11.1. Na kružnici $x^2+y^2=1$ najděte lokální extrémy funkce

(d) $f(x,y)=x^2y$

Lagrangeova funkce:

$$L(x,y,\lambda)=x^2y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2xy+2\lambda x=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=x^2+2\lambda y=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0$$

$$x^2+y^2=1$$

$x=0$

$y=-\lambda$

$y^2=\frac{1}{3}$

extrémy: $[0,1]$

$[0,-1]$

$\left[\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$

$\left[\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$

$\left[-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$

$\left[-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$

11.4. Najděte bod nejblíže počátku na křivce

(c) $x^2y=1$

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^2y-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda xy=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda x^2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2y-1=0$$

$$x^2=\frac{1}{y}$$

$x=0$

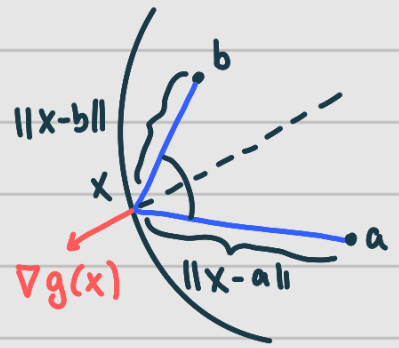
$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{1}{\lambda} \\ y=\frac{1}{2y^2} \end{array}\right\} y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

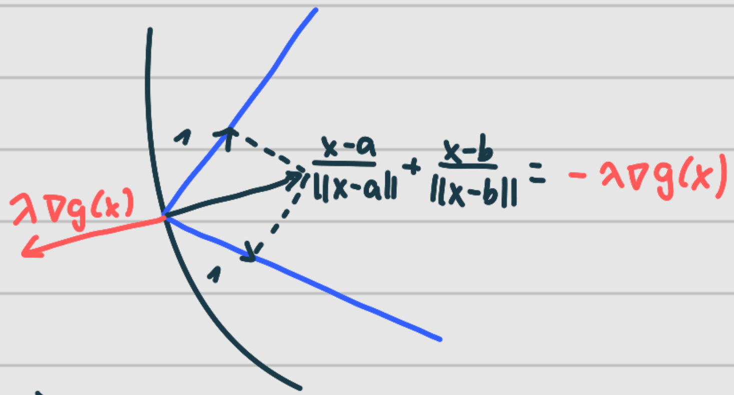
$x^2=\sqrt[3]{2} \quad = \quad x=\pm\sqrt[6]{2}$

bod: $\left[\pm\sqrt[6]{2};\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$

11.11. Fermatův princip nejkratšího času

(a) Odvoďte zákon odrazu





- zrcadlo: plocha $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$
- dráha mezi body a, b : $f(x) = \|x-a\| + \|x-b\|$
- stacionární bod funkce f za podmínky $g(x) = 0$
- Lagrangeova funkce: $L(x,\lambda) = \|x-a\| + \|x-b\| + \lambda g(x)$
- derivace: $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x} = \dfrac{x-a}{\|x-a\|} + \dfrac{x-b}{\|x-b\|} + \lambda \nabla g(x) = 0$
    - všechny tři vektory jsou v jedné rovině (LZ)
    - $\nabla g(x)$ půlí úhel mezi vektory $(x-a)$ a $(x-b)$
    - úhel odrazu je stejný jako úhel dopadu

11.16. Minimalizujte $x^T x$ za podmínky $a^T x = 1$

$$L(x,\lambda) = x^T x + \lambda(a^T x - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda a = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\lambda}{2} a$$

výpočet λ

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = a^T x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^T\left(-\frac{\lambda}{2} a\right) - 1 = 0$$

$$-\frac{\lambda}{2} a^T a = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{a^T a}$$

dosazení

$$\underline{\underline{x = \frac{a}{a^T a}}}$$

geometrický význam: hledání bodu na přímce $a^T x = 1$, který je nejblíže počátku ($x^T x$ - vzdálenost od počátku)