# NMMB538 - DÚ1

Jan Oupický

## 1

$\hat{f}$ značí homogenizaci polynomu $f$ pomocí proměnné $z$. Proto

$$\widehat{w(x,y)} = y^2z - x^3 - axz^2 - bz^3$$

$\pi_X(f)$ značí náhrazení proměnné $X$ jednotkou. Proto

$$\pi_X(\widehat{w(x,y)}) = -bz^3 + y^2z - az^2 - 1$$

$$\pi_Y(\widehat{w(x,y)}) = -bz^3 - x^3 - axz^2 + z$$

## 2

$w(x,y) = y^2 - x^3 - ax - b$. $deg(w) = 3 \implies 3w(x,y) = -3x^3 + 3y^2 - 3ax - 3b$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3x^2 - a$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2y \implies$$

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = x(-3x^2 - a) + y(2y) = -3x^3 + 2y^2 - ax \neq 3w(x,y)$$

Rovnost (P4) tedy neplatí, což není překvapivé, jelikož $w$ není homogenní.

## 3

Využijeme toho, že $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ je irreducibilní právě tehdy, když $\hat{f}$ je irreducibilní (P3 (v)) a také vlastnosti (P3 (i)). Označme $\hat{f} = F := 2X^3 - X^2Y + 2XY^2 - Y^3$.

Použijeme zobrazení $\pi_Y$ a označme $f := \pi_Y(F) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Tento polynom už lze jednoduše rozložit na ireducibilní polynomy. Všimneme si, že $f = 2(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}) \implies f(\frac{1}{2}) = 0 \implies f = (2x-1)(x^2+1)$. Vidíme, že oba faktory jsou ireducibilní $\mathbb{Q}[x]$. Použijeme zobrazení $\hat{}$ na oba faktory a dostaneme, že
$F = (2X - Y)(X^2 + Y^2)$, přičemž víme, že jsou ireducibilní.

## 4

Označme $w(x,y) := y^2 - x^3 - ax - b \in K[x,y], C = V_w$. Po zhomogenizovaní dostaneme $W := \hat{w} = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3 \in K[X,Y,Z], \hat{C} = V_W$. Vidíme, že bod v nekonečnu pro tuto křivku je jediný a to $(Z : X : Y) = (0 : 0 : 1)$. Chceme tedy spočítat valuaci X a Y v místě $P_{(0:0:1)} \in K(\hat{C})$, která bude ekvivalentní valuaci x a y v místě $P_\infty \in K(C)$.

Jediný model, který nám zobrazí bod $(0:0:1)$ na affiní bod je $\pi_Y(\hat{C})$. Přesněji $\pi_Y((0:0:1)) = (0,0)$. Stejně tak dostáváme vyjádření křivky (pokud pouzijeme trochu nepřesně značení $\pi_Y$ i pro homomorfismus polynomů) $f \coloneqq \pi_Y(W) = z - x^3 - axz^2 - bz^3 = z + z(-axz - bz^2) + (-x^3) \in K[x,z]$.

Polynom $f$ je v bodě $(0,0)$ hladký ($\frac{\partial f}{\partial z} = 1$). Tečna v bodě $(0,0)$ je $z$. Víme tedy že $v_{(0,0)}(x) = 1$, protože $x \notin (z)$. Dále máme rovnost $z + z(-axz - bz^2) = x^3 \implies v_{(0,0)}(x^3) = 3v_{(0,0)}(x) = 3 = v_{(0,0)}(z(1 - axz - bz^2)) = v_{(0,0)}(z) + v_{(0,0)}(1 - axz - bz^2) = v_{(0,0)}(z)$. Máme tedy $v_{(0,0)}(x) = 1, v_{(0,0)}(z) = 3$.

Použijeme-li izomorfimus $\psi_Y$ z P.14 dostaneme tedy $P_{(0,0)} \in K(V_f) \cong P_{(0:0:1)} \in K(\hat{C})$. Dostaneme tedy $1 = v_{P_{(0,0)}}(x + (f)) = v_{P_{(0:0:1)}}(\frac{X+(W)}{Y+(W)})$ a $3 = v_{P_{(0,0)}}(z + (f)) = v_{P_{(0:0:1)}}(\frac{Z+(W)}{Y+(W)})$. Víme tedy:

$$v_{P_{(0:0:1)}}(X + (W)) - v_{P_{(0:0:1)}}(Y + (W)) = 1$$

$$v_{P_{(0:0:1)}}(Z + (W)) - v_{P_{(0:0:1)}}(Y + (W)) = 3$$

Poté $P_\infty \in K(C) \cong P_{(0:0:1)} \in K(\hat{C}) \implies v_{P_\infty}(x + (w)) = v_{P_{(0:0:1)}}(\frac{X+(W)}{Z+(W)}) = 1 - 3 = -2$ a $v_{P_\infty}(y + (w)) = v_{P_{(0:0:1)}}(\frac{Y+(W)}{Z+(W)}) = -v_{P_{(0:0:1)}}(\frac{Z+(W)}{Y+(W)}) = -3$.

