1

Ze zadání $p^* = \frac{1}{3}$. LP splňuje Slaterovo kritérium, takže máme „strong duality“ $p^* = d^*$. Chceme najít (λ^*, ν^*), tž. jsou to optimální řešení duálu. Definujeme Lagrangian:

$$L(x,\lambda,\nu) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3 + \nu x_1 + \nu x_2 + \nu x_3 - \nu$$
$$i = 1,2,3 : \frac{\partial L}{\partial x_i}(x,\lambda,\nu) = 2x_i - \lambda_i + \nu$$

Vidíme, že Lagrangian je konvexní funkce, tudíž jeho globální minumim bude v místě, kde je nulový gradient. Musí platit tedy:

$$i = 1,2,3 : \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \iff x_i = \frac{\lambda_i - \nu}{2}$$

Z KKT podmínky dále máme další požadavek na potenciální λ^*. Tím je complementary slackness, tudíž $i = 1,2,3 : \lambda_i^*(-x_i^*) = 0$, ale $x_i^* \neq 0 \implies \lambda_i^* = 0$. Výpočet se nyní zjednoduší, víme tedy $\lambda^* = (0,0,0)^T$. Dopočítáme ν. Z rovnic výše a KKT vidíme, že

$$\nu^* = 0 - 2x_i^* = -2\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

Tedy dual opt. solution je $((0,0,0)^T, -\frac{2}{3})$. Po dosazení (pro kontrolu) nám výjde i, že $p^* = d^*$.

2

3

4

P1 má tedy 8 možností (umístění lodi). Očíslujeme si je od 1 do 8 v pořadí, jak jsou v zadání. P2 má 7 možností, kam střelit. To je právě 7 políček na hrací ploše. Očíslujeme si je od 1 do 7 (zleva doprava, shora dolů). Po tomto očíslování, můžeme definovat payoff matici A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Použijeme obdobný postup pro nalezení worst case opt. řešení pro P1 a P2. LP pro zjištění worst case opt. řešení pro P1 bude vypadat:

$$maximize\ t$$
$$s.t.\ p \succeq 0,\ \sum_{i=1}^{8} p_i = 1$$
$$i = 1,\ldots,7 : t \leq \tilde{a}_i^T p, \text{ kde } \tilde{a}_i^T \text{ je } i. \text{ řádek matice } A$$

Pro worst case opt. pro P2 použijeme hodnoty z dualu nebo vytvoříme obdobný program s transponovanou matici A a vynásobenou -1.

Výsledné hodnoty jsou:

$$\text{Value of the game} = 0.3824$$
$$p^* = (0.175, 0.028, 0.019, 0.074, 0.159, 0.064, 0.250, 0.231)^T$$
$$q^* = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0)^T$$

5