1

Z definice „feasible solution“ víme, že pro každé $x, y \in X$ platí $\forall i : f_i(x) \leq 0$, kde f_i jsou konvexní funkce z definice (P). Dále také platí $Ax = Ay = b$, kde A, b je matice a vektor z definice (P). Zvolme $\theta \in [0,1]$ a dokážeme, že $\theta x + (1-\theta)y$ splňuje tyto rovnosti a nerovnosti, takže je také součástí X, takže X je konvexní.

$$\forall i : f_i(\theta x + (1-\theta)y) \overset{f_i \text{ konvex.}}{\leq} \theta f_i(x) + (1-\theta) f_i(y) \overset{f_i(x), f_i(y) \leq 0}{\leq} \theta 0 + (1-\theta)0 = 0$$
$$A(\theta x + (1-\theta)y) \overset{\text{distrub. nasobeni matic}}{=} \theta Ax + (1-\theta)Ay \overset{Ax=Ay=b}{=} \theta b + (1-\theta)b = b$$

Z toho plyne $\theta x + (1-\theta)y \in X$. X je tedy konvexní množina.

2

Podmínku o semidefinitnosti matic můžeme zjednodušit (dosazením a sečteným) na to, že matice H musí být negativně semidefinitní neboli $-H$ pozitivně semidefinitní:

$$H = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + 100 & 2x_1 + 56 \\ 2x_1 + 56 & x_1 + x_2 + 100 \end{pmatrix}, H \preceq 0 \iff \begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 100 &\geq 0 \quad (1) \\ -x_1 - x_2 - 100 &\geq 0 \quad (2) \\ det(-H) &\geq 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Víme, že matice 2×2 je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když prvky na diagonále jsou nezáporné a determinant je nezáporný, což přesně vyjadřují nerovnice výše.

$$det(-H) = 2x_2^2 + x_1x_2 + 300x_2 - 5x_1^2 - 224x_1 + 6864$$

V programu Q budeme mít celkem 6 proměnných $y_1, \ldots, y_6$. Proměnné budou mít tento význam: $x_1 = x_1^+ - x_1^- = y_1 - y_2$, analogicky $x_2 = y_3 - y_4, x_3 = y_5 - y_6$, kde $y_i \geq 0$. Matice Y bude typu 9×9, kde na diagonále budou proměnné $y_1, \ldots, y_6$ a zbylá 3 místa na diagonále budou odpovídat rovnicím $(1), (2), (3)$.

$$x_1 - 2x_2 - 100 \geq 0 \iff (y_1 - y_2) - 2(y_3 - y_4) - 100 \geq 0$$
$$-x_1 - x_2 - 100 \geq 0 \iff -(y_1 - y_2) - (y_3 - y_4) - 100 \geq 0$$
$$det(-H) \geq 0$$
$$\iff$$
$$2(y_3 - y_4)^2 + (y_1 - y_2)(y_3 - y_4) + 300(y_3 - y_4) - 5(y_1 - y_2)^2 - 224(y_1 - y_2) + 6864 \geq 0$$
$$\implies$$
$$Y = diag(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, (y_1 - y_2) - 2(y_3 - y_4) - 100, -(y_1 - y_2) - (y_3 - y_4) - 100,$$
$$2(y_3 - y_4)^2 + (y_1 - y_2)(y_3 - y_4) + 300(y_3 - y_4) - 5(y_1 - y_2)^2 - 224(y_1 - y_2) + 6864)$$

Matice Y je diagonální, takže bude pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechny prvky na diagonále budou nezáporné, což nastane právě tehdy, když budou splněny dané nerovnice. Maticí A potřebujeme vyjádřit jedinou rovnost v P, toho docílíme, pokud

$$A = diag(1, -1, 1, -1, 1, -1, 0, 0, 0), b = 1$$
$$\iff$$
$$(y_1 - y_2) + (y_3 - y_4) + (y_5 - y_6) = 1$$

Matici C definujeme také jako diagonální, aby platila ekvivalentní min. podmínka, takže

$$C = diag(5, -5, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Díky tomu, že matice jsou diagonální je zřejmé, že podmínky jsou ekvivalentní.