8.1. Načrtněte několik vrstevnic

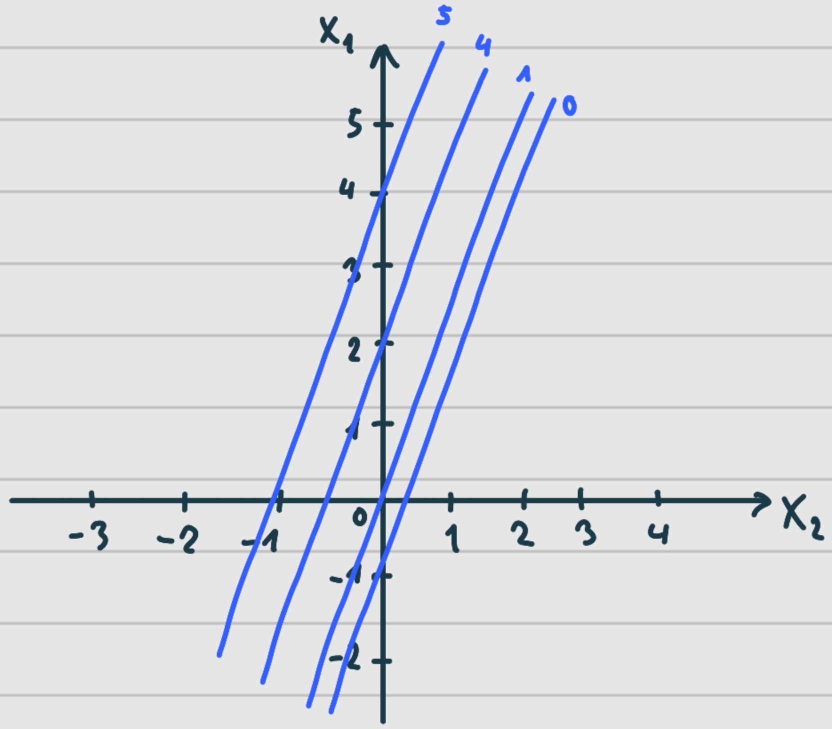
(b) $f(x_1,x_2) = x_1 - 3x_2 + 1$

$\left.\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 1 = 0 \\ x_1 = 3x_2 - 1 \end{array}\right\}$ výška 0

$\left.\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 1 = 1 \\ x_1 = 3x_2 \end{array}\right\}$ výška 1

$\left.\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 1 = 3 \\ x_1 = 3x_2 + 2 \end{array}\right\}$ výška 3

$\left.\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 1 = 5 \\ x_1 = 3x_2 + 4 \end{array}\right\}$ výška 5



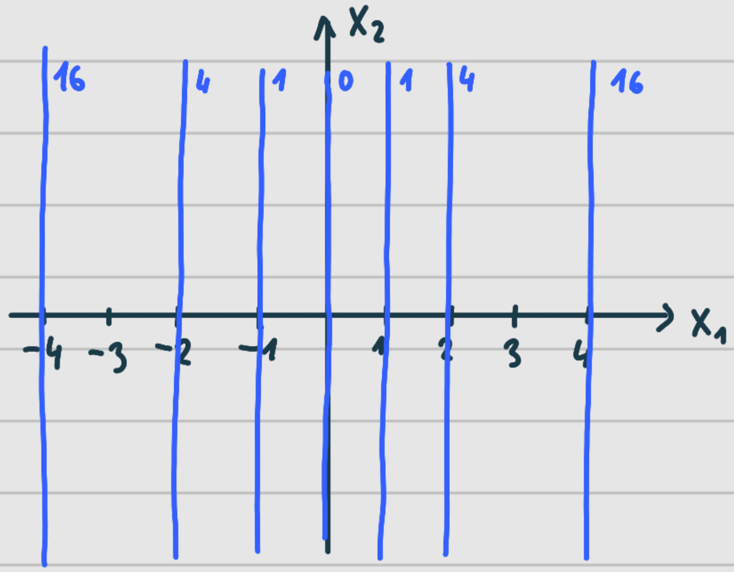
(c) $f(x_1,x_2) = x_1^2$

$\left.\begin{array}{l} x_1^2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array}\right\}$ výška 0

