1

Definujeme vektor stavu HP pokémonů jako $h(t) = (h_1(t), h_2(t))^T$, kde $h_1(t)$ značí hodnotu HP Pikachu po kole t a $h_2(t)$ hodnotu HP Charmandera po kole t. Víme, že $h_1(0) = 100$ a $h_2(0) = 50$. Ze zadání je zřejmé, že platí:

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & -0.2 \\ -0.1 & 1.1 \end{pmatrix}$$
$$h(t+1) = A \cdot h(t)$$

Vidíme, že toto je předpis pro lineární dynamický systém a tedy zřejmě platí $h(t) = A^t \cdot h(0)$. Matice A je diagonalizovatelná, protože její vlastní vektory tvoří bázi $\mathbb{R}^2$. Platí:

$$R = \begin{pmatrix} 0.647994 & -0.920202 \\ -0.761646 & -0.391445 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1.18508 & 0 \\ 0 & 0.864922 \end{pmatrix}$$
$$A = R \cdot D \cdot R^{-1}$$

Matice R je matice přechodu z báze B tvořené vlastnímy vektory A ke kanonické bázi (K) a R^{-1} naopak. Z lineární algebry víme, že platí $[h(t)]_B = D^t \cdot [h(0)]_B$, kde $[\cdot]_B$ značí souřadnice vektorů v bázi B. Dále platí $h(t) = [h(t)]_K = R \cdot [h(t)]_B$ a $[h(0)]_B = R^{-1} \cdot [h(0)]_K = h(0)$. Dosadíme-li:

$$h(t) = R \cdot [h(t)]_B = R \cdot D^t \cdot [h(0)]_B = R \cdot D^t \cdot R^{-1} \cdot h(0) \text{ kde}$$

Po dosazení a vyčíslený máme explicitní vzorec pro $h(t)$:

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 104.661 \cdot 0.864922^t - 4.66082 \cdot 1.18508^t \\ 44.5217 \cdot 0.864922^t - 5.47828 \cdot 1.18508^t \end{pmatrix}$$

Po 9. kole ($t = 9$) má Pikachu HP $h_1(9) \approx 6.864$ a Charmander $h_2(9) \approx 37.317$. V po 10. kole by bylo Pikachu mrtvé s $h_1(10) \approx -0.942$. Potřebujeme utéct po 9. kole.

2

???

3

3.1

$\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x = x^T B x \iff x^T(A-B)x = 0$. Víme, že A, B jsou symetrické, takže i $(A-B)$ je symetrická matice, tudíž je ortogonálně diagonalizovatelná. Takže existuje $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální a $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonální tž. $(A-B) = PDP^T$. P je regulární a tudíž $\forall x\ \exists! y : y = P^T x$. Tudíž můžeme psát ekvivaletně, že $\forall y \in \mathbb{R}^n : y^T D y = 0$. Pokud za y dosadíme vektory kanonické báze, tak vidíme, že musí platit, že $D = 0$ a tedy i $(A-B) \iff A = B$.

3.2

P pozitivně definitní $\implies$ P je regulární viz LA. Tedy vždy existuje P^{-1}, Q^{-1}.

(a) P regulární tedy opět můžeme přeznačit $y = Px$ a víme, že $y = 0 \iff x = 0$. P^{-1} je poz. def., protože z definice + dosazení + P symetrická: $\forall y \neq 0 : y^T P^{-1} y = x^T P^T P^{-1} P x = x^T P^T x = x^T P x > 0$

(b) Pro pozitivně definitní matici A existuje právě jedna matice $\sqrt{A}$ tž. $A = \sqrt{A}^2$. Protože A je poz. def. je ortogonálně diagonalizovatelná s kladnými čisly na diagonále v příslušné diag. matici. Tedy $A = UDU^T$, položme $\sqrt{A} = U\sqrt{D}U^T \implies \sqrt{A}^2 = (U\sqrt{D}U^T)(U\sqrt{D}U^T) = U\sqrt{D}\sqrt{D}U^T = A$. Z definice je zřejmé, že $\sqrt{A}$ je také pozitivně definitní, protože její vlastní čísla jsou kladná (odmocniny kladných čísel).

