E9 – Popis lineárních systémů v časové a kmitočtové oblasti, princip a vlastnosti zpětné vazby, typy filtrů, základní aproximace modulových charakteristik filtrů – vlastnosti v kmitočtové a časové oblasti. (Elektronické obvody 1)

Více info v prezentacích na moodlu

https://moodle.fel.cvut.cz/pluginfile.php/206067/mod_resource/content/6/systemy.pdf

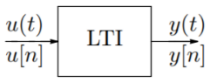
https://moodle.fel.cvut.cz/pluginfile.php/206077/mod_resource/content/6/filtry_prenosy.pdf

https://moodle.fel.cvut.cz/pluginfile.php/206086/mod_resource/content/4/filtry_synteza.pdf

https://moodle.fel.cvut.cz/pluginfile.php/206097/mod_resource/content/6/ZV.pdf

Systém

- Systém je abstrakce jakéhokoliv „zařízení“ transformujícího vstupní signál (y) na výstupní.



Obrázek 1.1: Symbolické znázornění systému s jedním vstupem a výstupem.

- Základní dělení systémů podle charakteru zpracovávaného signálu
  - spojité – pracují se signály spojitě v čase
  - diskrétní – pracují s diskrétními signály (v diskrétních časových okamžicích)
  - číslicové – pracují s čísly (konečným počtem úrovní = kvantovanými hodnotami signálu)

  Podle jeho vlastností:

  - lineární/nelineární
    - podle převodní charakteristiky, tj. závislosti velikosti výstupního signálu na velikosti signálu vstupního
  - časově invariantní
    - posunutý vstupní signál u(t − τ) generuje posunutý výstupní signál u(t − τ)
  - bez paměti/s pamětí.

Vlastnosti lineárních časově invariantních (LTI) systémů

- LINEARITA
  - Pokud se zvětší vstupní signál, tak se lineárně zvětší i signál výstupní

$$y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\} \Rightarrow ay(t) = \mathcal{S}\{au(t)\} = a\mathcal{S}$$

  - Platí princip superpozice: součet odezev na dílčí složky = celková odezva

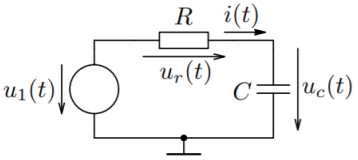
$$y(t) = \mathcal{S}\{au_1(t) + bu_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t) = a\mathcal{S}\{u_1(t)\} + b\mathcal{S}\{u_2(t)\}$$

- ČASOVÁ INVARIANCE
  - Vlastnosti systému se nemění s časem $y(t - t_0) = \mathcal{S}\{u(t - t_0)\}$

- „Povolené“ funkce LTI systému
  - Součet (rozdíl) signálů
  - Zesílení (zeslabení), tj. násobení signálu reálnou konstantou
  - „Paměť“ – integrace (derivace) signálu, resp. zpoždění (pro diskrétní systémy)
- „Nepovolené“ funkce LTI systému
  - Násobení, dělení signálů, aplikace nelineární funkce na signál (mocnina, odmocnina, logaritmus,….)

Popis LTI systémů v časové oblasti

Příklad popisu LTI dynamického systému (elektrického obvodu) v časové oblasti.



$$i(t) = \frac{u_r}{R} = \frac{u_1(t) - u_c(t)}{R} = C\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c(t) = u_1(t) \qquad (1.1)$$

Obrázek 1.2: Integrační RC článek a jeho popis v časové oblasti.

Pro stejnosměrné buzení $u_1(t) = U_1$ a při $u_c(0) = 0$, bude řešení rovnice

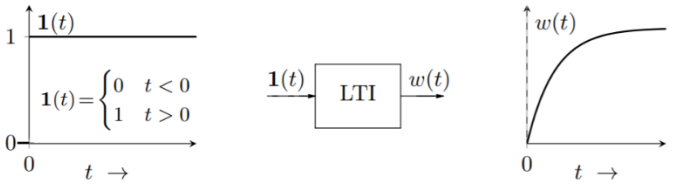
$$RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c(t) = U_1 \quad \Rightarrow \quad u_c(t) = U_1(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_{RC}}), \text{ kde } \tau_{RC} = RC$$

Ve stejnosměrném ustáleném stavu ($t \to 0$) bude $I = 0$ a $U_c = U_1$.

