

1

- (a) $x \in P \subset O_P$. Z definice O_P víme, že $K \subset O_P \implies K[x] \subset O_P$. Zřejmě $x \notin O_P$, protože jinak by $O_P = F$. Označme $I := P \cap K[x]$. I je prvoideál v $K[x]$, tedy je tvaru $I = (f)$, $f \in K[x]$, f ireducibilní. Označme $R := K[x]_{(f)} = \{\frac{a}{b} \mid a \in K[x], b \in K[x] \setminus (f)\}$.

$R \subseteq O_P$, protože $O_P = \{a \in F \mid v_P(a) \geq 0\}$, $P = \{a \in F \mid v_P(a) \geq 1\} \implies \frac{a}{b} \in R : v_P(\frac{a}{b}) = v_P(a) - v_P(b)$ z definice $v_P(b) = 0$, protože $b \notin (f) \subset P$ a $a \in K[x] \in O_P \implies v_P(a) \geq 0 \implies v_P(\frac{a}{b}) \geq 0$.

Zároveň je R také valuační okruh F . Protože $\frac{a}{b} \in F \iff a \in K[x], b \in K[x] \setminus 0$. Buď $b \notin (f) \implies \frac{a}{b} \in R, a \notin (f), b \in (f) \implies \frac{b}{a} \in R$ a nebo $a, b \in (f)$ a to se dá vydělit na jeden z přechozích případů. Nechť Q je daný jediný maximální ideál R . Máme tedy $Q \subset R \subseteq O_P$. Z maximality P tedy plyne, že $Q = P$ a tedy musí platit $R = O_P$.

- (b) $\implies: P' \subset P \implies a \in F : v_{P'}(a) = e(P'|P) \cdot v_P(a)$ kde $e(P'|P) \geq 1$. $x \in P$ z definice P , tedy $v_P(x) > 0 \implies v_{P'} > 0$ z předchozí rovnosti.

\Leftarrow : Označme $Q := P' \cap F$. $v_{P'}(x) \geq 0, x \in F \implies v_Q(x) \geq 0$. Tedy Q je místo $K(x)$ obsahující x . Víme, že existuje jediné takové místo F/K , protože

$$1 = [F : K(x)] \geq \sum_{P': x \in P'} v_{P'}(x) \deg(P') . \text{ Takže } P' \subset Q = P \implies P' = P.$$

- (c) Z předchozího bodu víme, že $v_P(x) = 1$ a $\deg_{F/K}(P) = 1$. Tudíž $e(P'|P) = v_{P'}(x)$. Stejně tak dle prop F.6, kde $K' = K$, $\deg_{F/K}(P) = 1 \implies f(P'|P) = \deg_{F'/K}(P')$.

- (d) Označíme-li $n = [F' : F]$, rozšíření je konečné, jelikož F' je algebraické funkční těleso nad K a $F = K(x)$ a x je transcendentní nad K .

Použijeme-li značení a předpoklady věty F.7 pro naše P obsahující x a předchozí bod. Dostaneme tedy

$$[F' : F] = \sum_i v_{P_i}(x) \cdot \deg_{F'/K}(P_i)$$

2

- (a) Z předchozího úkolu víme, že pokud w je smooth, tak $F/K(x)$ je separabilní. Také víme, že $F/K(x)$ je konečné. Dále F je jednoduché rozšíření jelikož $F = \{\frac{a+(w)}{b+(w)} \mid a \in K[x, y], b \in K[x, y] \setminus 0\} \supset \{\frac{a+(w)}{b+(w)} \mid a \in K[x], b \in K[x] \setminus 0\} \cong K(x)$. Tedy lehce nepřesně můžeme napsat, že $K(x) = K(x + (w)) \implies F = K(x + (w))(y + (w))$. Budeme ale používat zjednodušené značení, jako v předchozím úkolu.

Tedy $[F : K(x)] = 2$, $m_{y, K(x)}(T) = T^2 - x^3 - ax - b$. Kořeny tohoto polynomu jsou $y, -y \in F$. Víme, že y je separabilní nad $K(x)$ tedy $|\text{Hom}(F, K(x))| = [F : K(x)] = 2$. Oba tyto homomorfismy permutují kořeny $m_{y, K(x)}$ a oba tyto kořeny jsou v F . Takže je $F/K(x)$ normální a Galoisovo.

(b) u