

1

Označme si vybraný počet součástek vektorem $n = (n_{k_1}, n_{k_2}, n_{t_1}, n_{t_2})^T$, kde n_{k_1} odpovídá počtu normálních kondenzátorů, n_{k_2} kvalitních kondenzátorů, n_{t_1} normálních tranzistorů a n_{t_2} kvalitních tranzistorů. Ze zadání víme, že součástka by měla vydržet cca 2.5 roku. Tudíž můžeme shora odhadnout maximální počet každé součástky, protože usoudíme, že součástka by neměla mít větší životnost než 3 roky. Obvod samotný vydrží 1 rok, takže po součástkách chceme dohromady maximálně 2 roky (24 měsíců).

Označme $A = (0.2, 0.83, 0.85, 1.3)$ matici (vektor) „životnosti“ a $B = (0.1, 1, 0.35, 0.5)$ matici (vektor) ceny. Jelikož přidaná životnost v měsících součástky sestavené dle vektoru n se spočítá $A \cdot n$ a cena $B \cdot n$.

Maximální počet pro každou součástku je postupně dle značení výše $m_{k_1} = \lceil \frac{24}{0.2} \rceil = 120$, $m_{k_2} = \lceil \frac{24}{0.83} \rceil = 29$, $m_{t_1} = \lceil \frac{24}{0.85} \rceil = 29$, $m_{t_2} = \lceil \frac{24}{1.3} \rceil = 19$. Spočteme si teda všechny možné n tž. $A \cdot n \leq 24$. Takových n existuje 97268.

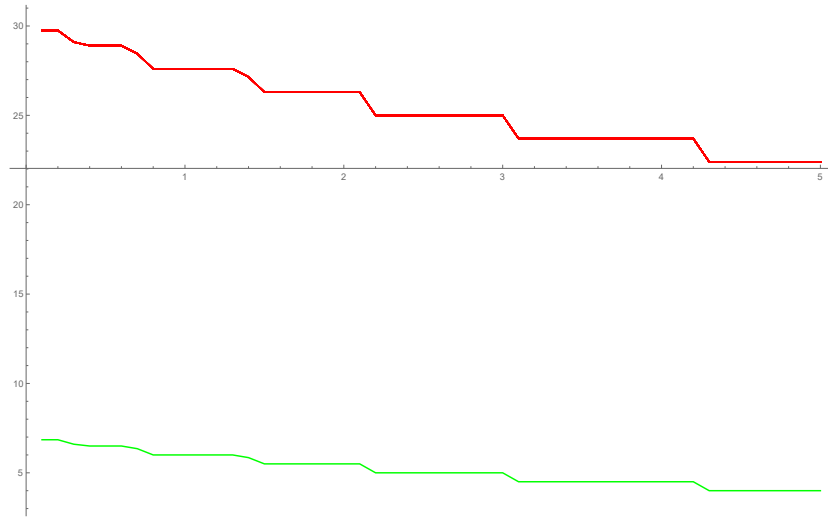
Chceme minimalizovat hodnotu $(A \cdot n - 18)^2$, 18 značí 1,5 roku, což chceme v optimálním případě, protože součástka přidá 1.5 roku k 1 roku a tedy ve výsledku bude mít kazítkaTM životnost 2,5 roku. Dále samozřejmě chceme minimalizovat cenu což odpovídá hodnotě $(B \cdot n)^2$.

Označme si μ parametr, který bude značit co ve výsledků více preferujeme (výšší cenu nebo lepší životnost). Pro nějaké μ , chceme tedy minimalizovat hodnotu $(A \cdot n - 18)^2 + \mu \cdot (B \cdot n)^2$ přes všechna možná n . Čím větší μ , tak to značí, že dáváme větší důraz na cenu a zanedbáváme životnost. Zde jsou optimální hodnoty pro několik vybraných μ :

μ	n_{k_1}	n_{k_2}	n_{t_1}	n_{t_2}	životnost [měsíce]	cena [Kč]
0.1	0	0	1	13	29.75	6.85
0.2	0	0	1	13	29.75	6.85
0.3	1	0	0	13	29.1	6.6
0.6	0	0	0	13	28.9	6.5
0.7	0	0	1	12	28.45	6.35
0.8	0	0	0	12	27.6	6
1	0	0	0	12	27.6	6
2	0	0	0	11	26.3	5.5
4	0	0	0	9	23.7	4.5

Doporučujeme zvolit hodnoty pro $\mu = 1$, jelikož odchylka předpokládané životnosti 2,5 roku (30 měsíců) je 2,4 měsíce, ale cena je hezkých 6,00,- Kč. Tato hodnota je také vhodná v tom, že potřebujeme pouze součástky jednoho typu (kvalitní tranzistory). Pro jedno kazítkaTM tedy potřebujeme 12 kvalitních tranzistorů.

