1

.

2

.

3

3.1

Z definice násobení matic a vlastností sum:

$$tr(AA^T) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot a_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \cdot a_{i,j}) = tr(A^T A)$$
$$\Longrightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \cdot a_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}^2 = \|A\|_F^2$$

kde i je index řádku ve výsledné matici a v závorce je prvek na místě i, i ve výsledné matici.

3.2

Obdobně jako 3.1

$$B \in \mathbb{R}^{n\times m}, tr(AB) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot b_{i,j}) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \cdot a_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} b_{i,j} \cdot a_{i,j}) = tr(BA)$$

3.3

Dokážeme rovnosti 2. mocnin, což je ekvivalentní, jelikož norma je vždy kladná.

$$\|UAV^T\|^2 \overset{3.1}{=} tr(UAV^T V A^T U^T) \overset{\text{V má ortonormální posl. sloupců}}{=}$$
$$tr(UAA^T U^T) \overset{3.1}{=} tr(A^T U^T U A) \overset{\text{U má ortonormální posl. sloupců}}{=} tr(A^T A) =$$
$$\|A\|_F^2$$