



**INSTITUTO  
FEDERAL**

Catarinense

Instituto Federal Catarinense

Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação

*Campus São Bento do Sul*

**LUCAS HORIMI**

**IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLE LQR POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS  
UTILIZANDO OBSERVADORES DE ORDEM REDUZIDA E PLENA EM UM  
SISTEMA *BALL ON WHEEL*: UM ESTUDO COMPARATIVO**

São Bento do Sul

2023

**LUCAS HORIMI**

**IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLE LQR POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS  
UTILIZANDO OBSERVADORES DE ORDEM REDUZIDA E PLENA EM UM  
SISTEMA *BALL ON WHEEL*: UM ESTUDO COMPARATIVO**

Trabalho de Curso submetido ao Curso de Engenharia de Controle e Automação do Instituto Federal Catarinense — *Campus* São Bento do Sul para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação em 2023.  
Orientador: Prof. Jean Carlos Bortoli Dalcin, M.e.  
Coorientador: Prof. Luan Diego Ramalho Arantes, Eng.

São Bento do Sul  
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática do ICMC/USP, cedido ao IFC e  
adaptado pela CTI - Araquari e pelas bibliotecas do Campus de Araquari e Concórdia.

H811i Horimi, Lucas  
IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLE LQR POR REALIMENTAÇÃO DE  
ESTADOS UTILIZANDO OBSERVADORES DE ORDEM REDUZIDA E  
PLENA EM UM SISTEMA BALL ON WHEEL: UM ESTUDO  
COMPARATIVO / Lucas Horimi; orientador Jean Carlos  
Bortoli Dalcin. -- São Bento do Sul, 2023.  
70 p.

Monografia (monografia) - Instituto Federal  
Catarinense, campus São Bento do Sul, Bacharelado em  
Engenharia de Controle e Automação, São Bento do Sul,  
2023.

Inclui referências.

1. Ball-on-Wheel. 2. Controle Moderno. 3.  
Observadores de estado.. 4. Controle LQR. 5. Controle  
Discreto. I. Bortoli Dalcin, Jean Carlos. II.  
Instituto Federal Catarinense. Bacharelado em  
Engenharia de Controle e Automação. III. Título.

**LUCAS HORIMI**

**IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLE LQR POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS  
UTILIZANDO OBSERVADORES DE ORDEM REDUZIDA E PLENA EM UM  
SISTEMA *BALL ON WHEEL*: UM ESTUDO COMPARATIVO**

Este Trabalho de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação e aprovado em sua forma final pelo Curso de Bacharelado em Engenharia de Controle e Automação do Instituto Federal Catarinense – *Campus* São Bento do Sul.

---

Prof. Jean Carlos Bortoli Dalcin, M.e.  
Orientador - IFC *Campus* São Bento do Sul

**BANCA EXAMINADORA**

---

?????????  
Instituto Federal Catarinense

---

?????????  
Instituto Federal Catarinense

São Bento do Sul  
2023.

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todas as pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho. Em primeiro lugar, agradeço à minha família: meus pais, Gustavo e Inês, e meu irmão, Fabrício. Sua força e determinação são uma inspiração constante para mim.

Agradeço aos meus amigos Andrey, Elian, Felipe, Leandro, Luan, Samuel, Vagner e Yan. Andrey e Vagner, por me ajudarem com dúvidas técnicas sobre o projeto. Elian e Yan, que estiveram ao meu lado nos momentos mais difíceis, especialmente quando enfrentei problemas de saúde. Felipe, por sempre me fazer rir nos momentos de estresse. Leandro, cuja curiosidade e paixão pelo aprendizado me inspiraram a sempre buscar novos conhecimentos, e sua família, que sempre me acolheu. Luan, por sua generosidade em compartilhar seu conhecimento e experiência para me ajudar a superar todos os desafios deste curso. Samuel, por sempre me desafiar com perguntas que me fizeram estudar mais.

Agradeço também ao meu orientador, Jean, pela paciência, orientação e apoio inestimáveis ao longo deste projeto.

Finalmente, gostaria de agradecer a todos os professores e funcionários do Instituto Federal Catarinense que contribuíram para a minha formação, e especialmente aos assistentes sociais que, através do Programa de Auxílio Estudantil (PAE), me proporcionaram o suporte financeiro necessário para continuar meus estudos.

Muito obrigado a todos!

"Não é sobre a ideia, é sobre o quão longe  
você está disposto a ir para torná-la realidade." - Adaptado de "Inception" (A Origem)

## RESUMO

Este trabalho foca no projeto, construção e implementação de métodos de controle moderno em um sistema *ball-and-wheel*, visando desenvolver um sistema de controle eficiente e robusto. A dissertação é organizada em seis capítulos, abordando desde a motivação e contexto do projeto, passando pelos fundamentos teóricos, metodologia, desenvolvimento do controle do protótipo, até os resultados e conclusões.

A contribuição deste trabalho se dá pela expansão do conhecimento na área de controle moderno e sistemas *ball-and-wheel*, por meio do desenvolvimento teórico e prático do projeto. A análise dos resultados obtidos na implementação do controlador, incluindo simulações e testes práticos, auxilia na escolha do método de controle mais adequado para essa aplicação, além de fornecer *insights* para futuras pesquisas na área.

**Palavras-chave:** Controle moderno, Sistema *ball-and-wheel*, Controle LQR, Observadores de estado, Engenharia de controle e automação

## ABSTRACT

This study focuses on the design, construction, and implementation of modern control methods in a *ball-and-wheel* system, aiming to develop an efficient and robust control system. The dissertation is organized into six chapters, addressing the motivation and context of the project, theoretical foundations, methodology, control development of the prototype, results, and conclusions.

The contribution of this work lies in the expansion of knowledge in the field of modern control and *ball-and-wheel* systems, through the theoretical and practical development of the project. The analysis of the results obtained in the implementation of the controller, including simulations and practical tests, assists in selecting the most suitable control method for this application, and provides insights for future research in the area.

**Keywords:** Modern control, *ball-and-wheel* system, LQR control, State observers, Control and automation engineering



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema BoW . . . . .	21
Figura 2 – Diagrama de blocos de um observador de ordem plena. . . . .	27
Figura 3 – Canon NF5475E . . . . .	29
Figura 4 – BTS7960 High Current 43A H-Bridge Motor Driver . . . . .	30
Figura 5 – VL53L0XV2 Distance Sensor . . . . .	31
Figura 6 – Microcontroladores . . . . .	32
Figura 7 – Modelo da Roda no <i>software</i> de Fatiamento . . . . .	32
Figura 8 – Desenho do eixo da roda . . . . .	33
Figura 9 – Conexão entre os elementos do sistema . . . . .	34
Figura 10 – Diagrama do Circuito Utilizado . . . . .	35
Figura 11 – Montagem final do sistema BoW sem a bola . . . . .	36
Figura 12 – Teste do motor. . . . .	37
Figura 13 – Diagrama do algoritmo implementado . . . . .	40
Figura 14 – Teste em malha aberta aplicando 10 Vcc. . . . .	41
Figura 15 – Teste em malha aberta aplicando 15 Vcc. . . . .	42
Figura 16 – Teste em malha aberta aplicando 24 Vcc. . . . .	43
Figura 17 – Resposta ao impulso do sistema . . . . .	45
Figura 18 – Algoritmo para Encontrar o Valor de Ganho K . . . . .	48
Figura 19 – Ação de controle . . . . .	49
Figura 20 – Angulo da bola com controle . . . . .	50
Figura 21 – Velocidade da bola com controle . . . . .	51
Figura 22 – Angulo da roda com controle . . . . .	52
Figura 23 – Velocidade da roda com controle . . . . .	53
Figura 24 – Comparação de leitura entre os sensores . . . . .	56
Figura 25 – Simulação Comparativa das ações de controle no contínuo, discreto, discreto com Observador Pleno, discreto com Observador Mínimo . . . . .	57
Figura 26 – Simulação Comparativa do angulo da bola no contínuo, discreto, discreto com Observador Pleno, discreto com Observador Mínimo. . . . .	58
Figura 27 – Simulação Comparativa da velocidade da bola no contínuo, discreto, discreto com Observador Pleno, discreto com Observador Mínimo. . . . .	59
Figura 28 – Simulação Comparativa do angulo da roda no contínuo, discreto, discreto com Observador Pleno, discreto com Observador Mínimo. . . . .	60
Figura 29 – Simulação Comparativa da velocidade da roda no contínuo, discreto, discreto com Observador Pleno, discreto com Observador Mínimo. . . . .	61
Figura 30 – Comparação na planta real ação de controle entre observador de ordem mínima e observador de ordem plena . . . . .	62

