

Compilatori

Parte Due

Iacopo Ruzzier

Ultimo aggiornamento: 19 aprile 2025

Indice

1	Introduzione (25 feb)	3
1.1	Motivazione	3
1.1.1	La funzione dei compilatori	3
1.1.2	L'evoluzione dei compilatori	3
1.1.3	Eterogeneità architetturale	3
1.2	Ottimizzazione	3
1.2.1	Esempi di ottimizzazione	4
1.2.2	Ottimizzazioni sui loop	5
1.3	Anatomia di un compilatore	5
1.3.1	Flag di ottimizzazione	6
1.3.2	Uso di IR	6
1.3.3	Ingredienti dell'ottimizzazione	6
2	Rappresentazione intermedia (4 mar)	6
2.1	Proprietà di una IR	6
2.2	Tipi di IR	6
2.3	Categorie di IR	7
2.4	Esempi di rappresentazione	7
2.4.1	Sintassi concreta (testo)	7
2.4.2	AST (Abstract Syntax Tree)	7
2.4.3	DAG (Directed Acyclic Graph)	8
2.4.4	3AC (3-Address Code)	8
2.4.5	SSA (Static Single Assignment)	9
2.4.6	CFG (Control Flow Graph)	9
2.4.7	DG (Dependency Graph)	10
2.4.8	DDG (Data Dependency Graph)	10
2.4.9	CG (Call Graph)	11
3	Ottimizzazione locale e Local Value Numbering (24 mar)	11
3.1	Scope dell'ottimizzazione	11
3.2	Dead Code Elimination	11
3.2.1	Algoritmo per la DCE	11
3.3	Local Value numbering	12
4	Data Flow Analysis	13
4.1	Cos'è la DFA	13
4.1.1	Rappresentazione del programma statica o dinamica	14
4.1.2	Effetti di istruzioni e BB	14
4.2	Reaching Definitions	15
4.2.1	Schema DFA	15
4.2.2	Effetti di uno statement	16
4.2.3	Effetti di un BB	16
4.2.4	Effetti degli archi aciclici	16
4.2.5	Effetti degli archi ciclici e condizioni iniziali	17

4.2.6	Algoritmo iterativo	17
4.2.7	Algoritmo Worklist	18
4.3	Liveness Analysis	18
4.3.1	Live Variable Analysis	18
4.3.2	Forward e Backward analysis	18
4.3.3	Funzione di trasferimento	18
4.3.4	Algoritmo iterativo	19
4.4	Framework per DFA	20
4.5	Available Expressions	20
5	Loops e UD-DU chains 2 aprile	21
5.1	Cos'è un loop	21
5.2	definizioni formali	21
5.3	loop naturali	22
5.3.1	identificare i loop naturali	22
5.4	preheader	23
6	use-def e def-use chains	23
6.1	dove viene definita o usata una variabile	23

1 Introduzione (25 feb)

1.1 Motivazione

Ricordiamo il ruolo del compilatore tra le tecnologie informatiche, quello dell'ISA e del linguaggio assembly, i passaggi gestiti dal compilatore, dall'assembler, eccetera

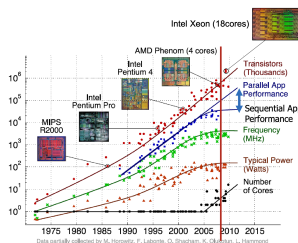
- Il compilatore **traduce un programma sorgente in linguaggio macchina**
- L'ISA agisce da "interfaccia" tra HW e SW (fornisce a SW il set di istruzioni, e specifica a HW che cosa fanno)

1.1.1 La funzione dei compilatori

- Funzione principale e più nota: trasformare il codice **da un linguaggio ad un altro** (es. C → Assembly RISC-V) (ricordiamo che è solo il primo passo di un'intera toolchain di programmi per creare eseguibili)
- Gestendo la traduzione a linguaggio macchina al posto dei programmatori, l'altra funzione importante è l'**ottimizzazione** del codice, che permette la **produzione di eseguibili di stesse funzionalità**, ma diversi a livello di **dimensioni** (es. per sistemi embedded e high-performance), **consumo energetico**, **velocità di esecuzione**, ma anche in termini di determinate **caratteristiche architetturali** utilizzate (es. proc. multicore)

1.1.2 L'evoluzione dei compilatori

Le rivoluzioni in termini di "classe" di dispositivi e di dimensioni dei transistor sono molto frequenti (Bell, Moore), e nei primi 2000 si arriva ai **limiti fisici della miniaturizzazione e della frequenza operativa** dei processori (problemi di dissipazione del calore) → idea di cambiare il paradigma di sviluppo di un processore: dal singolo core sempre più potente passo a **più core "isopotenti"** sullo stesso chip



~ 2005: plateau di consumo, frequenza e performance di programmi *sequenziali*, aumento di performance di p. che **sfruttano la parallelizzazione** → i programmi devono essere "consapevoli" che il processore è multicore!

Il compilatore mantiene un ruolo fondamentale: oltre a rendere meno "traumatico" il passaggio alla programmazione parallela, (non sono ancora auto-parallelizzanti) si interfaccia con i nuovi paradigmi di programmazione parallela offerti ai programmatori: il programmatore sfrutta interfacce semplici e astratte, mentre il compilatore traduce i

costrutti in codice parallelo eseguibile (es. OpenMP)

1.1.3 Eterogeneità architetturale

La programmazione parallela e il parallelismo architetturale sono oggi paradigmi consolidati, e i processori general purpose (seppur multicore e ottimizzati) non sono sufficienti per attività specializzate come la grafica → nascono componenti **acceleratori** di vario tipo: GPU, GPGPU, FPGA, TPU, NPU... Questo complica ulteriormente la scrittura del software, e dunque impone altre evoluzioni nei compilatori e nelle ottimizzazioni.

1.2 Ottimizzazione

Ricordiamo le metriche usate:

$$\text{Performance} = \frac{1}{\text{Execution Time}}$$

$$\text{Execution Time} = \frac{\text{Instruction Count} \times \text{CPI}}{\text{Frequency}}$$

Le ottimizzazioni possono avvenire dal punto di vista **HW (parametri architetturali)** e da quello **SW (p. di programma)**. Il compilatore può agire anche ad es. a livello di cache, aiutando a ridurre i miss e dunque i CPI delle istruzioni **load** e **store** (sappiamo che il costo di accesso aumenta di ordini di grandezza)

1.2.1 Esempi di ottimizzazione

Distinguiamo le ottimizzazioni che avvengono a compile time o a runtime (statiche o dinamiche)

- **AS (Algebraic Simplification)** Semplification: ottimizzazione a runtime

```
-(-i); → i;  
b or true; → true; //cortocircuito logico
```

- **CF (Constant Folding)**: valutare ed espandere espressioni costanti a compile time

```
c = 1+3; → c = 4;  
(100<0) → false
```

- **SR (Strength Reduction)**: sostituisco op. costose con altre più semplici: classico es. MUL rimpiazzate da ADD/SHIFT (esecuzione in 1 ciclo invece di multic.):

```
y = x*2;  
y = x * 17;
```

→

```
y = x+x;  
y = (x<<4) + x;
```

es. sofisticato: **for** con operazioni su array, sostituito da operazioni su puntatori (aritmetica dei pt.) → il risultato si vede nel codice assembly

```
for (i=0; i<100; i++)  
  a[i] = i*100;
```

→

```
t = 0;  
for (; t<10000; t += 100) {  
  *a = t;  
  a = a + 4;  
}
```

```
li s0, 0 // i = 0  
li s1, 100  
LOOP:  
bge s0, s1, EXIT  
slli s2, s0, 2  
add s2, s2, a0  
mul s3, s0, 100  
sw s3, 0(s2)  
addi s0, s0, 1  
jal zero, LOOP  
EXIT:
```

→

```
li s0, 0 // t = 0  
li s1, 10000  
LOOP:  
bge s0, s1, EXIT  
sw s0, 0(a0)  
addi a0, a0, 4  
jal zero, LOOP  
EXIT:
```

- **CSE (Common Subexpression Elimination)**: elimino i calcoli ridondanti di una stessa espressione riutilizzata in più istruzioni (statement)

```
y = b * c + 4  
z = b * c - 1
```

