Fyzika 2
Online seminář č. 8
10. listopadu 2020

Termodynamika

Příklad 3.13

Pro směs tří kilomolů Ar a pěti kilomolů O_2 (molekulární kyslík) určete

a) molární tepelnou kapacitu C_V $\left[\frac{1}{n_{Ar}+n_{O_2}}\left(\frac{3}{2}n_{Ar}+\frac{5}{2}n_{O_2}\right)R = 17658\ \mathrm{J\cdot kmol^{-1}\cdot K^{-1}}\right]$

b) molární tepelnou kapacitu C_p $\left[C_p = C_V + R = 25968\ \mathrm{J\cdot kmol^{-1}\cdot K^{-1}}\right]$

c) adiabatický exponent (Poissonovu konstantu) $\varkappa$ $\left[\varkappa = \frac{C_p}{C_V} = 1,47\right]$

univerzální plynová konstanta je rovna $R = 8,3\cdot 10^3\ \mathrm{J\cdot kmol^{-1}\cdot K^{-1}}$

Úloha na procvičení ekvipartičního teorému a tepelné kapacity

Ar: jedno~~molekulový~~atomový plyn (3 stupně volnosti) $C_V = \frac{3}{2}R$

O_2: dvouatomový plyn (5 stupňů volnosti) $C_V = \frac{5}{2}R$

a) směs: C_V vypočítáme jako vážený průměr $C_V = \frac{n_{Ar}\cdot (C_V)_{Ar} + n_{O_2}\cdot (C_V)_{O_2}}{n_{Ar}+n_{O_2}}$

$$C_V = \frac{\frac{3}{2}\cdot 3 + \frac{5}{2}\cdot 5}{3+5}\cdot R = \frac{17}{8}R \doteq 17,67\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\cdot K}}$$

b) C_p spočteme z Mayerova vztahu: $C_p = C_V + R = \frac{25}{8}R = 25,98\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\cdot K}}$

c) Pro adiabatický děj lze odvodit, že $\varkappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{25}{17} \doteq 1,47$

Příklad 4.1

Dva gramy dusíku při teplotě 27^o C izotermicky zmenší svůj objem ze 6 ℓ na 4 ℓ. Vypočítejte změnu entropie. Relativní atomová hmota dusíku je rovna A_r^N=14, atomová hmotnostní jednotka je rovna u = 1,66$\cdot 10^{-27}$ kg , univerzální plynová konstanta je rovna $R = 8,3\cdot 10^3$ J$\cdot$kmol$^{-1}\cdot$K^{-1} , Avogadrova konstanta je rovna $N_A = 6,023\cdot 10^{26}$ kmol^{-1}

$$\left[\Delta S = \frac{m}{2A_r^N u N_A} R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -0,24\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\right]$$

$T = 300$ K (izotermický děj)

$V_1 = 6\ell \xrightarrow{\text{komprese}} V_2 = 4\ell$

dusík: N_2 $\quad A_r^N = 14 \quad m_u = 1,66\cdot 10^{-27}$ kg $\qquad m = 2$ g

---

entropie $dS = \frac{\delta Q}{T}$, kde z 1. věty termodynamické $\delta Q = dU + p\,dV$

izotermický děj: $dU = 0 \implies dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{p\,dV}{T}$

změna entropie $\Delta S = \int_1^2 dS = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p\,dV}{T} = \left[\begin{array}{c}\text{stavová rovnice}\\ pV = nRT\\ \frac{p}{T} = \frac{nR}{V}\end{array}\right] = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nR\,dV}{V} = nR\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}$

$$\Delta S = nR \ln V\Big|_{V_1}^{V_2} = nR\left[\ln V_2 - \ln V_1\right] = nR\ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S = \left[\begin{array}{c}\text{látkové množství}\\ n = \frac{m}{M_m} = \frac{m}{N_A\cdot m_{N_2}} = \frac{m}{N_A\cdot 2A_r^N m_u}\end{array}\right] = \frac{m}{N_A\cdot 2A_r^N\cdot m_u}\cdot R\cdot\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Dosazení: $\Delta S = \frac{2\cdot 10^{-3}}{6,023\cdot 10^{23}\cdot 2\cdot 14\cdot 1,66\cdot 10^{-27}}\cdot 8,3\cdot\ln\frac{4}{6} = -0,24$ J/K

Příklad 4.2

Máme 60 litrů vzduchu o tlaku p=1 MPa. Kolik tepla je třeba dodat, aby vzduch při stálém tlaku zdvojnásobil objem? Poissonova konstanta pro vzduch $\varkappa = 1,4$. $\left[Q = \frac{\varkappa p}{\varkappa - 1} V = 210\ \mathrm{kJ} \right]$

