

# 1

Z lineární algebry víme, že lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy báзовých prvků. Bázi prostoru  $S^n$  je například  $\frac{n(n+1)}{2}$  symetrických matic, které mají právě na 2 místech (symetricky) hodnotu 1, pokud jsou tyto místa mimo diagonálu, nebo matice s jednou jedničkou na diagonále. Každou symetrickou matici dokážeme vyjádřit jako lineární kombinaci těchto matic. Bázi prostoru  $S^2$  by například byly tyto matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Položme  $k := \frac{n(n+1)}{2}$ . Pro  $i = 1, \dots, k$  :  $B_i$  budou prvky báze popsané výše. Pro libovolné  $X \in S^n$  tedy existují  $i = 1, \dots, k$  :  $a_i \in \mathbb{R}$  :  $X = \sum_{i=1}^k a_i B_i$ .  $f$  je lineární, takže  $f(X) = f(\sum_{i=1}^k a_i B_i) = \sum_{i=1}^k a_i f(B_i)$ . Označme  $i = 1, \dots, k$  :  $b_i = f(B_i) \in \mathbb{R}$ . Z toho, jak je zvolena báze, je zřejmé, že každý prvek  $a_i$  je roven nějakému prvku  $X_{i,j} = X_{j,i}$ .

Víme, že platí  $\forall C, X \in S^n : \text{Tr}(CX) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{i,j} X_{i,j}$ . Protože  $C, X$  jsou symetrické, tak sčítance mimo diagonálu ( $i \neq j$ )  $C_{i,j} X_{i,j}$  a  $C_{j,i} X_{j,i}$  jsou identické. Důsledkem je, že tuto sumu dokážeme napsat jako sumu  $k = n + \frac{n^2-n}{2}$  prvků následovně:

$$\text{Tr}(CX) = \sum_{i=1}^n (C_{i,i} X_{i,i}) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} C_{i,j} X_{i,j}$$

Hledáme tedy matici  $C \in S^n$ . Porovnáme sčítance v sumách  $f(X) = \sum_{i=1}^k a_i b_i$  a  $\text{Tr}(CX)$  (mají obě  $k$  sčítanců). Uvažujme například první sčítanec  $C_{1,1} X_{1,1}$  a hledáme jeho odpovídající sčítanec  $a_i b_i$ . Jak bylo řečeno výše, tak víme, že  $\exists i : a_i = X_{1,1}$  (jde jen o to jak si  $a_i$  zaindexujeme). Musí platit  $a_i b_i = X_{1,1} C_{1,1} \implies b_i = C_{1,1}$ . Obdobně pro všechny diagonální prvky.

Stručně řečeno, na diagonále  $C$  jsou obrazy báзовých prvků, které jsou diagonální matice. Pro zbylé prvky mimo diagonálu na indexech  $i \neq j$  musí platit  $\exists k : a_k b_k = 2C_{i,j} X_{i,j}$ , kde  $a_k = X_{i,j} = X_{j,i}$ . Z toho plyne, že  $C_{i,j} = C_{j,i} = \frac{1}{2} b_i$ .

Výsledkem je, že na diagonále  $C$  jsou obrazy báзовých prvků, které jsou diagonální matice, a pro zbylé prvky je to polovina obrazu příslušného báзовého prvku, který není diagonální.

$$C = \begin{pmatrix} f(B_{i_1}) & \frac{1}{2}f(B_{i_2}) & \dots \\ \frac{1}{2}f(B_{i_2}) & f(B_{i_3}) & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \text{ pro příslušné } i_1, i_2, \dots \text{ (záleží na indexování báзовých prvků)}$$

# 2

Definujme kužel  $K := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \in \mathbb{R}^6 : \|(x_1, x_2)^T\| \leq x_3, \|(x_4, x_5)\| \leq x_6\}$ . Matice  $F$  a vektory  $g, c$  budou vypadat:

$$F = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stačí nyní jen nahlédnout, že to odpovídá danému problému. Uvažujme vektor proměnných  $y = (y_1, y_2, y_3)$ . Podmínka  $Fy + g \preceq_K 0$  odpovídá z definice tomu, že vektor

$$v = \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_2 + 2 \\ y_3 \\ 1 \\ y_2 \\ y_1 + 1 \end{pmatrix}$$

je prvkem  $K$ . Což nastane právě tehdy, když  $\|(y_1, 2y_2 + 2)^T\| \leq y_3 \wedge \|(1, y_2)^T\| \leq y_1 + 1$ . Což kopíruje podmínky zadání ( $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = t$ ). Minimalizujeme poslední složku vektoru  $y$ , tedy  $y_3$  neboli  $t$ .

