

1

1. $D = V_g, g(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^3 - ax_1^2 - bx_1 \implies \hat{g}(X_1, X_2, X_3) = G(X_1, X_2, X_3) = X_3X_2^2 - X_1^3 - aX_1^2X_3 - bX_1X_3^2 \implies \hat{D} = V_G$
 $C = V_f, f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^3 - 2ax_1^2 - (a^2 - 4b)x_1 \implies \hat{f}(X_1, X_2, X_3) = F(X_1, X_2, X_3) = X_3X_2^2 - X_1^3 - 2aX_1^2X_3 - (a^2 - 4b)X_1X_3^2 \implies \hat{C} = V_F$
2. Uvažujeme zobrazení $\sigma : D \rightarrow C$ z minulého úkolu. Dle lemma M.3 můžeme reprezentovat Ψ jako $(A_1B_2 : A_2B_1 : B_1B_2)$, kde

$$\begin{aligned} A_1 &= X_2^2X_3^2, A_2 = X_2X_3^2(bX_3^2 - X_1^2) \\ B_1 &= X_1^2X_3^2, B_2 = X_1^2X_3^3 \implies \\ \Psi &= (X_1^2X_2^2X_3^5 : X_1^2X_2X_3^4(bX_3^2 - X_1^2) : X_1^4X_3^5) \approx (X_2^2X_3 : X_2(bX_3^2 - X_1^2) : X_1^2X_3) \end{aligned}$$

Označme tyto polynomy C_1, C_2, C_3 . Poslední ekvivalence platí, jelikož pokud (obecně) $A'_1 = \frac{A_1}{X_1}, A'_2 = \frac{A_2}{X_1} \implies A_1A'_2 - A_2A'_1 = \frac{1}{X_1}(A_1A_2 - A_2A_1) = 0 \in (G)$. V posledním kroku jsme tuto vlastnost použili několikrát.

3. Chceme ukázat, že $\text{Dom}(\Psi) = \hat{D}$. Zřejmě $\text{Dom}(\Psi) \subseteq \hat{D}$. Chceme ukázat $\hat{D} \subseteq \text{Dom}(\Psi)$. Díky proposition M.4 víme, že všechny body $(a : b : 1)$, kde $(a, b) \in D \setminus \{(0, 0)\}$ jsou prvky $\text{Dom}(\Psi)$.

Zbývá tedy ukázat, že $P_1 = (0 : 0 : 1) \in \text{Dom}(\Psi)$ a $P_2 = (0 : 1 : 0) \in \text{Dom}(\Psi)$. P_2 je jediný bod \hat{D} , kde $X_3 = 0$ (X_1 musí být taky 0).

Nalezneme jiné reprezentanty Ψ , pro které nebude obraz zmíněných bodů $(0 : 0 : 0)$. Pro P_1 :

Nejprve vynásobíme původní tvar X_2 a využijeme toho, že $X_2^2X_3 = X_1^3 + aX_1^2X_3 + bX_1X_3^2$ a zasubstituuje a poté vydělíme X_1 :

$$\begin{aligned} &\text{vynásobení } X_2: \\ &(X_2^3X_3 : X_2^2(bX_3^2 - X_1^2) : X_1^2X_2X_3) \\ &\text{substituce do 1. a 2. členu:} \\ &(X_2(X_1^3 + aX_1^2X_3 + bX_1X_3^2) : bX_3(X_1^3 + aX_1^2X_3 + bX_1X_3^2) - X_1^2X_2^2 : X_1^2X_2X_3) \\ &\text{vydělění } X_1: \\ &(X_2(X_1^2 + aX_1X_3 + bX_3^2) : bX_3(X_1^2 + aX_1X_3 + bX_3^2) - X_1X_2^2 : X_1X_2X_3) \end{aligned}$$

Dělali jsme ekvivalentní úpravy. Tedy $\Psi(0 : 0 : 1) = (0 : b^2 : 0) = (0 : 1 : 0)$.

Obdobně pro P_2 :

$$\begin{aligned} \text{substituce } bX_3^2 - X_1^2 &= \frac{X_2^2X_3 - aX_1^2X_3 - 2X_1^3}{X_1} \text{ do 2. členu a následné vynásobení } X_1 : \\ &(X_1X_2^2X_3 : X_2(X_2^2X_3 - aX_1^2X_3 - 2X_1^3) : X_1^3X_3) \\ \text{substituce } X_1^3 &= X_2^2X_3 - aX_1^2X_3 - bX_1X_3^2 \text{ 2. členu:} \\ &(X_1X_2^2X_3 : X_2(X_2^2X_3 - aX_1^2X_3 - 2(X_2^2X_3 - aX_1^2X_3 - bX_1X_3^2)) : X_1^3X_3) \\ &\text{vydělíme } X_3: \\ &(X_1X_2^2 : X_2(X_2^2 - aX_1^2 - 2(X_2^2 - aX_1^2 - bX_1X_3)) : X_1^3) \end{aligned}$$

A tedy $\Psi(0 : 1 : 0) = (0 : -1 : 0) = (0 : 1 : 0)$.