→

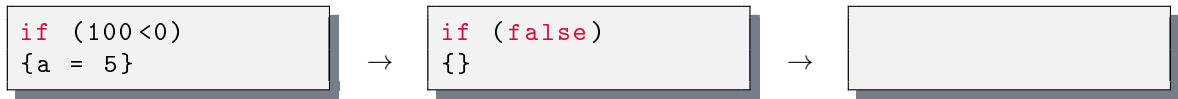
```
x = b * c  
y = x + 4  
z = x - 1
```

- **DCE (Dead Code Elimination)**: elimino tutte le istruzioni che producono codice mai letto (e dunque utilizzato), es. variabili assegnate e mai lette, codice irraggiungibile → uno dei passi eseguiti più di frequente durante l'ottimizzazione del codice da parte del compilatore, per rimuovere anche tutto il dead code generato dagli altri passi di ottimizzazione

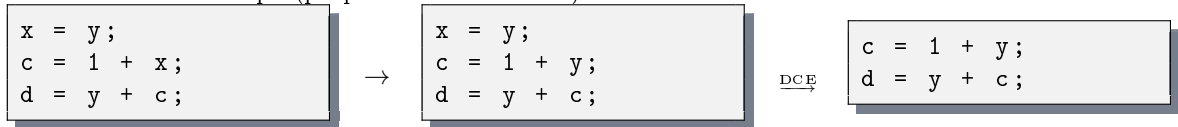
```
b = 3  
c = 1 + 3  
d = 3 + c
```

→

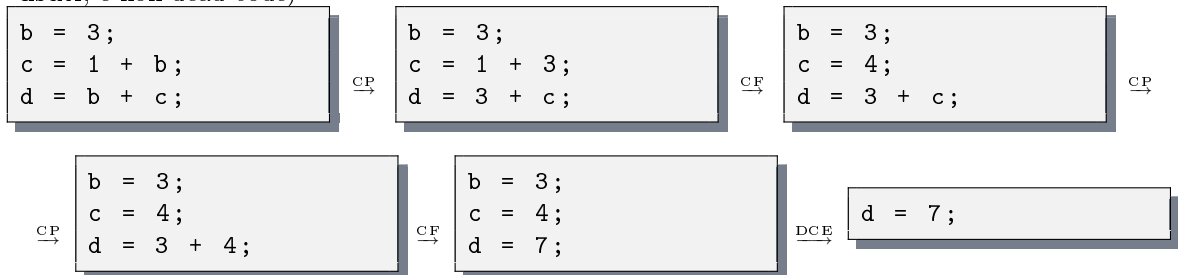
```
c = 1 + 3  
d = 3 + c
```



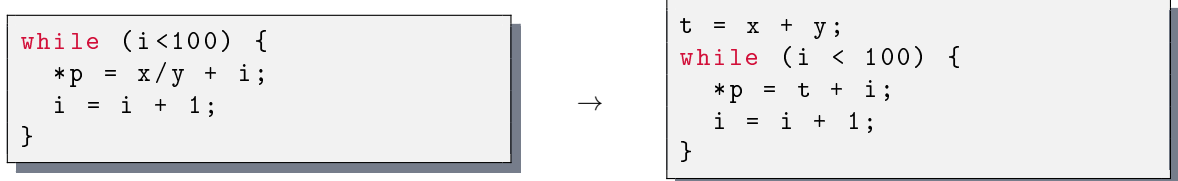
- **Copy Propagation:** per uno statement $x = y$, sostituisco gli usi futuri di x con y se non sono cambiati nel frattempo (propedeutico alla DCE)



- **CP (Constant Propagation):** sostituisco usi futuri di una variabile con assegnato valore costante con la costante stessa (se la variabile non cambia) (sempre ipotesi che i valori a fine es. siano poi usati, e non dead code)



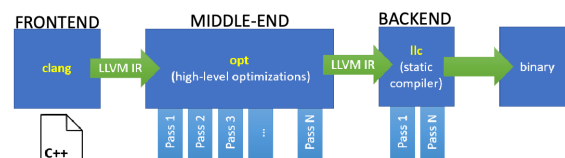
- **LICM (Loop Invariant Code Motion):** si occupa di muovere fuori dai loop tutto il codice **loop invariant**; evita i calcoli ridondanti



1.2.2 Ottimizzazioni sui loop

- grande impatto sulla performance dell'intero programma (per ovvie ragioni)
- spesso sono ottimizzazioni propedeutiche a quelle machine-specific (effettuate nel backend): register allocation, instruction level parallelism, data parallelism, data-cache locality

1.3 Anatomia di un compilatore



- almeno due compiti: **analisi del sorgente** e **sintesi di un programma in linguaggio macchina**, operando su una IR che si interpone tra frontend e backend, e tra source code e target code
- Il blocco di middle-end agisce su IR, e in vari passaggi lo trasforma e ottimizza (\neq a seconda del compilatore)
- caso llvm: clang (frontend) \rightarrow opt (middleend) \rightarrow l1c (backend)
- opt si basa su una serie di **passi di ottimizzazione (o di analisi)**: un passo di analisi scorre l'IR e lo analizza (non lo trasforma, ma produce informazioni utili); un passo di ottimizzazione sfrutta informazioni conosciute per trasformare l'IR (applica le ottimizzazioni)

- alcune ottimizzazioni non possono essere effettuate o finalizzate senza conoscere l'architettura target (es. sulle cache), e dunque vengono eseguite dal backend

1.3.1 Flag di ottimizzazione

sono flag che passo al compilatore (al pass manager) per influenzare **ordine e numero dei passi di ottimizzazione**

- -g: solo debugging, nessuna ottimizzazione
- -O0: nessuna ottimizzazione
- -O1: solo ott. semplici
- -O2: ott. più aggressive
- -O3: ordine dei passi che sfrutta compromessi tra velocità e spazio occupato
- -Os: ottimizza per dimensione del compilato

1.3.2 Uso di IR

un backend che fa uso di IR permette di disaccoppiare con facilità frontend e backend, lavorare su ottimizzazioni machine-independent, semplificare il supporto per molti linguaggi, eccetera

Per supportare un nuovo linguaggio o una nuova architettura, basta scrivere un nuovo front/backend - il middle-end può rimanere lo stesso!

1.3.3 Ingredienti dell'ottimizzazione

- **formulare un problema di ottimizzazione** con molti casi di applicazione, sufficientemente efficiente e impattante su parti significative
- **rappresentazione** che astrae dettagli rilevanti → **analisi** di applicabilità → **trasformazione del codice** → **testing** → ☺

2 Rappresentazione intermedia (4 mar)

Ricordiamo: middle end come sequenza di passi, di analisi o di trasformazione → per analizzare e trasformare il codice occorre una rappr. intermedia (IR) **espressiva** che **mantenga le informazioni importanti da un passo all'altro**

2.1 Proprietà di una IR

scegliamo IR diverse a seconda del loro uso, in generale alcune caratteristiche sono sempre richieste:

- facilità di **generazione** (effetti sul frontend)
- facilità e costo di **manipolazione**
- livello di astrazione e di **dettaglio esposto**: effetti su frontend e backend (\neq IR da un lato e dall'altro, a seconda di astraz. e dettaglio necessari)

2.2 Tipi di IR

- AST (abstract syntax tree)
- DAG (grafi diretti aciclici)
- 3AC (3-address code): simile all'assembly (3 indirizzi: registro destinazione e max 2 operandi)
- SSA (Static Single Assignment): evoluzione di 3ac con ulteriori proprietà di control flow
- CFG (control flow graphs): rappresenta "come" vengono chiamate le funzioni (a partire dal main)
- CG (call graph)
- PDG (program dependence graphs): fondamentale per lavorare sul parallelismo, multithreading...