Podobný příklad
http://reseneulohy.cz/373/zmena-objemu-helia

4.2

$V_1 = 60\ \ell = 6 \cdot 10^{-2}\ m^3$

$p = 1\ MPa = 10^6\ Pa = \text{konst.}$

$V_2 = 2V_1$

$\varkappa = 1,4$

$Q = ?$

izobarický děj $\quad Q = n \cdot C_p \cdot \Delta T = n \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1)$

$n \cdot (T_2 - T_1)$ určíme ze stavové rovnice id. plynu:

$$pV = nRT \Rightarrow nT = \frac{pV}{R} \Rightarrow n(T_2 - T_1) = \frac{p(V_2 - V_1)}{R}$$

$$Q = C_p \cdot \frac{p(V_2 - V_1)}{R}$$

C_p musíme vyjádřit pomocí $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{C_p}{C_v} \quad \text{a dle Meyerova vztahu} \quad C_p = C_v + R$$

$$\varkappa = \frac{C_p}{C_p - R} \qquad \varkappa \cdot (C_p - R) = C_p \qquad (\varkappa - 1) \cdot C_p = \varkappa R \Rightarrow C_p = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R$$

Dosazením C_p máme: $Q = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \cancel{R} \cdot \frac{p(V_2 - V_1)}{\cancel{R}} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot p \cdot (V_2 - V_1) = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p (2 \cdot V_1 - V_1) = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p \cdot V_1$

$$Q = \frac{1,4}{1,4 - 1} \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-2} = 210\,000\ J$$

Příklad 4.3

Vypočítejte změnu entropie při ochlazení vzduchu o hmotnosti $m = 5$ g z teploty $t_1 = 50^o$ C na $t_2 = 0^o$ C při stálém objemu, molární hmotnost vzduchu je $M_{vz} = 28,5\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$, univerzální plynová konstanta je rovna $R = 8,3\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$, $C_v = \frac{5}{2}R$. $\left[\Delta S = \frac{m}{M_{vz}}\frac{5}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1} = -0,612\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}\right]$

Odevzdáváte v Moodle

Příklad 4.4

Vypočítejte změnu entropie při ochlazení vzduchu o hmotnosti $m = 5$ g z teploty $t_1 = 50^o$ C na $t_2 = 0^o$ C při stálém tlaku, molární hmotnost vzduchu je $M_{vz} = 28{,}5\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, univerzální plynová konstanta je rovna $R = 8{,}3\cdot 10^3\ \text{J}\cdot\text{kmol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $C_v = \frac{5}{2}R$. $\left[\Delta S = \frac{m}{M_{vz}}\frac{7}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1} = -0{,}857\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\right]$

$$\left.\begin{array}{l} m = 5\,g = 5\cdot 10^{-3}\,kg \\ M_{vz} = 28{,}5\,g\cdot mol^{-1} = 28{,}5\cdot 10^{-3}\,kg\cdot mol^{-1} \\ t_1 = 50^\circ C\ (T_1 = 323\,K) \xrightarrow{p_1 = p_2} t_2 = 0^\circ C\ (T_2 = 273\,K) \\ C_v = \frac{5}{2}R \qquad R = 8{,}3\cdot\ J\cdot mol^{-1}\,K^{-1} \end{array}\right\}\quad \Delta S = ?$$

změna entropie při konstantním tlaku:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \left[\begin{array}{c}\text{konst. tlak} \\ \delta Q = nC_p\,dT\end{array}\right] = \frac{n\,C_p\,dT}{T}$$

$$\Delta S = \int_1^2 dS = \int_{T_1}^{T_2} nC_p\frac{dT}{T} = n\,C_p\cdot\ln T\Big|_{T_1}^{T_2} = n\,C_p\cdot\ln\frac{T_2}{T_1}$$

C_p vypočítáme z C_v pomocí Mayerova vztahu: $C_p = C_v + R = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R$

$$\Delta S = n\cdot\frac{7}{2}R\cdot\ln\frac{T_2}{T_1} = \left[n = \frac{m}{M_{vz}}\right] = \frac{m}{M_{vz}}\cdot\frac{7}{2}R\cdot\ln\frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S = \frac{5}{28{,}5}\cdot\frac{7}{2}\cdot 8{,}3\cdot\ln\frac{273}{323} \doteq -0{,}86\ \text{J/K}$$

Příklad 4.10

V nádobě o objemu $V_1 = 50\,\ell$ je plyn o tlaku $p_1 = 4{,}5 \cdot 10^6$ Pa. Ve druhé nádobě o objemu $V_2 = 30\,\ell$ je jiný plyn o tlaku $p_2 = 8{,}5 \cdot 10^6$ Pa. Teploty obou plynů jsou stejné $t = 20^o$C. Určete, jak se změní entropie soustavy vzniklé smícháním plynů po spojení obou lahví. Plyny spolu chemicky nereagují.

