

## 12.1. Najděte graficky množinu optimačních řešení úlohy

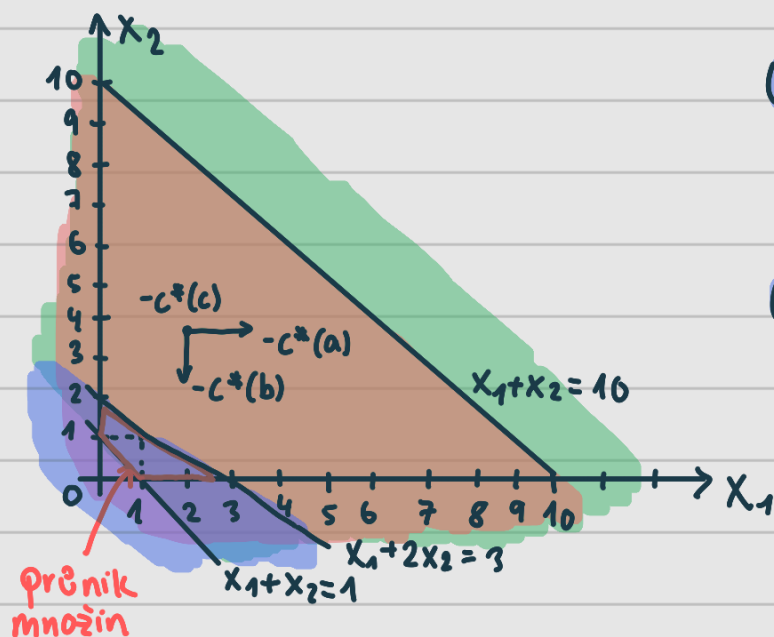
$$\min C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$$

$$\text{z.p. } X_1 + X_2 \geq 1$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$



$$(a) \ C = (-1, 0, 1) \rightarrow \text{do 2D}$$

$$-C^* = (1, 0)$$

$$\min: X_1 = 3, X_2 = 0, X_3 = 0$$

$$(b) \ C = (0, 1, 0) \rightarrow \text{do 2D}$$

$$-C^* = (0, -1)$$

$$\min: X_1 \in \langle 1, 3 \rangle, X_2 = 0, X_3 \in \langle 0, \infty \rangle$$

$$(c) \ C = (0, 0, 1) \rightarrow \text{do 2D}$$

$$-C^* = (0, 0)$$

úloha je neomezená

## 12.2. Následující úlohy nejprve převedte na rovnicový tvar, potom do maticové formy ( $\min \{r^T u \mid Pu = q, u \geq 0\}$ )

$$(a) \min 2X_1 - 3X_3 + X_4$$

$$\text{z.p. } X_1 - X_2 - X_3 \geq 0$$

$$-X_1 + 2X_2 - 3X_3 \leq 5$$

$$2X_1 - X_2 - X_3 + 2X_4 = 6$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

$\Downarrow$

$$\min 2X_1 - 3X_3 + X_4$$

$$\text{z.p. } X_1 - X_2 - X_3 - u = 0$$

$$-X_1 + 2X_2 - 3X_3 + v = 5$$

$$2X_1 - X_2 - X_3 + 2X_4 = 6$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, u, v \geq 0$$

maticový zápis

$$r = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(b)  $\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$

z.p.  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1, \dots, m$

$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j=1, \dots, n$

$x_{ij} \geq 0$

maticový zápis:

$$r = c \quad u = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ x_{m2} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m \cdot n \\ n \cdot n \end{matrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} \overbrace{1^T \ 0^T \ 0^T}^{n \cdot n} \\ \overbrace{0^T \ 1^T \ 0^T}^{n \cdot n} \\ \vdots \\ \overbrace{0^T \ 0^T \ 1^T}^{n \cdot n} \\ \overbrace{I_n \ I_n \ I_n}^{n \cdot n} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$$

