Fyzika II

Vlny

- Vlnová (izomorfní) rovnice pro vlny na tenké struně (1D) $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$
    - Rychlost šíření vlny na struně vyjádřena pomocí napětí T $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$
- Obecné řešení vlnové rovnice (d'Alembertovo řešení)

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \qquad u(x,t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + G\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

- d'Alembertovo řešení pro počáteční podmínky

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[U(x-ct) - \frac{1}{c}W(x-ct) + U(x+ct) + \frac{1}{c}W(x+ct)\right]$$

- Jednorozměrná harmonická vlna $u(x,t) = A\cos\left[k(x-ct)+\delta\right]$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad T = \frac{2\pi}{kc} = \frac{\lambda}{c} \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{kc}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = kc$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

$$u(x,t) = A\cos\left(kx - \omega t + \delta\right)$$

$$\omega = -\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}, \qquad k = \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}$$

- Jednorozměrná harmonická vlna v komplexním tvaru

$$\hat{u}(x,t) = Ae^{\mathrm{j}(kx - \omega t + \delta)} = \hat{A}e^{\mathrm{j}(kx - \omega t)}$$

- Fázová rychlost

$$c_F = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c \qquad c_F = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$c_F = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

- Třírozměrná vlnová rovnice (vektorové rovnice níže lze vyjádřit i skalárně)

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} \qquad \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t)e^{\mathrm{j}\varphi(\mathbf{r},t)}$$

- Kruhový kmitočet, vlnový vektor

$$\omega = -\frac{\partial \varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t} \;, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\nabla}\varphi(\mathbf{r},t)$$

- Rovinná harmonická vlna

$$\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{r},t) = \hat{\mathbf{A}} e^{\mathrm{j}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \qquad \mathbf{u}(\boldsymbol{r},t) = \mathbf{A}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \delta)$$

- Jednorozměrná rovinná harmonická vlna

$$s = \boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r} \qquad \hat{u}(s,t) = \hat{A}e^{\mathrm{j}(ks-\omega t)} \qquad \frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial s^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial t^2}$$

Výraz	Příklad
$\frac{\partial}{\partial t} \to -\mathrm{j}\omega$	$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathrm{j}\omega f$
$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \to -\omega^2$	$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$
$\frac{\partial}{\partial x_i} \to \mathrm{j}k_i$	$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \mathrm{j}k_i f$
$\boldsymbol{\nabla} \to \mathrm{j}\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{\nabla} f = \mathrm{j}\boldsymbol{k}f$
$\boldsymbol{\nabla}\cdot \to \mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot$	$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{\nabla}\times \to \mathrm{j}\boldsymbol{k}\times$	$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \mathrm{j}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}$
$\nabla^2 \to -k^2$	$\nabla^2 f = -k^2 f$

- Kulové vlny

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \qquad \frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2}$$

- d’Alembertovo řešení kulové vlny

$$u(r,t) = \frac{f(r-ct)}{r} + \frac{g(r+ct)}{r}$$

- Dopplerův jev

$$\omega_P = \omega\left(1 - \frac{\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{v}_P}{c}\right) \qquad \omega_P = \frac{\omega}{1-\frac{\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{v}_Z}{c}} \qquad \omega_P = \omega\frac{c-\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{v}_P}{c-\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{v}_Z}$$

- Relativistický Dopplerův jev $\omega_P \equiv \omega' = \gamma\omega\left(1 - \frac{\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{v}_P}{c}\right)$ $\omega_P = \omega\sqrt{\frac{1+\frac{v_P}{c_0}}{1-\frac{v_P}{c_0}}}$
- Vlny v disperzním prostředí $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$
  - Disperzní rovnice $k^2c^2 + \alpha k^4 c^2 - \omega^2 = 0$
    - Obecný zápis $D(\omega, k) = 0$
  - Disperzní relace $\omega = \omega(k)$ $k = k(\omega)$

$$u(x,t) = a\left(t - \frac{x}{c_{g0}}\right)\cos(k_0 x - \omega_0 t + \phi)$$

  - Fázová rychlost pro disperzní prostředí

$$c_F(k) \equiv v_F(k) = \frac{\omega(k)}{k} \qquad c_F(\omega) \equiv v_F(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)}$$

  - Grupová rychlost pro disperzní prostředí

$$c_g \equiv v_g = \frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k} \qquad c_g \equiv v_g = \left[\frac{\mathrm{d}k(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right]^{-1}$$

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}(c_F k)}{\mathrm{d}k} = c_F + k\frac{\mathrm{d}c_F}{\mathrm{d}k}$$

  - Normální disperze $c_g < c_F$
  - Anomální disperze $c_g > c_F$
- Akustické vlny v ideálním plynu
  - Vychází se ze soustavy tří rovnic

1. Eulerova pohybová rovnice pro ideální tekutiny

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}\right] = -\boldsymbol{\nabla}P + \boldsymbol{\mathcal{F}}\ .$$

2. Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0\ .$$

3. Stavová rovnice

$$P = P(\rho)\ .$$

- Vlnová rovnice pro akustickou rychlost $\nabla^2 \mathbf{v} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}$
- Vlnová rovnice pro akustický tlak $\nabla^2 p' = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}$
- Rychlost akustické vlny $c_0 = \sqrt{R'\gamma T_0}$ $\quad c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$
- Hladina akustického tlaku $L_p = 20 \log \frac{p'}{p_r} \quad (\mathrm{dB})$
- Referenční tlak $p_r = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pa}$

- Elektromagnetické vlny (příčné vlnění)
  - Odvození elektrické intenzity pro nevodivé prostředí (dielektrikum)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad -\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

  - Rychlost šíření elektromagnetické vlny v daném prostředí / ve vakuu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

  - Index lomu

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r}}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \geq 1$$

  - Odvození magnetické indukce pro nevodivé prostředí (dielektrikum)

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2 \boldsymbol{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})}{\partial t}$$

$$-\nabla^2 \boldsymbol{B} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

- Telegrafní rovnice pro dobrý vodič $$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu\gamma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \qquad \frac{k}{\omega}E_0 = B_0$$ $$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \mu\gamma\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \qquad E_0 = cB_0$$
- Poyntingův vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{E}(\mathbf{r},t) \times \boldsymbol{H}(\mathbf{r},t)$
- Intenzita světla vyjádřena střední hodnotou

$$I = \langle|\mathbf{S}(\mathbf{r},t)|\rangle \qquad I = \left\langle \frac{E_0 H_0}{2}\cos[2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta)] + \frac{E_0 H_0}{2} \right\rangle = \frac{E_0 H_0}{2}$$

$$I = \frac{E_0^2}{2Z} \qquad I = \frac{|\hat{\mathbf{E}}|^2}{2Z} = \frac{\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{E}}^*}{2Z} \equiv \frac{\langle\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{E}}^*\rangle}{2Z}$$

  - Charakteristická impedance prostředí $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

- Intenzita světla pro vodivé homogenní izotropní prostředí $$I = \frac{E_0^2 e^{-2\beta s}}{2Z}$$
  - Se vzdáleností dochází k exponenciálnímu útlumu amplitudy
  - Absorpční koeficient $a = 2\beta$
  - Lambertův-Beerův zákon $I = I_0 e^{-as}$ $\quad I_0 = \frac{E_0^2}{2Z}$
- (w – objemová hustota energie $\boxed{\downarrow}$)
- Zákon zachování elektromagnetické energie (Poyntingova bilanční rovnice)

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S} \qquad -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V w\,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + \oiint_{A(V)} \mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}$$

- Poyntingova věta

Zákon zachování energie elektromagnetického pole v integrálním tvaru (Poyntingova věta)) nám říká: *Zásoba elektromagnetické energie v objemu V se zmenšuje jednak o mechanickou práci vykonanou elektrickými silami uvnitř objemu V ze jednotku času a jednak o elektromagnetickou energii vyzářenou za jednotku času z oblasti V do vnějšího prostoru plochou A, která ho obklopuje.*

- Zářivý tok $\Phi_e = \iint_A \mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}$
- Polarizace rovinné harmonické elektromagnetické vlny
  - Rovnice polarizační elipsy $$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{E_{0x}E_{0y}}\cos\Delta = \sin^2\Delta$$

$$\xi_m = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos\Delta\right)$$

Díváme-li se proti směru šíření vyšetřované elektromagnetické vlny (tedy z kladného konce osy z směrem ke konci zápornému), může se vektor $\boldsymbol{E}$ otáčet ve směru hodinových ručiček (vpravo), pak se mluví o pravotočivé polarizaci, pokud se otáčí proti směru hodinových ručiček (vlevo), jde o levotočivou polarizaci.

- Elipsa v kanonickém tvaru

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1 \text{ , kde} \quad \Delta = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad |m| = 0, 1, 2, \ldots$$

- Kruhově polarizovaná elektromagnetická vlna

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \text{ , kde} \quad \Delta = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad |m| = 0, 1, 2, \ldots$$

- Lineárně polarizovaná elektromagnetická vlna

$$E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}(-1)^m E_x \text{ , kde} \quad \Delta = m\pi \quad |m| = 0, 1, 2, \ldots$$

Je li fázový rozdíl Δ neurčitý, náhodný, je elektromagnetická vlna (světlo) nepolarizovaná. Běžné zdroje světla jako slunce, žárovka, zářivka atd. vyzařují přirozeně nepolarizované světlo. V takovém případě je průběh složek E_x a E_y zcela nahodilý a navzájem nezávislý. Orientace vektoru $\boldsymbol{E}$ v takovém případě je složitou a náhodnou funkcí času a všechny směry tohoto vektoru jsou **stejně pravděpodobné**. K polarizaci přirozeného světla dochází druhotně např. odrazem, lomem, dvojlomem, průchodem přes polarizační filtr, rozptylem světla atd.