Le ott. inter-procedurali devono per forza basarsi su IR di tipo CG (es. per decidere quando fare **inlining** - espandere il codice della funzione invece di chiamarla - evidente tradeoff tra dimensione del codice e overhead dovuto alla chiamata di funzione)

2.3 Categorie di IR

- grafiche (o strutturali)
 - orientate ai grafi
 - molto usate nella source-to-source translation, tipicam. per ott. che non hanno bisogno della struttura sofisticata di un middle-end
es. openMP: di fatto annotazioni sul codice, come strumento semplice per la parall. (es. **outlining**: prendo es un loop e lo impacchetto in una funzione che poi dovrà essere eseguita dai thread per la parallelizzazione) - non sto ottimizzando nel senso proprio del termine, ma sto trasformando il codice e lo sto rendendo eseguibile in maniera parallela
 - solitamente voluminose (basate su grafi) - tradeoff con il fatto che non coinvolgono il middle-end
 - es. ast, dag
- lineari
 - pseudocodice per macchine astratte
 - livello di astrazione vario
 - strutture dati semplici e compatte
 - facile da riarrangiare (evidentemente il più comodo per eseguire le ottimizzazioni)
 - es. 3ac
- ibride (sfruttano combinazioni delle prime due) (es cfg)

2.4 Esempi di rappresentazione

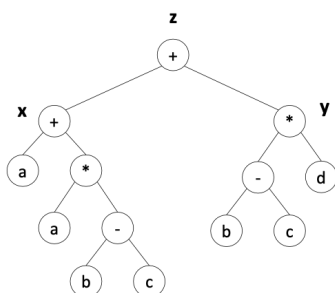
2.4.1 Sintassi concreta (testo)

Più semplice in quanto più vicina al livello di astrazione "umano" di ragionamento sul programma, ma non il livello corretto per ottimizzare né comprendere correttamente la semantica del programma

```
let value = 8;  
let result = 1;  
for (let i = value; i>0; i = i - 1) {  
    result = result * i;  
}  
console.log(result);
```

2.4.2 AST (Abstract Syntax Tree)

Albero i cui nodi rappresentano diverse parti del programma: il nodo radice rappresenta il **programma**, il quale a sua volta contiene un blocco di istruzioni dal quale discendono tanti figli quante le sue istruzioni



```
x = a + a * (b - c)
y = (b - c) * d
z = x + y
```

PRO: molto comodo per interpreti (basta usare una fz. ricorsiva per processare l'albero)

CONTRO: un nodo è un oggetto troppo generico → analizzare un ast per l'ottimizzazione impone ogni volta di ragionare sulla differenza semantica tra i nodi (complica molto)

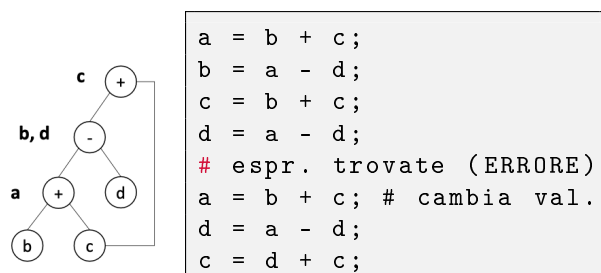
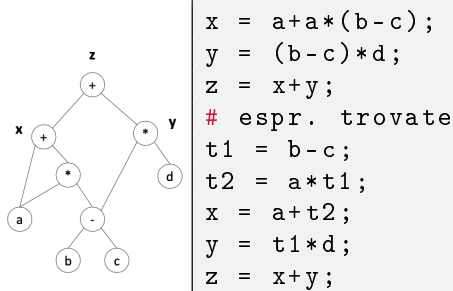
2.4.3 DAG (Directed Acyclic Graph)

Contrazione di ast che evita la duplicazione di espressioni → **rappresentazione più compatta**

Limite: il riuso è possibile solamente dimostrando che il suo **valore non cambia** nel programma

essendo assegnamenti e chiamate frequentissimi, il fatto che il dag non abbia nozione di come le espr. cambino valore nel tempo non lo rende un buon candidato per le ottimizzazioni

Esempi



2.4.4 3AC (3-Address Code)

Evidentemente adatto: tutte le istr. del programma vengono spezzettate in istr. di forma semplice simile all'assembly, di tipo $x = y \text{ op } z$ (1 operatore, massimo 3 operandi)

$x = 2 * y$ → $t1 = 2 * y$
 $t2 = x - t1$

assignments	$x = y \text{ op } z$
	$x = \text{op } y$
	$x = y[i]$
	$x = y$
branches	goto L
conditional branches	if x relop y goto L
procedure calls	param x
	param y
	call p
address and pointer assignments	$x = \&y$
	$*y = z$

PRO:

- espressioni complesse spezzettate
- forma compatta e simil-assembly
- registri temporanei **intermedi, virtuali e illimitati** (tralascio problemi architetturali - n. di r. fisici a disposizione e eventuali op. di spill, cioè aggiungere load o store in mancanza di r. fisici)

Varianti di 3AC

A seconda dei vincoli che ho per l'implementazione pratica:

- **quadruple:** id istruzione, opcode, i 3 registri → semplice struttura record, facile da analizzare e riordinare ma i nomi espliciti prendono più spazio
- **triple:** id istruzione, opcode, 2 operandi → uso l'indice dell'espressione nell'array come "nome" del registro destinazione → risparmio spazio, ma diventa più complesso da analizzare (nomi impliciti) e riordinare

Quadruple

x - 2 * y				
(1)	load	t1	y	
(2)	loadi	t2	2	
(3)	mult	t3	t2	t1
(4)	load	t4	x	
(5)	sub	t5	t4	t3

Triple

x - 2 * y				
(1)	load	y		
(2)	loadi	2		
(3)	mult	(1)	(2)	
(4)	load	x		
(5)	sub	(4)	(3)	

Inapplicabilità diretta della Constant Propagation con forma 3AC

La CP è applicabile solo se la variabile **se non cambia nel frattempo** → una IR di tipo 3AC non può applicarla immediatamente (devo prima analizzare il resto del codice)

2.4.5 SSA (Static Single Assignment)

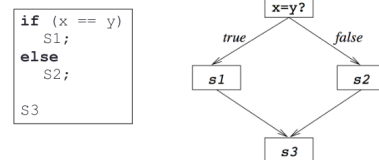
- Evoluzione di 3AC che impone che la **definizione (assegnamento)** delle variabili avvenga **solo una volta** (def. multiple sono tradotte in multiple versioni della var)
- **PRO**: ogni definizione ha associata direttamente una **lista di tutti i suoi usi** - semplifica enormemente le ottimizzazioni di tipo CP e non solo

Quasi sempre uno dei passi di ottimizzazione prevede il passaggio a forma SSA

La scelta della IR dipende ovviamente dal livello di dettaglio necessario per ogni specifico compito
 → **in un compilatore coesistono più IR** (anche per questo esistono forme ibride)

2.4.6 CFG (Control Flow Graph)

- modella il trasferimento (flusso) del controllo in un programma tra **blocchi** di istruzioni
- permette di aggiungere informazioni sui **salti** al di sopra di una IR lineare
- i suoi nodi sono Basic Block
- gli archi rappresentano il flusso di controllo del programma (loop, condizioni, ecc.)