12.3. Vyřešte a napište výraz pro optimální hodnotu

(a)  $\max \{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x \leq 1\}$

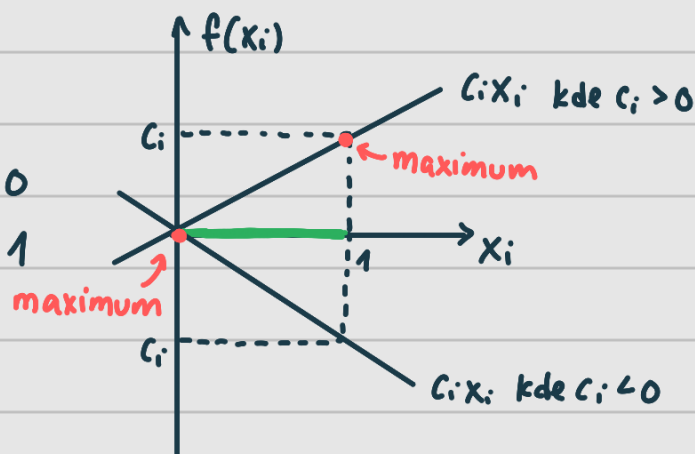
$\max c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$

$\max c_i x_i$

z.p.  $x_1, \dots, x_n \geq 0 \Rightarrow$  z.p.  $x_i \geq 0$

$x_1, \dots, x_n \leq 1$

$x_i \leq 1$



optimální řešení:  $\sum_{i=1}^n \max \{0, c_i\}$

↑ ta větší z nich bude maximum

12.4. Pokuste se úlohy transformovat na LP

(a)  $\min \{ |x_1| + |x_2| \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}, 2x_1 - x_2 \geq 1, -x_1 + 2x_2 \geq 1 \}$

$$\min \{ \max \{ x_1, -x_1 \} + \max \{ x_2, -x_2 \} \}$$

$$\min z_1 + z_2$$

$$\text{z.p. } x_1 - z_1 \leq 0$$

$$-x_1 - z_1 \leq 0$$

$$x_2 - z_2 \leq 0$$

$$-x_2 - z_2 \leq 0$$

$$2x_1 - x_2 \geq 1$$

$$-x_1 + 2x_2 \geq 1$$

12.9.

Firma na výrobu kánoí má 120 zaměstnanců, z nichž každý pracuje maximálně 30 hodin týdně. Polovina zaměstnanců pracuje v truhlářské dílně, 20 zaměstnanců pracuje v dílně na zpracování plastů a zbytek v kompletační dílně. Firma vyrábí dva typy kánoí: standardní kánoe s čistým ziskem 7 EUR za kus a luxusní kánoe s čistým ziskem 10 EUR za kus. Na výrobu jedné standardní kánoe je třeba 4.5 hodiny práce v truhlářské dílně a dvě hodiny v každé ze zbylých dvou dílen. Jedna luxusní kánoe vyžaduje 5 hodin práce v truhlárně, hodinu v dílně na plasty a 4 hodiny kompletace. Průzkum trhu odhalil, že ne méně než  $\frac{1}{3}$  a ne více než  $\frac{2}{3}$  vyrobených kánoí by měly být luxusní. Kolik kterých kánoí má firma týdně vyrobit, aby byl její čistý zisk maximální? Formalizujte jako optimalizační úlohu, kterou už ale neřešte.

L ... počet luxusních kánoí

S ... počet standardních kánoí

truhlářská dílna ... 60 lidí

plastová dílna ... 20 lidí

kompletační dílna ... 40 lidí

$$\max 7S + 10L$$

$$\text{z.p. } \frac{1}{3}(S+L) \leq L \leq \frac{2}{3}(S+L)$$

$$4.5S + 5L \leq 60 \cdot 30$$

$$2S + 1L \leq 20 \cdot 30$$

$$2S + 4L \leq 40 \cdot 30$$

$$S, L \geq 0$$