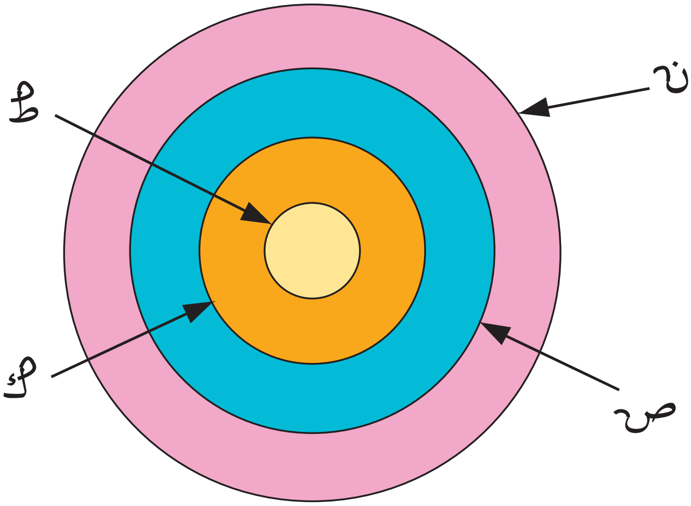
الوحدة الأولى

مجموعة الأعداد النسبية



(١ - ١) العدد النسبي:

أدرس مجموعات الكسور التالية:

المجموعة الأولى: $\frac{٤}{٨}$ ، $\frac{٣}{٦}$ ، $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ...

المجموعة الثانية: $\frac{٨}{١٢}$ ، $\frac{٦}{٩}$ ، $\frac{٤}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ...

المجموعة الثالثة: $\frac{-١٢}{٢٠}$ ، $\frac{٩}{-١٥}$ ، $\frac{-٦}{١٠}$ ، $\frac{-٣}{٥}$ ، ...

ماذا تلاحظ؟

ما أبسط كسر تؤول إليه الكسور في كل مجموعة؟ تؤول جميع الكسور المتكافئة عند كتابتها في أبسط صورة إلى صورة وحيدة، فمثلاً تؤول جميع عناصر المجموعة الأولى إلى الكسر $\frac{١}{٢}$ وكذلك تكتب عناصر المجموعة الثانية في أبسط صورة على النحو $\frac{٢}{٣}$ أما أبسط صورة لأي كسر في المجموعة الثالثة فهي $-\frac{٣}{٥}$. إن كل كسر من هذه الكسور ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{٣}{٥}$) يسمى عدداً نسبياً .

> العدد النسبي هو الذي يمكن كتابته على صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب $\in$ ص والقاسم المشترك الأكبر لهما الواحد الصحيح ، ب $\neq$ صفر.

مجموعة الأعداد النسبية :

(١) ضع العدد الذي يجعل $\square + ٢ = ٥$ صحيحه

نجد أن العدد هو ٣ ، ٣ $\in$ ط .

(٢) ضع العدد الذي يجعل $\square + ٥ = ٣$ صحيحه

نجد أن العدد هو -٢ ، $-٢ \notin$ ط ، ولكن $-٢ \in$ ص .

(٣) ضع العدد الذي يجعل $٣ \times \square = ١٦$ صحيحه

نجد أن العدد هو $\frac{١٦}{٣}$ ، $\frac{١٦}{٣} \notin$ ط ، $\frac{١٦}{٣} \notin$ ص

لذلك لا بد من التفكير في توسيع مجموعة الأعداد الصحيحة بإضافة أعداد أخرى تمكننا من حل هذه المسألة ومثيلاتها.

هذه المجموعة الجديدة تسمّى مجموعة الأعداد النسبية، ويرمز لها بالرمز ن .

وتكتب بالصفة المميزة:

$$\text{ن} = \left\{ \frac{\text{أ}}{\text{ب}} : \text{أ ، ب} \in \text{ص ، ب} \neq ٠ \right\}$$

ويسمّى أ ، ب **حدّي العدد النّسبي**، كما يُسمَّى أ **بسط العدد النِّسبي**، ويُسمَّى ب **مَقَام العدد النِّسبي** .

لاحظ أن العدد ٥ يمكن كتابته على الصُّورة $\frac{٥}{١}$ ، وكذلك أي عدد صحيح آخر مثلاً ١٢ يكتب على الصُّورة $\frac{١٢}{١}$، وهكذا ،،، وهذا يعني أن الأعداد الصحيحة كلها أعداد نسبية.

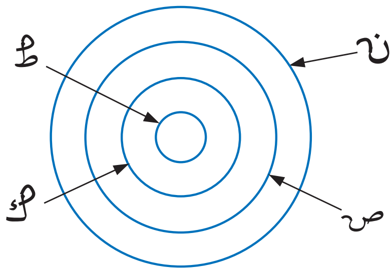
∴ مجموعة الأعداد الصحيحة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية

$\text{ص} \subset \text{ن}$.

