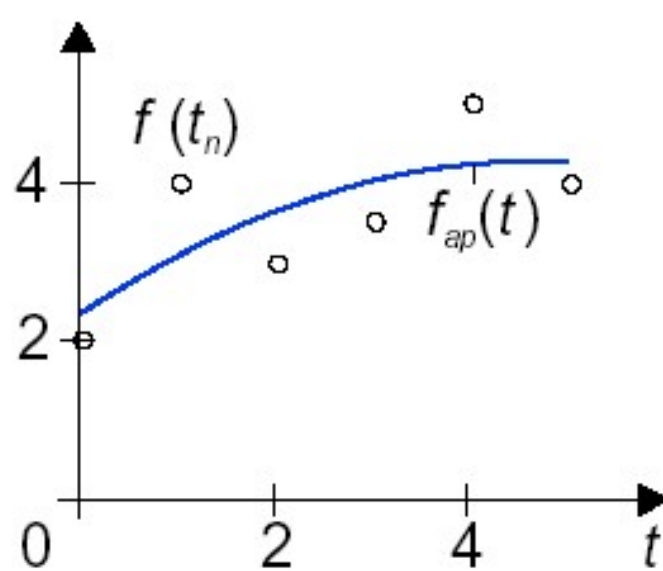
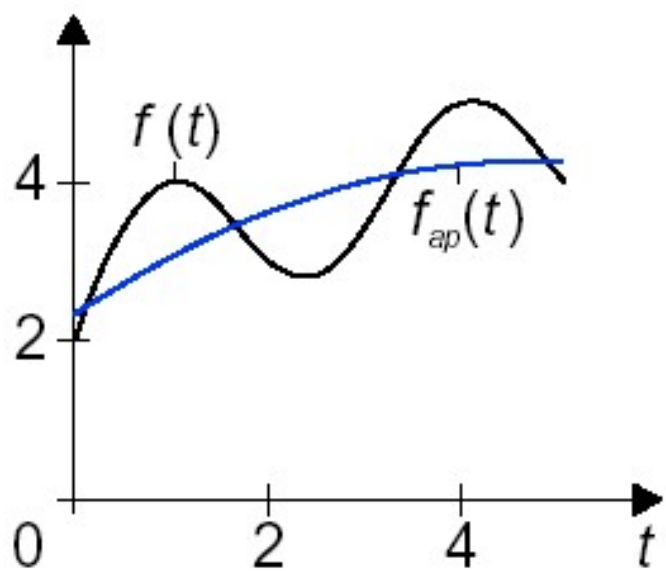


Grundlagen der Signalverarbeitung

1. Einführung
2. Signalstatistik
3. Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate
4. Orthogonalität und orthogonale Funktionen
5. Reihenentwicklungen mit orthogonalen Funktionen
6. Kontinuierliche Orthogonaltransformationen
7. Diskrete Orthogonaltransformationen
8. Schnelle Algorithmen
9. Korrelation
10. Faltung
11. Hauptachsentransformation

4 Orthogonalität und orthogonale Funktionen

- 4.1 Orthogonalität und Näherung
- 4.2 Harmonische Funktionen
 - 4.2.1 Eindimensionale Funktionen
 - 4.2.2 Zweidimensionale Funktionen
- 4.3 Nichtharmonische Funktionen
 - 4.3.1 System der Blockpulse
 - 4.3.2 System der Walshfunktionen
 - 4.3.3 Haar-Funktionen
 - 4.3.4 Slant-Funktionen



$$E^2(c) = \sum_{n=0}^{N-1} [f(t_n) - f_{ap}(c, t_n)]^2$$

$$f_a(c, t) = \sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_m(t)$$

$$\begin{bmatrix} \sum^N \phi_{0,n} \phi_{0,n} & \sum^N \phi_{0,n} \phi_{1,n} & \cdots & \sum^N \phi_{0,n} \phi_{M-1,n} \\ \sum^N \phi_{1,n} \phi_{0,n} & \sum^N \phi_{1,n} \phi_{1,n} & \cdots & \sum^N \phi_{1,n} \phi_{M-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum^N \phi_{M-1,n} \phi_{0,n} & \sum^N \phi_{M-1,n} \phi_{1,n} & \cdots & \sum^N \phi_{M-1,n} \phi_{M-1,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum^N \phi_{0,n} f_n \\ \sum^N \phi_{1,n} f_n \\ \vdots \\ \sum^N \phi_{M-1,n} f_n \end{bmatrix}$$

Einschränkungen: orthogonales Funktionssystem

- inneres Produkt ist Verallgemeinerung des in reellen Vektorräumen definierten Skalarprodukts
- Vektorraum, auf dem ein inneres Produkt definiert ist, heißt Innenproduktraum
- **Innenprodukträume** verallgemeinern den euklidischen Raum:
 - R^n : n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen, Skalarprodukt von x und y aus R^n :

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=0}^n x_i \cdot y_i \in R$$
 - C^n : n-dim. Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen, Skalarprodukt von z und w aus C^n :

$$\langle z, w \rangle := \sum_{i=0}^n z_i \cdot w_i^* \in C$$

aus innerem Produkt lässt sich Norm berechnen:

für \mathbf{f} reell, gilt

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f_n f_n$$

$$\sqrt{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle} = \sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{f}} = ||\mathbf{f}||$$

Norm eines Vektors ist Verallgemeinerung seiner Länge

der Vollständigkeit halber hier noch erwähnt
orthogonale Matrizen

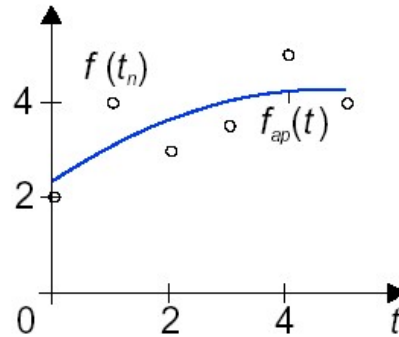
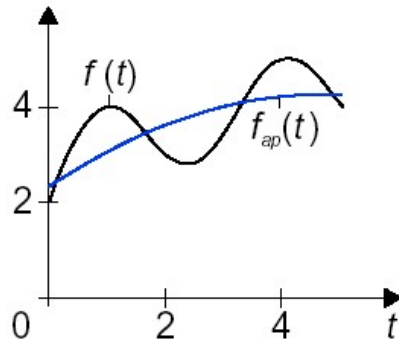
$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \quad \text{und} \quad |\mathbf{A}| = \pm 1$$

komplexe „orthogonale“ Matrizen heißen unitär
und es gilt

$$\mathbf{A}^{T*} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{A}^{T*} = \mathbf{A}^{-1}$$



$$E^2(c) = \sum_{n=0}^{N-1} [f(t_n) - f_{ap}(c, t_n)]^2 \quad f_a(c, t) = \sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_m(t)$$

Orthogonalität:

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt = 0 \quad \sum_{n=0}^{N-1} f_n g_n = 0$$

die M Funktionen ϕ_m sind bezüglich $[t_n]$ orthogonal,
wenn sie paarweise orthogonal sind:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \phi_{m,n} \phi_{k,n} = 0$$

Folge der Einschränkung auf orthogonale Funktionssysteme:

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^N \phi_{0,n} \phi_{0,n} & \sum_{n=0}^N \phi_{0,n} \phi_{1,n} & \cdots & \sum_{n=0}^N \phi_{0,n} \phi_{M-1,n} \\ \sum_{n=0}^N \phi_{1,n} \phi_{0,n} & \sum_{n=0}^N \phi_{1,n} \phi_{1,n} & \cdots & \sum_{n=0}^N \phi_{1,n} \phi_{M-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=0}^N \phi_{M-1,n} \phi_{0,n} & \sum_{n=0}^N \phi_{M-1,n} \phi_{1,n} & \cdots & \sum_{n=0}^N \phi_{M-1,n} \phi_{M-1,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^N \phi_{0,n} f_n \\ \sum_{n=0}^N \phi_{1,n} f_n \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^N \phi_{M-1,n} f_n \end{bmatrix}$$

$$c_k = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \phi_{k,n} f_n}{\sum_{n=0}^{N-1} |\phi_{k,n}|^2} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$c_k = \frac{\int_a^b f(t) \phi_k(t) dt}{\int_a^b |\phi_k(t)|^2 dt}$$

Parsevalsches Theorem:

Signalenergie setzt sich additiv aus den Energien der Teilsignale zusammen:

$$\int_0^T f^2(t) dt = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^2$$

Besselsche Ungleichung:

$$E^2(c_m) = \int_0^T \left[f(t) - \sum_{m=0}^{M-1} c_m \phi_m(t) \right]^2 dt \geq 0$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} c_m^2 \leq \sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 \leq \int_0^T f^2(t) dt$$

Aussage der besselschen Ungleichung:

ein Vektor x eines Hilbertraums ist mindestens so "lang" wie eine (beliebige) seiner Projektionen auf Unterräume, oder:

$$\sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

mit S Orthonormalsystem im Hilbertraum H

und $x \in H$

Gleichheitszeichen: Parsevalsche Gleichung, auch Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras für Innenprodukträume

Complete Orthogonal System

A set of orthogonal functions $\{\phi_n(x)\}$ is termed complete in the closed interval $x \in [a, b]$ if, for every piecewise continuous function $f(x)$ in the interval, the minimum square error

$$E_n \equiv \|f - (c_1 \phi_1 + \dots + c_n \phi_n)\|^2$$

(where $\|f\|$ denotes the L2-norm with respect to a weighting function $w(x)$) converges to zero as n becomes infinite. Symbolically, a set of functions is complete if

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=0}^m a_n \phi_n(x) \right]^2 w(x) dx = 0,$$

where the above integral is a Lebesgue integral.

- für unendlich viele Funktionen gilt in Bessel-Ungleichung das Gleichheitszeichen, geht also über in das Parseval-Theorem
- Approximation ist umso besser, je größer M ist
- je mehr Funktionen, desto kleiner der Fehler
- nur im Fall der Vollständigkeit des approximierenden Funktionensystems erfolgt eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von $f_a(c, t)$ und $c_m \cdot \phi_m(t)$
- Annäherung an eine Originalfunktion dann beliebig genau möglich
- Parsevalsches Theorem heißt auch Vollständigkeitstheorem
mean squared error (MSE) $\rightarrow 0$

4 Orthogonalität und orthogonale Funktionen

4.1 Orthogonalität und Näherung

4.2 Harmonische Funktionen

4.2.1 Eindimensionale Funktionen

4.2.2 Zweidimensionale Funktionen

4.3 Nichtharmonische Funktionen

4.3.1 System der Blockpulse

4.3.2 System der Walshfunktionen

4.3.3 Haar-Funktionen

4.3.4 Slant-Funktionen

ADVANCES IN
ELECTRONICS
and
ELECTRON
PHYSICS

SUPPLEMENT

9

HARMUTH

SEQUENCY THEORY
Foundations and Applications



ACADEMIC
PRESS

ISBN 0-12-014569-3

Henning F. Harmuth: Sequency Theory

Academic Press 1977

The Dogma of the Circle ...

