NMMB538 - DÚ2

Jan Oupický

1

Chceme ukázat, že $F/F^{p^i}, i \geq 0, p = char(F)$ je čistě neseparabilní. Toto tělesové rozšíření je zřejmě algebraické, jelikož $\forall \alpha \in F : m_{\alpha, F^{p^i}} = x^{p^i} - \alpha^{p^i} \in F^{p^i}[x]$. Chceme tedy ukázat, že $\forall \alpha \in F$ je čistě neseparabilní.

Využijeme prop. S.5 implikaci $(ii) \implies (i)$. Čistě z definice F^{p^i} tedy dokážeme nalézt dané $j \geq 0$ tž. $\alpha^{p^{ij}} \in F^{p^i}$ $(j = 1)$. Rozšíření je tedy čistě neseparabilní.

2

Máme $char(K) = p$. Předpokládejme, že K je perfektní, neboli $a \mapsto a^p$ je automorfimus K. Máme tedy $F = K(x), F^p = (K(x))^p$. Víme, že platí $a, b \in K[x] : (a+b)^p = a^p + b^p$. Tudíž $f(x) = \sum f_i x^i \in K[x] \implies (f(x))^p = \sum f_i^p x^{ip}$. Díky tomu, že je K perfektní, víme $\forall a \in K \exists b \in K : b^p = a$. Poté již nahledéneme, že $(K(x))^p = K(x^p) = F^p$.

Chceme tedy spočítat $[F : F^p] = [K(x) : K(x^p)]$. x je algebraický prvek nad $K(x^p)$, protože $g(T) = T^p - x^p \in K(x^p)[T] = F^p[T]$. Tento polynom je m_{x,F^p}, protože kdyby existoval $f \in F^p[T] : deg(f) < deg(g)$, tak by $f|g$. Zároveň ale $g(T) = T^p - x^p = (T-x)^p$, takže by f musel být polynom, který je tvaru $(T-x)^i, i < p$, ale to nemůže být polynom $F^p[T] = K(x^p)[T]$, protože x^i se v tam nevyskytují.

Zároveň zřejmě $K(x^p)(x) = K(x, x^p) = K(x)$, takže

$$p = \deg m_{x,F^p} = [K(x) : K(x^p)] = [F : F^p]$$

Není důvod proč stejný postup nebude fungovat pro $[F : F^{p^i}]$, takže $[F : F^{p^i}] = p^i$.

Nyní spočteme hodnoty $N_{F|F_p}(\alpha), \alpha = x^2 + 1$ a $Tr_{F|F_p}(\alpha)$. Víme, že $[F : F^p] = p$, tedy báze F nad F^p má p elementů. Zvolme například bázi $(x^0, x^1, \ldots, x^{p-1})$. Tato množina zřejmě generuje Fa má p prvků, tedy je to opravdu báze. Spočítáme jak vypadá matice M_α.

$$\alpha u_1 = \alpha \cdot 1 \implies \mu_1 = (1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$
$$\alpha u_2 = \alpha \cdot x \implies \mu_2 = (0, 1, 0, 1, , 0 \ldots, 0)$$
$$\vdots$$
$$\alpha u_{p-2} = \alpha \cdot x^{p-3} = x^{p-3} + x^{p-1} \implies \mu_{p-2} = (0, \ldots, 1, 0, 1)$$
$$\alpha u_{p-1} = \alpha \cdot x^{p-2} = x^{p-2} + x^p \implies \mu_{p-1} = (x^p, \ldots, 0, 1, 0)$$
$$\alpha u_p = \alpha \cdot x^{p-1} = x^{p-1} + x \cdot x^p \implies \mu_{p-2} = (0, x^p, 0, \ldots, 0, 1)$$

Ze stejných důvodů jako výše (pokud je K perfektní) platí $K(x,y)^p = K(x^p, y^p)$. Chceme tedy $[K(x,y) : K(x^p, y^p)]$. Platí $[K(x,y) : K(x^p, y^p)] = [K(x,y) : K(x^p, y^p)(x)] \cdot [K(x^p, y^p, x) : K(x^p, y^p)]$. Hodnotu $[K(x^p, y^p, x) : K(x^p, y^p)]$ známe z předchozího bodu, protože $K(x^p, y^p, x) = K(x, y^p)$. A pokud definijeme $D = K(y^p)$, tak platí

$$[K(x^p, y^p, x) : K(x^p, y^p)] = [D(x) : D(x^p)] = p$$

Stejně tak symetricky můžeme nově definovat $D = K(x)$ a hodnotu $[K(x, y) : K(x^p, y^p, x)] = [D(y) : D(y^p)]$ spočítat obdobně. Máme tedy $[K(x, y) : K(x^p, y^p)] = p^2$.