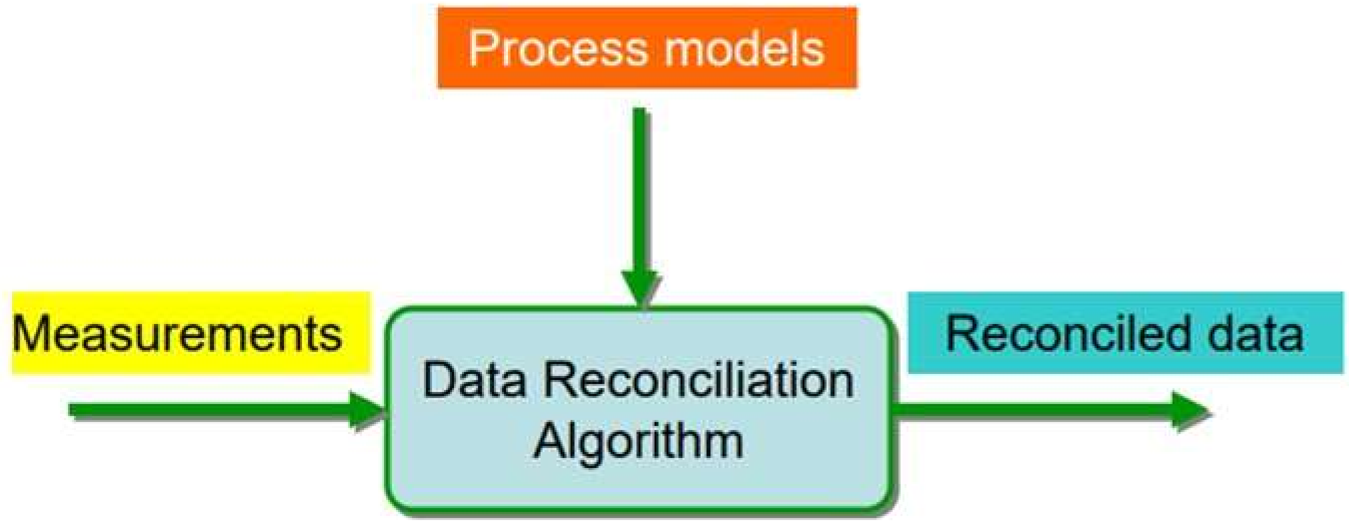
Reconciliação de dados

Arthur de Miranda Neto
Danilo Alves de Lima

2



Reconciliação de Dados (RD)

Com o advento de sistemas automatizados de coleta de dados representados por CLPs, sistemas supervisórios e PIMS, o aspecto de se obter e encaminhar dados transformando-os em informações foi resolvido.

Reconciliação de Dados (RD)

Com o advento de sistemas automatizados de coleta de dados representados por CLPs, sistemas supervisórios e PIMS, o aspecto de se obter e encaminhar dados transformando-os em informações foi resolvido.

Entretanto, quando tentamos utilizar os dados, verificamos que os dados não obedecem equações de balanço.

Reconciliação de Dados (RD)

Com o advento de sistemas automatizados de coleta de dados representados por CLPs, sistemas supervisórios e PIMS, o aspecto de se obter e encaminhar dados transformando-os em informações foi resolvido.

Entretanto, quando tentamos utilizar os dados, verificamos que os dados não obedecem equações de balanço.

Por que um balanço de massas não fecha?

Reconciliação de Dados (RD)

Com o advento de sistemas automatizados de coleta de dados representados por CLPs, sistemas supervisórios e PIMS, o aspecto de se obter e encaminhar dados transformando-os em informações foi resolvido.

Entretanto, quando tentamos utilizar os dados, verificamos que os dados não obedecem equações de balanço.

Por que um balanço de massas não fecha?

Porque os dados colhidos são muitas vezes inconsistentes.

Reconciliação de Dados (RD)

Com o advento de sistemas automatizados de coleta de dados representados por CLPs, sistemas supervisórios e PIMS, o aspecto de se obter e encaminhar dados transformando-os em informações foi resolvido.

Entretanto, quando tentamos utilizar os dados, verificamos que os dados não obedecem equações de balanço.

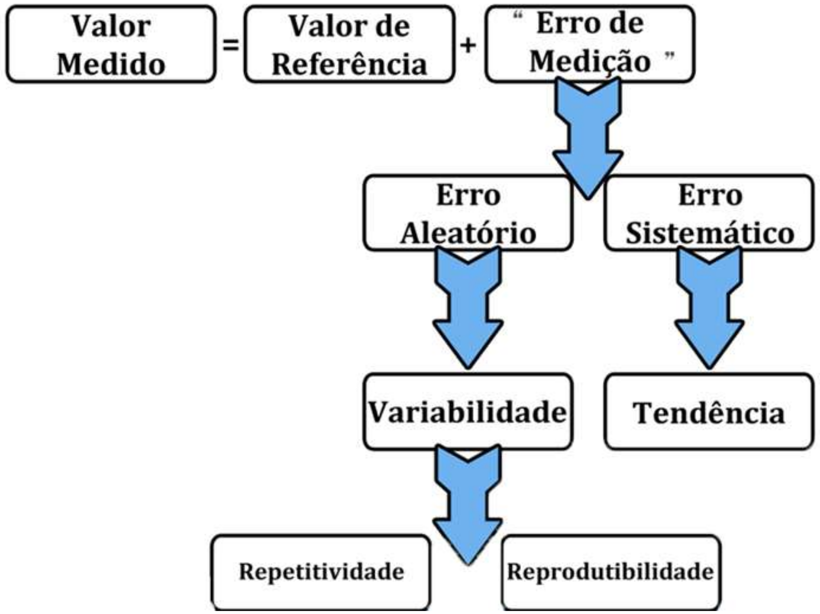
Por que um balanço de massas não fecha?

Porque os dados colhidos são muitas vezes inconsistentes. **As totalizações das entradas e saídas dos equipamentos de processo, considerando-se as acumulações, como tanques, pilhas de homogeneização de minérios etc., estão sempre em uma situação de balanço matemático, mas as medidas coletadas não.**

Reconciliação de Dados (RD)

Os erros são devidos a:

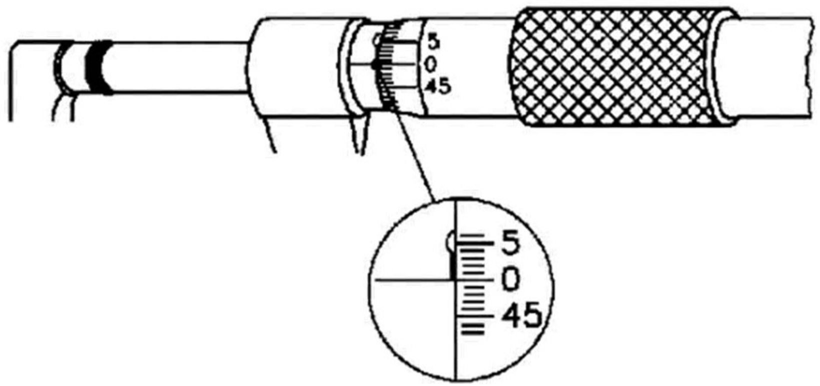
- **Erro de medição aleatório**



Reconciliação de Dados (RD)

Os erros são devidos a:

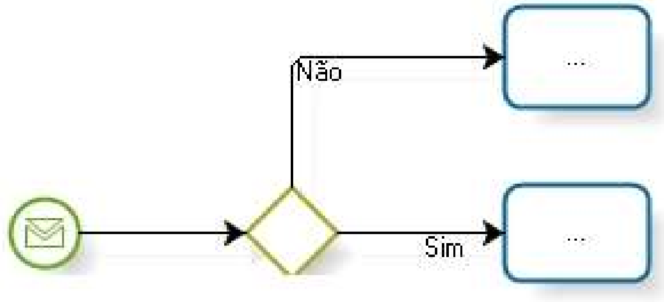
- Erro de medição aleatório
- **Instrumento descalibrado**



Reconciliação de Dados (RD)

Os erros são devidos a:

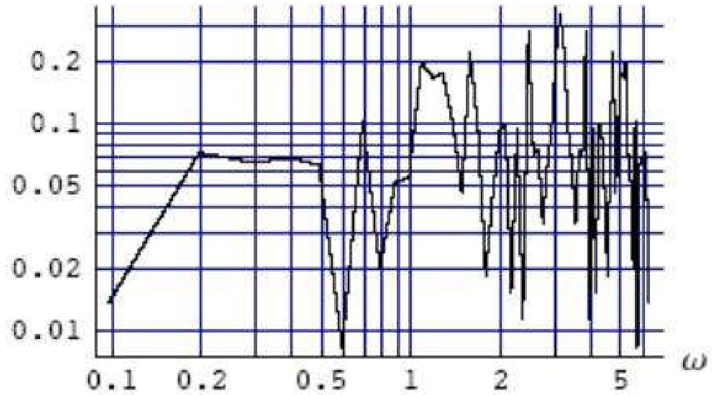
- Erro de medição aleatório
- Instrumento descalibrado
- **Modelamento inadequado**



Reconciliação de Dados (RD)

Os erros são devidos a:

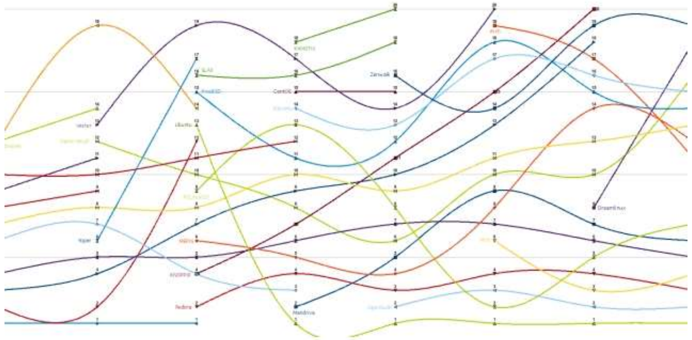
- Erro de medição aleatório
- Instrumento descalibrado
- Modelamento inadequado
- **Amostragem na frequência incorreta**



Reconciliação de Dados (RD)

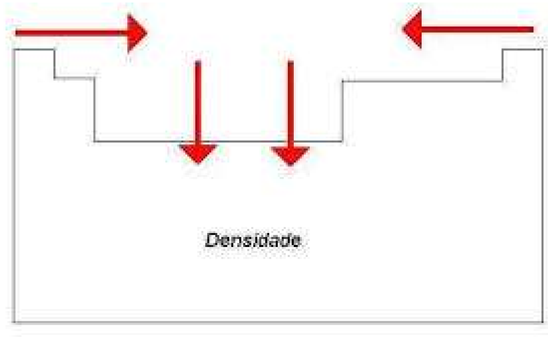
Os erros são devidos a:

- Erro de medição aleatório
- Instrumento descalibrado
- Modelamento inadequado
- Amostragem na frequência incorreta
- **Não linearidade do instrumento**



Reconciliação de Dados (RD)

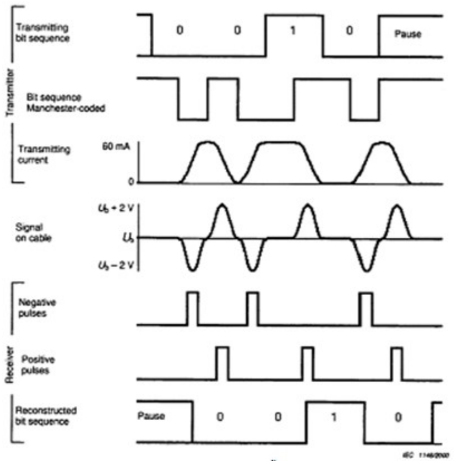
Os erros são devidos a:



- Erro de medição aleatório
- Instrumento descalibrado
- Modelamento inadequado
- Amostragem na frequência incorreta
- Não linearidade do instrumento
- **Densidade incorreta ou variando com temperatura**

Reconciliação de Dados (RD)

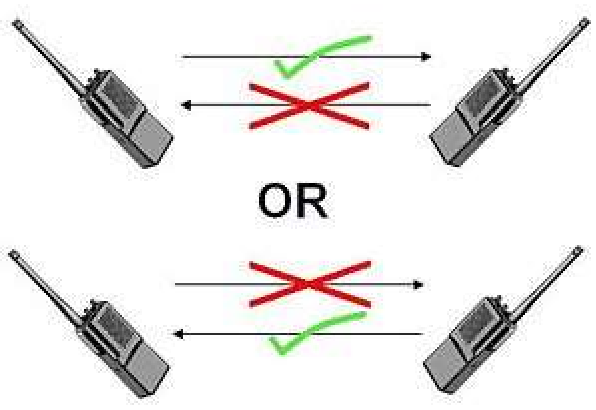
Os erros são devidos a:



- Erro de medição aleatório
- Instrumento descalibrado
- Modelamento inadequado
- Amostragem na frequência incorreta
- Não linearidade do instrumento
- Densidade incorreta ou variando com temperatura
- **Leitura fora de faixa do instrumento**

Reconciliação de Dados (RD)

Os erros são devidos a:



- Erro de medição aleatório
- Instrumento descalibrado
- Modelamento inadequado
- Amostragem na frequência incorreta
- Não linearidade do instrumento
- Densidade incorreta ou variando com temperatura
- Leitura fora de faixa do instrumento
- **Erro de transmissão do sinal**

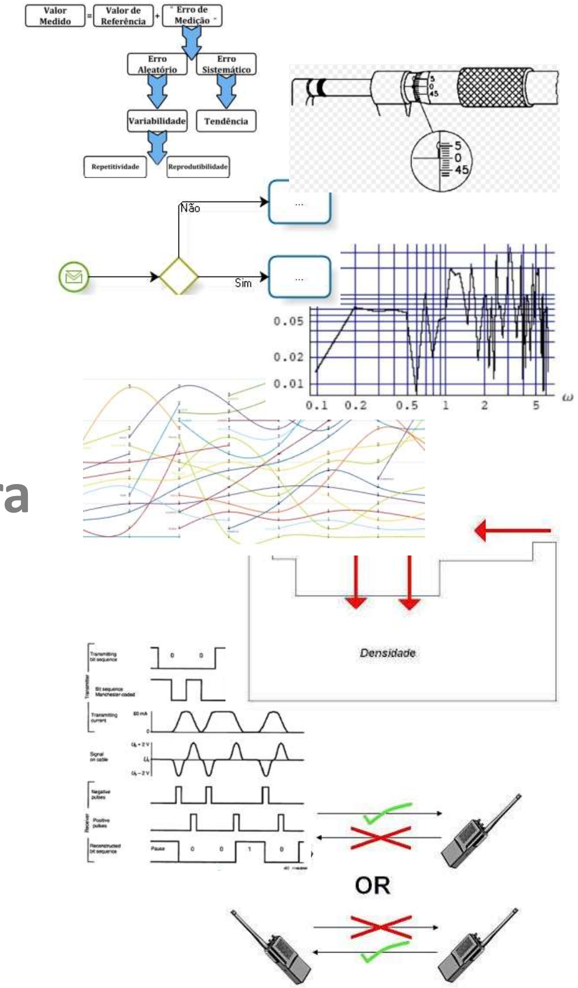
Etc.

Reconciliação de Dados (RD)

Os erros são devidos a:

- Erro de medição aleatório
- Instrumento descalibrado
- Modelamento inadequado
- Amostragem na frequência incorreta
- Não linearidade do instrumento
- Densidade incorreta ou variando com temperatura
- Leitura fora de faixa do instrumento
- Erro de transmissão do sinal

Etc.

