Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (09.02.2023)

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 01

Body

	vstupní test					početní část					Σ
Úloha	1	2	3	4	Σ_1	1	2	3	4	Σ_2	
Body											

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé proveďte na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.**

Soupis vybraných vzorců

Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.

Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.

Fourierova transformace

- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a} \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Pro $a \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{F}\left[e^{iat} f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
- Pro $0 \neq a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Laplaceova transformace

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $a > 0$ kladné reálné platí $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
- Pro $a > 0$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.

$\mathscr{Z}$-transformace

- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$. Speciálně $\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}\left[\sin(\alpha n)\right](z) = \frac{z \sin\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}\left[\cos(\alpha n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.
- Pro $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$: $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Početní část

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, **hodnotí se to nejhorší z nich.**

Úloha 1 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{(z-i)^4}{(2-i+z)^2}$$

do mocninné řady na maximálním okolí bodu $z_0 = i$ a určete parametry tohoto okolí.

(b) Mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-6)^n$$

má poloměr konvergence $R = 3$. Konverguje tato mocninná řada v bodě $z = 4$?

Úloha 2 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{e^{iz} - i - \cos z}{(1-\sin z)(z-\frac{\pi}{2})}.$$

(b) Určete $a \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby platilo

$$\operatorname{res}_i \left((z-i) + \frac{3}{z-i} + \frac{4}{(z-i)^4} + \frac{a}{(z-i)^k} \right) = 5.$$

Úloha 3 ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují)**.**

(a) Najděte inverzní Z-transformaci $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ funkce

$$F(z) = \frac{z-2i}{z^4+8z^2+16}.$$

(b) Určete Z-transformaci posloupnosti

$$\left(\left(n \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+2) \right) \right) * (-i)^n \right)_{n=0}^{\infty}.$$

(c) Určete c_2 a c_3 posloupnosti

$$(c_n)_{n=0}^{\infty} = (2^n)_{n=0}^{\infty} * (n^3)_{n=0}^{\infty}.$$

Úloha 4 ([10 bodů])**.** Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{-t}\mathbb{1}(t).$$

[Nápověda: Využijte skutečnosti, že $\mathscr{F}\left[e^{-t}\mathbb{1}(t)\right](\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$.]

1) a) $f(z) = \frac{(z-i)^4}{(2-i+z)^2} = (z-i)^4 \frac{1}{(2-i+z)^2}$

- $\frac{1}{2-i+z} = \frac{1}{2+(z-i)} = \frac{1}{2-(-(z-i))} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\left(\frac{-(z-i)}{2}\right)}$

$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-(z-i)}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-i)^n$

- $\left(\frac{1}{2-i+z}\right)' = -\frac{1}{(2-i+z)^2}$

- $\frac{1}{(2-i+z)^2} = -\left(\frac{1}{2-i+z}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} n (z-i)^{n-1}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} n (z-i)^{n-1}$

- $f(z) = (z-i)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} n (z-i)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} n (z-i)^{n+3}$ za $|z-i|<2$, $z \in U(i;2)$

$\left|\frac{-(z-i)}{2}\right| < 1 \iff |z-i| < 2$

b) $|4-6| = 2 < 3$

Ano, konverguje.

2) a) $1-\sin z=0 \Leftrightarrow \sin z=1 \Leftrightarrow z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ pro $k\in\mathbb{Z}$

· Izolované singularity jsou body $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

· $\left(e^{iz}-i-\cos z\right)\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = i-i-0=0$

$\left(e^{iz}-i-\cos z\right)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = ie^{iz}+\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = -1+1=0$

$\left(e^{iz}-i-\cos z\right)''\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = -e^{iz}+\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = -i+0\neq 0$

· Body $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, jsou 2-násobné kořeny čitatele.

$(1-\sin z)(z-\frac{\pi}{2})\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = 0$

$\left[(1-\sin z)(z-\frac{\pi}{2})\right]'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = (-\cos z)(z-\frac{\pi}{2})+1-\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = 0+1-1=0$

$\left[(1-\sin z)(z-\frac{\pi}{2})\right]''\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = (\sin z)(z-\frac{\pi}{2})-\cos z-\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = 2k\pi-0-0$

$=2k\pi$

· Pokud $k\neq 0$, jsou body $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 2-násobné kořeny jmenovatele.

Pro $k\neq 0$ jsou tedy body $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ odstranitelné singularity.

