### Pravděpodobnost a statistika - zkoušková písemka 18.6.2020

Jméno a příjmení	1	2	3	ústní	celkem	známka

## **Úloha 1.** (celkem 55 bodů)

Studenti jisté vysoké školy si v 1.ročníku, v němž je dvakrát více chlapců než dívek, mohou vybrat jako tělesnou výchovu posilovnu, basketbal, plavání nebo stolní tenis. Kapacita basketbalu je stejná jako kapacita plavání, kapacity posilovny a stolního tenisu jsou proti nim poloviční. Na plavání a stolním tenisu jsou poměry chlapců a dívek 1:1, na basketbalu tvoří dívky 1/5. Sportovní centrum je pro studenty 1.ročníku otevřeno v pondělí od 9:00 do 19:00, jednotlivé sporty jsou rozloženy na tuto dobu rovnoměrně dle zadaných poměrů a stejně tak studenti v nich. Během výuky chodí studenti zcela nezávisle na sobě k automatu s kávou. Automat průměrně vydá během pondělí 120 káv. Určete pravděpodobnost, že

- a) náhodně vybraný chlapec je z posilovny, (5 bodů)
- b) náhodně vybraný sportovec z posilovny je chlapec, (5 bodů)
- c) na prvního basketbalistu nebo basketbalistku budeme u automatu čekat nejvýše půl hodiny, (7 bodů)
- d) během čtvrt hodiny si k automatu přijdou pro kávu nejvýše dva sportovci, (7 bodů)
- e) během čtvrt hodiny si k automatu přijdou pro kávu nejvýše dvě stolní tenistky, (7 bodů)
- f) nejpozději pátý sportovec, který přišel k automatu, je plavec nebo plavkyně, (7 bodů)
- g) mezi prvními čtyřmi studenty u automatu je alespoň jeden stolní tenista (chlapec), (7 bodů)
- h) s aktuální zásobou 25 káv automat vydrží až do příjezdu pracovníka doplňujícího zásoby, který přijede za dvě a půl hodiny, aniž by někdo ze sportovců do té doby zůstal bez kávy. (řešte pomocí CLV; 10 bodů).

### **Úloha 2.** (celkem 30 bodů)

V jistém australském parku si lidé mohou pohladit místní zvířátka, ale vybrat si mohou vždy jen jedno. Bylo pozorováno, že 100 náhodně vybraných dospělých a dětských návštěvníků si zvolilo následovně:

	klokan	koala	wombat
dospělý	10	15	15
dítě	30	25	5

- a) Odhadněte z dat marginální rozdělení náhodného vektoru (X,Y), kde X popisuje, zda návštěvník, který si jde pohladit zvířátko, je dospělý (X=1) nebo dítě (X=0), a Y popisuje vybrané zvířátko (Y=1) pro klokana, Y=2 pro koalu a Y=3 pro wombata) (5 bodů) a pravděpodobnost, že
  - (i) další příchozí návštěvník je dítě, které si jde pohladit klokana,(5 bodů)
  - (ii) další příchozí dítě si jde pohladit klokana, (5 bodů)
- b) Statisticky otestujte na hladině 1%, zda počet dospělých a dětí, kteří si jdou pohladit zvířátko, je přibližně stejný. (7 bodů)
- c) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda můžeme považovat věk (tj. dětství vs dospělost) a vybrané zvířátko za nezávislé náhodné veličiny. (8 bodů)

# Úloha 3. (celkem 15 bodů)

Během týdenního tenisovém soustředění proti sobě hráli hráči A a B 20 setů, z nichž 12 vyhrál A.

- a) Metodou maximální věrohodnosti odhadněte pravděpodobnost výhry hráče A nad hráčem B. (8 bodů)
- b) Pomocí odhadu z bodu a) určete pravděpodobnost, že z následujících
  4 setů jich hráč A vyhraje lichý počet. (7 bodů)

### Ústní část (celkem 10 bodů)

Definujte obecně nezávislost spojitých náhodných veličin X a Y. Dále rozhodněte, zda může existovat sdružená hustota f(x,y) náhodných veličin X a Y, pro kterou platí f(x,y) > 0 pro  $x,y: x^2 + y^2 \le 1$  a f(x,y) = 0 pro  $x,y: x^2 + y^2 > 1$ , a přitom X a Y jsou nezávislé. Své rozhodnutí řádně zdůvodněte (tj. může-li to nastat, f(x,y) určete, nemůže-li to nastat, najděte protipříklad k definici).