- Vlny na rozhraní dvou dielektrik
  - Lineárně polarizovaná harmonická rovinná vlna
    - Dopadající vlna $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_{0i} \cos(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t + \delta_i)$
    - Odrážející vlna $\boldsymbol{E}_r(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_{0r} \cos(\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega_r t + \delta_r)$
    - Prošlá vlna $\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_{0t} \cos(\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r} - \omega_t t + \delta_t)$
  - Rovnice vyjádřená pomocí jednotkového normálového vektoru u_0

$$\boldsymbol{u}_0 \times \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}, t)\big|_{y=b} + \boldsymbol{u}_0 \times \boldsymbol{E}_r(\boldsymbol{r}, t)\big|_{y=b} = \boldsymbol{u}_0 \times \boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r}, t)\big|_{y=b}$$

- Zákon dopadu a odrazu $\alpha_i = \alpha_r$
- Zákon lomu (Snellův zákon) $n_i \sin\alpha = n_t \sin\beta$

- Fresnelovy vzorce
  - TE Polarizace (s-polarizace)
    - Amplitudový koeficient odrazivosti

$$r_\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{\frac{n_i}{\mu_i}\cos\alpha - \frac{n_t}{\mu_t}\cos\beta}{\frac{n_i}{\mu_i}\cos\alpha + \frac{n_t}{\mu_t}\cos\beta} \quad r_\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{\cos\alpha - \sqrt{\frac{n_t^2}{n_i^2} - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha + \sqrt{\frac{n_t^2}{n_i^2} - \sin^2\alpha}}$$

    - Amplitudový koeficient propustnosti

$$t_\perp = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2\frac{n_i}{\mu_i}\cos\alpha}{\frac{n_i}{\mu_i}\cos\alpha + \frac{n_t}{\mu_t}\cos\beta} \qquad t_\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha + \sqrt{\frac{n_t^2}{n_i^2} - \sin^2\alpha}}$$

  - TM Polarizace (p-polarizace)
    - Amplitudový koeficient odrazivosti

$$r_\parallel = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{\frac{n_t}{\mu_t}\cos\alpha - \frac{n_i}{\mu_i}\cos\beta}{\frac{n_t}{\mu_t}\cos\alpha + \frac{n_i}{\mu_i}\cos\beta} \quad r_\parallel = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{\cos\alpha - \frac{n_i^2}{n_t^2}\sqrt{\frac{n_t^2}{n_i^2} - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha + \frac{n_i^2}{n_t^2}\sqrt{\frac{n_t^2}{n_i^2} - \sin^2\alpha}}$$

    - Amplitudový koeficient propustnosti

$$t_\parallel = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2\frac{n_i}{\mu_i}\cos\alpha}{\frac{n_t}{\mu_t}\cos\alpha + \frac{n_i}{\mu_i}\cos\beta} \quad t_\parallel = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2\frac{n_i}{n_t}\cos\alpha}{\cos\alpha + \frac{n_i^2}{n_t^2}\sqrt{\frac{n_t^2}{n_i^2} - \sin^2\alpha}}$$

- Vnější odraz $n_t > n_i \qquad \alpha > \beta$

- Brewsterův úhel z vnějšího odrazu

$$\text{existuje úhel dopadu, pro který } r_\parallel = 0$$

$$n_t\cos\alpha - n_i\cos\beta = 0$$

$$n_t^2\cos^2\alpha = n_i^2\cos^2\beta$$

$$\frac{n_t^2}{n_i^2}\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\beta = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\beta$$

$$\frac{n_t^2}{n_i^2}\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \frac{n_i^2}{n_t^2}\sin^2\alpha$$

$$\left(\frac{n_t^2}{n_i^2} - 1\right)\cos^2\alpha = \left(1 - \frac{n_i^2}{n_t^2}\right)\sin^2\alpha$$

$$\frac{\frac{n_t^2}{n_i^2} - 1}{1 - \frac{n_i^2}{n_t^2}} = \tan^2\alpha$$

$$\frac{\frac{\cancel{n_t^2 - n_i^2}}{n_i^2}}{\frac{\cancel{n_t^2 - n_i^2}}{n_t^2}} = \tan^2 \alpha$$

$$\tan \alpha_B = \frac{n_t}{n_i} \qquad \alpha_B = \arctan \frac{n_t}{n_i}$$

- Vnitřní odraz $n_t < n_i \quad \alpha < \beta$
  - Mezní úhel
    - Meznímu úhlu α_m odpovídá úhel lomu $\beta = \pi/2$

$$n_i \sin \alpha_m = n_t \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \alpha_m = \frac{n_t}{n_i}$$

$$\alpha_m = \arcsin \frac{n_t}{n_i}$$

Pro úhly dopadu $\alpha > \alpha_m$ nastává úplný (totální) odraz, tj. elektromagnetická vlna se neláme do druhého dielektrika.

- Odrazivost (reflektivita) $R = \frac{I_r A \cos \alpha}{I_i A \cos \alpha} = \frac{2Z_i}{2Z_i} \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = r^2$
- Propustnost (transmisivita) $T = \frac{I_t A \cos \beta}{I_i A \cos \alpha} = \frac{2Z_i}{2Z_t} \frac{E_{0t}^2}{E_{0i}^2} = \frac{Z_i \cos \beta}{Z_t \cos \alpha} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 = \frac{n_t \mu_i \cos \beta}{n_i \mu_t \cos \alpha} t^2$

$$1 = R + T$$