## Úloha 1 [5 bodů]

Pokud pro lineární zobrazení  $\mathbf{A}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  a  $\mathbf{B}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  platí rank $(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{B}) = 1$ , platí nutně rank $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2$ ? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, nalezněte protipříklad.

## Úloha 2 [5 bodů]

Mějme lineární zobrazení  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , nechť  $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  je báze  $\mathbb{R}^3$ , a ať  $\mathbf{f}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_1$ . Jakých hodnot může nabývat rank $(\mathbf{f})$ ? Pečlivě zdůvodněte svou úvahu.

## Úloha 3 [10 bodů]

Rozhodněte, zda pro zobrazení  $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x-y)^2$  platí:

- 1.  $f(\mathbf{o}) = 0$ ,
- 2.  $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$  pro všechny dvojice vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ ,
- 3.  $f(a \cdot \mathbf{u}) = a \cdot f(\mathbf{u})$  pro každý vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  a každé reálné číslo a.

Pro množinu  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  rozhodněte, zda

- 1. obsahuje nulový vektor,
- 2. je uzavřená na sčítání vektorů,
- 3. je uzavřená na násobení skalárem.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y \cdot x = 0 \right\}$$