NMMB538 - DÚ7

Jan Oupický

1

Z definice [2] víme, že $\forall \alpha \in D : [2](\alpha) = \alpha \oplus \alpha$. Vyjádříme tedy vzorec pro výpočet bodu $\alpha \oplus \alpha \in D$ křivky V_w.

Nejprve vyjádříme racionální funkci. Použijeme vzorec pro součet bodů a to, že pro body $(\alpha_1, \alpha_2) \in D$ platí $\alpha_2^2 = \alpha_1^3 + a\alpha_1^2 + b\alpha$. γ bude značit reprezentanta rac. zobrazení $\gamma(\alpha) = [2](\alpha), \gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \gamma_i \in K(x_1, x_2)$.

Vyjádříme nejprve $\gamma_1(x_1, x_2)$. Ze vzorců pro součet stejného bodu vyjde, že:

$$\gamma_1(x_1, x_2) = \frac{-8x_1x_2^2 - 4ax_2^2 + 9x_1^4 + 12ax_1^3 + 6bx_1^2 + 4a^2x_1^2 + 4abx_1 + b^2}{4x_2^2}$$

zasubstituujeme za x_2^2 v čitateli a vyjde:

$$\gamma_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^4 - 2bx_1^2 + b^2}{4x_2^2} = \left(\frac{x_1^2 - b}{2x_2}\right)^2$$

Nyní spočteme $\gamma_2(x_1, x_2)$:

$$\gamma_2(x_1, x_2) = \frac{3x_1^3 + 2ax_1^2 + bx_1}{2x_2} - \frac{3x_1^2 + 2ax_1 + b}{2x_2} \cdot \frac{x_1^4 - 2bx_1^2 + b^2}{4x_2^2} - x_2$$

Převedení na společného jmenovatele a použití substituce za x_2^2 v čitateli:

$$\gamma_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^6 + 2ax_1^5 + 5bx_1^4 - 5b^2x_1^2 - 2ab^2x_1 - b^3}{8x_2^3}$$

Máme tedy reprezentanty $K-$racionálního zobrazení $[2] : D \to D$, kde $[2] = (\gamma_1 + (w), \gamma_2 + (w))$. Sestrojíme nyní projektivní reprezentaci zobrazení [2] jako v předchozím úkolu pomocí lemma M.3.

$$\gamma_i = \frac{a_i}{b_i}, a_i, b_i \in K[x_1, x_2], b_i \neq 0$$
$$A_1' = \widehat{a_1}X_3^2 = (X_1^4 - 2bX_1^2X_3^2 + b^2X_3^4)X_3^2$$
$$A_2' = \widehat{a_2}X_3^3 = (X_1^6 + 2aX_1^5X_3 + 5bX_1^4X_3^2 - 5b^2X_1^2X_3^4 - 2ab^2X_1X_3^5 - b^3X_3^6)X_3^3$$
$$B_1' = 4X_2^2X_3^4$$
$$B_2' = 8X_2^3X_3^6$$
$$\Longrightarrow$$
$$(A_1 : A_2 : A_3) = (A_1'B_2' : A_2'B_1' : B_1'B_2')$$

dosazení a zkrácení:

$$(A_1 : A_2 : A_3) = (2(X_1^4 - 2bX_1^2X_3^2 + b^2X_3^4)X_2X_3 : \widehat{a_2} : 8X_2^3X_3^3)$$

2

Pro reprezentaci $[2] = (A_1 : A_2 : A_3)$ výše platí $\deg_{X_2}(A_1) = 1, \deg_{X_2}(A_2) = 0$. V posledním členu A_3 nahradíme $X_2^2X_3$ za $X_1^3 + aX_1^2X_3 + bX_1X_3^2$. Máme tedy novou reprezentaci, která splňuje podmínky:

$$(A'_1 : A'_2 : A'_3) = (2(X_1^4 - 2bX_1^2X_3^2 + b^2X_3^4)X_2X_3 : \widehat{a_2} : 8X_2X_3^2(X_1^3 + aX_1^2X_3 + bX_1X_3^2))$$