# 5

Absolutní ireducibilita: Označme zadaný polynom $f \coloneqq ax^2 + by^2 - 1$. $f$ je primitivní. Nechť $D = \bar{K}[x]$, $D$ je zřejmě obor. Použijeme Eisensteinovo kritérium. $f \in D[y] \implies f = by^2 + (ax^2 - 1)$. $ax^2 - 1 = (\sqrt{a}x - 1)(\sqrt{a}x + 1) \in D$. Zvolme $c \coloneqq \sqrt{a}x + 1$, $c$ je irreducibilní v $D$, $b \in K, c \nmid b$ a zároveň $c | (ax^2 - 1), c^2 \nmid (ax^2 - 1)$. Tedy dle Eisensteinova kritéria je $f$ irreducibilní v $D$ neboli absolutně irreducibilní v $K[x,y]$.

Spočteme parciální derivace pro $f$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2ax$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2by$$

Obě derivace jsou nulové pouze v bode $(0,0)$, ten ale není na křivce. $C$ je proto hladká.

Označme $F \coloneqq \hat{f} = aX^2 + bY^2 - Z^2$. $\hat{C} = V_F$. Derivace pro $X, Y$ jsou stejné. Jediná nová parciální derivace je $\frac{\partial F}{\partial Z}(z,x,y) = -2Z$. Jako v přechozím případě, aby všechny derivace byly 0, tak musí být všechny souřadnice rovné 0, což není bod v projektivní prostoru. Proto je $\hat{C}$ hladká.

Pokud místo v nekonečnu pro $K(C)$ existuje, tak bude odpovídat místu v $K(\hat{C})$ pro nějaký bod $\alpha \in \hat{C}$. Pro tento bod tedy platí $F(\alpha) = 0$. Tento bod bude mít souřadnice $(Z : X : Y) = (0 : \alpha_1 : \alpha_2)$. Zvolme $\alpha_1 = 1$ a dopočteme $\alpha_2$. $F(\alpha) = 0 \iff a + bY^2 = 0 \implies Y = \sqrt{-\frac{a}{b}}$. Takže musí platit $\alpha = (0 : 1 : \sqrt{-\frac{a}{b}})$.

Pokud $\sqrt{-\frac{a}{b}} \in K$, tak dle P.15 je toto místo $(P_\alpha)$ jednoznačně určené a je stupně 1. Pokud $\sqrt{-\frac{a}{b}} \notin K$, tak nemůže být stupně 1.

Valuace: BÚNO: $a = 1, b = -1$. Máme tedy $f = x^2 - y^2 - 1, C = V_f \implies F \coloneqq \hat{f} = X^2 - Y^2 - Z^2, \hat{C} = V_F$. Bod v nekonečnu tedy je $(Z : X : Y) = (0 : 1 : 1)$. Zvolme stejně jako v úloze 4 model pomocí $\pi_Y \implies \pi_Y((0:1:1)) = (0,1), f' \coloneqq \pi_Y(F) = x^2 - z^2 - 1$. Na polynom musíme aplikovat substituci, abychom křivku posunuly do počátku. Zvolme tedy $x \mapsto x+1, z \mapsto z$. Máme tedy nový polynom $f''(z,x) = f'(z,x+1) = x^2+2x-z^2$, pro který $f''(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(z,x) = 2x+2 \implies f''$ je hladký v $(0,0)$. Spočteme valuace.

$v_{P_{(0,0)}}(z) = 1$, jelikož tečna v $(0,0)$ je $2x$ a $z \notin (2x)$. Máme také rovnost $x^2+2x = z^2$. Z té dopočítáme valuaci pro x. $v_{P_{(0,0)}}(z^2) = 2v_{P_{(0,0)}}(z) = 2 = v_{P_{(0,0)}}(x^2+2x) = v_{P_{(0,0)}}(x) + v_{P_{(0,0)}}(x+2) = v_{P_{(0,0)}}(x)$. Takže $v_{P_{(0,0)}}(x) = 2$.

Stejným postupem (využitím izomorfismu a resubstitucí $\psi_Y$) jako v úloze 4 dostaneme $v_{P_{(0,1)}}(x+(f')) = v_{P_{(0:1:1)}}(\frac{X+(F)}{Y+(F)})$ a $v_{P_{(0,1)}}(z+(f')) = v_{P_{(0:1:1)}}(\frac{Z+(F)}{Y+(F)})$. Z toho opět dopočítáme $v_{P_\infty}(y+(f)) = v_{P_{(0:1:1)}}(\frac{Y+(F)}{Z+(F)}) = -1$ a $v_{P_\infty}(x+(f)) = v_{P_{(0:1:1)}}(\frac{X+(F)}{Z+(F)}) = 1$

V případě $K = \mathbb{R}$, tak místo v nekonečnu existuje pokud $a > 0, b < 0$ nebo $a < 0, b > 0$ (jinak neexistuje odmocnina). Pokud místo neexistuje, tak má křivka tvar elipsy. Naopak pokud místo v nekonečnu existuje, tak je to hyperbola.