Pravděpodobnost a statistika - zkoušková písemka 16.6.2020

Jméno a příjmení	1	2	3	ústní	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 60 bodů)

Telefon v jistém call-centru je vybavený zábavným doplňkem - krabicí, v níž jsou skleněné, dřevěné a hliněné kuličky ve žluté, zelené a bílé barvě v různých velikostech. Vždycky, když zazvoní telefon, vypadne náhodně vybraná kulička. Tu operátoři po zvednutí telefonu vrátí zpět do krabice. Poměry skleněných, dřevěných a hliněných kuliček jsou 1:2:1, poměry žlutých, zelených a bílých kuliček jsou 2:2:1. Skleněné kuličky jsou tvořeny z 60% žlutými a z 20% zelenými kuličkami, dřevěné kuličky jsou pak tvořeny z 20% žlutými a z 60% zelenými kuličkami. Průměr kuličky je náhodná veličina s rozdělením Ro(1,2), která je nezávislá jak na barvě, tak na materiálu kuličky. Telefon zazvoní průměrně třikrát za 10 minut. Určete pravděpodobnost, že

- a) při zazvonění telefonu vypadne bílá hliněná kulička, (5 bodů)
- b) vypadne-li hliněná kulička, bude žlutá, (5 bodů)
- c) vypadne-li bílá kulička, bude dřevěná, (5 bodů)
- d) náhodně vypadnutá kulička je zelená a má v průměru alespoň 1,7 cm,
 (7 bodů)
- e) během půl hodiny vypadnou z krabice alespoň tři dřevěné kuličky, (7 bodů)
- f) na první vypadnutí žluté kuličky budeme čekat nejvýše čtvrt hodiny,
 (7 bodů)
- g) nejpozději čtvrtá vypadnutá kulička je skleněná, (7 bodů)
- h) mezi prvními pěti vypadnutými kuličkami je nejvýše jedna dřevěná zelená kulička, (7 bodů)
- i) pokud by operátoři kuličky do krabice nevraceli, nýbrž vždy po vypadnutí je položili na stůl tak, aby středy kuliček ležely v jedné přímce a okraj kuličky nepřesahoval hranu stolu, vešla by se řada 75 kuliček podélně na stůl dlouhý 1,1 m (řešte pomocí CLV; 10 bodů).

Úloha 2. (celkem 25 bodů)

Na úvodním kurzu potápění se nově zapsaní účastníci pokoušeli potopit co nejníže bez dýchacího přístroje. Naměřené hloubky (v m) jsou uvedeny v následující tabulce:

2.7	3.7	3.5	4.5	2.8	5.2	4.5	3.7	3.7	3.3	3.2	3.6	4.3	
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--

- a) Nakreslete histogram a odhadněte z něj, jaké rozdělení má náhodná veličina udávající hloubku potopení náhodně vybraného účastníka kurzu.
 (5 bodů)
- b) Spočtěte výběrový průměr a výběrový rozptyl těchto dat. (5 bodů) (hint: $\sum x_i = 48.7$, $\sum (x_i \bar{x})^2 \doteq 6.13$)
- c) Statisticky otestujte na hladině 1%, zda je střední hloubka potopení náhodně vybraného účastníka 4 m, proti alternativní hypotéze, že střední hloubka potopení je menší než 4 m. (8 bodů)

V mezičase začal pomocník instruktora hledat ve vybavení, které je smíchané v jedné velké krabici, jeden konkrétní předmět. Jelikož je však zmatkář, místo toho, aby nepotřebné kusy odložil stranou, hodil je vždy zpět do krabice. Než hledaný předmět našel, vytáhl 11 kusů brýlí, 14 šnorchlů a 5 párů ploutví.

d) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda je počet brýlí, šnorchlů a párů ploutví v krabici přibližně stejný. (7 bodů)

Úloha 3. (celkem 15 bodů)

U dvou různých algoritmů třídění náhodných, stejně dlouhých posloupností bylo sledováno, zda doba třídění nepřesáhne zvolený limit. Statistika je následující:

	úspěšný	neúspěšný
algoritmus 1	40	10
algoritmus 2	20	30

- a) Na vámi zvolené hladině statisticky otestujte, zda je úspěšnost třídění závislá na zvoleném algoritmu. (8 bodů)
- b) Definujte **obecně** nezávislost diskrétních náhodných veličin X a Y. (7 bodů)

Ústní část (celkem 10 bodů)

Uvažujte funkce

$$F(x) = \frac{\sin x}{2}, \ x \in (0, \pi); \quad G(x) = \sin x, \ x \in (0, \pi/2); \quad H(x) = \ln x, \ x \ge 1$$
$$= 0, \ x \notin (0, \pi) \qquad \qquad = 0, \ x \le 0 \qquad \qquad = 0, \ x < 1$$
$$= 1, \ x > \pi/2$$

Rozhodněte, která/které z nich jsou distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X. Pokud je/jsou, určete příslušnou hustotu pravděpodobnosti a spočtěte pravděpodobnost P(X>1). Pukud ne, uveďte stručně důvod, proč nemůže/nemohou být distribuční funkcí.