NMMB538 - DÚ6

Jan Oupický

1

1. $D = V_g, g(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^3 - ax_1^2 - bx_1 \implies \hat{g}(X_1, X_2, X_3) = G(X_1, X_2, X_3) = X_3X_2^2 - X_1^3 - aX_1^2X_3 - bX_1X_3^2 \implies \hat{D} = V_G$
   $C = V_f, f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^3 - 2ax_1^2 - (a^2 - 4b)x_1 \implies \hat{f}(X_1, X_2, X_3) = F(X_1, X_2, X_3) = X_3X_2^2 - X_1^3 - 2aX_1^2X_3 - (a^2 - 4b)X_1X_3^2 \implies \hat{C} = V_F$

2. Uvažujeme zobrazení $\sigma : D \to C$ z minulého úkolu. Dle lemma M.3 můžeme reprezentantovat $\mathbf{\Psi}$ jako $(A_1B_2 : A_2B_1 : B_1B_2)$, kde

$$A_1 = X_2^2X_3^2,\ A_2 = X_2X_3^2(bX_3^2 - X_1^2)$$
$$B_1 = X_1^2X_3^2,\ B_2 = X_1^2X_3^3 \implies$$
$$\mathbf{\Psi} = (X_1^2X_2^2X_3^5 : X_1^2X_2X_3^4(bX_3^2 - X_1^2) : X_1^4X_3^5) \approx (X_2^2X_3 : X_2(bX_3^2 - X_1^2) : X_1^2X_3)$$

   Označme tyto polynomy C_1, C_2, C_3. Poslední ekvivalence platí, jelikož pokud (obecně) $A_1' = \frac{A_1}{X_1}, A_2' = \frac{A_2}{X_1} \implies A_1A_2' - A_2A_1' = \frac{1}{X_1}(A_1A_2 - A_2A_1) = 0 \in (G)$. V posledním kroku jsme tuto vlastnost použili několikrát.

3. Chceme ukázat, že $\mathrm{Dom}(\mathbf{\Psi}) = \hat{D}$. Zřejmě $\mathrm{Dom}(\mathbf{\Psi}) \subseteq \hat{D}$. Chceme ukázat $\hat{D} \subseteq \mathrm{Dom}(\mathbf{\Psi})$. Díky proposition M.4 víme, že všechny body $(a : b : 1)$, kde $(a, b) \in D \setminus \{(0, 0)\}$ jsou prvky $\mathrm{Dom}(\mathbf{\Psi})$.

   Zbývá tedy ukázat, že $P_1 = (0 : 0 : 1) \in \mathrm{Dom}(\mathbf{\Psi})$ a $P_2 = (0 : 1 : 0) \in \mathrm{Dom}(\mathbf{\Psi})$. P_2 je jediný bod $\hat{D}$, kde $X_3 = 0$ (X_1 musí být taky 0).

   Nalezneme jiné reprezentanty $\mathbf{\Psi}$, pro které nebude obraz zmíněných bodů $(0 : 0 : 0)$. Pro P_1:

   Nejprve vynásobíme původní tvar X_2 a využijeme toho, že $X_2^2X_3 = X_1^3 + aX_1^2X_3 + bX_1X_3^2$ a zasubstituujeme a poté vydělíme X_1:

$$\text{vynásobení } X_2\text{:}$$
$$(X_2^3X_3 : X_2^2(bX_3^2 - X_1^2) : X_1^2X_2X_3)$$
$$\text{substituce do 1. a 2. členu:}$$
$$(X_2(X_1^3 + aX_1^2X_3 + bX_1X_3^2) : bX_3(X_1^3 + aX_1^2X_3 + bX_1X_3^2) - X_1^2X_2^2 : X_1^2X_2X_3)$$
$$\text{vydělení } X_1\text{:}$$
$$(X_2(X_1^2 + aX_1X_3 + bX_3^2) : bX_3(X_1^2 + aX_1X_3 + bX_3^2) - X_1X_2^2 : X_1X_2X_3)$$

   Dělali jsme ekvivalentní úpravy. Tedy $\mathbf{\Psi}(0 : 0 : 1) = (0 : b^2 : 0) = (0 : 1 : 0)$.