### 3

Označíme si daných 14 předmětů čísla od 1 do 14 (1. je mapa a 14. je motorová pila). Proměnná  $u_i$  bude značit „efektivitu“ i. předmětu v dz,  $w_i$  jeho váhu v kg a  $b_i \in [0, 1]$  bude značit kolik daného předmětu si vybereme (1 odpovídá celému předmětu). Chceme maximalizovat  $\sum_{i=1}^{14} b_i u_i = b^T u$  (celkovou efektivitu vybraných předmětů). Pokud problém vyjádříme jako LP problém tak to bude vypadat takto:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad -b^T u \\ &\text{s. t.} \quad b \preceq 1 \\ &\quad \quad -b \preceq 0 \\ &\quad \quad b^T w \leq 10 \end{aligned}$$

První 2 podmínky zaručují, aby hodnoty  $b_i$  byly v intervalu  $[0, 1]$ . Poslední podmínka zaručuje, aby součet vah vybraných předmětů nepřekročil 10 kg.

Optimální řešení nám dává efektivitu  $\approx 25.88$ . Ručně jsem našel řešení (spočítáním poměru „váha výkon“ u každého předmětu a vybíráním od nejlepšího) 1x mapa, 1x baterie, 1x kytara, 1x katana a 1x Jarník. Toto řešení má efektivitu 23. Samozřejmě optimální řešení nerelaxed problému by vyžadovalo vyzkoušení všech kombinací.

### 4

- a) Uvažujme 2 matice  $A, B \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ . Vektor  $Ax$  bude reprezentovat vyprodukované suroviny v roce 2019 aktivitami, vektor  $Bx^+$  bude reprezentovat spotřebované suroviny v roce 2020. Matice  $A$  a  $B$  budou vypadat následovně:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sloupce v matici  $A$  reprezentují aktivity a řádky reprezentují suroviny. Například první sloupec odpovídá první aktivitě: spotřebujeme 1 kancelářské potřeby, 1 kafe

a 1 štěstí a vyprodukujeme 3 slávy. Matice  $B$  je tvořena obdobně, akorát reprezentuje pouze počet spotřebovaných surovin, takže hodnoty co byly v matici  $A$  záporné (reprezentující spotřebování suroviny), tak jsou v  $B$  kladné a původní kladné hodnoty z  $A$  jsou v  $B$  nulové, jelikož to, co se vyprodukuje v roce 2020 nás nezajímá. Zdefinujeme si funkci  $f_0(x, x^+) = \max_{i=1}^5 -\frac{x_i^+}{x_i}$ . Nyní můžeme zformulovat GLFP:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f_0(x, x^+) \\ & \text{s. t. } Ax \preceq Bx^+ \\ & \quad -x^+ \preceq 0 \\ & \quad -x \preceq 1 \end{aligned}$$

Zřejmě platí  $\max \min f = \min \max -f$ . Proto jsme použili místo  $g$  (ze zadání) funkci  $f_0$ . První nerovnost zaručí to, že spotřebované suroviny v 2020 nepřesáhnou vyprodukované v 2019. Podmínka na nezápornost  $x^+$  je zřejmá (nemůžeme konat zápornou aktivitu) a poslední podmínka nám zaručí dobrou definovanost funkce  $f_0$  ( $x_i > 0$ ) a zároveň je jedno, jestli tam je 1 nebo jiná kladná konstanta, jelikož nám záleží jen na poměrech mezi  $x_i$ .

- b) Máme tedy  $\alpha$  pevně dané. Chceme zjistit, jestli pro všechna  $i = 1, \dots, 5$  platí  $\frac{x_i^+}{x_i} \geq \alpha$ . Jestli ano, tak zřejmě  $g(x, x^+) \geq \alpha$  z definice. Podmínku se zlomkem můžeme ale ekvivalentně napsat jako  $i = 1, \dots, 5 : x_i^+ \geq \alpha x_i$ . To dle našeho značení jde napsat vektorově jako  $\alpha x \preceq x^+$ .

Můžeme nyní zformulovat lineární program Q (podobný GLFP), který bude mít optimální hodnotu 0, pokud existují dané vektory  $x, x^+$  splňující  $g(x, x^+) \geq \alpha$ , a nebude mít žádné feasible solution pokud neexistují daná  $x, x^+$ .

$$\begin{aligned} & \text{minimize } 0 \\ & \text{s. t. } Bx^+ \preceq Ax \\ & \quad -x^+ \preceq 0 \\ & \quad -x \preceq 1 \\ & \quad \alpha x \preceq x^+ \end{aligned}$$

- c) email