Zde je zobrazen vývoj pro μ od 0.1 do 5 (kroky po 0.1). Červený graf značí životnost v měsících a zelený cenu v Kč.



2

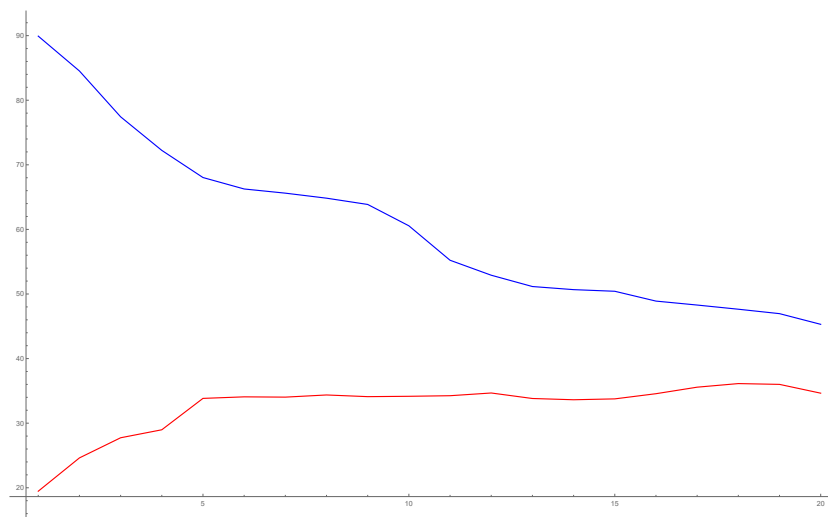
Označme $y(n)$ popularitu politiky v n -tém týdnu a $x(n)$ popularitu toaletního papíru. Hledáme model typu Moving Average, který z dat o popularitě toaletního papíru předpoví popularitu politiky. Pro dané $m \in \mathbb{N}$ hledáme váhy $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}$ tž. platí $y(n) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot x(n-i)$. Trénovacích dat (týdnů) máme 47. Máme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{pmatrix} y(m+1) \\ y(m+2) \\ \vdots \\ y(47) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(m) & x(m-1) & \dots & x(1) \\ x(m+1) & x(m) & \dots & x(2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x(46) & x(45) & \dots & x(47-m) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

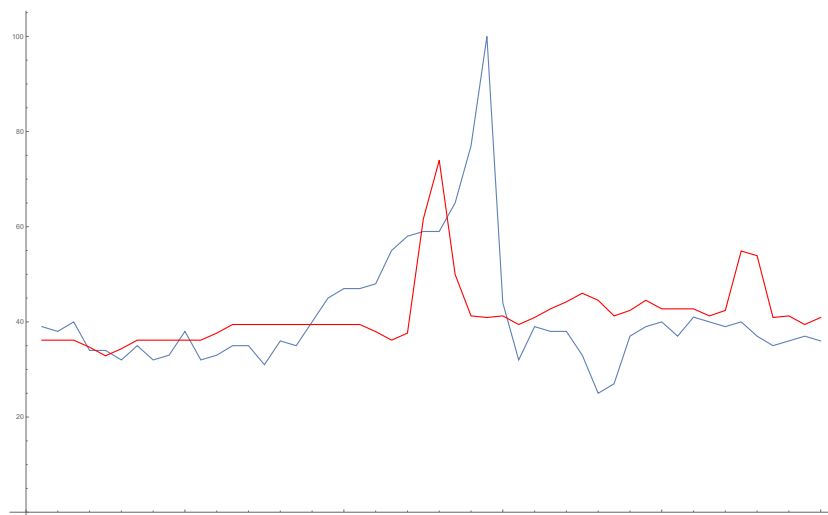
Pomocí metody nejmenších čtverců spočteme w_1, \dots, w_m pro dané m . Potřebujeme vybrat ideální m , aby tyto parametry nebyly přetrénované ale také dobře předpovídaly.

