1

.

2

.

3

3.1

Z definice násobení matic a vlastností sum:

$$tr(AA^T) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot a_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \cdot a_{i,j}) = tr(A^T A)$$
$$\Longrightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \cdot a_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}^2 = \|A\|_F^2$$

kde i je index řádku ve výsledné matici a v závorce je prvek na místě i, i ve výsledné matici.

3.2

Obdobně jako 3.1

$$B \in \mathbb{R}^{n\times m}, tr(AB) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot b_{i,j}) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \cdot a_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} b_{i,j} \cdot a_{i,j}) = tr(BA)$$

3.3

Dokážeme rovnosti 2. mocnin, což je ekvivalentní, jelikož norma je vždy kladná.

$$\|UAV^T\|^2 \overset{3.1}{=} tr(UAV^TVA^TU^T) \overset{\text{V má ortonormální posl. sloupců}}{=}$$
$$tr(UAA^TU^T) \overset{3.1}{=} tr(A^TU^TUA) \overset{\text{U má ortonormální posl. sloupců}}{=} tr(A^TA) =$$
$$\|A\|_F^2$$

4

4.1

reflexivita:

$$U \preceq U \iff \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T(U-U)x \geq 0 \implies x^T 0 x = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$$

tranzitivita:

$$U, V, W \in \mathbb{R}^{n\times n} : U \preceq V \wedge V \preceq W \iff \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T(V-U)x \geq 0 \wedge x^T(W-V)^x \geq 0$$

$$x^T(W-U)x = x^T(W-V+V-U)x \overset{\text{vlastnosti mat. nás.}}{=}$$

$$x^T(W-V)x + x^T(V-U)x \overset{\text{1. řádek}}{\geq} 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \implies U \preceq W$$

slabá antisymetrie:

$$U, V \in \mathbb{R}^{n\times n} : U \preceq V \wedge V \preceq U \iff V-U \text{ poz. semidef.} \wedge U-V \text{ poz. semidef.}$$

Víme, že pro pozitivně semidefinitní matice platí, že jsou ortogonálně diagonalizovatelné a jejich vlastní čísla jsou nezáporná. Označme $A \coloneqq U-V$ Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastní číslo A a $v \in \mathbb{R}^n$ jemu příslušný vlastní vektor. Platí:

$$Av = \lambda v \iff -Av = -\lambda v.$$

Víme že $\lambda \geq 0$ díky tomu, že je to vlastní číslo A, což je poz. semidef. matice. Ale $-A = V-U$, což je také semidefitní matice, má evidentně $-\lambda$ jako své vlastní číslo. Takže $0 \geq \lambda \geq 0 \implies \lambda = 0$. Tedy libovolné vlastní číslo matice A je 0. Z diagonalizace víme, že $A = BDB^T$, kde D je diagonální (B ortogonální) a na diagonále jsou všechna vlastní čísla A. Tudíž $D = 0 \implies A = 0 \iff U = V$.

4.2

$$C = diag(c_1, \ldots, c_n),\; D = diag(d_1, \ldots, d_n),\; D-C = diag(d_1-c_1, \ldots, d_n-c_n)$$

$$C \preceq D \iff \forall (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x^T(D-C)x \geq 0 \iff$$

$$\forall (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_1^2 \cdot (d_1-c_1) + \cdots + x_n^2 \cdot (d_n-c_n) \geq 0$$

x je libovolný vektor, tedy můžeme vzít $x = e_i \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ a vidíme, že musí platit $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : d_i - c_i \geq 0 \iff d_i \geq c_i$. Naopak pokud je tato podmínka splněna tak rovnost bude vždy nezáporná, jelikož jsou tam druhé mocniny násobnené nezáporným číslem. Tedy $C \preceq D \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} : d_i \geq c_i$

4.3

Matice U, V jsou symetrické, tedy nám udávají symetrické bilineární formy. Tvrzení 11.34 nám říká, protože je U pozitivně definitní, že existuje matice Q ortogonální tž.:

$$c_i, d_i \in \mathbb{R}_0^+,\ C = diag(c_1, \dots, c_n),\ D = diag(d_1, \dots, d_n) : U = QCQ^T \wedge V = QDQ^T$$

$$U \preceq V \iff \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T(V-U)x \geq 0 \iff x^T V x \geq x^T U x \iff$$

$$x^T(QDQ^T)x \geq x^T(QCQ^T)x$$

$$Q \text{ je bijekce tedy označíme-li } y \coloneqq Q^T x \implies$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : y^T D y \geq y^T C y \text{ tedy speciálně pro } y = e_i\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \implies$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : d_i \geq c_i$$

Z 1.3 víme, že $\|U\|_F = \|QCQ^T\|_F = \|C\|_F$ a $\|V\|_F = \|QDQ^T\|_F = \|D\|_F$. Díky čemu plyne $\|D\|_F \geq \|C\|_F \implies \|V\|_F \geq \|U\|_F$.