Figura 31 – Comparação na planta real do angulo da bola entre observador de ordem mínima e observador de ordem plena . . . . .	63
Figura 32 – Comparação na planta real da velocidade da bola entre observador de ordem mínima e observador de ordem plena . . . . .	64
Figura 33 – Comparação na planta real do angulo da roda entre observador de ordem mínima e observador de ordem plena . . . . .	65
Figura 34 – Comparação na planta real da velocidade da roda entre observador de ordem mínima e observador de ordem plena . . . . .	66

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Lista de Substituições Necessárias para Escrever a Equação do Observador para o Observador de Estado de Ordem Mínima . . . . .	28
Tabela 2 – Valores das Variáveis do Sistema . . . . .	38

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	Tridimensional
BoW	<i>Ball on Wheel</i>
DC	Corrente Contínua
G-Code	Código de Máquina
I2C	<i>Inter-Integrated Circuit</i>
LQR	Regulador Linear Quadrático
LTI	Linear e Invariante no Tempo
MIMO	Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas
PCB	Placa de Circuito Impresso
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
PLA	Ácido Polilático
PWM	Modulação por largura de pulso
RPM	Rotações por Minuto
ToF	<i>Time-of-Flight</i>
Vcc	Tensão em Corrente Contínua

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Ângulo da Roda
$\dot{\alpha}$	Velocidade Angular da Bola
$\dot{\varphi}$	Ângulo da Roda
$\dot{\varphi}$	Velocidade Angular da Roda
$g$	Gravidade
$R_a$	Resistência de Armadura do Motor
$K_m$	Constante de Torque do Motor
$R_b$	Raio da Bola
$M$	Massa da Bola
$I_b$	Inercia da Bola
$R_w$	Raio da Roda
$I_w$	Momento de Inércia da Roda
$A_d$	Matriz Discreta do sistema
$A$	Matriz do sistema
$B_d$	Matriz Discreta da entrada
$B$	Matriz da entrada
$T$	Tempo de Amostragem
$C$	Matriz de Controlabilidade
$O$	Matriz de Observabilidade
$mm$	Milímetros
MHz	Mega Hertz
$m$	Metros
$K_g$	Quilograma
$m/s$	Metros por Segundo
$kg \cdot m^2$	Quilograma ao Metro Quadrado
$\Omega$	Ohms
$N \cdot m/A$	Newton metros por Ampere
$C$	Matriz da saída
$Q$	Matriz de Custo do Estado
$R$	Matriz de Custo do Controle

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO . . . . .	15
1.2	PANORAMA ATUAL DO DESENVOLVIMENTO DE TECNOLOGIAS RELACIONADAS . . . . .	16
1.3	OBJETIVOS . . . . .	16
<b>1.3.1</b>	<b>Objetivo Geral . . . . .</b>	<b>16</b>
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO . . . . .	17
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .</b>	<b>19</b>
2.1	SISTEMAS <i>BALL ON WHEEL</i> . . . . .	19
<b>2.1.1</b>	<b>Elementos do sistema BoW . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>2.1.2</b>	<b>Modelagem do sistema BoW . . . . .</b>	<b>20</b>
2.2	CONTROLE DISCRETO DE SISTEMAS . . . . .	22
<b>2.2.1</b>	<b>Taxa de Amostragem . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Técnicas Discretização . . . . .</b>	<b>22</b>
2.3	CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS . . . . .	23
<b>2.3.1</b>	<b>Teoria de controle ótimo . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>2.3.2</b>	<b>Controle LQR . . . . .</b>	<b>23</b>
2.4	OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE . . . . .	24
2.5	MÉTODO DE ACKERMANN . . . . .	24
2.6	OBSERVADORES DE ESTADO . . . . .	25
<b>2.6.1</b>	<b>Observadores de ordem plena . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>2.6.2</b>	<b>Observadores de ordem reduzida . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA . . . . .</b>	<b>29</b>
3.1	CONSTRUÇÃO DO PROTÓTIPO . . . . .	29
<b>3.1.1</b>	<b>Seleção dos Componentes . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Partes Impressas em 3D . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>3.1.3</b>	<b>Eixo da Roda . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>3.1.4</b>	<b>Integração dos Componentes Elétricos . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>3.1.5</b>	<b>Montagem Final . . . . .</b>	<b>35</b>
3.2	MODELAGEM DO SISTEMA . . . . .	36
<b>3.2.1</b>	<b>Obtenção de Variáveis . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Espaço de Estado da Planta . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>3.2.3</b>	<b>Algoritmo e Ferramentas de Simulação . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>3.2.4</b>	<b>Validação do Espaço de Estados . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>DESENVOLVIMENTO DO CONTROLE . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>4.0.1</b>	<b>Teste de Estabilidade do Sistema . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>4.0.2</b>	<b>Teste de Controlabilidade e Observabilidade . . . . .</b>	<b>45</b>

4.1	PROJETO DO CONTROLADOR . . . . .	46
4.1.1	Discretização do Sistema . . . . .	46
4.1.2	Controlador LQR . . . . .	47
4.1.3	Observador de ordem mínima com controlador LQR . . . . .	53
4.1.4	Observador de ordem plena com controlador LQR . . . . .	54
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO . . . . .	56
5.1	MEDIÇÃO DOS SENSORES . . . . .	56
5.2	RESULTADOS SIMULADOS . . . . .	56
5.3	RESULTADOS PRÁTICOS . . . . .	61
5.4	DESEMPENHO DO CONTROLADOR LQR . . . . .	66
6	CONCLUSÃO . . . . .	68
6.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	68
6.2	LIMITAÇÕES DO TRABALHO . . . . .	68
6.3	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	68
	REFERÊNCIAS . . . . .	69
	APÊNDICE A – Github . . . . .	71

## 1 INTRODUÇÃO

Na era da automação e da robótica, o controle de sistemas se tornou a espinha dorsal de inúmeras aplicações em engenharia e ciência, desde veículos espaciais até processos de manufatura contemporâneos (OGATA, Katsuhiko, 2010b; DORF; BISHOP, 1998). A teoria de controle moderna simplificou o projeto de sistemas de controle, pois é baseada em um modelo do sistema de controle real. No entanto, a estabilidade do sistema é sensível ao erro entre o sistema real e o seu modelo (OGATA, Katsuhiko, 2010b; PHILLIPS; NAGLE; CHAKRABORTTY, 1990).

O presente trabalho de conclusão de curso visa estudar a aplicação de algumas dessas técnicas de controle moderno, o que é imprescindível para um engenheiro de controle em sistemas mais modernos e complexos (OGATA, Katsuhiko, 2010b). Foi escolhido o controle LQR por realimentação de estados em um sistema BoW, utilizando observadores de ordem reduzida e plena. Observadores de estado são ferramentas que estimam os estados de um sistema quando não é possível medi-los diretamente. Observadores de ordem reduzida são menos complexos e exigem menos esforço computacional, mas podem ser menos precisos na estimativa dos estados. Por outro lado, observadores de ordem plena podem fornecer estimativas mais precisas, mas com maior complexidade e custo computacional (OGATA, Katsuhiko, 2010b; FRANKLIN, Gene F.; POWELL, J. David; EMAMI-NAEINI, 1994). Ao comparar a eficácia, a complexidade e os requisitos de medição desses dois tipos de observadores, pretende-se investigar como a escolha do observador pode afetar o desempenho e a robustez do controlador.

