

1

2

Označme si vektor skóre zpráv písmenem $s \in \mathbb{R}^{300}$, pro každou zprávu i její vektor četnosti slov písmenem $x_i \in \mathbb{R}^{250}$. Z dat vídíme, že máme celkem 300 zpráv a k nim jejich skóre. Dále vidíme že hledaný vektor a má 250 složek, tedy $a \in \mathbb{R}^{250}$. Nakonec označme e_i vektor šumu pro dané skóre. Ze zadání je zřejmé, že e_i pochází ze stejného pravděpodobnostního rozdělení. Rovnice tedy vypadají:

$$s_i = a^T \cdot x_i + b + e_i$$

Chceme nejdříve odhadnout a , takže se chceme zbavit neznámé b . To provedeme jednoduše například tak, že si pevně zvolíme dvojici s_i, x_i a od té odečteme ostatní rovnice. Zvolíme-li $i = 1$, tak máme nově rovnice:

$$\forall i \in \{2, \dots, 300\} : s_1 - s_i = a^T \cdot (x_1 - x_i) + e'_i$$

Kde $e'_i = e_1 - e_i$ je z vlastností součtu normálních rozdělení z rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 0.2.

3

3.1

Z definice násobení matic a vlastností sum:

$$\begin{aligned} \text{tr}(AA^T) &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot a_{i,j} \right) = \text{tr}(A^T A) \\ &\implies \\ \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot a_{i,j} \right) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{i,j}^2 = \|A\|_F^2 \end{aligned}$$

kde i je index řádku ve výsledné matici a v závorce je prvek na místě i, i ve výsledné matici.

3.2

Obdobně jako 3.1

$$B \in \mathbb{R}^{n \times m}, tr(AB) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot b_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n b_{i,j} \cdot a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m b_{i,j} \cdot a_{i,j} \right) = tr(BA)$$

3.3

Dokážeme rovnosti 2. mocnin, což je ekvivalentní, jelikož norma je vždy kladná.

$$\begin{aligned} \|UAV^T\|^2 &\stackrel{3.1}{=} tr(UAV^TVA^TU^T) \stackrel{V \text{ má ortonormální posl. sloupců}}{=} \\ tr(UAA^TU^T) &\stackrel{3.1}{=} tr(A^TU^TUA) \stackrel{U \text{ má ortonormální posl. sloupců}}{=} tr(A^TA) = \\ &\|A\|_F^2 \end{aligned}$$

4

4.1

reflexivita:

$$U \preceq U \iff \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T(U - U)x \geq 0 \implies x^T 0x = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$$

tranzitivita:

$$U, V, W \in \mathbb{R}^{n \times n} : U \preceq V \wedge V \preceq W \iff \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T(V - U)x \geq 0 \wedge x^T(W - V)x \geq 0$$

$$x^T(W - U)x = x^T(W - V + V - U)x \stackrel{\text{vlastnosti mat. nás.}}{=}$$

$$x^T(W - V)x + x^T(V - U)x \stackrel{1. \text{ řádek}}{\geq} 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \implies U \preceq W$$

slabá antisymetrie:

$$U, V \in \mathbb{R}^{n \times n} : U \preceq V \wedge V \preceq U \iff V - U \text{ poz. semidef.} \wedge U - V \text{ poz. semidef.}$$

Víme, že pro pozitivně semidefinitní matice platí, že jsou ortogonálně diagonalizovatelné a jejich vlastní čísla jsou nezáporná. Označme $A := U - V$. Necht $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastní číslo A a $v \in \mathbb{R}^n$ jemu příslušný vlastní vektor. Platí:

$$Av = \lambda v \iff -Av = -\lambda v.$$

Víme že $\lambda \geq 0$ díky tomu, že je to vlastní číslo A , což je poz. semidef. matice. Ale $-A = V - U$, což je také semidefinitní matice, má evidentně

$-\lambda$ jako své vlastní číslo. Takže $0 \geq \lambda \geq 0 \implies \lambda = 0$. Tedy libovolné vlastní číslo matice A je 0. Z diagonalizace víme, že $A = BDB^T$, kde D je diagonální (B ortogonální) a na diagonále jsou všechna vlastní čísla A . Tudíž $D = 0 \implies A = 0 \iff U = V$.

4.2

$$C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n), \quad D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad D - C = \text{diag}(d_1 - c_1, \dots, d_n - c_n)$$

$$C \preceq D \iff \forall (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x^T(D - C)x \geq 0 \iff$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_1^2 \cdot (d_1 - c_1) + \dots + x_n^2 \cdot (d_n - c_n) \geq 0$$

x je libovolný vektor, tedy můžeme vzít $x = e_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ a vidíme, že musí platit $\forall i \in \{1, \dots, n\} : d_i - c_i \geq 0 \iff d_i \geq c_i$. Naopak pokud je tato podmínka splněna tak rovnost bude vždy nezáporná, jelikož jsou tam druhé mocniny násobené nezáporným číslem. Tedy $C \preceq D \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} : d_i \geq c_i$

4.3

Matice U, V jsou symetrické, tedy nám udávají symetrické bilineární formy. Tvzení 11.34 nám říká, protože je U pozitivně definitní, že existuje matice Q ortogonální tž.:

$$c_i, d_i \in \mathbb{R}_0^+, \quad C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n), \quad D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) : U = Q C Q^T \wedge V = Q D Q^T$$

$$U \preceq V \iff \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T(V - U)x \geq 0 \iff x^T V x \geq x^T U x \iff$$

$$x^T(Q D Q^T)x \geq x^T(Q C Q^T)x$$

$$Q \text{ je bijekce tedy označíme-li } y := Q^T x \implies$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : y^T D y \geq y^T C y \text{ tedy speciálně pro } y = e_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \implies$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : d_i \geq c_i$$

Z 1.3 víme, že $\|U\|_F = \|Q C Q^T\|_F = \|C\|_F$ a $\|V\|_F = \|Q D Q^T\|_F = \|D\|_F$. Díky čemu plyne $\|D\|_F \geq \|C\|_F \implies \|V\|_F \geq \|U\|_F$.