1

Funkce f je definována na množině $S = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x + 7y > 10\}$ (kvůli logaritmu), což je konvexní množina (polorovina). Konvexitu funkce f dokážeme, tak, že postupně dokážeme konvexitu 3 funkcí, ze kterých je f složena ($f = f_1 + f_2 + f_3$). Víme, že součet konvexních funkcí je konvexní funkce, takže to stačí.
$f_1(x,y) = -57log(3x+7y-10)$: $-57log(x)$ je konvexní a neklesající, $g(x,y) = 3x+7y-10$ je konkávní (i konvexní) funkce (hesián je nulová matice). Z přednášky víme, že složením těchto funkcí dostaneme konvexní funkci.
$f_2(x,y) = 5x^2 - xy + y^2$. Hesián je $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ což je pozitivně semidefinitní matice. Takže f_2 je konvexní. $f_3(x,y) =$ max. vl. číslo $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x+y \end{pmatrix}$. Charakteristický polynom této matice je $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(-2x - y) + (x^2 - y^2)$. Tato kvadratická rovnice má 2 řešení neboli nám dává 2 funkce (g_1, g_2)v proměnných x, y: $g_1(x,y) = x - \frac{\sqrt{5}}{2}y - \frac{y}{2}, g_2(x,y) = x + \frac{\sqrt{5}}{2}y - \frac{y}{2}$. Tyto funkce jsou konvexní, jelikož jejich hesián je nulová matice. Funkci f_3 můžeme tedy vyjádřit takto $f_3(x,y) = max\{g_1(x,y), g_2(x,y)\}$. Z přednášky víme, že f_3 je konvexní, pokud g_1, g_2 jsou konvexní, což jsme dokázali.
Dokázali jsme tedy, že f je konvexní funkce.

2

$f(x,y,z) = g_1(x)g_2(y)g_3(z)$. Pro kladnost f na $\mathbb{R}^3_{++}$ stačí dokázat kladnost všech g_i na $\mathbb{R}_{++}$. První derivace funkcí g_i jsou tvaru e^{-x}. Tato funkce je zřejmě kladná $\forall x \in \mathbb{R}$. Takže g_i jsou ryze rostoucí na svém definičním oboru. Pro všechny g_i platí, že v bodě 0 mají hodnotu $1 - 1 = 0$. Z toho, že jsou g_i ryze rostoucí můžeme tedy usoudit, že $\forall x \in \mathbb{R}_{++} : g_i(x) > 0 \implies \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3_{++} : f(x,y,z) > 0$.
Z vlastnosti logaritmů platí:

$$log(f(x,y,z)) = log((1 - e^x)(1 - e^{2y})(1 - e^{5z})) = log(1 - e^x) + log(1 - e^{2y}) + log(1 - e^{5z})$$

Funkce $1 - e^x, 1 - e^{2y}, 1 - e^{5z}$ jsou konkávní, jelikož e^x je konvexní $\implies -e^x$ je konkávní a jsou posunuté akorát o konstantu, což nezmění konkávnost. log je konkávní funkce a je neklesající. Z věty z přednášky tedy víme, že všechny sčítance jsou konkávní, tím pádem i součet $(log(f))$ těchto funkcí je konkávní. Tedy f je log-konkávní.

3

Pro $n = 1$ je problém triviální. Pro $n = 2$ jsme to dokázali v minulém úkolu. Nyní předpokládejme, že $f_n(x_1, \ldots, x_n) = ln(exp(x_1) + \cdots + exp(x_n))$ je konvexní a dokážeme, že $f_{n+1} = ln(exp(x_1) + \ldots, exp(x_{n+1}))$ je konvexní funkce. Učiníme pozorování, že platí $f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f_2(f_n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1})$. Pozorování platí díky tomu, že funkce ln a exp jsou navzájem inverzní. Takže:

$$\begin{gathered} f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f_2(f_n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}) = ln(exp(f_n(x_1, \ldots, x_n)) + exp(x_{n+1})) = \\ = ln(exp(f_n(x_1, \ldots, x_n)) + exp(x_{n+1})) = ln(exp(ln(exp(x_1) + \cdots + exp(x_n))) + exp(x_{n+1})) = \\ = ln(exp(x_1) + \cdots + exp(x_n) + exp(x_{n+1})) \end{gathered}$$

Nyní můžeme použít větu z přednášky o "skládání konvexních funkcí". f_2 je konvexní a neklesající v každé souřadnici, protože pokud zafixujeme $y \in \mathbb{R}$ a uvažujeme funkcí $\forall x \in \mathbb{R} : f_2(x, y)$ jako funkci jedné proměné, tak její derivace je $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{exp(x)}{exp(x)+exp(y)}$. Tento zlomek je vždy kladný, jelikož $exp(x)$ je kladná funkce, takže f_2 je neklesající v souřadnici x. Analogicky to lze dokázat pro druhou souřadnici. Dále víme, že obě vnitřní funkce f_n (z indukčního předpokladu) a x_{n+1} (zřejmě) jsou konvexní. Z věty tedy víme, že i f_{n+1} je konvexní.

4