Pro reprezentaci [2] $= (B_1 : B_2 : B_3), \deg_{X_1}(B_i) \leq 2$ využijeme substituci $X_1^3 = X_2^2X_3 - aX_1^2X_3 - bX_1X_3^2$. Každá substituce sníží stupeň (v X_1) polynomu o 1. Zřejmě se dostaneme do tvaru, kde $\deg_{X_1}(B_i) \leq 2$. Substituce do 1. členu:

$$B_1 = 2X_2X_3^2((a^2 - 3b)X_1^2X_3 + X_1X_2^2 + abX_1X_3^2 - aX_2^2X_3 + b^2X_3^3)$$

B_2 získáme opakovanou substitucí za X_1^3. Polynom je tvaru:

$$B_2 = -X_3^2(-X_2^4 + X_2^2X_3f_1(X_1, X_2, X_3) + X_3^2f_2(X_1, X_2, X_3)), \deg_{X_1}(f_i) = i \text{ kde}$$
$$f_1(X_1, X_2, X_3) = a^2X_1 + a^3(-X_3) + 5abX_3 - 3bX_1$$
$$f_2(X_1, X_2, X_3) = -6a^2bX_1^2 + a^3bX_1X_3 + a^4X_1^2 - 3ab^2X_1X_3 + b^2\left(bX_3^2 + 9X_1^2\right)$$

3

Bod $\infty = (0 : 1 : 0) \in D$. Zřejmě $A'_1, A'_3(\infty) = 0$ (násobky X_3) a $A'_2(\infty) = 0$ (jsou tam jen monočleny $X_1^iX_3^j$). Obdobně $B_i(\infty) = 0$ (všechno to jsou násobky X_3).

Pokud ale definujeme $B'_i = \frac{B_i}{X_3^2}$. Poté $B'_2(\infty) = 1$.

Pro zbylé body nyní můžeme uvažovat $X_3 = 1$. Pokud 2. souřadnice bodu z D není 0, tak $A'_3(\alpha) \neq 0$ pro každý takový bod $\alpha \in D$ (protože $X_2 \neq 0$ a $X_3 = 1$).

Zbývají 3 body D tvaru $\alpha = (\alpha_1, 0) \in D$. Možná α_1 jsou $\{0, r_1, r_2\}$, kde $r_i, i = 1, 2$ jsou kořeny $x^2 + ax + b$. Jelikož $X_2 = 0$, tak jsou relevantní jen polynomy A'_2 a B_2 (ostatní jsou 0).

Pro bod $(0, 0)$ se to redukuje na zda $f_2(0, 0, 1) = 0$? Po dosazení platí $f_2(0, 0, 1) = b^3$ neboli $B'_2(\alpha) \neq 0$.

Polynom $f_2(x, 0, 1) = x^2(a^4 - 6a^2 + 9b^2) + x(a^3b - 3ab^2) + b^3$. Tento polynom nemá žádné společné kořeny s polynomem $x^2 + ax + b$. Takže $f_2(r_i, 0, 1) \neq 0, i = 1, 2 \implies B'_2((r_i : 0 : 1)) \neq 0, i = 1, 2$.

4

Označme

$$\rho_1 = \left(\frac{x_1^2 - b}{2x_2}\right)^2$$
$$\rho_2 = \frac{x_1^6 + 2ax_1^5 + 5bx_1^4 - 5b^2x_1^2 - 2ab^2x_1 - b^3}{8x_2^3}$$

Všimneme si, že platí:

$$\rho_1 = \frac{v^2}{4u^2} = \left(\frac{v}{2u}\right)^2$$

Kde $u = t^2, v = st, t = \frac{x_2}{x_1}, s = \frac{b-x_1^2}{x_1}$ z minulých úloh. Poněkud nepřesně zde ztotožňujeme $x_1 + (w) = x_1, x_2 = x_2 + (w)$. Obdobně také ρ_2 jde vyjádřit pomocí u, v.

$$\rho_2 = \rho_2 \frac{x_1^2}{x_1^2} = \frac{(b - x_1^2)(-1)(x_1^6 + 2ax_1^5 + 6bx_1^4 + 2abx_1^3 + b^2x_1^2)}{8x_1^2x_2^3} =$$

$$\frac{v}{8}\frac{-(x_1^6 + 2ax_1^5 + 6bx_1^4 + 2abx_1^3 + b^2x_1^2)}{x_2^3}\frac{x_2}{x_2} = \frac{v}{8}\frac{-((x_1^3 + ax_1^2 + bx_1)^2 - a^2x_1^4 + 4bx_1^4)}{x_2^4} =$$

$$\frac{v}{8}\frac{(-x_2^4 + a^2x_1^4 - 4bx_1^4)}{x_2^4}\frac{x_1^4}{x_1^4} = \frac{v}{8}\frac{a^2 - 4b - \frac{x_2^4}{x_1^4}}{\frac{x_2^4}{x_1^4}} = \frac{v(a^2 - 4b - u^2)}{8u^2}$$

Neboli $\mathrm{Im}([2]^*) = K(\frac{v^2}{4u^2}, \frac{v(a^2-4b-u^2)}{u^2})$. Ukažeme, že $[K(u, v) : \mathrm{Im}([2]^*)] = 2$.