Advances in Electronics and Electron Physics

Edited by
L. MARTON

Smithsonian Institute, Washington, D.C.

Assistant Editor
CLAIRE MARTON

Editorial Board

T. E. Allibone	E. R. Piore
H. B. G. Casimir	M. Ponte
W. G. Dow	A. Rose
A. O. C. Nier	L. P. Smith
F. K. Willenbrock	

SUPPLEMENTS

1. ELECTROLUMINESCENCE AND RELATED EFFECTS, 1963 HENRY F. IVEY
2. OPTICAL MASERS, 1964 GEORGE BIRNBAUM
3. NARROW ANGLE ELECTRON GUNS AND CATHODE RAY TUBES, 1968
HILARY MOSS
4. ELECTRON BEAM AND LASER BEAM TECHNOLOGY, 1968
L. MARTON AND A. B. EL-KAREH, EDS.
5. LINEAR FERRITE DEVICES FOR MICROWAVE APPLICATIONS, 1968
WILHELM H. VON AULOCK AND CLIFFORD E. FAY
6. ELECTRON PROBE MICROANALYSIS, 1969
A. J. TOUSIMIS AND L. MARTON, EDS.
7. QUADRUPOLES IN ELECTRON LENS DESIGN, 1969 P. W. HAWKES
8. CHARGE TRANSFER DEVICES, 1975
CARLO H. SÉQUIN AND MICHAEL F. TOMPSETT
9. SEQUENCY THEORY: FOUNDATIONS AND APPLICATIONS, 1977
HENNING F. HARMUTH

Sequency Theory

Foundations and Applications

HENNING F. HARMUTH

DEPARTMENT OF ELECTRICAL ENGINEERING
THE CATHOLIC UNIVERSITY OF AMERICA
WASHINGTON, D.C.

1977

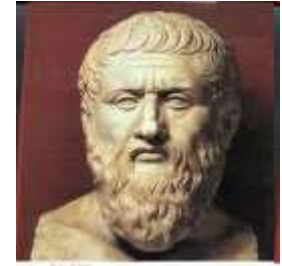


ACADEMIC PRESS New York San Francisco London

A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers

The Dogma of the Circle

The Greek philosopher **Plato** is credited with the introduction of the dogma of the circle. It was expressed by **Claudius Ptolemy** as follows " *We believe that the object which the astronomer must strive to achieve is this: to demonstrate that all the phenomena in the sky are produced by uniform and circular motions.* "





Claudius Ptolemäus,
neuzeitliches Idealporträt

Das Idealporträt stellte ein dem Künstler nicht persönlich bekanntes Individuum als erfundenen Charaktertypus dar (z. B. Köpfe des Homer), die das Wesen, nicht jedoch die realistische Gestalt der betreffenden Person versinnbildlichen sollten; diese Bildnisgestaltung ist bereits aus griechischer Zeit bekannt.

Touristenporträt

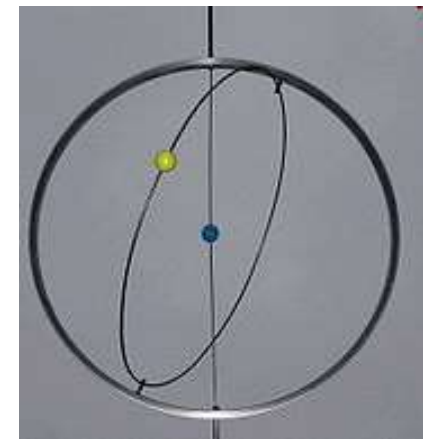
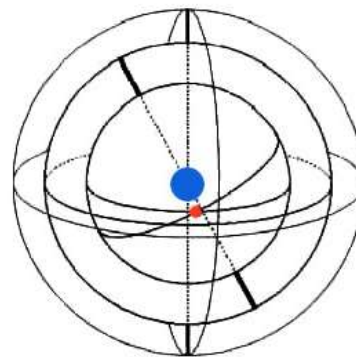
-- Pompeo Batoni: *Sir Wyndham Knatchbull-Wyndham*, 1759, [Los Angeles County Museum of Art](#)

[Pompeo Batoni](#) ist der Erfinder des *Touristenporträts*. Er entwickelte diesen Porträttyp für englische [Touristen](#) in Rom, die sich vor Relikten antiker Architektur malen ließen. Eines der bekanntesten Werke dieses Typus ist [Johann Heinrich Wilhelm Tischbeins *Goethe in der Campagna*](#) 1786/7. Das Touristenporträt verbindet gesellschaftliche Attribute und Souvenir-Darstellungen. Das Touristenporträt stellt eine Stufe des Übergangs vom Standesporträt zum ständeunabhängigen Gesellschaftsportrait dar.^[7]

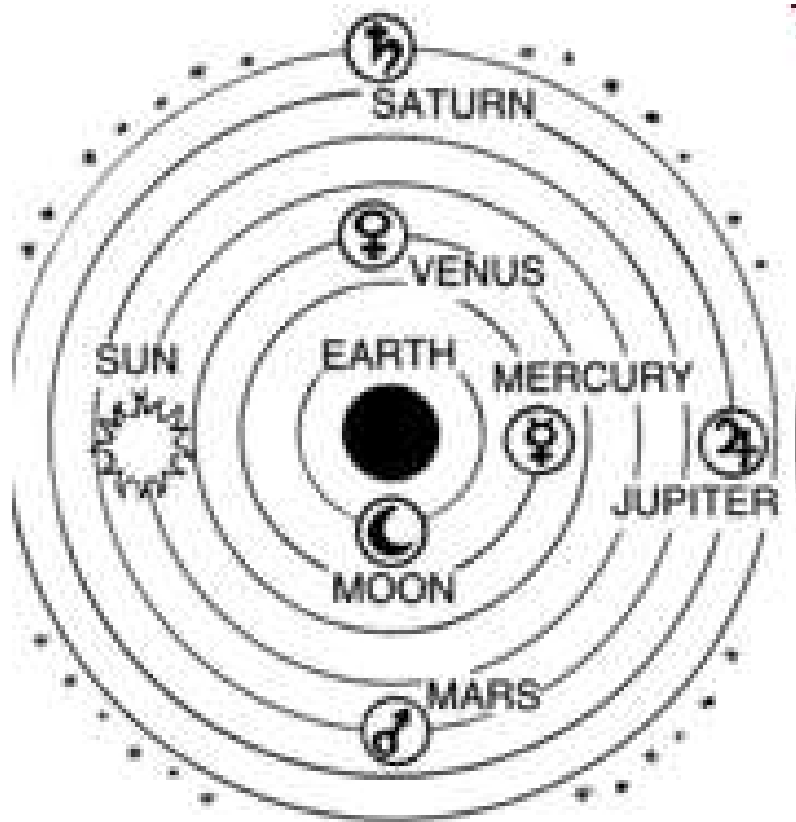


Eudoxus, a disciple of Plato, used a superposition of rotating spheres in an attempt to reconcile the observed data with the dogma of the circle. Four spheres were needed for each one of the five known planets¹, three each for the Sun and the Moon, and one for the fixed stars. These 27 spheres proved unsatisfactory. Aristotle reduced the discrepancies between theory and observation by using 54 spheres.

¹Merkur, Venus, Mars, Jupiter, and Saturn



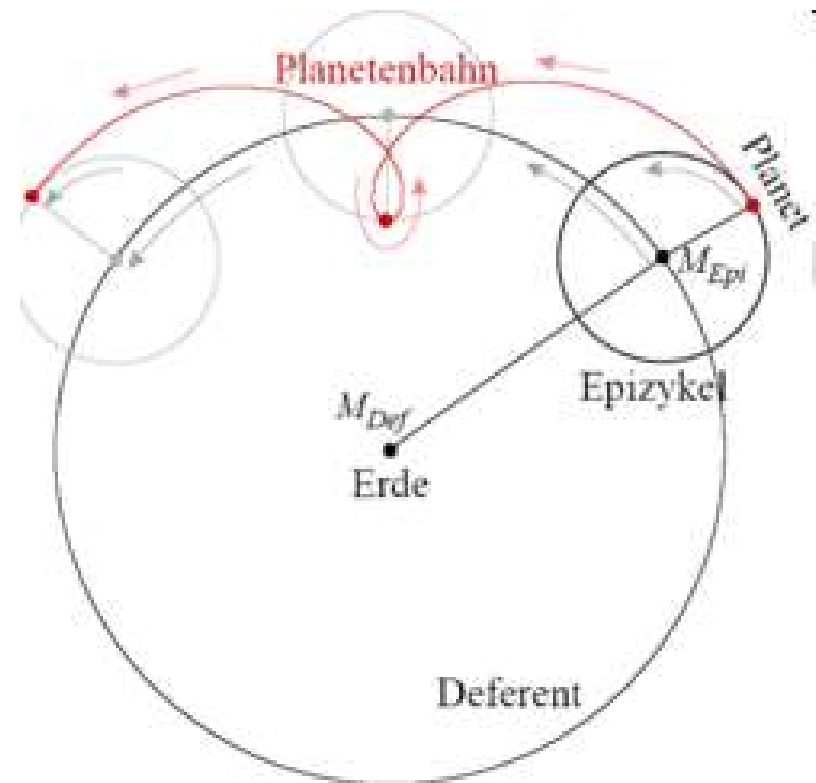
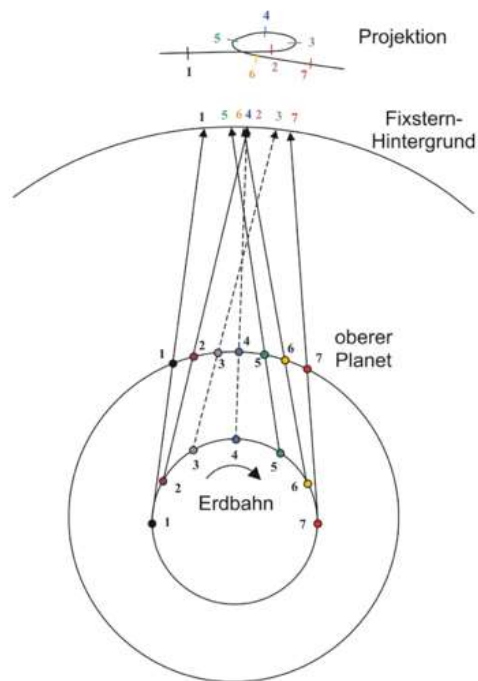
Claudius Ptolemy replaced the spheres by circles. The five planets, the Sun, and the Moon moved around the Earth on primary circles called deferents.