Obdobně pro P_2:

$$\text{substituce } bX_3^2 - X_1^2 = \frac{X_2^2X_3 - aX_1^2X_3 - 2X_1^3}{X_1} \text{ do 2. členu a následné vynásobení } X_1 :$$
$$(X_1X_2^2X_3 : X_2(X_2^2X_3 - aX_1^2X_3 - 2X_1^3) : X_1^3X_3)$$
$$\text{substituce } X_1^3 = X_2^2X_3 - aX_1^2X_3 - bX_1X_3^2 \text{ 2. členu:}$$
$$(X_1X_2^2X_3 : X_2(X_2^2X_3 - aX_1^2X_3 - 2(X_2^2X_3 - aX_1^2X_3 - bX_1X_3^2)) : X_1^3X_3)$$
$$\text{vydělení } X_3\text{:}$$
$$(X_1X_2^2 : X_2(X_2^2 - aX_1^2 - 2(X_2^2 - aX_1^2 - bX_1X_3)) : X_1^3)$$

A tedy $\mathbf{\Psi}(0:1:0) = (0:-1:0) = (0:1:0)$.

2

1. $C_2 = V_g, g(x_1,x_2) = x_2^2 - x_1^3 + x_1 - 1 \implies \hat{g}(X_1,X_2,X_3) = G(X_1,X_2,X_3) = X_3X_2^2 - X_1^3 - X_1X_3^2 - X_3^3 \implies \hat{C}_2 = V_G$
   $C_1 = V_f, f(x_1,x_2) = x_2^2 - x_1^3 + x_1 \implies \hat{f}(X_1,X_2,X_3) = F(X_1,X_2,X_3) = X_3X_2^2 - X_1^3 + X_1X_3^2 \implies \hat{C}_1 = V_F$

2. Obdobně jako v úloze 1 po zkrácení:

$$A_1 = X_3(X_2^2 - X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2),\ A_2 = -X_2(X_1^2 - X_1X_3 - 2X_3^2),$$
$$A_3 = X_3(X_1^2 - X_1X_3 - X_3^2) \implies$$
$$\tau = (X_3(X_2^2 - X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2) : -X_2(X_1^2 - X_1X_3 - 2X_3^2) : X_3(X_1^2 - X_1X_3 - X_3^2))$$

3. Opět z prop. M.4 víme, že pro body $(a:b:1) \in \hat{C}_2$ tž. $(a,b) \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ platí, $\tau(a:b:1) = \widehat{\sigma(a,b)}$. Zbývají tedy opět 2 body $P_1 = (3:0:1)$ ($(3,0)$ jako jediný bod C_2 nebyl prvkem $\mathrm{Dom}(\sigma)$) a $P_2 = (0:1:0)$ (jediný bod $\hat{C}_2$, kde $X_3 = 0$), které toto nespňují, ale jsou prvky $\hat{C}_2$.

   Nalezneme obdobně tvary τ, pro které můžeme spočítat obrazy těchto bodů. Pro P_2 lze použít následující tvar:

$$\text{vynásobíme } X_1\text{:}$$
$$(X_1X_3(X_2^2 - X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2) : -X_2(X_1^3 - X_1^2X_3 - 2X_1X_3^2) : X_1X_3(X_1^2 - X_1X_3 - X_3^2))$$
$$\text{použijeme substituci } X_1^3 = X_2^2X_3 + X_1X_3^2 - X_3^3 \text{ do 2. členu:}$$
$$(X_1X_3(X_2^2 - X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2) : -X_2((X_2^2X_3 + X_1X_3^2 - X_3^3) - X_1^2X_3 - 2X_1X_3^2) : X_1X_3(X_1^2 - X_1X_3 - X_3^2))$$
$$\text{vydělíme } X_3\text{:}$$
$$(X_1(X_2^2 - X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2) : -X_2((X_2^2 + X_1X_3 - X_3^2) - X_1^2 - 2X_1X_3) : X_1(X_1^2 - X_1X_3 - X_3^2))$$