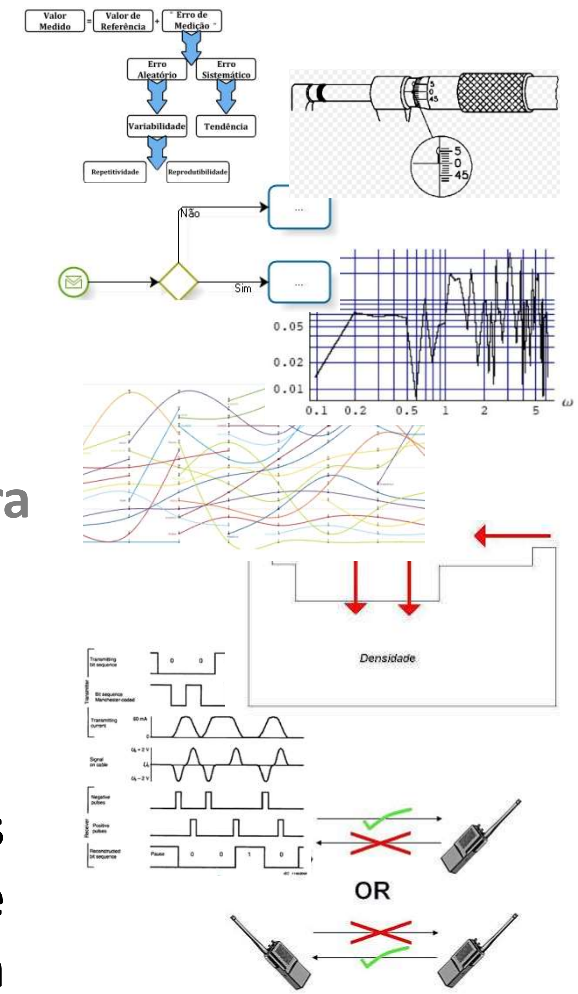


Reconciliação de Dados (RD)

Os erros são devidos a:

- Erro de medição aleatório
- Instrumento descalibrado
- Modelamento inadequado
- Amostragem na frequência incorreta
- Não linearidade do instrumento
- Densidade incorreta ou variando com temperatura
- Leitura fora de faixa do instrumento
- Erro de transmissão do sinal

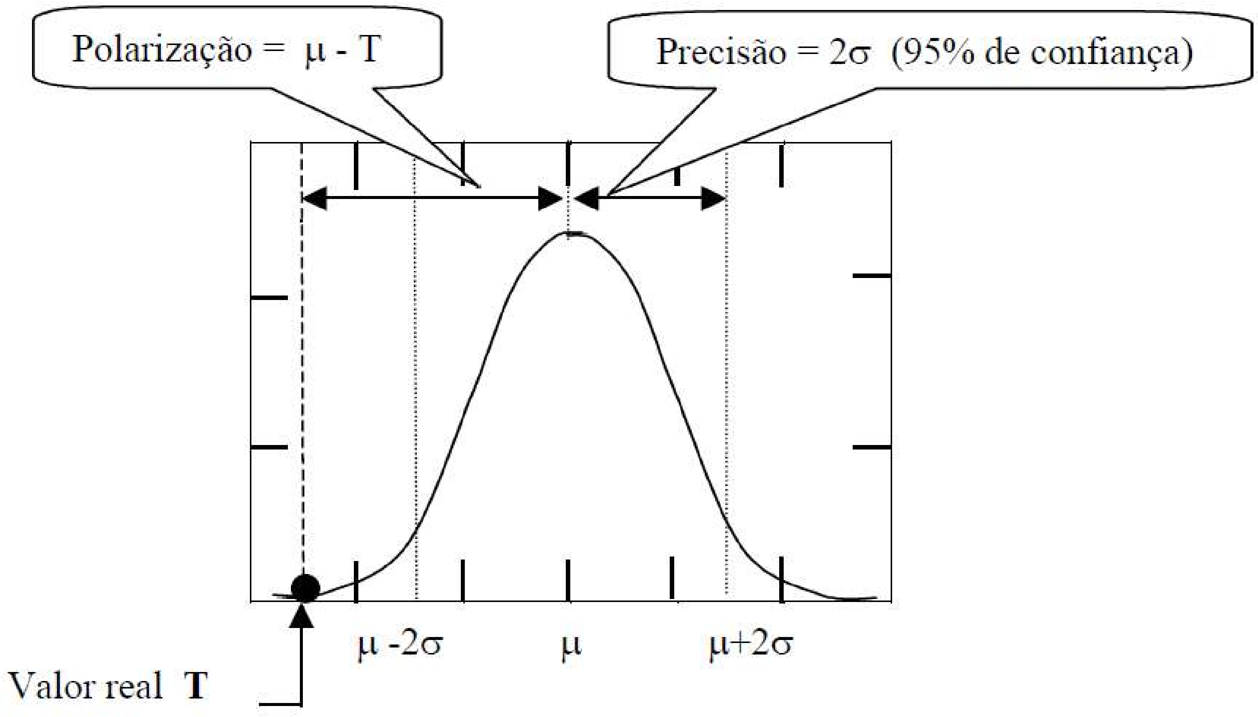
Etc.



Uma maneira usual de se contornar estes problemas consiste em se atribuir maior grau de confiança para determinadas medidas baseado em algum conhecimento empírico do funcionamento da planta e de se alterar os dados artificialmente.

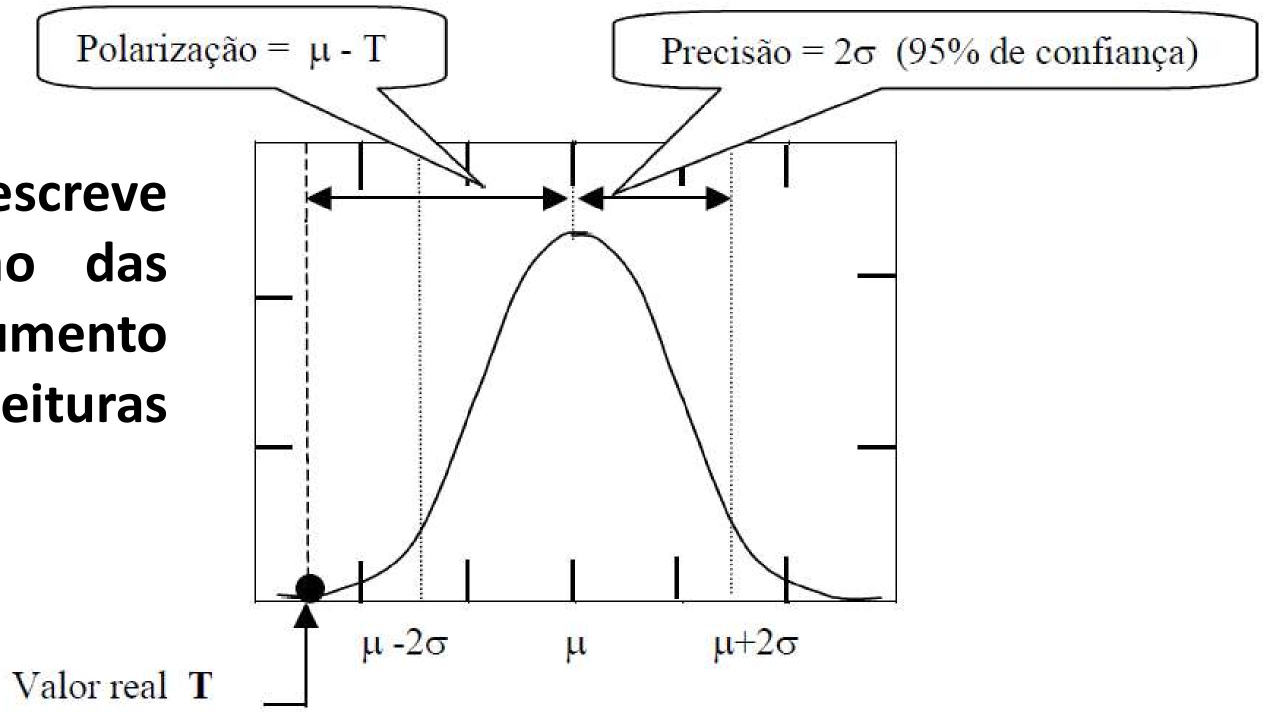
Reconciliação de Dados (RD)

Considere a figura.



Reconciliação de Dados (RD)

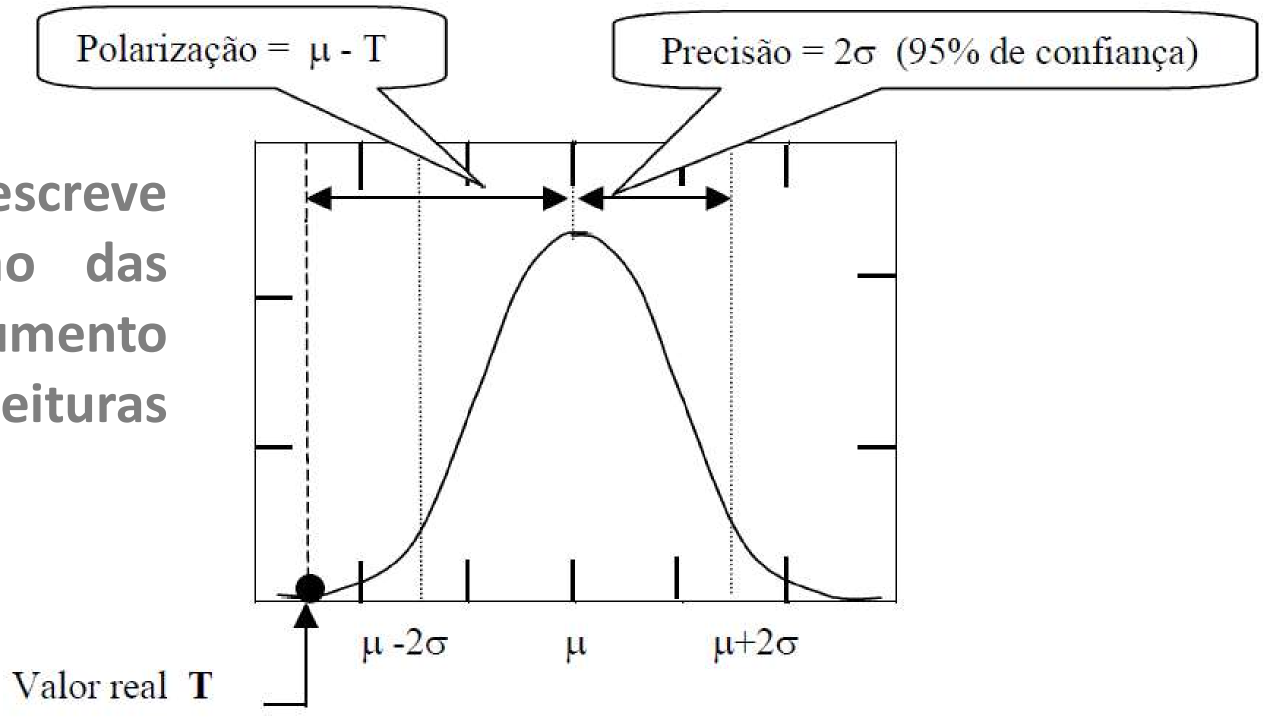
Considere a figura. **Ela descreve a curva de distribuição das leituras de um instrumento após realizar infinitas leituras de um mesmo valor T.**



Reconciliação de Dados (RD)

Considere a figura. Ela descreve a curva de distribuição das leituras de um instrumento após realizar infinitas leituras de um mesmo valor T.

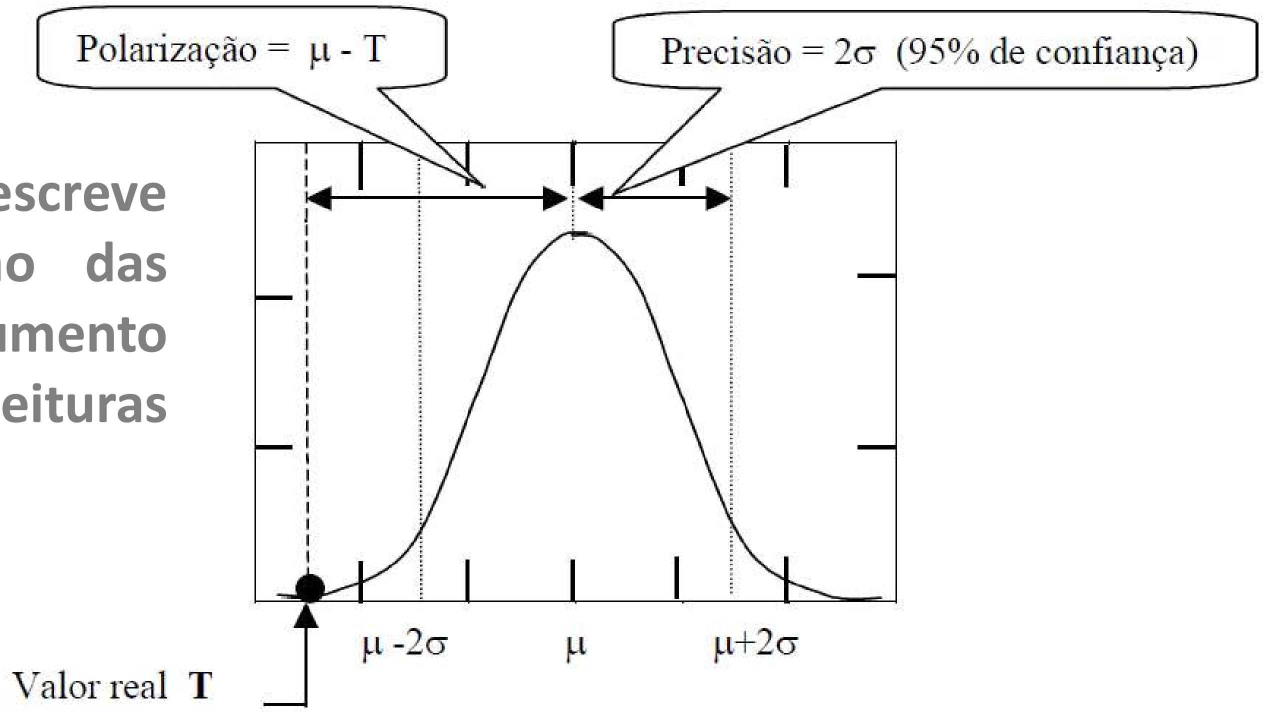
O valor real da medida corresponde a T.



Reconciliação de Dados (RD)

Considere a figura. Ela descreve a curva de distribuição das leituras de um instrumento após realizar infinitas leituras de um mesmo valor T.

O valor real da medida corresponde a T.