Chybu budeme měřit $e_{all} = \|y - \hat{y}\|$, kde $y = (y(m+1), \dots, y(47), y(48), \dots, y(52))$ kde $y(48), \dots, y(52)$ jsou již testovací data a $\hat{y} = (\hat{y}(m+1), \dots, \hat{y}(52))$ kde $\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot x(k-i)$ neboli data spočítaná z našeho modelu. Dále si změříme chybu $e_{test} = \|y_{test} - \hat{y}_{test}\|$, kde y_{test} a \hat{y}_{test} jsou jako y, \hat{y} ale pouze s testovacími daty. Máme tedy celkovou chybu modelu a chybu modelu na testovacích datech.

Zde je graf pro e_{all} (modrá) a e_{test} (červená) pro $m \in \{2, \dots, 21\}$ (pokud $m > 21$ tak jsou data v podstatě nic neříkající):



Vidíme že celková chyba stále klesá, jelikož čím dál více přetrénováváme váhy. Vidíme, že model nejlépe funguje pro testovací data pro $m = 2$, tedy pouze závislost na 2 předchozích dnech. Zvolme tedy pouze 2 váhy $w_1 = 1.47928, w_2 = 1.80795$. Zde je graf y (modrá) a \hat{y} (předpověď) pro tyto váhy:



Tématem dnešní politologické rubriky jsou zajímavé korelace. Korelace je matematický termín, který označuje míru závislosti nějakých 2 věcí sobě. Jelikož jsme si všichni prošli Školou života, tak víme, že korelace implikuje

kauzalitu. Korelaci, na kterou se dnes podíváme, bude popularita termínů „toaletní papír“ a „politika“. Potřebujeme si nějak vysvětlit, proč to tak je. Existuje model, který to předpovídá, takže to musí být pravda.

V dnešní době se na internetu nenakupují pouze věci jako elektronika apod., ale i věci co si kupujeme každodenně. Jednou z těch věcí je samozřejmě toaletní papír. Příčina této závislosti je snad nyní zřejmá stejně jako většina věcí, co předpokládají za zřejmé vyučující na jedné nejmenované vysoké škole.

Po nakoupení toaletního papíru se český občan již nemusí bát vyhledávat detaily o české politické situaci. Zaskočí-li ho něco, tak se nemusí obávat nedostatku toaletního papíru doma na záchodě. Tohoto fenoménu si nedávno všimnuli provozovatelé podniků, ve kterých se často řeší politická situace. Takovými podniky jsou hlavně hospody a kavárny. Provozovatelé si vytipují do budoucna dny spojené s politikou, a poté nakoupí dostatek toaletního papíru, aby ho byl dostatek, jelikož znají své štamgasty.

Nejznámějším dohledatelným případem této „nedostatek toaletního papíru kvůli politické situaci“ krize byla tzv. Velká toaletní krize v Pražské kavárně na konci ledna 2018. Na konci ledna 2018 se konalo druhé kolo volby prezidenta České republiky. Český lid vybíral mezi Milošem Zemanem a Jiřím Drahošem. Je známo, že Pražská kavárna a její pravidelní zákazníci, nemají v oblíbě Miloše Zemana. Miloš Zeman také několikrát dal najevo, prostřednictvím svého mluvčího, který mu je věrnější, než byl pes Hachikō svému páníčkoví, že lidi, co navštěvují Pražskou kavárnu (tzv. „lepší lidi“), také nemá rád. Když byl tedy Miloš Zeman zvolen prezidentem, tak za pár minut nebyla v Pražské kavárně jediná role toaletního papíru (popravdě zbyla jedna role jednovrstvého toaletního papíru, ale ten samozřejmě nikdo nechce používat).

3

(1 \iff 9 \iff 10), (11 \iff 12), (4 \iff 6), (2 \iff 7), (3 \iff 8), (5), (13)

”4 \iff 6”

” \implies ”: Chceme tedy dokázat, že $\forall x \in \mathbb{R}^n : ABx = 0$ Necht' $x \in \mathbb{R}^n$. Poté zřejmě $Bx \in \text{Im}(B) \subseteq \text{Ker}(A) \implies A(Bx) = 0 \iff ABx = 0$.

” \impliedby ” Víme že $\forall x \in \mathbb{R}^n : ABx = 0$, ale $\{Bx : x \in \mathbb{R}^n\} = \text{Im}(B)$. Tedy jistě pro $y \in \text{Im}(B) \exists x \in \mathbb{R}^n : y = Bx$ a máme tedy $A(Bx) = Ay = 0 \implies y \in \text{Ker}(A)$.

”1 \iff 9 \iff 10”

1 \implies 9: $A = (a_1, \dots, a_n)$, kde $a_i \in \mathbb{R}^n$. Stejně tak $B = (b_1, \dots, b_n)$.