$\left.\begin{array}{l} x_1^2 = 1 \\ x_1 = \pm 1 \end{array}\right\}$ výška 1

$\left.\begin{array}{l} x_1^2 = 4 \\ x_1 = \pm 2 \end{array}\right\}$ výška 4

$\left.\begin{array}{l} x_1^2 = 16 \\ x_1 = \pm 4 \end{array}\right\}$ výška 16



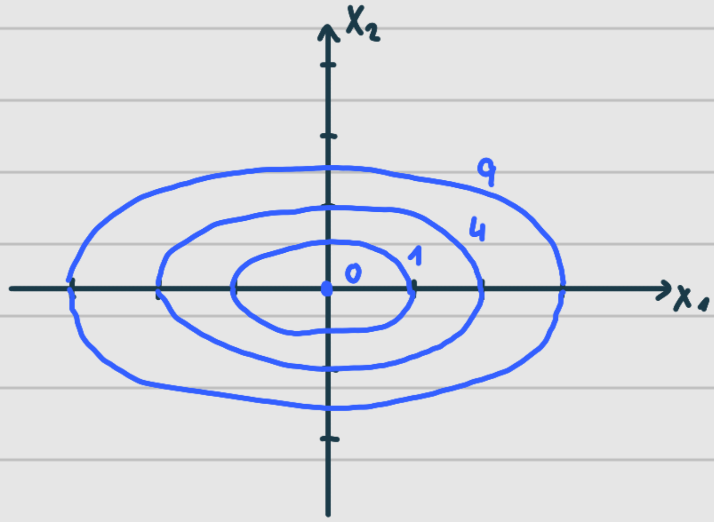
(d) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$

$x_1^2 + 4x_2^2 = 0 \}$ výška 0

$x_1^2 + 4x_2^2 = 1 \}$ výška 1

$x_1^2 + 4x_2^2 = 4 \}$ výška 4

$x_1^2 + 4x_2^2 = 9 \}$ výška 9



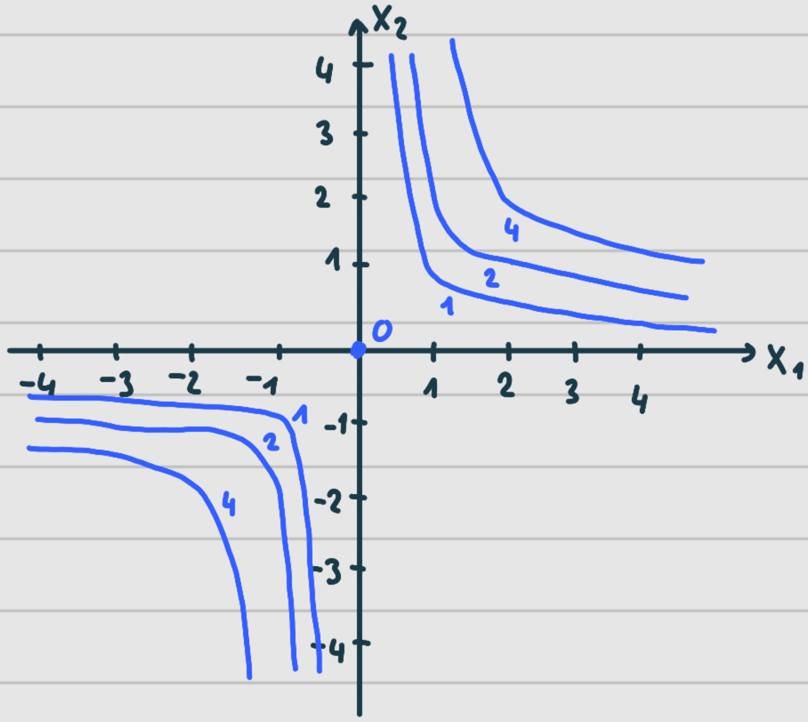
(f) $f(x_1,x_2) = x_1 x_2$

$x_1 x_2 = 0 \ \}$ výška 0

$\left.\begin{array}{l} x_1 x_2 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{x_1} \end{array}\right\}$ výška 1

$\left.\begin{array}{l} x_1 x_2 = 2 \\ x_2 = \frac{2}{x_1} \end{array}\right\}$ výška 2

$\left.\begin{array}{l} x_1 x_2 = 4 \\ x_2 = \frac{4}{x_1} \end{array}\right\}$ výška 4



