Cvičení 8:

Definujeme si souřadnicový systém tak, aby body A, B, C měly tyto souřadnice $A = (0,0), B = (2S_x, 0), C = (C_x, C_y)$. První souřadnici nazýváme x souřadnici a druhou jako y.

Bod $S = (S_x, S_y)$ je střed opsané kružnice. Z definice je S stejně vzdálený od bodu A jako od bodu B, tudíž můžeme souřadnice bodu B definovat pomocí hodnoty S_x. Budeme predpokládat, že $S_x \neq 0$, aby nenastalo $A = B$.

Bod C už nelze více zjednodušit, proto má 2 obecné souřadnice.

Body P, L, M jsou také obecné a proto $P = (P_x, P_y), L = (L_x, L_y), M = (M_x, M_y)$. Ohledně bodu K můžeme říci, že jeho druhá souřadnice je 0 (protože leží na přímce mezi A, B), proto $K = (K_x, 0)$.

Zadání nám dává následující podmínky, které můžeme zapsat pomocí rovnic s výše uvedenými proměnými a pomocnými z_i:

$$S_x \neq 0 \iff S_x z_1 - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\|\overrightarrow{PS}\| = \|\overrightarrow{AS}\| \iff P_x^2 - 2(P_x S_x + P_y S_y) + P_y^2 = 0 \quad (2)$$

$$\|\overrightarrow{AS}\| = \|\overrightarrow{CS}\| \iff C_x^2 - 2(C_x S_x + C_y S_y) + C_y^2 = 0 \quad (3)$$

$$C_x \neq 0 \wedge C_y \neq 0 \iff (C_x^2 + C_y^2) z_2 - 1 = 0 \quad (4)$$

$$\overrightarrow{PK} \perp \overrightarrow{AB} \iff \begin{pmatrix} P_x - K_x \\ P_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2S_x \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \overset{S_x \neq 0}{\iff} K_x - P_x = 0 \quad (5)$$

$$\overrightarrow{PL} \perp \overrightarrow{BC} \iff 2P_x S_x - P_x C_x - 2L_x S_x + L_x C_x - C_y P_y + C_y L_y = 0 \quad (6)$$

$$\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{AC} \iff C_x P_x - C_x M_x + C_y P_y - C_y M_y = 0 \quad (7)$$

$$P_y \neq 0 (\implies P \neq A \wedge P \neq B) \iff P_y z_3 - 1 = 0 \quad (8)$$

$$P \neq C \iff ((P_x - C_x)^2 + (P_y - C_y)^2) z_4 - 1 = 0 \quad (9)$$

Máme 9 rovnic v 16 proměnných popisující předpoklady. Nyní potřebujeme ještě rovnici popisující, že K, L, M jsou na stejné přímce. Pro to stačí například, že M leží na přímce $\overrightarrow{LK}$. Rovnici přímky $\overrightarrow{LK}$ má tvar $L_y x + (K_x - L_x) y - L_y K_x = 0$. Chceme, aby M splňoval tuto rovnici. Po dosazení dostaneme rovnici

$$L_y M_x + K_x M_y - L_x M_y - L_y K_x = 0$$

Označme polynomy z pravých stran rovnic výše symboly $f_1, \ldots, f_9$ a poslední polynom „přímky“ písmenem g. Z přednášky víme, že pro důkaz potřebujeme, aby $g \in I(V(f_1, \ldots, f_9)) \iff 1 \in (f_1, \ldots, f_9, gt - 1)$. Náležení do radikálu odpovídá tomu, že všechny body, které splňují předpoklady splňují i důsledek neboli dokazují větu. Stačí tedy spočítat normovanou Groebnerovu bázi ideálu $(f_1, \ldots, f_9, gt - 1)$ a zkontrolovat zda vyjde 1. V našem případě tyto rovnice postačují.