من دراستك السابقة تعلم أن:

$\text{ط} \subset \text{ك}$ ، $\text{ك} \subset \text{ص}$ ∴ $\text{ط} \subset \text{ك} \subset \text{ص} \subset \text{ن}$

وتوضح بأشكال فن هكذا :



مثال : إذا كان : $\frac{٥}{٢} = \frac{١٥}{\text{س}}$ جد قيمة س

الحل : $\frac{٥}{٢} = \frac{٥ \times ٣}{٢ \times ٣} = \frac{١٥}{٦}$ إذن $\frac{١٥}{٦} = \frac{١٥}{\text{س}}$ ∴ س = ٦

تمرين : (١ - ١)

جد قيم س في كل مما يلي:

أ/ $\frac{٢}{٣} = \frac{\text{س}}{١٥}$ ب/ $\frac{٧}{٤} = \frac{\text{س}}{١٢}$ جـ/ $\frac{\text{س}}{٣٠} = \frac{١}{٥}$

د/ $\frac{٦}{\text{س}} = \frac{٣}{٧}$ هـ/ $\frac{١٨}{\text{س}} = \frac{٩}{٦}$

(١ - ٢) : كتابة العدد النسبي بصور مختلفة - الكسور المتكافئة

اكتب زوجاً من الكسور المتكافئة ثم جد:

أ/ حاصل ضرب بسط الكسر الأول في مقام الكسر الثاني.

ب/ حاصل ضرب بسط الكسر الثاني في مقام الكسر الأول.

ماذا تلاحظ؟

كرر هذه العملية في أزواج أخرى من الكسور المتكافئة تعبّر عن هذه القاعدة.

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن أ د = ب جـ

تسمّى هذه العملية بالضرب التبادلي، حيث يتضح منها أن حاصل ضرب الطرفين (أ ، د) يساوي حاصل ضرب الوسطين (ب ، جـ) لتحقيق هذه القاعدة:

(أ) نحول $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ إلى كسر مكافئ مقامه ب د إذن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ب د}}$

(ب) نحول $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ إلى كسر مكافئ مقامه ب د إذن $\frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب د}}$

$\frac{\text{أ د}}{\text{ب د}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب د}}$ ∴ أ د = ب جـ

مثال : أي الأزواج من الأعداد الآتية متكافئة

(أ) $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{١٥}{٤٠}$ (ب) $\frac{٤}{٧}$ ، $\frac{٢٠}{٢٥}$

الحل : أ/ ٣ × ٤٠ = ١٢٠ ، ٨ × ١٥ = ١٢٠

أي أن ٣ × ٤٠ = ٨ × ١٥ ∴ الكسور متكافئة

ب/ ٤ × ٢٥ = ١٠٠ ، ٧ × ٢٠ = ١٤٠

إذن ٤ × ٢٥ ≠ ٧ × ٢٠ ∴ الكسور غير متكافئة

مقلوب العدد النسبي:

لكل عدد نسبي $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ يوجد عدد نسبي هو $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ يسمّى مقلوب العدد.

مثلاً : مقلوب العدد $\frac{٣}{٤}$ هو العدد $\frac{٤}{٣}$

مقلوب $\frac{١}{٢}$ هو العدد ٢

مقلوب -٥ = $-\left(\frac{١}{٥}\right)$ = $\frac{١}{-٥}$ = $\frac{-١}{٥}$

مقلوب $\frac{-أ}{ب}$ هو $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{ب}{-أ}$ = $-\left(\frac{ب}{أ}\right)$

قاعدة :

حاصل ضرب أي عدد نسبي في مقلوبه = ١

تمرين : (١ – ٢)

(١) وضح صحة كل من العبارات التالية:

(أ) $\frac{٢}{٣} = \frac{-٢}{-٣}$ (ب) $\frac{-٤}{٥} = \frac{٤}{-٥}$

(٢) أي الأزواج من الأعداد الآتية متكافئة :

(أ) $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١٥}{٧٥}$ (ب) $-\left(\frac{٢}{٩}\right)$ ، $-\left(\frac{٨}{٤٥}\right)$ (جـ) $-\frac{٨}{١٣}$ ، $-\frac{٢٤}{٣٩}$

(٣) اكتب الأعداد الكسرية التالية في أبسط صورة للعدد النسبي المكافئ :

(أ) $\frac{٩}{١٥}$ (ب) $-\left(\frac{١٢}{٣٦}\right)$ (جـ) $\frac{٦٣}{١٠٥}$ (د) $-\frac{١٤٤}{٢٠٤}$

(٤) جد مقلوبات الأعداد الآتية :

