Dukazy 2020

pátek 19. ledna 2024 18:24

pokud bude nějaký důkaz navíc, tak je v jiné složce

2020-01-14

nechť $\dim(L) = n$

jelikož $\text{rank}(f) \leq n$,

pak potom obecně $\text{rank}(f \circ f) \leq \text{rank}(f)$

tedy obecně neplatí $\text{Im}(f) \subseteq \text{Im}(f \circ f)$

2020-01-16

Nechť u_p je libovolné řešení $Ax = b$
Nechť u_z je další řešení $Ax = b$
Nechť $u_H \in \text{Ker}(A)$

Z def. $A u_H = 0$, dále

$\vec{0} = A(u_2) - A(u_1) = \vec{b} - \vec{b} \in \text{Ker}(A)$,

tedy: $u_H = u_2 - u_1$

$\Rightarrow u_2 = u_p + u_H$

ověření: $A(u_p + u_H) = A(u_p) + A(u_H) = A(u_2) = b$

tedy $u_p + u_H$ řeší $Ax = b$

věta bez důkazu: Nechť $d = \dim(\text{Ker}(A)) < \text{def}(A)$
a $(u_1, \dots, u_d)$ je báze $\text{Ker}(A)$.
Tedy $\text{span}(u_1, \dots, u_d) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i u_i =$ $\text{Ker}(A)$ pro $\forall$ možných hodnot α_i pro $\forall i$

$f(u_p + u_1 + \dots + u_d) = f(u_1) = b$, tedy i $u_p + \text{Ker}(A)$ řeší $Ax = b$

jádro je vždy podprostor, tedy řešení $Ax = b$ tvoří podprostor

2020-01-20

Věta: Pro $\forall \vec{a}, \vec{b} \neq 0$: $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = 0 \Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}\}$ LN

Sporem: předpoklad: $\vec{a}, \vec{b}$ jsou LZ,

$\Rightarrow$ tedy $\exists \alpha, \beta \neq 0$ tak, že $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0$
i β se musí rovnat nule, jelikož
kdyby se rovnalo: $\alpha = 0$, tak $0 \cdot \vec{a} + \beta \vec{b} = 0$, ale
aby součet platilo, tak musí $\beta = 0$ (jelikož $b = 0$, což
je spor se zněním předpokladem).

Rovnost $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0$ se tedy dá přepsat jako:

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{b}$$

Nechť $p = -\frac{\beta}{\alpha}$, potom platí: $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \langle p \vec{b} | \vec{b} \rangle = p \langle \vec{b} | \vec{b} \rangle$,
(linearita)
ale $p \neq 0$, protože $\beta \neq 0$ a $\langle \vec{b} | \vec{b} \rangle \neq 0$, protože $\vec{b} \neq 0$, tedy
$p \langle \vec{b} | \vec{b} \rangle = \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \neq 0$, což se spor, jelikož z předpokladu $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = 0$.
$\Rightarrow$ Tvrzení platí.

2020-01-23

Předpoklad: $A = A^T$, $B = B^T$
chceme: $BA = (BA)^T$

$(BA)^T = A^T B^T = AB \neq BA$ (obecně)

tvrzení neplatí

protipříklad:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (BA) / což není stejná matice

2020-01-30

$\det(A) = d$
$a \in \mathbb{F}$
pak $\det(aA) = a^n \det(A)$

$\det(aA) =$

aA znamená: přenásob každý prvek
A skalárem a

dále přenásobím A skalárem a
tolik znamená přenásob každý
sloupec A skalárem a

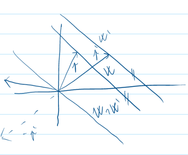
$\det(aA) = \det(a(a_1, a_2, \dots, a_n)) =$
$= \det(a a_1, a a_2, \dots, a a_n) =$
$= a \det(a_1, a a_2, \dots, a a_n) = \dots = a^{n-1} \det(a_1, a_2, \dots, a a_n)$
(det. multilinearita)
$= a^n \det(a_1, \dots, a_n) =$
$= a^n \cdot \det(A) = a^n d$

2020-02-06

$\pi = p + W$, $\pi' = p' + W'$ & $\pi \parallel \pi'$

Pak $(p - p') \in W \cap W'$

$\pi \parallel \pi' \Rightarrow W \subseteq W'$ nebo $W' \subseteq W$, tedy $W \cap W' = W$ nebo W'



např. $\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\pi' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

platí: $W \cap W' = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

a $p - p' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

ale $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ znejme $\notin W \cap W'$