- **Přechodová charakteristika – odezva na jednotkový skok**
  - Pro jednotkový skok U_1 = **1**(t) ≡ Heaviside(t) je řešení rovnice (1.1)

$$w(t) = u_c(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_{RC}}, \quad t > 0,$$

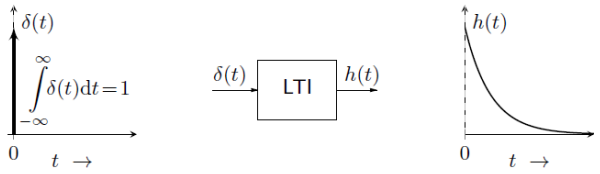
  které nazýváme přechodovou charakteristikou (pro nulové počáteční podmínky $u_c(0) = 0$).



Obrázek 1.3: Přechodová charakteristika LTI systému (1. řádu – integračního RC-článku)

- **Impulsní charakteristika – odezva na Diracův pulz**
  - Pro $u_1(t) = \delta(t)$ (Diracův puls) a při $u_c(0_-) = 0$, bude řešení rovnice (1.1)

$$h(t) = u_c(t) = \frac{1}{\tau_{RC}}\mathrm{e}^{-t/\tau_{RC}}, \quad t > 0$$



Obrázek 1.4: Impulzní charakteristika LTI systému (1. řádu – integračního RC-článku)

- Vztah mezi přechodovou a impulsní charakteristikou:

$$h(t) = \frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}, \quad w(t) = \int_{0_-}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- **Konvoluce**
  - Při znalosti impulsní odezvy h(t) lze pro vstupní signál u(t) určit výstupní signál y(t) pomocí konvolučního integrálu

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = u(t) * h(t)$$

  - Pro kauzální systém je navíc pro t < 0 ⇒ h(t) = 0 ⇒ stačí integrovat od 0

Popis LTI systémů v obrazové oblasti

- V HUS je derivace (integrál) nahrazen násobením (dělením) členem jω. Tzv. Laplaceova transformace transformuje derivaci časové funkce na násobení obrazu funkce operátorem s, tj. převádí lineární diferenciální rovnice na algebraické.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

- Na základě tohoto popisu je definován tzv. přenos LTI systému jako poměr Laplaceových obrazů výstupního a vstupního signálu při nulových počátečních podmínkách.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

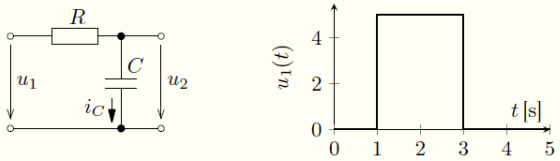
- Pokud známe obraz vstupního signálu a přenos, lze vypočítat obraz výstupního signálu Y(s) = U(s) · H(s). Časovou funkci pak dostaneme inverzní LT. Obraz Diracova pulzu je 1: L{δ(t)} = 1, z čehož vyplývá, že přenos je obraz impulsní charakteristiky h(t) = L{1 · H(s)} a je zřejmá jedna z velmi důležitých vlastnosti LT, tj. obraz konvoluce:

$$u(t) * h(t) \to U(s) \cdot H(s)$$

- Příklad

Příklad 1.1

Zadání: Vypočítejte časový průběh výstupního napětí a proud kapacitorem integračního RC článku dle obrázku, je-li vybuzen pulzem $u_1(t) = 5\big(\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-3)\big)$. Uvažujme následující hodnoty obvodových prvků: $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 1\,\mu\mathrm{F}$.



Rozvaha: Lze řešit pomocí dvou přechodových dějů (diferenciálními rovnicemi v časové oblasti první s nulovými a druhý s nenulovými počátečními podmínkami) nebo pomocí LT, či konvoluce se znalostí impulzní odezvy (1.2) a jejího obrazu (1.5).