(أ) $\frac{٧}{١٢}$ (ب) -٨ (جـ) $-\frac{١}{٧}$ (د) $-\left(\frac{٥}{٨}\right)$

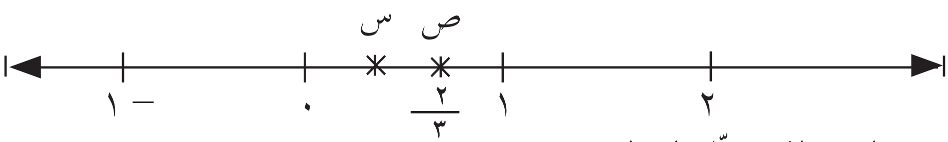
(١ - ٣) : تمثيل الأعداد النسبية على خط الأعداد :

تعلمنا سابقاً كيف نمثل الأعداد الصحيحة على خط الأعداد ، وذلك بوضع جميع الأعداد الصحيحة الموجبة على يمين الصفر، والأعداد الصحيحة السالبة على يسار الصفر، على أبعاد متساوية .

> الصفر عدد نسبي محايد غير موجب وغير سالب

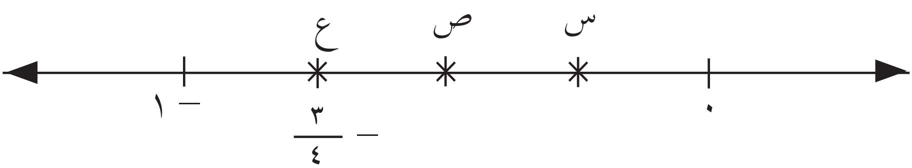
على نفس الخط يمكن تمثيل الأعداد النسبية كالآتي:

(أ) لتمثيل العدد $\frac{٢}{٣}$ على خط الأعداد نقسم القطعة المحصورة بين النقطة التي تمثّل العدد صفر والنقطة التي تمثل العدد ١ إلى ثلاثة أقسام متساوية في النقطتين س ، ص وتكون النقطة ص هي النقطة التي تمثّل العدد.



ما العدد الذي تمثّله النقطة س ؟

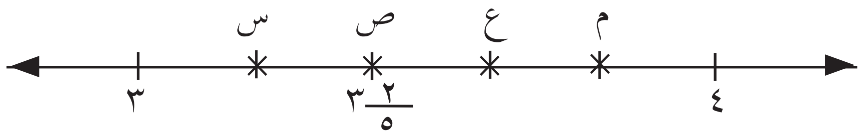
(ب) لتمثيل العدد – $\frac{٣}{٤}$ على خط الأعداد نقسم القطعة المحصورة بين النقطة التي تمثّل العدد صفر والعدد –١ إلى أربعة أقسام متساوية في النقاط س ، ص ، ع وتكون النقطة ع هي النقطة التي تمثل العدد –($\frac{٣}{٤}$)



ما الأعداد التي تمثّلها النقاط س ، ص ؟

عيّن النقطة التي تمثّل $\frac{-٣}{٤}$ والنقطة التي تمثّل $\frac{٣}{-٤}$ ماذا تلاحظ ؟

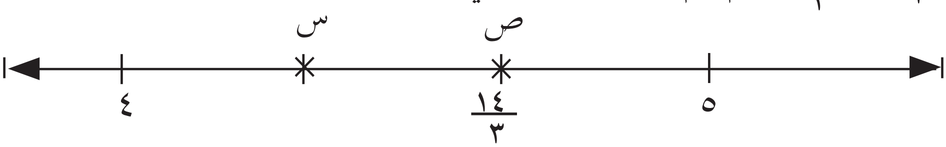
(جـ) لتمثيل العدد $٣\frac{٢}{٥}$ على خط الأعداد نقسم القطعة المحصورة بين النقطة التي تمثّل العدد ٣ والنقطة التي تمثّل العدد ٤ إلى خمسة أقسام متساوية في النقاط س ، ص ، ع ، م وتكون النقطة ص هي تمثّل العدد $٣\frac{٢}{٥}$



ما الأعداد التي تمثّلها النقاط س ، ع ، م ؟

(د) لتمثيل العدد $\frac{١٤}{٣}$ على خط الأعداد يجب أن يحوّل إلى كسر مركب (كما تعلمنا سابقاً) :

$\frac{١٤}{٣} = ٤\frac{٢}{٣}$ ثم يتم تمثيله كما سبق في المثال جـ .



