Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (31.01.2023)

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					$\boldsymbol{\Sigma}$
Úloha	1	2	3	4	$\boldsymbol{\Sigma_1}$	1	2	3	4	$\boldsymbol{\Sigma_2}$	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{1}{z^{10} + 4z^{13}}$$

do Laurentovy řady na maximálním okolí ∞ a určete parametry tohoto okolí.

(b) Rozviňte funkci

$$g(z) = z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

do Laurentovy řady na prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$. Dále určete $\operatorname{res}_0 g(z)$ a klasifikujte typ izolované singularity funkce $g(z)$ v bodě 0.

[Nápověda: Využijte známého rozvoje funkce $\sin z$.]

Úloha 2 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{(1 - \cos z)(z - 2\pi)}.$$

(b) Určete číslo $a \in \mathbb{C}$ tak, aby funkce

$$g(z) = \frac{e^z + a}{z(z - \frac{\pi}{2}i)}$$

měla v bodě $z = \frac{\pi}{2}i$ odstranitelnou singularitu.

Úloha 3 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Spojité funkce $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ mají Fourierovy transformace

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 4} \qquad \text{a} \qquad \hat{g}(\omega) = \frac{1}{(\omega + i)^2}.$$

Určete $(f * g)(t)$.

[Nápověda: Nejprve určete $\mathscr{F}\left[(f * g)(t)\right](\omega)$.]

(b) Pomocí Fourierovy transformace funkce $h \in L^1(\mathbb{R})$ vyjádřete

$$\mathscr{F}\left[h(t)\sin(2t)\right](\omega)\,.$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2e^{2t}$$

splňující počáteční podmínky $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$.

1) a) $f(z) = \frac{1}{z^{10}+4z^{13}} = \frac{1}{4z^{13}} \frac{1}{1+\frac{1}{4z^3}} = \frac{1}{4z^{13}} \frac{1}{1-(-\frac{1}{4z^3})} =$

$= \frac{1}{4z^{13}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4z^3}\right)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1} z^{3n+13}} \quad \text{for } |z| > \sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$

$\left|-\frac{1}{4z^3}\right| < 1$

$|z|^3 > \frac{1}{4} \qquad |z| > \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

b) $g(z) = z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{z^2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{4n+2}}$

$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{4n-3}}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

- $4n-3 = 1 \iff n = 1$

$\operatorname{res}_0 g(z) = \left.\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|_{n=1} = -\frac{1}{3!} = \boxed{-\frac{1}{6}}$

- Laurentów rozwój funkcji $g(z)$ na $P(0)$ obejmuje nieskończenie wiele ujemnych wykładników $z \Longrightarrow$ **0 jest istotnie osobliwe**

2) a) $\cos z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$

- $1 - e^{iz}\Big|_{z=2k\pi} = 0$

$(1-e^{iz})'\Big|_{z=2k\pi} = -ie^{iz} = -i \neq 0$

Body $z = 2k\pi$ jsou 1-násobné kořeny rovnice.

- $(1-\cos z)(z-2\pi)\Big|_{z=2k\pi} = 0$

$[(1-\cos z)(z-2\pi)]'\Big|_{z=2k\pi} = \sin z\,(z-2\pi) + 1 - \cos z\Big|_{z=2k\pi} = 0 + 1 - 1 = 0$

$[(1-\cos z)(z-2\pi)]''\Big|_{z=2k\pi} = \cos z\,(z-2\pi) + \sin z + \sin z\Big|_{z=2k\pi} = 2k\pi - 2\pi = 2(k-1)\pi$

- Pokud $k \neq 1$, pak $[(1-\cos z)(z-2\pi)]''\Big|_{z=2k\pi} \neq 0$, a tedy body $z = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, jsou 2-násobné kořeny jmenovatele.

Pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ jsou body $z = 2k\pi$ jednoduché póly.

- Pro $k = 1$, tj. $z = 2\pi$, je $[(1-\cos z)(z-2\pi)]''\Big|_{z=2\pi} = 0$
- $[(1-\cos z)(z-2\pi)]'''\Big|_{z=2\pi} = -\sin z\,(z-2\pi) + \cos z + \cos z + \cos z\Big|_{z=2\pi} = 3 \neq 0$
- Bod $z = 2\pi$ je 3-násobný kořen jmenovatele.

