1

a)

$$f(x) = x^p, \forall x \in (0, \infty), p \geq 1$$
$$f'(x) = px^{p-1}, f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$$

$p \geq 1$, takže $p(p-1) \geq 0$ a zároveň $\forall x \in (0, \infty) : x^{p-2} > 0 \implies \forall x \in (0, \infty) : f''(x) \geq 0$. Interval $(0, \infty)$ je konvexní množina. Takže je funkce f konvexní.

b) Zvolme $x, y \in [0, \infty)$ a $\theta \in [0, 1]$. Pokud $x = y = 0$, tak je konvexita zřejmá. Pokud $x, y \in (0, \infty)$, tak konvexita plyne z a). Zbývá tedy případ, kdy BÚNO $x \in (0, \infty), y = 0$.

$$g(\theta x + (1-\theta)y) = (\theta x + (1-\theta)y)^p = (\theta x)^p = \theta^p x^p \overset{\theta \in [0,1]}{\leq} \theta x^p = \theta g(x) + (1-\theta)g(y)$$

$[0, \infty)$ je konvexní množina. Takže g je konvexní funkce na $[0, \infty)$.

2

$\Rightarrow$: Zvolme $\begin{pmatrix} x_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \{\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} : t \geq f(x), x \in dom(f), t \in \mathbb{R}\} =: E$, $\theta \in [0, 1]$ a dokážeme, že $\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ t_1 \end{pmatrix} + (1-\theta) \begin{pmatrix} x_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \in E$.

$$\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ t_1 \end{pmatrix} + (1-\theta) \begin{pmatrix} x_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \\ \theta t_1 + (1-\theta)t_2 \end{pmatrix}$$

Chceme dokázat, že

1. $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in dom(f)$
2. $\theta t_1 + (1-\theta)t_2 \geq f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2)$

1. plyne z toho, že f je konvexní (tedy i $dom(f)$ je konvexní).
2. plyne z toho, že máme

$$t_1 \geq f(x_1)$$
$$t_2 \geq f(x_2)$$

a konvexnosti f viz

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2) \leq \theta t_1 + (1-\theta)t_2$$

$\Leftarrow$: Zvolme $x_1, x_2 \in dom(f), \theta \in [0, 1]$. Uvažujme body $\begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ f(x_2) \end{pmatrix}$. Tedy body jsou v množině E (epigraf) z definice. Předpokládáme, že epigraf je konvexní množina, takže:

$$\begin{pmatrix} \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \\ \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2) \end{pmatrix} \in E \implies$$
$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in dom(f)$$
$$\theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2) \geq f(x_1 + (1-\theta)x_2)$$

Takže f je konvexní funkce.

3

Konvexnost dokážeme pomocí hesiánu. Zřejmě $dom(f) = \mathbb{R}^2$ (konvexní množina).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \implies H(f) = \frac{1}{(e^x + e^y)^2} \begin{pmatrix} e^{x+y} & -e^{x+y} \\ -e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \frac{1}{(e^x + e^y)^2} \geq 0 \implies |H(f)| \geq 0 \iff \begin{vmatrix} e^{x+y} & -e^{x+y} \\ -e^{x+y} & e^{x+y} \end{vmatrix} \geq 0 \implies$$

$$\begin{vmatrix} e^{x+y} & -e^{x+y} \\ -e^{x+y} & e^{x+y} \end{vmatrix} = 2(e^{x+y})^2 \implies \forall x, y \in \mathbb{R} : |H(f)| \geq 0$$

Zároveň $\forall x, y \in \mathbb{R} : e^{x+y} \geq 0$, takže $H(f)$ je pozitivně semidefinitní, takže f je konvexní na $\mathbb{R}^2$.

4

Pokud budeme uvažovat jeden den, tak produktivitu trpaslíků spočítáme jednoduše jako $\sum_{i=1}^{21} a_i x_i = d_i$, kde $a_i \in \{0, 1\}$ značí, zda byl i. trpaslík přítomen, x_i bude jeho produktivita v ten den a d_i je vytěžené zlato v tento den. Pokud tedy máme informace jen o jednom dni, tak nám výjde, že každý přítomný trpaslík je stejně výkonný. Pokud tedy sestavíme soustavu rovnic pro všechny dny, tak máme soustavu rovnic:

$$a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,21}x_{21} = d_1$$
$$\vdots$$
$$a_{30,1}x_1 + \cdots + a_{30,21}x_{21} = d_{30}$$

kde $a_{i,j}$ značí přítomnost j. trpaslíka v i. den, jinak x_i, d_i mají stejný význam. Soustavu tedy můžeme vyjádřit maticově a vyřešit pomocí metody nejmenších čtverců. Metoda nejmenších čtverců nám dá nejlepší aproximaci produktivity trpaslíků, kterou z dostupných dat můžeme určit. Produktivitou myslíme průměrný počet vytěženého zlata za den.

5

a) Chceme dokázat konkávnost S, takže stačí dokázat konvexnost $f := -S$. $f : (0,1)^n \to \mathbb{R}$ na $dom(S)$. Zřejmě platí $dom(S) \subset (0,1)^n$. f můžeme vyjádřit takto:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i), \text{ kde } g_i(t) : (0,1) \to \mathbb{R}, g_i(t) = tln(t)$$

g_i je tedy funkce jedné proměnné. $\forall t \in (0,1) : g''(t) = \frac{1}{t} \geq 0$. g_i je tedy konvexní na $(0,1)$. Z přednášky víme, že součet konvexních funkcí je konvexní.
Nyní dokážeme konvexitu $dom(S)$. Zvolme $x, y \in dom(S) \subset (0,1)^n, \theta \in [0,1]$. Víme, že $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$. Chceme dokázat, že $\sum_{i=1}^{n} (\theta x + (1-\theta)y)_i = 1$. To, že

$\forall i : \theta x_i + (1-\theta)y_i \in (0,1)$ plyne ze zřejmé konvexnosti $(0,1)$, tedy $\theta x + (1-\theta)y \in (0,1)^n$.

$$\sum_{i=1}^{n}(\theta x + (1-\theta)y)_i = \sum_{i=1}^{n}(\theta x_i + (1-\theta)y_i) = \sum_{i=1}^{n}(\theta x_i) + \sum_{i=1}^{n}((1-\theta)y_i) =$$
$$= \theta \sum_{i=1}^{n} x_i + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n} y_i = \theta 1 + (1-\theta)1 = 1$$

Takže $dom(S)$ je konvexní $\implies$ f je konvexní funkce na $dom(S)$ $\implies$ S je konkávní.

b) email