وتكون النقطة ص هي التي تمثّل العدد $\frac{١٤}{٣}$

ما العدد الذي تمثّله النقطة س ؟

تدريب صفي :

على خط الأعداد مثّل الأعداد الآتية:

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $-٣\frac{٤}{٥}$ (جـ) $-\frac{٧}{٤}$

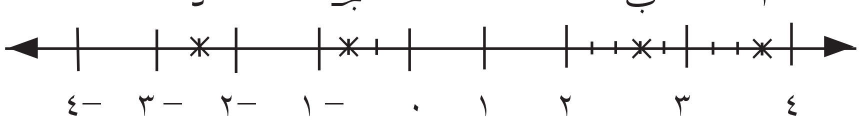
تمرين (١ – ٣)

١/ على خط الأعداد مثّل الأعداد الآتية:

(أ) $٢\frac{١}{٢}$ (ب) $٤\frac{١}{٤}$ (جـ) $-\frac{٢}{٣}$

(د) $-\frac{٣}{٤}$ (هـ) $-(\frac{١٥}{٤})$

٢/ اكتب العدد الذي تمثّله كل من النقاط أ ، ب ، جـ ، د



(١ ـ ٤) : مقارنة عددين نسبيين:

أولاً : إذا كان المقامان متساويين :

نقارن بين البسطين فأكبرهما هو العدد الأكبر، فمثلاً :

أ/ أيهما أكبر $\frac{٦}{٧}$ أم $\frac{٤}{٧}$

بما أن المقامين متساويين و $٦ > ٤$ فإن $\frac{٦}{٧} > \frac{٤}{٧}$

ب/ أيهما أكبر $-\frac{٥}{٩}$ أم $-\frac{٨}{٩}$.

بما أن المقامين متساويين و $-٥ > -٨$ فإن $-\frac{٥}{٩} > -\frac{٨}{٩}$

قاعدة:

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ب}$ عددين نسبيين حيث $ب > ٠$

(أ) $أ > جـ$ فإن $\frac{أ}{ب} > \frac{جـ}{ب}$

(ب) $أ < جـ$ فإن $\frac{أ}{ب} < \frac{جـ}{ب}$

ثانياً : إذا كان مقاما العددين مختلفين

أيهما أكبر $\frac{٣}{٨}$ أم $\frac{٢}{٧}$

نجعل المقامين متساويان كما تعلمنا في الكسور المتكافئة
المضاعف المشترك الأصغر للمقامين ٥٦

$\frac{٣}{٨} = \frac{٣ \times ٧}{٨ \times ٧} = \frac{٢١}{٥٦}$ ، $\frac{٢}{٧} = \frac{٢ \times ٨}{٧ \times ٨} = \frac{١٦}{٥٦}$

وبما أن $٢١ > ١٦$ إذن $\frac{٣}{٨} > \frac{٢}{٧}$

بصورة عامة :

لمقارنة العددين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ حيث ب > ٠ ، د > ٠

نكتب العددين بمقام ب د

$$\frac{أ}{ب} = \frac{أ \times د}{ب \times د} = \frac{أ\ د}{ب\ د} \quad ، \quad \frac{جـ}{د} = \frac{جـ \times ب}{د \times ب} = \frac{جـ\ ب}{د\ ب}$$

إذا كان

(أ) أ د > جـ ب فإن $\frac{أ}{ب} > \frac{جـ}{د}$

(ب) أ د < جـ ب فإن $\frac{أ}{ب} < \frac{جـ}{د}$

مثال (١) : رتب تصاعدياً الأعداد $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣}{٤}$

الحل : المضاعف المشترك الأصغر للمقامات = ٦٠

$$\frac{٢}{٣} = \frac{٢ \times ٢٠}{٣ \times ٢٠} = \frac{٤٠}{٦٠} \quad ، \quad \frac{٢}{٥} = \frac{٢ \times ١٢}{٥ \times ١٢} = \frac{٢٤}{٦٠}$$

$$\frac{٣}{٤} = \frac{٣ \times ١٥}{٤ \times ١٥} = \frac{٤٥}{٦٠}$$ (بمقارنة البسط والترتيب)

∴ الترتيب هو $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$

مثال (٢): رتب تنازليا الأعداد : $\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١}{٢}$

الحل : المضاعف المشترك الأصغر للمقامات = ٧٠

$$\frac{٥}{٧} = \frac{٥ \times ١٠}{٧ \times ١٠} = \frac{٥٠}{٧٠} \quad ، \quad \frac{٢}{٥} = \frac{٢ \times ١٤}{٥ \times ١٤} = \frac{٢٨}{٧٠}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١ \times ٣٥}{٢ \times ٣٥} = \frac{٣٥}{٧٠}$$ (بالمقارنة) ∴ $\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥}$

تمرين : (١ - ٤)

١/ أيهما أكبر في كل زوج مما يأتي :

(أ) $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٥}{٨}$ (ب) − ($\frac{٢}{٣}$) ، − ($\frac{٥}{٧}$)

(جـ) $\frac{٦}{١١}$ ، $\frac{٥}{٩}$ (د) − $\frac{٣}{٨}$ ، − ($\frac{٢}{٥}$)

٢/ رتب تصاعدياً الأعداد : $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$

٣/ رتب تنازليا الأعداد: $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٦}{٧}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٥}{١٢}$