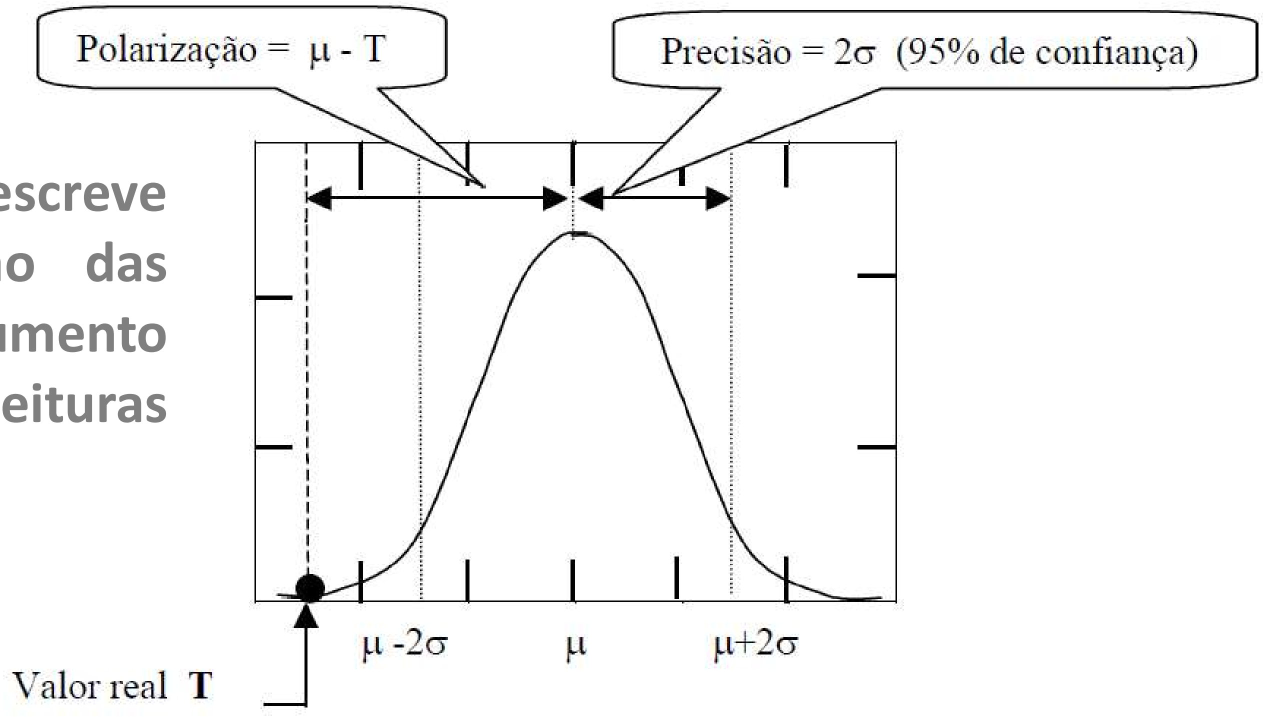


A função distribuição é uma gaussiana de média μ

Reconciliação de Dados (RD)

Considere a figura. Ela descreve a curva de distribuição das leituras de um instrumento após realizar infinitas leituras de um mesmo valor T.

O valor real da medida corresponde a T.

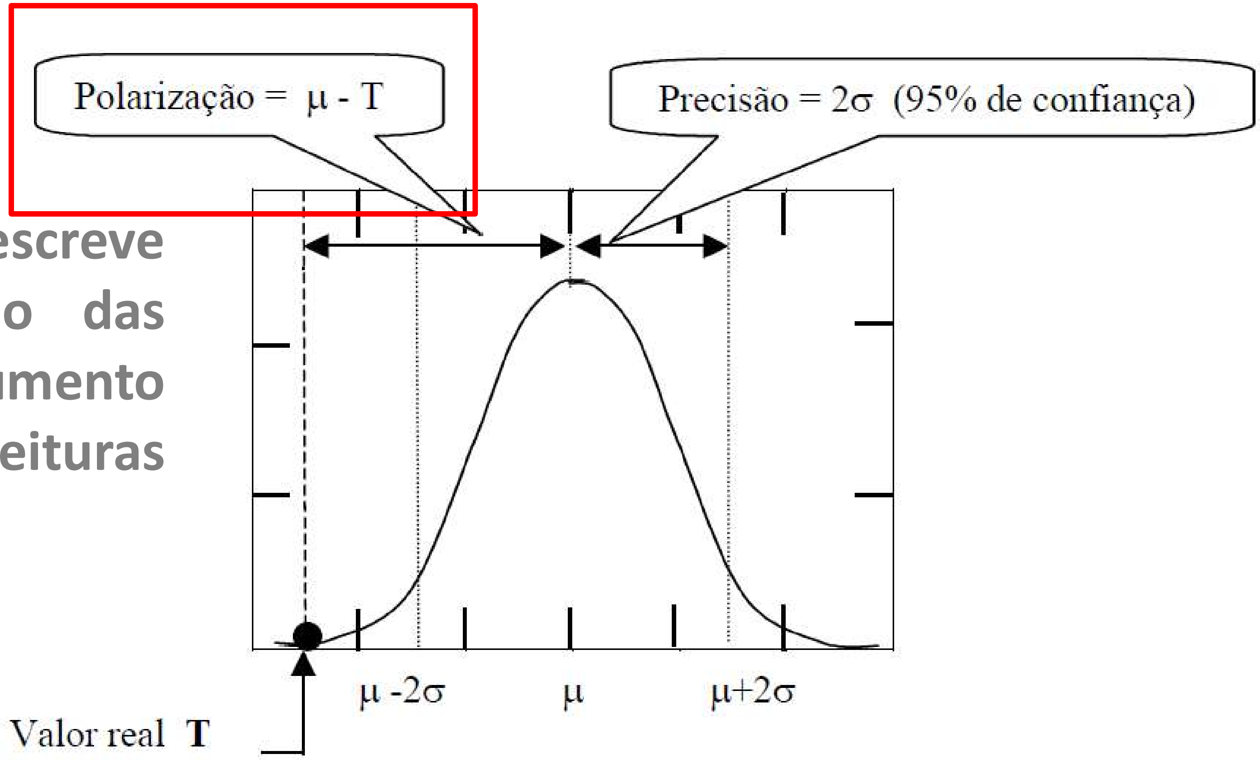


A função distribuição é uma gaussiana de média μ e desvio padrão σ.

Reconciliação de Dados (RD)

Considere a figura. Ela descreve a curva de distribuição das leituras de um instrumento após realizar infinitas leituras de um mesmo valor T.

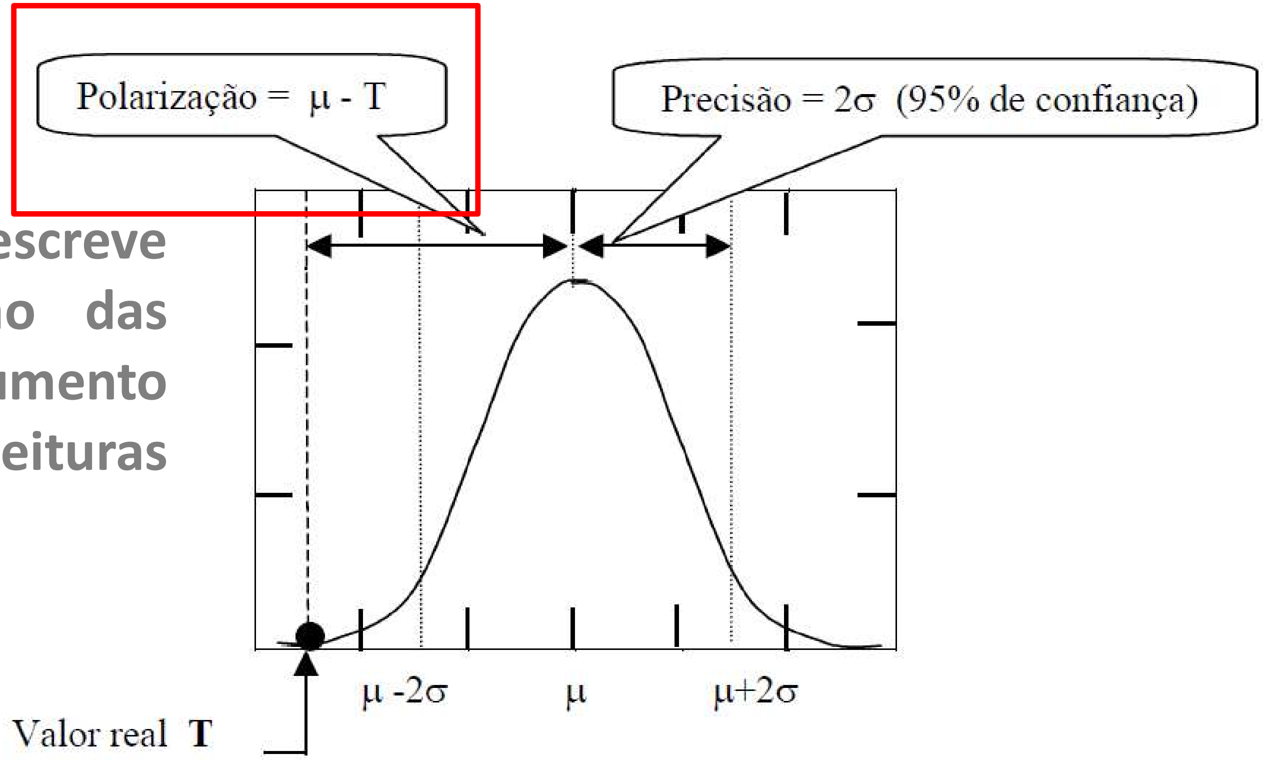
O valor real da medida corresponde a T.



A função distribuição é uma gaussiana de média μ e desvio padrão σ.

A diferença entre a média das medidas e o valor real é denominado <u>polarização (bias)</u>, e corresponde a um desvio sistemático do valor desejado.

Reconciliação de Dados (RD)



Considere a figura. Ela descreve a curva de distribuição das leituras de um instrumento após realizar infinitas leituras de um mesmo valor T.

O valor real da medida corresponde a T.

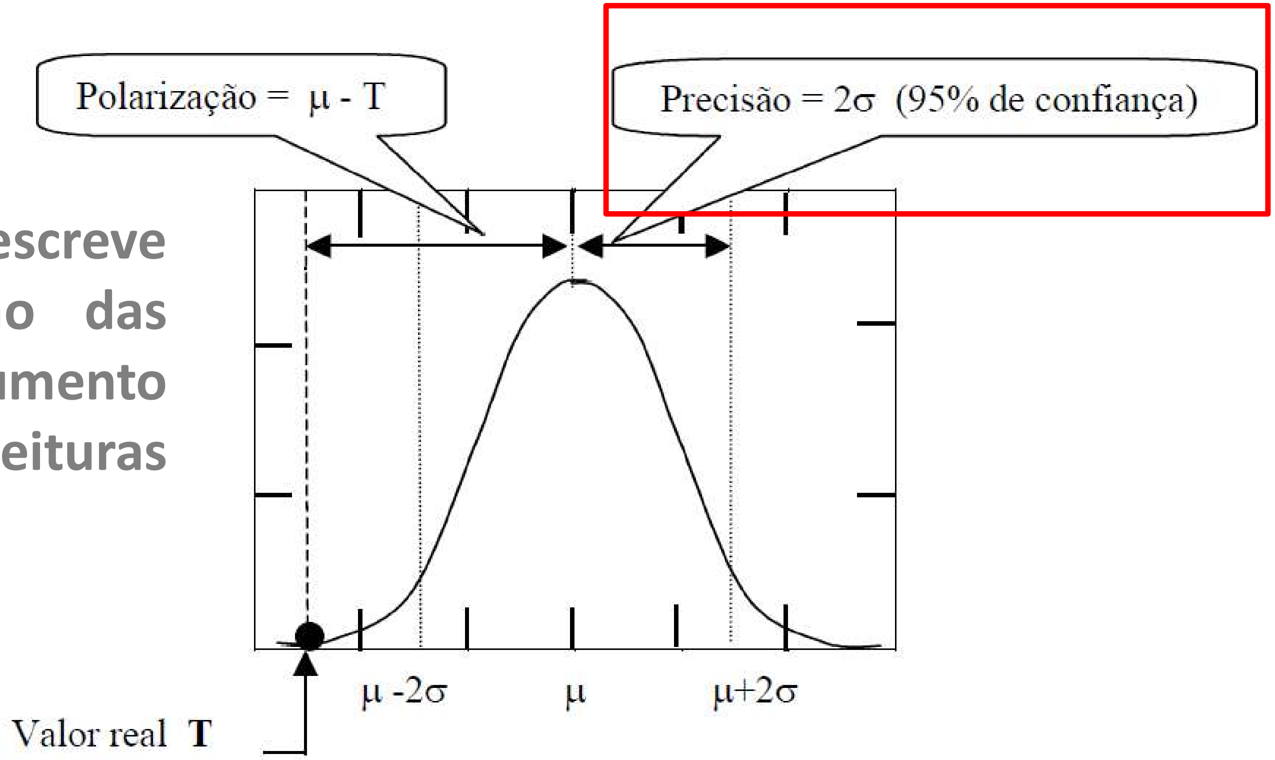
A função distribuição é uma gaussiana de média μ e desvio padrão σ.

Quando um conjunto de medidas possui <u>baixo valor de polarização</u>, dizemos que possui exatidão (*accuracy*).

Reconciliação de Dados (RD)

Considere a figura. Ela descreve a curva de distribuição das leituras de um instrumento após realizar infinitas leituras de um mesmo valor T.

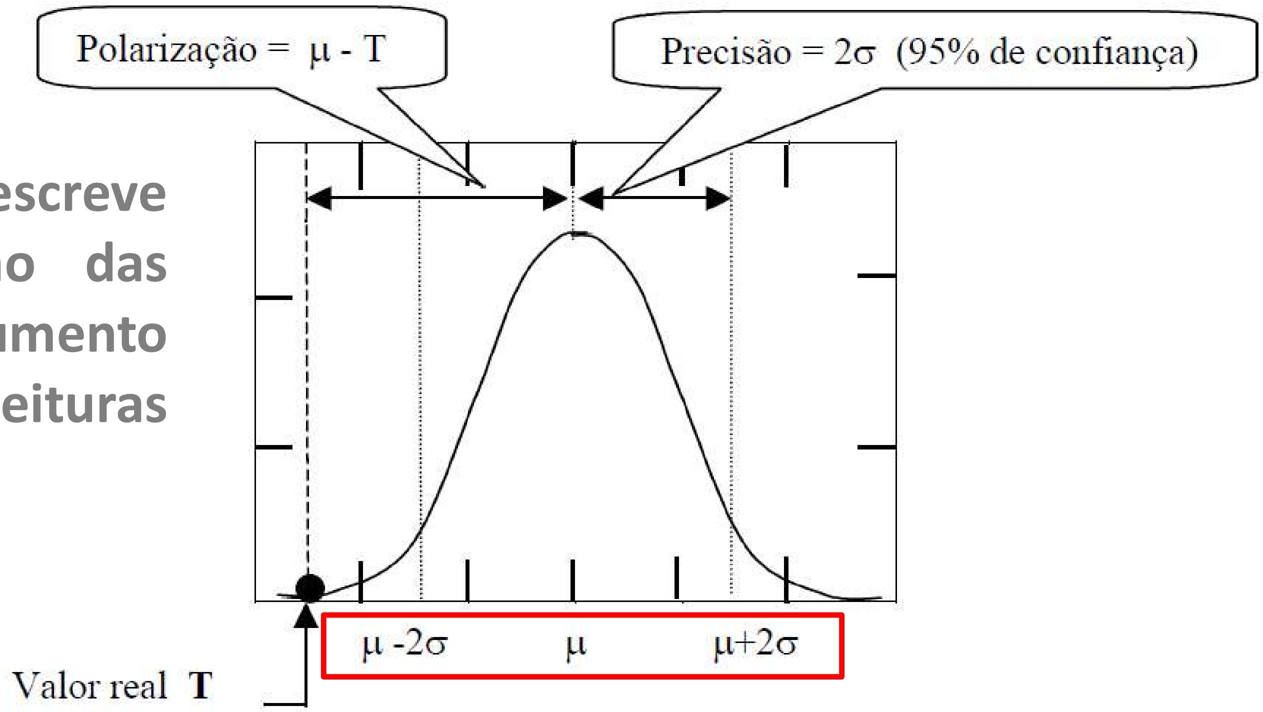
O valor real da medida corresponde a T.



A função distribuição é uma gaussiana de média μ e desvio padrão σ.

A precisão (*precision*) ou erro aleatório, <u>é dada pelo dobro do desvio padrão das medições realizadas</u>.

Reconciliação de Dados (RD)



Considere a figura. Ela descreve a curva de distribuição das leituras de um instrumento após realizar infinitas leituras de um mesmo valor T.

O valor real da medida corresponde a T.

