(1.) a) X ... počet nestudentů před prvním studentem $\sim Geom(0,4)$
(tj. $P(X=k) = 0,6^k \cdot 0,4$ pro $k = 0,1,\dots$)

$P(X \le 3) = P(X=0) + \dots + P(X=3)$
$= \sum_{k=0}^{3} P(X=k) = \sum_{k=0}^{3} 0,6^k \cdot 0,4 = 1 - 0,6^4$

NEBO:

Y .. počet studentů mezi prvními čtyřmi zákazníky
$Y \sim$ Binom $(4; 0,4)$, tj. $P(Y=k) = \binom{4}{k} 0,4^k 0,6^{4-k}$ pro $k = 0, \dots, 4$
$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{4}{0} 0,4^0 0,6^4 = 1 - 0,6^4$

b) X .. doba čekání na příštího zákazníka [min]
$X \sim Exp(\frac{1}{6})$, tj. $f(x) = \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{6}}$ a $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{6}}$ pro $x > 0$
$= 0$ $= 0$ pro $x \le 0$

$P(X \ge 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\frac{5}{6}}) = e^{-\frac{5}{6}}$

nebo
$= \int_5^\infty \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{6}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{6}} \right]_5^\infty = e^{-\frac{5}{6}}$

NEBO
Y ... počet zákazníků za 5 min. $\sim Po(\frac{5}{6})$, tj. $P(Y=k) = \frac{(\frac{5}{6})^k}{k!} \cdot e^{-\frac{5}{6}}$, $k = 0, 1, \dots$
$P(Y=0) = \frac{(\frac{5}{6})^0}{0!} e^{-\frac{5}{6}} = e^{-\frac{5}{6}}$

c) X ... počet zákazníků za 15 min. $\sim Po(\frac{15}{2})$, tj. ... (analogicky k ↑)
$P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - \left(\frac{(\frac{5}{2})^0}{0!} e^{-\frac{5}{2}} + \frac{(\frac{5}{2})^1}{1!} e^{-\frac{5}{2}} + \frac{(\frac{5}{2})^2}{2!} e^{-\frac{5}{2}} \right)$

d) X ... počet studentů za 15 min. $\sim Po(1)$
Y ... -11- nestudentů -11- $\sim Po(\frac{3}{2})$
$P(X=0, Y \ge 3) = P(X=0) \cdot P(Y \ge 3) = \frac{1^0}{0!} e^{-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{(\frac{3}{2})^0}{0!} e^{-\frac{3}{2}} + \frac{(\frac{3}{2})^1}{1!} e^{-\frac{3}{2}} + \frac{(\frac{3}{2})^2}{2!} e^{-\frac{3}{2}} \right) \right)$

e) $X_i = 1$, pokud i-tý zákazník bude student $\}$ $\Rightarrow X_i \sim Alt(0,4) \Rightarrow$
$= 0$, -11- ——— nebude -11- $\}$ $\Rightarrow EX_i = 0,4$ a $var X_i = 0,4 \cdot 0,6$
$\forall i = 1, \dots, 150$

$P\left(\sum_{i=1}^{150} X_i \ge 50 \right) = P\left(\frac{\sum X_i - 150 \cdot 0,4}{\sqrt{150 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} \ge \frac{50 - 150 \cdot 0,4}{\sqrt{150 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} \right)$
$\doteq P(Z \ge \frac{-10}{6}) \doteq 1 - P(Z \le -1,67) = 1 - \Phi(-1,67) = \Phi(1,67) =$
$= 0,9525$

(2) a) $P(X=0)=0,3$
$P(X=1)=0,5$
$P(X=2)=0,2$

$P(Y=0)=0,7$
$P(Y=1)=0,3$ } $Y \sim Alt(0,3) \Rightarrow EY = 0,3$

$EX = 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,5 + 2\cdot 0,2 = 0,9$

$E(X\cdot Y) = 0\cdot 0\cdot 0,21 + 0\cdot 1\cdot 0,09 + 1\cdot 0\cdot 0,35 + 1\cdot 1\cdot 0,15 + 2\cdot 0\cdot 0,14 + 2\cdot 1\cdot 0,06 = 0,27$

$cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - EX\cdot EY = 0,27 - 0,9\cdot 0,3 = 0 \Rightarrow \underline{cov(X,Y)=0}$

b) Z nulové kovariance nelze o nezávislosti rozhodnout, proto:

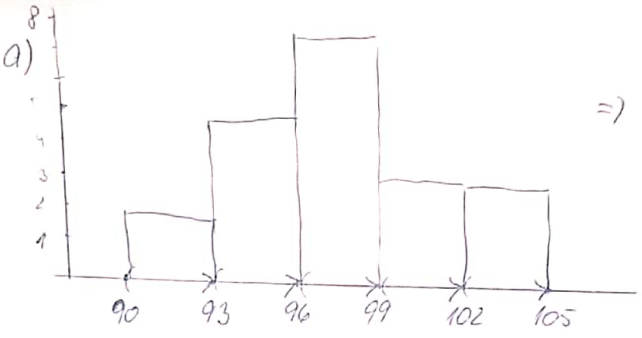
$P(X=0, Y=0) = 0,21 = 0,3\cdot 0,7 = P(X=0)\cdot P(Y=0)$

