1

a)
$$f(x) = x^p, \forall x \in (0,\infty), p \geq 1$$
$$f'(x) = px^{p-1}, f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$$

$p \geq 1$, takže $p(p-1) \geq 0$ a zároveň $\forall x \in (0,\infty) : x^{p-2} > 0 \implies \forall x \in (0,\infty) : f''(x) \geq 0$. Interval $(0,\infty)$ je konvexní množina. Takže je funkce f konvexní.

b) Zvolme $x, y \in [0,\infty)$ a $\theta \in [0,1]$. Pokud $x = y = 0$, tak je konvexita zřejmá. Pokud $x, y \in (0,\infty)$, tak konvexita plyne z a). Zbývá tedy případ, kdy BÚNO $x \in (0,\infty), y = 0$.

$$g(\theta x + (1-\theta)y) = (\theta x + (1-\theta)y)^p = (\theta x)^p = \theta^p x^p \overset{\theta\in[0,1]}{\leq} \theta x^p = \theta g(x) + (1-\theta)g(y)$$

$[0,\infty)$ je konvexní množina. Takže g je konvexní funkce na $[0,\infty)$.

2

Podmínku můžeme alternativně vyjádřit: $x, -x \succeq_K 0 \iff x, -x \in K$.
$\Rightarrow$: Máme tedy x tž. $x, -x \in K$. K je kužel, takže platí:
$\forall \lambda \in [0,\infty] : \lambda x \in K, \lambda(-x) \in K \iff \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda x \in K$. Pokud $x \neq 0$, tak $\{\lambda x, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$ je přímka. K nesmí obsahovat přímky, takže musí platit $x = 0$.
$\Leftarrow$: $x = 0 \implies x = -x = 0$. K je kužel, neboli obsahuje počátek ($x, -x \in K$).

3

f je afinní neboli $\exists A \in \mathbb{R}^{n\times k}, b \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^k : f(k) = Ak + b$. Chceme dokázat, že $f^{-1}(X)$ je konvexní. Tedy zvolme $\lambda \in [0,1]$, $c, d \in f^{-1}(X)$ a ukážeme $\lambda c + (1-\lambda)d \in f^{-1}(X) \iff \exists p \in X : f(\lambda c + (1-\lambda)d) = p$. Jelikož $c, d \in f^{-1}(X) \implies \exists k, l \in X : f(c) = k, f(d) = l$. X je konvexní, takže $\lambda k + (1-\lambda)l \in X$.

$$f(\lambda c + (1-\lambda)d) \overset{def.zobr.}{=} A(\lambda c + (1-\lambda)d) + b = \lambda Ac + Ad - \lambda Ad + b =$$
$$= \lambda Ac + Ad - \lambda Ad + b + \lambda b - \lambda b = (Ad + b) + \lambda(Ac - Ad + b - b) \overset{substituce}{=}$$
$$\overset{substituce}{=} l + \lambda(k - l) = \lambda k + (1-\lambda)l \in X$$

Našli jsme $p \coloneqq \lambda k + (1-\lambda)l$.

4

Z lineární algebry víme, že každá reálná pozitivně semidefinitní matice je ortogonálně diagonalizovatelná a má nezáporná vlastní čísla. Pokud tedy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A \in S^n_+$, tak existují matice $R, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takové, že R je ortonormální a D je diagonální s nezápornými prvky na hlavní diagonále a platí $A = RDR^T$. Z definice násobení matic vidíme, že jako λ_i položíme i. prvek na diagonále D a jako v_i položíme i. řádek matice R.

5