Lehre des Aristoteles musste mit widersprüchlichen Beobachtungen in Einklang gebracht werden:

> ***Epizykeltheorie***

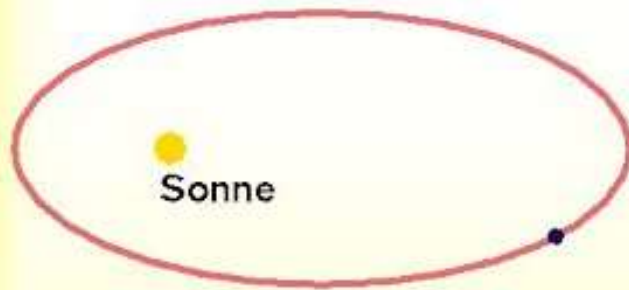
Superimposed on each deferent was a secondary circle, called epicycle. Another epicycle was superimposed on this first epicycle, and so on. In modern language, we would say that the orbits were represented by a superposition of circles. Ptolemy used 36 circles to represent the orbits of the Sun, the Moon, and the five planets.



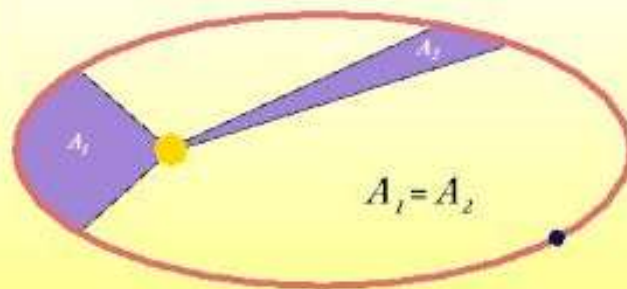
This was not quite enough to fit the observed data, and better representations using more circles were subsequently worked out. **Nicholas Copernicus** moved the center of motion from the vicinity of the Earth to the vicinity of the Sun, but he retained the representation of orbits by a superposition of circles. The orbit of Mercury required eleven circles, Venus and Earth nine circles each, the Moon four circles, and the remaining planets five circles each. This adds up to 48 circles.



Keplersche Gesetze



1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht

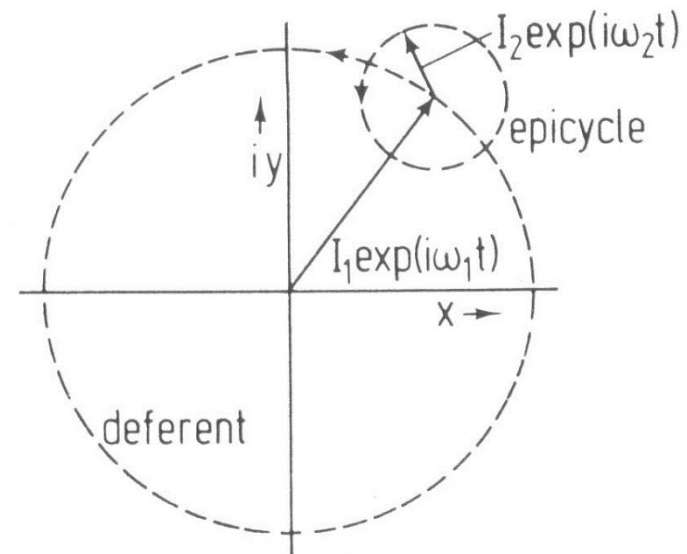


2. Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = C = \textit{konst}$$

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen der Bahnellipsen.

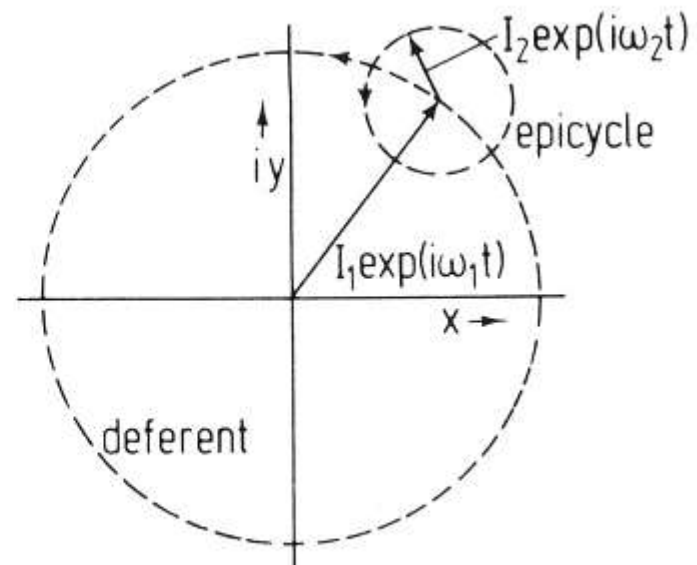
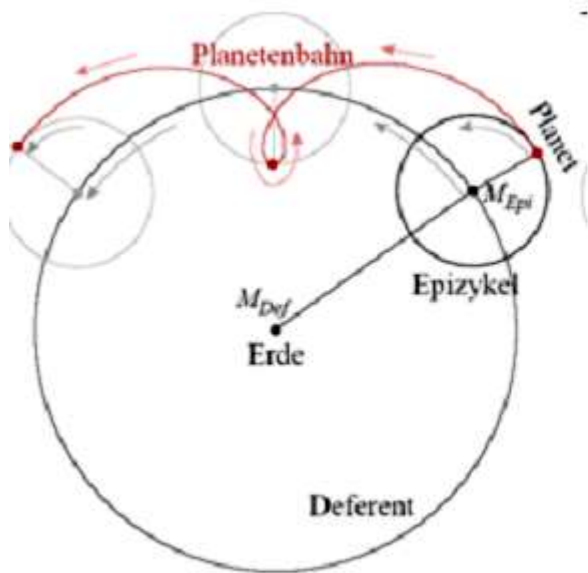
It is generally believed that Kepler ended the dogma of the circle, but this is not so. The circle disappeared from astronomy, but it reappeared in other fields of science in disguise. In electrical engineering and a good part of physics, we meet the old circle under the new name of exponential function $e^{i\omega t}$ or unit circle in the complex plane.



to disguise: tarnen, maskieren

Fig. 1

Harmonische Schwingungen



Anyone with the usual background of electrical communications will interpret Fig. 0-1 not as a superposition of a deferent and an epicycle but as a superposition of two sinusoidal oscillations $I_1 \exp(i\omega_1 t)$ and $I_2 \exp(i\omega_2 t)$ using complex notation. Indeed, Fig. 1 is a standard illustration for single sideband modulation of a sinusoidal carrier by a sinusoidal signal. Speaking more generally, the superposition of circles by Ptolemy and Copernicus became the Fourier series expansion in complex notation.

Let us observe that the deferents and epicycles of Ptolemy represented orbits well enough to get Vasco da Gama to India, Christopher Columbus to America, and one of Ferdinand Magellan's ships around the world.

Harmonische Schwingungen

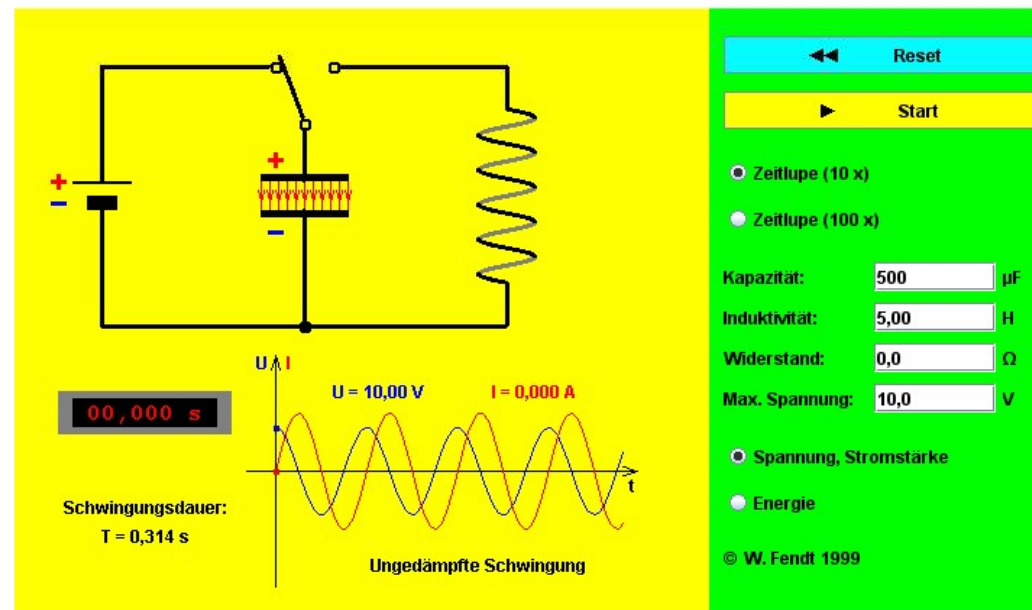
- spielen einzigartige Rolle in der Nachrichtentechnik
- leicht zu erzeugen
- lineare, zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme) dämpfen
und verzögern, Form und Frequenz bleiben erhalten
- Fourieranalyse bequemes Werkzeug
- <http://www.walter-fendt.de/ph14d/schwingkreis.htm>

Elektromagnetischer Schwingkreis

In dieser Simulation geht es um einen **elektromagnetischen Schwingkreis**, bestehend aus einem **Kondensator** (Mitte) und einer **Spule** (rechts). Nach Betätigung des "Reset"-Buttons werden die Platten des Kondensators aufgeladen, und zwar die obere Platte positiv, die untere negativ. Sobald man mit der Maus auf den Startknopf klickt, wird durch Umlegen des Schalters die Schwingung in Gang gesetzt. Derselbe Button gestattet es, die Simulation zu unterbrechen und wieder fortzusetzen. In den zwei Optionsfeldern darunter kann man zwischen 10- und 100-facher Zeitlupe wählen. Mit Hilfe der vier Textfelder lassen sich die Werte für die Kapazität des Kondensators (100 μF bis 1000 μF), die Induktivität (1 H bis 10 H) und den Widerstand (0 Ω bis 1000 Ω) der Spule sowie für die Batteriespannung variieren.

Im Schaltbild sind das elektrische Feld des Kondensators (rot) und das magnetische Feld der Spule (blau) durch Feldlinien angedeutet. Dabei ist die Dichte der Feldlinien ein Maß für die Stärke des jeweiligen Feldes. Zusätzlich sind die Ladungsvorzeichen der beiden Kondensatorplatten und Pfeile für die (technische) Stromrichtung zu sehen.