Bod $z = 2\pi$ je pól 2. řádu.

b) Bod $z=\frac{\pi}{2}i$ je jednoduchým kořenem jmenovatele.

Jest $e^z+a\Big|_{z=\frac{\pi}{2}i} = i+a$.

- Pro $\boxed{a=-i}$ je tedy bod $z=\frac{\pi}{2}i$ tedy kořen čitatele (násobnosti 1), tedy v $z=\frac{\pi}{2}i$ má $g(z)$ odstranitelnou singularitu.

3) a) $\widehat{f*g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega) = \frac{1}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}$

$$(f*g)(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}\right](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}\,d\omega$$

- $\omega^2+4=0 \Leftrightarrow \omega = \pm 2i$

- $t \geq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}\,d\omega = 2\pi i \left\{ res_{2i}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2} = 2\pi i \left.\frac{e^{-2t}}{2\omega}\right|_{\omega=2i} (3i)^2 \right.$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-2t}}{-36i} = -\frac{2\pi}{36}e^{-2t}$$

- $t<0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}\,d\omega = -2\pi i\left(res_{-2i}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2} + res_{-i}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}\right)$$

- $res_{-2i}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2} = \left.\frac{e^{2t}}{2\omega}\right|_{\omega=-2i}(-i)^2 = \frac{e^{2t}}{4i} = -\frac{e^{2t}}{4}i$

- $res_{-i}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2} \overset{\text{pol 2. řádu}}{=} \lim_{\omega\to -i}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2+4}\right)' = \lim_{\omega\to -i}\frac{it\,e^{i\omega t}(\omega^2+4) - 2\omega e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)^2}$

$$= \frac{it\,e^{t}(3) + 2ie^{t}}{9} = i\left(\frac{t}{3}+\frac{2}{9}\right)e^{t}$$

- $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega+i)^2}\,d\omega = -\frac{2\pi}{4}e^{2t} + 2\pi\left(\frac{t}{3}+\frac{2}{9}\right)e^{t}$

$$(f*g)(t) = \begin{cases} -\frac{1}{36}e^{-2t} \dots t \geq 0 \\ \left(\frac{t}{3}+\frac{2}{9}\right)e^{t} - \frac{1}{4}e^{2t} \dots t<0 \end{cases}$$

b) $\mathcal{F}[h(t)\sin 2t](\omega) = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}[h(t)e^{2it}](\omega) - \mathcal{F}[h(t)e^{-2it}](\omega)\right]$

$= \frac{1}{2i}\left(\hat{h}(\omega-2) - \hat{h}(\omega+2)\right)$

4) $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2e^{2t}$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$

$$s^2Y(s) - 1 - sY(s) - 2Y(s) = \frac{2}{s-2}$$

$$(s^2 - s - 2)\,Y(s) = \frac{s}{s-2}$$

$$(s-2)(s+1)\,Y(s) = \frac{s}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s-2)^2(s+1)}$$

$$y(t) = \operatorname{res}_2 \frac{se^{st}}{(s-2)^2(s+1)} + \operatorname{res}_{-1} \frac{se^{st}}{(s-2)^2(s+1)}$$

$$\cdot \operatorname{res}_2 \frac{se^{st}}{(s-2)^2(s+1)} \overset{\text{pól 2. rádu}}{=} \lim_{s\to 2} \left(\frac{se^{st}}{s+1}\right)' = \lim_{s\to 2} \frac{(e^{st} + ste^{st})(s+1) - se^{st}}{(s+1)^2}$$

$$= \lim_{s\to 2} \frac{3(1+2t)e^{2t} - 2e^{2t}}{9} = \frac{1+6t}{9}e^{2t}$$

$$\cdot \operatorname{res}_{-1} \frac{se^{st}}{(s-2)^2(s+1)} = \frac{-e^{-t}}{(-3)^2} = -\frac{1}{9}e^{-t}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1+6t}{9}e^{2t} - \frac{1}{9}e^{-t}}$$