Zvolme $d = \sqrt{\frac{v^2}{u^2}} = \frac{v}{u}$. Ukážeme, že $K(\rho_1, \rho_2, d) = K(u, v)$. Poté zřejmě $min_{d,K(\rho_1,\rho_2)}(T) = T^2 - 4\rho_1$, což je ireducibilní a separabilní polynom nad $K(\rho_1, \rho_2)$ (kořeny $\pm d$).

$$\rho_2 d^{-1} = \frac{v(a^2 - 4b - u^2)}{u^2}\frac{u}{v} = \frac{a^2u - 4bu - u^3}{u^2} = \frac{a^2u - 4bu - (v^2 + 2au^2 - a^2u + 4bu)}{u^2} =$$

$$\frac{-v^2 - 2au^2 + 2a^2u - 8bu}{u^2} = -\frac{v^2}{u^2} - 2a + \frac{2a^2 - 8b}{u} \implies$$

$$\rho_2 d^{-1} + d^2 + 2a = \frac{2a^2 - 8b}{u} \implies u = \frac{2a^2 - 8b}{\rho_2 d^{-1} + d^2 + 2a} \in K(\rho_1, \rho_2, d)$$

$$d = \frac{v}{u} \implies du = v \implies v \in K(\rho_1, \rho_2, d)$$

V úpravách jsme použili rovnost $v^2 = u^3 - 2au^2 + u(a^2 - 4b)$, kterou jsme dokázali v úkolu 4.

Tedy $K(u, v)/\mathrm{Im}([2]^*)$ je separabilní a stupně 2. Z minulých úkolů víme, že $K(D)/K(u, v)$ je galoisovo a stupně 2. Z toho vyplývá, že $K(D)/\mathrm{Im}([2]^*)$ je stupně $2 \cdot 2$ a je separabilní. Ekvivalentně $[2]$ je separabilní isogeny a $\deg([2]) = 4$.

V minulých úlohách jsme dokázali, že D je smooth, tedy dle X.13 $\mathrm{Im}([2]) = D$.

Z definice isogeny víme, že $[2](\infty) = \infty$. Pro zjištění jádra chceme vědět, jaké body $\alpha \in D$ se zobrazí $[2]$ na ∞ neboli pro jaké body platí $\rho_1 = \frac{a_1}{b_1}, \rho_2 = \frac{a_2}{b_2}$ platí $b_i(\alpha) = 0$. Vidíme, že musí $\alpha_2 = 0$. D je smooth, tedy máme 3 různé body $P_0, P_1, P_2 = (0, 0), (r_1, 0), (r_2, 0) \in D$, kde 2. souřadnice je 0.

$K(D)/\mathrm{Im}([2]^*)$ je separabilní, tedy dle T.15 $[K(D)/\mathrm{Im}([2]^*)]_s = [K(D)/\mathrm{Im}([2]^*)] = 4$, tedy $|\mathrm{Ker}([2])| = 4$. Našli jsme 4 různé body a tedy $\mathrm{Ker}([2]) = \{\infty, P_0, P_1, P_2\}$.

Přesně jsme neukázali, že $d \notin K(\rho_1, \rho_2)$. Pokud by to platilo, tak $\deg([2]) = 2$ a $[2]$ separabilní. Nalezli jsme ale 4 různé body, které jsou prvky $\mathrm{Ker}([2])$, tedy spor s T.15.

5

Zadání splňuje předpoklady T.17, tedy $\mathrm{Gal}(K(D)|\mathrm{Im}([2]^*)) = \{t_\alpha^* | \alpha \in \{\infty, P_1, P_2, P_3\}\}$. Z definice $t_\infty(\alpha) = \infty \oplus \alpha = \alpha$, neboli $t_\infty = [1] \iff t_\infty^* = (x, y), (X : Y : Z)$.

