1

Dokážeme nejdříve implikaci "K obsahuje přímku $\implies$ K^* neobsahuje n-tici LN vektorů":

K obsahuje přímku neboli existuje nenulový vektor $v \in K$ tž. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda v \in K$, speciálně $-v, v \in K$. Mějme libovolnou n-tici vektorů $y_1, \ldots, y_n \in K^*$. Z definice K^* platí, že $\forall i : v^T y_i \geq 0 \land -(v^T y_i) \geq 0 \implies v^T y_i = 0$. Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{pmatrix} \implies Av = \begin{pmatrix} v^T y_1 \\ v^T y_2 \\ \vdots \\ v^T y_n \end{pmatrix}$$

Z lineární algebry víme, že matice A je singulární $\iff$ existuje nenulový vektor x tž. $Ax = 0$. Tento vektor existuje a je to právě v. Dále víme, že A je singulární $\iff$ řádky A jsou lineárně závislé. Takže $y_1, \ldots, y_n$ je lineárně závislá posloupnost.

Nyní dokážeme implikaci "K neobsahuje n-tici LN vektorů $\implies$ K^* obsahuje přímku":

Pokud K neobsahuje n-tici LN vektorů, tak K je obsažen v podprostoru R^n menší dimenze než n (lineární obal K). Z toho plyne, že existuje vektor $v \in \mathbb{R}^n$ tž. je kolmý na daný podprostor (Gram-Schmidt), speciálně $\forall y \in K : v^T y = 0$. Z definice plyne $v \in K^*$ a také jeho libovolný násobek cv, kde $c \in R$, protože $\forall y \in K : (cv)^T y = c(v^T y) = c(0) = 0$.

Druhá implikace ze zadání (K^* neobsahuje n-tici LN vektorů $\implies$ K obsahuje přímku") plyne z přechozích dvou:

Předpokládáme, že K je uzavřená množina neboli $\overline{K} = K$ a díky faktu ze zadání tedy platí $(K^*)^* = K$. V předchozí implikaci tedy dosadíme místo K K^* a máme dokázanou zbývající implikaci.

2

Předpokládejme, že platí první implikace co máme dokázat. Jestliže K je „proper cone“, tak neobsahuje přímku a je uzavřený, tudíž z 1) plyne, že K^* obsahuje n lineárně nezávislých vektorů a díky implikaci, co si dokážeme, z toho plyne, že $K*$ má neprázdný vnitřek. (Z přednášky také ale víme, že pokud K proper $\implies$ K^* proper $\implies$ K^* neprázdný vnitřek, takže tohle by nebylo potřeba).

Dokážeme tedy zbývající implikaci:

Předpokládáme tedy, že existuje n lineárně nezávislých vektorů $b_1, \ldots, b_n \in K$. Tyto vektory tvoří bázi B prostoru $\mathbb{R}^n$. Položme $p = \sum_{i=1}^n b_i$. Jelikož K je kužel, tak $p \in K$. Budeme uvažovat maximovou normu. Buď A matice přechodu od kanonické báze k bázi B. Označme $M \coloneqq sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$. M je tedy největší souřadnice, kterou může jednotkový vektor v bázi B dostat a uvažujeme-li indukovanou normu na maticích tak právě $\|A\| = M$. Uvažujeme-li vektor v tž. $\|v\| < \frac{1}{M}$, pak z vlastností normy platí: $\|Av\| \leq \|A\|.\|v\| < M\frac{1}{M} = 1$. Neboli všechny souřadnice (Av je vektor souřadnic) vektoru s normou menší než $\frac{1}{M}$ v bázi B jsou menší než 1.

Uvažujme nyní množinu $C = \{y \in \mathbb{R}^n : \|p - y\| < \frac{1}{D}\}$. Zvolme $y \in C$. Pokud $y \in K$, tak K má neprázdný vnitřek. Pro vektor $p - y$ z definice platí $\|p - y\| < \frac{1}{D} \implies \|A(p - y)\| < 1$. Dozvěděli jsme se, že souřadnice vektoru $p - y$ jsou v absolutní hodnotě menší než 1. Vyjádříme $p - y$ v bázi $B \implies p - y = \sum_{i=1}^n c_i b_i$, kde $|c_i| < 1$. $p - y$ umíme vyjádřit druhým způsobem: $p - y = \sum_{i=1}^n b_i - \sum_{i=1}^n d_i b_i = \sum_{i=1}^n (1 - d_i) b_i \implies 1 - d_i = c_i \implies |1 - d_i| < 1 \implies d_i > 0$. Takže y je konvexní kombinací $b_1, \ldots, b_n$ neboli $y \in K$.

