{(z-3)^2 (z-1)}$

- $y_n = \operatorname{res}_3 \frac{z(z-7)}{(z-3)^2(z-1)} z^{n-1} + \operatorname{res}_1 \frac{z(z-7)}{(z-3)^2(z-1)} z^{n-1}$

- $\operatorname{res}_3 \frac{z^{n+1} - 7z^n}{(z-3)^2 (z-1)} = \lim_{z \to 3} \left(\frac{z^{n+1} - 7z^n}{z-1}\right)' = \lim_{z \to 3} \frac{((n+1)z^n - 7n z^{n-1})(z-1) - z^{n+1} + 7z^n}{(z-1)^2}$

$= \frac{2(n+1)3^n - 14n 3^{n-1} - 3^{n+1} + 7 \cdot 3^n}{4} = \frac{1}{4}\left(2n + 2 - \frac{14}{3}n - 3 + 7\right) \cdot 3^n$

$= \frac{1}{4}\left(\left(2 - \frac{14}{3}\right)n + 6\right) \cdot 3^n = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}n\right) \cdot 3^n$

- $\operatorname{res}_1 \frac{z(z-7)}{(z-3)^2(z-1)} z^{n-1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$

$$\boxed{y_n = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}n\right) \cdot 3^n - \frac{3}{2}} \quad | \; n \in \mathbb{N}_0$$