### 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O sistema BoW é um exemplo representativo de um sistema dinâmico não linear, no qual uma esfera rola sobre uma roda controlada (PEZHMANN, ano de publicação). Este tipo de sistema tem sido objeto de estudo devido às suas aplicações em robótica móvel, sistemas de transporte e estabilização de cargas em movimento. Dada a complexidade e as variações nas propriedades dinâmicas deste sistema, o controle efetivo de sua posição e velocidade se torna um desafio (FERNANDES; NIEKERK, 2013).

O controle LQR por realimentação de estados tem sido uma abordagem eficiente e promissora para lidar com sistemas não lineares como o BoW (FERNANDES; NIEKERK, 2013). Este método busca minimizar uma função objetivo quadrática, que considera o desempenho do sistema e o esforço de controle (OGATA, Katsuhiko, 2010b; DORF; BISHOP, 1998).

Diante deste cenário, o presente trabalho busca investigar a implementação do controle LQR por realimentação de estados utilizando observadores de ordem reduzida e plena em um sistema BoW. Mediante um estudo comparativo, espera-se identificar os principais desafios e limitações de cada tipo de observador, bem como suas implicações no desempenho e robustez do controlador LQR implementado.



## 1.2 PANORAMA ATUAL DO DESENVOLVIMENTO DE TECNOLOGIAS RELACIONADAS

Nos últimos anos, a pesquisa em sistemas BoW tem apresentado avanços significativos em termos de modelagem, controle e aplicações. Nesta seção, apresentamos um panorama do estado da arte em relação aos estudos mais recentes nessa área.

A modelagem precisa e o controle eficiente do sistema BoW são fundamentais para o sucesso de suas aplicações práticas. Além dos métodos clássicos de controle, como o controle PID (PEZHMAN, ano de publicação), diferentes abordagens de controle têm sido propostas para lidar com a complexidade e a não linearidade inerente a esses sistemas:

- **Controle não linear** A lógica por trás dessa abordagem consiste em encontrar um difeomorfismo e uma lei de controle por realimentação de estado que transformam o sistema não linear em um sistema linear invariante no tempo. O projeto é então realizado no sistema linear utilizando técnicas de projeto de controle linear (HO, ano de publicação).
- **Controle adaptativo:** (PEZHMAN, ano de publicação) desenvolveram um controlador adaptativo para um sistema BoW com parâmetros desconhecidos, utilizando a teoria de controle adaptativo e a técnica de linearização por realimentação.
- **Controle por modos deslizantes:** (NEVES; ANGÉLICO; TANNURI, 2020) projetaram uma superfície de deslizamento no espaço de estados, onde a dinâmica do sistema foi forçada a se mover ao longo dessa superfície. Uma vez na superfície de deslizamento, o sistema é insensível a perturbações e incertezas, permitindo um controle preciso e robusto da posição da bola.
- **Controle baseado em aprendizado de máquina:** Alguns trabalhos recentes exploram aprendizado de máquina para desenvolver controladores para sistemas BoW (FERNANDES; NIEKERK, 2013). Esses métodos de aprendizado são capazes de adaptar-se às mudanças no ambiente e às incertezas do sistema.

Com base nesses avanços recentes, este trabalho busca contribuir para o campo de controle de sistemas ao investigar a aplicação do controle LQR em um sistema BoW.

## 1.3 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo geral e específico o seguinte:

### 1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é projetar, construir e implementar métodos de controle moderno em um sistema BoW, e verificar sua eficácia em manter a bola em uma posição de estabilidade pelo maior tempo possível.

Os objetivos específicos deste trabalho incluem:

- Projetar e construir uma planta BoW, considerando os requisitos de desempenho e as limitações do sistema físico;
- Implementar um observador de ordem reduzida em conjunto com um controlador LQR na planta BoW, e avaliar sua efetividade em termos de desempenho e robustez. Caso o observador de ordem reduzida não atenda aos requisitos da planta, implementar um observador de ordem plena;
- Comparar os resultados obtidos com a utilização dos observadores de ordem reduzida e plena, analisando aspectos como o tempo de estabilização, precisão e sensibilidade a ruídos e incertezas;
- Ampliar o conhecimento na área de controle moderno e sistemas BoW, por meio do desenvolvimento teórico e prático do projeto.

Através da implementação dos métodos de controle moderno na planta BoW, será possível avaliar o desempenho de cada abordagem, permitindo a escolha do método mais adequado para essa aplicação. Além disso, o projeto e a construção da planta contribuirão para expandir o conhecimento sobre o tema e aprimorar as habilidades em engenharia de controle e automação.

## 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação é dividida em seis capítulos, organizados conforme descrito a seguir:

- Capítulo 1 - Introdução: apresenta a motivação, o contexto e os objetivos do projeto, além das principais contribuições do trabalho.
- Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica: discute os fundamentos teóricos relevantes para o projeto, abrangendo seis subseções:
  - Subseção 2.1 - Sistemas *BoW*: apresenta os elementos e modelos desses sistemas.
  - Subseção 2.2 - Controle Discreto de Sistemas: trata da taxa de amostragem e das técnicas de discretização.
  - Subseção 2.3 - Controle por Realimentação de Estados: discute a teoria de controle ótimo e o controle LQR.
  - Subseção 2.4 - Observabilidade e Controlabilidade: aborda o processo e a relevância dos testes usados para analisar as características da planta, um estágio essencial antes da aplicação dos observadores de estado.
  - Subseção 2.5 - Método de Ackermann: discute a aplicação do método de Ackermann para o projeto de controladores por realimentação de estados.
  - Subseção 2.6 - Observadores de Estado: descreve observadores de estado reduzido e pleno.

- Capítulo 3 - Metodologia: descreve o planejamento e a construção do protótipo, a modelagem do sistema e as técnicas de validação utilizadas, dividido em duas subseções:
  - Subseção 3.1 - Construção do Protótipo: aborda todos os aspectos de sua concepção desde a escolha dos elementos, passando pela formação da estrutura, suas partes impressas em 3D, o eixo da roda, a placa de circuito impresso e a montagem final.
  - Subseção 3.2 - Modelagem do Sistema: apresenta a obtenção das constantes do sistema, aplicação ao modelo de espaço de estados e sua validação.
- Capítulo 4 - Desenvolvimento do Controle do Protótipo: explica a implementação do controlador no sistema BoW, abordando a escolha do tipo de controlador, e a implementação dos observadores de estado.
- Capítulo 5 - Resultados e Discussão: apresenta e analisa os resultados obtidos na implementação do controlador, comparando as simulações e os testes práticos dos observadores e do controle.
- Capítulo 6 - Conclusão: resume as principais contribuições e limitações do projeto, discute as implicações dos resultados obtidos e sugere direções para futuras pesquisas e desenvolvimentos na área de controle de sistemas BoW.

A estrutura do trabalho segue uma sequência lógica, partindo dos fundamentos teóricos e avançando para a aplicação prática desses conceitos na construção, validação e análise do sistema controlado. O objetivo é proporcionar uma compreensão clara e abrangente do projeto, desde a sua concepção até a implementação e avaliação dos resultados.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, são apresentados os fundamentos teóricos e conceitos relevantes para o entendimento e desenvolvimento do projeto relacionado ao sistema BoW. A revisão bibliográfica abordará tópicos importantes como a descrição e modelagem dos sistemas BoW, controle discreto de sistemas, controle moderno, observadores de estado e suas respectivas aplicações. Ao longo deste capítulo, serão referenciadas obras relevantes da literatura, incluindo livros e artigos científicos, que auxiliarão na fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento do projeto.