   Nyní $\tau(0:1:0) = (0:-1:0) = (0:1:0)$. Pro P_1 :

$$\text{substituce } X_3^3 = X_2^2X_3 - X_1^3 - X_1X_3^2 \text{ do 1. a 3. členu:}$$
$$(X_1^3 + 2X_1X_3^2 + 2X_3^3 - X_1^2X_3 : -X_2(X_1^2 - X_1X_3 - 2X_3^2) : X_3X_1^2 - X_1X_3^2 - X_3X_2^2 + X_1^3 + X_1X_3^2)$$

Nyní $\tau(3:0:1) = (1:0:1)$. A pro zbylé body $\hat{C}_2$ viz minulý úkol:

$$\begin{aligned}
\tau(0:1:1) &= (3:3:1)\\
\tau(0:4:1) &= (3:2:1)\\
\tau(1:1:1) &= (3:3:1)\\
\tau(1:4:1) &= (3:3:1)\\
\tau(4:1:1) &= (3:2:1)\\
\tau(4:4:1) &= (0:0:1)
\end{aligned}$$

3

Věta C.15 nám říká, že pokud je K perfektní, tak genus $K(V_f)/K$ a genus $\bar{K}(V_f)/\bar{K}$ jsou stejné. Můžeme uvažovat tedy K algebraicky uzavřené.

Polynom f má tvar $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f \in K[x_1, x_2]$. Uvažujme polynom $p(z) = az^2 + bz + c$ a označme $\alpha \in K$ jeho kořen (předpokládejme, že $p(z) \neq c, c \neq 0$, poté jistě $\alpha \in K$ existuje z alg. uzavřenosti K).

Definujeme polynom $f' = f(x_1 + \alpha x_2, x_2)$. Víme, že $K(V_f)/K = K(V_{f'})/K$ ($x_1 \mapsto x_1 + \alpha x_2, x_2 \mapsto x_2$ je lineární zobrazení).

Zároveň platí $f'(x_1, x_2) = a(x_1 + \alpha x_2)^2 + b(x_1 + \alpha x_2)x_2 + cx_2^2 + d(x_1 + \alpha x_2) + ex_2 + f$. Roznásobením získáme $f'(x_1, x_2) = x_2^2(a\alpha^2 + b\alpha + c) + ax_1^2 + x_1x_2(b + 2a\alpha) + dx_1 + x_2(e + d\alpha) + f \implies f'(x_1, x_2) = ax_1^2 + x_1x_2(b + 2a\alpha) + dx_1 + x_2(e + d\alpha) + f$.

Tedy f' je tvaru $f'(x_1, x_2) = x_1^2 + a'x_1x_2 + b'x_1 + c'x_2 + d' \in K[x_1, x_2]$ (pokud $a \neq 0$). Označíme-li $x = x_1 + (f')$ a $y = x_2 + (f')$, pak platí $y = \frac{x^2+b'x+d'}{-a'x-c'} \in K(V_{f'})$. Uvažujme nyní, že $-a'x - c' \notin (f)$. Jinak řečeno $K(V_{f'}) = K(x, y) = K(x)$.

Víme, že pro K alg. uzavřené a x transcendentní nad K platí pro $(x)_+ \in \mathrm{Div}(K(V_{f'})/K)$, že $\deg((x)_+) = [K(V_{f'}) : K(x)] = 1$, tedy musí existovat místo $P \in \mathbb{P}_{K(V_{f'})/K}$, které je stupně 1. Poté víme, že pokud $K(V_{f'}) = K(x)$ (x je zřejmě transcendentní nad K), tak genus $K(V_{f'})$ je 0.

Nyní uvažujme, že $-a'x - c' \in (f) \implies a' = 0 = c'$. Poté $f'(x_1, x_2) = x_1^2 + b'x_1 + d'$ neboli zřejmě $K(V_{f'}) = K(x)$.

Nakonec jsme celou dobu předpokládali $a \neq 0$. Pokud $a = 0$, tak obdobně dokážeme vyjádřit x pomocí y.

Také jsme předpokládali $p(z) \neq c, c \neq 0$. Pokud to platí, tak $a = 0 = b \implies dx = cy^2 + ey + f$ a $K(V_f) = K(y)$ a toto AFF má obdobně genus 0.