Řešení pomocí LT:

$$u_1(t) = 5\big(\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-3)\big) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} U_1(s) = \frac{5}{s}(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-3s})$$

$$U_2(s) = U_1(s)H(s) = \frac{5(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-3s})}{s(1+s\tau_{RC})} = 5(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-3s})\left(\frac{1}{s} - \frac{CR}{CRs+1}\right)$$

$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\} = 5\big(\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-3)\big) - \\ -5\left(\mathbf{1}(t-1)\mathrm{e}^{\frac{1-t}{\tau_{CR}}} - \mathbf{1}(t-3)\mathrm{e}^{\frac{3-t}{\tau_{CR}}}\right)$$

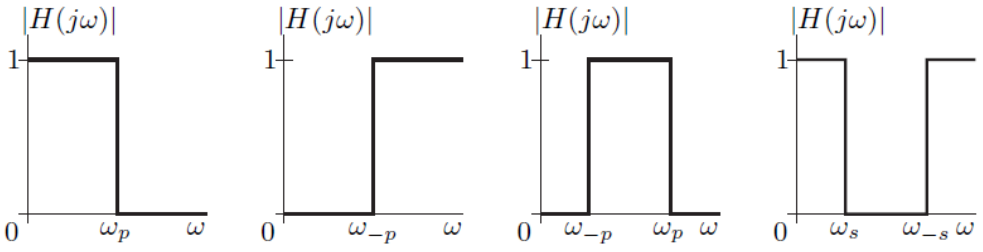
Řešení pomocí konvoluce:

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} 5\big(\mathbf{1}(\tau-1) - \mathbf{1}(\tau-3)\big)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t-\tau}{\tau_{CR}}}}{\tau_{CR}}\mathbf{1}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ 5 - 5\mathrm{e}^{\frac{-t+1}{\tau_{CR}}} & 1 < t \le 3 \\ 5\mathrm{e}^{\frac{-t+1}{\tau_{CR}}}\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{\tau_{RC}}} - 1\right) & 3 < t \end{cases}$$

což po zjednodušení vede na stejný, výše uvedený výsledek.

Kmitočtové filtry (typy, přenosové funkce)



(a) LP (b) HP (c) BP (d) BS

Obrázek 1.1: Ideální modulové charakteristiky základních typů filtrů

- Dolní propust (Lowpass – LP): propouští harmonické signály s kmitočty dolního pásma $\omega \in \langle 0, \omega_p)$ a naopak signály s kmitočty horního pásma potlačuje,
- horní propust (Highpass HP): propouští harmonické signály s kmitočty horního pásma $\omega > \omega_{-p}$ a naopak signály s kmitočty dolního pásma potlačuje,
- pásmová propust (Bandpass – BP): propouští pouze harmonické signály s kmitočty určeného pásma $\omega \in (\omega_{-p}, \omega_p)$ a signály ostatních kmitočtů potlačuje a
- pásmová zádrž (Band-stop – BS): propouští pouze harmonické signály s kmitočty $\omega \in \langle 0, \omega_p) \wedge \omega > \omega_{-p}$ a signály kmitočtů $\omega \in (\omega_{-p}, \omega_p)$ potlačuje.

- Přenosová funkce filtru
  - Přenosová funkce filtru je racionálně lomená funkce proměnné s (Laplaceova operátoru).

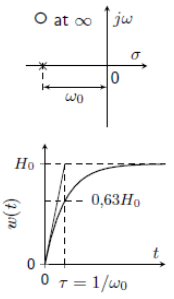
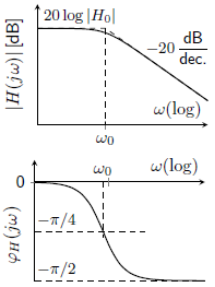
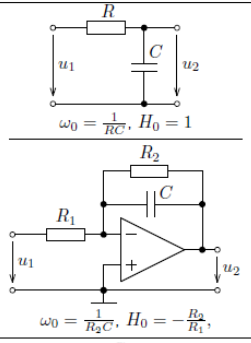
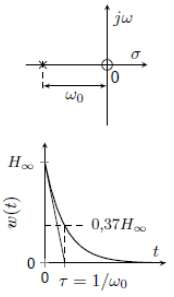
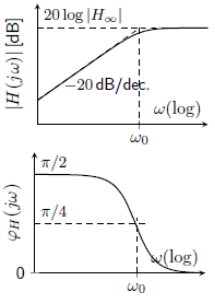
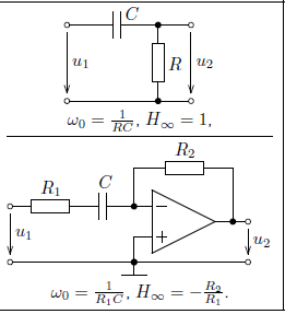
$$H(s) = \frac{s^M + a_{M-1}s^{M-1} + \cdots + a_0}{b_N s^N + b_{N-1}s^{N-1} + \cdots + b_0} = H_C \frac{(s - s_{n_1})(s - s_{n_2}) \cdots (s - s_{n_M})}{(s - s_{p_1})(s - s_{p_2}) \cdots (s - s_{p_N})}$$

kde s_{p_k} se nazývají póly a s_{n_l} nuly přenosové funkce.

