

## 1

Předpokládejme  $a^2 \neq 4b, b \neq 0$  viz předchozí úkol. Definujme polynom  $w(x, y) = y^2 - x^3 + 2ax^2 - x(a^2 - 4b)$  neboli máme dokázat, že  $F$  je dáno  $w(u, v) = 0$ . Tento polynom je Weirstrassův, tedy víme, že je ireducibilní. Chceme ověřit, že v  $F$  platí  $w(u, v) = 0$ .

Z minulého úkolu víme  $(t = \frac{y}{x}, s = \frac{b-x^2}{x})$ , že  $K(t, s) = F' \supset F = K(t^2, st) = K(u, v)$ . Dále víme, že platí rovnost  $s^2 = t^4 - 2at^2 + (a^2 - 4b)$  v  $F'$ . Tedy  $u = t^2, v = st \implies s = \frac{v}{t}$  v  $F'$ . Dosadíme-li  $\frac{v^2}{t^2} = \frac{v^2}{u} = u^2 - 2au + (a^2 - 4b) \implies v^2 = u^3 - 2au^2 + u(a^2 - 4b)$ . Daná rovnost platí v  $F'$ , ale obsahuje jen prvky z  $F$  tedy platí i v  $F$ . Tudíž platí  $w(u, v) = 0$  v  $F$ .

Ukážeme, že  $w(x, y)$  je hladký, tedy genus  $F$  je 1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) &= -3x^2 + 4ax - a^2 + 4b \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) &= 2y\end{aligned}$$

Spočteme řešení  $-3x^2 + 4ax - a^2 + 4b = 0$ . Máme řešení  $x_{1,2} = \frac{1}{3}(2a \pm \sqrt{a^2 + 12b})$ . Tedy pokud existuje singularita, tak je v bodě  $(x_1, 0)$  nebo  $(x_2, 0)$ . Ověříme opět, zda pro tyto body platí také  $w(x, y) = 0$ . Pro případ  $w(x_1, 0) = 0$ : zajímá tedy kdy  $-x_1^3 + 2ax_1^2 - x_1(a^2 - 4b) = x_1(-x_1^2 + 2ax_1 - (a^2 - 4b)) = 0$ .  $x_1 = 0 \iff 2a - \sqrt{a^2 + 12b} = 0 \iff 4b = a^2$  což nejde z předpokladů. Zbývá tedy  $-x_1^2 + 2ax_1 - (a^2 - 4b) = 0$ . Pokud dosadíme za  $x_1$ , tak dostaneme  $\frac{-2}{9}(a\sqrt{a^2 + 12b} + a^2 - 12b) = 0$ , kde řešení musí splňovat  $b = 0$  nebo  $4b = a^2$ .  $w(x, y)$  je tedy smooth, tedy je  $F$  eliptické funkční těleso, tedy je rodu 1.

Víme, že  $F'/F$  je konečné jednoduché algebraické rozšíření. V předchozím úkolu jsme ukázali  $K(t, s) \supset K(t^2, st)$  a  $K(t, s) = K(t^2, st)(t)$  a že  $m_{t,F}(T) = T^2 - t^2$ . Tento polynom je ireducibilní nad  $F$  a jeho kořeny jsou  $t, -t \in F'$ , tedy je  $F'/F$  normální a Galoisovo.

## 2

Definujme  $w'(x, y) = y^2 - x^3 - ax^2 - bx \in K[x, y], b \neq 0, 4b \neq a^2$ . Dále obdobně  $w(x, y) = y^2 - x^3 + 2ax^2 - x(a^2 - 4b) \in K[x, y], b \neq 0, 4b \neq a^2$ .