0	1	0,09	$= 0,3\cdot 0,3$	0	1
1	0	0,35	$= 0,5\cdot 0,7$	1	0
1	1	0,15	$= 0,5\cdot 0,3$	1	1
2	0	0,14	$= 0,2\cdot 0,7$	2	0
2	1	0,06	$= 0,2\cdot 0,3$	2	1

Jelikož $P(X=i, Y=j) = P(X=i)\cdot P(Y=j)$ pro všechny nalezené hodnoty i, j, jsou X a Y nezávislé.

c) $P(U\le i, V\le j, W\le k) = P(U\le i)\cdot P(V\le j)\cdot P(W\le k) \quad \forall i,j,k \in \mathbb{R}$
NEBO
$f_{(U,V,W)}(x,y,z) = f_U(x)\cdot f_V(y)\cdot f_W(z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$
(sdružená hustota) (marginální hustoty pro n.v. U, V, resp. W)

3.) a)



$\Rightarrow$ X hmotnost náhodně vybraného balíčku [g]

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\mathbb{E}X$ "var X"

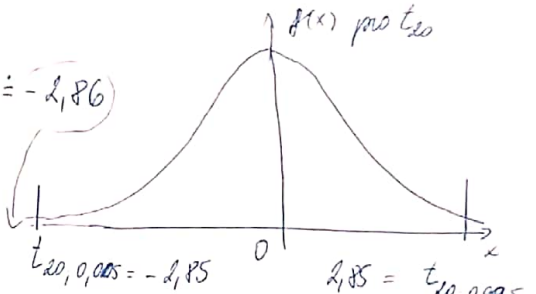
b) $\widehat{\mathbb{E}X} = \bar{X}_{21} = \frac{2058}{21} = \underline{98}$, $\widehat{\text{var}\,X} = S^2_{21} = \frac{206}{20} = \underline{10{,}3}$

c) $H_0: \mathbb{E}X = 100$

$H_A: \mathbb{E}X \neq 100$

$\alpha = 1\%$

$T = \frac{98-100}{\sqrt{10{,}3}} \cdot \sqrt{21} \doteq -2{,}86$



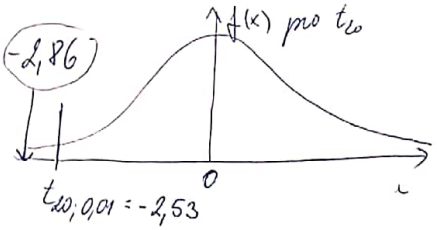
$\Rightarrow$ H_0 (těsně) zamítáme ve prospěch $H_A: \mathbb{E}X \neq 100$ na hl. $\alpha = 1\%$

přirozenější však je

$H_A: \mathbb{E}X < 100$

$\alpha = 1\%$

$T = (-2{,}86)$



$\Rightarrow$ H_0 (již o něco výrazněji) zamítáme ve prospěch $H_A: \mathbb{E}X < 100$ na hladině 1%

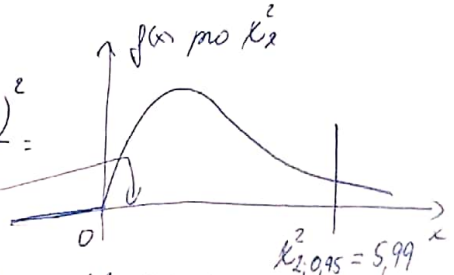
d) $H_0: p_i = \frac{1}{3}$ pro všechna $i \in \{$kláskové, ovocní, kávové$\}$

H_A: alespoň jedno $p_i \neq \frac{1}{3}$

$\alpha = 5\%$

$\chi^2 = \frac{(8-21\cdot\frac{1}{3})^2}{21\cdot\frac{1}{3}} + \frac{(8-21\cdot\frac{1}{3})^2}{21\cdot\frac{1}{3}} + \frac{(5-21\cdot\frac{1}{3})^2}{21\cdot\frac{1}{3}} =$

$= \frac{(8-7)^2}{7} + \frac{(8-7)^2}{7} + \frac{(5-7)^2}{7} = \frac{6}{7}$



$\Rightarrow$ H_0 nezamítáme ve prospěch H_A na hladině $\alpha = 5\%$

e) Víme, že $P(\text{kláskové}) + P(\text{ovocné}) + P(\text{kávové}) = 1$

$p + \varepsilon + p + p - \varepsilon = 1$

$3p = 1 \Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{3}$

$L(\varepsilon) = (\frac{1}{3}+\varepsilon)^8 \cdot (\frac{1}{3})^8 (\frac{1}{3}-\varepsilon)^5$

$\ell(\varepsilon) = \ln L(\varepsilon) = 8 \cdot \ln(\frac{1}{3}+\varepsilon) + 8 \ln\frac{1}{3} + 5 \cdot \ln(\frac{1}{3}-\varepsilon)$

$\ell'(\varepsilon) = \frac{8}{\frac{1}{3}+\varepsilon} + \frac{5}{\frac{1}{3}-\varepsilon}(-1) = 0 \Rightarrow 8(\frac{1}{3}-\varepsilon) = 5(\frac{1}{3}+\varepsilon)$

$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{13}$