NMMB538 - DÚ3

Jan Oupický

1

1. $x \in P \subset O_P$. Z definice O_P víme, že $K \subset O_P \implies K[x] \subset O_P$. Zřejmě $x \notin O_P$, protože jinak by $O_P = F$. Označme $I \coloneqq P \cap K[x]$. I je prvoideál v $K[x]$, tedy je tvaru $I = (f), f \in K[x], f$ ireducibilní. Označme $R \coloneqq K[x]_{(f)} = \{\frac{a}{b} | a \in K[x], b \in K[x] \setminus (f)\}$.

   $R \subseteq O_P$, protoze $O_P = \{a \in F | v_P(a) \geq 0\}, P = \{a \in F | v_P(a) \geq 1\} \implies \frac{a}{b} \in R : v_P(\frac{a}{b}) = v_P(a) - v_P(b)$ z definice $v_P(b) = 0$, protože $b \notin (f) \subset P$ a $a \in K[x] \in O_P \implies v_P(a) \geq 0 \implies v_P(\frac{a}{b} \geq 0$.

   Zároveň je R také valuační okruh F. Protože $\frac{a}{b} \in F \iff a \in K[x], b \in K[x] \setminus 0$. Buď $b \notin (f) \implies \frac{a}{b} \in R, a \notin (f), b \in (f) \implies \frac{b}{a} \in R$ a nebo $a, b \in (f)$ a to se dá vydělit na jeden z přechozích případů. Nechť Q je daný jediný maximální ideál R. Máme tedy $Q \subset R \subseteq O_P$. Z maximality P tedy plyne, že $Q = P$ a tedy musí platit $R = O_P$.

2. $\Rightarrow$: $P' \subset P \implies a \in F : v_{P'}(a) = e(P'|P) \cdot v_P(a)$ kde $e(P'|P) \geq 1$. $x \in P$ z definice P, tedy $v_P(x) > 0 \implies v_{P'} > 0$ z předchozí rovnosti.

   $\Leftarrow$: Označme $Q \coloneqq P' \cap F$. $v_{P'}(x) \geq 0, x \in F \implies v_Q(x) \geq 0$. Tedy Q je místo $K(x)$ obsahující x. Víme, že existuje jediné takové místo F/K, protože
   $1 = [F : K(x)] \geq \sum_{P : x \in P} v_P(x) \deg(P)$. Takže $P' \subset Q = P \implies P'|P$.

3. Z předchozího bodu víme, že $v_P(x) = 1$ a $\deg_{F/K}(P) = 1$. Tudíž $e(P'|P) = v_{P'}(x)$. Stejně tak dle prop F.6, kde $K' = K, \deg_{F/K}(P) = 1 \implies f(P'|P) = \deg_{F'/K}(P')$.

4. Označíme-li $n = [F' : F]$, rozšíření je konečné, jelikož F' je algebraické funkční těleso nad K a $F = K(x)$ a x je transcendentní nad K.

   Použijeme-li značení a předpoklady věty F.7 pro naše P obsahující x a předchozí bod. Dostaneme tedy
   $[F' : F] = \sum_i v_{P_i}(x) \cdot \deg_{F'/K}(P_i)$

2

h