6.1.

(a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = (x^2+y^2)(x-y) + xy - x - y = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3 + xy - x - y$

Polynom: ANO

počet proměnných: 2

stupeň: 3

homogenní: NE

(b) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = a^T(x)$

Polynom: ANO

počet proměnných: n

stupeň: 1

homogenní: ANO

(c) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \|x\|$

Polynom: NE

(d) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \|Ax+b\|^2$

Polynom: ANO

počet proměnných: n

stupeň: 2

homogenní: NE

(e) $f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^T y$

Polynom: ANO

počet proměnných: 2n

stupeň: 2

homogenní: ANO

(f) $f: \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ $\quad f(X) = a^T X b$

Polynom: ANO

počet proměnných: n^2

stupeň: 1

homogenní: ANO

(g) $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ $\quad f(X) = \det(X)$

Polynom: ANO

počet proměnných: n^2

stupeň: n

homogenní: ANO

6.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda)+2$$

$$= -3 + 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

$\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}$

$\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}$

$V_1: \left[\begin{array}{cc|c} 1-1-\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -1 & -3-1-\sqrt{2} & 0 \end{array}\right]$ $\quad V_1 = (2, \sqrt{2}-2)$

$V_2: \left[\begin{array}{cc|c} 1-1+\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -1 & -3-1+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right]$ $\quad V_2 = (-2, 2+\sqrt{2})$

6.8.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ - symetrická matice

$\det[2] = 2 > 0$

$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2 > 0$

pozitivně definitní

(g) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ - Symetrická matice

na diagonále jsou nekladná i nezáporná čísla

indefinitní

6.16.

(a) 1,2,0 → může být pozitivně semidefinitní nebo indefinitní
→ nemůže být pozitivně definitní (má v diagonále 0) ani negativně definitní/semidefinitní (má v diagonále kladná čísla)

(b) 1,2,3 → může být pozitivně definitní/semidefinitní nebo indefinitní
→ nemůže být negativně definitní/semidefinitní (má v diagonále kladná čísla

(c) -4,-2,-1 → může být negativně definitní/semidefinitní nebo indefinitní
→ nemůže být pozitivně definitní/semidefinitní (má v diagonále záporná čísla)

(d) -1,2,0 → může být pouze indefinitní (má v diagonále nezáporná i nekladná čísla)