NMMB538 - DÚ4

Jan Oupický

1

Předpokládejme $a^2 \neq 4b, b \neq 0$ viz předchozí úkol. Definujme polynom $w(x,y) = y^2 - x^3 + 2ax^2 - x(a^2-4b)$ neboli máme dokázat, že F je dáno $w(u,v) = 0$. Tento polynom je Weirstrassův, tedy víme, že je ireducibilní. Chceme ověřit, že v F platí $w(u,v) = 0$.

Z minulého úkolu víme ($t = \frac{y}{x}, s = \frac{b-x^2}{x}$), že $K(t,s) = F' \supset F = K(t^2, st) = K(u,v)$. Dále víme, že platí rovnost $s^2 = t^4 - 2at^2 + (a^2-4b)$ v F'. Tedy $u = t^2, v = st \implies s = \frac{v}{t}$ v F'. Dosadíme-li $\frac{v^2}{t^2} = \frac{v^2}{u} = u^2 - 2au + (a^2-4b) \implies v^2 = u^3 - 2au^2 + u(a^2-4b)$. Daná rovnost platí v F', ale obsahuje jen prvky z F tedy platí i v F. Tudíž platí $w(u,v) = 0$ v F.

Ukážeme, že $w(x,y)$ je hladký, tedy genus F je 1.

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = -3x^2 + 4ax - a^2 + 4b$$
$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,y) = 2y$$

Spočteme řešení $-3x^2 + 4ax - a^2 + 4b = 0$. Máme řešení $x_{1,2} = \frac{1}{3}(2a \pm \sqrt{a^2+12b})$. Tedy pokud existuje singularita, tak je v bodě $(x_1, 0)$ nebo $(x_2, 0)$. Ověříme opět, zda pro tyto body platí také $w(x,y) = 0$. Pro případ $w(x_1, 0) = 0$: zajímá tedy kdy $-x_1^3 + 2ax_1^2 - x_1(a^2 - 4b) = x_1(-x_1^2 + 2ax_1 - (a^2-4b)) = 0$. $x_1 = 0 \iff 2a - \sqrt{a^2+12b} = 0 \iff 4b = a^2$ což nejde z předpokladů. Zbývá tedy $-x_1^2 + 2ax_1 - (a^2-4b) = 0$. Pokud dosadíme za x_1, tak dostaneme $\frac{-2}{9}\left(a\sqrt{a^2+12b} + a^2 - 12b\right) = 0$, kde řešení musí splňovat $b = 0$ nebo $4b = a^2$. $w(x,y)$ je tedy smooth, tedy je F eliptické funkční těleso, tedy je rodu 1.

Víme, že F'/F je konečné jednoduché algebraické rozšíření. V předchozím úkolu jsme ukázali $K(t,s) \supset K(t^2, st)$ a $K(t,s) = K(t^2,st)(t)$ a že $m_{t,F}(T) = T^2 - t^2$. Tento polynom je ireducibilní nad F a jeho kořeny jsou $t, -t \in F'$, tedy je F'/F normální a Galoisovo.

2

Definujme $w'(x,y) = y^2 - x^3 - ax^2 - bx \in K[x,y], b \neq 0, 4b \neq a^2$. Dále obdobně $w(x,y) = y^2 - x^3 + 2ax^2 - x(a^2-4b) \in K[x,y], b \neq 0, 4b \neq a^2$.

Máme definováno, že $F' = K(x,y)$ kde $w'(x,y) = 0$ a $F' = K(u,v)$, kde $w(u,v) = 0$. Oba polynomy w', w jsou Weirstrassovy a pro funkční tělesa dána těmito polynomy víme, že platí

$$P'_\infty \in \mathbb{P}_{F'/K} : v_{P'_\infty}(x) = -2, v_{P'_\infty}(y) = -3$$
$$P_\infty \in \mathbb{P}_{F/K} : v_{P_\infty}(u) = -2, v_{P_\infty}(v) = -3$$

Dále spočteme valuace pro x, y, u, v v místech $P'_{(0,0)}, P_{(0,0)}$. y, v nejsou tečny v $(0,0)$ a $(0,0) \in V_w \cap V_{w'}$, takže jejich valuace je 1. Pro x, u to vychází stejně, jelikož oba polynomy mají $mult_y = 2$.

$$P'_{(0,0)} \in \mathbb{P}_{F'/K} : v_{P'_{(0,0)}}(x) = 2, v_{P'_{(0,0)}}(y) = 1$$
$$P_{(0,0)} \in \mathbb{P}_{F/K} : v_{P_{(0,0)}}(u) = 2, v_{P_{(0,0)}}(v) = 1$$

(a) Dle definice $\mathrm{div}_{F'/K}(x) = \sum_{P \in \mathbb{P}_{F'/K}} v_P(x)P$. Víme, že jediná místa, kde $v_P(x) \neq 0$ jsou $P'_{(0,0)}$ a P'_∞. Takže $\mathrm{div}_{F'/K}(x) = v'_0(x)P'_{(0,0)} + v'_\infty(x)P'_\infty = 2P'_{(0,0)} - 2P'_\infty$.

