**10.1.** Funkce $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má stacionární bod $(2,1,3)$.
Co se dá o něm říci, když Hessova matice v něm má vlastní čísla

**(a)** $\{2, 3, -1\}$
- indefinitní Hessián
- v bodě je sedlo

**(b)** $\{2, 3, 0\}$
- pozitivně semidefinitní Hessián
- o bodu se nedá nic říct (vlastní číslo je 0)

**(c)** $\{2, 1, 1\}$
- pozitivně definitní Hessián
- v bodě je minimum

**10.2.** Pro následující funkce najděte stacionární body + klasifikace

**(d)** $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$

$f'(x,y) = [3 - 3x^2 - 3y^2 \,,\, -6xy]$

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -3x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix}$$

Stacionární body:

$3 - 3x^2 - 3y^2 = 0$

$-6xy = 0$

řešení: $(0,1)$ - sedlový bod
$(0,-1)$ - sedlový bod
$(1,0)$ - maximum
$(-1,0)$ - minimum

$f''(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ indefinitní

$f''(0,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ indefinitní

$f''(1,0) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ negativně definitní

$f''(-1,0) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ pozitivně definitní

**(e)** $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$

$f'(x,y) = [6y^2 - 6x^2 \,,\, 12xy - 12y^3]$

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x - 36y^2 \end{bmatrix}$$

Stacionární body:

$6y^2 - 9x^2 = 0$

$12xy - 12y^3 = 0$

řešení: $(0,0)$ sedlový bod

$(1,1)$ maximum

$(1,-1)$ maximum

$f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ indefinitní

$f''(1,1) = \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 12 & -24 \end{bmatrix}$ negativně definitní

$f''(1,-1) = \begin{bmatrix} -12 & -12 \\ -12 & -24 \end{bmatrix}$ negativně definitní

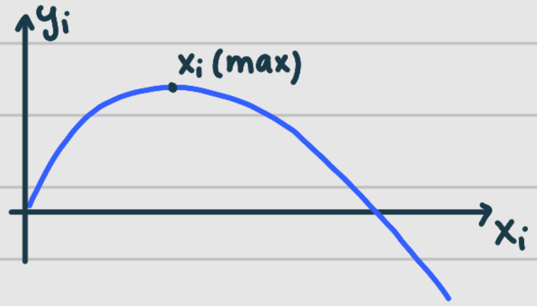
**10.3.** Najděte lokální extrémy funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s hodnotami $f(x) = a^T x - \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i$ kde $a$ je daný vektor

- součet funkcí $f_i(x_i) = a_i x - x \ln x$
- hledání extrémů jednotlivých funkcí

$f_i'(x_i) = a_i - \ln x_i - 1$

$a_i - \ln x_i - 1 = 0$

$x_i = e^{a_i - 1}$ → globální maximum




**10.5.** Najděte všechna řešení rovnice $\sin x = \frac{1}{2}x$

$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$ → hledám $f(x) = 0$

Newtonova metoda: $x = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$

$$x = a - \frac{\sin a - \frac{1}{2}a}{\cos a - \frac{1}{2}}$$

$a_1 = 3$

```
a = 3

for i = 1:4
    a_next = a - (sin(a) - 0.5*a) / (cos(a) - 0.5);
    a = a_next
end
```

```
a = 3
a = 2.0880
a = 1.9122
a = 1.8957
a = 1.8955
```

**10.6.** Najděte lokální extrém funkce $f(x,y) = x^2 - y + \sin(y^2 - 2x)$ čistou Newtonovou metodou. Počáteční odhad zvolte $(x_0, y_0) = (1,1)$

iterace: $x_{k+1} = x_k - f''(x_k)^{-1} f'(x_k)^T$

$$f'(x) = \left[2x - 2\cos(y^2-2x)\ ,\ -1 + 2y\cdot\cos(y^2-2x)\right]$$

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 2-4\sin(y^2-2x) & 4y\sin(y^2-2x) \\ 4y\sin(y^2-2x) & 2\cos(y^2-2x) - 4y^2\sin(y^2-2x) \end{bmatrix}$$

1. krok:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2-4\sin(-1) & 4\sin(-1) \\ 4\sin(-1) & 2\cos(-1)-4\sin(-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2-2\cos(-1) \\ -1+2\cos(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}652 \\ 0{,}719 \end{bmatrix}$$

takhle se dál pokračuje dalšími kroky ...