Unten links zeigt eine Digitaluhr die seit Beginn der Schwingung vergangene Zeit an; darunter ist die Schwingungsdauer angegeben. Rechts unten ist - abhängig von den beiden Radiobuttons im unteren Teil der Schaltfläche - entweder ein Diagramm zum zeitlichen Verlauf von Spannung U (blau) und Stromstärke I (rot) zu sehen oder ein Balkendiagramm, das die Energieumwandlungen darstellt.



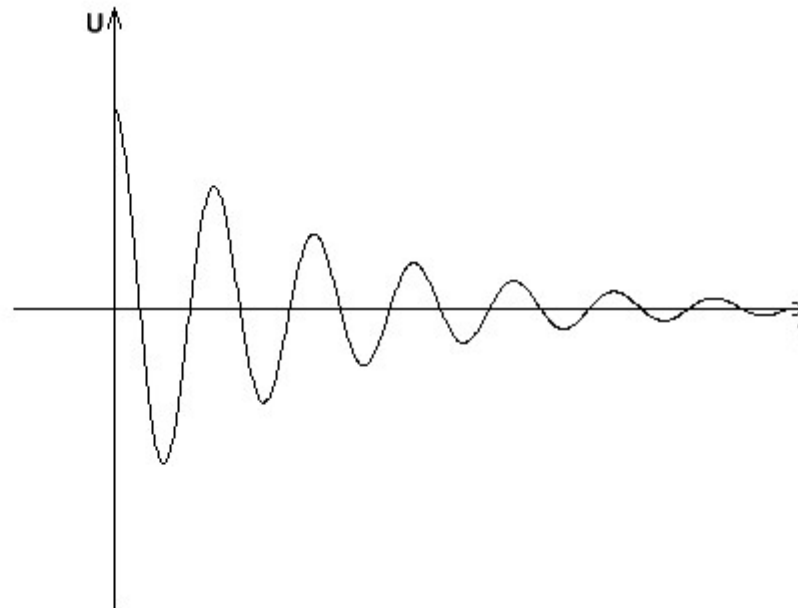
Der [mathematische Anhang](#) enthält Formeln für die Berechnung von Spannung, Ladung und Stromstärke zu einem beliebigen Zeitpunkt.

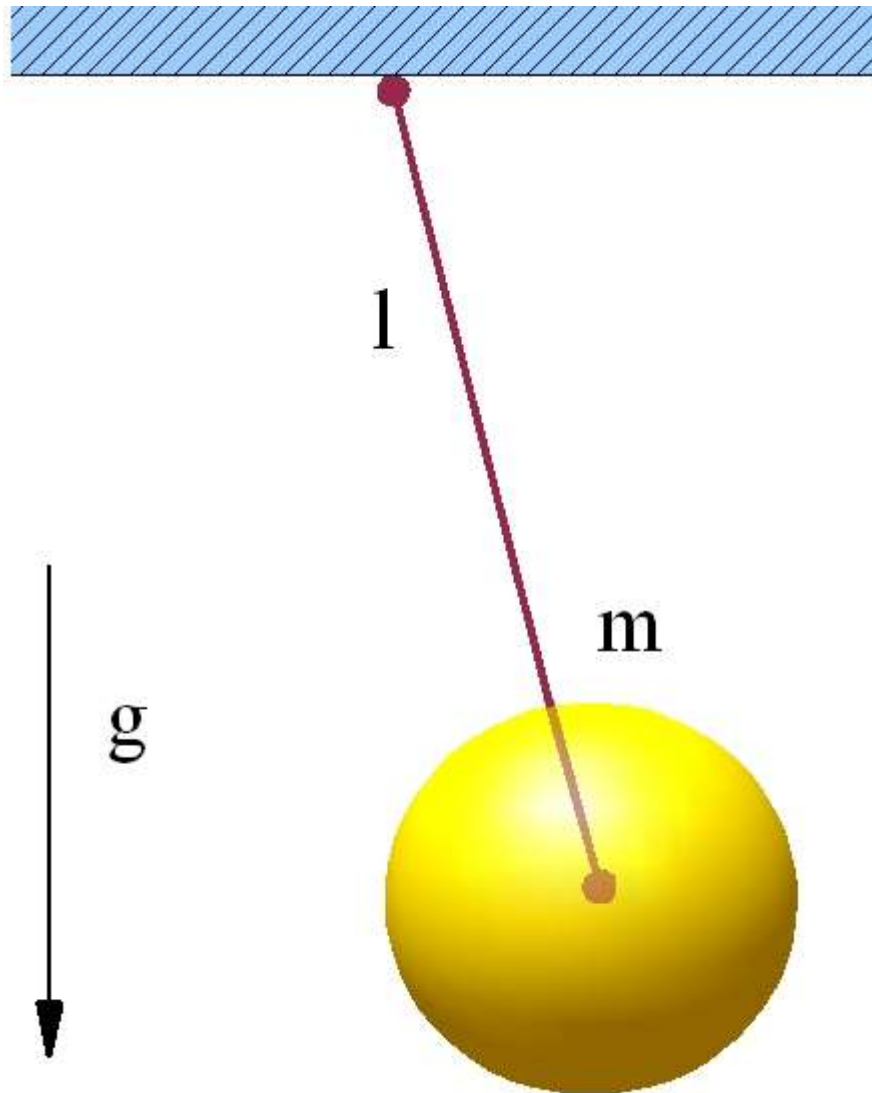
.. und ein paar Gleichungen dazu:

$$U(t) + RC\dot{U}(t) + LC\ddot{U}(t) = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$U(t) = U_0 e^{-\delta t} \left[\cos(\omega t) + \frac{\delta}{\omega} \sin(\omega t) \right]$$





Mathematisches Pendel:

- Faden masselos
- Pendelmasse in einem Punkt konzentriert
- keine Reibung
- Frequenz nur von l abhängig

Kleine Amplituden: Harmonische Schwingung [\[Bearbeiten\]](#)

Für kleine Winkel gilt die [Kleinwinkelnäherung](#):

$$\sin(\varphi) \approx \varphi.$$

Durch Substitution ergibt sich somit eine [lineare Differenzialgleichung](#) zweiter Ordnung der allgemeinen Form $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, deren allgemeine Lösung $x(t) = u \sin(\omega_0 t + \phi)$ zur Schwingungsgleichung führt.

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \cdot \varphi(t) = 0$$

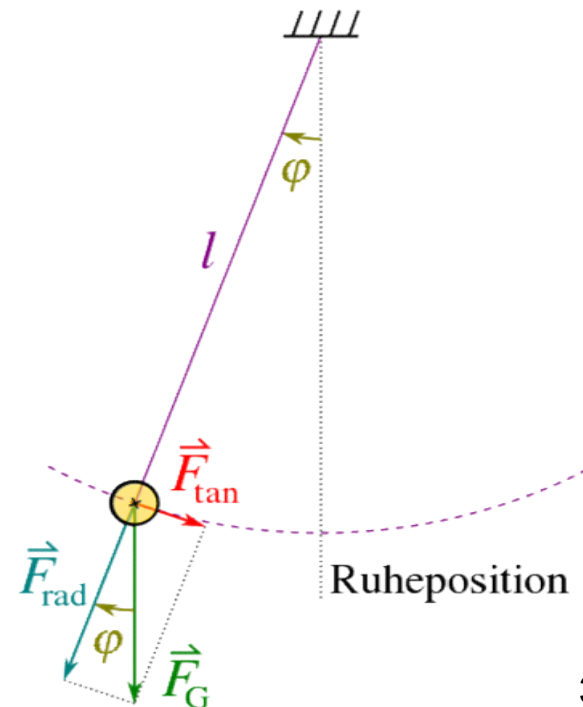
$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \varphi_0\right)$$

Hierbei bezeichnen $\hat{\varphi}$ die Winkelamplitude und φ_0 den Nullphasenwinkel zum Zeitpunkt $t = 0$. Darüber hinaus sind die [Eigenkreisfrequenz](#) ω_0 und die zugehörige Periodendauer T_0 ersichtlich.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

[Wikipedia: Mathematisches Pendel]



Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik

- bekannt als symbolischen Methode oder komplexe Wechselstromrechnung
- Inhalt: Berechnung von Wechselstromerscheinungen genau so einfach wie für Gleichstrom

$$U(t) + RC\dot{U}(t) + LC\ddot{U}(t) = 0$$



Karl Rudolf Steinmetz
1865 - 1923

<http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=-k34uuxyzKU>

<http://www.youtube.com/watch?v=-bHQfyiFPss>

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Simple_harmonic_motion_animation.gif

"Er war ein intimer Freund von Marconi und Edison geworden. Ihm klopfte er Morsezeichen aufs Knie, um sich besser verständigen zu können. (er blieb) zeitlebens ein großes Kind: Er ließ sich ein Palmenhaus bauen, und weil er selber ein Krüppel war, sammelte er da die häßlichsten Kriechtiere, Fische und Vögel, die er finden konnte. Er ließ über den Spiegeln seines Hauses Quecksilberdampflampen anbringen, damit die Besucher sich als grüne Wasserleichen mit violetten Lippen sehen sollten. Er lud seine Türklinken elektrisch auf und veranstaltete "Blitztage", zerstörte in seinem Hochspannungslabor Häuser aus Pappe.

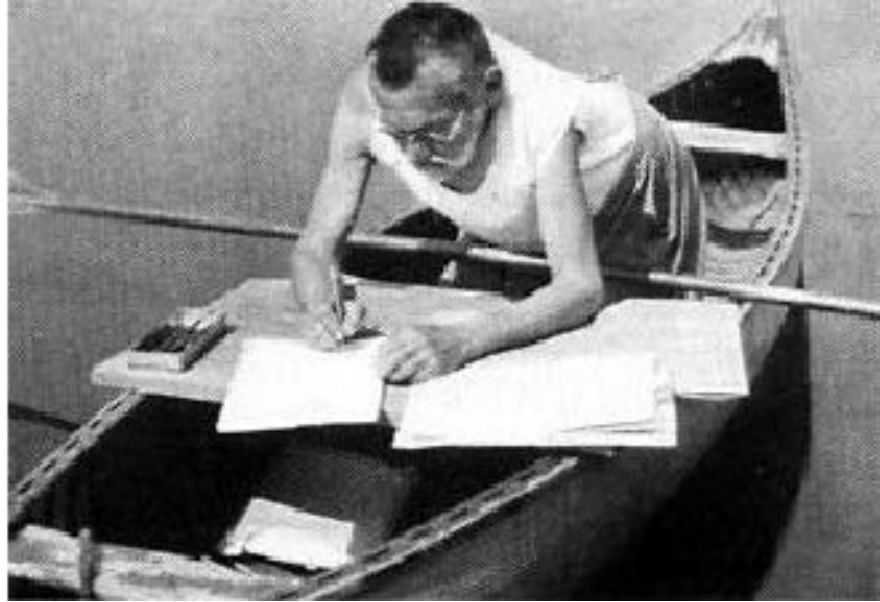
Anton Zischka: *Pioniere der Elektrizität*, C. Bertelsmann Verlag, Gütersloh 1958

http://www.aec.at/de/archives/festival_archive/festival_catalogs/festival_artikel.asp?iProjectID=8880