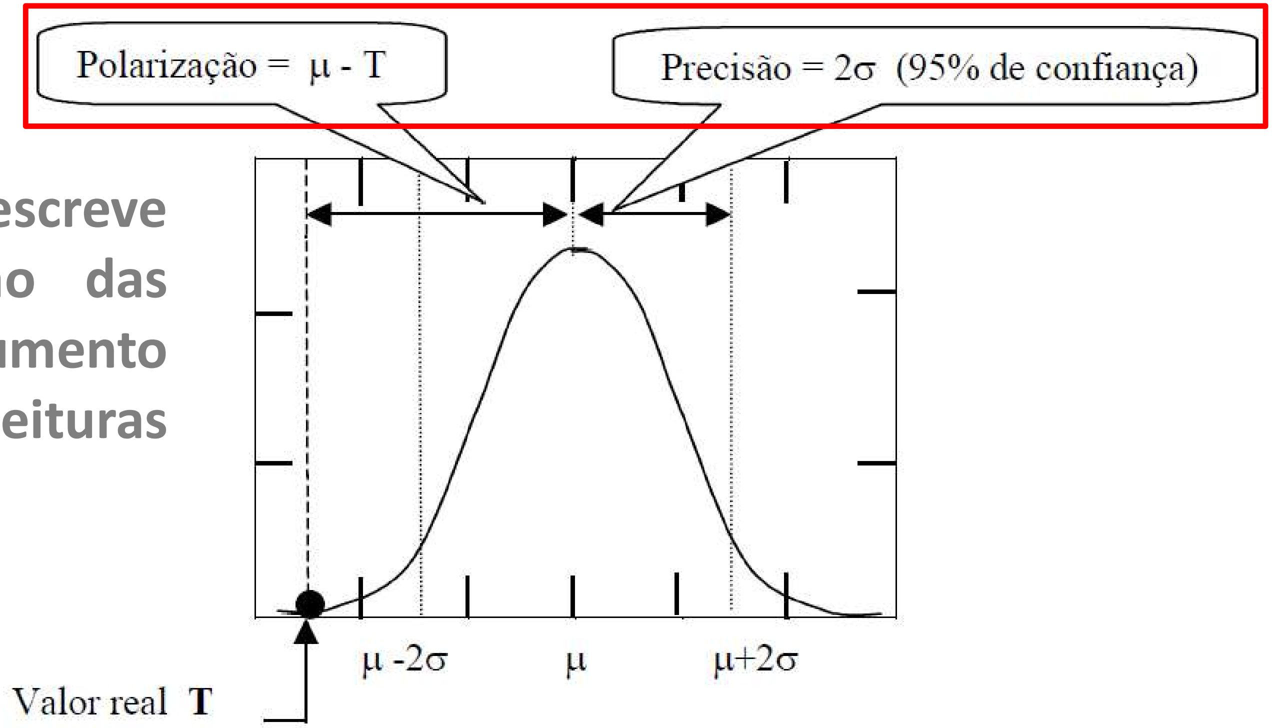
A função distribuição é uma gaussiana de média μ e desvio padrão σ.

Estatisticamente pode-se garantir que 95% das medidas estarão na faixa entre $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$.

Reconciliação de Dados (RD)

Considere a figura. Ela descreve a curva de distribuição das leituras de um instrumento após realizar infinitas leituras de um mesmo valor T.

O valor real da medida corresponde a T.

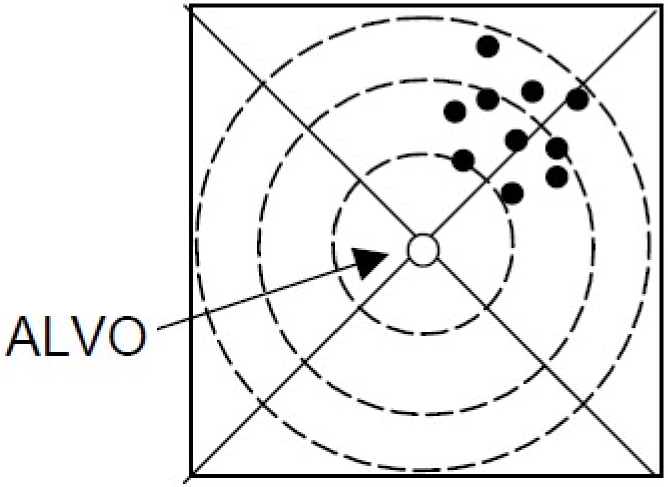


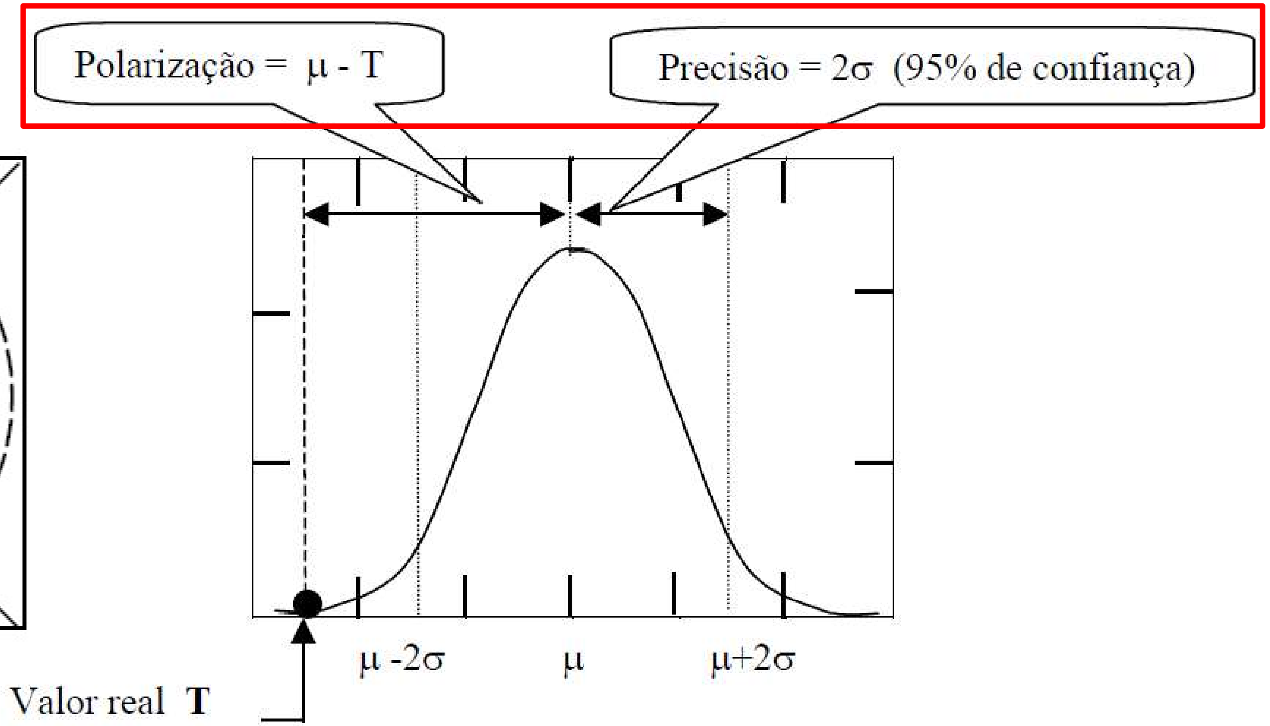
A função distribuição é uma gaussiana de média μ e desvio padrão σ.

A incerteza da medida é definida como:

$$Incerteza = \sqrt{(polarizaçao^2 + precisao^2)}$$

Reconciliação de Dados (RD)



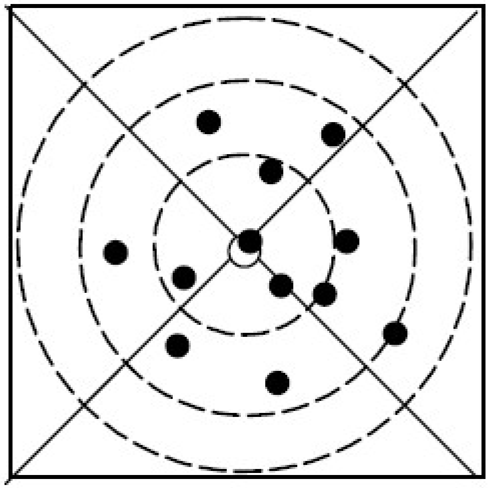


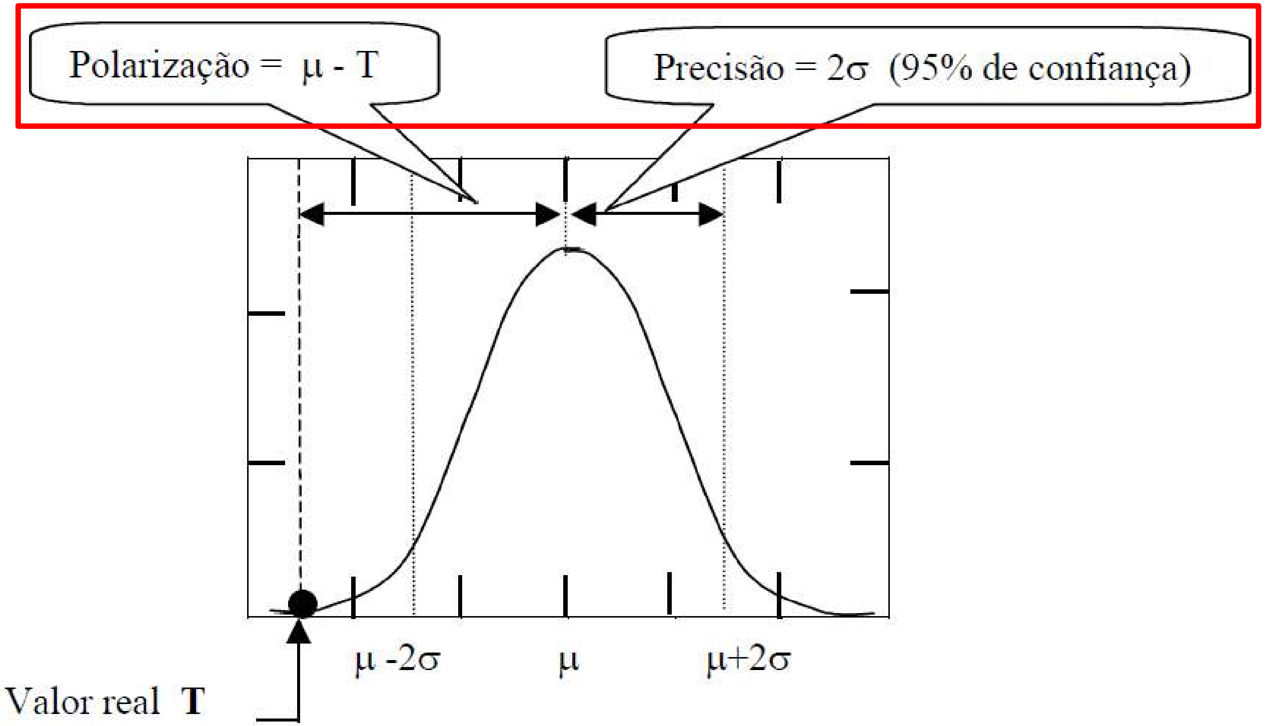
sinal com baixa exatidão e alta precisão

A incerteza da medida é definida como:

$$Incerteza = \sqrt{(polarizaçao^2 + precisao^2)}$$

Reconciliação de Dados (RD)





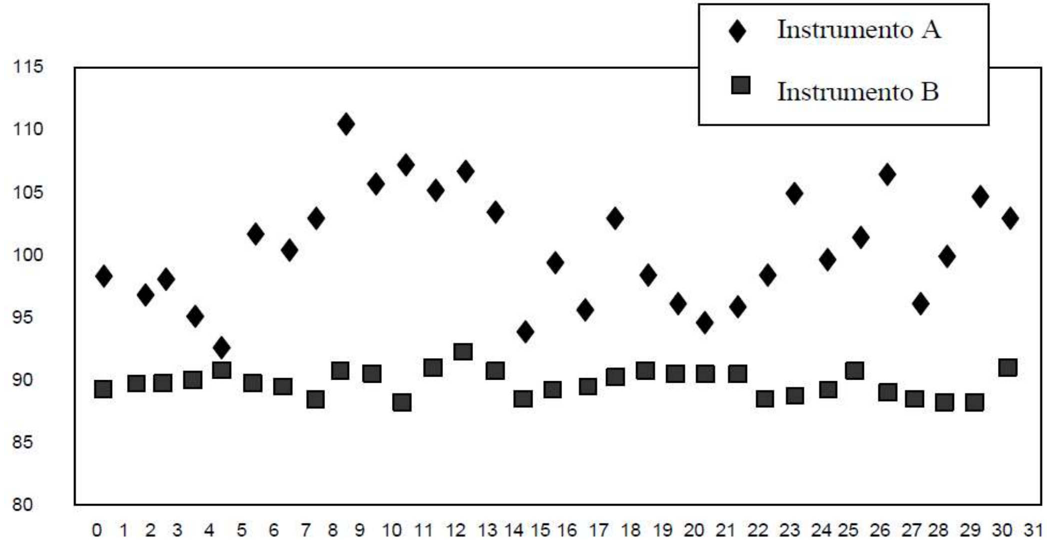
sinal com alta exatidão com baixa precisão

A incerteza da medida é definida como:

$$Incerteza = \sqrt{(polarizaçao^2 + precisao^2)}$$

Reconciliação de Dados (RD)

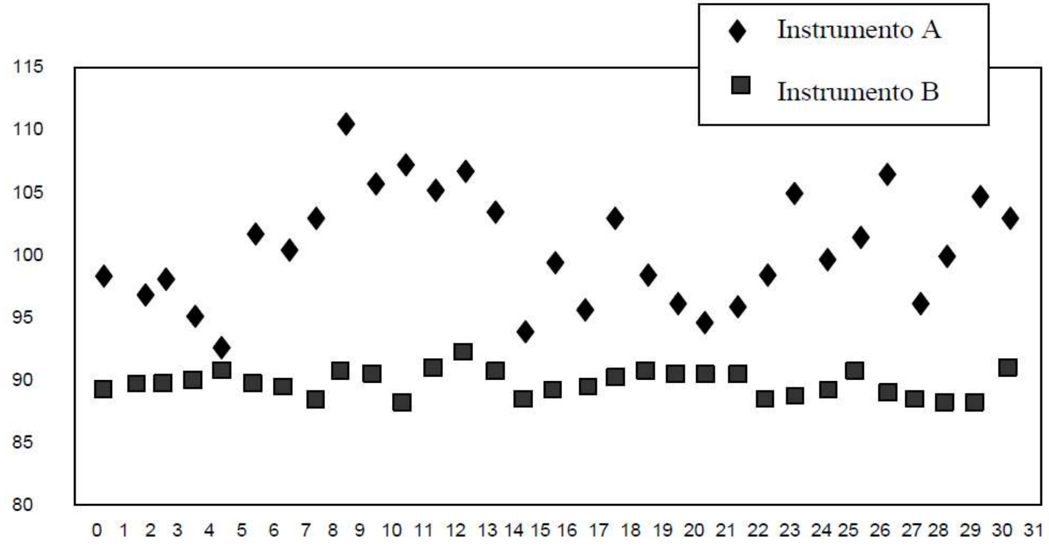
O gráfico da figura mostra a leitura do valor da vazão de um líquido mantida constante durante o intervalo de medida.



Reconciliação de Dados (RD)

O gráfico da figura mostra a leitura do valor da vazão de um líquido mantida constante durante o intervalo de medida.

