

## Música fractal: um painel de técnicas de geometria fractal aplicadas em música

Marcelo Queiroz (USP)  
Fabio Kon (USP)

**Resumo:** Este artigo apresenta um painel de trabalhos de autores diversos que utilizam conceitos e técnicas relacionados à geometria fractal aplicados à música. São tratadas técnicas de análise de obras musicais voltadas à detecção de padrões fractais em repertório musical pré-existente, bem como técnicas que utilizam construções fractais na síntese de elementos musicais, tais como notas, acordes, melodias e ritmos, ou sinais sonoros. As principais contribuições são apresentadas resumidamente, bem como algumas ferramentas de *software* relacionadas ao tema. Ao final do texto são expostas perspectivas futuras de pesquisa envolvendo música e fractais.

**Palavras-chave:** Geometria fractal. Modelos matemáticos. Análise musical. Composição fractal.

**Title:** Fractal Music: A Panel of Techniques in Fractal Geometry Applied to Music

**Abstract:** This article presents an overview of works by several authors who use concepts and techniques from fractal geometry applied to music. It covers analysis techniques of musical works aimed at identifying fractal patterns in pre-existing musical repertoire, as well as techniques that use fractal building blocks in the synthesis of musical elements such as notes, chords, melodies and rhythm, or sound signals. The article presents the main contributions, as well as related software tools. Finally, the text presents some future perspectives in research involving music and fractals.

**Keywords:** Fractal Geometry. Mathematical Models. Musical Analysis. Fractal Composition.

O interesse pelo estudo de relações entre música e fractais surgiu na década de 1970, pouco após a publicação dos primeiros trabalhos de Benoît Mandelbrot sobre dimensão fracionária, ruídos  $1/f$  (onde  $f$  representa a frequência) e autossimilaridade (MANDELBROT, 1967. MANDELBROT; VAN NESS, 1968). Os trabalhos de Richard Voss e John Clarke (1975, 1978) trazem análises de sinais de áudio de fragmentos musicais os mais diversos, todos revelando as mesmas características de ruídos  $1/f$ , o que sugere o caminho inverso: o da composição musical (estocástica) a partir da informação contida nos mesmos ruídos. A discussão chegou a um público mais amplo através de revistas de divulgação científica, como a *Scientific American* (GARDNER, 1978), e do livro *The Fractal Geometry of Nature* (MANDELBROT, 1983).

Esses trabalhos atraíram a atenção de músicos e cientistas e, a partir de então, diversos autores propuseram as mais variadas associações entre conceitos musicais e fractais para fins de análise e composição (BOLOGNESE, 1983. SCHROEDER, 1986. DODGE; BAHN, 1986. HSÜ; HSÜ, 1990. GOGINS, 1991. LEACH; FITCH, 1995. MADDEN, 1999. BIGERELLE; IOST, 2000. JOHNSON, 2003, entre muitos outros). As associações incluem a transposição de construções geométricas (como a curva de Koch ou o triângulo de Sierpinsky) para o plano melódico, o uso de ruídos com características fractais na geração de parâmetros musicais, tais como altura, duração, intensidade e timbre, e o uso de sistemas dinâmicos, sistemas de funções iteradas e atratores para a construção de partituras completas.

Nas seções seguintes, cada uma destas técnicas será abordada de forma resumida, começando-se pelas abordagens analíticas (Seção 2), que se ocupam da detecção de padrões fractais em repertório pré-existente, para, em seguida, considerar as técnicas de síntese (Seção 3), que utilizam mapeamentos de construções fractais na geração de elementos musicais. Os termos Análise e Síntese são utilizados aqui sempre em sentido amplo, ou seja, para se referirem à extração de informação e à geração de informação, respectivamente. A Seção 4 apresenta uma lista de programas e ferramentas de *software* relacionados a música e fractais, com uma breve discussão de cada um deles, e a Seção 5 apresenta algumas considerações finais e perspectivas de pesquisa futura na área.

É importante ressaltar que este artigo tem como objetivo apresentar uma visão geral da área de fractais em música e não pretende, de forma alguma, abranger exaustivamente todos os trabalhos já realizados na área. Não se tratou aqui de apresentar uma revisão sistemática da literatura, mas sim de apresentar ao leitor uma visão geral da área. Em particular, alguns trabalhos não foram incluídos ou discutidos detalhadamente, seja

por exigirem uma exposição muito longa, ou por apresentarem um recorte ou uma aplicação excessivamente específicos. Além disso, limitou-se propositalmente o escopo a trabalhos que mencionam fractais de forma explícita; sendo assim, não foram incluídos trabalhos que mencionam apenas conceitos relacionados, tais como autossimilaridade ou sistemas caóticos, sem apresentar uma conexão direta com a geometria fractal. O leitor interessado poderá encontrar muitos outros textos de caráter geral sobre o assunto (BERAN, 2004. CHAPEL, 2003. CHIROLLET, 2002. DARBON, 2006. JOHNSON, 2003. MADDEN, 1999. MIRANDA, 2001. MOORE, 1990).

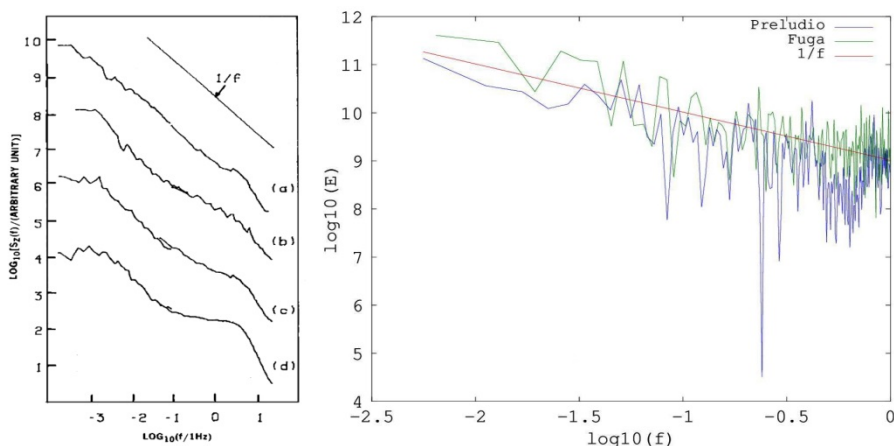
## **Análise musical e fractais**

O uso do computador na análise sonora e musical abrange diversas disciplinas e aplicações, como a acústica musical (análise tímbrica de instrumentos, análise de características acústicas de recintos), a transcrição musical (produção de uma partitura ou equivalente a partir de um registro de áudio), a transcrição textual (reconhecimento da fala), a mineração de dados (reconhecimento de estilos, classificação de gêneros) e a *performance* interativa (sincronização da *performance* de um músico com processamento e síntese sonoros em tempo real), entre outros.

Os primeiros trabalhos envolvendo análise sonora e fractais se devem a Voss e Clarke (1975, 1978), e têm importância seminal para a pesquisa nesta área. Neles observou-se, pela primeira vez em gravações e transmissões de música, uma característica comum a certos processos estocásticos, tais como a energia residual de válvulas, semicondutores, membranas nervosas, manchas solares e as flutuações do nível de água do rio Nilo, quando observados por longos períodos de tempo: a característica de que o espectro de potência (ou de energia) destes sinais decai em proporção inversa à frequência (ou seja, segundo uma função  $1/f$ , onde  $f$  representa a frequência).

Mais especificamente, os autores calcularam o espectro de potência de sinais  $x(t)$  (aqui  $t$  representa o tempo, e  $x(t)$  a amplitude instantânea do sinal) consistindo de gravações de execuções de obras de diversos compositores, entre eles Johann Sebastian Bach, Elliot Carter, Milton Babbitt, Karlheinz Stockhausen e Scott Joplin, bem como longas seqüências de transmissão radiofônica de estilos diversos, como música clássica, jazz e blues, rock e até mesmo noticiários. Todas apresentavam a característica de que o espectro nas baixas frequências (abaixo de 1Hz) decaía conforme a função  $1/f$  (VOSS; CLARKE, 1978: 260. Cf. figura 5, reproduzida na Fig. 1 abaixo, à esquerda). Tal observação é facilitada quando os valores de frequência ( $f$ ) e de energia ( $E$ ) são representados em escala logarítmica, de tal

forma que a relação  $E=1/f$  se torna  $\log(E)=\log(f)$ , ou seja, a queda se assemelha a uma função linear. Um exemplo análogo aos de Voss e Clarke foi recriado aqui a partir da análise da execução do primeiro *Prelúdio e Fuga*, BWV846, do *Cravo Bem Temperado* de J. S. Bach, na execução de Rosalyn Tureck, em 1953 (Fig. 1, à direita).



**Fig. 1:** Esquerda: Espectro de baixa frequência relacionado a transmissões radiofônicas: (a) música clássica, (b) rock, (c) jazz e blues, (d) noticiário (extraído da figura 5 de VOSS; CLARKE, 1978: 260). Direita: Espectros de baixa frequência da obra *Prelúdio e Fuga* n. 1, BWV846, do *Cravo Bem Temperado* de J. S. Bach, gravada em 1953 por Rosalyn Tureck.

É interessante observar que essas frequências baixas (abaixo de 1Hz) refletem variações de longo prazo ( $> 1$  segundo) do sinal de áudio, entre elas o perfil dinâmico e o perfil melódico, que variam muito mais lentamente do que a forma de onda propriamente dita. O conteúdo espectral entre 1Hz e 10Hz está associado principalmente à estrutura rítmica da peça, enquanto o conteúdo harmônico propriamente dito influencia a parte do espectro correspondente à faixa audível (dos 20Hz aos 20kHz), que naturalmente não segue uma função do tipo  $1/f$ , mas sim distribuições relativas a cada linguagem musical, como a tonalidade (ou ausência dela) e os padrões de escrita melódica correspondentes.

Uma interpretação do que significa esta distribuição  $1/f$  pode ser obtida por comparação com dois processos estocásticos muito conhecidos: o ruído branco e o

movimento browniano.