8.3. Máme funkci $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s hodnotami $f(x,y) = \ln(1+xy)$. Máme bod $(x_0,y_0) = (1,2)$

(d) Najděte totální derivaci (Jacobiho matici) $f'(x,y)$ v bode (x_0,y_0)

$$f'(x,y) = \left[\frac{y}{1+xy}, \frac{x}{1+xy}\right]$$

$$f'(x_0,y_0) = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

(g) Najděte Hessovu matici

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{y^2}{(1+xy)^2} & \frac{1}{(1+xy)^2} \\ \frac{1}{(1+xy)^2} & -\frac{x^2}{(1+xy)^2} \end{bmatrix}$$

$$f''(x_0 y_0) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

8.10. Nadmořská výška krajiny je daná vzorcem $h(d,s) = 2s^2 + 3sd - d^2 + 5$

d - zeměpisná délka

s - zeměpisná šířka

V bodě $(d,s) = (-1,1)$ určete

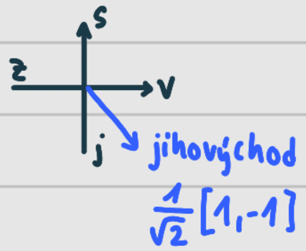
(a) směr nejstrmějšího stoupání terénu

$$\nabla f(d,s) = [3s - 2d, 4s + 3d]$$

$$\nabla f(d,s) = [3+2, 4-3] = [5,1] \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{26}}[5,1]$$

jednotkový vektor

(b) strmost terénu v jihovýchodním směru



$$[5,1]\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\frac{4}{\sqrt{2}}$$

8.13. Je dána funkce $f(x,y)=6xy^2-2x^3-3y^3$ v bodě $(x_0y_0)=(1,-2)$

Najděte Taylorův polynom nultého, prvního a druhého stupně

$$f(1,-2)=24-2+24=46$$

$$f'(x,y)=[6y^2-6x^2,\,12xy-9y^2] \qquad f'(1,-2)=[18,-60]$$

$$f''(x,y)=\begin{bmatrix}-12x & 12y\\ 12y & 12x-18y\end{bmatrix} \qquad f''(1,-2)=\begin{bmatrix}-12 & -36\\ -36 & 66\end{bmatrix}$$

$$T^0_{(1,-2)}(x,y)=f(1,-2)=46$$

$$T^1_{(1,-2)}(x,y)=f(1,-2)+\frac{f'(1,-2)}{1!}\begin{bmatrix}x-1\\y+2\end{bmatrix}=48+[18,-60]\cdot\begin{bmatrix}x-1\\x+2\end{bmatrix}=46+18x-18-60y-120$$

$$=18x-60y-92$$

$$T^2_{(1,-2)}(x,y)=f(1,-2)+\frac{f'(1,-2)}{1!}\begin{bmatrix}x-1\\y+2\end{bmatrix}+[x-1,\,y+2]\frac{f''(1,-2)}{2!}\begin{bmatrix}x-1\\y+2\end{bmatrix}=$$

$$18x-60y-92+[x-1,\,y+2]\begin{bmatrix}-12 & -36\\ -36 & 66\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-1\\y+2\end{bmatrix}=-6x^2-24xy-18x+24y^2+60y+46$$

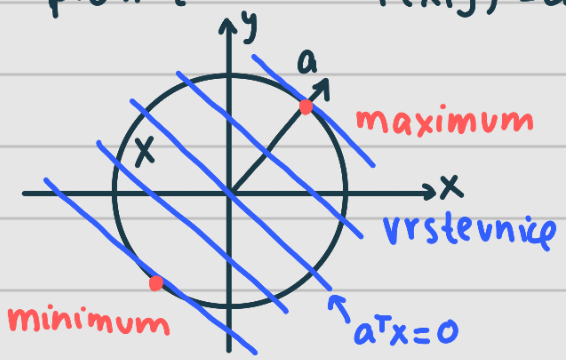
9.7.

(a) najděte extrémy funkce $f(x)=a^Tx$

(c) $\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leq 1\}$

↳ množina: hyperkoule

pro $n=2$ $\qquad f(x,y)=a_1x+a_2y$



maximum je v bodě $\frac{a}{\|a\|}$

minimum je v bodě $-\frac{a}{\|a\|}$