Karl Rudolf Steinmetz (1887): Über unwillkürliche selbstreziproke Korrespondenzen im Raum, die bestimmt werden durch ein dreidimensionales Linearsystem von Flächen der n -ten Ordnung. Dissertation, Universität Breslau

Charles Proteus Steinmetz(1893): Die Anwendung komplexer Größen in der Elektrotechnik, *Elektrotechnische Zeitschrift*, XIV.Jg., 597-599, Berlin

Charles Proteus Steinmetz: Application of complex numbers in Electrical Engineering. Vortrag in Chicago



Eulersche Formel

Die **eulersche Formel** bzw. **Eulerformel**, in manchen Quellen auch **eulersche Relation** genannt, bezeichnet die Gleichung:

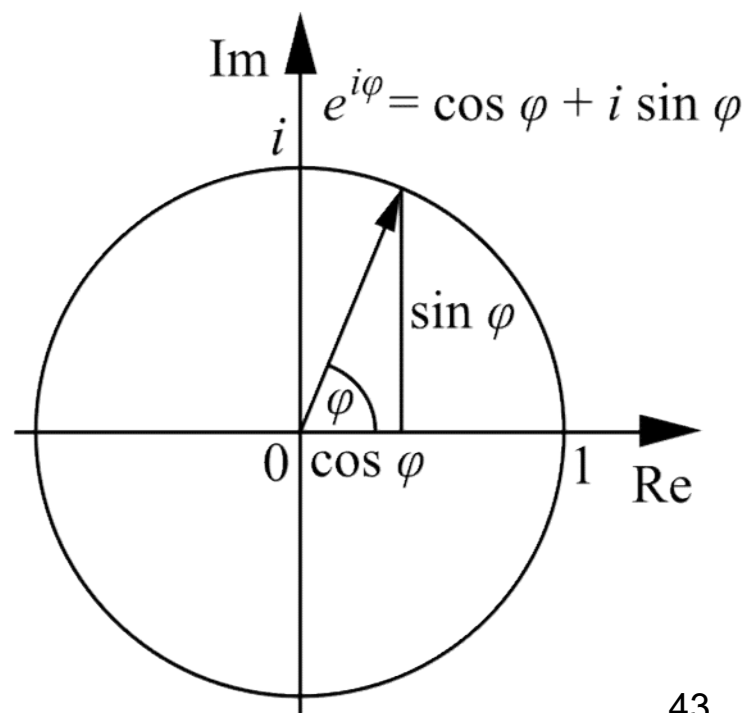
$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi).$$

Die eulersche Formel bildet das Bindeglied zwischen den [trigonometrischen Funktionen](#) und den [Exponentialfunktionen](#) mittels [komplexer Zahlen](#). Die Konstante **e** bezeichnet dabei die [eulersche Zahl](#) (Basis der [natürlichen Exponentialfunktion](#) bzw. des [natürlichen Logarithmus](#)) und die Einheit **i** die [imaginäre Einheit](#) der komplexen Zahlen.

Im Fall, dass $\varphi = \pi$ wird, vereinfacht sich die oben genannte Formel zu der Gleichung

$$e^{i\pi} = -1,$$

die man auch als **eulersche Identität** (siehe unten) bezeichnet.



Die Mathematiker sind sich ziemlich einig, wenn es um die Frage nach der schönsten und elegantesten Gleichung bzw. Formel der Mathematik geht. Ihre Antwort lautet fast immer:

$$e^{i\pi} = -1$$

π – eine unendliche Geschichte – irrational, transzendent und fantastisch



“ Die ersten 500 Ziffern/Nachkommastellen der Kreiszahl pi:

3.

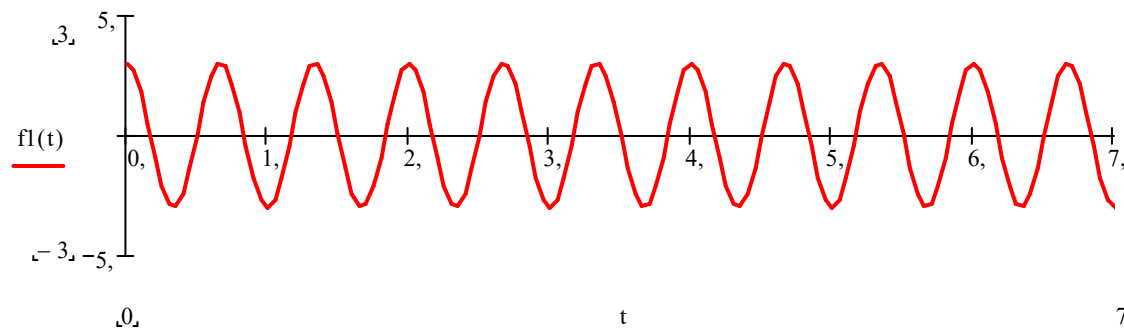
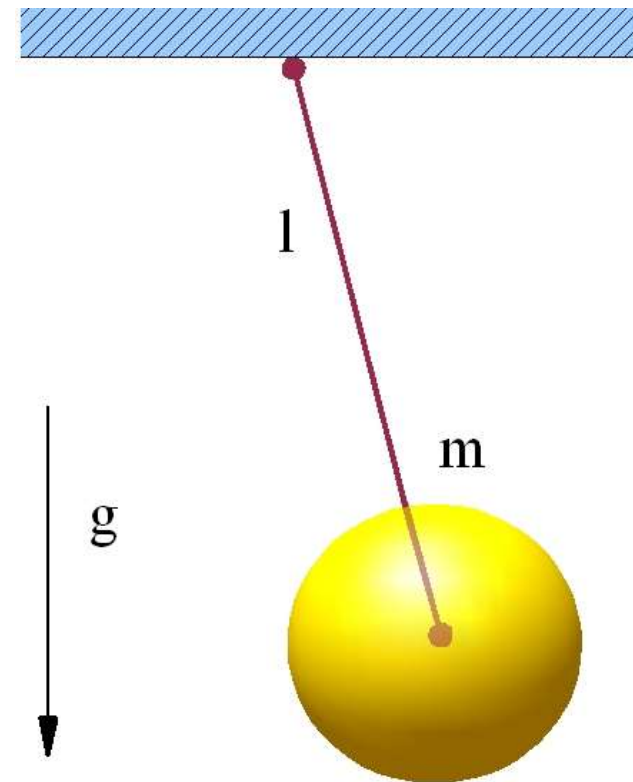
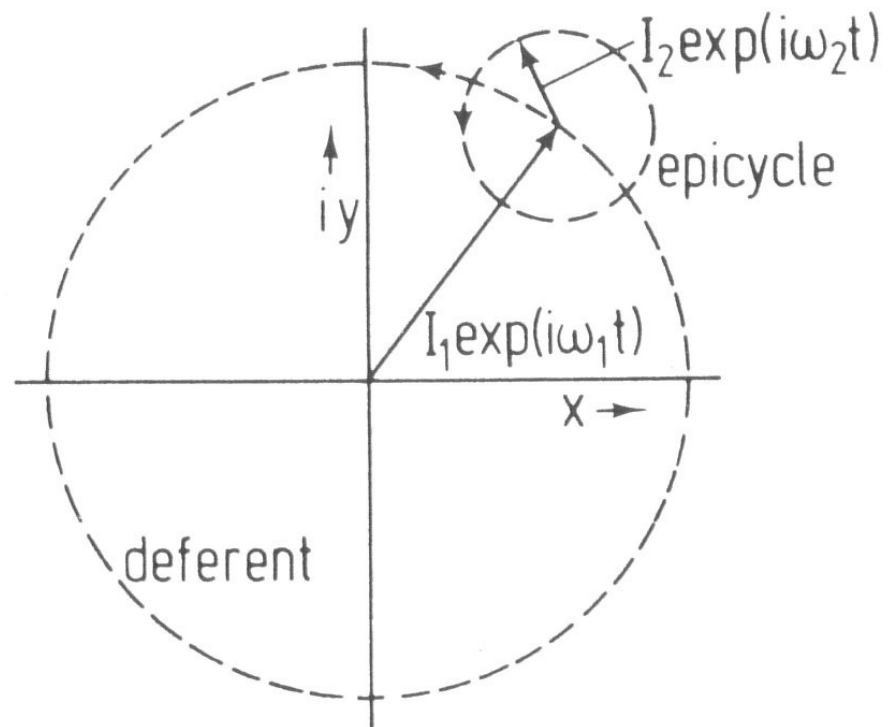
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944
5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 8214808651 3282306647
0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559
6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165
2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360
0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036 5759591953
0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724
8912279381 8301194912 ...

Für die Aufnahme in den Club/Verein der **Freunde der Zahl Pi** reicht schon das Memorieren der ersten **100 Stellen von pi**. Wer noch mehr Stellen von Pi sucht, hier gibt es von **1000 Stellen nach dem Komma bis zu einer Millionen Stellen** alles was des Zahlenfreundes Herz begehrt.

- um statt mit $\cos(\omega t)$ mit $\exp(j\omega t)$ widerspruchsfrei rechnen zu können, müssen 2 (!) konjugiert komplexe Zeigergrößen verwendet werden

$$\left. \begin{array}{l} e^{+j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \end{array} \right\} + \quad \text{ergibt} \quad \cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

- Übergang von harmonischen Funktionen zu Exponentialfunktionen mit imaginärem Argument bedeutet Verwendung eines ω -Paares $(+\omega, -\omega)$
- „technische“ $(0 < \omega < \infty)$ und „mathematische“ $(-\infty < \omega < +\infty)$ Frequenzen



Ein Gulden wird mit einem Zinssatz von 100% p.a. und kontinuierlicher Verzinsung angelegt.

Am Jahresende beträgt das Guthaben

2, 7182818 Gulden.