O ruído branco pode ser aproximado por um sinal de tempo discreto  $x(n)=Z_n$ , para todo instante  $n$  inteiro, onde  $Z_n$  são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal, média 0 e variância 1. Seu espectro de potência pode ser calculado como a transformada de Fourier de sua função de autocorrelação, definida pela expressão  $\bar{x}(n)=\sum x(m)x(n-m)=\sum Z_m Z_{n-m}$ , e que em virtude da independência das variáveis  $Z_n$  tem como valor esperado  $E[\bar{x}(0)]=1$  e  $E[\bar{x}(k)]=0 \forall k \neq 0$ , que corresponde à função conhecida como delta de Dirac discreto (definida pelas condições  $\delta(0)=1$  e  $\delta(k)=0$  sempre que  $k \neq 0$ ). Assim, o espectro de potência de  $x(n)$  é a transformada de Fourier do delta de Dirac, que é uma função constante, ou em outros termos, se comporta como a função  $1/f^d$  com  $d=0$ . É interessante observar que o termo ruído branco vem da analogia com a luz branca que também possui espectro constante, pois ela contém todas as frequências visíveis em igual intensidade.

O movimento browniano, associado neste contexto ao ruído vermelho, pode ser aproximado por uma versão discreta (passeio aleatório) dada pela expressão  $x(n)=x(n-1)+Z_n$ , para todo  $n$  inteiro, onde  $Z_n$  são variáveis aleatórias independentes e com distribuição uniforme. Seu espectro de potência  $|X(\omega)|^2$  em função da frequência angular  $\omega$  pode ser calculado a partir da expressão  $x(n)=x(n-1)+Z_n$  como  $X(\omega)=e^{j\omega}X(\omega)+Z(\omega)$ , ou seja  $X(\omega)=Z(\omega)/(1-e^{j\omega})$ , onde  $Z(\omega)$  é o espectro do ruído branco (que tem média igual a uma constante  $K$ ). Para  $\omega$  pequeno  $1-e^{j\omega}$  é aproximadamente igual a  $\omega$ , de onde  $|X(\omega)|^2 \approx (K/\omega)^2$ , ou seja, o espectro de potência  $|X(\omega)|^2$  cai com o quadrado da frequência. Lembrando que a frequência  $f$  em Hertz satisfaz  $2\pi f=\omega$ , temos que  $|X(f)|^2 \approx (K/2\pi)^2 (1/f^2)$ , ou seja, o espectro de potência decai como uma função  $1/f^2$  para frequências baixas.

Um ruído com espectro  $1/f$  também é conhecido como ruído rosa (pela sua caracterização espectral intermediária entre o ruído branco  $1/f^0$  e o vermelho  $1/f^2$ ) e tem a propriedade de possuir iguais quantidades de energia em qualquer faixa do espectro logarítmico de frequência. Assim, por exemplo, entre duas frequências  $f_1$  e  $f_2$  que formem um intervalo musical de oitava ( $f_2/f_1=2$ ), a energia total será

$$\int_{f_1}^{f_2} \frac{1}{f} df = \ln f_2 - \ln f_1 = \ln \left( \frac{f_2}{f_1} \right) = \ln(2) = \text{constante}, \text{ independentemente da região}$$

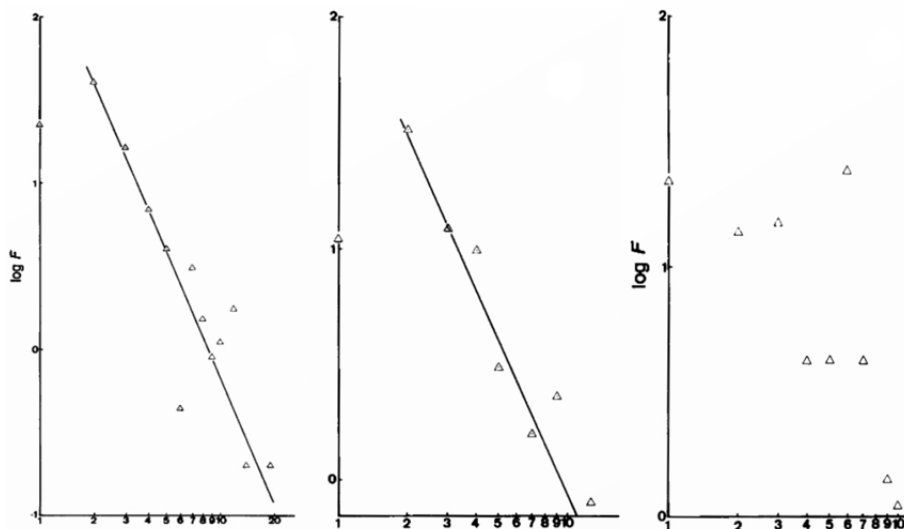
considerada do espectro, o mesmo valendo para qualquer outro intervalo musical.

Este comportamento do espectro pode ser relacionado com a memória do processo estocástico: o espectro da forma  $1/f^0$  está relacionado a um processo em que cada novo valor é gerado de forma independente de seu histórico (processo sem memória), enquanto o espectro da forma  $1/f^2$  está associado a um processo que acumula todos os valores anteriores (afinal  $x(n)=x(0)+Z_1+Z_2+\dots+Z_n$ ), e a memória do processo é infinita. Pode-se demonstrar que um espectro da forma  $1/f$  está associado a um processo em que novos valores dependem dos anteriores de acordo com um decaimento exponencial  $e^{-\alpha t}$  (aqui  $\alpha$  é uma constante e  $t$  representa o lapso de tempo em relação ao presente). Em termos de memória do processo, pode-se falar que a memória é infinita, porém a dependência é maior em relação ao passado recente do processo (correspondente a  $t \approx 0$ ).

As observações de Voss e Clarke não se limitaram à amplitude dos sinais  $x(t)$ , mas também compreendem a frequência instantânea  $f(t)$ , estimada por eles através da contagem de ocorrências da condição  $x(t)=0$  (zero-crossings). Foi observado o mesmo padrão de decaimento  $1/f$  do espectro dos sinais  $f(t)$  em todos os casos analisados. A medida de frequência instantânea, intuitivamente ligada à ideia de melodia, impulsionou os autores a aplicar geradores de ruído  $1/f$  à composição automática; este tópico será retomado na Seção 3.

Uma abordagem analítica substancialmente diferente, proposta por Hsü e Hsü (1990), é estudar as frequências relativas com que notas ou intervalos musicais aparecem em uma composição. Estes autores argumentam que determinadas peças e/ou compositores utilizam (implicitamente ou inconscientemente) uma distribuição que obedece a uma expressão da forma  $F=K/I^D$ , onde  $F$  é a frequência de aparição do intervalo musical  $I$  (medido em número de semitons),  $K$  é uma constante e  $D$  é interpretado como a dimensão fractal da peça (cf., p.ex., BERAN, 2004, seção 3.2). Os autores analisam partituras (e não gravações em áudio como Voss e Clarke) de peças para piano de Bach, Mozart, Stockhausen - nomeadamente, *Invenção* n. 1, em Dó maior, BWV 772, de Bach; *Sonata*, em Fá maior, KV 533, de Mozart e *Capricorn*, de Stockhausen - e também canções populares, contando as frequências de intervalos entre notas sucessivas (separadamente para mão direita e esquerda), e obtêm valores de  $D$  (e  $K$ ) por regressão linear a partir dos pares  $(I, F)$  observados. Especificamente são considerados os valores  $\log(I)$  e  $\log(F)$ , que devem obedecer à expressão  $\log(F)=\log(K)-D \cdot \log(I)$ , que é linear em  $D$ . Os valores de  $D$  assim obtidos são em geral fracionários, como  $D=2,4184$  para a obra BWV 772 de Bach ou  $D=1,7322$  para a obra KV 533 de Mozart, ao passo que a distribuição de intervalos na peça *Capricorn* de Stockhausen não se ajusta bem a uma reta (HSÜ; HSÜ, 1990: 940. Cf. figura 1,

reproduzida na Fig. 2 abaixo). Os autores concluem destas análises que peças tonais como as de Bach e Mozart e as canções populares analisadas possuem estrutura fractal, enquanto a peça de Stockhausen não possuiria a mesma estrutura.

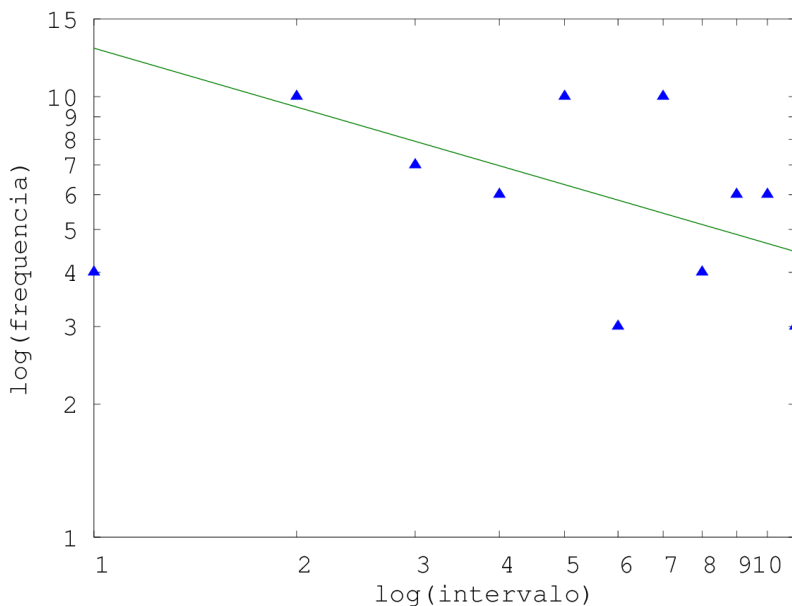


**Fig. 2:** Distribuição dos intervalos em 3 peças: (esquerda) BWV 772 de Bach, (centro) KV 533 de Mozart e (direita) *Capricorn* de Stockhausen. Imagem extraída do original de Hsü e Hsü (1990: 940, figura 1).