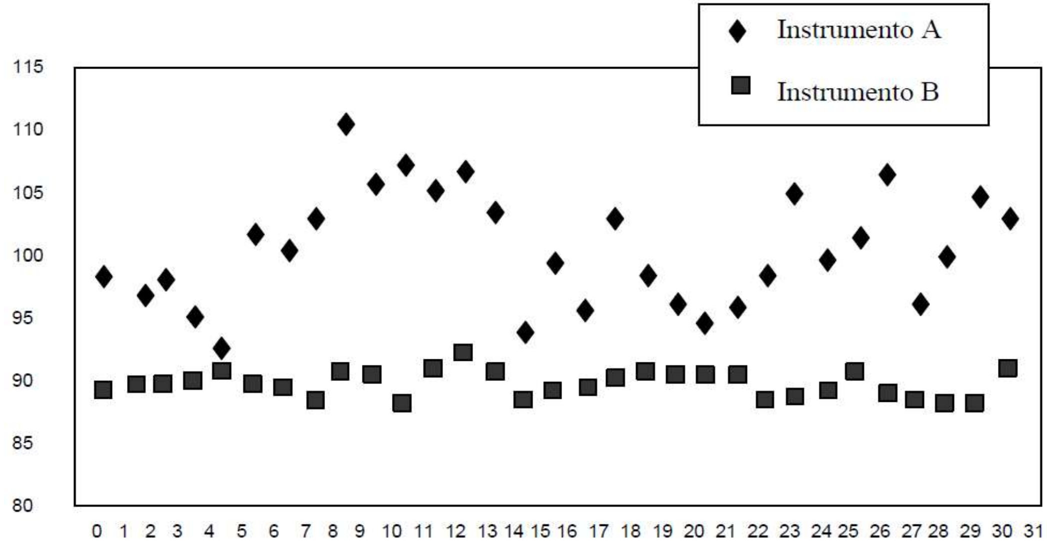
O valor exato do fluxo é conhecido e é igual a 100.



Reconciliação de Dados (RD)

O gráfico da figura mostra a leitura do valor da vazão de um líquido mantida constante durante o intervalo de medida.

O valor exato do fluxo é conhecido e é igual a 100.

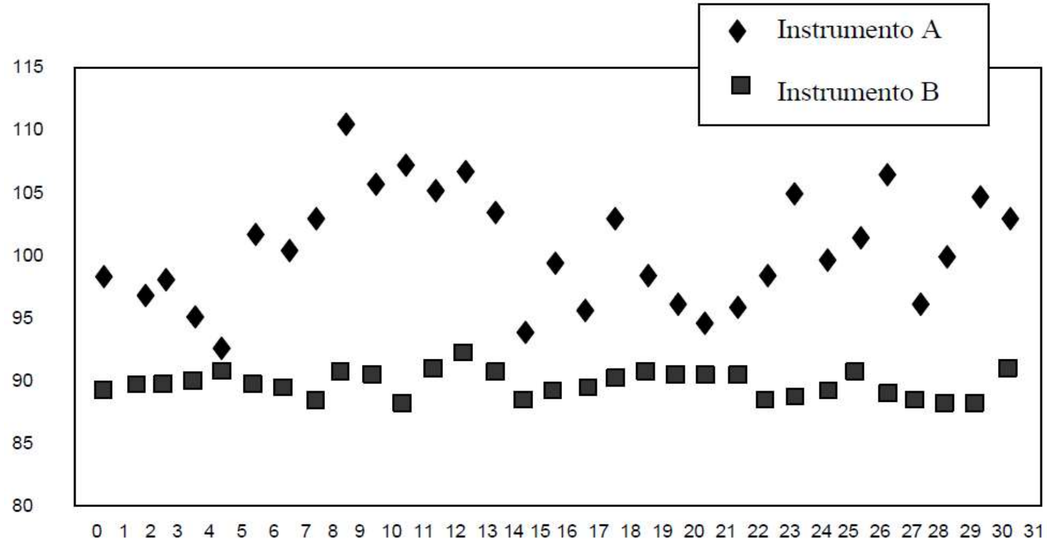


A média e o desvio padrão dos dados foi calculada como sendo:

	Instrumento A	Instrumento B
Média (μ)	100.4	89.8
Desvio padrão (σ)	4.26	0.52

Reconciliação de Dados (RD)

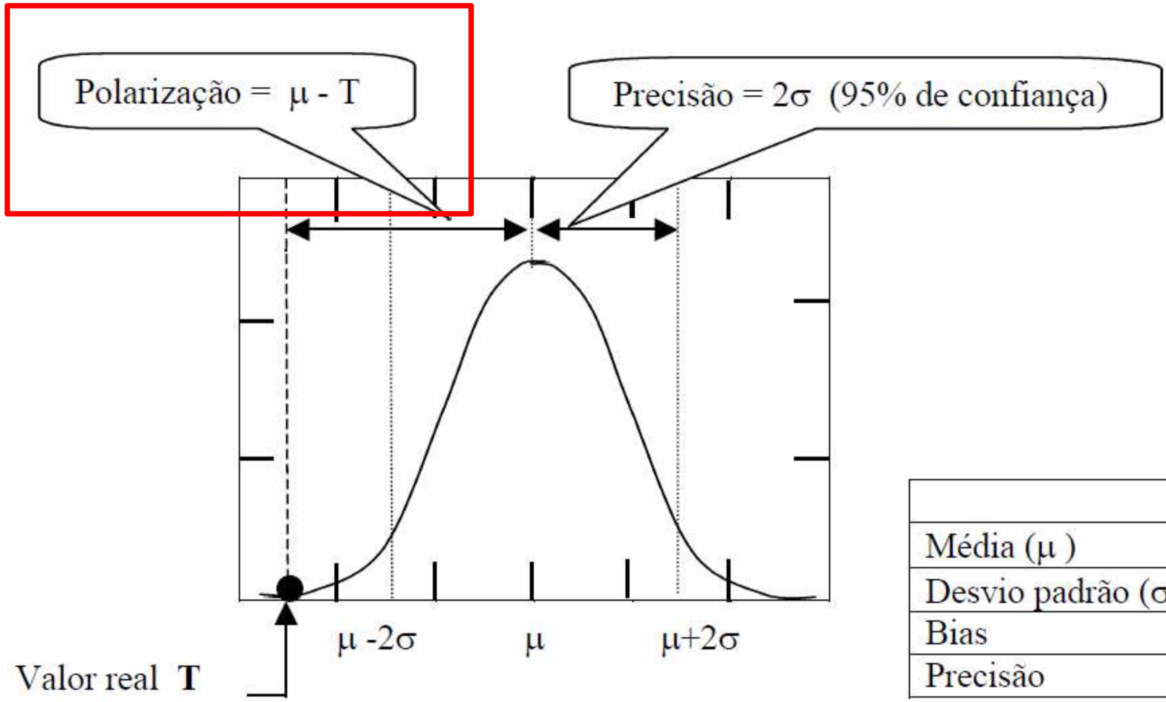
Calcule o bias e a precisão para os dois instrumentos.

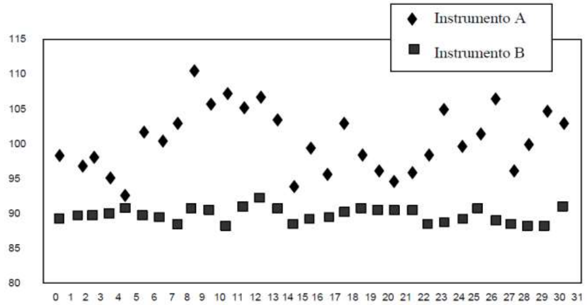


A média e o desvio padrão dos dados foi calculada como sendo:

	Instrumento A	Instrumento B
Média (μ)	100.4	89.8
Desvio padrão (σ)	4.26	0.52
Bias		
Precisão		

Reconciliação de Dados (RD)

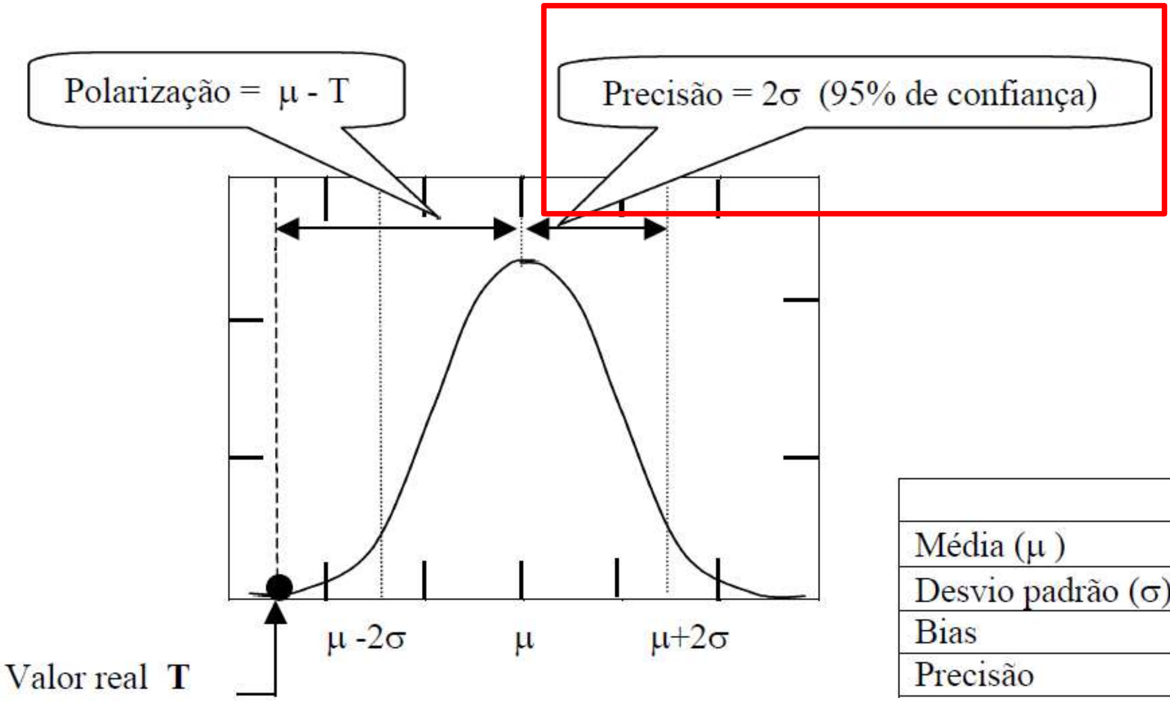


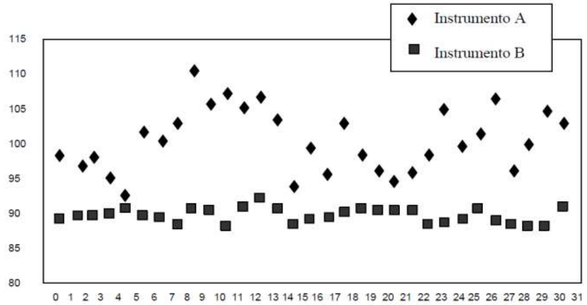


	Instrumento A	Instrumento B
Média (μ)	100.4	89.8
Desvio padrão (σ)	4.26	0.52
Bias		
Precisão		

A diferença entre a média das medidas e o valor real é denominado <u>polarização (bias)</u>, e corresponde a um desvio sistemático do valor desejado.

Reconciliação de Dados (RD)



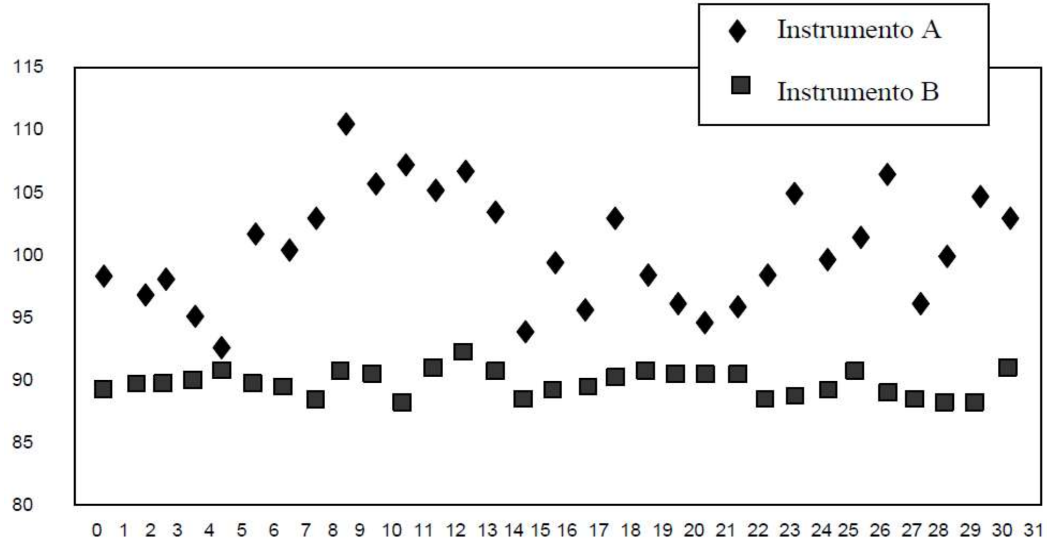


	Instrumento A	Instrumento B
Média (μ)	100.4	89.8
Desvio padrão (σ)	4.26	0.52
Bias		
Precisão		

A precisão (*precision*) ou erro aleatório, <u>é dada pelo dobro do desvio padrão das medições realizadas</u>.

Reconciliação de Dados (RD)

Calcule o bias e a precisão para os dois instrumentos.



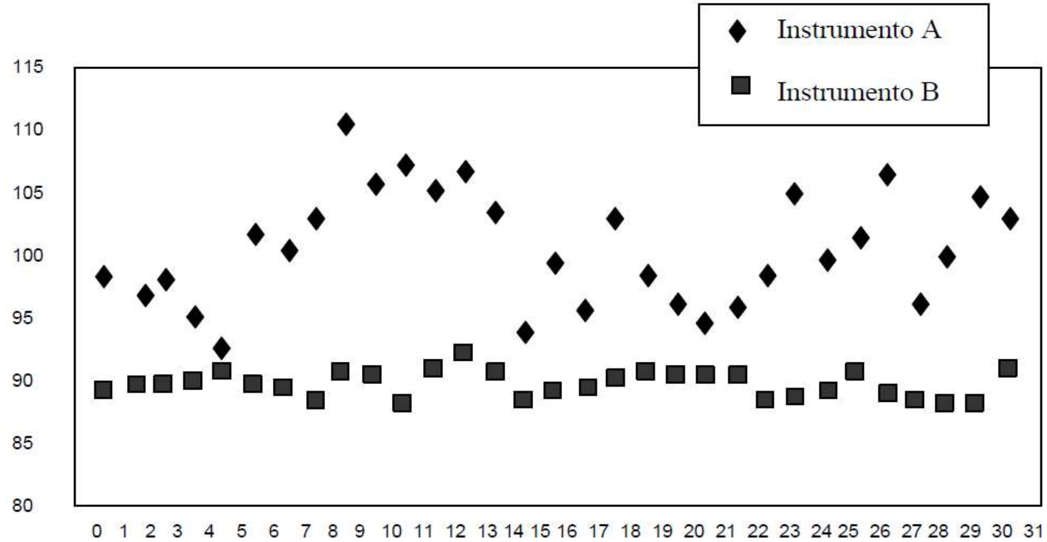
A média e o desvio padrão dos dados foi calculada como sendo:

	Instrumento A	Instrumento B
Média (μ)	100.4	89.8
Desvio padrão (σ)	4.26	0.52
Bias		
Precisão		

Reconciliação de Dados (RD)

Calcule a incerteza para os dois instrumentos.

$$Incerteza = \sqrt{(polarização^2 + precisao^2}$$



A média e o desvio padrão dos dados foi calculada como sendo:

	Instrumento A	Instrumento B
Média (μ)	100.4	89.8
Desvio padrão (σ)	4.26	0.52
Bias		
Precisão		
Incerteza		

Multiplicadores de Lagrange

O método dos multiplicadores de Lagrange foi desenvolvido pelo matemático Joseph Louis Lagrange (1736 e 1813), nascido em Turim, mas que teve Frederico o grande da Prússia e Louis XVI da França como seus grandes patronos.