- un BB è una seq. di istruzioni in forma 3AC
 - singolo *entry point*: solo la prima istruzione può essere raggiunta dall'esterno
 - singolo *exit point*: se eseguo la prima istr. **devo eseguire tutte le altre** - garantisco che venga **eseguito interamente**
 - Le chiamiamo sezioni single-entry, single-exit (possono essere sezioni anche più grandi, ma le più piccole di questo tipo sono i BB)
- un arco connette due nodi $B_i \rightarrow B_j \iff b_j$ può eseguire dopo B_i in qualche percorso del ctrl flow del programma
 - prima istr. di B_j è target dell'istr. di salto al termine di B_i
 - $\forall B_i$ non ha un istr. di salto come ultima istr. (nodo *fallthrough*) e B_j è suo unico successore
- un CFG **normalizzato** ha i BB **massimali**
 - non possono essere resi più grandi senza violare condizioni
 - unisco i BB fallthrough che non hanno label all'inizio
 - posso avere CFG non norm. dopo qualche generico passo di ottimizzazione (non le facciamo accadere "spontaneamente")

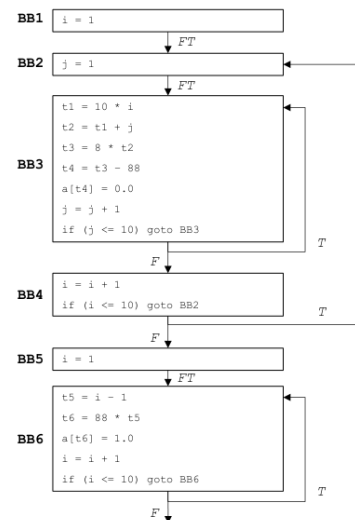


Fig. 2.1: Esempio di CFG

Algoritmo per la costruzione del CFG

1. identificare il **leader** di ogni BB:
 - la prima istruzione
 - il target di un salto
 - ogni istruzione dopo un salto
2. il BB **comincia** con il leader e **termina** con l'istruzione immediatamente precedente un nuovo leader (o l'ultima istruzione)
3. **connettere** i BB tramite archi di 3 tipi:
 - **fallthrough** (o fallthru): esiste solo un percorso che collega i due blocchi
 - **true**: il secondo blocco è raggiungibile dal primo se un condizionale è **true**
 - **false**: il secondo blocco è raggiungibile dal primo se un condizionale è **false**

2.4.7 DG (Dependency Graph)

I nodi di un DG sono istruzioni; un arco connette due nodi di cui **uno usa il valore definito dall'altro**. Sono indispensabili per l'*instruction scheduling* e per mantenere il CPI della pipeline (ricordiamo quella RISC-V):

↷ IF Instruction Fetch
↓ ID Instruction Decode
↓ EXE Execute
↓ MEM Memory Access
↷ WB Write Back

Instruction / Cycle Count	1	2	3	4	5	6
add x2, x3, x4		F	D	E	M	W
sub x5, x2, x6			F	D	E	M

Fig. 2.2: Esempio di data hazard

Esempio: risultato di una add

Se in fase di decode provo a leggere il registro usato in una **add** immediatamente precedente, questo ancora non contiene il risultato aggiornato (pronto appena tra 2 cicli) → **data hazard**, gestito solitamente dalla **forwarding unit** che bypassa MEM e WB e inoltra direttamente il dato

Soluzione generica (inefficiente)

Per quanto i controlli vengano svolti dalla fw. unit, in generale l'unico modo per evitare questo tipo di hazard è distanziare le istruzioni tra loro affinché il dato sia disponibile → inserisco nop (cicli di stallo), ma vado a "rompere" l'IPC pari a 1 della pipeline sempre piena (< performance)

Soluzione migliore

scheduling del programma, spostando istruzioni che non dipendono da quei registri al posto di aggiungere nop → uno dei compiti principali di un backend, che per evitare di cercare le istruzioni libere "manualmente" sfrutta la IR di tipo DG che fornisce esattamente le informazioni sulle dipendenze tra istruzioni

2.4.8 DDG (Data Dependency Graph)

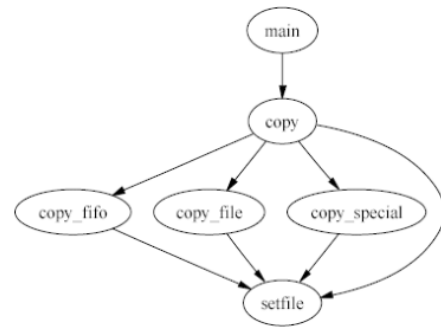
- specifico per multicore e parallelismo, usato per dare una rappresentazione tra le dipendenze dei **dati** - tipicamente i loop, a patto che non ci siano dipendenze di dato tra le varie iterazioni.
- tipicamente uso il **polyhedral model** → rappresento lo spazio delle it. come un poliedro (a seconda del numero di loop innestati), che permette di capire se esiste qualche permutazione dei loop (direzione di attraversamento dello spazio delle iterazioni; ovvero ad esempio scambiare l'ordine dei loop) **non soggetta a dipendenze**

2.4.9 CG (Call Graph)

Rappresentazione gerarchica a grafo usata per ragionare sull'insieme delle potenziali chiamate tra funzioni della translation unit del sorgente

Nota

Il compilatore ha visibilità solo fino a livello dei singoli moduli: posso estendere le ottimizzazioni al massimo fino ai legami tra funzioni dello stesso modulo, quelle più ampie si spostano a framework di ott. che agiscono es. a livello di linker

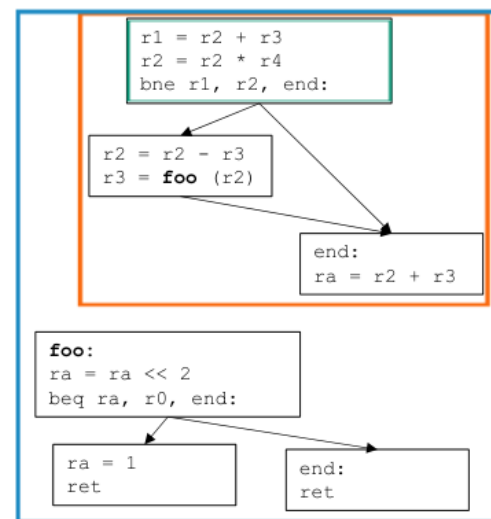


3 Ottimizzazione locale e Local Value Numbering (24 mar)

3.1 Scope dell'ottimizzazione

Lo scope viene influenzato da come viene gestito il flusso di controllo in un programma

- ott. **locale**: entro un singolo BB, non si preoccupa del flusso
- ott. **globale**: lavora a livello dell'intero CFG
- ott. **interprocedurale**: lavora a livello del call graph, e quindi sui CFG di più funzioni



3.2 Dead Code Elimination

Cominciamo ragionando su ott. locali come la DCE (sono *dead code* le istr. che definiscono una variabile mai utilizzata)

Sicuramente va tolta la def. di c, ma poiché **print non definisce nulla**, stando alla def. è dead code! → Estendiamo la definizione dicendo che lo sono le istr **prive di side effects** che definiscono ...

```
main {  
    int a = 4;  
    int b = 2;  
    int c = 1;  
    int d = a + b;  
    print d;  
}
```

3.2.1 Algoritmo per la DCE

1. \forall istruzione in BB

- aggiungi operandi ad un metadato array **used**

2. \forall istruzione in BB

- se non ha destinazione e non ha side effects rimuovila
- altrimenti se la destinazione non corrisponde a nessuno degli elem di **used** rimuovila

```

used = {};

for instr in BB:
    used += instr.args;

for instr in BB:
    if instr.dest &&
        instr.dest not in used:
        delete instr

```

A questo punto rendiamolo iterativo, per farlo eseguire fino a "convergenza" (elimino tutto il *d-c*)

```

while prog changed:
{
    ... #alg
}

```

```

main {
    int a = 100;
    int a = 42;
    print a;
}

```

→ Consideriamo questo esempio in cui si ridefinisce una variabile: il nostro algoritmo corrente non elimina nulla perché non gestisce le **dead stores**

→ per estenderlo dobbiamo poter **rilevare gli assegnamenti multipli** di una variabile, e quindi anche **preoccuparci dell'ordine** delle istruzioni! (più complicato senza forma SSA)

- dopo ogni istr. teniamo traccia delle variabili definite, ma non usate
- se troviamo un altro assegnamento alla stessa variabile prima della fine del blocco sappiamo che quello precedente può essere eliminato

```

last_def = {}; /* lista di variabili definite ma non usate (ptr alla piu
    ' recente per le sole variabili mai usate) */

for instr in BB:
    last_def -= instr.args; /*rimuovo ogni argomento (operando) dell'
        istruzione corrente: se presente, e' un uso della variabile */

    if instr.dest in last_def:
        delete last_def[instr.dest]; /*se a questo punto la destinazione
            dell'istr. corrente e' presente in last_def posso sovrascrivere la
            definizione precedente*/
    last_def[instr.dest]=instr;

```

- nota: per situazioni tipo $x=2$; $x=x+3$; si vuole evitare che la seconda istr. venga eliminata perché non ho realizzato che x è usata (non è *d-c*) → per questo controllo prima gli usi e poi le definizioni
- anche questo algoritmo va ripetuto fino a convergenza