Máme definováno, že  $F' = K(x, y)$  kde  $w'(x, y) = 0$  a  $F' = K(u, v)$ , kde  $w(u, v) = 0$ . Oba polynomy  $w', w$  jsou Weirstrassovy a pro funkční tělesa daná těmito polynomy víme, že platí

$$\begin{aligned}P'_\infty &\in \mathbb{P}_{F'/K} : v_{P'_\infty}(x) = -2, v_{P'_\infty}(y) = -3 \\ P_\infty &\in \mathbb{P}_{F/K} : v_{P_\infty}(u) = -2, v_{P_\infty}(v) = -3\end{aligned}$$

Dále spočteme valuace pro  $x, y, u, v$  v místech  $P'_{(0,0)}, P_{(0,0)}$ .  $y, v$  nejsou tečny v  $(0,0)$  a  $(0,0) \in V_w \cap V_{w'}$ , takže jejich valuace je 1. Pro  $x, u$  to vychází stejně, jelikož oba polynomy mají  $\text{mult}_y = 2$ .

$$P'_{(0,0)} \in \mathbb{P}_{F'/K} : v_{P'_{(0,0)}}(x) = 2, v_{P'_{(0,0)}}(y) = 1$$

$$P_{(0,0)} \in \mathbb{P}_{F/K} : v_{P_{(0,0)}}(u) = 2, v_{P_{(0,0)}}(v) = 1$$

- (a) Dle definice  $\text{div}_{F'/K}(x) = \sum_{P \in \mathbb{P}_{F'/K}} v_P(x)P$ . Víme, že jediná místa, kde  $v_P(x) \neq 0$  jsou  $P'_{(0,0)}$  a  $P'_\infty$ . Takže  $\text{div}_{F'/K}(x) = v'_0(x)P'_{(0,0)} + v'_\infty(x)P'_\infty = 2P'_{(0,0)} - 2P'_\infty$ .

Obdobně pro zbytek:

$$\text{div}_{F'/K}(y) = v'_0(y)P'_{(0,0)} + v'_\infty(y)P'_\infty = 1P'_{(0,0)} - 3P'_\infty$$

$$\text{div}_{F/K}(u) = v_0(u)P_{(0,0)} + v_\infty(u)P_\infty = 2P_{(0,0)} - 2P_\infty$$

$$\text{div}_{F/K}(v) = v_0(v)P_{(0,0)} + v_\infty(v)P_\infty = 1P_{(0,0)} - 3P_\infty$$

- (b) Použijeme The Fundamental Equality (F.7) a Proposition F.6. Uvažujme nejprve  $P = P_\infty$ . Víme, že  $[F' : F] = 2$ . Dále dle proposition F.6 pro taková místa  $P'$  platí  $\deg_{F'/K}(P')[K : K] = f(P'|P) \deg_{F/K}(P)$ . Víme ale že pro naše  $P = P_\infty, P_{0,0} : \deg_{F/K}(P) = 1$ . Tedy  $f(P'|P) = \deg_{F'/K}(P')$ . Dle F.7 tedy máme 3 možnosti:

- (a) Existují právě 2 místa  $P' \in \mathbb{P}_{F'/K} : P'|P, \deg_{F'/K}(P') = 1$  a platí  $e(P'|P) = 1 = f(P'|P)$ .
- (b) Existuje jedno místo  $P' \in \mathbb{P}_{F'/K} : P'|P, \deg_{F'/K}(P') = 1$  a platí  $e(P'|P) = 2$  a  $f(P'|P) = 1$ .
- (c) Existuje jedno místo  $P' \in \mathbb{P}_{F'/K} : P'|P, \deg_{F'/K}(P') = 2$  a platí  $e(P'|P) = 1$  a  $f(P'|P) = 2$ .

Uvažujme nyní případ  $P = P_\infty$ . Víme, že  $v_P(u) = -2 \implies u^{-2} \in P$ . Spočteme  $v'_\infty(u) = v'_\infty(\frac{y^2}{x^2}) = 2v'_\infty(y) - 2v'_\infty(x) = 2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) = -2 \implies u^{-2} \in P'_\infty$ .