Multiplicadores de Lagrange

O método dos multiplicadores de Lagrange foi desenvolvido pelo matemático Joseph Louis Lagrange (1736 e 1813), nascido em Turim, mas que teve Frederico o grande da Prússia e Louis XVI da França como seus grandes patronos.

Lagrange, Laplace, Legendre, Carnot, Monge e Condorcet são considerados como os matemáticos da revolução francesa, porque viveram neste período conturbado da história.

Multiplicadores de Lagrange

O método dos multiplicadores de Lagrange foi desenvolvido pelo matemático Joseph Louis Lagrange (1736 e 1813), nascido em Turim, mas que teve Frederico o grande da Prússia e Louis XVI da França como seus grandes patronos.

Lagrange, Laplace, Legendre, Carnot, Monge e Condorcet são considerados como os matemáticos da revolução francesa, porque viveram neste período conturbado da história.

Lagrange, desenvolveu um método para encontrar o mínimo ou máximo de uma função multivariável, sujeita a uma ou várias condições de restrição, dadas por equações.

Multiplicadores de Lagrange

Apresentação do método para funções de duas variáveis:

Multiplicadores de Lagrange

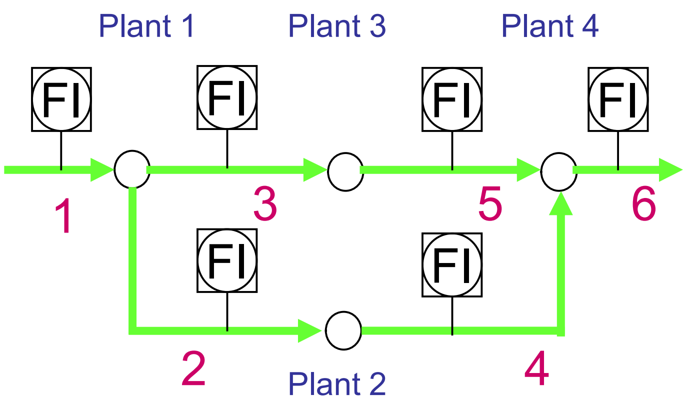
Apresentação do método para funções de duas variáveis:

Seja $f(x, y)$ **a função a ser minimizada**

Multiplicadores de Lagrange

Apresentação do método para funções de duas variáveis:

Seja $f(x, y)$ **a função a ser minimizada e** $\varphi(x, y) = 0$ **a equação de restrição ou constrangimento a ser obedecida.**



Plant 1: $\hat{F}_1 - \hat{F}_2 - \hat{F}_3 = 0$

Plant 2: $\hat{F}_2 - \hat{F}_4 = 0$

Plant 3: $\hat{F}_3 - \hat{F}_5 = 0$

Plant 4: $\hat{F}_4 + \hat{F}_5 - \hat{F}_6 = 0$

Multiplicadores de Lagrange

Apresentação do método para funções de duas variáveis:

Seja $f(x, y)$ **a função a ser minimizada e** $\varphi(x, y) = 0$ **a equação de restrição ou constrangimento a ser obedecida.**

Lagrange define uma função auxiliar $F(x, y, \lambda)$ **tal que:**

Multiplicadores de Lagrange

Apresentação do método para funções de duas variáveis:

Seja $f(x,y)$ **a função a ser minimizada e** $\varphi(x,y)=0$ **a equação de restrição ou constrangimento a ser obedecida.**

Lagrange define uma função auxiliar $F(x,y,\lambda)$ **tal que:**

$$F(x,y,\lambda)=F(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

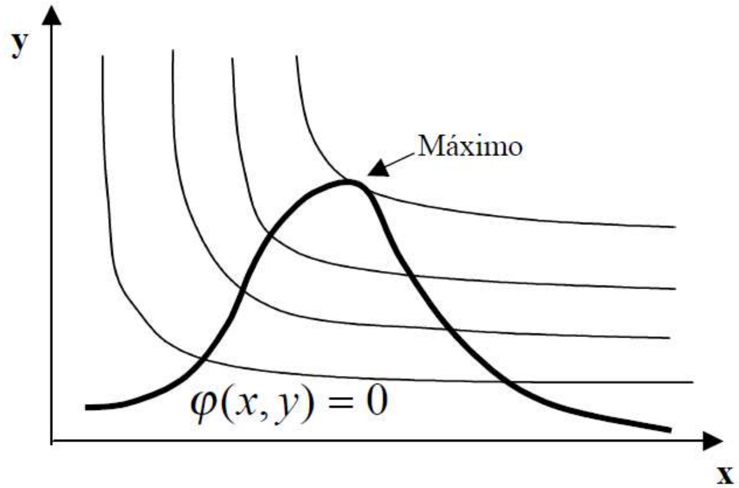
onde λ **é denominado multiplicador de Lagrange.**

Multiplicadores de Lagrange

No ponto mínimo ou máximo da função, as derivadas parciais da função em relação a x e y se anulam (condição necessária):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$F(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$



Ler: 2 a 22.PDF

Multiplicadores de Lagrange

No ponto mínimo ou máximo da função, as derivadas parciais da função em relação a x e y se anulam (condição necessária):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$F(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

Temos três equações a 3 incógnitas: x , y e λ .

Portanto podemos resolver o problema.

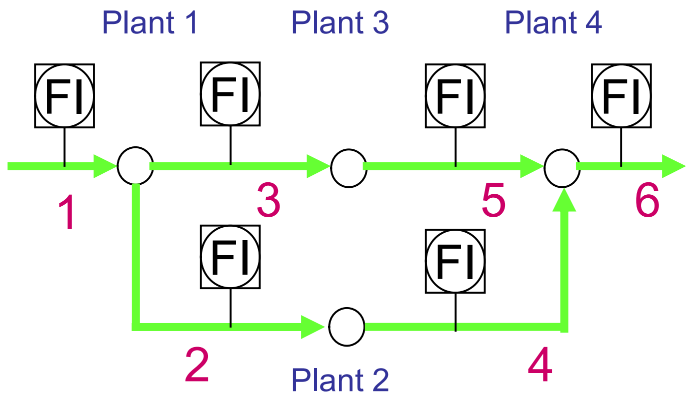
Multiplicadores de Lagrange

Devemos minimizar $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ **sujeito a:**

Multiplicadores de Lagrange

Devemos minimizar $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ **sujeito a:**

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ \\ \varphi_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$



Plant 1: $\hat{F}_1 - \hat{F}_2 - \hat{F}_3 = 0$

Seja $f(x, y)$ **a função a ser minimizada e** $\varphi(x, y) = 0$ **a equação de restrição ou constrangimento a ser obedecida.**

Multiplicadores de Lagrange

Devemos minimizar $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ **sujeito a:**

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ \\ \varphi_m(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Vamos definir a função auxiliar:

Lagrange define uma função auxiliar $F(x, y, \lambda)$ **tal que:**

$$F(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

onde λ **é denominado multiplicador de Lagrange.**

Multiplicadores de Lagrange

Devemos minimizar $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ **sujeito a:**

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ \\ \varphi_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{F(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda\varphi(x, y)}$$

$$\Downarrow$$

Vamos definir a função auxiliar:

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$
$$+ \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$
$$+ \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + \ldots +$$
$$+ \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

Multiplicadores de Lagrange

Devemos minimizar $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ **sujeito a:**

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ \\ \varphi_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

No total temos n equações, uma para cada variável da função sendo minimizada, mais m restrições, o que forma um conjunto de n+m equações a n+m variáveis.

Vamos definir a função auxiliar:

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

$$+ \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

$$+ \lambda_2 \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + \ldots +$$

$$+ \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

Multiplicadores de Lagrange

$$F(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n) = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$
$$+ \lambda_1 \varphi_1 (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$
$$+ \lambda_2 \varphi_2 (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + ... +$$
$$+ \lambda_m \varphi_m (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

Resolvendo o sistema, determinamos o ponto crítico.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + ... + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} + ... + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad ... \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} + ... + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Aplicando o critério dos mínimos quadrados,

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Aplicando o critério dos mínimos quadrados, **definimos uma função a ser minimizada,**

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Aplicando o critério dos mínimos quadrados, definimos uma função a ser minimizada, **correspondendo à soma ponderada dos quadrados dos erros.**

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Aplicando o critério dos mínimos quadrados, definimos uma função a ser minimizada, correspondendo à soma ponderada dos quadrados dos erros.

Sendo M_i a medida obtida para um fluxo

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Aplicando o critério dos mínimos quadrados, definimos uma função a ser minimizada, correspondendo à soma ponderada dos quadrados dos erros.

Sendo M_i **a medida obtida para um fluxo e** $\hat{M}_i$ **a medida corrigida para o mesmo fluxo,**

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Aplicando o critério dos mínimos quadrados, definimos uma função a ser minimizada, correspondendo à soma ponderada dos quadrados dos erros.

Sendo M_i a medida obtida para um fluxo e $\hat{M}_i$ a medida corrigida para o mesmo fluxo,

o erro E_i é dado por: $$E_i = (M_i - \hat{M}_i)$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Aplicando o critério dos mínimos quadrados, definimos uma função a ser minimizada, correspondendo à soma ponderada dos quadrados dos erros.

Sendo M_i a medida obtida para um fluxo e $\hat{M}_i$ a medida corrigida para o mesmo fluxo,

o erro E_i é dado por: $E_i = (M_i - \hat{M}_i)$

e o erro quadrático por: $E_i^2 = (M_i - \hat{M}_i)^2$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Aplicando o critério dos mínimos quadrados, definimos uma função a ser minimizada, correspondendo à soma ponderada dos quadrados dos erros.

Sendo M_i a medida obtida para um fluxo e $\hat{M}_i$ a medida corrigida para o mesmo fluxo,

o erro E_i é dado por: $$E_i = (M_i - \hat{M}_i)$$

e o erro quadrático por: $$E_i^{\,2} = (M_i - \hat{M}_i)^2$$

Escolhendo-se como peso para cada erro o inverso do desvio padrão, finalmente a função objetivo a ser minimizada será:

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Aplicando o critério dos mínimos quadrados, definimos uma função a ser minimizada, correspondendo à soma ponderada dos quadrados dos erros.

Sendo M_i a medida obtida para um fluxo e $\hat{M}_i$ a medida corrigida para o mesmo fluxo,

o erro E_i é dado por: $E_i = (M_i - \hat{M}_i)$

e o erro quadrático por: $E_i^{\,2} = (M_i - \hat{M}_i)^2$

Escolhendo-se como peso para cada erro o inverso do desvio padrão, finalmente a função objetivo a ser minimizada será:

$$F(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \ldots, \hat{M}_n) = \sum_{1}^{n} \frac{1}{\sigma^2} (M_i - \hat{M}_i)^2$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

$$F(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \ldots, \hat{M}_n) = \sum_{1}^{n} \frac{1}{\sigma^2}(M_i - \hat{M}_i)^2$$

As equações:

$$\varphi_1(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \ldots, \hat{M}_n) = 0 .. \varphi_m(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \ldots, \hat{M}_n) = 0$$

uma para cada nodo do circuito, constituem as m equações de restrições ou constrangimento para o problema.

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

$$F(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \ldots, \hat{M}_n) = \sum_{1}^{n} \frac{1}{\sigma^2} (M_i - \hat{M}_i)^2$$

As equações:

$$\varphi_1(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \ldots, \hat{M}_n) = 0 .. \varphi_m(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \ldots, \hat{M}_n) = 0$$

A equação auxiliar fica:

$$\Phi = \sum_{1}^{n} \frac{1}{\sigma^2} \left(M_i - \hat{M}_i\right)^2 + \sum_{1}^{n} \lambda_i \phi_i = 0$$

$$\boxed{F(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda \varphi(x, y)}$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Equação auxiliar:

$$\Phi = \sum_{1}^{n} \frac{1}{\sigma^2} \left(M_i - \widehat{M}_i\right)^2 + \sum_{1}^{n} \lambda_i \phi_i = 0$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Equação auxiliar:

$$\Phi = \sum_1^n \frac{1}{\sigma^2}\left(M_i - \widehat{M}_i\right)^2 + \sum_1^n \lambda_i \phi_i = 0$$

Achando as derivadas parciais da função variável $\hat{M}_i$ e igualando a zero temos n equações, uma para cada medida:

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Equação auxiliar:

$$\Phi = \sum_1^n \frac{1}{\sigma^2}\left(M_i - \widehat{M}_i\right)^2 + \sum_1^n \lambda_i \phi_i = 0$$

Achando as derivadas parciais da função variável $\hat{M}_i$ e igualando a zero temos n equações, uma para cada medida:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \hat{M}_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \hat{M}_2} = 0 \\ \quad \ldots \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \hat{M}_n} = 0 \end{cases}$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 1

Equação auxiliar:

$$\Phi = \sum_1^n \frac{1}{\sigma^2}\left(M_i - \widehat{M}_i\right)^2 + \sum_1^n \lambda_i \phi_i = 0$$

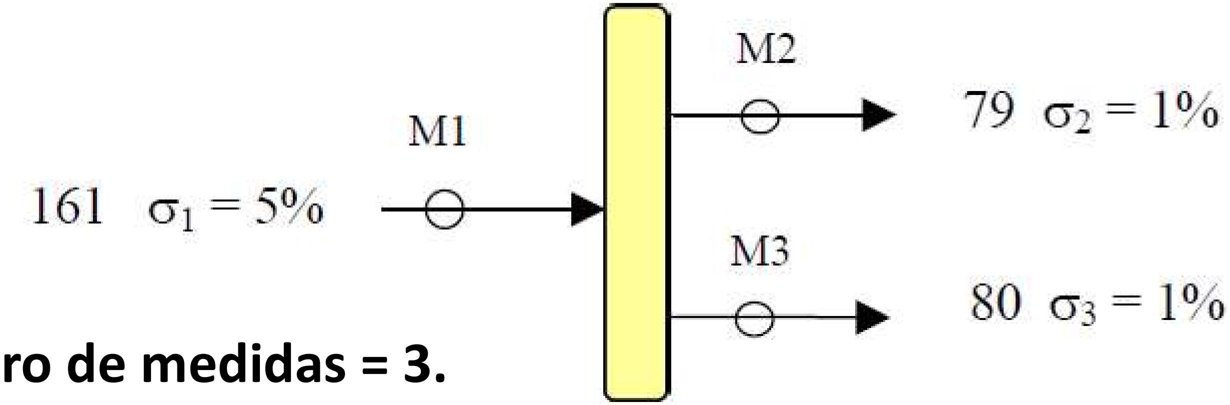
Achando as derivadas parciais da função variável $\hat{M}_i$ e igualando a zero temos n equações, uma para cada medida:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \hat{M}_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \hat{M}_2} = 0 \\ \quad\cdots \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \hat{M}_n} = 0 \end{cases}$$

Em conjunto com as m equações de restrição φ_m temos um sistema de n+m equações a n+m incógnitas, que deve ser resolvido.