3.3 Local Value numbering

Tecnica utilizzata per considerare il concetto di ordine delle definizioni in assenza di proprietà di tipo SSA

osserviamo 3 pattern che forniscono opportunità di eliminazione di codice ridondante:

- dead code elimination: 1 variabile e più valori
- copy propagation: 1 valore e più variabili

- common subexpression elimination: 1 valore (in forma di espressione) e più variabili

sono tutti modelli di computazione che si focalizzano sulle **variabili** → focalizzandoci sui **valori** possiamo eliminare tutte le forme di ridondanza

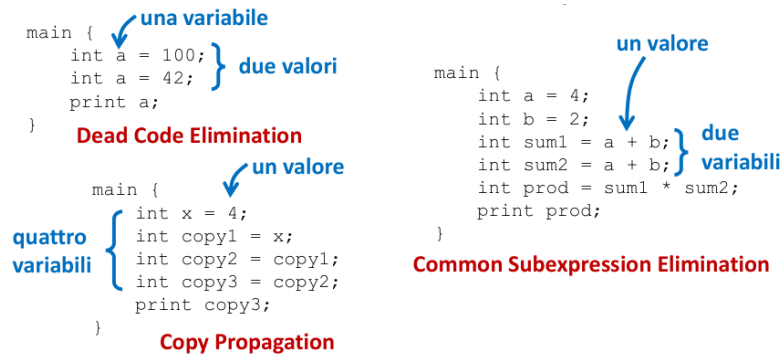
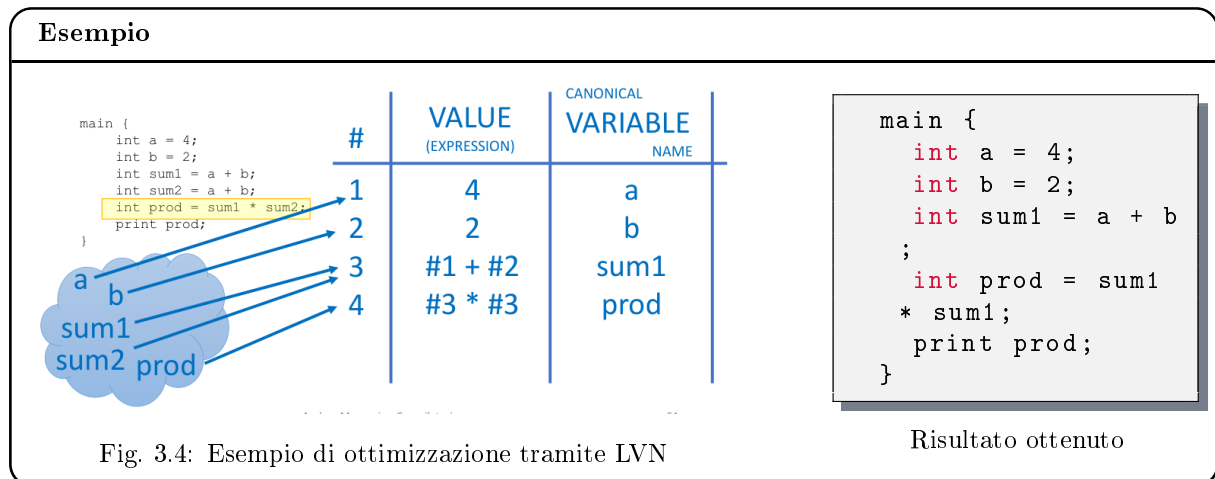


Fig. 3.3: Esempi di codice legati ai pattern citati

- costruisco un metadato in forma di tabella che riscrive le espr. (istruzioni) in funzione dei valori già osservati → evitando di riassegnare lo stesso valore a più variabili si evita la ridondanza
- analizzo le istruzioni in termini del value, e in caso questo coincida con entry della tabella già presenti punto direttamente a quella



```
# ...
int sum1 = a + b;
int sum2 = b + a;
```

Semplice variante del programma non riconosciuta dall'algoritmo (non conosce la pr. commutativa della somma) → vado a **canonicizzare** l'algoritmo, ovvero imporre un ordine numerico tra le entry (i valori) e usarle sempre in ordine crescente per le op. commutative (di fatto svolto da tutti i compilatori)

4 Data Flow Analysis

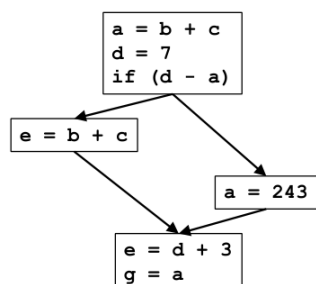
4.1 Cos'è la DFA

La possiamo vedere come una **metodologia** o come un **framework** di analisi, applicabile a vari problemi di ottimizzazione (CP, CSE, DCE, ...)

- analisi **locale**: si focalizza sull'effetto di ogni istruzione → posso comporre gli effetti di tutte le istr. per derivare informazione dall'inizio del BB ad ogni istruzione
- analisi **globale** (DFA): simile, ma molto più complessa → analizza l'effetto di ogni BB, e poi ha una metodologia per comporre l'effetto dei BB ai **confini** degli stessi per derivare informazione

La DFA è **sensibile al flusso di controllo in una funzione** e prevede un'analisi **intraprocedurale** (singola funzione, singolo CFG)

Esempio



La DFA ci permette di derivare informazioni da un CFG, ad esempio \forall variabile x in ogni punto del grafo:

- qual è il suo valore?
- quale "definizione" la definisce?
- la definizione è ancora "valida" (*live*)?

Queste risposte normalmente le otteniamo grazie alla forma SSA delle istruzioni e alla struttura di LLVM, ma qui stiamo ancora "costruendo" la forma SSA

4.1.1 Rappresentazione del programma statica o dinamica

- **statica**: programma finito, un pezzo di codice \rightarrow molto facile da analizzare
- **dinamica**: può avere infiniti percorsi di esecuzione, rappresenta una possibile esecuzione reale!
 - es. loop che si basa sull'analisi di un input

condizioni che un compilatore **non può analizzare**, soprattutto non in maniera statica e *finita* in termini di possibili istanze \rightarrow spesso si passano al comp. informazioni di "profiling" misurate durante ripetute esecuzioni del programma pre-ottimizzato

\rightarrow Con la DFA siamo in grado di dire qualcosa **per ogni punto del programma**, combinando informazioni relative a **tutte le possibili istanze** dello stesso p.to

4.1.2 Effetti di istruzioni e BB

Effetti di un'istruzione: ($a = b + c;$)

- **uses**: delle variabili (b, c)
- **kills**: una precedente definizione (a)
- **defines**: una variabile (a)

Combinando gli effetti delle singole istr. si definiscono gli **effetti di un BB**:

- **uso localmente esposto** (*locally exposed use*): in un BB è un uso di una var. che non è preceduto nel BB da una definizione della stessa variabile
- ogni definizione di una var. nel BB **kill**a tutte le definizioni della stessa variabile che **raggiungono** il BB
- **definizione localmente disponibile** (*locally available definition*): ultima definizione di una variabile nel BB

Esempio

```

t1 = r1+r2      1
r2 = t1         2
t2 = r2+r1      3
r1 = t2         4
t3 = r1*r1      5
r2 = t3         6
if r2>100 goto L1 7

```

- usi loc. esposti: 1 (r1,r2), 3 (r2), ...
- kill: 2 (r2), ...
- definizioni loc. disponibili: 6 (r2), 5 (t3), ...