### 2.1 SISTEMAS *BALL ON WHEEL*

Os sistemas BoW são uma classe de sistemas de controle não lineares que consistem em uma esfera, que representa a bola, e um atuador, sendo a roda. O atuador tem como objetivo controlar a posição da bola ao longo de uma trajetória desejada, utilizando a rotação da roda para gerar movimento na bola. Esses sistemas são amplamente estudados na literatura devido à sua complexidade e não linearidade, além de serem considerados um excelente exemplo para o ensino e pesquisa em controle, pois apresentam desafios tanto em modelagem quanto em controle (LIN *et al.*, 2014).

A relevância dos sistemas BoW para o estudo de controle se dá pela necessidade de lidar com sistemas não lineares e multivariáveis, características presentes em muitos sistemas reais encontrados na indústria e em outras aplicações. Além disso, o sistema BoW apresenta problemas como a instabilidade inerente, o que torna o projeto de controle ainda mais desafiador (LIN *et al.*, 2014).

#### 2.1.1 Elementos do sistema BoW

Nesta seção, serão apresentados os principais elementos que compõem um sistema BoW e suas funções no sistema. Um sistema BoW é constituído pelos seguintes componentes:

- **Roda:** A roda é o componente principal do sistema e é responsável por manter o equilíbrio do sistema. A roda é acionada por um motor, geralmente um motor de corrente contínua ou um motor de passo, que permite controlar sua velocidade e posição (LIN *et al.*, 2014).
- **Bola:** A bola é o objeto que se equilibra sobre a roda e se move devido à rotação da roda. A bola pode ser de diferentes materiais, como aço, plástico ou vidro, e o contato entre a bola e a roda é o que determina a dinâmica do sistema.
- **Estrutura de suporte:** A estrutura de suporte é responsável por manter a roda e a bola em posição e facilitar o movimento controlado da roda. A estrutura pode ser construída com diversos materiais, como alumínio, aço ou plástico.

- **Sensores:** Os sensores são utilizados para medir as variáveis do sistema, como a posição e velocidade da bola e da roda. Os sensores mais comuns utilizados em sistemas BoW incluem *encoders* ópticos ou magnéticos. e sensores de posição ToF (NEVES; ANGÉLICO; TANNURI, 2020).
- **Controlador:** O controlador é o componente que processa os dados dos sensores e determina a ação de controle a ser aplicada no motor da roda. Os controladores normalmente implementados em microcontroladores, e utilizam algoritmos de controle, como PID, LQR, ou controle por modos deslizantes, para manter o equilíbrio do sistema (NEVES; ANGÉLICO; TANNURI, 2020).
- **Fonte de Energia:** Fontes chaveadas são comuns por sua eficiência e proteção aos componentes eletrônicos. Outras opções incluem fontes lineares.

Cada um desses elementos desempenha um papel crucial no funcionamento do sistema BoW e na capacidade de manter a bola equilibrada sobre a roda. A interação entre esses componentes e o controle aplicado determinam o desempenho geral do sistema (LIN *et al.*, 2014; PEZHMANN, ano de publicação).

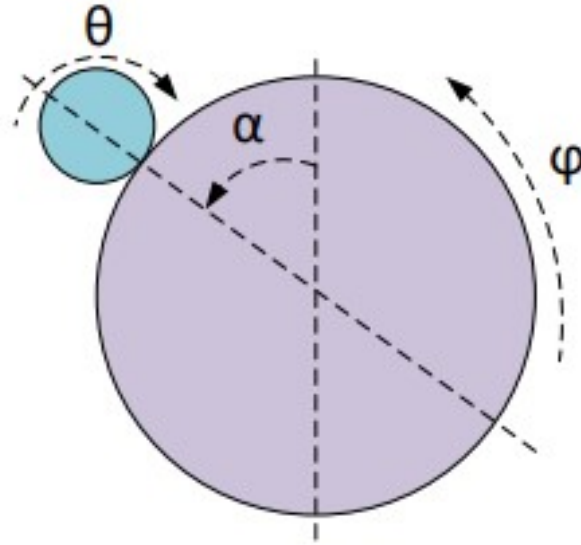
### 2.1.2 Modelagem do sistema BoW

A modelagem do sistema BoW pode ser representada através do espaço de estados, que consiste em um conjunto de equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico do sistema. Para isso, é necessário obter as equações que relacionam as variáveis de estado e de entrada do sistema (PEZHMANN, ano de publicação; HO, ano de publicação).

Considerando o sistema BoW, as variáveis de estado são definidas como:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \alpha & \dot{\alpha} & \varphi & \dot{\varphi} \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

Figura 1 – Sistema BoW



Fonte: Neves, Angélico e Tannuri (2020)

Onde  $\alpha$  é o ângulo da bola,  $\dot{\alpha}$  é a velocidade angular da bola,  $\varphi$  é o ângulo da roda e  $\dot{\varphi}$  é a velocidade angular da roda. A Figura 1 ilustra a relação entre esses ângulos.

As equações que descrevem o espaço de estados podem ser representadas como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & p \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ r \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

As constantes nas matrizes são descritas através das seguintes equações (HO, ano de publicação):

$$a = -\frac{2R_w K_m^2}{R_a(7I_w + 2R_w^2 M_b)(R_b + R_w)} \quad (3)$$

$$b = \frac{g(5I_w + 2R_w^2 M_b)}{(7I_w + 2R_w^2 M_b)(R_b + R_w)} \quad (4)$$

$$c = \frac{2R_w K_m}{R_a(7I_w + 2R_w^2 M_b)(R_b + R_w)} \quad (5)$$

$$p = -\frac{7K_m^2}{R_a(7I_w + 2R_w^2 M_b)} \quad (6)$$

$$q = \frac{2gR_w M_b}{7I_w + 2R_w^2 M_b} \quad (7)$$

$$r = \frac{7K_m}{R_a(7I_w + 2R_w^2 M_b)} \quad (8)$$

Onde  $g$ ,  $R_a$ ,  $K_m$ ,  $R_b$ ,  $M$ ,  $I_b$ ,  $R_w$ ,  $I_w$  representam gravidade, resistência do motor, constante de torque do motor, raio da bola, massa da bola, momento de inércia da bola, raio da roda e momento de inércia da roda, respectivamente.

## 2.2 CONTROLE DISCRETO DE SISTEMAS

O controle discreto, também conhecido como controle digital, lida com o comportamento de sistemas cujas ações de controle são atualizadas em intervalos de tempo discretos, e não de maneira contínua (PHILLIPS; NAGLE; CHAKRABORTTY, 1990). Esses intervalos são normalmente uniformes, o que significa que as atualizações ocorrem em momentos específicos e predefinidos.

### 2.2.1 Taxa de Amostragem

A taxa de amostragem é um aspecto fundamental no projeto de sistemas de controle discretos. É a frequência com que o controlador obtém informações do sistema a ser controlado e realiza atualizações nas ações de controle. A escolha da taxa de amostragem adequada é crucial para garantir um bom desempenho do sistema de controle e evitar problemas como aliasing e atrasos excessivos no controle (PHILLIPS; NAGLE; CHAKRABORTTY, 1990).