- Pro $k=0$, tj. $z=\frac{\pi}{2}$, je $\left[(1-\sin z)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\right]''=0$.

$$\left[(1-\sin z)\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right]'''\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = (\cos z)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)+\sin z+\sin z+\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0+1+1+1\neq 0$$

- Bod $\frac{\pi}{2}$ je tedy 3-násobný kořen jmenovatele.
- Bod $\frac{\pi}{2}$ je pól řádu $3-2=1$.

b) Zvolíme-li $k=1$ platí

$$\operatorname{rez}_i\left((z-i)+\frac{3}{(z-i)}+\frac{4}{(z-i)^4}+\frac{a}{(z-i)}\right)=3+a,$$ tedy $a=2$

3) a) $z^4+8z^2+16 = (z^2+4)^2 = (z-2i)^2(z+2i)^2$

$$F(z) = \frac{1}{(z-2i)(z+2i)^2} \quad | \quad z \in U(\infty)$$

$$a_n = \operatorname{res}_{2i} \frac{z^{n-1}}{(z-2i)(z+2i)^2} + \operatorname{res}_{-2i} \frac{z^{n-1}}{(z-2i)(z+2i)^2} \quad | \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\cdot \operatorname{res}_{2i} \frac{z^{n-1}}{(z-2i)(z+2i)^2} = \frac{(2i)^{n-1}}{(4i)^2} = -\frac{(2i)^{n-1}}{16}$$

$$\cdot \operatorname{res}_{-2i} \frac{z^{n-1}}{(z-2i)(z+2i)^2} \overset{\text{pol 2. řádu}}{=} \lim_{z \to -2i} \left(\frac{z^{n-1}}{(z-2i)} \right)' = \lim_{z \to -2i} \frac{(n-1)z^{n-2}(z-2i) - z^{n-1}}{(z-2i)^2}$$

$$= \frac{-4i(n-1)(-2i)^{n-2} - (-2i)^{n-1}}{-16} =$$

$$= \frac{1-2(n-1)}{16}(-2i)^{n-1}$$

$$a_n = -\frac{(2i)^{n-1}}{16} + \frac{1-2(n-1)}{16}(-2i)^{n-1} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

$$a_0 = \lim_{z \to \infty} F(z) = 0$$

b) $\mathcal{Z}\left[(n\cos(\frac{\pi}{2}(n+2))) * (-i)^n \right](z) = \mathcal{Z}\left[n\cos(\frac{\pi}{2}(n+2)) \right](z) \cdot \frac{z}{z+i}$

$$\cdot \mathcal{Z}\left[n\cos(\tfrac{\pi}{2}(n+2)) \right](z) = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\left[\cos(\tfrac{\pi}{2}(n+2)) \right](z)$$

$$\cdot \mathcal{Z}\left[\cos(\tfrac{\pi}{2}(n+2)) \right](z) = z^2\frac{z^2}{z^2+1} - 1 \cdot z^2 - 0 \cdot z = \frac{z^4 - z^4 - z^2}{z^2+1} = -\frac{z^2}{z^2+1}$$

$$\cdot \mathcal{Z}\left[n\cos(\tfrac{\pi}{2}(n+2)) \right](z) = -z\left(-\frac{z^2}{z^2+1}\right)' = z\,\frac{2z(z^2+1) - 2zz^2}{(z^2+1)^2} = \frac{2z^2}{(z^2+1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left[(n\cos(\tfrac{\pi}{2}(n+2))) * (-i)^n \right](z) = \frac{2z^3}{(z^2+1)^2(z+i)}$$

c) $c_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k (n-k)^3$

$c_2 = \sum_{k=0}^{2} 2^k (2-k)^3 = 8 + 2 + 0 = 10$

$c_3 = \sum_{k=0}^{3} 2^k (3-k)^3 = 27 + 16 + 4 + 0 = 47$

4) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-t}\,1(t)$

$-\omega^2 \hat{y}(\omega) + 4i\omega \hat{y}(\omega) + 4\hat{y}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$

$-(\omega^2 + 4i\omega - 4)\hat{y}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$ $\qquad \omega^2 + 4i\omega - 4 = (\omega + 2i)^2$

$\hat{y}(\omega) = -\frac{1}{(1+i\omega)(\omega+2i)^2}$

$y(t) = -\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(1+i\omega)(\omega+2i)^2}\right](t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)(\omega+2i)^2}\,d\omega$

$t \geq 0$:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)(\omega+2i)^2}\,d\omega = 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{e^{izt}}{(1+iz)(z+2i)^2} = 2\pi i \left.\frac{e^{-t}}{i \cdot (3i)^2}\right|_{z=i}$

$= 2\pi i \frac{e^{-t}}{-9i} = -\frac{2\pi}{9} e^{-t}$

$t < 0$:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)(\omega+2i)^2} = -2\pi i \operatorname{res}_{-2i} \frac{e^{izt}}{(1+iz)(z+2i)^2}$

$\operatorname{res}_{-2i} \frac{e^{izt}}{(1+iz)(z+2i)^2} \overset{\text{pro 2. řád}}{=} \lim_{z\to -2i} \left(\frac{e^{izt}}{1+iz}\right)' = \lim_{z\to -2i} \frac{it e^{izt}(1+iz) - ie^{izt}}{(1+iz)^2} =$

$= \frac{it e^{2t}(1+2) - ie^{2t}}{3^2} = i\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{2t}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)(\omega+2i)^2}\,d\omega = 2\pi\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{2t}$

Celkem:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{9}e^{-t} \ldots t \geq 0 \\ \left(\frac{1}{9} - \frac{t}{3}\right)e^{2t} \ldots t < 0 \end{cases}$$