# 1

Z definice „feasible solution“ víme, že pro každé $x, y \in X$ platí $\forall i : f_i(x) \leq 0$, kde $f_i$ jsou konvexní funkce z definice (P). Dále také platí $Ax = Ay = b$, kde $A, b$ je matice a vektor z definice (P). Zvolme $\theta \in [0,1]$ a dokážeme, že $\theta x + (1-\theta)y$ splňuje tyto rovnosti a nerovnosti, takže je také součástí $X$, takže $X$ je konvexní.

$$\begin{aligned} \forall i : f_i(\theta x + (1-\theta)y) &\overset{f_i \text{ konvex.}}{\leq} \theta f_i(x) + (1-\theta) f_i(y) \overset{f_i(x), f_i(y) \leq 0}{\leq} \theta 0 + (1-\theta)0 = 0 \\ A(\theta x + (1-\theta)y) &\overset{\text{distrub. nasobeni matic}}{=} \theta Ax + (1-\theta)Ay \overset{Ax=Ay=b}{=} \theta b + (1-\theta)b = b \end{aligned}$$

Z toho plyne $\theta x + (1-\theta)y \in X$. $X$ je tedy konvexní množina.

# 2

Podmínku o semidefinitnosti matic můžeme zjednodušit (dosazením a sečteným) na to, že matice $H$ musí být negativně semidefinitní neboli $-H$ pozitivně semidefinitní:

$$H = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + 100 & 2x_1 + 56 \\ 2x_1 + 56 & x_1 + x_2 + 100 \end{pmatrix}, H \preceq 0 \iff \begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 100 &\geq 0 && (1) \\ -x_1 - x_2 - 100 &\geq 0 && (2) \\ det(-H) &\geq 0 && (3) \end{aligned}$$

Víme, že matice $2 \times 2$ je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když prvky na diagonále jsou nezáporné a determinant je nezáporný, což přesně vyjadřují nerovnice výše.

$$det(-H) = 2x_2^2 + x_1 x_2 + 300x_2 - 5x_1^2 - 224x_1 + 6864$$

V programu $Q$ budeme mít celkem 6 proměnných $y_1, \ldots, y_6$. Proměnné budou mít tento význam: $x_1 = x_1^+ - x_1^- = y_1 - y_2$, analogicky $x_2 = y_3 - y_4, x_3 = y_5 - y_6$, kde $y_i \geq 0$. Matice $Y$ bude typu $9 \times 9$, kde na diagonále budou proměnné $y_1, \ldots, y_6$ a zbylá 3 místa na diagonále budou odpovídat rovnicím $(1), (2), (3)$.

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 - 100 \geq 0 \iff (y_1 - y_2) - 2(y_3 - y_4) - 100 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 - 100 \geq 0 \iff -(y_1 - y_2) - (y_3 - y_4) - 100 \geq 0 \\ det(-H) \geq 0 \\ \iff \\ 2(y_3 - y_4)^2 + (y_1 - y_2)(y_3 - y_4) + 300(y_3 - y_4) - 5(y_1 - y_2)^2 - 224(y_1 - y_2) + 6864 \geq 0 \\ \implies \\ Y = diag(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, (y_1 - y_2) - 2(y_3 - y_4) - 100, -(y_1 - y_2) - (y_3 - y_4) - 100, \\ 2(y_3 - y_4)^2 + (y_1 - y_2)(y_3 - y_4) + 300(y_3 - y_4) - 5(y_1 - y_2)^2 - 224(y_1 - y_2) + 6864) \end{gathered}$$

Matice $Y$ je diagonální, takže bude pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechny prvky na diagonále budou nezáporné, což nastane právě tehdy, když budou splněny dané nerovnice. Maticí $A$ potřebujeme vyjádřit jedinou rovnost v $P$, toho docílíme, pokud

$$\begin{gathered} A = diag(1, -1, 1, -1, 1, -1, 0, 0, 0), b = 1 \\ \iff \\ (y_1 - y_2) + (y_3 - y_4) + (y_5 - y_6) = 1 \end{gathered}$$

Matici $C$ definujeme také jako diagonální, aby platila ekvivalentní min. podmínka, takže

$$C = diag(5, -5, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Díky tomu, že matice jsou diagonální je zřejmé, že podmínky jsou ekvivalentní.

# 3

a) email

b) P-F nám říká, že největší kladné vlastní číslo je infimum dané množiny "lambd". Minimalizací najdeme tedy hledané infimum. Pokud ale použijeme naivní techniku, tak budeme hledat supremum dané množiny. Nikde ale nemáme napsáno, že supremum nějak zdola omezuje největší kladné vlastní číslo. Proto daná metoda nebude fungovat.