Nejprve tvrzení dokážeme pro $Q = I$. Víme, že $\forall x : x^T P x \geq x^T Q x = x^T I x$. Nechť $P = A^2$: $x^T P^{-1} x = x^T A^{-1} A^{-1} x = x^T A^{-1^T} A^{-1} x = (A^{-1}x)^T I (A^{-1}x) \overset{\text{předpoklad}}{\leq} = (A^{-1}x)^T P (A^{-1}x) = (A^{-1}x)^T AA(A^{-1}x) = x^T I x$. Dokázali jsme, že $I \preceq P \implies P^{-1} \preceq I$.

Nechť X pozitivně definitní, pak platí $Q \preceq P \implies XQX \preceq XPX$, protože X je regulární (bijekce). Položíme $y = Xx$ a nerovnost stále platí. Nechť $Q = B^2$, nyní Q obecná pozitivně definitní matice. Máme $Q \preceq P \iff BB \preceq P$, položme $X := B^{-1}$, potom máme $I \preceq B^{-1}PB^{-1}$. Z již dokázaného máme $(B^{-1}PB^{-1})^{-1} \preceq I^{-1} \iff$
$BP^{-1}B \preceq I$. $X := B^{-1} \implies P^{-1} \preceq Q^{-1}$.

(c) Toto tvrzení neplatí. Protipříklad:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
$$P - Q = \begin{pmatrix} 5/6 & 5/6 \\ 5/6 & 5/6 \end{pmatrix} \text{ je poz. semidef.}$$
$$P^2 - Q^2 = \begin{pmatrix} -5/18 & -5/18 \\ -5/18 & -5/18 \end{pmatrix} \text{ zřejmě není poz. semidef.}$$

3.3

$\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2 = x_n^2 + 2x_{n-1}^2 + \dots 2x_2^2 + x_1^2 - 2(x_n x_{n-1} + x_{n-1}x_{n-2} + \dots x_2 x_1)$. Tedy je vidět, že

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Je to suma druhých mocnin (nezáporných čísel), takže aby byla rovna $0 \iff x^T P x = 0$, tak musí platit, že $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Například $x = (1, \dots, 1)^T$ platí $x^T P x = 0$. Takže zřejmě P není pozitivně definitní, ale je pozitivně semidefinitní, protože to je suma druhých mocnin.

4

4.1

Protipříklad:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \implies A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zřejmě $2 = \lambda_1(A) \geq \lambda_1(B) = 2 \wedge 1 = \lambda_2(A) \geq \lambda_2(B) = 1$, ale $A - B$ má vlastní čísla $1, -1$, tedy neni pozitivně semidefinitní.

4.2

Protipříklad:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Protože pro $x = (a,b)^T, a, b \in \mathbb{R} : x^T Ax = -a^2 \implies x^T Ax \leq 1 \iff -a^2 \leq 1$ což platí vždy, tedy $\{x|x^T Ax \leq 1\} = \mathbb{R}^2$. Stejně tak pro množinu příslušnou matici B. $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ ale $A - B$ zřejmě není pozitivně semidefinitní.

4.3

Protipříklad:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B-A$ je pozitivně semidefinitní (vlastní čísla $0, 2$). Nechť $x = (a,b)^T, a, b \in \mathbb{R}$, pak $\{x|x^T Ax \leq 1\} \iff -a^2 + b^2 \leq 1 \iff b^2 \leq 1 + a^2$ což neomezená množina, ale $\{x|x^T Bx \leq 1\} \iff a^2 + b^2 \leq 1$ je kružince s poloměrem 1 a tedy omezená. Takže nemůže platit inkluze.

4.4

Z LA víme, že součin ortogonálních matic je opět ortogonální matice. A, B jsou symetrické se stejnými vlastnímí čísly, tedy $\exists\ U, V$ ortogonální a D diagonální tž. $A = UDU^T, B = VDV^T$. Poté

$$A = UDU^T = UV^T(VDV^T)VU^T = UV^T BVU^T$$

Položme $Q \coloneqq VU^T$ a víme, že je ortogonální.

4.5

Ortogonální matice je regulární. Takže předpoklad říká, že A, B jsou podobné matice. Z LA víme, že podobné matice mají stejný charakteristický polynom, takže i vlastní čísla.

4.6

$e^{At} \preceq e^{At} \iff e^{At} - e^{At} = 0$. Nulová matice je pozitivně semidefinitní.

4.7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla $A - B$ jsou $0, 2$. Takže je pozitivně semidefinitní, ale zřejmě neplatí závěr.

4.8

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Platí předpoklad, ale vlastní čísla $A - B$ jsou $-1, +1$, takže je indefinitní.