

1

Funkce f je definována na množině $S = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x + 7y > 10\}$ (kvůli logaritmu), což je konvexní množina (polovina). Konvexitu funkce f dokážeme, tak, že postupně dokážeme konvexitu 3 funkcí, ze kterých je f složena ($f = f_1 + f_2 + f_3$). Víme, že součet konvexních funkcí je konvexní funkce, takže to stačí.

$f_1(x, y) = -57 \log(3x + 7y - 10)$: $-57 \log(x)$ je konvexní a neklesající, $g(x, y) = 3x + 7y - 10$ je konkávní (i konvexní) funkce (hesián je nulová matice). Z přednášky víme, že složením těchto funkcí dostaneme konvexní funkci.

$f_2(x, y) = 5x^2 - xy + y^2$. Hesián je $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ což je pozitivně semidefinitní matice.

Takže f_2 je konvexní. $f_3(x, y) = \max \left(\begin{matrix} x & y \\ y & x+y \end{matrix} \right)$. Charakteristický polynom této matice je $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(-2x - y) + (x^2 - y^2)$. Tato kvadratická rovnice má 2 řešení neboli nám dává 2 funkce (g_1, g_2) v proměnných x, y : $g_1(x, y) = x - \frac{\sqrt{5}}{2}y - \frac{y}{2}$, $g_2(x, y) = x + \frac{\sqrt{5}}{2}y - \frac{y}{2}$. Tyto funkce jsou konvexní, jelikož jejich hesián je nulová matice. Funkci f_3 můžeme tedy vyjádřit takto $f_3(x, y) = \max\{g_1(x, y), g_2(x, y)\}$. Z přednášky víme, že f_3 je konvexní, pokud g_1, g_2 jsou konvexní, což jsme dokázali.

Dokázali jsme tedy, že f je konvexní funkce.

2

$f(x, y, z) = g_1(x)g_2(y)g_3(z)$. Pro kladnost f na \mathbb{R}_{++}^3 stačí dokázat kladnost všech g_i na \mathbb{R}_{++} . První derivace funkcí g_i jsou tvaru e^{-x} . Tato funkce je zřejmě kladná $\forall x \in \mathbb{R}$. Takže g_i jsou ryze rostoucí na svém definičním oboru. Pro všechny g_i platí, že v bodě 0 mají hodnotu $1 - 1 = 0$. Z toho, že jsou g_i ryze rostoucí můžeme tedy usoudit, že $\forall x \in \mathbb{R}_{++} : g_i(x) > 0 \implies \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}_{++}^3 : f(x, y, z) > 0$.

Z vlastnosti logaritmů platí:

$$\log(f(x, y, z)) = \log((1 - e^x)(1 - e^{2y})(1 - e^{5z})) = \log(1 - e^x) + \log(1 - e^{2y}) + \log(1 - e^{5z})$$

Funkce $1 - e^x, 1 - e^{2y}, 1 - e^{5z}$ jsou konkávní, jelikož e^x je konvexní $\implies -e^x$ je konkávní a jsou posunuté akorát o konstantu, což nezmění konkávnost. \log je konkávní funkce a je neklesající. Z věty z přednášky tedy víme, že všechny sčítance jsou konkávní, tím pádem i součet ($\log(f)$) těchto funkcí je konkávní. Tedy f je log-konkávní.

3