1

Rozšířme vektor $x(t)$ o jednu složku, která bude zaznamenávat vzdálenost od původní pozice v čase t. Vektor $x(t)$ má tedy tvar $x(t) = (odchylka, rychlost, vzdalenost)^T$, kde vzdálenost je v metrech. Kvůli tomu musíme rozšířit matice, aby to dávalo smysl. Získáme tedy rovnici:

$$A = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0.01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

Matice poslední řádek matice A počítá změnu polohy. Ze zadání víme, že frekvence kroků je 100 za 1s, takže vzdálenost se mění vztahem $1x(t)_3 + \frac{1}{100}x(t)_2$. Rychlost $x(t)_2$ nám říká kolik metrů ujede robot za jednu sekundu, takže za $\frac{1}{100}$s (jeden krok) ujede přesně jednu setinu rychlosti metrů, což přičteme k vzdálenosti $x(t)_3$. Stav $x(0)$ samozřejmě rozšíříme o jednu složku s hodnotou 0 (na začátku je vzdálenost od počátku 0).

Celkem máme tedy 100 kroků (povolena 1s ovládání a frekvence kroků je 100 za sekundu). Chceme tedy zajistit aby $x(100) = (0, 0)^T$ a zároveň, aby změny zrychlení $(0 \leq t \leq 99 : u(t) - u(t-1))$ byly minimální.

Dosazením do rekurentního vzorce dostaneme vzorec pro výpočet $x(100)$

$$x(100) = A^{100}x(0) + A^{99}Bu(0) + A^{98}Bu(1) + \cdots + ABu(98) + Bu(99)$$

Chceme $x(100) = (0, 0)^T$ a hodnota $A^{100}x(0)$ je konstantní (nezávisí na $u(t)$), takže máme

$$-A^{100}x(0) = +A^{99}Bu(0) + A^{98}Bu(1) + \cdots + ABu(98) + Bu(99)$$

Označme $C \coloneqq (A^{99}B|A^98B|\dots|AB|B),\ b \coloneqq -A^{100}x(0), u \coloneqq (u(0), \dots, u(99))^T$. Takže máme

$$Cu = b$$

Potřebujeme ale přetransformovat vektor u, aby nám řešení s nejmenší euklidovskou normou (pomocí pseudoinverzu) minimalizovalo naší upravenou normu $(0 \leq t \leq 99 : u(t) - u(t-1))$. Označme $d(0) \coloneqq u(0)$, $\forall t \in \{1, \dots, 99\} : d(t) \coloneqq u(t) - u(t-1)$. Zřejmě platí $u(t) = \sum_{i=0}^{t} d(t)$. Označíme-li tedy $d \coloneqq (d(0), \dots, d(99))^T$, tak platí

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, T \in \mathbb{R}^{100 \times 100} \text{ a platí } u = Td$$

Nyní pokud dosadíme do původní rovnice, tak máme $(CT)d = b$. Spočítáme řešení s nejmenší normou d_{opt} (minimalizuje rozdíly $u(t) - u(t-1)$) pomocí pseudoinverze neboli $d_{opt} = (CT)^{\dagger}b$, kde $(CT)^{\dagger}$ značí pseudoinverz matice CT. Hodnoty $u_{opt} = (u(0)_{opt}, \ldots, u(99)_{opt})^T$ získáme z vzorce výše, tedy $u_{opt} = Td_{opt} = T(CT)^{\dagger}b$.