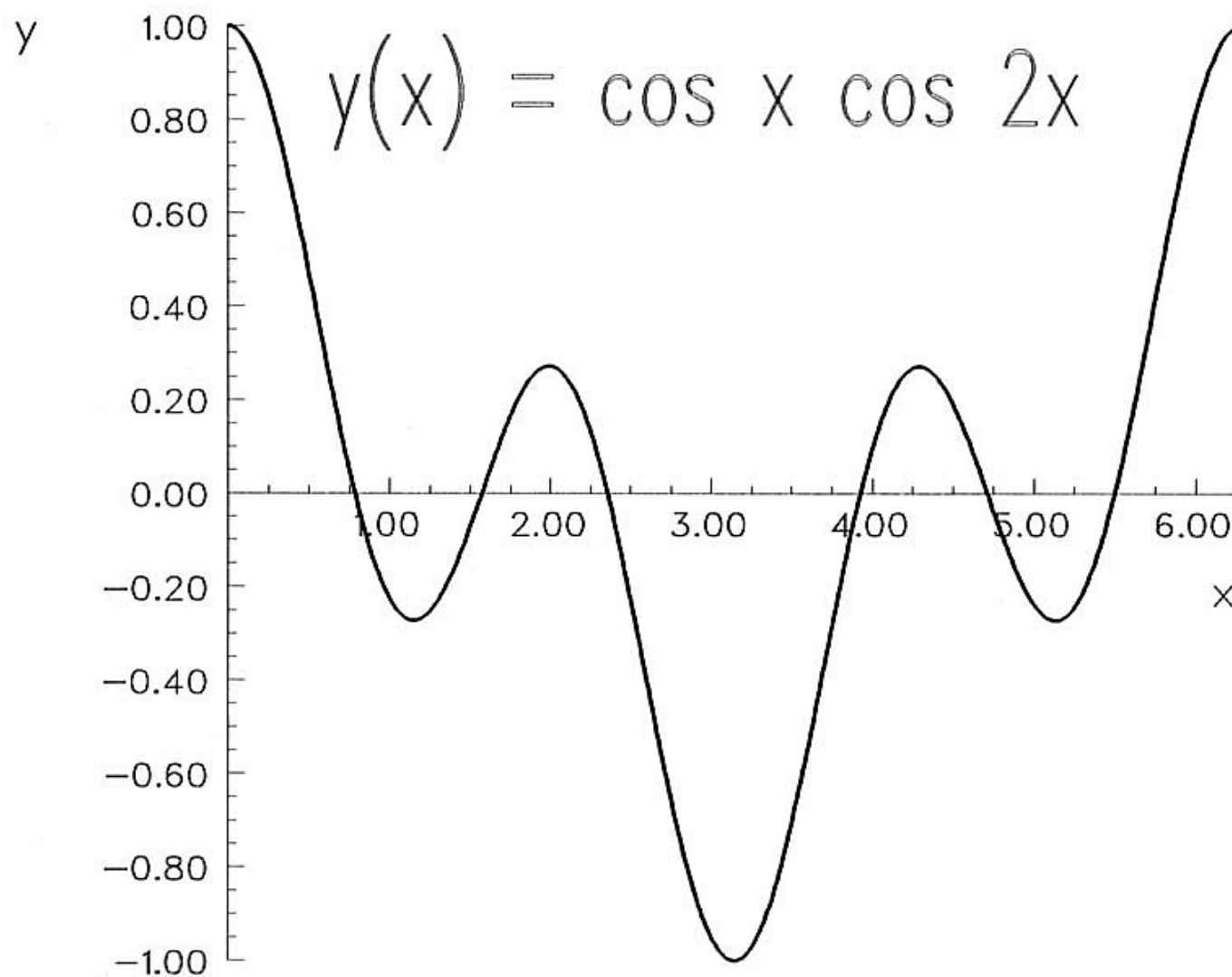
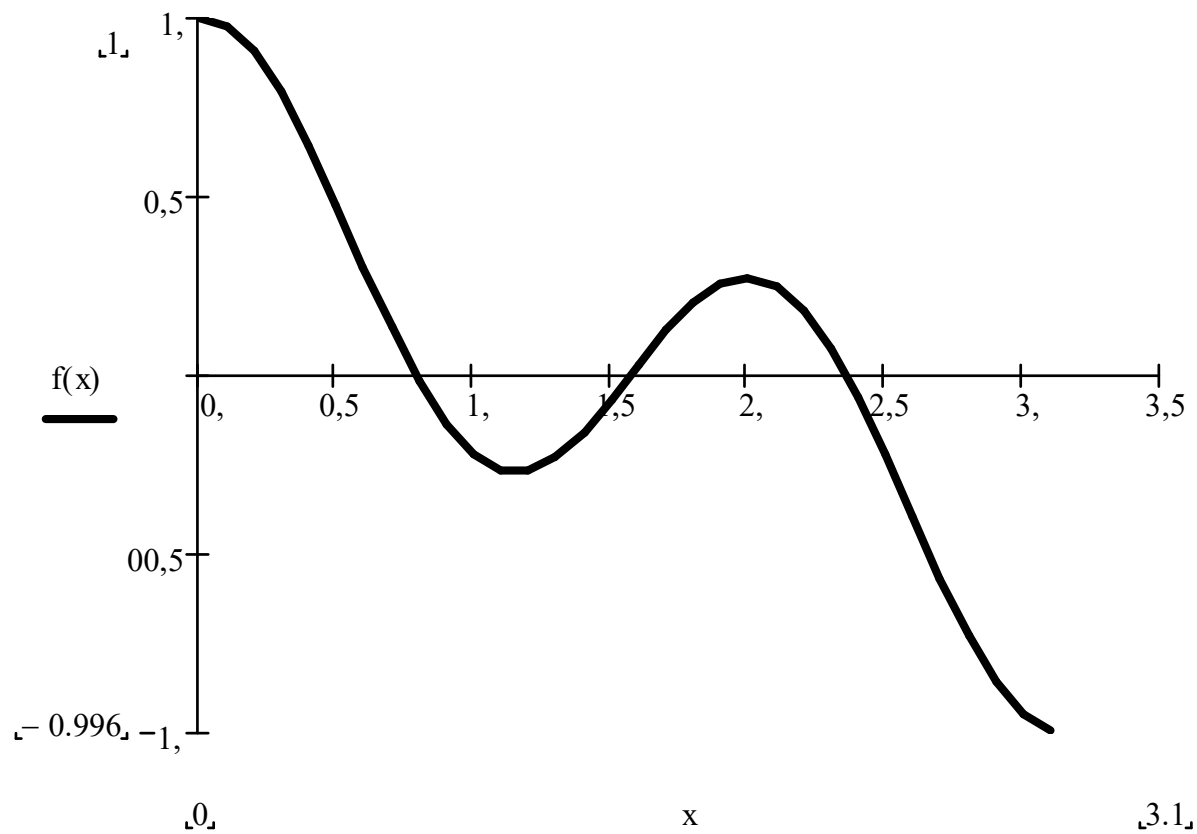


Abb. 1: Formel (2-26) [sv0-3]

$$f(x) = \cos(x) \cos(2x)$$



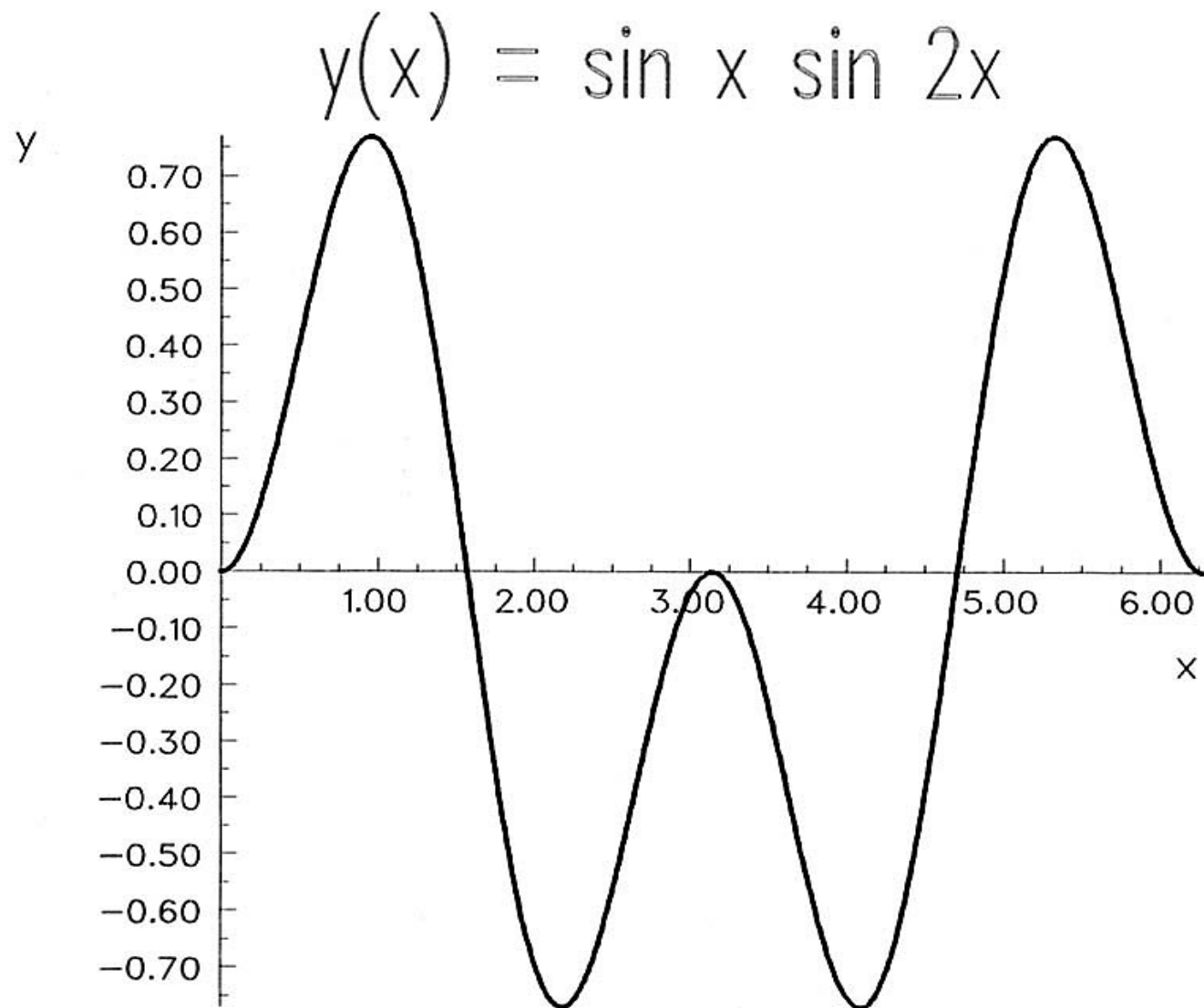
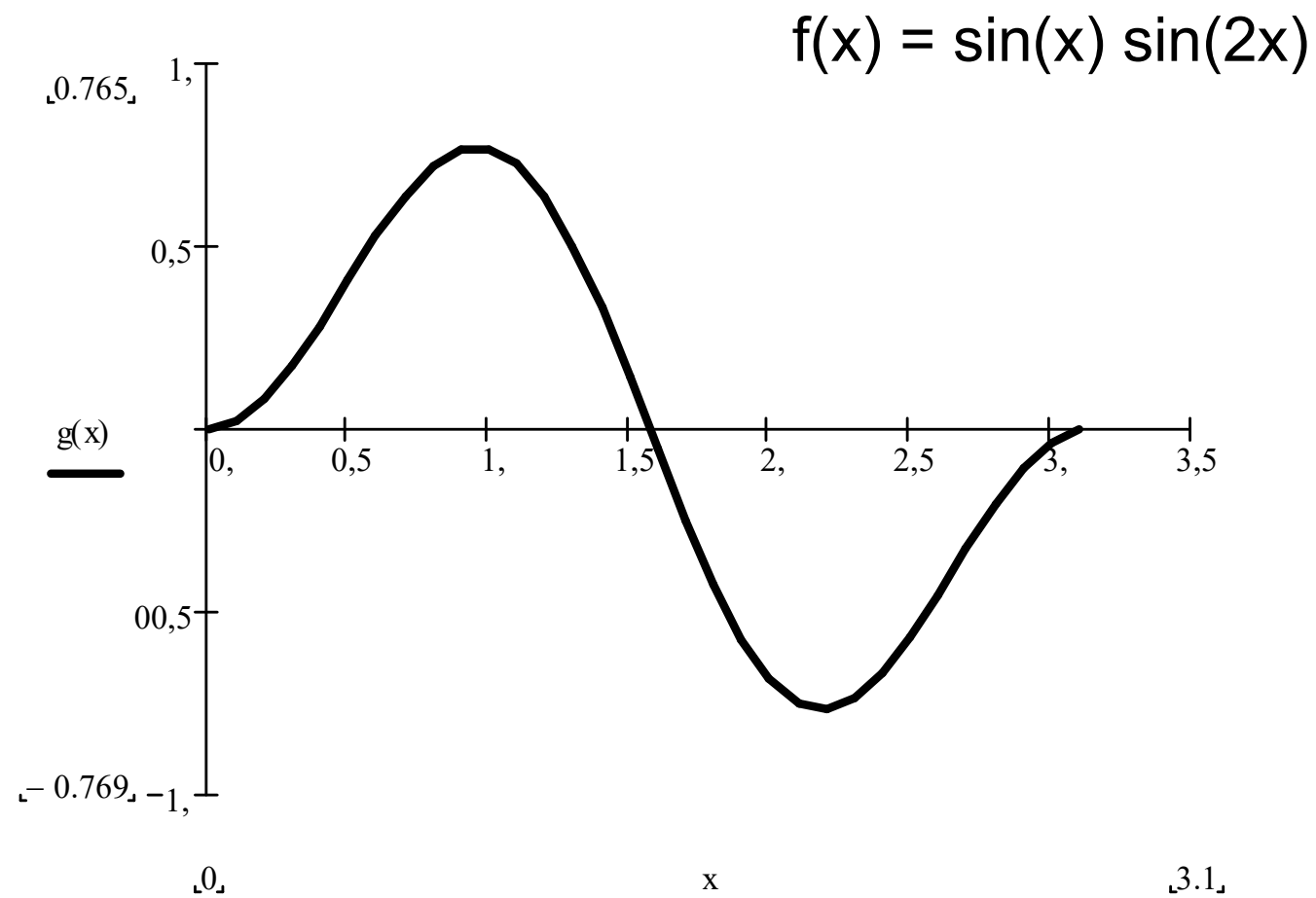


