1

Položme $y \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Podmínky $x \preceq y, y \preceq x$ se nám tedy zjednodušily z definice na $x, -x \in \mathbb{R}^2_+$. My chceme opak neboli $x \in \mathbb{R}^2 : x, -x \notin \mathbb{R}^2_+$. Takže jedna souřadnice vektoru x musí být > 0 a druhá < 0. Vyhovuje tedy například vektor $x \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2

Podmínku můžeme alternativně vyjádřit: $x, -x \succeq_K 0 \iff x, -x \in K$.
$\Rightarrow$: Máme tedy x tž. $x, -x \in K$. K je kužel, takže platí:
$\forall \lambda \in [0, \infty] : \lambda x \in K, \lambda(-x) \in K \iff \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda x \in K$. Pokud $x \neq 0$, tak $\{\lambda x, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$ je přímka. K nesmí obsahovat přímky, takže musí platit $x = 0$.
$\Leftarrow$: $x = 0 \implies x = -x = 0$. K je kužel, neboli obsahuje počátek $(x, -x \in K)$.

3

f je afinní neboli $\exists A \in \mathbb{R}^{n \times k}, b \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^k : f(k) = Ak + b$. Chceme dokázat, že $f^{-1}(X)$ je konvexní. Tedy zvolme $\lambda \in [0, 1]$, $c, d \in f^{-1}(X)$ a ukážeme $\lambda c + (1 - \lambda)d \in f^{-1}(X) \iff \exists p \in X : f(\lambda c + (1 - \lambda)d) = p$. Jelikož $c, d \in f^{-1}(X) \implies \exists k, l \in X : f(c) = k, f(d) = l$. X je konvexní, takže $\lambda k + (1 - \lambda)l \in X$.

$$f(\lambda c + (1 - \lambda)d) \overset{def.zobr.}{=} A(\lambda c + (1 - \lambda)d) + b = \lambda Ac + Ad - \lambda Ad + b =$$
$$= \lambda Ac + Ad - \lambda Ad + b + \lambda b - \lambda b = (Ad + b) + \lambda(Ac - Ad + b - b) \overset{substituce}{=}$$
$$\overset{substituce}{=} l + \lambda(k - l) = \lambda k + (1 - \lambda)l \in X$$

Našli jsme $p \coloneqq \lambda k + (1 - \lambda)l$.

4

Z lineární algebry víme, že každá reálná pozitivně semidefinitní matice je ortogonálně diagonalizovatelná a má nezáporná vlastní čísla. Pokud tedy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \in S^n_+$, tak existují matice $R, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takové, že R je ortonormální a D je diagonální s nezápornými prvky na hlavní diagonále a platí $A = RDR^T$. Z definice násobení matic vidíme, že jako λ_i položíme i. prvek na diagonále D a jako v_i položíme i. řádek matice R.

5