4.2 Reaching Definitions

Primo esempio di problema inquadrabile e risolvibile mediante DFA

- ogni istruzione di assegnamento è una definizione
- una definizione d raggiunge (reaches) un punto itp se esiste un percorso da d a p tale per cui d non è uccisa (sovrascritta) lungo quel percorso

Definizione del problema:

- determinare **per ogni punto** del programma se **ogni definizione** nel programma **raggiunge** quel punto

→ usiamo un **bit vector** per ogni istruzione, con lunghezza del vettore pari al numero di definizioni
 ⇒ diventa una sorta di matrice con righe le istruzioni, colonne le definizioni

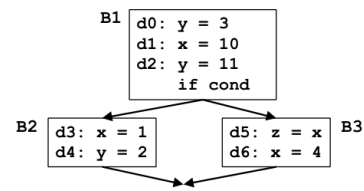
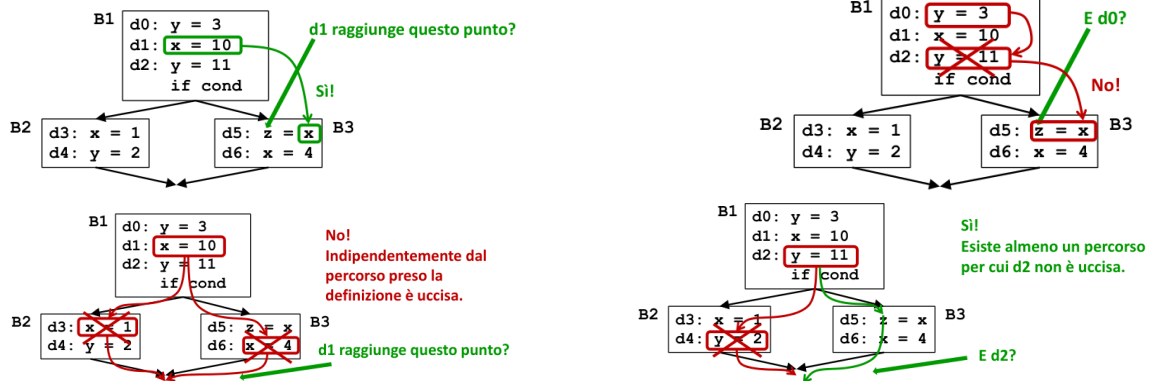


Fig. 4.5: Esempio

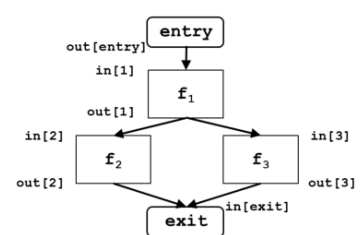
Esempio



4.2.1 Schema DFA

Consideriamo un flow graph:

- aggiungiamo un **BB entry** e uno **exit** → garantisco *single-entry* e *single-exit* points
- per stabilire l'effetto del codice in ciascun BB uso delle **funzioni di trasferimento** f_B , che correlano $out[B]$, $in[B]$ per un dato BB B
- stabilisco l'effetto **del flusso di controllo** in base alla vicinanza dei blocchi: correla $out[B_i]$, $in[B_j]$ di blocchi adiacenti
- infine dobbiamo solo risolvere le equazioni



Nota: stabiliamo anche una cosiddetta **boundary condition**, ovvero qual è l'informazione che riceve il primo BB dall'*entry block* → per le Reaching Definitions stabiliamo $out[entry] = \emptyset$

4.2.2 Effetti di uno statement

- la fz. di trasferimento di uno statement astrae l'esecuzione rispetto al problema di interesse
- per uno statement s ($d: x = y + z$):
 - $Gen[s]$: definizioni **generate** ($Gen[s] = \{d\}$)
 - definizioni **propagate**: $in[s] - Kill[s]$ dove $Kill[s]$ sono le altre definizioni di x nel resto del programma
 - funzione di trasferimento di uno statement s :

$$out[s] = f_s(in[s]) = Gen[s] \cup (in[s] - Kill[s])$$

- in altre parole, Gen è l'insieme di proprietà **generate** dal blocco, $Kill$ l'insieme di quelle **eliminate** nel blocco e in l'insieme di quelle **ereditate**

Stiamo lavorando su bit vector → una f_s riempie $out[s]$ a partire da $in[s]$ e applicando qualche tipo di calcolo

4.2.3 Effetti di un BB

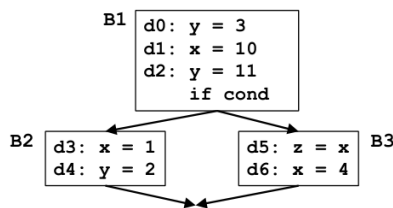
- la fz. di trasferimento di un BB compone linearmente le fz. dei suoi *statements*

$$\begin{aligned} out[B] &= f_B(in[B]) = f_{d_n} \dots f_{d_0} \\ &= Gen[B] \cup (in[B] - Kill[B]) \end{aligned}$$

- $Gen[B]$: definizioni localmente disponibili (**a fine BB**)
- $Kill[B]$: definizioni uccise da B **in tutto il programma**

- una f_B associa **incoming reaching definitions** → **outgoing reaching definitions**

Esempio



	Gen	Kill
B ₁	1, 2	0, 2, 3, 4, 6
B ₂	3, 4	0, 1, 2, 6
B ₃	5, 6	1, 3

NB: in $Kill[B1]$ $d0$ e $d2$ si uccidono a vicenda → l'approccio bit-vector **non ha nozione di ordine di esecuzione**

4.2.4 Effetti degli archi aciclici

In caso di predecessori multipli, devo decidere con che criterio unire l'informazione:

- nodo di unione (**join**): nodo con **predecessori** multipli
- operatore di **meet** (\wedge): $in[B] = out[p_1] \cup \dots \cup out[p_n]$ con p_1, \dots, p_n tutti predecessori di B

Il meet operator è **specifico del problema**, non dell'analisi mediante DFA! → Per il problema delle reaching definitions, usiamo $\wedge = \cup$ in quanto la condizione deve essere verificata per **almeno un percorso**

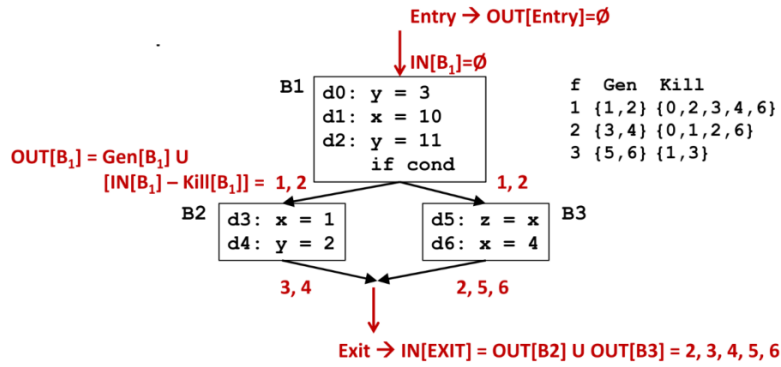


Fig. 4.6: Esempio (continua)

4.2.5 Effetti degli archi ciclici e condizioni iniziali

Gli archi ciclici (*backedges*) possono cambiare le loro *out* o non averle ancora calcolate durante l'esecuzione dell'algoritmo:

- itero fino a convergenza
- definisco delle **condizioni iniziali** per inizializzare ogni BB (similmente alla boundary condition): stabilisco $out[B] = \emptyset$ (specifico per Reaching Defs.)

4.2.6 Algoritmo iterativo

```
input: control flow graph CFG = (N, E, Entry, Exit)
// Boundary condition
out[Entry] =  $\emptyset$ 

// Initialization for iterative algorithm
for each basic block B other than Entry
    out[B] =  $\emptyset$ 

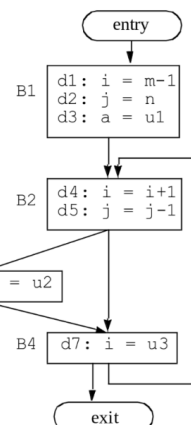
// Iterate
while (changes to any out[] occur) {
    in[B] =  $\cup$  (out[p]), for all predecessors p of B
    out[B] = fB(in[B]) // out[B] = Gen[B]  $\cup$  (in[B] - Kill[B])
}
```

Esempio di esecuzione

La rappresentazione del bit-vector segue l'ordine di numerazione delle definizioni:
IN[B1] = <000 00 0 0> con d1 primo bit, ...

