NMMB538 - DÚ5

Jan Oupický

1

1. Použijeme lemma R.1. Využijeme předchozího úkolu, kde $F' = K(D)$. Pokud označíme $y_1 := \frac{x_2^2+(g)}{x_1^2+(g)} = t^2 \in K(D), \frac{x_2(b-x_1^2)+(g)}{x_1^2+(g)} = st \in K(D)$. ϕ dle R.1 existuje pokud y_1 nebo y_2 je transcendentní nad K a $f(y_1, y_2) = 0$. Z předchozího úkolu zřejmě platí, že oba prvky jsou transcendentní nad K. Dále jsme v minulém úkolu také ukázali, že platí $f(y_1, y_2) = f(u, v) \in F' = K(D)$.

2. Dle R.7 platí $\phi = \sigma^*$, kde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, kde $\sigma_1 = y_1, \sigma_2 = y_2$. Zvolíme reprezentanty (y_1, y_2) například jako $r_1 = \frac{x_2^2}{x_1^2}, r_2 = \frac{x_2(b-x_1^2)}{x_1^2}$.

3. Víme, že y_1, y_2 jsou trans. nad K, tedy $\deg(\sigma) < \infty$. Zároveň jsme ukázali, že $K(y_1, y_2) = K(u, v)$ a v minulých úkolech jsme ukázali, že $[F' : K(y_1, y_2)] = 2 \implies$ protože $F' = K(D) : [K(D) : K(y_1, y_2)] = 2 = \deg(\sigma)$.

4. Pro přehlednost označme P_∞ ze zadání jako $M_\infty \in \mathbb{P}_{K(C)/K}$. Místo $M_\infty \in \mathbb{P}_{K(C)/K}$ zřejmě obsahuje $x_1^{-2} + (f)$, jelikož $v_\infty(x_1 + (f)) = -2$. Tento prvek se nám pomocí σ^* zobrazí na $\frac{x_1^4+(g)}{x_2^4+(g)} = \frac{x_2^{-4}+(g)}{x_1^{-4}+(g)} = u^{-2} \in \mathrm{Im}(\sigma^*) = F \subset F'$. Z minulého úkolu víme, že jediné místo F/K, co obsahuje u^{-2} je $P_\infty \in \mathbb{P}_{F/K}$, tedy $\sigma^*(M_\infty) = P_\infty$. Dále jsme také ukázali, že pro $P_0' \in \mathbb{P}_{K(D)/K}$ platí $P_0'|P_\infty \implies P_0'|\sigma^*(M_\infty)$.

5. $\Rightarrow$:

   Opět použijeme značení M_α pro místo $K(C)/K$. Zvolme $\rho \in K(C)$. Víme, že platí $v_{M_\alpha}(\rho) > 0 \iff \rho(\alpha) = 0$. Z předpokladů platí obdobně, že $v_{P_\beta'}(\sigma^*(\rho)) > 0 \implies \sigma^*(\rho)(\beta) = 0$. Dle lemma R.8 pokud je $\rho(\sigma(\beta))$ definované, tak platí $\rho(\sigma(\beta)) = \sigma^*(\rho)(\beta) \implies \rho(\sigma(\beta)) = 0 \implies \rho \in M_{\sigma(\beta)}$, $\sigma(\beta) \in C$ tedy musí platit $M_{\sigma(\beta)} = M_\alpha \iff \sigma(\beta) = \alpha$.

   Pokud $\rho(\sigma(\beta))$ není def. tak musí platit $\beta \notin \mathrm{Dom}(\sigma) \implies \beta_1 = 0 \implies \beta_2 = 0$. Případ $\sigma(\beta) \notin \mathrm{Dom}(\rho)$ nenastane, jelikož ρ můžeme brat jako $\frac{x_1-\alpha_1+(f)}{1+(f)}$ nebo $\frac{x_2-\alpha_2+(f)}{1+(f)}$ tedy $\mathrm{Dom}(\rho) = C$. Tedy v případě $\beta = (0, 0)$ máme z 4) $P_0'|P_\infty$. Dále by tedy P_0' obsahovalo místo P_α což je spor.

   $\Leftarrow$:

   Obdobně zvolme $\rho \in M_\alpha \implies \rho(\alpha) = 0$. Platí tedy $0 = \rho(\alpha) = \rho(\sigma(\beta)) = \sigma^*(\rho)(\beta)$. Neboli $v_{P_\beta'}(\sigma^*(\rho)) > 0 \implies P_\beta'|\sigma^*(M_\alpha)$.

6. Vidíme, že $D \setminus \{(0, 0)\} = (\mathrm{Dom}(r_1) \cap \mathrm{Dom}(r_2))$. Kdyby $\mathrm{Dom}(\rho) \supset \{(0, 0)\}$, tak by dle 5) $P_0'|P_\alpha$ což je spor, jelikož již obsahuje P_∞.