É interessante notar que os autores observam desvios significativos dos valores medidos em relação ao modelo linear, como a relativa infrequência do semitom (valores 1 nos eixos horizontais da Fig. 2) e do trítono (6 semitons) e a abundância de intervalos de quinta (7 semitons) e oitavas (12 semitons), desvios estes atribuídos a preferências estéticas daqueles compositores. Já no caso da composição de Stockhausen a distribuição não permite uma regressão linear razoável, o que segundo os autores se deve à “notável deficiência de terças maiores e excesso extremo de trítonos” (sic), que seriam (mais uma vez segundo estes autores) “os responsáveis pela atonalidade da música moderna”.

Poder-se-ia contra-argumentar através de outra explicação natural (mas não vislumbrada no artigo de Hsü e Hsü), que corresponde a reconhecer o fato (histórico) de que os primeiros compositores trabalhavam em um contexto tonal que, por construção,

privilegiava 7 notas de uma escala diatônica versus 12 notas da escala cromática. Isso naturalmente introduz uma distribuição desigual de intervalos, com uma abundância de segundas maiores, terças maiores e menores, e quartas e quintas justas, em detrimento de segundas menores ou trítonos. Tomando, por exemplo, um trecho diatônico de duas oitavas (notas sem acidentes entre o  $Dó_3$  e o  $Dó_5$ , por exemplo) e contando a quantidade de intervalos de segunda menor ( $F_1$  = frequência de intervalos de 1 semitom), de segundas maiores ( $F_2$  = frequência de intervalos de 2 semitons) e assim por diante até os intervalos de sétima maior ( $F_{11}$ ), obtém-se o vetor de frequências  $F=[4,10,7,6,10,3,10,4,6,6,3]$ . Aplicando o método da regressão linear a estes dados (ignorando o valor  $F_1=4$  referente a 1 semitom, como Hsü e Hsü) pode-se estabelecer uma relação fractal com  $D=0,4422$  e  $K=12,874$ , ilustrada pela linha tracejada na Fig. 3.



**Fig. 3:** Aproximação fractal da sequência de intervalos da escala diatônica.

A aproximação revela as mesmas nuances observadas em relação aos intervalos



deficitários (uníssono = 1 semitom e trítono = 6 semitons) e em excesso (quarta = 5 semitons e quinta = 7 semitons), e seria ainda mais rica e informativa se levasse em conta também fatores históricos e estéticos, considerando restrições usuais da escrita melódica tonal, como a predominância de intervalos de segundas e terças e a compensação de saltos intervalares maiores (por grau conjunto em movimento contrário). Já em relação à escrita de Stockhausen, pode-se dizer que existe uma intencionalidade em se abandonar o cânone da escrita diatônica e buscar construções que tornem a distribuição de notas e intervalos menos previsível. Ao invés de corroborar a visão de Hsü e Hsü, estes argumentos evidenciam o fato de que tais modelos de regressão expressam características intencionais e, até certo ponto, planejadas pelo compositor.

Esta abordagem diferencia-se da de Voss e Clarke principalmente por operar sobre um conjunto pequeno (vetor de frequências dos intervalos) obtido por redução das peças analisadas e por eliminar a dimensão temporal da análise. Muito provavelmente, os mesmos padrões  $1/f$  de Voss e Clarke seriam observados tanto nas sequências temporais formadas pelas alturas (que são análogas à frequência instantânea  $f(t)$  em função do tempo) quanto nas sequências de intervalos entre notas consecutivas (o que corresponderia a uma versão discretizada da derivada  $\frac{\partial f(t)}{\partial t}$  da frequência instantânea).

Um mapeamento entre análise musical redutiva e o conceito de autossimilaridade em geometria fractal foi proposto pelos mesmos autores um ano mais tarde (HSÜ; HSÜ, 1991). Nesse novo trabalho, são consideradas a sequência temporal de notas de uma partitura e suas reduções obtidas pela filtragem das notas de índices múltiplos de  $k$ , para  $k=2,3$ , etc. Assim são geradas partituras com metade das notas ( $k=2$ ), um terço das notas ( $k=3$ ) e assim por diante. Os autores se referem a estas versões filtradas como *reduções fractais* e ressaltam o fato de que elas apresentam versões suavizadas do mesmo perfil original, porém não chegam a formalizar a relação deste procedimento com o conceito de autossimilaridade. Em termos da teoria de processamento de sinais, o procedimento para obtenção destas versões filtradas é análogo a um processo de sub-amostragem, que pode introduzir rebatimentos (*aliasing*) no domínio da frequência, mas em princípio não modifica substancialmente o perfil do sinal no longo prazo (perfil este determinado pela porção inicial do espectro, correspondente às frequências mais baixas).

Em 1995, Jeremy Leach e John Fitch buscaram uma forma automática de análise estrutural inspirada no trabalho de Lerdahl e Jackendoff para música tonal (LERDAHL; JACKENDOFF, 1983). Um dos objetivos desta análise é construir uma árvore de eventos que represente simultaneamente diversos níveis de redução da peça original e que permita

reconhecer a importância estrutural de cada evento (LEACH; FITCH, 1995). Ao invés de considerar todas as regras de classificação de Ler Dahl e Jackendoff (como a posição métrica de cada evento e o contexto harmônico), a análise é baseada apenas em perfis de mudança: mudanças de valores rítmicos (relações entre durações), mudanças de altura musical (intervalos) e mudanças de escala musical (relações entre subconjuntos da escala cromática de 12 notas), entre outros. Através da análise destes parâmetros pode-se criar uma hierarquia onde a importância de um evento é dada pela quantidade de mudanças introduzidas por aquele evento. A ideia é ilustrada no fragmento inicial do tema da *Sinfonia* n. 40 de Mozart e, posteriormente, é aplicada em composição automática (mais detalhes na Seção 3).

Tendo em vista a classificação automática de música em relação ao gênero, Bigerelle e Iost retomam o método de análise de Voss e Clarke, considerando o espectro dos sinais de áudio correspondentes (BIGERELLE; IOST, 2000). Este trabalho apresenta dois métodos distintos para o cálculo da dimensão fractal  $d$  dos sinais (o expoente na expressão  $1/f^d$ ), o método da variação e o método ANAM (método da autocorrelação normalizada média), e apresenta medições da dimensão  $d$  para amostras de música de concerto, música eletrônica, *heavy metal*, *jazz*, noturnos de Chopin, rock progressivo, quartetos de cordas, música para relaxar, *rock'n'roll*, música sinfônica, música tradicional francesa e música *punk*. Após constatar sobreposições nos valores de dimensão fractal destas gravações, os autores propõem uma classificação de gêneros baseada em uma análise multifractal, que calcula uma sequência de valores de  $d$  por regressão linear de diferentes trechos do espectro. Utilizando-se 10 medições de  $d$  para cada amostra foi possível classificar os diversos gêneros através do teste estatístico de Duncan.

Outra pesquisa que utiliza diversas medidas da taxa de decaimento do espectro para fins de análise e classificação (MANARIS et al., 2003) parte de registros simbólicos (arquivos MIDI) e, para cada música, considera os espectros de diversas sequências: altura (*pitch*), classe de altura (*pitch class* ou nome da nota), durações, altura  $\times$  duração, intervalos melódicos, intervalos harmônicos, bigramas e trigramas (agrupamentos de dois e três valores) melódicos e harmônicos e intervalos de ordem superior (intervalos de intervalos e construções análogas). São analisadas 220 peças de estilos e gêneros diversos e, para todas elas, são obtidos valores de inclinação entre 0 e  $-\infty$  (valor negativo do expoente em  $1/f^d$ ) e de qualidade entre 0 e 1 (que representa o quão bem os valores se ajustam à curva  $1/f^d$ ) para cada um dos critérios. Para todos os exemplos musicais foram obtidos valores médios de inclinação próximos de -1 (relação  $1/f$ ) e valores médios de qualidade próximos de 0.8 (ajuste excelente), enquanto para exemplos de ruídos branco, rosa e sequências obtidas de

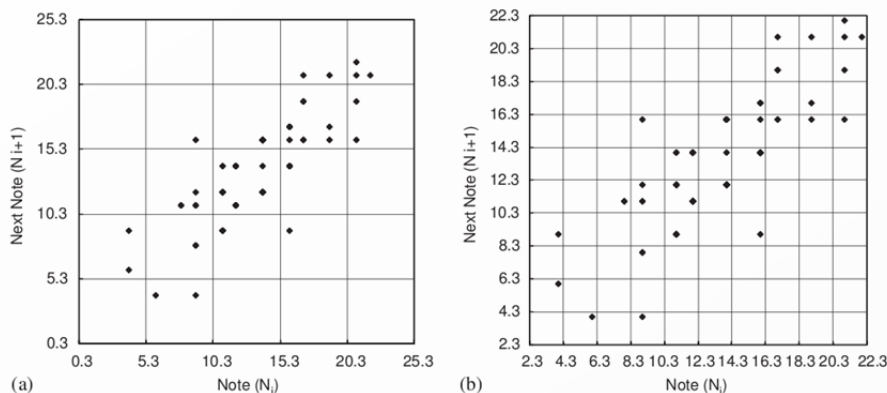
DNA, os valores de inclinação eram substancialmente menos negativos (mais próximos da distribuição  $1/f^0$  que corresponde ao ruído branco, sem memória). Além disso, menciona-se o fato de que em relação ao critério classe de altura as composições dodecafônicas de Schönberg apresentaram inclinação  $-0,3168$ , mais próxima do ruído branco do que do rosa, o que não deveria ser uma surpresa já que se trata de um pressuposto composicional, embora o texto de Manaris não deixe isso claro (na música dodecafônica todas as 12 notas deveriam comparecer com igual frequência, o que corresponderia a uma distribuição  $1/f^0$ ).

