1

Z přednášky víme, že je-li $\boldsymbol{C}$ perfektní kód, tak je r-perfektní pro právě jedno $r = \frac{d-1}{2} \equiv d = 2r + 1$. Hledáme 1-perfektní kódy, tudíž $d = 3$. Dále pro binární 1-perfektní kódy platí $V_2(n, 1) = 2^{n-k}$. $\boldsymbol{C}$ je ale MDS, takže $n - k = d - 1 = 2 \implies V_2(n, 1) = 2^2 = 4$. Také víme, že platí $V_q(n, r) = \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i}(q-1)^i$, tedy v našem případě $4 = V_2(n, 1) = \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n \implies n = 3$. Hledáme tedy všechny kódy s parametry $n = 3, k = n - d + 1 = 3 - 3 + 1 = 1, d = 3$. $k = 1 \implies |\boldsymbol{C}| = 2$. Všechny možné kódy jsou tedy:

- $\boldsymbol{C} = \{000, 111\}$, ten je jediný lineární.
- $\boldsymbol{C} = \{001, 110\}$.
- $\boldsymbol{C} = \{010, 101\}$.
- $\boldsymbol{C} = \{100, 011\}$.

2

Chceme najít nějaký $[8, 4, 4]_2$ kód. Abychom nejjednodušeji zaručili $d = 4$, tak najdeme nejdříve kontrolní matici, která bude mít posloupnost libovolných 3 sloupců LN. Zvolme

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lze si jednoduše ověřit, že každá posloupnost 3 sloupců je LN. Ověření značně zjednodušuje to, že matice má v 1. polovině jednotkovou matici a také, že všechny sloupcové vektory mají váhu 1 nebo 3. Díky tomu lze jednoduše nahlédnout, že žádný sloupec není součtem jiných 2 ($d > 3$). Dále je zřejmé, že žádný sloupec se neopakuje ($d > 2$) a nulový sloupec matice neobsahuje ($d > 1$). Naopak ale například součet 1., 2., 3. sloupců je 5. sloupec, takže $d < 5 \implies d = 4$. Zbylé parametry jsou zřejmé z velikosti matice.

Máme tedy kontrolní matici $[8, 4, 4]_2$ kódu $\boldsymbol{C}$. Generující matici C získáme díky tomu, že v generující matici kódu je báze Ker H. Tedy např.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nelineární kód stejných parametrů (nosnost $= \frac{k}{n} \implies k = 4$) získáme například posunutím lineárního kódu (tedy vektorového podprostoru) $\boldsymbol{C}$ o nějaký nenulový vektor. Například máme tedy nelineární kód $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C} + e_1 = \{c + e_1 | c \in \boldsymbol{C}\}$. Posunutím jsme jistě délku ani počet prvků (k) nezměnili. Zbývá zkontrolovat zda se neporušila vlasnost $d = 4$. To plyne z vlastností vzdálenosti vektorů. Nechť $x, y \in \boldsymbol{D} \implies \exists a, b \in \boldsymbol{C} : x = a + e_1, y = b + e_1 \implies d(x, y) = w(x - y) = w(a + e_1 - (b - e_1)) = w(a - b) = d(a, b)$. Tedy vzdálenost kódu $\boldsymbol{C}$ = vzdálenosti kódu $\boldsymbol{D}$.

Máme-li kód $\boldsymbol{C}$ s parametry $n, k, d > 1$. Tak z definice propíchnutí kódu je zřejmé, že pro propíchnutý kód ***C'*** platí že $n' = n - 1$. Dále díky tomu, že původní kód měl vlastnost $d > 1$, tak všechna slova mají rozdílné aspoň 2 souřadnice, takže ztracením jedné souřadnice jejich rovnost stále nemůže nastat. Tedy se parametr k (velikost kódu) nezmění ($k' = k$). Dále je zřejmé že $d' = d \vee d' = d - 1$. Propíchnutý $\boldsymbol{C}$ kód má tedy parametry $n = 7, k = 4, d = 4$ nebo $n = 7, k = 4, d = 3$. Vidíme, že $5 > d > 2$, takže jistě opravuje jednu chybu. Na to, aby byl 1 perfektní potřebujeme ještě zjistit zda-li $V_2(7, 1) = 2^{7-4}$, což plyne z vzorce pro $V_q(n, r)$ zmíněný výše.