  - Póly a nuly jsou velmi důležité parametry filtru, které udávají celkové chování systému jak v časové, tak kmitočtové oblasti. Neudávají pouze posun modulové charakteristiky (zisk/utlum) $H_0 = H(0)$, které je dané konstantou

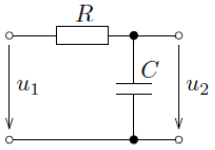
$$H_C = H_0 \frac{\prod_{l=1}^{N} -s_{p_l}}{\prod_{k=1}^{M} -s_{n_k}}$$

  - Pro přenosovou funkci filtru musí dále platit M ≤ N.
  - Na charakter (tj. i stabilitu) systému mají vliv pouze póly přenosové funkce. Nuly (společně s póly) přenosové funkce mají vliv na kmitočtovou charakteristiku systému H(jω).
- Přenosové funkce 1. řádu + charakteristika (LP, HP)

Transfer function	Poles, Zeros, Unit step response	Module and phase frequency response	Passive and active circuit realization
Low pass (LP_1) $H(s) = \frac{H_0\omega_0}{s+\omega_0}$ $\omega_0 > 0,\ H_\infty = 0$			
High pass (HP_1) $H(s) = \frac{H_\infty s}{s+\omega_0}$ $\omega_0 > 0,\ H_0 = 0$			

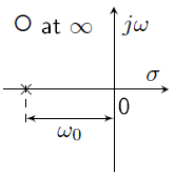
Základní aproximace modulových charakteristik filtrů

- Elementární realizace LP – integrační RC článek



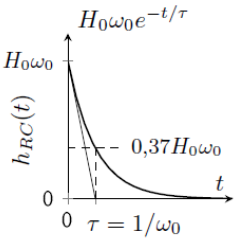
$$H_{RC}(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{H_0\omega_0}{s+\omega_0}$$

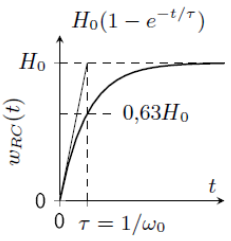
$$H_0 = 1, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{RC}$$



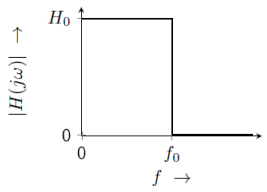
Vlastnosti v časové oblasti

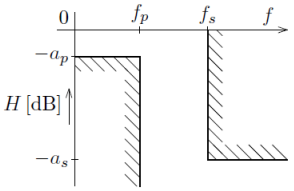
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot 1\}$$
$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)/s\}$$
$$h(t) = \frac{dw(t)}{dt}$$
$$w(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau.$$





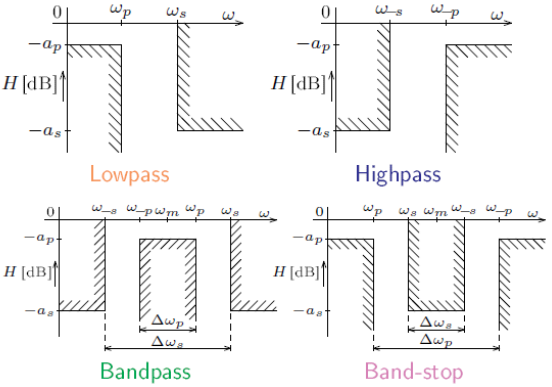
- Toleranční schémata



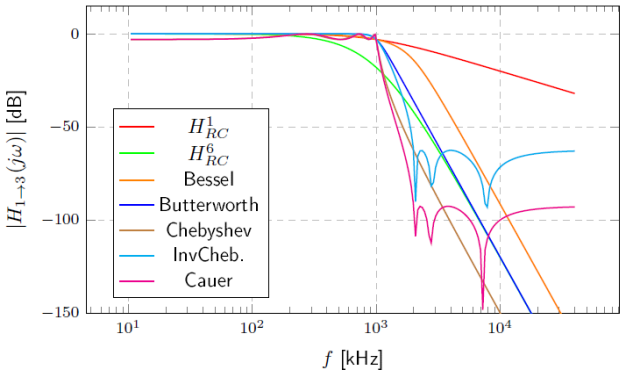


Ideální LP filtr ($f_p = f_s = f_0$)
propustné pásmo $\equiv \langle 0, f_0 \rangle$, $|H| = H_0$,
přechodové pásmo $\equiv 0$,
nepropustné pásmo $\equiv \langle f_0, \infty \rangle$, $|H| = 0$