Várias outras técnicas para obtenção de medidas fractais de melodias foram utilizadas na análise de música tradicional turca (GÜNDÜZ; GÜNDÜZ, 2005), entre elas diagramas de espalhamento (*scattering diagrams*), estrutura espiral, grafos, diagramas de animais e entropia, que serão discutidos a seguir.

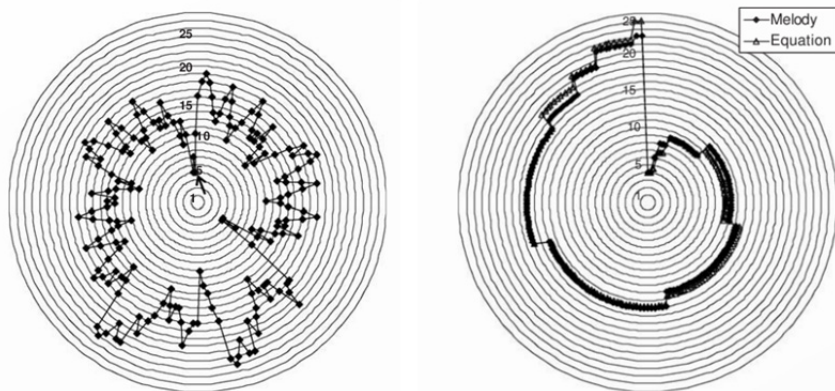
Diagramas de espalhamento (cf. BERAN, 2004, seções 2.4 e 2.7) representam relações entre valores consecutivos em uma sequência, ou no caso deste estudo, entre notas consecutivas em uma canção tradicional, representadas numericamente. Cada sucessão  $N_i \rightarrow N_{i+1}$  de notas na melodia gera um ponto  $(N_i, N_{i+1})$  no diagrama.

Sequências geradas por ruído branco apresentam espalhamento uniforme no diagrama, enquanto melodias compostas por intervalos musicais pequenos apresentarão uma concentração ao longo da diagonal no diagrama. Ruídos  $1/f$  apresentam um espalhamento com distribuição gaussiana ao redor da diagonal. Diagramas de espalhamento podem ser utilizados para se obter aproximações da dimensão fractal da sequência a partir da razão entre o número de quadrados que contém os pontos do diagrama e o número total de quadrados utilizados numa dada discretização do plano melódico. Os autores apresentam como ilustração um par de diagramas para a canção *Bana Bir Aşk* de Erol Sayan (GÜNDÜZ; GÜNDÜZ, 2005: 571. Cf. figura 4, reproduzida na Fig. 4 abaixo), para a qual a dimensão obtida foi 0,5.

O raio de giro ( $R_G$ ) é um conceito emprestado da análise de polímeros e está relacionado ao ângulo formado pela diagonal e pela reta obtida por regressão linear dos pontos do diagrama. No mesmo exemplo, esse raio foi calculado como  $R_G=0,766$ . Outra medida utilizada nesse trabalho é a aproximação das quantidades de cada uma das notas presentes na melodia, através de uma representação circular, por uma espiral representada na forma polar como  $r=\beta e^{\theta \cot(\alpha)}$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes,  $\theta$  é o ângulo e  $r$  é o raio. Na mesma melodia do exemplo anterior, o valor de  $\alpha=88,8$  produz a curva com melhor ajuste à representação do diagrama de espalhamento (GÜNDÜZ; GÜNDÜZ, 2005: 575, figura 7. GÜNDÜZ; GÜNDÜZ, 2005: 577, figura 8. Cf. a reprodução de ambas na Fig. 5 abaixo).

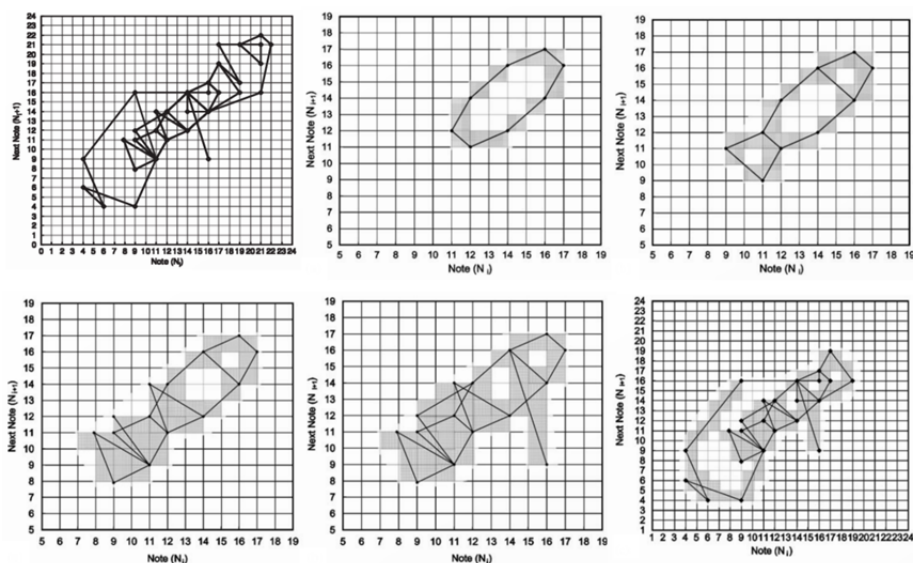


**Fig. 4:** Diagramas de espalhamento para a canção *Bana Bir Aşk*, de Erol Sayan, em duas discretizações diferentes, representadas pelas escalas numéricas nos eixos horizontal e vertical, ambas em semitons: em (a) são usados quadrados de  $5 \times 5$  semitons, e em (b) são usados quadrados de  $2 \times 2$  semitons. Imagem extraída do original de Gündüz e Gündüz (2005: 571, figura 4).



**Fig. 5:** Esquerda: representação circular da melodia original. Direita: representação das quantidades de cada uma das notas e aproximação por um modelo espiral. Imagem extraída do original de Gündüz e Gündüz (2005: 575, figura 7; 577, figura 8).

Outras análises das mesmas canções analisadas por Gündüz e Gündüz incluem a representação dos diagramas de espalhamento como grafos dirigidos, com arestas entre os pontos  $(N_{i-1}, N_i)$  e  $(N_i, N_{i+1})$ , e a inspeção de subgrafos formados por trechos menores da melodia, com a intenção de identificar padrões ou figuras reconhecíveis. Trechos iniciais da melodia *Bana Bir Aşk* com 9, 18, 30, 40 e 80 notas produzem subgrafos (denominados *animais*) que mostram, segundo os autores, uma forma em evolução que estaria associada à canção (GÜNDÜZ; GÜNDÜZ, 2005: 581. Cf. figura 13 e outras, reproduzidas aqui na Fig. 6 abaixo).



**Fig. 6:** Grafo associado à melodia original (no alto à esquerda) e subgrafos referentes a trechos iniciais com 9, 18, 30, 40 e 80 notas (figuras seguintes). Segundo os autores, a sequência acima permite observar a evolução do animal associado à canção. Imagem extraída do original de Gündüz e Gündüz (2005: 581, figura 13; 579, figura 10; 585, figura 16).

Finalmente, medidas de entropia podem ser associadas ao grafo de transição entre notas consecutivas numa melodia. Especificamente, considera-se um grafo com um vértice para cada nota da escala e uma conexão para cada sucessão de notas na melodia

(permitindo-se múltiplas arestas entre os mesmos dois nós). Seja  $p_i$  o número de arestas saindo do nó correspondente à nota  $i$  no grafo; a entropia ( $S$ ) da melodia caracterizada pelo vetor  $p$  (cujas componentes são os valores  $p_i$ ) é definida por  $S(p) = -\sum p_i \log_2 p_i$  e é medida em bits. Na melodia *Bana Bir Áşk* este valor é calculado como 2,57 bits, que pode ser interpretado como o tamanho médio ocupado por cada nota da melodia numa representação compactada ótima (como a codificação de Huffman, que utiliza árvores binárias construídas a partir das frequências observadas de cada símbolo, neste caso a partir das frequências das notas na melodia).

Depois de discutir todas estas formas de representação e análise das melodias, os autores concluem que é possível caracterizar e comparar melodias usando-se estas representações. O artigo não chega a discutir a relevância musical destas análises, nem apresenta um mecanismo para integrar todas estas informações e utilizá-las na comparação das melodias.

Outro trabalho que utiliza a técnica de análise multifractal utiliza expoentes de Hölder e Hurst para a caracterização de melodias (SU; WU, 2006, 2007). Nesse trabalho, o conteúdo melódico e rítmico é transformado em duas sequências não temporais de pontos dispostos em uma linha, onde a posição de um ponto reflete o intervalo melódico ou a diferença de duração em relação à nota anterior. O cálculo do espectro multifractal das melodias é feito através de medidas locais dos aglomerados de pontos obtidos e, para as melodias consideradas (*Gavotte* de Gossec, *Le Cygne* de Saint-Saëns e *Ave Maria* de Gounod), o espectro possui sempre forma parabólica, porém com curvaturas distintas. Segundo os autores, essa é uma característica que poderia ser utilizada na classificação de diferentes estilos de música.

Um livro que apresenta algumas das técnicas de análise discutidas nesta seção é *Fractals in Music: Introductory Mathematics for Musical Analysis* (MADDEN, 1999). Trata-se, segundo o próprio autor, de uma espécie de projeto em aberto, onde muitos tópicos matemáticos são apresentados e poucas análises musicais são oferecidas. Estas serviriam de subsídio para fomentar o interesse em aprofundar a pesquisa em cada um destes tópicos; o próprio autor pretende desenvolver esses tópicos em livros separados e convida o leitor a participar da construção de sua teoria. São particularmente interessantes as críticas escritas a respeito deste livro (BORTHWICK, 2000. QUAGLIA, 2000).

Já em seu *Les Musiques du Chaos*, Nicolas Darbon apresenta uma visão geral das ferramentas matemáticas da teoria do caos e seus relacionamentos, sejam eles metafóricos ou científicos, com a música (DARBON, 2006). Em particular, a 3ª parte, *Fractalisme*,

apresenta conceitos básicos de fractais e discute formas de aplicação à análise e composição musicais.