Nota: dopo la seconda iterazione $out[B2]$ non cambia più

	First Pass	Second Pass
IN[B1]	000 00 0 0	000 00 0 0
OUT[B1]	111 00 0 0	111 00 0 0
IN[B2]	111 00 0 0	111 01 1 1 unione di out B1 e B4
OUT[B2]	001 11 0 0	001 11 1 0
IN[B3]	001 11 0 0	001 11 1 0
OUT[B3]	000 11 1 0	000 11 1 0
IN[B4]	001 11 1 0	001 11 1 0
OUT[B4]	001 01 1 1	001 01 1 1
IN[exit]	001 01 1 1	001 01 1 1



4.2.7 Algoritmo Worklist

La worklist contiene le variabili che devono ancora essere processate. Quando la worklist è vuota l'algoritmo termina.

```
input: control flow graph CFG = (N, E, Entry, Exit)

// Initialize
out[Entry] = ∅ // can set out[Entry] to special def
               // if reaching then undefined use
for all nodes i
    out[i] = ∅ // can optimize by out[i] = gen[i]
ChangedNodes = N

// Iterate
while ChangedNodes ≠ ∅ {
    remove i from ChangedNodes
    in[i] = ∪ (out[p]), for all predecessors p of i
    oldout = out[i]
    out[i] = fi(in[i]) // out[B] = Gen[B] ∪ (in[B] - Kill[B])
    if (oldout ≠ out[i]){
        for all successors s of i
            add s to ChangedNodes
    }
}
```

4.3 Liveness Analysis

4.3.1 Live Variable Analysis

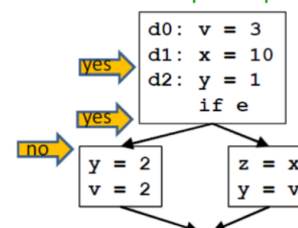
Definizione: Una variabile v è **viva** (*live*) in un punto p del programma se il valore di v è usato lungo qualche percorso del FG a partire da p (altrimenti è **morta**)

for i = 0 to n
... i ...
for i = 0 to n
... i ...

Posso riusare lo stesso registro se i non è viva qui

Motivi dell'analisi: (oltre alla DCE) es. *register allocation*: i registri reali sono limitati - la *ra* è l'operazione che cerca di evitare le spill in cache e in memoria, cercando i casi in cui risulta possibile **riutilizzare** un certo registro → dipende evidentemente dalla liveness di una variabile

\bar{v} è viva in questo punto?



Definizione del problema DFA

- devo stabilire \forall BB quali sono le variabili **vive** in ciascuno di essi
- bit-vector di lunghezza pari al numero di variabili

4.3.2 Forward e Backward analysis

es. *Reaching Definitions*: che informazione sto cercando per capire se una definizione raggiunge o meno un punto p del programma? Devo analizzare il "**passato**" - gli statement tra la definizione e p per cercare eventuali kill (analisi da *entry* a p)

→ Nel contesto della *Liveness Analysis* invece, devo analizzare il "**futuro**" - cerco gli usi della variabile da *exit* a p

4.3.3 Funzione di trasferimento

Per la formulazione più tipica della *LA* (ce ne sono diverse, a seconda delle fonti) usiamo

- l'insieme delle variabili vive che può **generare** un BB ($Use[B]$)
- l'insieme delle variabili **definite** nel BB ($Def[B]$)
- le variabili vive in ingresso che il bb può propagare ($Out[B] - Def[B]$)

→ **funzione di trasferimento** per il blocco B :

$$In[B] = Use[B] \cup (Out[B]Def[B])$$

Flow Graph

- $In[B] = f(Out[B])$ (*backward analysis*, contrario rispetto a *Reaching Definitions*)
- **join node**: nodo con **successori** multipli
- **meet operator** (\wedge): $out[B] = in[s_1] \cup \dots \cup in[s_n]$ con s_1, \dots, s_n tutti predecessori di B (ricorda: $\cup \implies \exists$ almeno un percorso)

4.3.4 Algoritmo iterativo

- **boundary condition**: \emptyset
- **starting conditions**: \emptyset

La scelta delle condizioni iniziali deriva principalmente dalla scelta del meet operator - se per qualsiasi motivo scegliessimo come meet operator \cap , usare \emptyset impedirebbe qualsiasi propagazione dell'informazione

```
input: control flow graph CFG = (N, E, Entry, Exit)

// Boundary condition
in[Exit] =  $\emptyset$ 

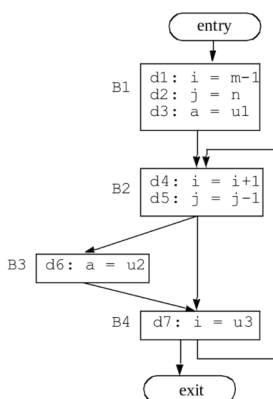
// Initialization for iterative algorithm
for each basic block B other than Exit
    in[B] =  $\emptyset$ 

// Iterate
while (changes to any in[] occur) {
    for each basic block B other than Exit {
        out[B] =  $\cup$  (in[s]), for all successors s of B
        in[B] =  $f_B(out[B])$  //  $in[B] = Use[B] \cup (Out[B] - Def[B])$ 
    }
}
```

A convergenza si arriva **indipendentemente dall'ordine** in cui calcolo le funzioni dei BB (cambia al massimo il numero di iterazioni per arrivarci)

Esempio

	First Pass	Second Pass
OUT[entry]	{m,n,u1,u2,u3}	{m,n,u1,u2,u3}
IN[B1]	{m,n,u1,u2,u3}	{m,n,u1,u2,u3}
OUT[B1]	{i,j,u2,u3}	{i,j,u2,u3}
IN[B2]	{i,j,u2,u3}	{i,j,u2,u3}
OUT[B2]	{u2,u3}	{j,u2,u3}
IN[B3]	{u2,u3}	{j,u2,u3}
OUT[B3]	{u3}	{j,u2,u3}
IN[B4]	{u3}	{j,u2,u3}
OUT[B4]	{}	{i,j,u2,u3}



4.4 Framework per DFA

Possiamo usare una tabella di questo tipo per descrivere problemi nell'ambito della DFA:

	Reaching Definitions	Live Variables
Domain	Sets of definitions	Sets of variables
Direction	forward: out[b] = $f_b(\text{in}[b])$ in[b] = $\wedge \text{out}[\text{pred}(b)]$	backward: in[b] = $f_b(\text{out}[b])$ out[b] = $\wedge \text{in}[\text{succ}(b)]$
Transfer function	$f_b(x) = \text{Gen}_b \cup (x - \text{Kill}_b)$	$f_b(x) = \text{Use}_b \cup (x - \text{Def}_b)$
Meet Operation (\wedge)	\cup	\cup
Boundary Condition	out[entry] = \emptyset	in[exit] = \emptyset
Initial interior points	out[b] = \emptyset	in[b] = \emptyset

4.5 Available Expressions

Altro problema modellabile tramite DFA, utile ad es. per la Common Subexpression Elimination

```

if (...) {
    x = m + n;
} else {
    y = m + n;
}
z = m + n;

```

```

if (...) {
    x = m + n;
} else {
    ...
}
z = m + n;

```

$m + n$ è ridondante perché già calcolato Cosa cambia se non viene calcolato nel ramo **else**?

Il concetto di available expr. è necessario come maniera rigorosa di ragionare sulla **ridondanza**

Definizione del problema:

- **dominio:** tutte le espressioni del programma
 - consideriamo solo espr. binarie del tipo $x \oplus y$
- un'espressione $x \oplus y$ è **available** in un punto p del programma se **ogni** percorso che parte da *Entry* e arriva a p valuta l'espressione

- **funzione di trasferimento** di un BB:

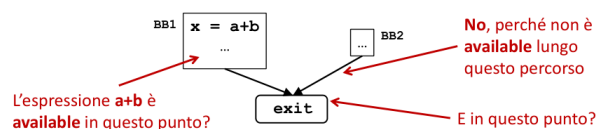
$$f_B(x) = \text{Gen}[B] \cup (x - \text{Kill}[B])$$

- un blocco **genera** l'espressione $x \oplus y$ se la valuta e **non ridefinisce in seguito** x o y
- un blocco **uccide** l'espr. $x \oplus y$ se assegna (o potrebbe assegnare) un valore a x o y e non ricalcola successivamente l'espressione

- **direzione di analisi: forward**

- nell'analisi delle *Available Expressions* eliminiamo un'espr. perché è stata calcolata **in passato**
- (nell'analisi delle *Live Variables* eliminiamo una var. perché non verrà usata **in futuro**)

- equazioni *Out*: $\text{Out}[B] = f_b(\text{In}[B])$
- equazioni *In*: $\text{In}[B] = \wedge_{p \in \text{pred}(B)} (\text{Out}[B])$
- **meet operator** (\wedge): \cap ("ogni percorso che parte da Entry [...]")



