NMMB538 - DÚ8

Jan Oupický

1

Najdeme reprezentanty (B_1, B_2, B_3) a pomocí nich následně nalezneme (C_1, C_2, C_3).

$$(bXZ : -bYZ : X^2)$$

vynásobení Y a substituce do 2. členu za $Y^2Z = X^3 + aX^2Z + bXZ^2$

$$(bXYZ : -b(X^3 + aX^2Z + bXZ^2) : X^2Y)$$

vydělení X

$$(B_1, B_2, B_3) = (bYZ : -b(X^2 + aXZ + bZ^2) : XY) = (bYZ : -bX(X + aZ) - b^2Z^2) : XY)$$

Vidíme, že $t_{(0,0)}(0 : 0 : 1) = (0 : -b^2 : 0) = (0 : 1 : 0)$ což odpovídá tomu, na co jsme přišli v minulém úkolu, že $(0 : 0 : 1) \in \mathrm{Ker}([2])$. Protože $t_{(0,0)}(0 : 0 : 1) = [2](0 : 0 : 1) = \infty$.

Nyní budeme pracovat s (B_1, B_2, B_3).

$$(bYZ : -bX(X + aZ) - b^2Z^2) : XY)$$

vynásobení Y^2

$$(bY(Y^2Z) : -bXY^2(X + aZ) - b^2Z(Y^2Z) : XY^3)$$

substituce za $Y^2Z = X(X^2 + aXZ + bZ^2)$

$$(bXY(X^2 + aXZ + bZ^2) : -bXY^2(X + aZ) - b^2XZ(X^2 + aXZ + bZ^2) : XY^3)$$

vydělení X

$$(C_1 : C_2 : C_3) = (bY(X^2 + aXZ + bZ^2) : -bY^2(X + aZ) - b^2Z(X^2 + aXZ + bZ^2) : Y^3)$$

Vidíme, že $t_{(0,0)}(0 : 1 : 0) = (0 : 0 : 1)$. Což odpovídá, jelikož ∞ je neutrální prvek grupy $D(K)$ tedy $(0, 0) \oplus \infty = (0, 0)$.

2

3

Ztotožníme-li $D = \hat{D}, C = \hat{C}$. Nejprve ukážeme, že $\psi : D \to C$ je isogenie. Z úkolu 6 víme, že $\psi \in \mathrm{Mor}(D, C)$. Zároveň jsme úkazali, že $\psi((0 : 1 : 0)) = (0 : 1 : 0)$.

Bod $(0 : 1 : 0) \in D, C \implies \psi(\omega_D) = \omega_C$. ψ je tedy isogenie $D \to C$.

Aplikujeme větu T.18., kde $\tau = \psi : D \to C$ a $\sigma = [2] : D \to D$. Z úkolu 4 víme, že C je hladké. D je také hladké dle předchozích úkolů.

Dále víme z úkolu 4, že ψ je separabilní, jelikož $\mathrm{Im}(\psi^*) = F$ z úkolu 4 a $F \cong K(C)$ dle definice ψ^*.

Ověříme ještě, že $\mathrm{Ker}(\psi) \subseteq \mathrm{Ker}([2])$. Z úkolu 5 víme, že $\deg(\psi) = 2$. ψ je separabilní isogenie, a proto $|\mathrm{Ker}(\psi)| = 2$. Už víme, že $(0 : 1 : 0) \in \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Ker}([2])$. V úkolu 6 jsme také nalezli další bod $(0 : 0 : 1) \in \mathrm{Ker}(\psi)$ a v minulém úkolu jsme spočetli, že také $(0 : 0 : 1) \in \mathrm{Ker}([2])$. Podmínka na jádra tedy platí.

Dle věty T.18 existuje právě jedna isogenie $\gamma : C \to D : \gamma \circ \psi = [2]$.

V minulém úkolu, jsme zjistili, že $[2] = (\frac{v^2}{4u^2}, \frac{v(a^2-4b-u^2)}{8u^2})$, kde $u = \frac{y^2}{x^2}, v = \frac{y(b^2-x)}{x^2}$. Zároveň zřejmě z definice $\psi(x,y) = (u,v)$. Stačí definovat $\gamma(x,y) = (\frac{y^2}{4x^2}, \frac{y(a^2-4b-x^2)}{8x^2})$. Poté zřejmě platí $[2] = \gamma \circ \psi$.

Tento tvar jsme nalezli tak, že jsme se snažili vyjádřit reprezentanty [2] pomocí u, v.