NMMB538 - DÚ2

Jan Oupický

1

Chceme ukázat, že $F/F^{p^i}, i \geq 0, p = char(F)$ je čistě neseparabilní. Toto tělesové rozšíření je zřejmě algebraické, jelikož $\forall \alpha \in F : m_{\alpha, F^{p^i}} = x^{p^i} - \alpha^{p^i} \in F^{p^i}[x]$. Chceme tedy ukázat, že $\forall \alpha \in F$ je čistě neseparabilní.

Využijeme prop. S.5 implikaci $(ii) \implies (i)$. Čistě z definice F^{p^i} tedy dokážeme nalézt dané $j \geq 0$ tž. $\alpha^{p^{ij}} \in F^{p^i}$ $(j = 1)$. Rozšíření je tedy čistě neseparabilní.

2

Máme $char(K) = p$. Předpokládejme, že K je perfektní, neboli $a \mapsto a^p$ je automorfimus K. Máme tedy $F = K(x), F^p = (K(x))^p$. Víme, že platí $a, b \in K[x] : (a+b)^p = a^p + b^p$. Tudíž $f(x) = \sum f_i x^i \in K[x] \implies (f(x))^p = \sum f_i^p x^{ip}$. Díky tomu, že je K perfektní, víme $\forall a \in K \exists b \in K : b^p = a$. Poté již nahledéneme, že $(K(x))^p = K(x^p) = F^p$.

Chceme tedy spočítat $[F : F^p] = [K(x) : K(x^p)]$. x je algebraický prvek nad $K(x^p)$, protože $g(T) = T^p - x^p \in K(x^p)[T] = F^p[T]$. Tento polynom je m_{x,F^p}, protože kdyby existoval $f \in F^p[T] : deg(f) < deg(g)$, tak by $f|g$. Zároveň ale $g(T) = T^p - x^p = (T-x)^p$, takže by f musel být polynom, který je tvaru $(T-x)^i, i < p$, ale to nemůže být polynom $F^p[T] = K(x^p)[T]$, protože x^i se v tam nevyskytují.

Zároveň zřejmě $K(x^p)(x) = K(x, x^p) = K(x)$, takže

$$p = \deg m_{x,F^p} = [K(x) : K(x^p)] = [F : F^p]$$

Není důvod proč stejný postup nebude fungovat pro $[F : F^{p^i}]$, takže $[F : F^{p^i}] = p^i$. Stejně tak symetricky můžeme nově definovat $D = K(x)$ a hodnotu $[K(x,y) : K(x^p, y^p, x)] = [D(y) : D(y^p)]$ spočítat obdobně. Máme tedy $[K(x,y) : K(x^p, y^p)] = p^2$.

Nyní spočteme hodnoty $N_{F|F_p}(\alpha), \alpha = x^2 + 1$ a $Tr_{F|F_p}(\alpha)$. Víme, že x je čistě neseparabilní. Tudíž $[F : F^p]_s < [F : F^p] (\iff [K(x^p)(x) : K(x^p)]_s < [K(x^p)(x) : K(x^p)])$. Dále máme rovnost $[F : F^p] = [F : F^p]_s \cdot [F : F^p]_i = p \implies [F : F^p]_s = 1, [F : F^p]_i = p$. Pro výpočet normy a stopy použijeme tedy prop S.12, kde $s = 1, t = p$. Jediný prvek $\mathrm{Hom}_{F^p}(F, \bar{F^p})$ je tedy identita na F. Takže $\sigma(\alpha) = \alpha \implies N_{F|F_p}(\alpha) = \alpha^p = (x^2+1)^p = x^{2p} + 1, Tr_{F|F_p}(\alpha) = p(x^2+1) = 0$.

Nyní předpokládejmě, že K není perfektní. Tudíž musí být K nekonečné těleso s charakteristikou p, kde Frobeinův endomorfismus není surjektivní. Tudíž $K(x)^p \neq K(x^p)$. Poté rozšíření F/F^p nebude konečného stupně, jelikož v $K(x)$ existuje nekonečně mnoho prvků z K, které nejsou tvaru $a^p, a \in K$ tudíž nejsou v F^p.

3

Mějme tedy $K \subset L$ separabilní rozšíření těles. Dokážeme L perfektní $\iff$ K perfektní. Platí $char(K) = 0 \iff char(L) = 0$, tedy v případě nulové charakteristiky je to zřejmé. Uvažujme tedy $p = char(K) = char(L)$.

$\Rightarrow$: L je perfektní, tudíž je Frobeinův endomorfimus surjektivní na L. Zároveň $\forall a \in K : a^p \in K$, tudíž Frobeinův endomorfimus nemůže zobrazit prvek $a \in K \subset L$ na prvek, který je mimo K. Takže je Frobeinův endomorfismus surjektivní i na K neboli K je perfektní.

$\Leftarrow$: To, že je Frobeinův endomorfimus surjektivní můžeme vyjádřit, že $K = K^p$. Tedy K je perfektní $\iff K^p = K$. Dále z definice separability platí, že L/K je algebraické rozšíření. Algebraické rozšíření můžeme zapsat takto $L = \cup_{a \in L} K(a)$. a je algebraické nad K a tedy $K(a)$ je rozšíření konečného stupně. Pokud ukážeme, že $K(a)$ je perfektní, tak bude i L perfektní, jelikož je to sjednocení perfektních těles.

Označme $[K(a) : K] = n \in \mathbb{N}$. Označme $f(x) = m_{a,K}$. Díky perfektnosti K platí $(K(a))^p = K(a^p), K = K^p$, $f(a) = 0 \implies (f(a))^p = \iff f(a^p) = 0$ tedy $[K(a^p) : K] = n$. Máme tedy:

$$n = [K(a) : K] = [K(a) : K(a^p)] \cdot [K(a^p) : K], [K(a^p) : K] = n \implies [K(a) : K(a^p)] = 1$$

Neboli $K(a) = K(a^p) = (K(a))^p$ tedy $K(a)$ je perfektní. Takže L je perfektní.

4