Obdobně pro zbytek:

$$\mathrm{div}_{F'/K}(y) = v'_0(y)P'_{(0,0)} + v'_\infty(y)P'_\infty = 1P'_{(0,0)} - 3P'_\infty$$
$$\mathrm{div}_{F/K}(u) = v_0(u)P_{(0,0)} + v_\infty(u)P_\infty = 2P_{(0,0)} - 2P_\infty$$
$$\mathrm{div}_{F/K}(v) = v_0(v)P_{(0,0)} + v_\infty(v)P_\infty = 1P_{(0,0)} - 3P_\infty$$

(b) Použijeme The Fundamental Equality (F.7) a Proposition F.6. Uvažujme nejprve $P = P_\infty$. Víme, že $[F' : F] = 2$. Dále dle proposition F.6 pro taková místa P' platí $\deg_{F'/K}(P')[K : K] = f(P'|P)\deg_{F/K}(P)$. Víme ale že pro naše $P = P_\infty, P_{0,0}$: $\deg_{F/K}(P) = 1$. Tedy $f(P'|P) = \deg_{F'/K}(P')$. Dle F.7 tedy máme 3 možnosti:

   (a) Existují právě 2 místa $P' \in \mathbb{P}_{F'/K} : P'|P, \deg_{F'/K}(P') = 1$ a platí $e(P'|P) = 1 = f(P'|P)$.

   (b) Existuje jedno místo $P' \in \mathbb{P}_{F'/K} : P'|P, \deg_{F'/K}(P') = 1$ a platí $e(P'|P) = 2$ a $f(P'|P) = 1$.

   (c) Existuje jedno místo $P' \in \mathbb{P}_{F'/K} : P'|P, \deg_{F'/K}(P') = 2$ a platí $e(P'|P) = 1$ a $f(P'|P) = 2$.

Uvažujme nyní případ $P = P_\infty$. Víme, že $v_P(u) = -2 \implies u^{-2} \in P$. Spočteme $v'_\infty(u) = v'_\infty(\frac{y^2}{x^2}) = 2v'_\infty(y) - 2v'_\infty(x) = 2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) = -2 \implies u^{-2} \in P'_\infty$.

Víme, že $P'_\infty \cap F$ je místo F/K a toto místo obsahuje u^{-2}. P_∞ je jediné místo F/K co obsahuje u^{-2}. Nezbývá tedy než $P'_\infty \cap F = P_\infty \implies P'_\infty | P_\infty$.

Obdobně $v'_0(u) = v'_0(\frac{y^2}{x^2}) = 2v'_0(y) - 2v'_0(x) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -2 \implies u^{-2} \in P'_{(0,0)}$. Stejně jako výše tedy platí $P'_{(0,0)} \cap F = P_\infty \implies P'_{(0,0)} | P_\infty$.

Pro $P = P_\infty$ tedy máme 2 různá místa F'/K co ho obsahují $(P'_\infty, P'_{(0,0)})$. Platí možnost a) $\implies e(P'_\infty|P) = e(P'_{(0,0)}|P) = 1$ a $f(P'_\infty|P) = f(P'_{(0,0)}|P) = 1$

Uvažujme nyní $P = P_{(0,0)}$. Víme, že místo $P' \in \mathbb{P}_{F'/K} : P'|P$ nemůže už být P'_∞ ani $P'_{(0,0)}$ jinak by $P_{(0,0)} = P' \cap F = P_\infty \implies P_\infty = P_{(0,0)} \implies$ spor.

Chceme místo P', pro které platí $v_{P'}(u) \geq 2$, protože $P'|P \implies v_{P'}(u) \geq v_P(u) = 2$. Platí $v_{P'}(u) = v'_P(\frac{y^2}{x^2}) = 2(v_{P'}(y) - v_{P'}(x)) \geq 2 \iff v_{P'}(y) - v_{P'}(x) \geq 1$. Rozebereme možné hodnoty $v_{P'}(\cdot)$.

Pokud $v_{P'}(x) < 0 \implies P' = P'_\infty \implies$ spor. Pokud $v_{P'}(x) > 0, v_{P'}(y) > 0 \implies P' = P'_{(0,0)} \implies$ spor. Zbývá tedy $v_{P'}(x) = 0$ nebo $v_{P'}(y) = 0$. Druhá možnost nemůže nastat jelikož by neplatilo $v_{P'}(y) - v_{P'}(x) \geq 1$. Hledáme tedy místo F'/K, kde $v_{P'}(x) = 0, v_{P'}(y) \geq 1$.

Chceme tedy najít body $(x', 0) \in V_{w'} \implies x(x^2 + ax + b) = 0$. Pokud $x = 0$, tak máme místo $P'_{(0,0)}$, které nemůžeme použít. Chceme tedy místa příslušná zbylým kořenům. Řešení kvadratické rovnice jsou $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})$. Z přepokladů to pod odmocninou není 0, tedy máme vždy 2 kořeny za předpokladu že existuje daná odmocnina v K.

Označme místa příslušná těmto bodům $(x_1, 0), (x_2, 0) \in V_{w'}$ jako P'_1, P'_2. Máme tedy 2 různá místa stupně 1 t.ž. $v_{P'}(y) \geq 1, v_{P'}(x) = 0 \implies v_{P'}(u) \geq 2$ (jelikož dále $e(P'|P) = 1 \implies v_{P'}(u) = 2$. Tedy daná místa obsahují $P_{(0,0)}$ a platí $e(P'|P) = f(P'|P) = 1$.