NMMB538 - DÚ4

Jan Oupický

1

Předpokládejme $a^2 \neq 4b, b \neq 0$ viz předchozí úkol. Definujme polynom $w(x,y) = y^2 - x^3 + 2ax^2 - x(a^2-4b)$ neboli máme dokázat, že F je dáno $w(u,v) = 0$. Tento polynom je Weirstrassův, tedy víme, že je ireducibilní. Chceme ověřit, že v F platí $w(u,v) = 0$.

Z minulého úkolu víme ($t = \frac{y}{x}, s = \frac{b-x^2}{x}$), že $K(t,s) = F' \supset F = K(t^2, st) = K(u,v)$. Dále víme, že platí rovnost $s^2 = t^4 - 2at^2 + (a^2-4b)$ v F'. Tedy $u = t^2, v = st \implies s = \frac{v}{t}$ v F'. Dosadíme-li $\frac{v^2}{t^2} = \frac{v^2}{u} = u^2 - 2au + (a^2-4b) \implies v^2 = u^3 - 2au^2 + u(a^2-4b)$. Daná rovnost platí v F', ale obsahuje jen prvky z F tedy platí i v F. Tudíž platí $w(u,v) = 0$ v F.

Ukážeme, že $w(x,y)$ je hladký, tedy genus F je 1.

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = -3x^2 + 4ax - a^2 + 4b$$
$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,y) = 2y$$

Spočteme řešení $-3x^2 + 4ax - a^2 + 4b = 0$. Máme řešení $x_{1,2} = \frac{1}{3}(2a \pm \sqrt{a^2+12b})$. Tedy pokud existuje singularita, tak je v bodě $(x_1, 0)$ nebo $(x_2, 0)$. Ověříme opět, zda pro tyto body platí také $w(x,y) = 0$. Pro případ $w(x_1, 0) = 0$: zajímá tedy kdy $-x_1^3 + 2ax_1^2 - x_1(a^2 - 4b) = x_1(-x_1^2 + 2ax_1 - (a^2-4b)) = 0$. $x_1 = 0 \iff 2a - \sqrt{a^2+12b} = 0 \iff 4b = a^2$ což nejde z předpokladů. Zbývá tedy $-x_1^2 + 2ax_1 - (a^2-4b) = 0$. Pokud dosadíme za x_1, tak dostaneme $\frac{-2}{9}\left(a\sqrt{a^2+12b} + a^2 - 12b\right) = 0$, kde řešení musí splňovat $b = 0$ nebo $4b = a^2$. $w(x,y)$ je tedy smooth, tedy je F eliptické funkční těleso, tedy je rodu 1.

Víme, že F'/F je konečné jednoduché algebraické rozšíření. V předchozím úkolu jsme ukázali $K(t,s) \supset K(t^2, st)$ a $K(t,s) = K(t^2,st)(t)$ a že $m_{t,F}(T) = T^2 - t^2$. Tento polynom je ireducibilní nad F a jeho kořeny jsou $t, -t \in F'$, tedy je F'/F normální a Galoisovo.