Abb. 2: Formel (2-27) ~~(5x0-3)~~



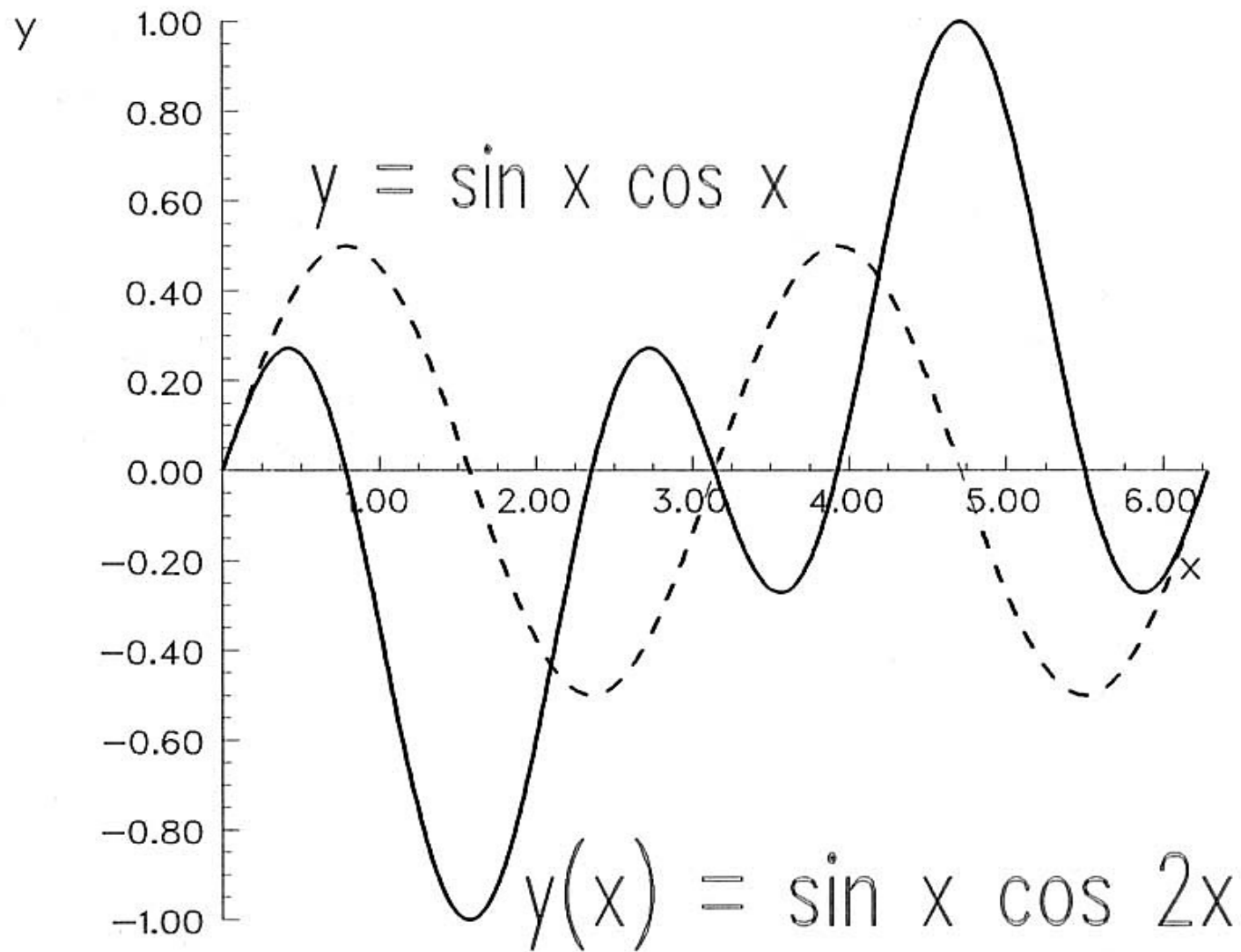
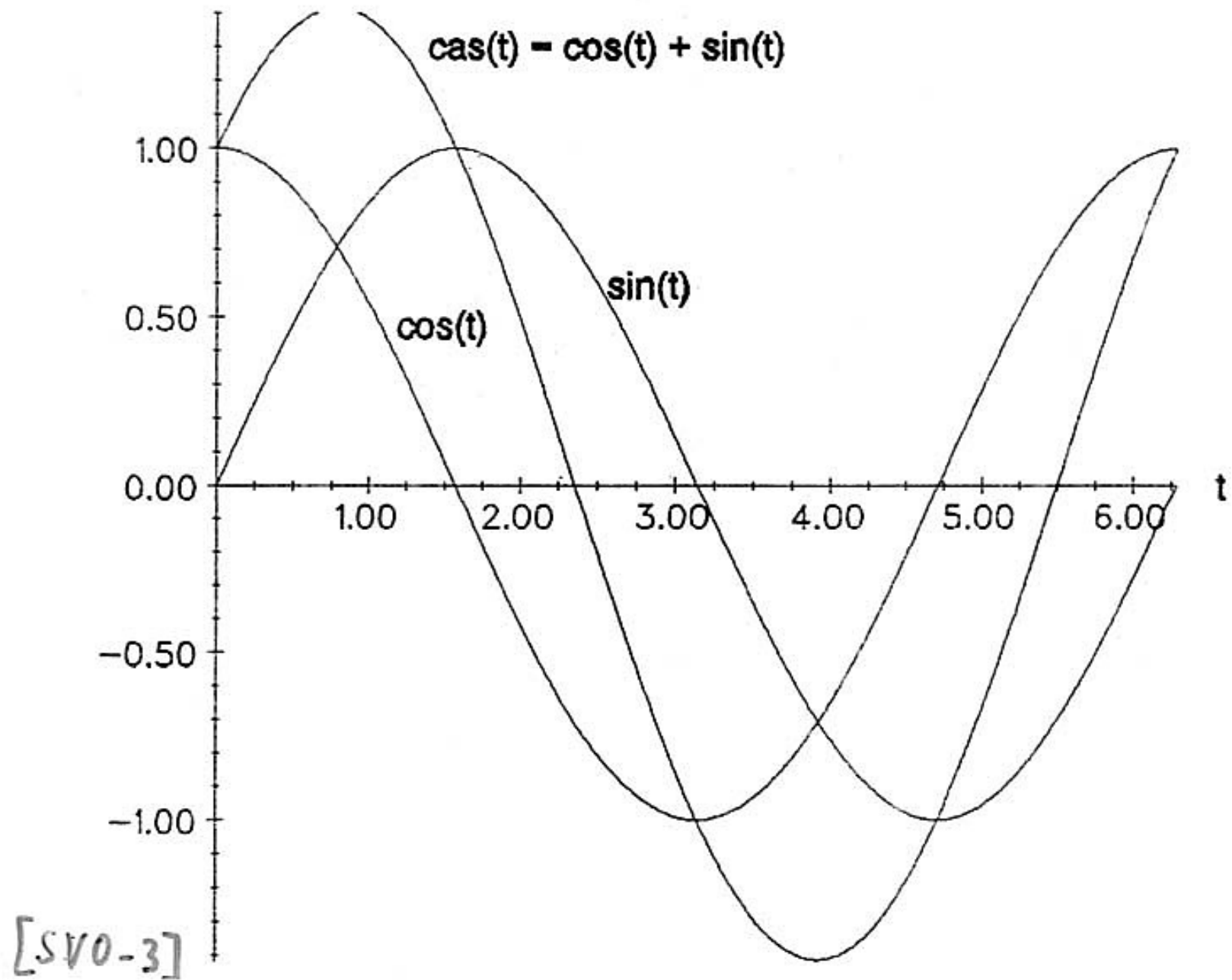
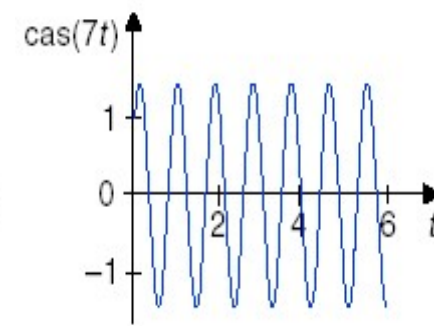
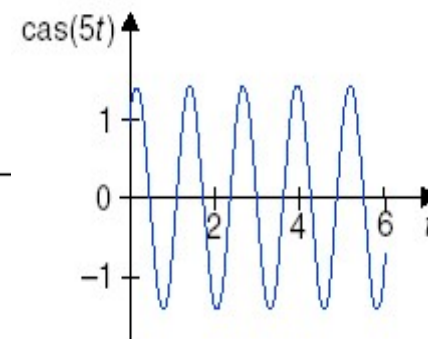
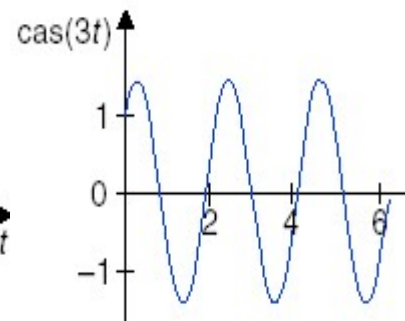
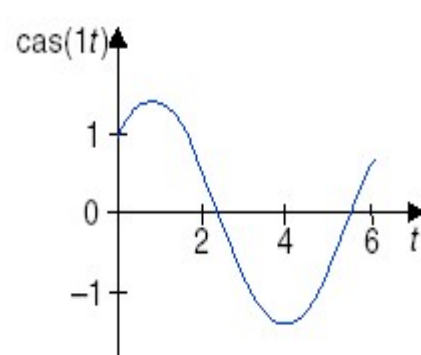
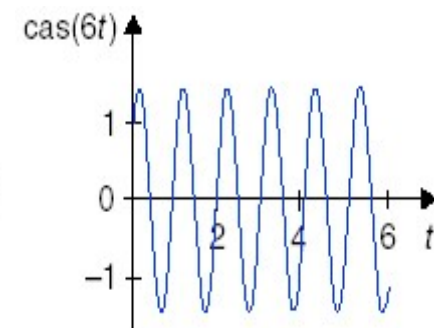
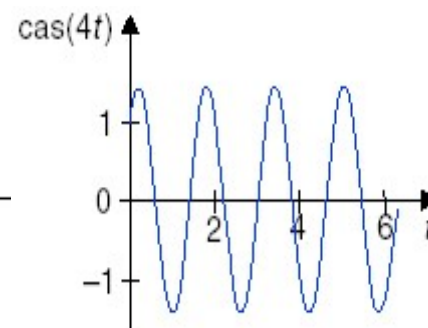
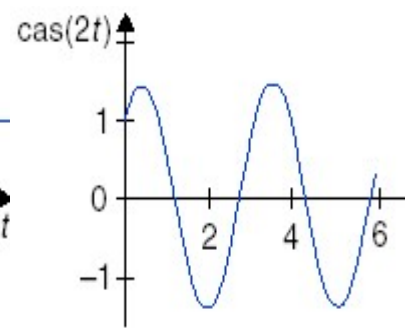
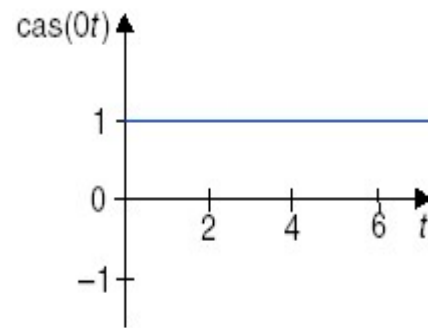