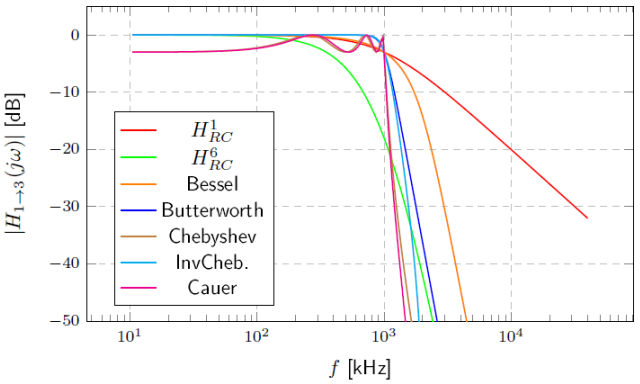
Reálný LP filtr
propustné pásmo $\equiv \langle 0, f_p \rangle$, $|H| = \langle H_0, H_0 - a_p \rangle$,
přechodové pásmo $\equiv (f_p, f_s)$,
nepropustné pásmo $\equiv \langle f_s, \infty \rangle$, $|H| < H_0 - a_s$



- Butterworth
  - Maximálně plochá modulová charakteristika
  - V propustném pásmu plynulá změna fáze s frekvencí, skupinové zpoždění (derivace fáze podle frekvence) bez zvlnění.
- Čebyšev
  - SS aproximace modulové charakteristiky v propustném pásmu
  - Nejméně tlumené filtry
  - Nejstrmější boky za cenu zvlnění amplitudové charakteristiky v propustném pásmu.
  - Inverzní Čebyšev
    - SS aproximace modulové charakteristiky v nepropustném pásmu
- Cauer
  - SS aproximace modulové charakteristiky v propustném i nepropustném pásmu
- Bessel
  - Amplitudová charakteristika v propustném pásmu velmi plochá.
  - Nejvíce tlumené filtry.



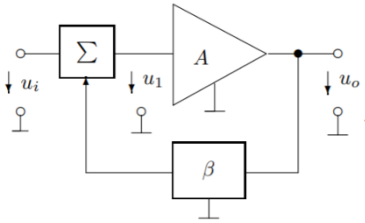
Detail



- Vlastnosti v časové oblasti – impulsní + přechodová charakteristika

Princip a vlastnosti zpětné vazby

- **Zpětnou vazbou** se rozumí uzavřená cesta (smyčka) z výstupu některého z modulů, na vstup téhož nebo jiného z modulů soustavy.

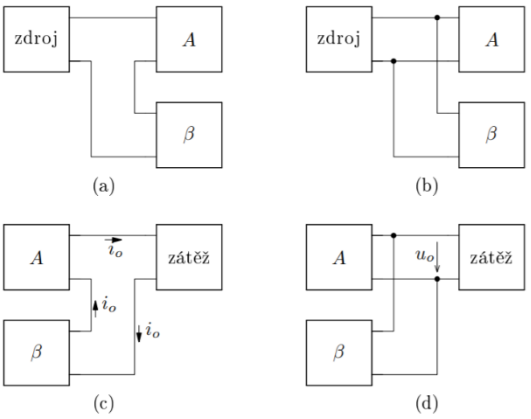


$$u_o = Au_1, \quad u_1 = u_i + \beta u_o \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_o = A(u_i + \beta u_o) = \frac{A}{1 - \beta A} u_i =$$
$$= \frac{A}{F} u_i = A' u_i$$

Obrázek 3.1: Princip zapojení systému se ZV

kde β je přenos zpětnovazební větve, tzv. **činitel ZV**,
A je přenos zesilovací větve (aktivního prvku) resp. *zesílení bez ZV*,
A' je přenos ZV soustavy,
βA je **přenos otevřené ZV smyčky**,
F je tzv. **vratný rozdíl**.

- Klasifikace ZV
  - Podle zapojení



Obrázek 3.3: Rozdělení ZV podle zapojení slučovacího obvodu – (a) sériová, (b) paralelní a podle zapojení rozdělovacího obvodu – (c) proudová a (d) napěťová ZV.