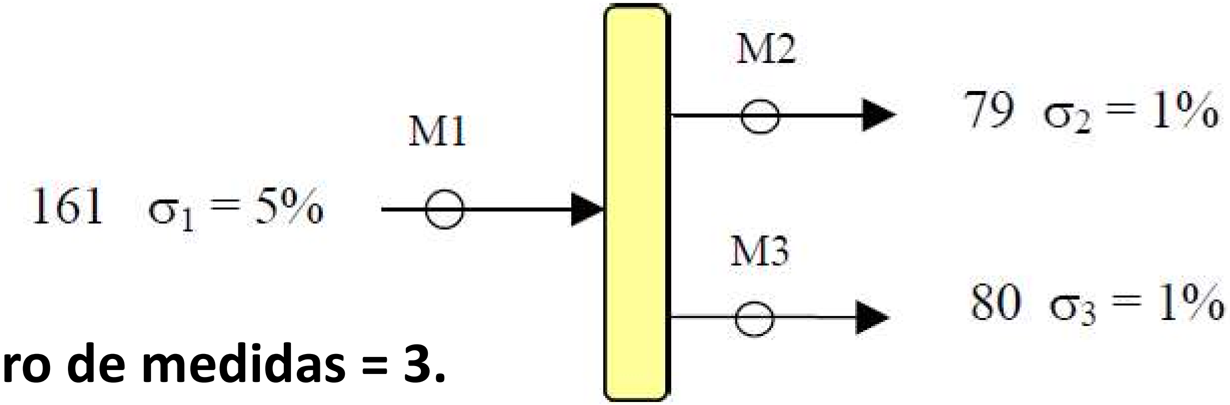
Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



N = número de medidas = 3.
M = número de nodos = 1

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2

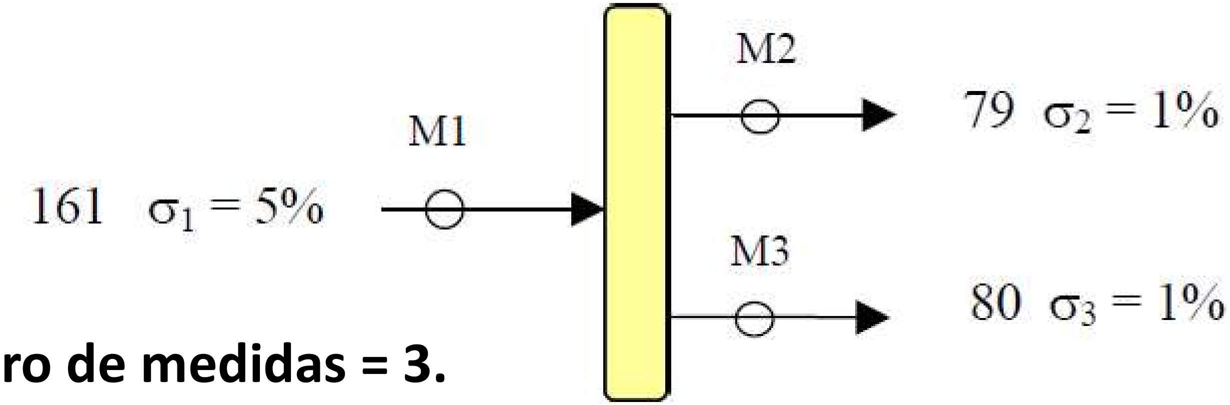


N = número de medidas = 3.

M = número de nodos = 1

O vetor de medidas é dado por: $m = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



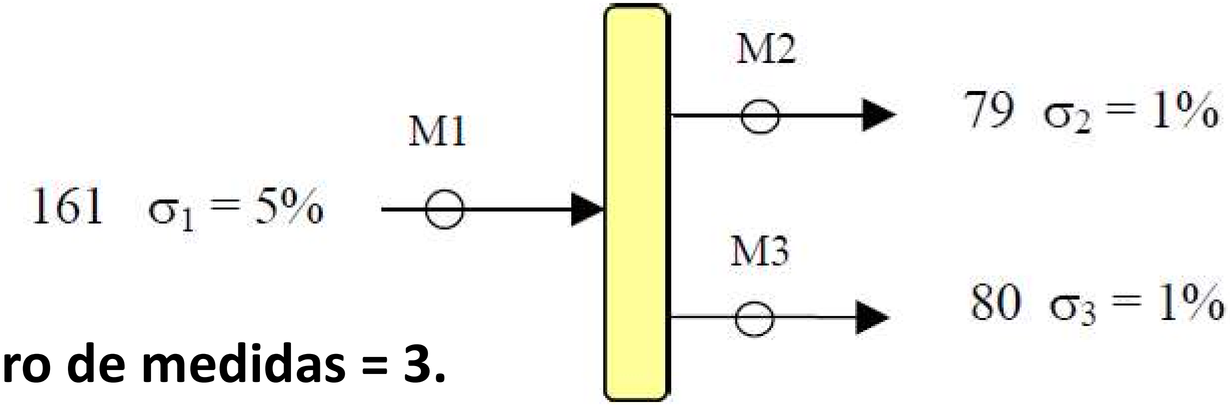
N = número de medidas = 3.

M = número de nodos = 1

O vetor de medidas é dado por: $m = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}$

$$m = \begin{bmatrix} 161 & 79 & 80 \end{bmatrix}$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



N = número de medidas = 3.

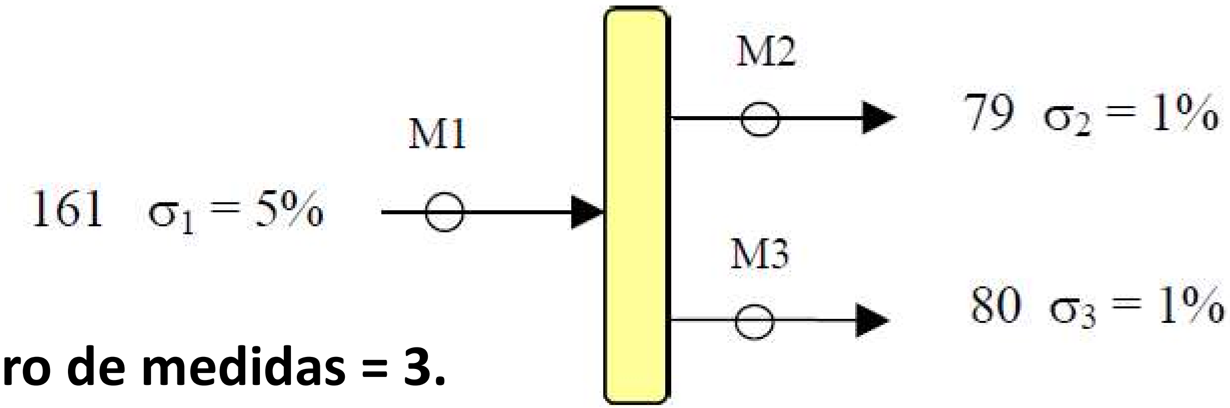
M = número de nodos = 1

O vetor de medidas é dado por: $m = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}$

$$m = \begin{bmatrix} 161 & 79 & 80 \end{bmatrix}$$

O vetor de desvios percentuais é dado por:

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



N = número de medidas = 3.
M = número de nodos = 1

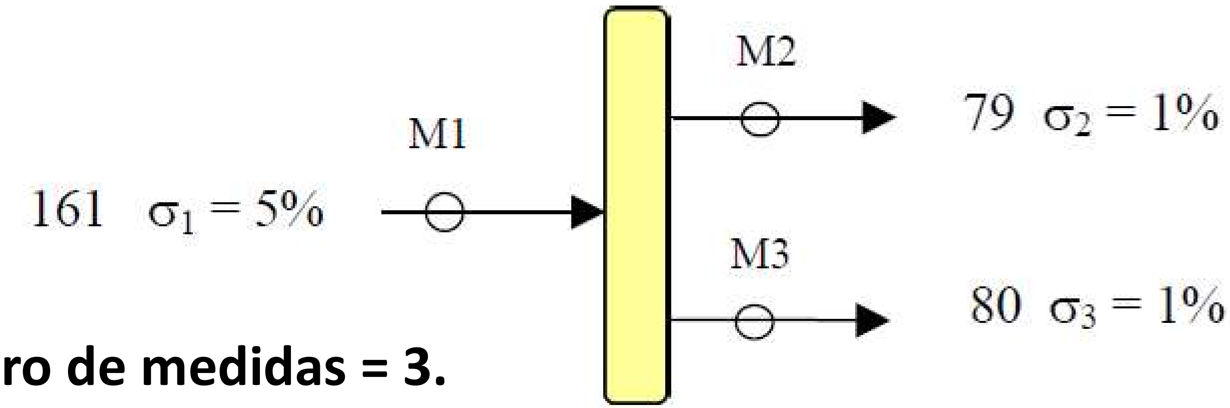
O vetor de medidas é dado por: $m = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}$

$$m = \begin{bmatrix} 161 & 79 & 80 \end{bmatrix}$$

O vetor de desvios percentuais é dado por:

$$p = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



N = número de medidas = 3.

M = número de nodos = 1

O vetor de medidas é dado por: $$m = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}$$

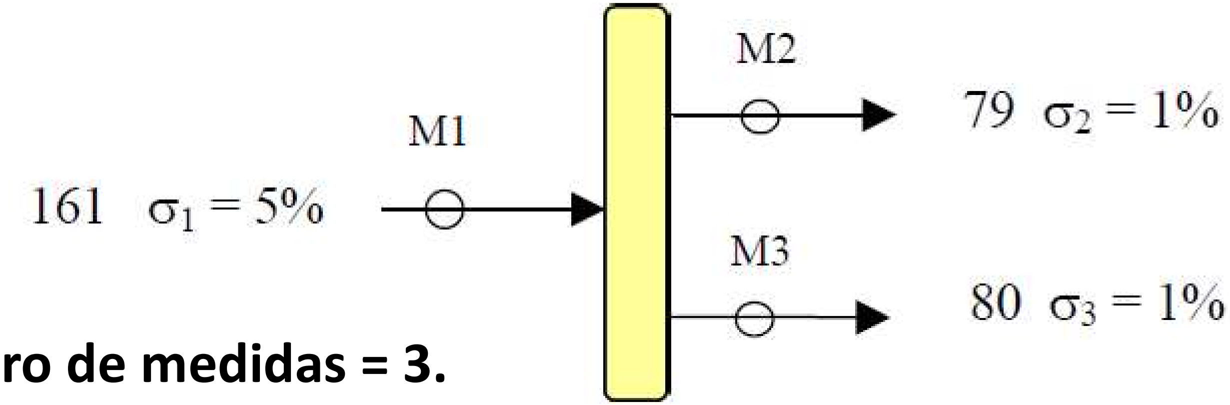
$$m = \begin{bmatrix} 161 & 79 & 80 \end{bmatrix}$$

O vetor de desvios percentuais é dado por:

$$p = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



N = número de medidas = 3.
M = número de nodos = 1

O vetor de medidas é dado por: $m = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}$

$$m = \begin{bmatrix} 161 & 79 & 80 \end{bmatrix}$$

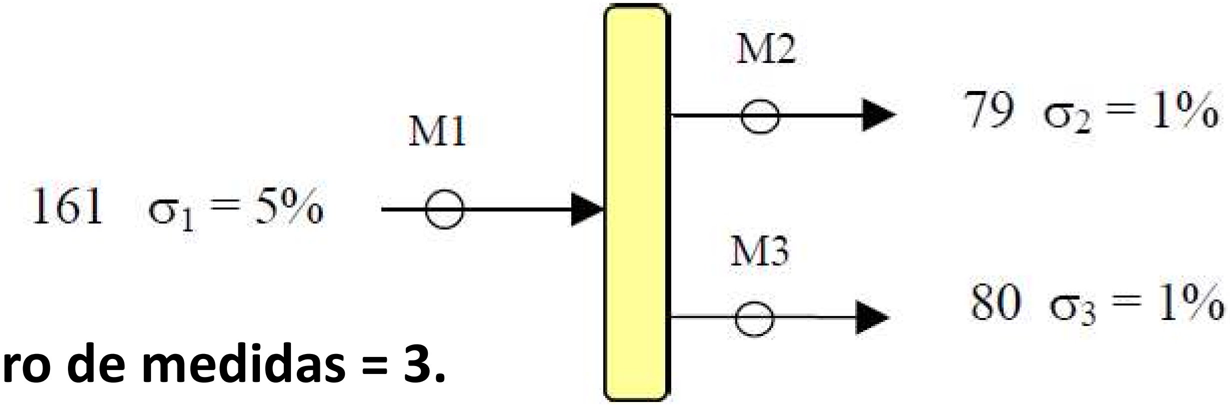
O vetor de desvios percentuais é dado por:

$$p = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}$$

O vetor de desvios absolutos (Matlab):

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



N = número de medidas = 3.

M = número de nodos = 1

O vetor de medidas é dado por: $m = [M_1 \quad M_2 \quad M_3]$

$$m = [161 \quad 79 \quad 80]$$

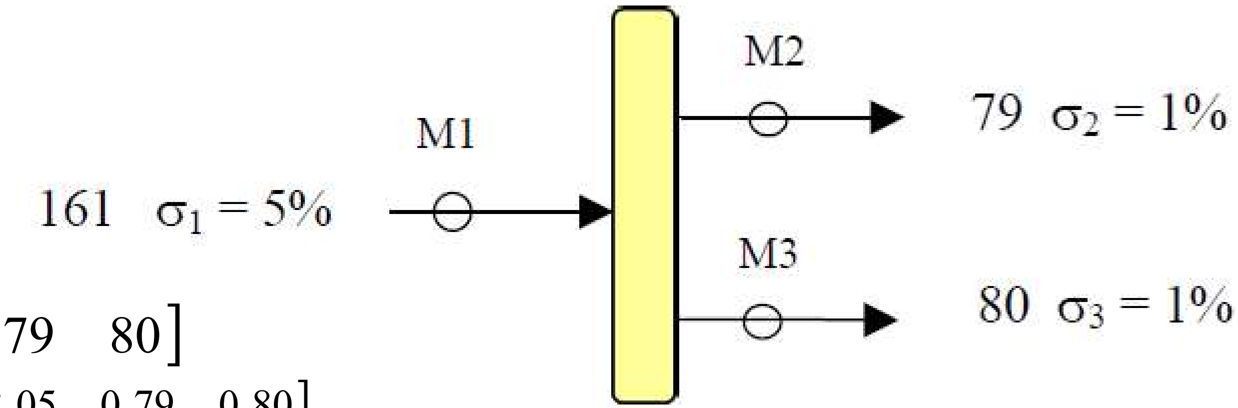
O vetor de desvios percentuais é dado por:

$$p = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3]$$

$$p = [0.05 \quad 0.01 \quad 0.01]$$

O vetor de desvios absolutos (Matlab): $a = m.* p = [8.05 \quad 0.79 \quad 0.80]$

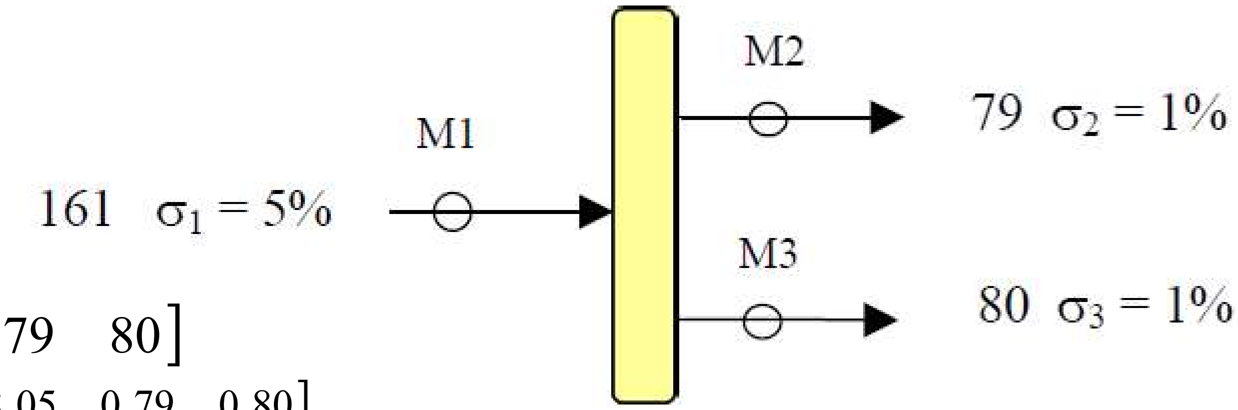
Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



$$m = [161 \quad 79 \quad 80]$$

$$a = m.*p = [8.05 \quad 0.79 \quad 0.80]$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2

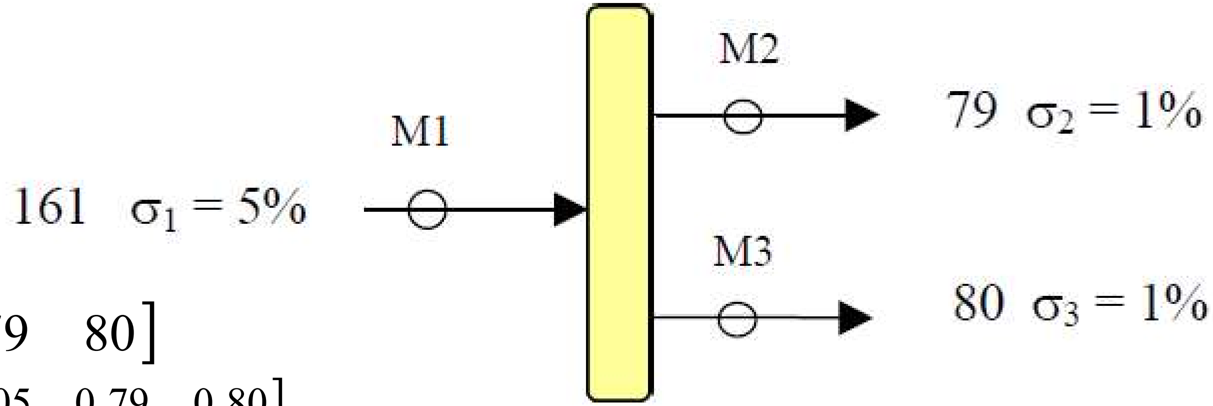


$$m = \begin{bmatrix} 161 & 79 & 80 \end{bmatrix}$$

$$a = m.*\, p = \begin{bmatrix} 8.05 & 0.79 & 0.80 \end{bmatrix}$$

A partir de agora, estaremos trabalhando com os desvios absolutos.