## Síntese e composição usando fractais

O computador vem sendo usado na composição eletrônica e eletroacústica desde a década de 1950. Uma das primeiras composições algorítmicas foi a *Illiad Suite for String Quartet* resultante dos trabalhos de Lejaren Hiller, entre 1955 e 1957, que programou o computador Illiac da Universidade de Illinois em Urbana-Champaign para gerar a partitura de um quarteto de cordas (HILLER; ISAACSON, 1957). Para tanto, ele utilizou diversas técnicas matemáticas, como sorteios aleatórios simples, sorteios com crivos para implementação de regras de contraponto tradicional, variações de ritmo e timbre em uma mesma nota e cadeias de Markov. A partitura deveria ser então executada por intérpretes humanos.

Outros usos do computador na composição envolviam o processamento de material acústico pré-gravado ou a síntese direta de sinais de áudio usando modelos matemáticos. Esse material poderia ser trabalhado exclusivamente por um compositor humano ou ainda ser submetido a diversas técnicas de composição automática (o que não deixa de ser também uma forma de controle por um compositor/programador humano).

Os trabalhos de Voss e Clarke com síntese de melodias a partir de ruídos  $1/f$  (apresentados na Seção 3) trouxeram a preocupação de como estruturar uma sequência aleatória de tal modo que ela apresente alguma característica que pudesse ser considerada musical. A partir da observação do comportamento de longo prazo dos sinais acústicos parecia natural sugerir que os padrões macroscópicos da composição automática (principalmente alturas, durações e intensidades) imitassem a característica dos espectros  $1/f$  observados no repertório tradicional, sem abrir mão da imprevisibilidade pretendida com os sorteios aleatórios. Para isso, bastaria mapear sequências discretas de ruído rosa (ruído  $1/f$ ) aos parâmetros musicais desejados.

Existem várias maneiras de utilizar geradores aleatórios convencionais (com distribuição uniforme e espectro constante) para gerar ruído rosa. Possivelmente o caminho mais simples é multiplicar o espectro constante do ruído branco por uma função  $1/f$ . Especificamente isso pode ser feito no computador calculando-se a FFT (abreviação de *Fast Fourier Transform* ou Transformada Rápida de Fourier) de um vetor de  $N$  valores aleatórios representando  $k$  segundos de ruído branco, multiplicar cada posição do vetor de

espectro (que representa as frequências  $\frac{1}{k}Hz, \frac{2}{k}Hz, \dots, \frac{N/2}{k}Hz$ ) pelo inverso da frequência correspondente e aplicar a iFFT (inversa da FFT) para se recuperar um sinal no domínio do tempo que terá as mesmas características do ruído rosa. Outra forma é utilizar  $k$  geradores de ruído branco atualizados a diferentes taxas: o primeiro é atualizado a cada amostra, o segundo a cada 2 amostras, e o  $k$ -ésimo a cada  $2^k$  amostras. A soma destes geradores terá o espectro da forma  $1/f$  (GARDNER, 1978. MOORE, 1990).

Voss e Clarke utilizaram um computador PDP-11 para criar melodias aleatórias utilizando diversos geradores (ruídos branco, rosa e vermelho), mapeando os valores gerados em alturas da escala cromática de 12 notas e durações equivalentes a múltiplos inteiros de uma duração mínima (representada pela figura musical de uma colcheia). Exemplos dessas melodias podem ser vistos na Fig. 7.



**Fig. 7:** Melodias geradas por ruído branco ( $1/f^0$ , primeira coluna), ruído rosa ( $1/f$ , segunda coluna) e ruído vermelho ( $1/f^2$ , terceira coluna). Imagem adaptada a partir do original de Voss e Clarke (1978).

Os autores apresentaram essas melodias para centenas de pessoas em nove universidades diferentes e coletaram respostas e opiniões sobre o interesse gerado por elas. Suas conclusões foram de que as melodias brancas ( $1/f^0$ ) eram demasiadamente aleatórias, as melodias vermelhas/Brownianas ( $1/f^2$ ) eram muito simples e as melodias rosas ( $1/f$ ) possuíam um certo equilíbrio entre previsibilidade e surpresa, gerando o resultado

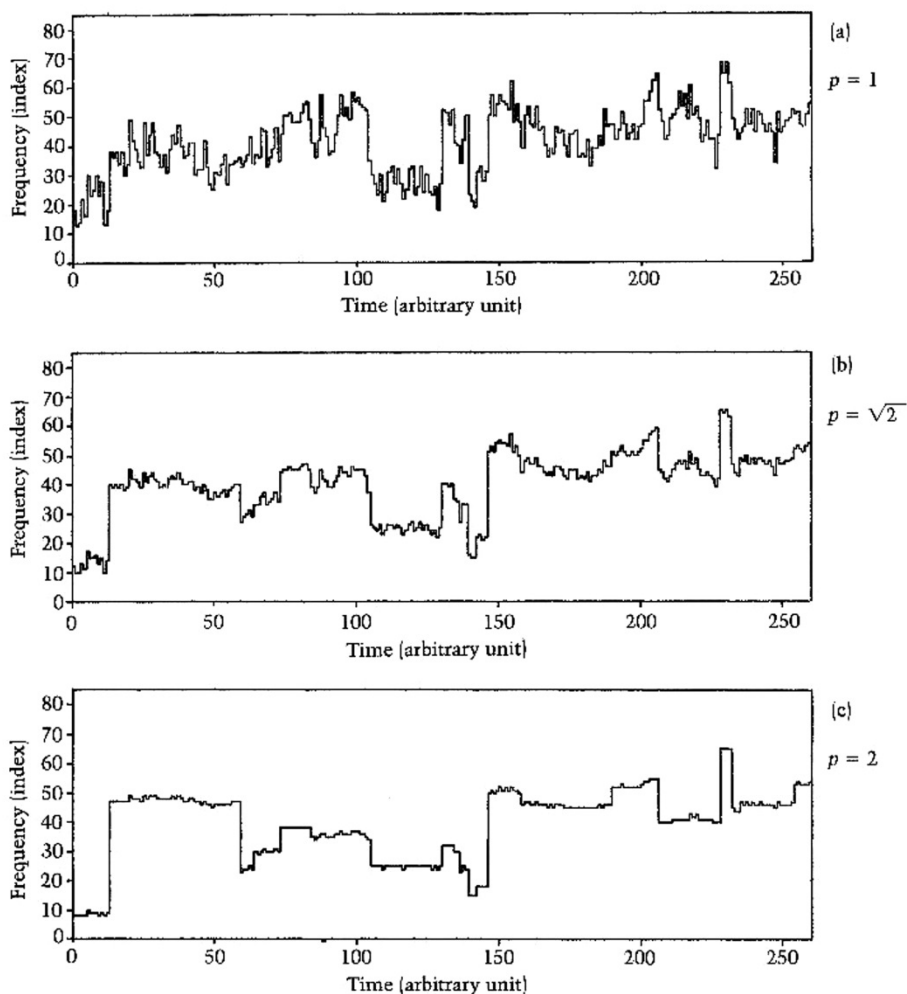


mais interessante para os ouvintes.

Vale a pena ressaltar o fato de que este mapeamento entre os gráficos ou sequências de números gerados aleatoriamente e a sequência de notas na partitura nada tem de natural (no sentido literal de corresponder a algum mapeamento observado na natureza); pelo contrário, esta tradução é completamente arbitrária (também no sentido literal, que não depende de uma lei ou regra pré-estabelecida). Trata-se de uma decisão composicional e que nesse caso se relaciona evidentemente com a própria notação musical ocidental, que representa o tempo no eixo horizontal (da esquerda para a direita) e a altura musical no eixo vertical (de acordo com a posição da nota no pentagrama). Vários outros mapeamentos são possíveis e o próprio trabalho de Voss e Clarke utiliza um mapeamento diferente dos ruídos  $1/f$  para gerar os valores rítmicos do exemplo acima.

O algoritmo para geração de ruído  $1/f$  a partir do lançamento de vários dados com taxas diversas de atualização foi generalizado por Tommaso Bolognesi, através de uma aleatorização da sequência de atualizações dos geradores (BOLOGNESI, 1983). Isso foi feito com a finalidade de quebrar a estrutura binária implícita no algoritmo original. Nele, a cada  $2^k$  amostras todos os geradores são atualizados, o que acarreta uma ruptura brusca da sequência como efeito colateral. Em menor medida existem rupturas a cada  $2^{k-1}$  amostras, quando  $k-1$  geradores são atualizados, e também a cada  $2^{k-2}$  amostras, e assim por diante, por um argumento análogo. Bolognesi propôs que o  $k$ -ésimo gerador continuasse sendo atualizado aproximadamente uma vez a cada  $2^k$  amostras, porém esta decisão seria tomada a cada amostra a partir de um sorteio com probabilidade  $2^{-k}$ . Isto torna mais rara a ocorrência de todos os  $k$  dados serem atualizados simultaneamente, mas preserva a característica do espectro  $1/f$ .

Outra generalização foi a introdução de uma estrutura de pesos aplicada aos resultados dos geradores aleatórios de acordo com a fórmula  $\sum p^i \text{gerador}[i]$ , onde  $p$  é um parâmetro positivo e  $\text{gerador}[i]$  é uma sequência produzida por um gerador pseudo-aleatório de ruído branco. O algoritmo original corresponde a  $p=1$ ; valores maiores de  $p$  suavizam o perfil da sequência gerada (BOLOGNESI, 1983: 30. Cf. figura 6, reproduzida na Fig. 8 abaixo). A coleção de melodias geradas por sorteios ponderados com diferentes valores de  $p$  apresentam uma estrutura de similaridade, porém os espectros destes sorteios não são  $1/f$ .



**Fig. 8:** Melodias geradas pelo algoritmo de Bolognesi com atualizações aleatórias e pesos crescentes. Imagem extraída do original de Bolognesi (1983: 30, figura 6).