A amostragem ideal, do ponto de vista matemático, acontece quando os valores interpolados discretamente se alinham perfeitamente aos seus equivalentes contínuos. Contudo, no ambiente prático costuma-se utilizar uma frequência de amostragem superior em pelo menos 10 vezes à frequência de banda do sistema. (AGUIRRE, 2007)

### 2.2.2 Técnicas Discretização

A passagem de modelos contínuos para discretos em espaço de estados é um componente essencial no controle de sistemas modernos. (AGUIRRE, 2007) detalha esse processo por meio de equações que facilitam a implementação de algoritmos em sistemas que operam em tempos discretos. aonde partindo da Equação (16) para o espaço de estados contínuo pode-se transformar para o caso discreto a partir das seguintes equações:

$$\begin{aligned} A_d &= \Phi(T) = e^{AT} \\ &= I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B_d &= \left( \int_0^T \Phi(\eta) d\eta \right) \\ &= \left[ IT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} + \frac{A^4 T^4}{4!} + \dots \right] B \end{aligned} \quad (10)$$

onde  $A_d$  é matriz  $A$  discreta,  $B_d$  é matriz  $B$  discreta, e  $T$  é o tempo de amostragem que pode ser obtido de  $t = kT + T$ , onde  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . É importante destacar que na representação de um sistema em espaço de estados, a saída é calculada algebricamente. Assim, durante a discretização, as matrizes  $C$  e  $D$  não são alteradas, resultando em  $C = C_d$  e  $D = D_d$  (AGUIRRE, 2007).

## 2.3 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

O controle por realimentação de estados é uma abordagem moderna para projetar controladores, onde a realimentação é baseada no estado do sistema, em vez de realimentar apenas a saída do sistema (OGATA, Katsuhiko, 2010a). Essa técnica é empregada quando é necessário controlar sistemas lineares com MIMO.

### 2.3.1 Teoria de controle ótimo

A teoria de controle ótimo lida com o problema de encontrar o melhor controle para um sistema dado, visando minimizar uma função de custo predefinida. O controle ótimo é geralmente formulado em termos de equações diferenciais de estado, e o objetivo é encontrar uma lei de controle que minimize a função de custo (AGUIRRE, 2007).

### 2.3.2 Controle LQR

O controle linear quadrático regulador (LQR) é um tipo de controle ótimo que visa minimizar uma função de custo quadrática, que é uma combinação da energia de controle e do erro quadrático do estado do sistema em relação ao estado desejado (FRANKLIN, Gene F; POWELL, J David; WORKMAN *et al.*, 1998). A solução para o problema LQR pode ser encontrada usando a equação de Riccati algébrica, que fornece a matriz de ganho ótima do controlador.

Dado um sistema linear com a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{11}$$

O objetivo do controle LQR é determinar a lei de controle  $u(t) = -Kx(t)$ , de tal forma que a função de custo:

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt\tag{12}$$

seja minimizada, onde  $Q$  e  $R$  são matrizes de peso positivas definidas (OGATA, Katsuhiko, 2010a).



## 2.4 OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE

A observabilidade e controlabilidade são propriedades fundamentais de um sistema LTI. Estas propriedades determinam se é possível controlar ou observar o estado de um sistema a partir das entradas e saídas disponíveis.

A controlabilidade está relacionada à capacidade de levar um sistema de um estado inicial a um estado final, através da manipulação das entradas do sistema em um tempo finito. Um sistema é dito controlável se, e somente se, existir uma sequência de entradas que possa levar o sistema de qualquer estado inicial a qualquer estado final em um tempo finito (OGATA, K., 2011).

A observabilidade, por outro lado, está relacionada à capacidade de determinar o estado inicial do sistema, utilizando apenas as saídas do sistema. Um sistema é dito observável se, e somente se, o estado inicial do sistema puder ser determinado a partir das saídas observadas em um intervalo de tempo finito (OGATA, K., 2011).

Os testes de controlabilidade e observabilidade são realizados utilizando as matrizes de controlabilidade e observabilidade. A matriz de controlabilidade, denotada por  $C$ , é definida como:

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde  $A$  é a matriz do sistema e  $B$  é a matriz de entrada. Um sistema é controlável se, e somente se, a matriz de controlabilidade  $C$  tiver posto completo, ou seja,  $\text{rank}(C) = n$ , onde  $n$  é a dimensão do estado do sistema.

A matriz de observabilidade, denotada por  $O$ , é definida como:

$$O = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \cdots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

onde  $C$  é a matriz de saída. Um sistema é observável se, e somente se, a matriz de observabilidade  $O$  tiver posto completo, ou seja,  $\text{rank}(O) = n$ .

Existem diferenças nos testes de observabilidade para observadores de ordem plena e de ordem mínima. Para observadores de ordem plena, todo o vetor de estado é reconstruído a partir das saídas do sistema, e o teste de observabilidade é aplicado diretamente como apresentado anteriormente. Já para observadores de ordem mínima, apenas parte do vetor de estado é reconstruída. Neste caso, é necessário verificar a observabilidade de um subconjunto do vetor de estado e modificar os testes de observabilidade de acordo (DOYLE *et al.*, 1989).

## 2.5 MÉTODO DE ACKERMANN

O método de Ackermann é baseado na ideia de que a localização dos polos de um sistema é crucial para o seu desempenho. Em outras palavras, a estabilidade e a resposta transitória de

um sistema podem ser controladas ajustando-se a localização dos polos do sistema. O método fornece uma maneira sistemática de fazer isso sendo representado pela seguinte Equação (15).

$$K = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1][B:AB:\cdots A^{n-1}B]^{-1}\phi(A) \quad (15)$$

Onde:

- $A$  é a matriz do sistema,
- $B$  é a matriz de entrada,
- $n$  é a ordem do sistema,
- $\phi(A)$  é a matriz companheira do polinômio característico desejado,
- $K$  é o vetor de ganhos do controlador.

O método de Ackermann é particularmente útil quando se lida com sistemas de ordem elevada, onde a localização manual dos polos pode ser difícil ou impraticável. No entanto, é importante notar que o método assume que o sistema é controlável.

## 2.6 OBSERVADORES DE ESTADO

Os observadores são uma parte crucial dos sistemas de controle modernos. Eles são projetados para estimar o estado de um sistema quando as medições diretas de todas as variáveis de estado não estão disponíveis ou são impraticáveis (DORF; BISHOP, 1998). De acordo com (OGATA, Katsuhiko, 2010b), um observador atua como um subsistema destinado a reconstruir o vetor de estado do sistema. O modelo matemático do observador é semelhante ao do sistema, com a adição de um termo que considera o erro de estimativa. Este termo ajuda a compensar possíveis imprecisões nas matrizes  $A$  e  $B$ , bem como a ausência do erro inicial. O erro de estimativa se refere à diferença entre a saída medida e a saída estimada, enquanto o erro inicial descreve a diferença entre o estado inicial e o estado inicial estimado. considerando o modelo da planta como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (16)$$

Então o modelo matemático de um observador pode ser definido como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu + K_e(y - C\tilde{x}) \\ &= (A - K_eC)\tilde{x} + Bu + K_e y \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $\tilde{x}$  é o estado estimado e  $C\tilde{x}$  a saída estimada, sendo as entradas do observador a saída  $y$  e do controlador a entrada  $u$ . a matriz de ganho do observador  $K_e$  faz a ponderação para o termo de correção que envolve a diferença entre a saída medida  $y$  e a saída estimada  $C\tilde{x}$ . Este termo corrige continuamente a saída do modelo e melhora o desempenho do observador. (OGATA, Katsuhiko, 2010b).