2

1. $C_2 = V_g, g(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^3 + x_1 - 1 \implies \hat{g}(X_1, X_2, X_3) = G(X_1, X_2, X_3) = X_3X_2^2 - X_1^3 - X_1X_3^2 - X_3^3 \implies \hat{C}_2 = V_G$
 $C_1 = V_f, f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^3 + x_1 \implies \hat{f}(X_1, X_2, X_3) = F(X_1, X_2, X_3) = X_3X_2^2 - X_1^3 + X_1X_3^2 \implies \hat{C}_1 = V_F$

2. Obdobně jako v úloze 1 po zkrácení:

$$\begin{aligned} A_1 &= X_3(X_2^2 - X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2), A_2 = -X_2(X_1^2 - X_1X_3 - 2X_3^2), \\ A_3 &= X_3(X_1^2 - X_1X_3 - X_3^2) \implies \\ \tau &= (X_3(X_2^2 - X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2) : -X_2(X_1^2 - X_1X_3 - 2X_3^2) : X_3(X_1^2 - X_1X_3 - X_3^2)) \end{aligned}$$

3. Opět z prop. M.4 víme, že pro body $(a : b : 1) \in \hat{C}_2$ tž. $(a, b) \in \text{Dom}(\sigma)$ platí, $\tau(a : b : 1) = \widehat{\sigma(a, b)}$. Zbývají tedy opět 2 body $P_1 = (3 : 0 : 1)$ ($(3, 0)$ jako jediný bod C_2 nebyl prvkem $\text{Dom}(\sigma)$) a $P_2 = (0 : 1 : 0)$ (jediný bod \hat{C}_2 , kde $X_3 = 0$), které toto nespňují, ale jsou prvky \hat{C}_2 .

Nalezneme obdobně tvary τ , pro které můžeme spočítat obrazy těchto bodů. Pro P_2 lze použít následující tvar:

vynásobíme X_1 :

$$\begin{aligned} &(X_1X_3(X_2^2 - X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2) : -X_2(X_1^3 - X_1^2X_3 - 2X_1X_3^2) : X_1X_3(X_1^2 - X_1X_3 - X_3^2)) \\ &\text{použijeme substituci } X_1^3 = X_2^2X_3 + X_1X_3^2 - X_3^3 \text{ do 2. členu:} \\ &(X_1X_3(X_2^2 - X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2) : -X_2((X_2^2X_3 + X_1X_3^2 - X_3^3) - X_1^2X_3 - 2X_1X_3^2) : X_1X_3(X_1^2 - X_1X_3 - X_3^2)) \\ &\text{vydělíme } X_3: \\ &(X_1(X_2^2 - X_1^2 + X_1X_3 + X_3^2) : -X_2((X_2^2 + X_1X_3 - X_3^2) - X_1^2 - 2X_1X_3) : X_1(X_1^2 - X_1X_3 - X_3^2)) \end{aligned}$$

Nyní $\tau(0 : 1 : 0) = (0 : -1 : 0) = (0 : 1 : 0)$. Pro P_1 :

$$\begin{aligned} &\text{substituce } X_3^3 = X_2^2X_3 - X_1^3 - X_1X_3^2 \text{ do 1. a 3. členu:} \\ &(X_1^3 + 2X_1X_3^2 + 2X_3^3 - X_1^2X_3 : -X_2(X_1^2 - X_1X_3 - 2X_3^2) : X_3X_1^2 - X_1X_3^2 - X_3X_2^2 + X_1^3 + X_1X_3^2) \end{aligned}$$

Nyní $\tau(3 : 0 : 1) = (1 : 0 : 1)$. A pro zbylé body \hat{C}_2 viz minulý úkol:

$$\tau(0 : 1 : 1) = (3 : 3 : 1)$$

$$\tau(0 : 4 : 1) = (3 : 2 : 1)$$

$$\tau(1 : 1 : 1) = (3 : 3 : 1)$$

$$\tau(1 : 4 : 1) = (3 : 3 : 1)$$

$$\tau(4 : 1 : 1) = (3 : 2 : 1)$$

$$\tau(4 : 4 : 1) = (0 : 0 : 1)$$

3

Věta C.15 nám říká, že pokud je K perfektní, tak genus $K(V_f)/K$ a genus $\bar{K}(V_f)/\bar{K}$ jsou stejné. Můžeme uvažovat tedy K algebraicky uzavřené. Polynom f má tvar $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \in K[x, y]$. Uvažujme polynom $p(z) = az^2 + bz + c$ a označme $\alpha \in K$ jeho kořen (předpokládejme, že $p(z) \neq c, c \neq 0$). Poté definujeme polynom $f' = f(x + \alpha y, y)$. Víme, že $K(V_f)/K = K(V_{f'})/K$ ($x \mapsto x + \alpha y, y \mapsto y$ je lineární zobrazení).

Zároveň platí $f'(x, y) = a(x + \alpha y)^2 + b(x + \alpha y)y + cy^2 + d(x + \alpha y) + ey + f$. Roznásobením získáme $f'(x, y) = y^2(a\alpha^2 + b\alpha + c) + ax^2 + xy(b + 2a\alpha) + dx + y(e + d\alpha) + f \implies f' = ax^2 + xy(b + 2a\alpha) + dx + y(e + d\alpha) + f$. Tedy f' lze napsat jako $f' = x^2 + a'xy + b'x + c'y + d' \in K[x, y]$ neboli platí $y + (f') = \frac{x^2 + bx + d + (f')}{-ax - c + (f')} \in K(V_{f'})$. Jinak řečeno $K(V_{f'}) = K(x + (f'), y + (f')) = K(x + (f'))$.