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2

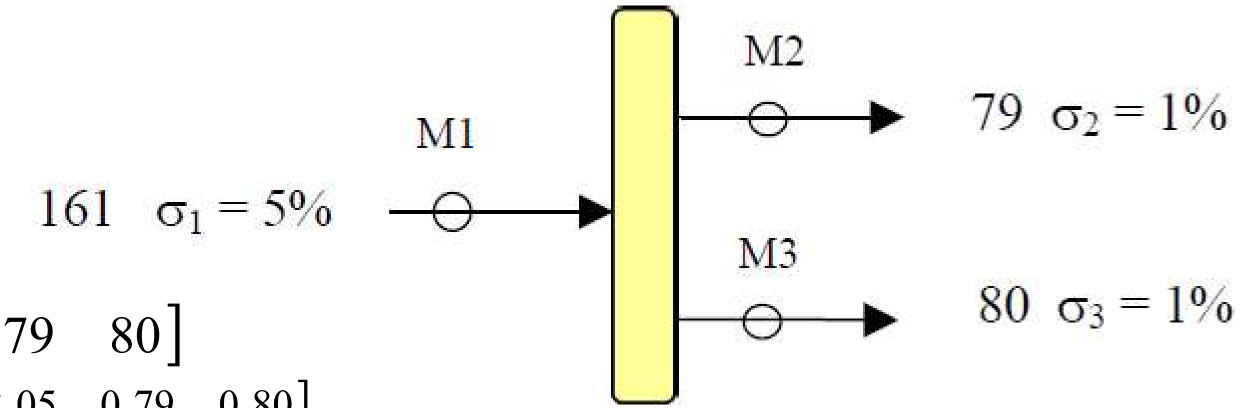


$$m = [161 \quad 79 \quad 80]$$
$$a = m.*p = [8.05 \quad 0.79 \quad 0.80]$$

A partir de agora, estaremos trabalhando com os desvios absolutos.

$$\hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3 = 0$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



$$m = \begin{bmatrix} 161 & 79 & 80 \end{bmatrix}$$

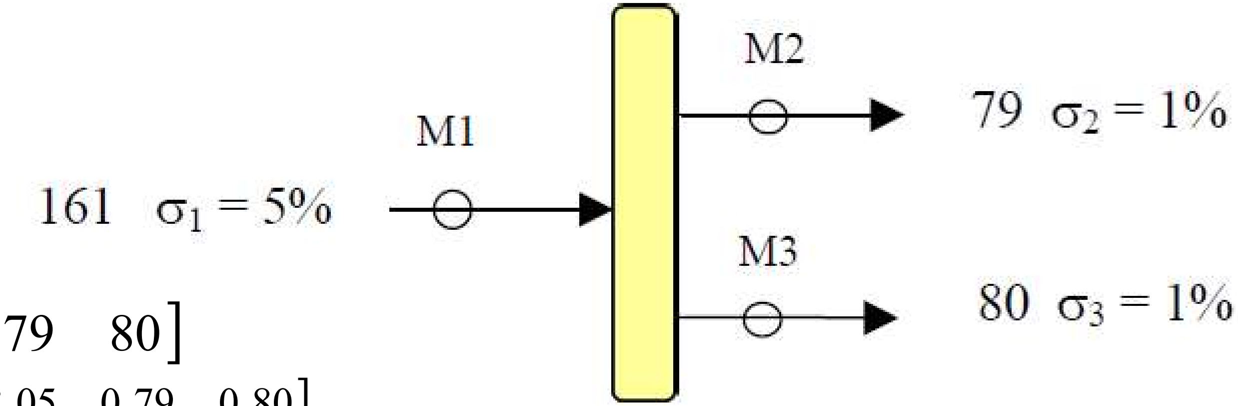
$$a = m.*\,p = \begin{bmatrix} 8.05 & 0.79 & 0.80 \end{bmatrix}$$

A partir de agora, estaremos trabalhando com os desvios absolutos.

$$\hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3 = 0$$

$$F(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3) = \sum_{1}^{n} \frac{1}{a_i^2}(M_i - \hat{M}_i)^2$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



$$m = [161 \quad 79 \quad 80]$$

$$a = m.*\, p = [8.05 \quad 0.79 \quad 0.80]$$

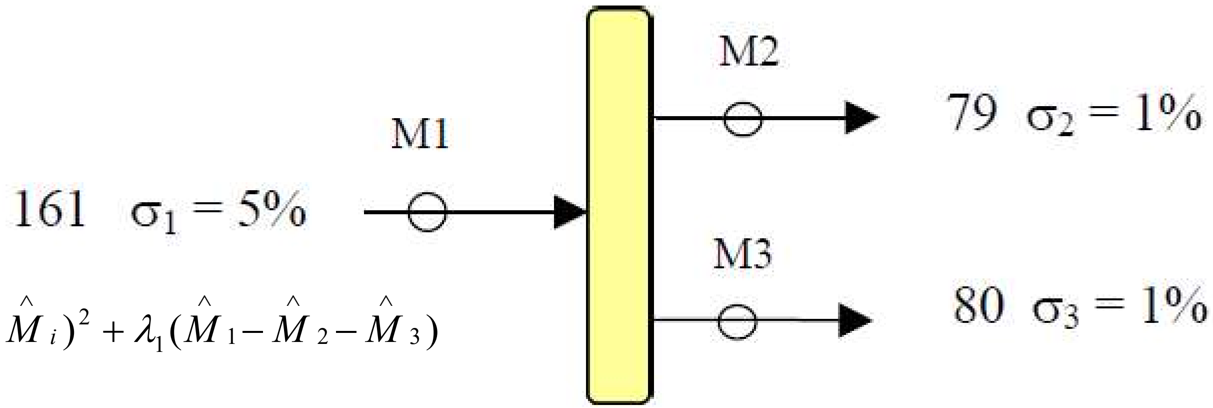
A partir de agora, estaremos trabalhando com os desvios absolutos.

$$\hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3 = 0$$

$$F(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3) = \sum_1^n \frac{1}{a_i^2}(M_i - \hat{M}_i)^2$$

$$\Phi \sum_1^n \frac{1}{a_i^2}(M_i - \hat{M}_i)^2 + \lambda_1(\hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3)$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



$$\Phi \sum_{1}^{n} \frac{1}{a_i^{2}} (M_i - \hat{M}_i)^2 + \lambda_1 (\hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3)$$

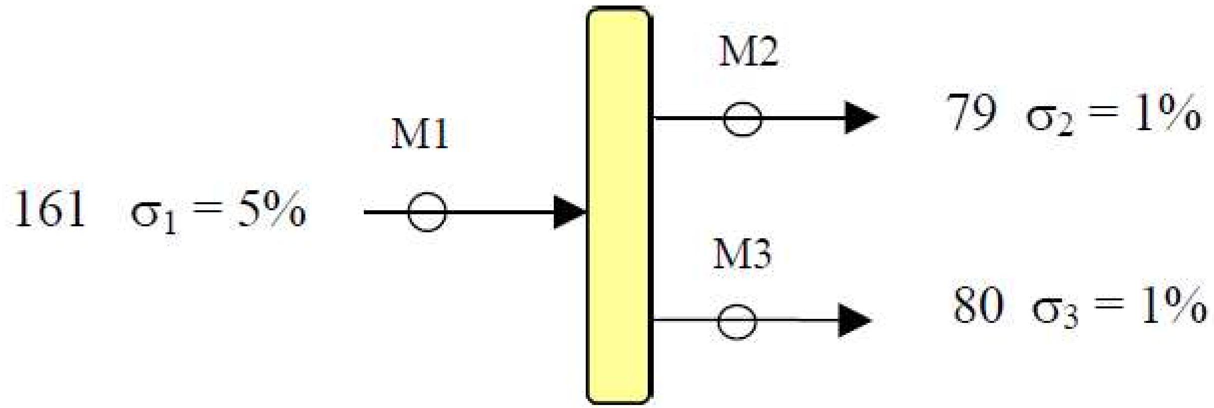
$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{M}_1} = -\frac{2}{a_1^{2}} (M_1 - \hat{M}_1) + \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{M}_2} = -\frac{2}{a_2^{2}} (M_2 - \hat{M}_2) - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{M}_3} = -\frac{2}{a_3^{2}} (M_3 - \hat{M}_3) - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_1} = \hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3 = 0$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



$$\Phi\sum_{1}^{n}\frac{1}{a_i^2}(M_i-\hat{M}_i)^2+\lambda_1(\hat{M}_1-\hat{M}_2-\hat{M}_3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\hat{M}_1}=-\frac{2}{a_1^2}(M_1-\hat{M}_1)+\lambda_1=0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\hat{M}_2}=-\frac{2}{a_2^2}(M_2-\hat{M}_2)-\lambda_1=0$$

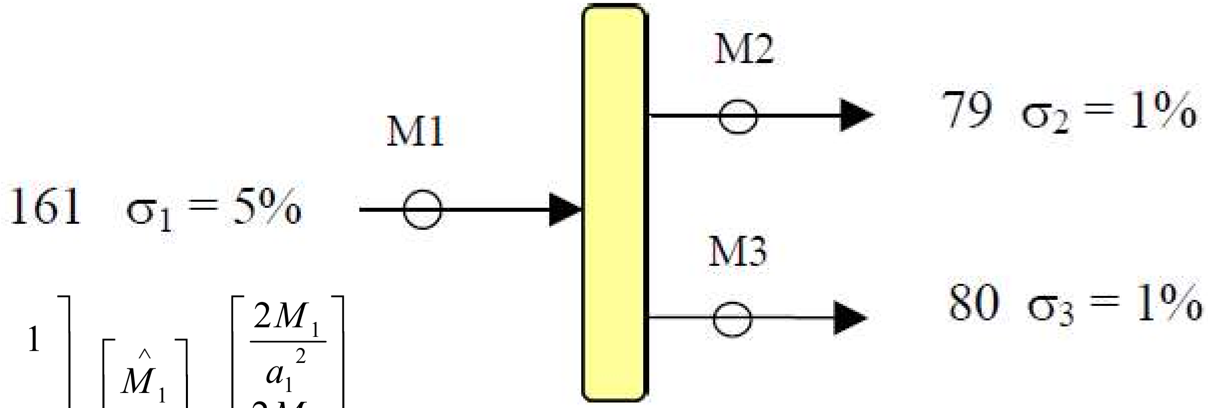
$$\frac{\partial\phi}{\partial\hat{M}_3}=-\frac{2}{a_3^2}(M_3-\hat{M}_3)-\lambda_1=0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_1}=\hat{M}_1-\hat{M}_2-\hat{M}_3=0$$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{a_1^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{a_2^2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a_3^2} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{M}_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2M_1}{a_1^2} \\ \frac{2M_2}{a_2^2} \\ \frac{2M_3}{a_3^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2

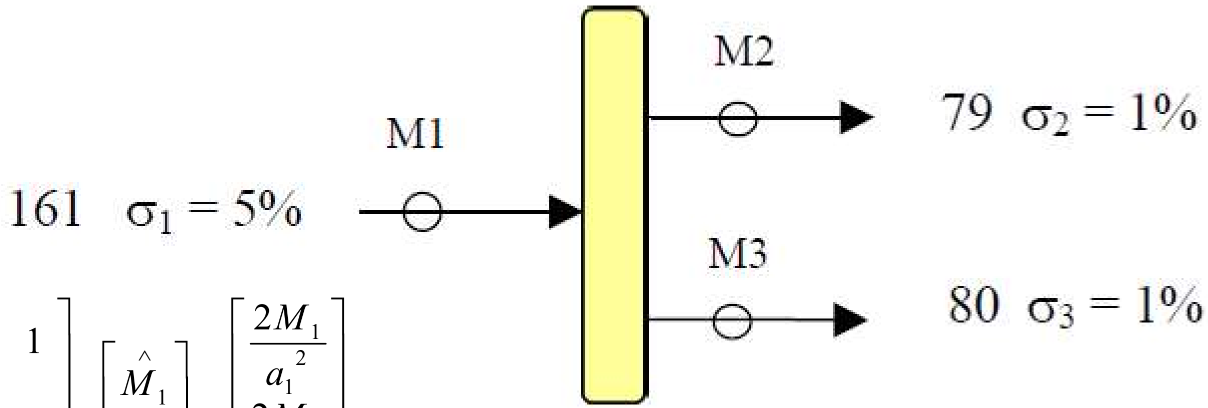


$$\begin{bmatrix} \frac{2}{a_1^{\ 2}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{a_2^{\ 2}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a_3^{\ 2}} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{M}_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2M_1}{a_1^{\ 2}} \\ \frac{2M_2}{a_2^{\ 2}} \\ \frac{2M_3}{a_3^{\ 2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{M}_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a_1^{\ 2}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{a_2^{\ 2}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a_3^{\ 2}} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \frac{2M_1}{a_1^{\ 2}} \\ \frac{2M_2}{a_2^{\ 2}} \\ \frac{2M_3}{a_3^{\ 2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando...Multiplicadores de Lagrange ...balanço de massas...Exemplo 2



$$\begin{bmatrix} \frac{2}{a_1^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{a_2^2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a_3^2} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{M}_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2M_1}{a_1^2} \\ \frac{2M_2}{a_2^2} \\ \frac{2M_3}{a_3^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{M}_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a_1^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{a_2^2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a_3^2} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \frac{2M_1}{a_1^2} \\ \frac{2M_2}{a_2^2} \\ \frac{2M_3}{a_3^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor de correções será dado por:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{M}_3 \end{bmatrix}$$

Referências

Romagnoli, J.A. and Sanchez, M.C. (2000). "**Data Processing and Reconciliation for Chemical Process Operations**". Academic Press, San Diego.

Narasimhan, S. and Jordache, C. (2000). "**Data Reconciliation & Gross Error Detection, An Intelligent Use of Process Data**". Gulf Publishing, Houston, Texas.