$Im(B) \subseteq Im(A) \implies \forall b_i \exists c_1^i, \dots, c_n^i \in \mathbb{R} : b_i = a_1 c_1^i + \dots + a_n c_n^i$. Položme

$$Z = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{pmatrix}$$

Poté z toho jak se násobí matice je zřejmé, že $B = AZ$.

9 \implies 10: Z 9 plyne, že sloupce v B jsou lineárními kombinacemi sloupců z A . Tedy $Im((A \ B)) = Im(A)$, protože Im značí lineární obal sloupců dané matice. A víme, že $rank(A) = dim \ Im(A) = dim \ Im((A \ B)) = rank((A \ B))$

10 \implies 1: Z 10 plyne $rank(A) = dim \ Im(A) = dim \ Im((A \ B)) = rank((A \ B)) \implies Im(B) \subset Im((A \ B)) = Im(A)$

Protipříklad na 6 \nRightarrow 9: $A = I_n, Z = I_n \implies B = I_n$ ale $AB = I_n \neq 0$

4

4.1

Označme $B := (A^T A + \mu I)$. Víme, že matice B je invertibilní $\iff Ker(B) = \{\vec{0}\}$. Mějme tedy $z \in Ker(B)$. Takže $z^T B z = z^T (B z) = z^T (\vec{0}) = 0$. Dosadíme-li tedy tak máme

$$0 = z^T (A^T A + \mu I) z = z^T (A^T A) z + z^T (\mu I) z = z^T (A^T A) z + \mu (z^T I z) = z^T (A^T A) z + \mu (z^T \cdot z) = z^T (A^T A) z + \mu \|z\|^2 = 0$$

Víme, že $A^T A$ je pozitivně definitní matice, takže $\forall z \in \mathbb{R}^n \wedge z \neq \vec{0} : z^T (A^T A) z > 0$. Tedy pokud $z \neq \vec{0}$ tak zřejmě $z^T (A^T A) z > 0 \wedge \mu \|z\|^2 > 0$, což je spor s tím, že $z \in Ker(B)$. Takže jediná možnost je $z = \vec{0}$, tedy $Ker(B) = \{\vec{0}\} \implies B$ je invertibilní.

4.2

$$A^T = A^T \iff A^T I_m = I_n A^T \iff A^T \mu I_m = \mu I_n A^T \iff A^T A A^T + A^T \mu I_m = A^T A A^T + \mu I_n A^T \iff A^T (A A^T + \mu I_m) = (A^T A + \mu I_n) A^T$$

Všude jsme použili ekvivaletní úpravy (násobení, přičítání nenulových matic/skalárů) a distributivitu násobení matic.

4.3

Neřešil jsem

4.4

Z přednášky víme, že pokud chceme minimalizovat $\|Ax - y\|^2$ a zároveň $\|Bx - c\|^2$ kde A, B jsou dané matice a y, c vektory. Hledáme řešení x tž. minimalizuje $\|Ax - y\|^2 + \mu\|Bx - c\|^2$, kde μ je parametr, kterým udáváme vztah důležitosti mezi oběma podmínkami. Dále víme, že se tato úloha dá převést na obyčejnou úlohu pro řešení nejmenších čtverců a vzoreček pro optimální řešení je:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= (A^T A + \mu B^T B)^{-1} (A^T y + \mu B^T c) \iff \\ (A^T A + \mu B^T B) \hat{x} &= (A^T y + \mu B^T c)\end{aligned}$$

Vezmeme-li $B = I$ a $c = \vec{0}$ máme $(A^T A + \mu I) \hat{x} = A^T y$ neboli jeden z parametrů hledaného řešení je malá norma \hat{x} (jak moc malou určuje μ).

4.5

Máme-li $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \ll n$ a $\text{rank}(A) = m$, tak $Ax = y$ má řešení. Chceme dostat ale takové x_{ln} , že $\|x_{ln}\|$ je nejmenší možné. Z přednášky víme, že pro takové x_{ln} platí $x_{ln} = A^T (AA^T)^{-1} y$.

Pro obecnou tlustou matici A vždy neexistuje $(AA^T)^{-1}$ ale vždy existuje $(A^T A + \mu I)^{-1}$. Řešení ve 4 můžeme vyjádřit $\hat{x} = (A^T A + \mu I)^{-1} A^T y$. Limita ze 3 nám říká, že optimální řešení ze 4. (pro obecně ne full-rank matici) konverguje k řešení s nejmenší normou ($\mu \rightarrow 0^+ \implies \hat{x} \rightarrow x_{ln}$).