NMMB538 - DÚ3

Jan Oupický

1

(a) $x \in P \subset O_P$. Z definice O_P víme, že $K \subset O_P \implies K[x] \subset O_P$. Zřejmě $x \notin O_P$, protože jinak by $O_P = F$. Označme $I \coloneqq P \cap K[x]$. I je prvoideál v $K[x]$, tedy je tvaru $I = (f), f \in K[x], f$ ireducibilní. Označme $R \coloneqq K[x]_{(f)} = \{\frac{a}{b} | a \in K[x], b \in K[x] \setminus (f)\}$.

$R \subseteq O_P$, protoze $O_P = \{a \in F | v_P(a) \geq 0\}, P = \{a \in F | v_P(a) \geq 1\} \implies \frac{a}{b} \in R : v_P(\frac{a}{b}) = v_P(a) - v_P(b)$ z definice $v_P(b) = 0$, protože $b \notin (f) \subset P$ a $a \in K[x] \in O_P \implies v_P(a) \geq 0 \implies v_P(\frac{a}{b} \geq 0$.

Zároveň je R také valuační okruh F. Protože $\frac{a}{b} \in F \iff a \in K[x], b \in K[x] \setminus 0$. Buď $b \notin (f) \implies \frac{a}{b} \in R, a \notin (f), b \in (f) \implies \frac{b}{a} \in R$ a nebo $a, b \in (f)$ a to se dá vydělit na jeden z přechozích případů. Nechť Q je daný jediný maximální ideál R. Máme tedy $Q \subset R \subseteq O_P$. Z maximality P tedy plyne, že $Q = P$ a tedy musí platit $R = O_P$.

(b) $\Rightarrow$: $P' \subset P \implies a \in F : v_{P'}(a) = e(P'|P) \cdot v_P(a)$ kde $e(P'|P) \geq 1$. $x \in P$ z definice P, tedy $v_P(x) > 0 \implies v_{P'} > 0$ z předchozí rovnosti.

$\Leftarrow$: Označme $Q \coloneqq P' \cap F$. $v_{P'}(x) \geq 0, x \in F \implies v_Q(x) \geq 0$. Tedy Q je místo $K(x)$ obsahující x. Víme, že existuje jediné takové místo F/K, protože $1 = [F : K(x)] \geq \sum_{P: x \in P} v_P(x) \deg(P)$. Takže $P' \subset Q = P \implies P'|P$.

(c) Z předchozího bodu víme, že $v_P(x) = 1$ a $\deg_{F/K}(P) = 1$. Tudíž $e(P'|P) = v_{P'}(x)$. Stejně tak dle prop F.6, kde $K' = K, \deg_{F/K}(P) = 1 \implies f(P'|P) = \deg_{F'/K}(P')$.

(d) Označíme-li $n = [F' : F]$, rozšíření je konečné, jelikož F' je algebraické funkční těleso nad K a $F = K(x)$ a x je transcendentní nad K.

Použijeme-li značení a předpoklady věty F.7 pro naše P obsahující x a předchozí bod. Dostaneme tedy
$[F' : F] = \sum_i v_{P_i}(x) \cdot \deg_{F'/K}(P_i)$

2

Označme $w(x, y) = y^2 - x^3 - ax - b$.

(a) Z předchozího úkolu víme, že pokud w je smooth, tak $F/K(x)$ je separabilní. Také víme, že $F/K(x)$ je konečné. Dále F je jednoduché rozšíření jelikož $F = \{\frac{a+(w)}{b+(w)} | a \in K[x, y], b \in K[x, y] \setminus 0\} \supset \{\frac{a+(w)}{b+(w)} | a \in K[x], b \in K[x] \setminus 0\} \cong K(x)$. Tedy lehce nepřesně můžeme napsat, že $K(x) = K(x + (w)) \implies F = K(x + (w))(y + (w))$. Budeme ale používat zjednodušené značení, jako v předchozím úkolu.

Tedy $[F : K(x)] = 2$, $m_{y,K(x)}(T) = T^2 - x^3 - ax - b$. Kořeny tohoto polynomu jsou $y, -y \in F$. Víme, že y je separabilní nad $K(x)$ tedy $|\mathrm{Hom}(F, \overline{K(x)})| = [F :$

$K(x)] = 2$. Oba tyto homomorfismy permutují kořeny $m_{y,K(x)}$ a oba tyto kořeny jsou v F. Takze je $F/K(x)$ normální a Galoisovo.

(b) Pokud $t = y + \lambda x + \mu$, protíná $C = V_w$ právě ve 2 různých bodech, tak pro dané (x, y) platí $y = -\lambda x - \mu, w(x, y) = 0 \implies w(x, -\lambda x - \mu) = 0$, kde $g(x) = w(x, -\lambda x - \mu) = -x^3 + x^2\lambda^2 + x(2\lambda\mu - a) + \mu^2 - b \in K[x]$. Tento polynom je stupně 3 a dle zadání má jen 2 různé kořeny, takže z definice není separabilní.

Pokud najdeme prvek $a \in F$, tž. g je minimální polynom a nad $K(t)$, tak F není separabilní a tudíž ani Galoisovo.