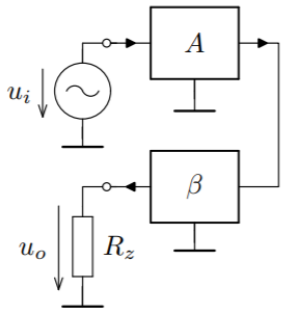
  - **Podle velikosti vratného rozdílu**

V zjednodušeném případě je přenos $b \doteq 1$ a $a \doteq 0$. Potom za předpokladu čistě reálného součinu βA (odporové sítě), můžeme rozdělit ZV podle velikosti vratného rozdílu takto:

1. $\beta A < 0$ $(F > 1)$ $\Rightarrow$ $|A'| < |A|$ ... ZZV
2. $\beta A = 0$ $(F = 1)$ $\Rightarrow$ $|A'| = |A|$ ... obvod bez vazby
3. $0 < \beta A < 1$ $(1 > F > 0)$ $\Rightarrow$ $|A'| > |A|$ ... KZV, obvod je stabilní
4. $\beta A = 1$ $(F = 0)$ $\Rightarrow$ $|A'| \to \infty$ ... KZV, obvod kmitá (využití v oscilátorech)
5. $\beta A > 1$ $(F < 0)$ $\Rightarrow$ A' obrátilo fázi a jeho modul může být větší i menší než $|A|$ (využití v oscilátorech). Tento stav *nelze v elektronických obvodech realizovat*, protože při $U_N = 0$, resp. konstanta je $A = 0$, resp. konstanta. Při zapnutí přístroje narůstá zesílení až do stavu $\beta A = 0$, kdy se obvod rozkmitá a amplitudy kmitů narostou tak, že se obvod bude chovat nelineárně.

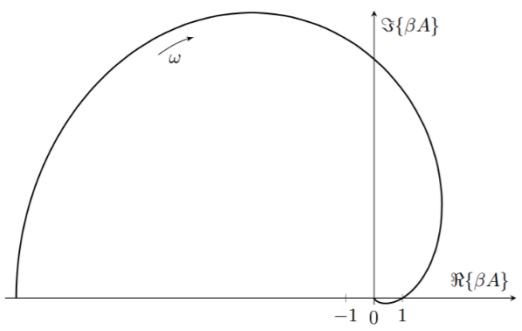
Toto rozdělení platí i pro ss. zesilovače až do kmitočtu $0{,}1 f_h$ (horního mezního) a pro st. zesilovače uvnitř SKP.

- Stabilita ZV soustav
  - Stabilitou zpětnovazebních soustav je nutné se zabývat, jestliže přenos zpětnovazební smyčky je řádu n = 3 a vyššího, tj. obsahuje-li např. 3 póly přenosu. Stabilitu pak vyšetřujeme na základě přenosu otevřené ZV smyčky podle Nyquistova kritéria.
  - Zatěžovací odpor Rz je nutné určit podle zapojení slučovacího členu, vstupního odporu zesilovače a charakteru budicího zdroje tak, aby zatížení zpětnovazebního členu bylo stejné jako před rozpojením ZV smyčky.

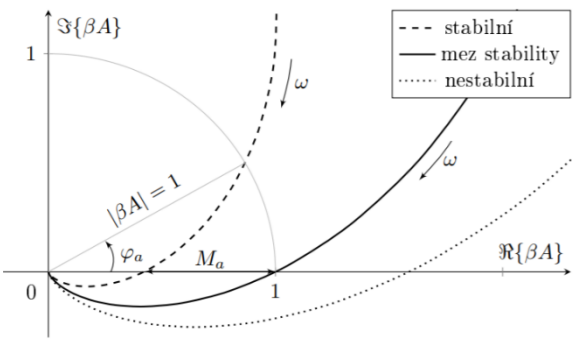


Obrázek 3.11: Určení přenosu rozpojené ZV smyčky.

  - **Kmitočtová charakteristika přenosu rozpojené ZV smyčky βA v komplexní rovině nesmí pro stabilní systém obepínat bod 1 na reálné ose.**



Obrázek 3.12: Příklad kmitočtové charakteristiky přenosu rozpojené ZV smyčky v komplexní rovině.



Obrázek 3.13: Deatail charakteristik z obrázku 3.12.