- **boundary conditions:** $Out[Entry] = \emptyset$
- **initial conditions:**
 - ~~$Out[B_i] = \emptyset$~~ \rightarrow il meet op. è \cap
 - $Out[B_i] = \mathcal{U}$

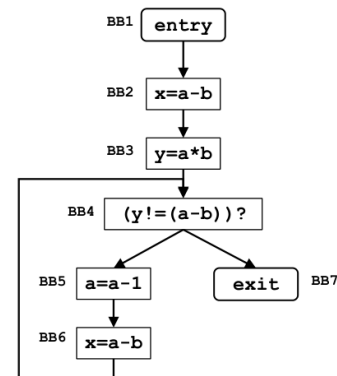
	Available Expressions
Domain	Sets of Expressions
Direction	Forward: $out[b] = f_b(in[b])$ $in[b] = \wedge out[pred(b)]$
Transfer function	$f_b(x) = Gen_b \cup (x - Kill_b)$
Meet Operation (\wedge)	\cap
Boundary Condition	$out[entry] = \emptyset$
Initial interior points	$out[b] = \mathcal{U}$

Fig. 4.7: Tabella completa

Esempio

Risolto su fogli, dominio $\{a=b, a*b, a-1\}$

Essendo la DFA per natura **statica**, considera sempre il caso **peggiore** di esecuzione.
Il risultato dell'analisi sarebbe diverso se conoscessi l'istanza specifica - sapendo ad es. che BB4 sarà falso potrei fare delle assunzioni che, staticamente, non posso fare \rightarrow ritorno conservativamente al caso peggiore che il loop esegua almeno una volta



5 Loops e UD-DU chains 2 aprile

5.1 Cos'è un loop

Sapendo che un programma spende la maggior parte del tempo nei loop, l'obiettivo è definire un loop **in termini di teoria dei grafi** (CFG), ovvero **indipendentemente dalla loro sintassi e dal tipo** (**for**, **while**, **goto**, costrutti stile assembly con salti condizionati e non...)

Generalmente, non tutti i *cicli* sono un "loop" da un p.to di vista dell'ottimizzazione \rightarrow es. 9-5 a-c-d è un ciclo, ma anche un loop? e c-d ?

elementi chiave per riconoscere un loop:

- gli archi devono formare almeno un ciclo
- (fondamentale) deve avere un **singolo entry point** (tutti gli archi, se multipli, devono entrare nello stesso punto)

5.2 definizioni formali

dominator

un nodo d domina un nodo n in un grafo ($d \text{ dom } n$) se ogni percorso dall'ENTRY node a n passa per d

come facciamo ad usare e rappresentare comodamente questa proprietà?

dominator tree

modo per rappresentare la proprietà di dominanza in forma di albero

- $a \rightarrow b$ nel dominator tree \iff a domina immediatamente b

- non compaiono le relazioni di "auto-dominazione" (ogni nodo domina sempre se stesso, ma nell'albero non serve rappresentarlo)
- il nodo entry è la radice
- ogni nodo d domina solo i suoi discendenti nell'albero

immediate dominator

l'ultimo dominator di n su qualsiasi percorso da entry a n
 m domina immediatamente (strettamente) n ($m \text{ sdom } n$) iff $m \text{ dom } n \text{ AND } m \neq n$
 esempio 9-9 di dominator tree
 altro esempio 9-10 e 9-11
 gli esempi ci mostrano come si formano le gerarchie di dominator
 note queste definizioni, possiamo iniziare a provare a definire i loop

5.3 loop naturali

pur specificandoli in molti modi diversi nei src, dal punto di vista dell'analisi importa solo che la rappr abbia proprietà che facilitino l'ottimizzazione, ovvero

- singolo entry point: header \rightarrow l'header **domina tutti i nodi nel loop**
- back edge, ossia arco la cui testa domina la propria coda (tail \rightarrow head): un back edge **deve far parte di almeno un loop**

5.3.1 identificare i loop naturali

1. trovare le relazioni di dominanza
2. identificare i back edges
3. trovare il loop naturale associato al back edge

trovare i dominatori

lo impostiamo in termini di dfa (segue esempio di prima)

trovare i back edges

algoritmo usato ad es. dal dragon book (sezione 2.3.4): depth-first traversal

- inizio alla radice e visito ricorsivamente i figli di ogni nodo in qualsiasi ordine
- importante la "velocità di discesa": prima scendo ed esploro in profondità, a prescindere dall'ordine il percorso della visita deinisce un depth-first spanning tree (DFST):

- archi solidi: struttura dell'albero
- archi tratteggiati: altri archi del cfg

come categorizzo gli archi:

- advancing (A) edges: da antenato a discendente, ovvero gli archi detti *proper* - gli archi solidi sono tutti A
- retreating (R) e.: da discendente a antenato (non necessariamente proper \rightarrow da un nodo a se stesso)
 - solo archi tratteggiati
- cross (C) edges: archi tali per cui nessuno dei due nodi è antenato dell'altro

se disegniamo il dfst in modo che i figli siano aggiunti da sx a dx nell'ordine di visita, allora i cross edges vanno sempre da dx a sx

definizione: 9-20 algoritmo: 9-20, si basa su concetto di retreating edge, e controlla se la testa è nella lista dei dominatori della coda (usa h head e t tail)

dunque di fatto in questo modo vado a riconoscere i back edges come questi casi specifici di retreating edges su cui eseguo il controllo della dominanza

trovare il loop naturale

il loop naturale di un back edge è il più piccolo insieme di nodi che include head e tail del back edge e non ha predecessori fuori da questo insieme

algoritmo: 9-22

dunque genericamente rappresento i loop in maniera "header-centrica"

5.4 preheader

spesso succede che sia necessario (anche propedeuticamente ad altre ottimizzazioni) dare la garanzia che quando arrivo all'header block, ci arrivo con un arco di tipo fallthrough nel grafo - es per la loop invariant code motion (caso di code hoisting), quindi quando devo spostare un'istruzione in un punto comune al control flow di tutte le iterazioni del loop → tipico inserire un blocco detto preheader appena prima del loop, fatto apposta per inserire le istruzioni da eseguire una volta sola in seguito alla code hoisting (operazioni preliminari, eccetera)

IMG 9-23

questo vuol dire che per manipolare le str dati di tipo loop in llvm ci sono a disposizione primitive per recuperare proprio questi blocchi fondamentali (poi per navigare nel resto dei blocchi possiamo usare i classici iteratori, sia seguendo l'ordine del cfg sia non)

6 use-def e def-use chains

per come funziona l'ottimizzazione, abbiamo capito che serve la capacità di ricollegare in maniera efficiente la definizione di una variabile a tutti i suoi usi (per esempio per propagare un risultato) → per questo vengono previsti questi riferimenti nell'IR llvm

6.1 dove viene definita o usata una variabile

la definizione di def use e use def chain è precedente a quella di ssa → lo scope lessicale del programma in cui si potevano trovare gli usi della variabile era molto più ampio

es. loop invariant code motion e copy propagation: 9-25

es licm se le variabili usate nell'espr che definisce a sono definite all'interno del loop evidentemente non posso spostare la definizione fuori dal loop

es cp riprendo il concetto di reaching definition ...

notando l'utilità di poter scorrere in maniera agevole le relazioni def usi, vogliamo un'IR che la preveda → permette una forma di analisi "sparsa", ovvero che ignora tutte le istruzioni che non sono casi di uso o definizione specifici all'istruzione correntemente analizzata

9-26: il discorso sulle catene può essere ulteriormente semplificato se si riesce a ridefinire completamente anche il nome della variabile ad ogni sua ridefinizione (ci avviciniamo a ssa?) (permette catene evidentemente sensibilmente più corte)

9-28: mostra come le catene possono essere onerose