### 2.6.1 Observadores de ordem plena

O observador de ordem plena reproduzido em Figura 2 é uma ferramenta de controle que estima todas as variáveis de estado de um sistema, particularmente quando as medições diretas são inviáveis (OGATA, Katsuhiko, 2010b). Ele emprega um modelo do sistema e as entradas conhecidas para gerar essas estimativas (DORF; BISHOP, 1998). A equação de erro do observador pode ser obtida através da subtração da Equação (18) pela Equação (16).

$$\begin{aligned}\dot{x} - \dot{\hat{x}} &= Ax - A\hat{x} + K_e(Cx - C\hat{x}) \\ &= (A - K_eC)(\dot{x} - \dot{\hat{x}})\end{aligned}\tag{18}$$

o erro pode ser encontrado substituindo  $e = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$  na Equação (18) resultando na seguinte equação para o erro:

$$\dot{e} = (A - K_eC)e\tag{19}$$

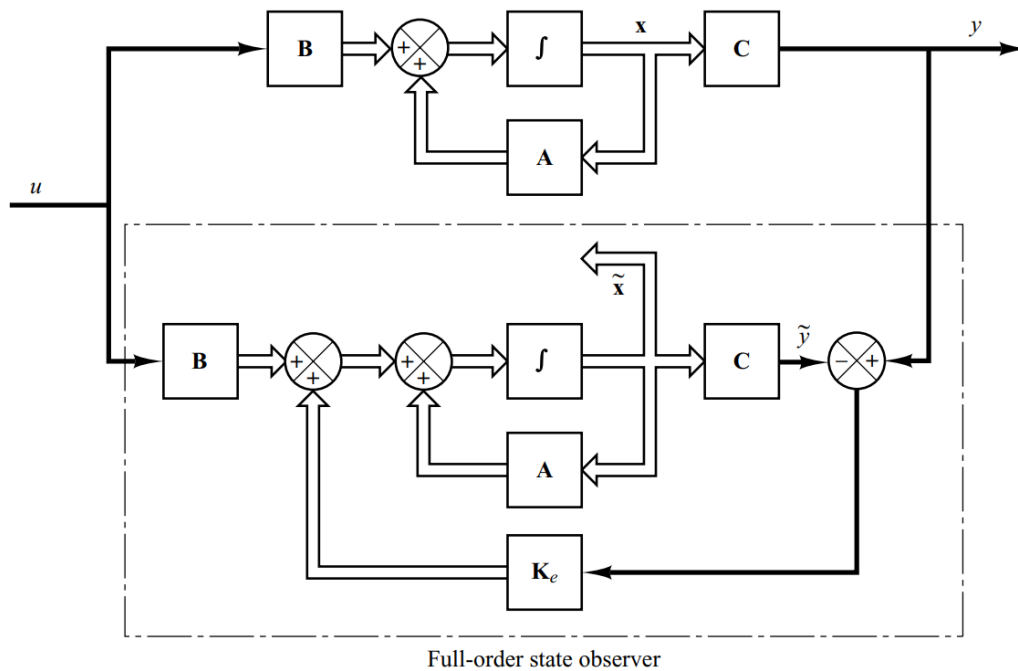
observando a Equação (23) fica claro que o processo de determinação do ganho  $K_e$  é o mesmo do ganho de realimentação de estados  $K$ , então a alocação de polos pode ser feita utilizando a equação característica que resulta na seguinte equação:

$$|sI - (A - CK_e)| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_n)\tag{20}$$

No contexto de controladores digitais, a implementação de um observador de ordem plena pode ser formulada pela seguinte equação:

$$\hat{x}(k+1) = (A_d - K_eC_d)\hat{x} + B_d u(k) + K_e y(k)\tag{21}$$

Figura 2 – Diagrama de blocos de um observador de ordem plena.



Fonte: Katsuhiko Ogata (2010b)

### 2.6.2 Observadores de ordem reduzida

Os observadores de ordem reduzida são vitais quando nem todas as variáveis de estado podem ser medidas diretamente. Estes estimam apenas um subconjunto das variáveis de estado a partir das medidas disponíveis e da entrada do sistema. Contudo, sua aplicação é limitada em ambientes ruidosos, pois tendem a amplificar o ruído (OGATA, Katsuhiko, 2010b). Portanto, não são a melhor escolha para projetos sujeitos a tais condições. sua representação do seu espaço de estados é:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_a \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u \quad (22)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$$

Sua equação pode ser construída a partir das equivalências com os elementos do observador pleno descritos pela Tabela 1.

Com base na Equação (18), ao fazermos as devidas substituições nas equações do observador de ordem completa, obtemos as equações para o observador mínimo. Para a implementação do em um controlador digital podemos utilizar a seguinte equação:

Tabela 1 – Lista de Substituições Necessárias para Escrever a Equação do Observador para o Observador de Estado de Ordem Mínima

Ordem Plena	Ordem Reduzida
$\tilde{x}$	$\tilde{x}_b$
$A$	$A_{bb}$
$Bu$	$A_{ba}x_a + B_bu$
$y$	$\dot{x} - A_{aa}x_a - B_a u$
$C$	$A_{ab}$
$K_e[n - \times \text{matriz}]$	$K_e[(n - 1) \times \text{matriz}]$

Fonte: Katsuhiko Ogata (2010b)

$$\hat{x}_b(k+1) = (A_{bb} - K_e A_{ab})\hat{x}(k) + (B_b - K_e B_a)u(k) + K_e y(k+1) + (A_{ba} - K_e A_{aa})y(k) \quad (23)$$

### 3 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta a metodologia adotada para desenvolver o trabalho e alcançar os objetivos propostos. A metodologia é dividida em etapas, cada uma focada em um aspecto específico do problema e do sistema em estudo.

#### 3.1 CONSTRUÇÃO DO PROTÓTIPO

No processo de desenvolvimento do protótipo, uma etapa crucial foi a seleção dos componentes apropriados, visando assegurar o êxito do projeto. Os critérios principais para a escolha dos componentes consistiram na disponibilidade na instituição e no custo dessas peças. Considerando tais fatores, a intenção era garantir que o projeto não apenas fosse viável e acessível, mas que atende-se os criterios necessarios que um sistema BoW exige.

##### 3.1.1 Seleção dos Componentes

- Motor: Canon NF5475 (3), um motor DC com escovas, com 38 Vcc de tensão nominal, sendo que no projeto foram utilizadas tensões até 24Vcc. Possui diâmetro de 54 mm, altura de mm e alcança até 4884 RPM(CANON..., Acessado em: 18/05/2023). Além disso, conta com um *encoder* integrado, com resolução de 200 pulsos por revolução. A escolha de um motor de segunda mão permitiu redução de custos sem comprometer a adequação às especificações do projeto, e o *encoder* facilitou a integração ao sistema de controle.

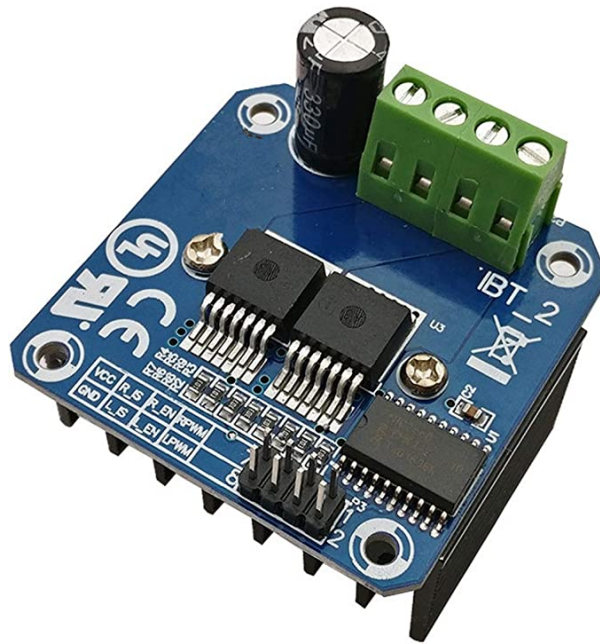
Figura 3 – Canon NF5475E



Fonte: (CANON..., Acessado em: 18/05/2023), Editado pelo Autor

- Ponte H: BTS7960 High Current H-Bridge Motor Driver (4) é um dispositivo eletrônico usado em sistemas de robótica e automação, capaz de fornecer correntes de até 43 Amperes. Possui proteções contra sobrecorrente, sobretensão, temperatura e curto-circuito, garantindo segurança. Além disso, a BTS7960 é bidirecional, permitindo controle do sentido de rotação do motor, e possui circuito de controle PWM para ajuste de velocidade(BTS7960..., Acessado em: 18/05/2023).