Outra contribuição de Bolognesi foi o estudo de voos de Levy (*Levy flights*) para a geração de melodias com a característica de autossimilaridade, que possuem grau de

concentração de sua estrutura hierárquica controlado por um parâmetro  $D$  (que representa a dimensão fractal do voo). Especificamente, uma trajetória discreta em um espaço  $n$ -dimensional é construída a partir de um ponto inicial  $x$ , e saltos de tamanho  $r$  são permitidos de acordo com uma função de densidade de probabilidade  $r^{-D}$ . Os valores das diversas coordenadas do vetor  $x$  podem ser mapeados em parâmetros distintos, como altura musical, duração ou intensidade, mas também podem ser utilizados para controlar diversas vozes de uma composição polifônica. O autor utiliza este processo para gerar composições a 4 vozes em estilo de coral homofônico (com todas as durações e intensidades constantes).

Charles Dodge compôs diversas peças musicais de inspiração fractal durante a década de 1980 e, em relação à peça *Profile* (1984), escreveu um artigo detalhando os procedimentos utilizados (DODGE; BAHN, 1986. DODGE, 1988). Inspirado pelos ruídos  $1/f$  de Voss e Clarke e também pelas construções geométricas recursivas de fractais como a curva de Koch, o autor utiliza um gerador de melodias  $1/f$  também de forma recursiva. Num primeiro momento, uma melodia é gerada por um ruído rosa até que o número de notas distintas seja igual a 3 (a melodia poderá possuir repetições de notas, e nesse caso terá comprimento maior do que 3). Em seguida, para cada nota da primeira melodia, uma segunda melodia é gerada até que o número de notas distintas seja igual a 5. Essa segunda melodia será tocada juntamente com a primeira, porém as durações serão adaptadas para que todas as notas da segunda melodia aconteçam durante a primeira nota da primeira melodia (outras melodias servirão de acompanhamento às demais notas da primeira melodia). Este processo é ilustrado na Fig. 9.



**Fig. 9:** Acima: melodia principal (à esquerda) gerada por um ruído  $1/f$  e melodia secundária (à direita) de acompanhamento à primeira nota da melodia principal. Abaixo: fragmento inicial de composição a 3 vozes. Imagem adaptada a partir do original de Dodge (1988).

Ao se completar o segundo nível de melodias, um terceiro nível é criado, desta vez com melodias subordinadas a cada nota do segundo nível. O tamanho das sequências do terceiro nível também é variável, garantindo uma diversidade de 4 notas distintas para cada sequência. Um quarto nível é gerado (com sequências de diversidade 5 para cada nota do terceiro nível), porém apenas o tamanho das sequências é utilizado. Com eles definem-se as durações das notas do terceiro nível, durações estas que se refletem nos segundo e primeiro níveis.

Através destes artificios, o compositor pôde aliar sua decisão estética de criar uma música estocástica com a vontade de criar vínculos estreitos entre os diversos níveis da composição. Estes vínculos não só aparecem na distribuição espectral das sequências de alturas, como também refletem e definem a forma global da peça, que remete à estrutura autossimilar característica dos fractais.

Kevin Jones, em um artigo cuja contribuição é principalmente didático-pedagógica, apresenta técnicas de composição através de modelos generativos de material musical. Jones descreve a geração de melodias fractais a partir de movimentos brownianos e similares, e apresenta texturas para síntese granular, geradas a partir da sobreposição de passeios aleatórios (JONES, 1989).

Como visto na Seção 2, Hsü e Hsü (1991) discutem a possibilidade de reduzir o número de notas de uma composição de modo a preservar o conteúdo espectral da obra. Embora isso não seja exatamente uma técnica composicional (a sugestão dos autores se restringe a criar versões mais simples de obras de Bach, Mozart e Chopin), suas ideias poderiam ser utilizadas para se criar composições estratificadas apresentando estrutura de autossimilaridade. Em comparação com a proposta de Dodge, isso seria apenas um caso particular em que é utilizado um único gerador aleatório nos diversos níveis da composição.

Um artigo bastante curioso de Michael Gogins (1991) trata do uso de sistemas de funções iteradas (IFS) para composição algorítmica. Nele, o autor apresenta de forma bastante poetizada diversos conceitos matemáticos relativos a sistemas dinâmicos, atratores, medidas de conjuntos e teoremas de geometria fractal (como o teorema da colagem e o teorema de Elton). A releitura do teorema da colagem pelo autor sugere que sistemas de funções iteradas seriam composicionalmente universais, isto é, serviriam para gerar toda e qualquer composição existente. Um de seus projetos futuros consiste em encontrar um conjunto de Mandelbrot para música, o que, de acordo com o autor, permitiria a localização de qualquer música possível a partir da informação local do conjunto. O vislumbre de tal possibilidade surgiu (segundo o autor) da consideração da

relação entre cada ponto do conjunto de Mandelbrot e o conjunto de Julia correspondente, porém o contexto é extrapolado para uma espécie de versão musical da biblioteca de Babel (como no conto de Jorge Luis Borges).

Devaneios à parte, o artigo apresenta um método para construir partituras a partir de coleções de transformações afins. O método parte de um ponto inicial  $(x_0, y_0)$  no plano e, a cada iteração  $k$ , uma das transformações é sorteada para gerar um novo ponto  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ . A aplicação recursiva destas transformações cria uma trajetória que, sob determinadas hipóteses, está associada a um conjunto atrator. Pode-se então estimar o atrator a partir da trajetória, criando-se uma matriz  $M(x, y)$  com valores proporcionais à quantidade de vezes que o ponto  $(x, y)$  foi visitado. O mapeamento proposto entre este conjunto de pontos do plano e as características musicais da partitura segue o modelo canônico:  $x$  é interpretado como o tempo,  $y$  como altura, e os valores  $M(x, y)$  são mapeados em valores de intensidade dos eventos. Pela natureza recursiva das transformações, os atratores apresentam estrutura autossimilar, o que se reflete tanto graficamente quanto no resultado acústico.

Muitos trabalhos não tratam especificamente de fractais, mas de sistemas que compartilham com estes algumas propriedades afins, como caos e autossimilaridade. Este é o caso, entre muitos outros, do trabalho de Mason e Saffle (1994), que trata da geração de melodias a partir de sistemas de Lindenmayer (L-systems). Estes sistemas são definidos por regras de transformação a partir de elementos geométricos, numéricos ou simbólicos, e assim se prestam à síntese de parâmetros musicais tais como alturas e durações. O artigo discute, ainda, a identificação de padrões autossimilares como um recurso analítico, utilizando como exemplo a *Fuga em Sol menor BWV 542* de Johann Sebastian Bach. O compositor Stelios Manousakis (2009) estende o uso de sistemas de Lindenmayer à manipulação de trechos de sinais de áudio.

Jeremy Leach e John Fitch (1995) também propõem o uso de sistemas caóticos para a determinação de uma estrutura de eventos em suas peças. Algumas das visões pessoais destes autores são a de que a música imita a natureza e que repetições de temas nos diversos parâmetros musicais é um requisito necessário da estrutura de uma peça. O método descrito gera composições utilizando apenas uma escala diatônica de 7 notas (por exemplo, Dó maior), e um repertório fixo de sistemas caóticos que podem ser explorados para gerar uma estrutura de eventos. Essa estrutura irá moldar a geração de parâmetros aleatórios de forma a conferir atributos diferenciados para notas de importância hierárquica

maior, como pontos culminantes em relação ao perfil melódico ou à intensidade, ou ainda associados a cadências rítmicas.

Tratando mais especificamente da síntese de sinais de áudio com características espectrais fractais, Pietro Polotti e Gianpaolo Evangelista (2001) propuseram um método de síntese aditiva para sons vozeados (como vogais na fala humana) com espectros pseudoperiódicos com característica  $1/f$ , a partir da análise de sons reais e usando ondaletas (wavelets) de banda harmônica. O método proposto também pode ser usado em análise, permitindo a decomposição de sinais nas partes harmônica e estocástica.

Outro trabalho que utiliza um sistema dinâmico caótico para a composição de música com características tonais é apresentado por Robert Sherlaw Johnson em sua composição *Fractal in A flat* (JOHNSON, 2003). Nele, o sistema de duas variáveis

$$\begin{cases} x \leftarrow y - \text{sign}(x) * \sqrt{|bx - c|} \\ y \leftarrow a - x \end{cases}$$

onde  $x$  e  $y$  são coordenadas de um ponto no plano e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes, é utilizado para gerar uma sequência de pontos no plano que são diretamente traduzidos em eventos sonoros no plano *tempo*×*frequência*. O compositor utilizou livremente os fragmentos musicais gerados, selecionando aqueles que o interessavam e combinando os materiais seguindo sua intuição.

Em seu artigo *From Strange to Impossible: Interactive Attractive Music* (PETERS, 2010), o compositor Michael Peters apresenta uma visão histórica do uso de fractais na música indicando compositores que na década de 1980 compuseram peças inspiradas pela representação gráfica do conjunto de Mandelbrot, entre eles figuras bem conhecidas como Charles Wuorinen (*Bamboula Squared*, 1984) e György Ligeti (*Klavier étude n. 1: Désordre*, 1985). Peter destaca que, com a evolução da velocidade dos computadores, recentemente passou a ser possível não só utilizar dados gerados a partir de fractais em composições, mas também gerar, em tempo real, composições baseadas em algoritmos fractais.

Peters aponta, por outro lado, que embora as representações gráficas de fractais sejam muitas vezes consideradas esteticamente interessantes, quando nos voltamos ao material musical bruto gerado algoritmicamente por fractais, raramente o resultado é interessante sem uma reelaboração composicional posterior. Essa visão é corroborada pelos desenvolvedores das ferramentas Well-Tempered Fractal e FractMus, bem como pelo compositor e desenvolvedor Rick Bidlack, que afirmam que a saída das ferramentas de

composição fractal não deveriam ser consideradas como material musical final, mas sim como um material pré-composicional a ser moldado pela inventividade do compositor (BIDLACK, 1992). Talvez por isso, especula Peters, o grande interesse inicial por música fractal no início da década de 1990 foi diminuindo ao final dessa mesma década.

