NMMB538 - DÚ1

Jan Oupický

1

$\hat{f}$ značí homogenizaci polynomu f pomocí proměnné z. Proto

$$\widehat{w(x,y)} = y^2z - x^3 - axz^2 - bz^3$$

$\pi_X(f)$ značí náhrazení proměnné X jednotkou. Proto

$$\pi_X(\widehat{w(x,y)}) = -bz^3 + y^2z - az^2 - 1$$

$$\pi_Y(\widehat{w(x,y)}) = -bz^3 - x^3 - axz^2 + z$$

2

$w(x,y) = y^2 - x^3 - ax - b$. $deg(w) = 3 \implies 3w(x,y) = -3x^3 + 3y^2 - 3ax - 3b$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3x^2 - a$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2y \implies$$

$$x\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + y\frac{\partial w}{\partial y} = x(-3x^2 - a) + y(2y) = -3x^3 + 2y^2 - ax \neq 3w(x,y)$$

Rovnost (P4) tedy neplatí, což není překvapivé, jelikož w není homogenní.

3

Využijeme toho, že $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ je irreducibilní právě tehdy, když $\hat{f}$ je irreducibilní (P3 (v)) a také vlastnosti (P3 (i)). Označme $\hat{f} = F \coloneqq 2X^3 - X^2Y + 2XY^2 - Y^3$.

Použijeme zobrazení π_Y a označme $f \coloneqq \pi_Y(F) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Tento polynom už lze jednoduše rozložit na ireducibilní polynomy. Všimneme si, že $f = 2(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}) \implies f(\frac{1}{2}) = 0 \implies f = (2x-1)(x^2+1)$. Vidíme, že oba faktory jsou ireducibilní $\mathbb{Q}[x]$. Použijeme zobrazení $\hat{}$ na oba faktory a dostaneme, že
$F = (2X - Y)(X^2 + Y^2)$, přičemž víme, že jsou ireducibilní.