Dále $P_1 = (0, 0) \implies t_{(0,0)}(\alpha) = (0, 0) \oplus \alpha$.

Spočteme tedy afinní reprezentanty $t_{(0,0)}^*$, které jsou $t_{(0,0)}^* = \left(\frac{-b}{x_1}, \frac{-bx_2}{x_1^2}\right)$. Z toho dostaneme klasickým způsobem projektivní reprezentanty:

$$(-bX_1X_3 : -bX_2X_3 : X_1^2)$$

Zbylé 2 translace korespondují s body P_2, P_3, kde $P_2 = (r_1, 0), P_3 = (r_2, 0)$ pro r_1, r_2 platí $r_i^2 + ar_i + b = 0$ (jsou to kořeny $x_1^2 + ax_1 + b$). Opět z definice $t_{(r_1,0)}(\alpha) = (r_1, 0) \oplus \alpha$. Pak jsou afinní reprezentanti $t^*_{(r_1,0)}$:

$$\left(\frac{r_1(a + r_1 + x_1)}{x_1 - r_1}, \frac{x_2(ar_1 + 2b)}{(x_1 - r_1)^2}\right)$$

a projektivní:

$$\big(r_1((a + r_1)X_3 + X_1)(X_1 - r_1X_3) : (ar_1 + 2b)X_2X_3 : (X_1 - r_1X_3)^2\big)$$

K 1. affinímu reprezentantovi ($\gamma_1(x_1, x_2)$) jsme se dostali následnovně:

$$\lambda = \frac{x_2}{x_1 - r_1} \implies \gamma_1(x_1, x_2) = -r_1 - x_1 + \frac{x_2^2}{(x_1 - r_1)^2} - a \implies$$

$$\gamma_1(x_1, x_2) = \frac{(-r_1 - x_1)(x_1 - r_1)^2 + x_2^2 - a(x_1 - r_1)^2}{(x_1 - r_1)^2} \text{ roznásobení a sub. za } x_2^2 =$$

$$\frac{x_1^2r_1 + x_1r_1^2 - r^3 + 2x_1ar_1 - ar_1^2 + bx_1}{(x_1 - r_1)^2} = \frac{-ar_1^2 - r_1^3 + ar_1x_1 + x_1(b + ar + r_1^2) + r_1x_1^2}{(x_1 - r_1)^2} \implies$$

$$b + ar_1 + r_1^2 = 0 \implies$$

$$\frac{-ar_1^2 - r_1^3 + ar_1x_1 + r_1x_1^2}{(x_1 - r_1)^2} = \frac{r_1(x_1 - r_1)(a + r_1 + x_1)}{(x_1 - r_1)^2} = \frac{r_1(a + r_1 + x_1)}{x_1 - r_1}$$

Při úpravě jsme použili $x_2^2 = x_1^3 + ax_1^2 + bx_1$ a $r_1^2 + ar_1 = -b$. K druhému ($\gamma_2(x_1, x_2)$):

$$\gamma_2(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1 - r_1} \cdot \left(r_1 - \frac{r_1(a + r_1 + x_1)}{x_1 - r_1}\right) - 0 =$$

$$\frac{x_2}{x_1 - r_1} \cdot \left(\frac{r_1(x_1 - r_1) - r_1(a + r_1 + x_1)}{x_1 - r_1}\right) = \frac{x_2}{x_1 - r_1} \cdot \left(\frac{-2r_1^2 - ar_1}{x_1 - r_1}\right) =$$

$$\frac{x_2}{x_1 - r_1} \cdot \left(\frac{-r_1^2 + b}{x_1 - r_1}\right) = \frac{x_2(ar_1 + 2b)}{(x_1 - r_1)^2}$$

Pro $P_3 = (r_2, 0)$, $t_{(r_2,0)}(\alpha) = (r_2, 0) \oplus \alpha$ můžeme provést stejný postup. Reprezentanti $t^*_{(r_2,0)}$ jsou tedy:

$$\left(\frac{r_2(a + r_2 + x_1)}{x_1 - r_2}, \frac{x_2(ar_2 + 2b)}{(x_1 - r_2)^2}\right)$$

a projektivní:

$$\big(r_2((a + r_2)X_3 + X_1)(X_1 - r_2X_3) : (ar_2 + 2b)X_2X_3 : (X_1 - r_2X_3)^2\big)$$