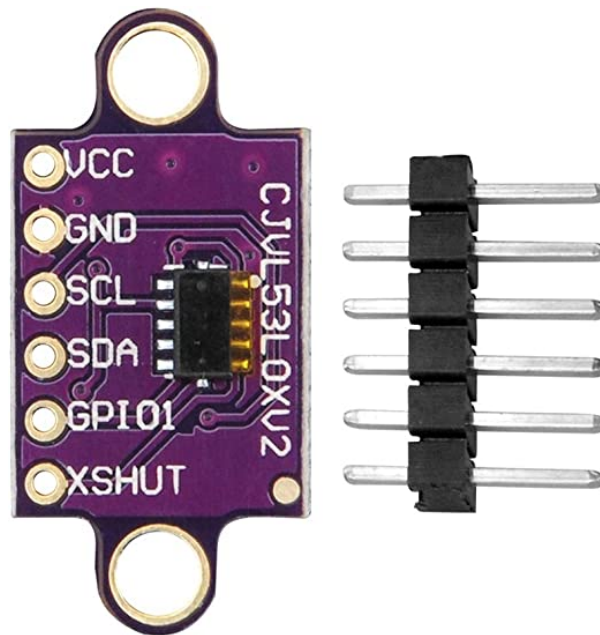
Figura 4 – BTS7960 High Current 43A H-Bridge Motor Driver



Fonte: (CANON..., Acessado em: 18/05/2023), Editado pelo Autor

- Sensor: VL53L0X (5) é um dispositivo compacto e preciso que utiliza a tecnologia ToF para medir distâncias entre 2 centímetros e 2 metros em tempo real, com precisão de  $\pm 3$  por cento (VL53L0X..., Acessado em: 18/05/2023). Este sensor é popular em aplicações de robótica, automação industrial e sistemas de segurança devido à sua precisão, baixo consumo de energia e tamanho reduzido. Ele se comunica através de uma interface I2C e pode detectar a presença de objetos com base na reflexão de luz. Contudo, o desempenho do VL53L0X pode ser afetado por fatores externos, como luz intensa ou superfícies escuras, exigindo testes adequados para garantir seu uso correto.

Figura 5 – VL53L0XV2 Distance Sensor



Fonte: (CANON..., Acessado em: 18/05/2023), Editado pelo Autor

- Microcontrolador: Arduino Mega (6a), que utiliza o chip Atmega2560, é ideal para projetos maiores e mais complexos, graças à sua maior capacidade de processamento e recursos, incluindo 54 pinos digitais, 16 pinos analógicos e frequência de clock de 16MHz(ARDUINO..., n.d.). As placas Arduino, programáveis em linguagem baseada em C, possuem uma vasta gama de bibliotecas e shields disponíveis para facilitar o desenvolvimento. Devido às limitações do Mega, um Arduino Uno (6b) foi empregado exclusivamente para a leitura em quadratura do encoder. O Uno, baseado no chip Atmega328P, é compacto e de baixo custo, com 14 pinos digitais, 6 pinos analógicos e frequência de clock de 16MHz(ARDUINO..., n.d.), sendo adequado para projetos menores e mais simples.
- Fonte de Energia: Chaveada de 24Vcc e 10 Amperes que converte a tensão da rede elétrica em 24Vcc, sendo ideal para sistemas eletrônicos e industriais que requerem alta corrente e estabilidade de tensão. Sua tecnologia de chaveamento proporciona eficiência energética e menor consumo em comparação com fontes lineares tradicionais. A escolha de uma fonte adequada é crucial para garantir o bom funcionamento e a segurança do sistema.
- Bola: Feita de Borracha, com 0,054 m de diâmetro e 0,045 Kg de massa, proporciona aderência e tração para o sistema e é uma opção de baixo custo encontrada em lojas de brinquedos. É essencial que a bola tenha dimensões e massa adequadas para



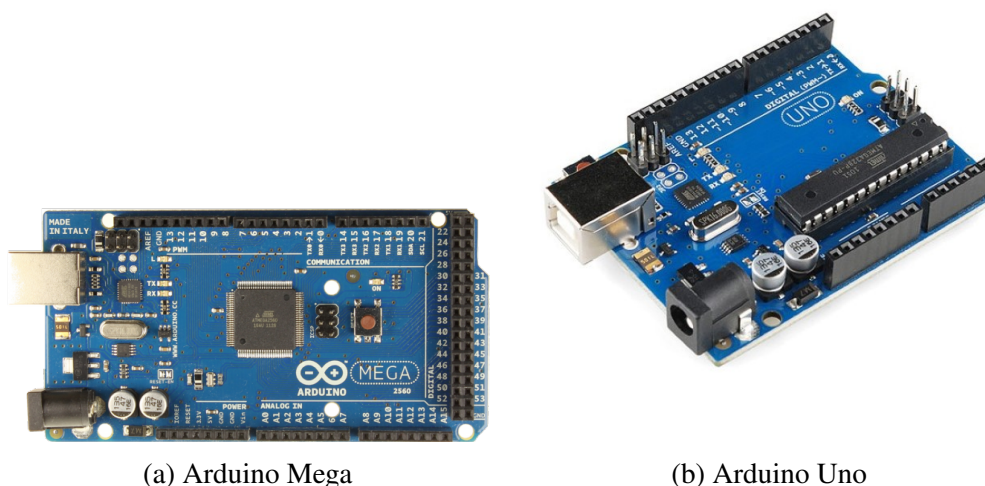


Figura 6 – Microcontroladores

assegurar o desempenho do protótipo, além de ser feita de material resistente ao desgaste e com boa aderência para garantir durabilidade e eficiência.

### 3.1.2 Partes Impressas em 3D

Para projetar a roda do sistema, foi utilizado um *software* de modelagem 3D, com o objetivo de reduzir sua massa e garantir a compatibilidade com a bola selecionada. O desenho 3D disponível na Figura 7 foi baseado no formato de colmeia de mel, visando melhor desempenho e estabilidade durante o funcionamento. Após o processo de modelagem, o arquivo foi convertido em G-Code, utilizando um *software* de fatiamento adequado, e a impressão foi realizada com PLA, um material amplamente utilizado em impressão 3D, com preenchimento cúbico de 20 por cento.

Figura 7 – Modelo da Roda no *software* de Fatiamento

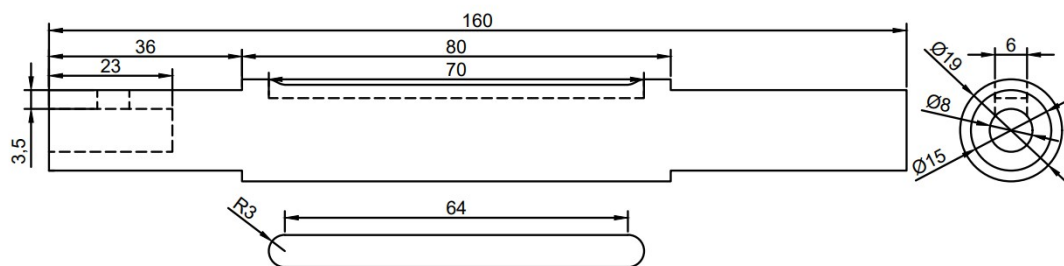
Fonte: (autor)

Além da roda, também foram projetados e impressos suportes para o motor e o sensor do sistema. Esse processo de impressão 3D permitiu a criação de componentes precisos e personalizados, adequados às especificações do projeto e garantindo seu bom funcionamento.

### 3.1.3 Eixo da Roda

Um dos componentes essenciais para o funcionamento adequado do sistema é o eixo de alumínio. Esse eixo foi projetado para fixar a roda ao motor e ao rolamento interno de um mancal, garantindo assim a estabilidade e a precisão do movimento. A representação do eixo com suas medidas está disponível na figura 8.