Abb. 3: Formel (2-28) [sv0-3]





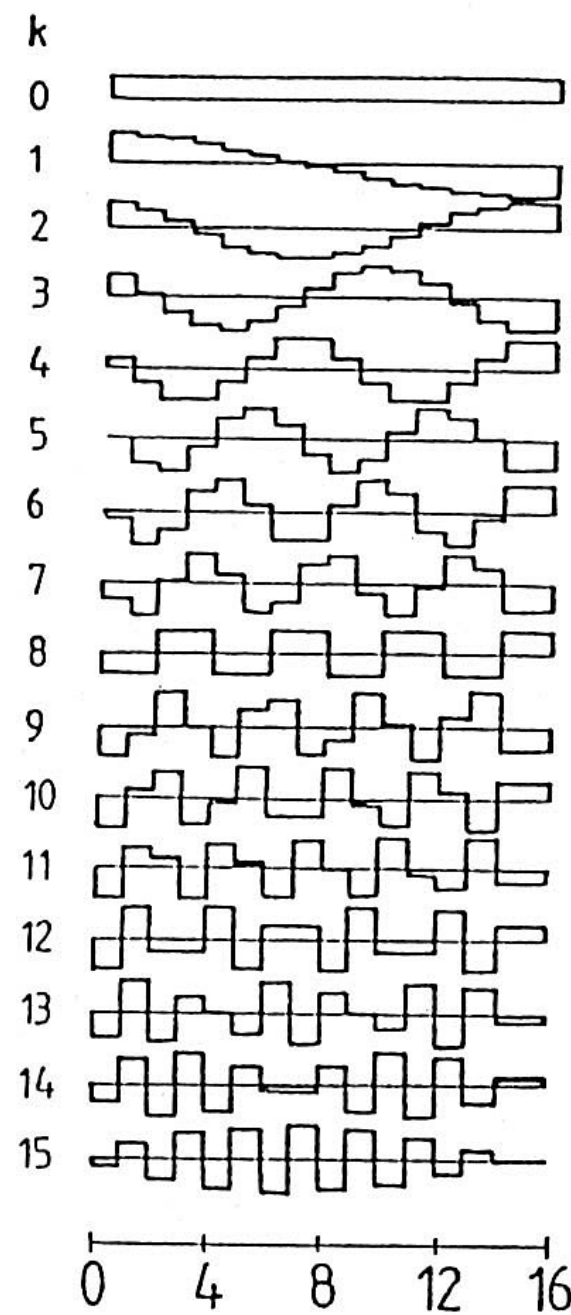
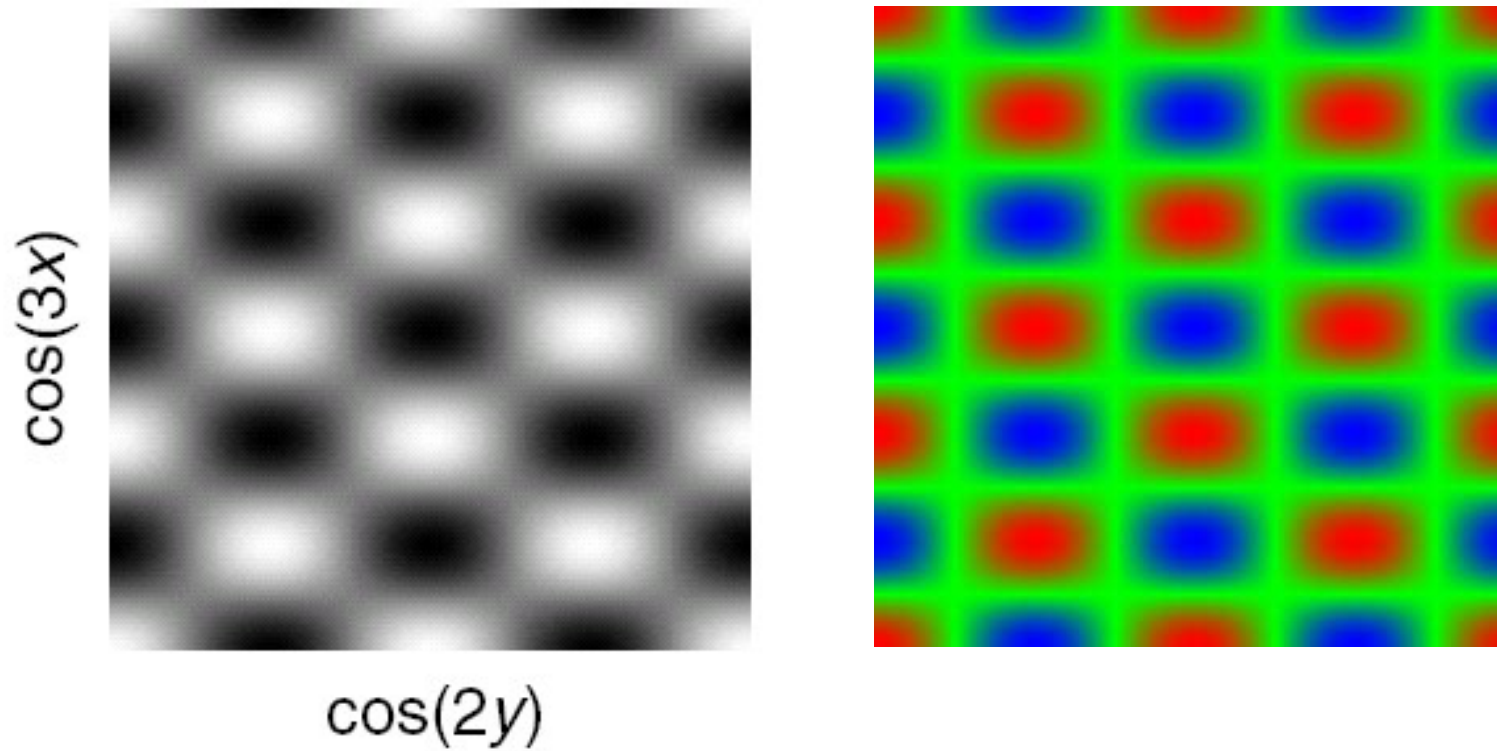


Abb.: Quantisierte
Cosinusfunktionen [Besslich, SV0-3]

4 Orthogonalität und orthogonale Funktionen

- 4.1 Orthogonalität und Näherung
- 4.2 Harmonische Funktionen
 - 4.2.1 Eindimensionale Funktionen
 - 4.2.2 Zweidimensionale Funktionen
- 4.3 Nichtharmonische Funktionen
 - 4.3.1 System der Blockpulse
 - 4.3.2 System der Walshfunktionen
 - 4.3.3 Haar-Funktionen
 - 4.3.4 Slant-Funktionen



Zweidimensionale harmonische Funktion
 $\cos(3x) \cos(2y)$