Víme, že  $P'_\infty \cap F$  je místo  $F/K$  a toto místo obsahuje  $u^{-2}$ .  $P_\infty$  je jediné místo  $F/K$  co obsahuje  $u^{-2}$ . Nezbývá tedy než  $P'_\infty \cap F = P_\infty \implies P'_\infty|P_\infty$ .

Obdobně  $v'_0(u) = v'_0(\frac{y^2}{x^2}) = 2v'_0(y) - 2v'_0(x) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -2 \implies u^{-2} \in P'_{(0,0)}$ . Stejně jako výše tedy platí  $P'_{(0,0)} \cap F = P_\infty \implies P'_{(0,0)}|P_\infty$ .

Pro  $P = P_\infty$  tedy máme 2 různá místa  $F'/K$  co ho obsahují  $(P'_\infty, P'_{(0,0)})$ . Platí možnost a)  $\implies e(P'_\infty|P) = e(P'_{(0,0)}|P) = 1$  a  $f(P'_\infty|P) = f(P'_{(0,0)}|P) = 1$

Uvažujme nyní  $P = P_{(0,0)}$ . Víme, že místo  $P' \in \mathbb{P}_{F'/K} : P'|P$  nemůže už být  $P'_\infty$  ani  $P'_{(0,0)}$  jinak by  $P_{(0,0)} = P' \cap F = P_\infty \implies P_\infty = P_{(0,0)} \implies \text{spor.}$

Chceme místo  $P'$ , pro které platí  $v_{P'}(u) \geq 2$ , protože  $P'|P \implies v_{P'}(u) \geq v_P(u) = 2$ . Platí  $v_{P'}(u) = v_{P'}(\frac{y^2}{x^2}) = 2(v_{P'}(y) - v_{P'}(x)) \geq 2 \iff v_{P'}(y) - v_{P'}(x) \geq 1$ . Rozebereme možné hodnoty  $v_{P'}(\cdot)$ .

Pokud  $v_{P'}(x) < 0 \implies P' = P'_\infty \implies \text{spor.}$  Pokud  $v_{P'}(x) > 0, v_{P'}(y) > 0 \implies P' = P'_{(0,0)} \implies \text{spor.}$  Zbývá tedy  $v_{P'}(x) = 0$  nebo  $v_{P'}(y) = 0$ . Druhá možnost nemůže nastat jelikož by neplatilo  $v_{P'}(y) - v_{P'}(x) \geq 1$ . Hledáme tedy místo  $F'/K$ , kde  $v_{P'}(x) = 0, v_{P'}(y) \geq 1$ .

Chceme tedy najít body  $(x', 0) \in V_{w'} \implies x(x^2 + ax + b) = 0$ . Pokud  $x = 0$ , tak máme místo  $P'_{(0,0)}$ , které nemůžeme použít. Chceme tedy místa příslušná zbylým kořenům. Řešení kvadratické rovnice jsou  $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})$ . Z předpokladů to pod odmocninou není 0, tedy máme vždy 2 kořeny za předpokladu že existuje daná odmocnina v  $K$ .

Označme místa příslušná těmto bodům  $(x_1, 0), (x_2, 0) \in V_{w'}$  jako  $P'_1, P'_2$ . Máme tedy 2 různá místa stupně 1 t.ž.  $v_{P'}(y) \geq 1, v_{P'}(x) = 0 \implies v_{P'}(u) \geq 2$  (jelikož dále  $e(P'|P) = 1 \implies v_{P'}(u) = 2$ ). Tedy daná místa obsahují  $P_{(0,0)}$  a platí  $e(P'|P) = f(P'|P) = 1$ .

Pokud neexistuje  $\sqrt{a^2 - 4b}$ . Tak neexistuje jiné místo stupně 1 obsahující  $y$ . Tedy zbývá možnost  $P'$  je jediné místo obsahující  $P_{(0,0)}$ ,  $P'$  je stupně 2.