3

Z Farskasova lemma plyne, že pokud dokážeme, že existuje $y \in \mathbf{R}^3 : A^T y \geq 0 \wedge b^T y < 0$, kde $b^T = (3, -2, 0)$ a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(A reprezentuje zadanou soustavu), tak daná soustava nemá řešení. Stačí zvolit $y^T = (-1, 0, 2)$:

$$-1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 < 0$$

4

Dokážeme 2 inkluze: $int(S^n_+) \subseteq S^n_{++}$ a $S^n_{++} \subseteq int(S^n_+)$. Budeme uvažovat spektrální normu. První inkluze:

Zvolme $A \in int(S^n_+)$. Z definice tedy $\exists \epsilon > 0, \forall X \in S^n, \|A - X\| < \epsilon \implies X \in S^n_+$. Zvolme $0 < \delta < \epsilon$, položme $X := A - \delta I_n$. Poté zřejmě $\|A - X\| = \|\delta I_n\| = \delta < \epsilon$. Takže $A - \delta I_n \in S^n_+$. Vlastní čísla matice $A - \delta I_n$ jsou právě $\lambda_i - \delta$, kde λ_i je vlastní číslo A. To platí z definice: nechť x vlastní vektor A příslušný vlastnímu číslu $\lambda_i \iff x$ je vlastní vektor $A - \delta I_n$ příslušný $\lambda_i - \delta$, protože:

$$\implies : (A - \delta I_n)x = Ax - \delta I_n x = \lambda_i x - \delta x = (\lambda_i - \delta)x$$
$$\impliedby : Ax - \delta x = (A - \delta I_n)x = (\lambda_i - \delta)x = \lambda_i x - \delta x \implies Ax = \lambda_i x$$

$A - \delta I_n \in S^n_+ \implies \lambda_i - \delta \geq 0$, takže pro vlastní čísla A platí $\lambda_i \geq \delta > 0$. Takže $A \in S^n_{++}$.

Nyní druhá inkluze:

Zvolme $A \in S^n_{++}$. Položme λ_{min} jako nejmenší vlastní číslo A. A je pozitivně definitní, takže $\lambda_{min} > 0$. Uvažujme kouli $S := \{X \in S^n : \|A - X\| < \lambda\}$. Dokážeme, že $S \subseteq S^n_+$ a tím bude platit druhá inkluze. Zvolme $X \in S$, z definice spektrální normy (pro symetrické matice) tedy plyne, že pro největší vlastní číslo matice $A - X$, které označíme δ_{max}, platí $\delta_{max} < \lambda_{min}$.

Zvolme libovolný $x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1$. Matice $A - X$ je symetrická, tudíž ortogonálně diagonalizovatelná, a proto platí $x^T(A - X)x \leq \delta_{max}$. Protože buď QDQ^T ortogonální rozklad $A - X$:

$$x^T(A - X)x = x^T(QDQ^T)x = (Q^T x)^T D(Q^T x) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i (q_i^T x)^2 \leq \delta_{max} \sum_{i=1}^{n} (q_i^T x)^2 =$$
$$= \delta_{max} \|x\|^2 = \delta_{max}$$

Obdobně lze dokázat, že $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1 : x^T A x \geq \lambda_{min}$, kde λ_{min} je nejmenší vlastní číslo A.

Pokud tyto nerovnosti spojíme, tak dostaneme $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1$:

$$\delta_{max} \geq x^T (A - X) x = x^T A x - x^T X x \implies x^T X x \geq x^T A x - \delta_{max}$$
$$x^T A x \geq \lambda_{min} \implies x^T X x \geq \lambda_{min} - \delta_{max} > 0$$

Dokázali jsme tedy, že $X \in S_+^n$. Tedy i druhou inkluzi.

5