

# 1

$\Rightarrow$ :

Máme k dispozici stroj  $\mathbf{M}$ , který dle zadání vypisuje jazyk  $L$ . Vytvoříme stroj  $\mathbf{N}$ , který dostane na vstupu slovo  $x \in \{0, 1\}^*$ . Stroj  $\mathbf{N}$  spustí stroj  $\mathbf{M}$  a postupně čte to, co stroj  $\mathbf{M}$  píše na pásku. Pokud stroj  $\mathbf{N}$  narazí na řetězec  $x$ , tak se zastaví v akceptovatelném stavu. Jinými slovy  $L \in \mathbf{RE}$ .

$\Leftarrow$ :

Máme k dispozici stroj  $\mathbf{M}$ , který se zastaví na vstupu  $x$ , pokud  $x \in L$ . Stroj  $\mathbf{N}$  vytvoříme tak, že postupně bude simulovat stroje  $\mathbf{M}$ , na všech možných vstupech. Množina všech různých vstupů je spočetná, tedy se dá očíslovat přirozenými čísly.

Nechť stroj  $\mathbf{M}_i$ , značí instanci stroje  $\mathbf{M}$  se vstupem číslo  $i \in \mathbb{N}$ . Stroje budeme simulovat následovně:

stroj \ krok stroje	1.	2.	3.	...
$\mathbf{M}_1$	1	3	6	$\ddots$
$\mathbf{M}_2$	2	5	9	$\ddots$
$\mathbf{M}_3$	4	8	13	$\ddots$
$\mathbf{M}_4$	7	12	18	$\ddots$
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$

Je zřejmé, že pro každý vstup dokážeme v konečném čase spočítat  $n$ . krok.

Pokud  $i$ . vstup je v jazyku  $L$ , tak se stroj  $\mathbf{M}_i$  zastaví. Pokaždé, když se stroj zastaví, tak vypíšeme na pásku jeho vstup a posuneme se na další prázdné políčko.

Vytvořili jsme stroj, který vypisuje jazyk  $L$ .

# 2

$\Rightarrow$ :

Máme k dispozici stroj  $\mathbf{M}$ , který dle zadání vypisuje jazyk  $L$ . Vytvoříme stroj  $\mathbf{N}$ , který dostane na vstupu slovo  $x \in \{0, 1\}^*$ . Stroj  $\mathbf{N}$  spustí stroj  $\mathbf{M}$  a postupně čte to, co stroj  $\mathbf{M}$  píše na pásku. Pokud stroj  $\mathbf{N}$  narazí na řetězec  $x$  tak se zastaví v akceptovatelném stavu a na pásku napíše 1. Pokud stroj  $\mathbf{N}$  narazí na řetězec, který je lexikograficky větší než  $x$ , tak se zastaví v akceptovatelném stavu a na pásku napíše 0. Jinými slovy  $L \in \mathbf{R}$ .

$\Leftarrow$ :

Máme k dispozici stroj **M**, který se vždy zastaví a jeho výstupem je informace, zda řetězec je obsažen v jazyku  $L$ . Sestrojme stroj **N**, který bude postupně volat stroj **M**, pro všechny možné lexikograficky seřazené vstupy  $\{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$ . Pokud **M** na vstupu vrátí 1, tak vstup **N** zapíše na pásku, jinak nic neudělá a volá **M** s následujícím vstupem.