Em meados da década de 1990, Peters inicia seu projeto de música fractal com o objetivo de buscar o que ele chama de “música fractal pura”, ou seja, aquela gerada diretamente pelos algoritmos escritos pelo compositor, sem a necessidade de um pós-processamento manual ou através de outras ferramentas. O papel do compositor seria, então, selecionar as saídas que lhe soassem esteticamente interessantes e também trabalhar no mapeamento das estruturas fractais em parâmetros musicais. Peters passou então a explorar mapeamentos dos números gerados pelo Atrator de Gumowski-Mira, também conhecido como Fractal de Mira, para valores de notas e outros parâmetros musicais. O passo seguinte foi então criar uma interface com algumas poucas teclas para controlar os parâmetros do material produzido. Dessa forma, o resultado é controlado em tempo real pelo compositor, que agora também se transforma em um instrumentista, executando o que Peter chamou de Hiperinstrumento do Atrator de Gumowski-Mira (PETERS, 2010).

Muitos outros compositores, não mencionados aqui, fizeram uso de ideias fractais em suas peças, ainda que nem sempre tenham deixado documentada tal utilização. O leitor interessado poderá buscar material adicional na forma de peças ou textos analíticos de compositores como Tristan Murail, Barry Truax, Horacio Vaggione, Per Nørgård, Rolf Wallin e Tom Johnson (entre muitos outros).

No Brasil, no final dos anos 1980 e início dos 1990, os trabalhos de Voss, Charles Dodge e Michael Gogins (entre outros) inspiraram compositores como Rodolfo Coelho de Souza, Jônatas Manzoli, Frederico Richter e Fabio Kon a realizar experimentos com música fractal (KON, 1992. KON, 1992b. MANZOLLI, 1993. MANZOLLI, 1993b. RICHTER, 1998. MANZOLLI et al., 2000. SOUZA; FARIA, 2011).

O compositor brasileiro Jônatas Manzoli desenvolveu sua tese de doutorado na Universidade de Nottingham, na Inglaterra, com o tema de dinâmica não linear e fractais como modelo para síntese de som e composição em tempo real (MANZOLLI, 1993). Seu método de síntese sonora digital, denominado FracWave, foi então aplicado em composições musicais de diferentes maneiras, permitindo a geração de formas dinâmicas de comportamento sonoro (MANZOLLI, 1993b). Este método foi posteriormente aprimorado, gerando sinais sintetizados caracterizados pela produção de espectros ricos com baixo custo computacional (MANZOLLI et al. 2000).

Parte das pesquisas em composição com fractais tem como objetivo a criação de obras musicais ou instalações específicas de um compositor particular (que pode ser um pesquisador ou colaborador), enquanto outra parte promove a ideia de que as técnicas de geração de material musical usando fractais deveriam ser utilizadas como um laboratório experimental de produção sonora, não necessariamente comprometido com um resultado artístico. Isso inclui a utilização lúdica de programas interativos para gerar música automaticamente, que possuem como único pré-requisito a curiosidade do usuário, bem como a experimentação com timbres e sonoridades que eventualmente podem encontrar aplicação em uma composição. A seção a seguir trata de programas desenvolvidos com esta finalidade.

### Software para música fractal

A lista de programas a seguir foi obtida em parte no livro *Mathematics and Music* (BENSON, 2004) e em parte na Internet. Foram selecionados apenas programas disponíveis gratuitamente na Internet, com a finalidade de tornar o assunto e a experimentação mais acessíveis. Todos os *links* foram acessados e estavam ativos em outubro de 2013.

- **Fmusic.** Disponível em: <<http://www.hitsquad.com/smm/programs/FMusic>>. Este é um programa desenvolvido por David H. Singer, que utiliza autômatos celulares para a geração de arquivos MIDI. A geração de melodias fractais está restrita a uma escala de 7 notas (dentre as 12 da escala cromática) que é definida pelo usuário. O programa controla 8 vozes (que podem utilizar instrumentos diferentes) e permite a definição de composições com até 3 seções interligadas (através de ajuste dos parâmetros).
- **Fractal Tune Smithy.** Disponível em: <<http://robertinventor.com/software/tunesmithy/music.htm>>. Uma biblioteca de programas envolvendo música e fractais. Um dos módulos permite a geração de melodias utilizando um procedimento análogo à curva de Koch; outro cria imagens de curvas de Lissajour a partir de acordes, utilizando as relações de frequência. Outros módulos permitem a exploração de composições microtonais, a análise espectral de timbres, o uso do teclado de um PC convencional como instrumento musical ou do mouse como um Theremin. O site apresenta muitos exemplos de áudio gerados pelo programa.
- **FractMus.** Disponível em: <<http://www.gustavodiazjerez.com/?cat=14>>. Desenvolvido por Gustavo Diaz-Jerez, utiliza mapas bidimensionais como o mapa de Henon ou o fractal



apelidado de *gingerbread man* para produzir arquivos MIDI. As trajetórias são mapeadas apenas em valores de frequência: o usuário deve escolher uma das 15 escalas disponíveis, uma duração fixa para cada nota da melodia, uma intensidade, além do timbre do instrumento. O programa permite a utilização de até 16 vozes simultâneas.

- . **MandelMusic.** Disponível em: <<http://www.algomusic.com/jmsl/examples/MandelMusic.shtml>>. Página web desenvolvida por Nick Didkovsky que implementa *applets* Java para geração de música a partir do conjunto de Mandelbrot, utilizando o sintetizador Jsyn.
- . **QuasiFractal Music.** Disponível em: <<http://members.tripod.com/~paulwhalley>>. Programa desenvolvido por Paul Whalley para a composição de música com técnicas fractais e seriais.
- . **Tangent.** Disponível em: <<http://www.sonicspot.com/tangent/tangent.html>>. Outro programa de Paul Whalley, que incorpora técnicas de composição algorítmica não fractais.
- . **Well-Tempered Fractal.** Disponível em: <[http://www.hitsquad.com/smm/programs/Well\\_Tempered\\_Fractal](http://www.hitsquad.com/smm/programs/Well_Tempered_Fractal)>. Um aplicativo escrito para o sistema MS-DOS por Robert Greenhouse, que permite a geração de melodias a partir de certo número de fractais. O usuário pode selecionar o tipo de fractal, a escala musical e alguns padrões de simetria.

Alguns programas antigos são mencionados em diversas páginas da web, mas não estavam disponíveis para *download* no período em que este artigo foi escrito. Entre eles estão: **MusiNum** e **MusiGen**, disponíveis no CD que acompanha o livro *Composing Music with Computers* (Miranda, 2001); **Mandelbrot Music**, de Yo Kubota; **Fractal Music Lab**, de David Strohbeen; e **Gingerbread 2.0**, de Phil Thompson, que lançou, em 1998, um CD chamado *Organized Chaos*, disponível para escuta em <http://www.lastfm.com.br/music/Phil+Thompson/Organised+Chaos>.

## Conclusão

Este artigo teve por objetivo oferecer uma visão panorâmica da interface entre as áreas de análise e composição musicais e a geometria fractal. Foram apresentadas diversas técnicas para obtenção de características matemáticas inspiradas por fractais para descrever sinais sonoros e musicais, e também algumas técnicas de geração de material musical a partir de fractais.

Uma leitura crítica e atenta das referências é ponto de partida essencial para quem se interessa por uma área de pesquisa multidisciplinar como esta. Ainda que publicados em

revistas especializadas e com arbitragem séria, vários textos aqui resenhados possuem deficiências em uma ou outra área: há textos matematicamente sólidos que se abstêm de buscar uma justificativa musical para seus desenvolvimentos (HSÜ; HSÜ, 1990. GÜNDÜZ; GÜNDÜZ, 2005. SU; WU, 2006), bem como textos musicalmente criativos, mas que se apoiam em uma releitura subjetiva do ferramental matemático (GOGINS, 1991). Por outro lado, o fato de que nem todos os autores estão igualmente habilitados em todas as disciplinas que a pesquisa demanda não pode ser visto como impedimento à pesquisa multidisciplinar. Neste contexto o trabalho colaborativo entre pesquisadores das diversas áreas pode atuar simultaneamente como catalisador e depurador do processo de pesquisa e desenvolvimento.

Várias questões em aberto existem na utilização de medidas fractais na análise musical. Por exemplo, em relação à característica dos espectros  $1/f$ , seria relevante entender como estes resultados se relacionam com o aspecto cognitivo da recepção musical, integrando conceitos como persistência da memória musical de curto e de longo prazo, e da percepção de forma musical. Ainda que ruídos  $1/f$  sejam observados em situações naturais (em princípio não moduladas por alguma forma de consciência ou de interpretação humanas), a observação deles em produtos culturais deveria admitir explicações mais substanciais do que a mera imitação da natureza.

Nas medidas de dimensão fractal de sequências extraídas de uma peça, há sobreposição frequente dos valores em estilos e gêneros diferentes; mais ainda, a relevância musical destes valores não é a mesma em todos os exemplos estudados. Por exemplo, a dimensão fractal de uma sequência de classes de altura em uma composição dodecafônica e em um ruído branco é próxima, e isso não acrescenta nenhuma informação relevante do ponto de vista de análise musical, dado que isto é um pressuposto composicional (essa medida serve na melhor das hipóteses para reconfirmar o pressuposto). De modo análogo, a sequência melódica de uma música predominantemente rítmica (por exemplo, a peça *Clapping Music* do compositor Steve Reich, para dois músicos batendo palmas) será tipicamente uma sequência monótona, o que terá um impacto em sua dimensão espectral, sem que isso tenha qualquer relação com a complexidade da peça. Compreender tais características é essencial para se chegar a uma interpretação fundamentada dos valores obtidos.

Em relação a outras medidas propostas na literatura, como diagramas de espalhamento, grafos e entropia, não resta dúvidas de que é possível obter essas informações a partir de uma melodia. Permanecem em aberto as questões da relevância e

finalidade dessas medidas na análise musical.