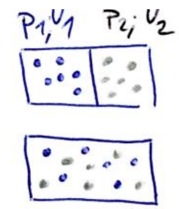
$$\left[\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{p_1V_1}{T}\ln\frac{V_2+V_1}{V_1} + \frac{p_2V_2}{T}\ln\frac{V_2+V_1}{V_2} = 1214\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}\right]$$

$V_1 = 50\,\ell$ $\quad p_1 = 4{,}5\cdot 10^6$ Pa $\quad t = 20°C$ $(T = 293$ K$)$

$V_2 = 30\,\ell$ $\quad p_2 = 8{,}5\cdot 10^6$ Pa

plyny různé, nereagují spolu

$\Delta S = ?$



Podobná úloha: http://reseneulohy.cz/432/zmena-entropie-pri-expanzi-do-vakua

Druh děje: lze uvažovat o izotermické expanzi z V_1 do V_1+V_2, resp. $V_2 \to V_1+V_2$

1\. plyn: $dS_1 = \frac{\delta Q}{T} = \left[\begin{matrix}\text{izotermický děj}\\ T=\text{konst} \quad \Delta U = 0\\ \delta Q = p\,dV\end{matrix}\right] = \frac{p\,dV}{T} = \left[\begin{matrix}\text{stavová rovnice}\\ \frac{pV}{T} = nR\\ \frac{pV}{T} = \frac{p_1V_1}{T}\end{matrix}\right] = \frac{p_1V_1}{T}\frac{dV}{V}$

$$\Delta S_1 = \int dS_1 = \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{p_1V_1}{T}\frac{dV}{V} = \frac{p_1V_1}{T}\cdot\ln\frac{V_1+V_2}{V_1}$$

analogicky

2\. plyn: $\Delta S_2 = \frac{p_2V_2}{T}\ln\frac{V_1+V_2}{V_2}$

Dva různé plyny $\quad \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{p_1V_1}{T}\ln\frac{V_1+V_2}{V_1} + \frac{p_2V_2}{T}\ln\frac{V_1+V_2}{V_2}$

$$\Delta S = \frac{4{,}5\cdot 10^6\cdot 50\cdot 10^{-3}}{293}\cdot\ln\frac{80}{50} + \frac{8{,}5\cdot 10^6\cdot 30\cdot 10^{-3}}{293}\cdot\ln\frac{80}{30} \doteq 1215\ \mathrm{J\,K^{-1}}$$

Pozn.: Pokud by šlo o stejný plyn je potřeba počítat s členem „$nR\ln n$", jinak bychom dostali tzv. Gibbsův paradox.

Gibbsův paradox

Příklad 4.12

Carnotův motor pracuje mezi lázněmi teplot $T_H = 850$ K a $T_S = 300$ K. Koná práci A=1 200 J během každého cyklu trvajícího t =0,25 s.

a) Jakou má účinnost? $\left[\eta = 1 - \dfrac{T_S}{T_H} = 0,647\right]$

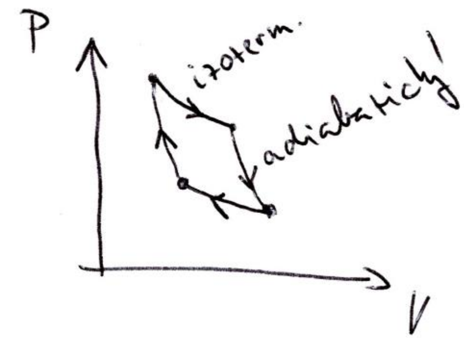
b) Jaký je střední výkon motoru? $\left[P = \dfrac{A}{t} = 4800 \text{ W}\right]$

4.12

Carnotův motor $T_H = 850$ K $A = 1200$ J

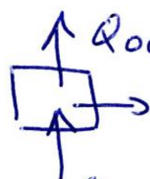
$T_S = 300$ K $t = 0,25$ s

a) $\eta = ?$ b) $P = ?$



a) účinnost $\eta = \dfrac{A}{Q_{dodané}}$

Qodevzdané



$A = Q_{dodané} - Q_{odevzdané}$

Qdodané

Carnot $\eta = \dfrac{T_H - T_S}{T_H} = 1 - \dfrac{T_S}{T_H}$

$\eta = 1 - \dfrac{300}{850} \doteq 0,65$

b) výkon $P = \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{A}{t}$ $P = \dfrac{1200}{0,25}$ W $= 4,8$ kW