Em relação à produção musical a partir de fractais, foram vistas várias técnicas para a construção de sequências numéricas com características fractais e mapeamentos possíveis destas sequências em parâmetros musicais. O fato da música se desenvolver no tempo, e não no espaço como os objetos geométricos, bem como o fato de características fractais como a autossimilaridade demandarem longas sequências para se fazerem perceber explicam o fato da maioria dos mapeamentos ter como ponto de chegada características musicais macroscópicas (associadas a notas, motivos, frases e seções). Pelo menos duas alternativas a este paradigma se apresentam. A primeira consiste em tratar os parâmetros musicais não do ponto de vista da representação tradicional, mas como parâmetros que podem ser controlados continuamente, através da síntese sonora propriamente dita (ou seja, a síntese de áudio no lugar da síntese de representações simbólicas como partituras, arquivos MIDI etc.). A segunda consiste em utilizar mapeamentos dos processos fractais em sinais de controle da síntese microsonora, utilizando estes sinais para controlar parâmetros de técnicas tais como a síntese FM, mecanismos de análise-ressíntese (como os *vocoders*) e de outras técnicas de processamento digital de sinais (como filtros de efeitos), o que abriria espaço para a pesquisa de *timbres* fractais.

Na composição a partir de objetos fractais deve-se ter em mente que a meta é a construção de um objeto ou processo estético, e que a relevância e a qualidade deste objeto ou processo são subjetivamente determinadas. Interessa saber se o material gerado é musicalmente útil, o que vai depender fortemente do mapeamento entre os espaços matemático e musical. Este é sempre um mapeamento arbitrário, que representa uma vontade composicional, e é influenciado por questões estéticas, históricas e estilísticas. Cabe ao compositor resolver estas questões encontrando mapeamentos que tragam à luz sonoridades novas, que despertem a curiosidade e causem prazer estético, no sentido mais amplo e livre de pré-concepções.

## Referências

- BEAUVOIS, M. W. Quantifying Aesthetic Preference and Perceived Complexity for Fractal Melodies. *Music Perception*, n. 24, v. 3, p. 247-264, 2007.
- BERAN, J. *Statistics in Musicology*. Chapman & Hall/CRC Press, 2004.
- BIDLACK, R. Chaotic Systems as Simple (But Complex) Compositional Algorithms. *Computer Music Journal*, v. 16, n. 3, p. 33-47, 1992.

BIGERELLE, M; IOST, A. Fractal Dimension and Classification of Music. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 11, n. 14, p. 2179-2192, 2000.

BOLOGNESE, T. Automatic Composition: Experiments with Self-Similar Music. *Computer Music Journal*, v. 7, n. 1, p. 25-36, 1983.

BORTHWICK, A. Review of "Fractals in Music" by Charles Madden. *Music & Letters*, n. 81, v. 4, p. 661-662, 2000.

CHAPEL, R. H. *Realtime Algorithmic Music Systems from Fractals and Chaotic Functions: Toward an Active Musical Instrument*. PhD Thesis, Universitat Pompeu Fabra, 2003.

CHIROLLET, J.-C. L'approche de l'Art d'un Point de Vue Fractaliste. *Tangence*, v. 69, p. 103-132, 2002.

DARBON, N. *Les Musiques du Chaos*. Collection Sémiotique et philosophie de la musique. Harmattan, 2006.

DODGE C. Profile: A Musical Fractal. *Computer Music Journal*, v. 12, n. 3, p. 10-14, 1988.

DODGE, C.; Bahn, C. R. *Musical Fractals*. Byte, v. 11, n. 6, p. 185-196, 1986.

GARDNER, M. White and Brown Music, Fractal Curves and  $1/f$  Fluctuations. *Scientific American*, v. 238, n. 4, p.16-31, 1978.

GOGINS, M. Iterated Functions Systems Music. *Computer Music Journal*, v. 15, n. 1, p. 40-48, 1991.

GÜNDÜZ, G.; GÜNDÜZ, U. The Mathematical Analysis of the Structure of Some Songs. *Physica A*, n. 357, p. 565-592, 2005.

HILLER Jr., L.; ISAACSON, L. *Musical Composition with a High Speed Digital Computer*. Audio Engineering Society Convention 9. Audio Engineering Society, 1957.

HSÜ, K. J.; HSÜ, A. *Fractal Geometry of Music*. Proceedings of the National Academy of Sciences, n. 87, p. 938-941, 1990.

HSÜ, K. J.; HSÜ, A. Self-similarity of the  $1/f$  noise Called Music. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, n. 88, p. 3507-3509, 1991.

JOHNSON, R. S. Composing with Fractals. In: FAUVEL, J.; FLOOD, R.; WILSON, R. (Ed.). *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals*. Oxford: Oxford University Press, 2003.

JONES, K. Generative models in computer-assisted musical composition. *Contemporary Music Review*, v. 3, n. 1, p. 177-196, 1989.

KON, F. *O Som do Futuro: Música, Computadores e Fractais*. Jornal da Tarde, São Paulo,

26 set. 1992.

KON, F. *Música, Computadores e Fractais II. Relatório Técnico FAPESP, IA-UNESP, 1992b.*

LEACH, J.; FITCH, J. Nature, Music, and Algorithmic Composition. *Computer Music Journal*, v. 19, n. 2, p. 23-33, 1995.

LERDAHL, F.; JACKENDOFF, R. *A Generative Theory of Tonal Music*. MIT Press, 1983.

MADDEN, C. *Fractals in Music: Introductory Mathematics for Musical Analysis*. High Art Press, 1999.

MANARIS, B.; VAUGHAN, D.; WAGNER, C.; ROMERO, J.; DAVIS, R. B. *Evolutionary Music and the Zipf-Mandelbrot Law: Developing Fitness Functions for Pleasant Music*. Lecture Notes in Computer Science, n. 2611, p. 522-534, 2003.

MANDELBROT, B. B. *How Long is the Coast of Britain: Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*. Science, n. 156, v. 3775, p. 636-638, 1967.

MANDELBROT, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, 1983.

MANDELBROT, B. B.; van NESS, J. W. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review*, v. 10, n. 4, p. 422-437, 1968.

MANOUSAKIS, S. Non-Standard Sound Synthesis with L-Systems. *Leonardo Music Journal*, v. 19, p. 85-94, 2009.

MANZOLLI, J. *Non-linear Dynamics and Fractals as a Model for Sound Synthesis and Real Time Composition*. Tese de Doutorado, University of Nottingham, UK, 1993.

MANZOLLI, J. *Musical Applications Derived from the FracWave Sound Synthesis Method*. Proceedings of the 94th Audio Engineering Society Convention, Berlin, 1993b.

MANZOLLI, J. et al. *A Non-Linear Sound Synthesis Method*. Proceedings of the 7th Brazilian Symposium on Computer Music, 2000.

MASON, S.; SAFFLE, M. L-Systems, Melodies and Musical Structure. *Leonardo Music Journal*, v. 4, p. 31-38, 1994.

MIRANDA, E. R. *Composing Music with Computers*. Focal Press, 2001.

MOORE, F. R. *Elements of Computer Music*. Prentice Hall, 1990.

PETERS, M. From Strange to Impossible: Interactive Attractor Music. *Contemporary Music Review*, v. 29, n. 4, 2010.

POLOTTI, P; EVANGELISTA, G. Fractal Additive Synthesis via Harmonic-Band Wavelets. *Computer Music Journal*, v. 25, n. 3, p. 22-37, 2001.

QUAGLIA, B. Review of “Fractals in Music” by Charles Madden. *Computer Music Journal*, v. 24, n. 3, p. 84-86, 2000.

RICHTER, F. *Musica Fractal: As Novas Tecnologias da Música Contemporânea*. Proceedings of the 5th Brazilian Symposium on Computer Music, 1998.

SCHROEDER, M. Is There Such a Thing as Fractal Music? *Nature*, v. 325, p. 765-766, 1986.

SOUZA, R. C.; FARIA, R. R. A. *Oito Reflexões sobre a Criatividade na Composição Auxiliada por Computadores*. 13th Brazilian Symposium on Computer Music, SBCM'2011, Vitória, 2011.

SU, Z.-Y.; WU, T. Multifractal Analyses of Music Sequences. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 221, n. 2, p. 188-194, 2006.

SU, Z.-Y.; WU, T. Music Walk, Fractal Geometry in Music. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 380, n. 1, p. 418-248, 2007.

VOSS, R. F.; CLARKE, J. 1/f Noise in Music and Speech. *Nature*, v. 258, n. 5533, p. 317-318, 1975.

VOSS, R. F.; CLARKE, J. 1/f Noise in Music: Music From 1/f Noise. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 63, n. 1, p. 258-263, 1978.

.....

**Marcelo Queiroz** é Professor Associado do Departamento de Ciência da Computação, do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP). Possui doutorado e livre-docência em Ciência da Computação pela USP e graduação em Música (Composição Musical) pela USP. Tem experiência de pesquisa nas áreas de computação musical e otimização contínua, atuando principalmente nos seguintes temas: processamento de sinais sonoros digitais, espacialização sonora, simulação acústica e sistemas musicais interativos. [mqz@ime.usp.br](mailto:mqz@ime.usp.br)

**Fabio Kon** é Professor Titular do Departamento de Ciência da Computação do IME-USP. Graduiu-se em Computação pela USP (1990) e em Música pela UNESP (1992). Obteve seu doutoramento na Universidade de Illinois em Urbana-Champaign (2000), onde estudou composição musical com Heinrich Taube. Sua principal área de pesquisa é sistemas distribuídos, tendo recebido o prêmio *10-Year Best Paper Award* na *International Middleware Conference* em 2010. Realiza também pesquisas em computação musical, software livre e Desenvolvimento Ágil de Software. É membro da diretoria internacional da *Open Source Initiative* (OSI), vice-diretor do Centro de Competência em Software Livre (CCSL) do IME-USP e Editor-Chefe do *Springer Journal of Internet Services and Applications*. [kon@ime.usp.br](mailto:kon@ime.usp.br)