Figura 8 – Desenho do eixo da roda



Fonte: (autor)

O processo de usinagem foi escolhido por sua capacidade de produzir peças precisas e de alta qualidade, adequadas às especificações do projeto. Com a utilização do alumínio como material, foi possível produzir um eixo resistente e leve, reduzindo assim a inércia do sistema e permitindo movimentos mais precisos e suaves.

### 3.1.4 Integração dos Componentes Elétricos

A conexão entre os componentes do sistema como demonstrado na figura 9 consiste em componentes eletrônicos selecionados anteriormente, como um motor DC controlado por uma Ponte H através de um sinal PWM, um sensor óptico com interface I2C para medição da posição

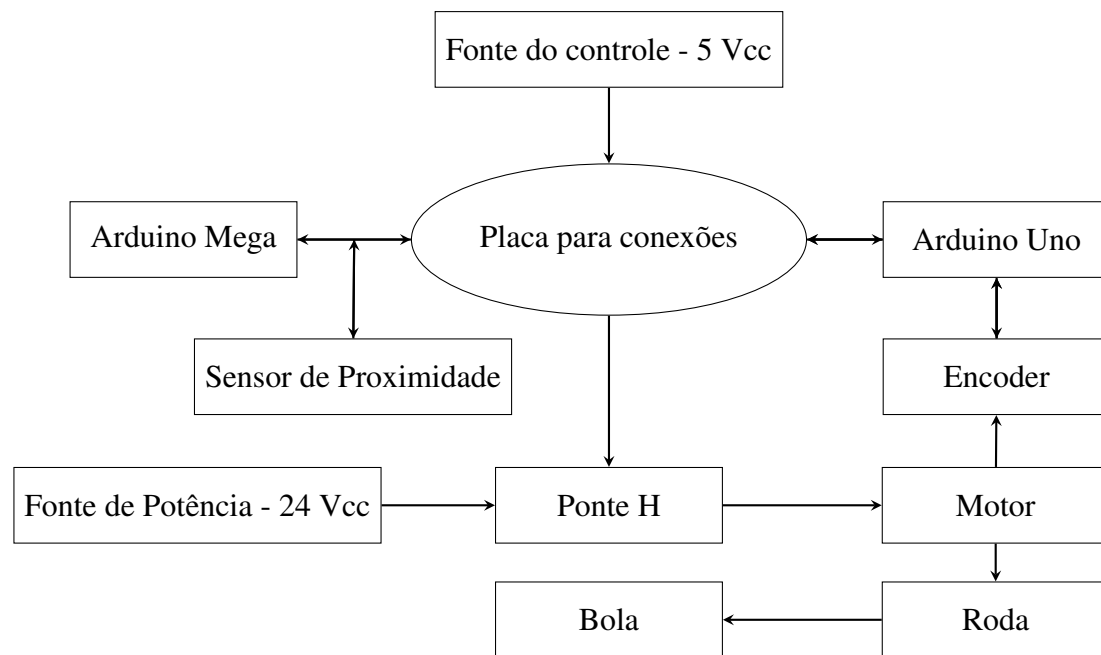


Figura 9 – Conexão entre os elementos do sistema

da bola e um Encoder acoplado ao motor para a medição da posição da roda. O Arduino Uno lê o sinal do Encoder e envia um sinal I2C para o Arduino Mega, que também recebe os sinais do sensor óptico por I2C, controla o motor via ponte H e o motor movimenta a roda. A alimentação do circuito é fornecida por uma fonte chaveada de 24Vcc para a Ponte H e uma fonte de 5Vcc para o microcontrolador, o sensor óptico e o Encoder.

Visando garantir a correta conexão entre os elementos elétricos do circuito, foi desenvolvido um diagrama disponível na figura 10 detalhado que contempla a interligação dos componentes eletrônicos utilizados, o que permitiu uma melhor compreensão do funcionamento do circuito e foi fundamental para a confecção da PCB que visa diminuir possíveis erros de contato entre os elementos.

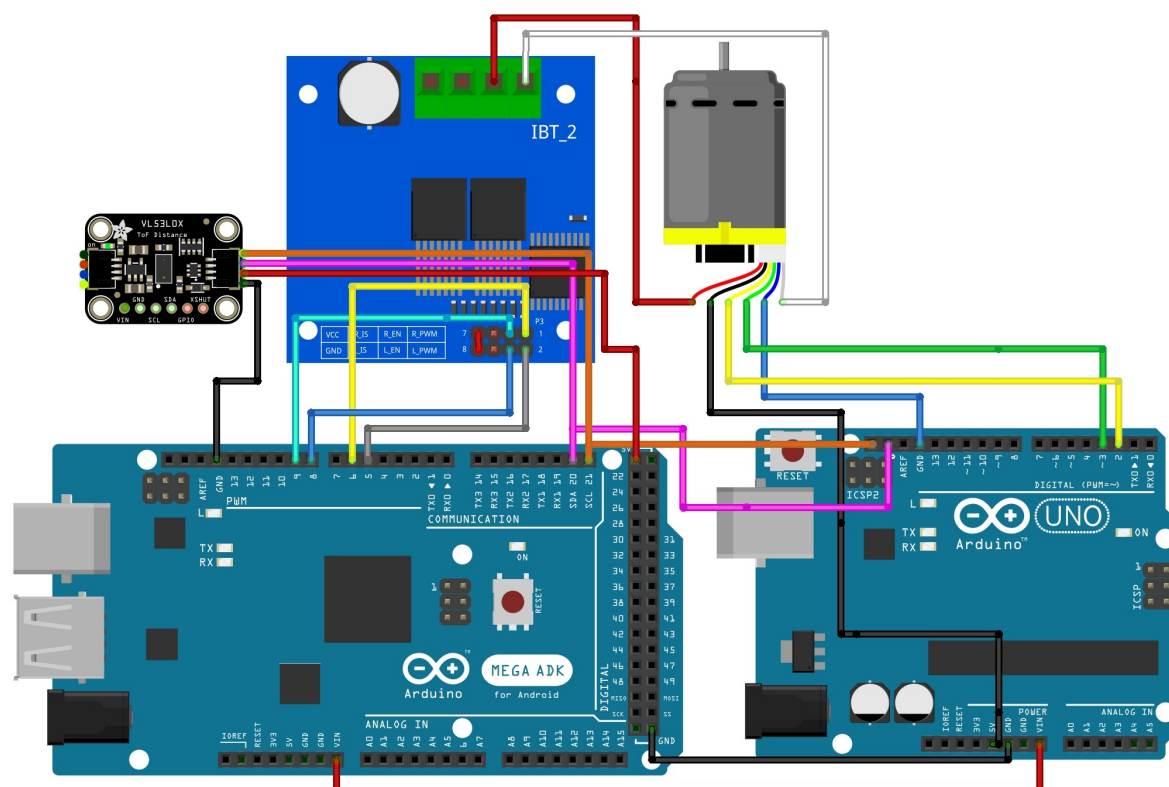


Figura 10 – Diagrama do Circuito Utilizado

Fonte: **(autor)**

Para a confecção da PCB, foi utilizada uma máquina para usinagem de placas disponibilizada pela instituição, que utiliza o método de fresagem para remover o cobre da placa e criar as trilhas. A partir do diagrama do circuito, foi gerado um arquivo em formato de imagem importado para o *software* de controle da máquina. Após a usinagem da placa, os componentes eletrônicos foram fixados por solda nos devidos locais para a finalização da montagem do circuito.

### 3.1.5 Montagem Final

Após a confecção da PCB e impressão 3D das partes, todos os componentes foram montados em uma estrutura retangular de alumínio extrudado projetada para permitir ajustes na posição do sensor. A estrutura disponível na Figura 11 foi concebida para ser compacta e leve, facilitando o transporte do sistema. A capacidade de ajustar a posição do sensor tornou os testes mais eficientes e flexíveis, permitindo que mudanças na planta sejam feitas de forma rápida e fácil.

Figura 11 – Montagem final do sistema BoW sem a bola



Fonte: (autor)

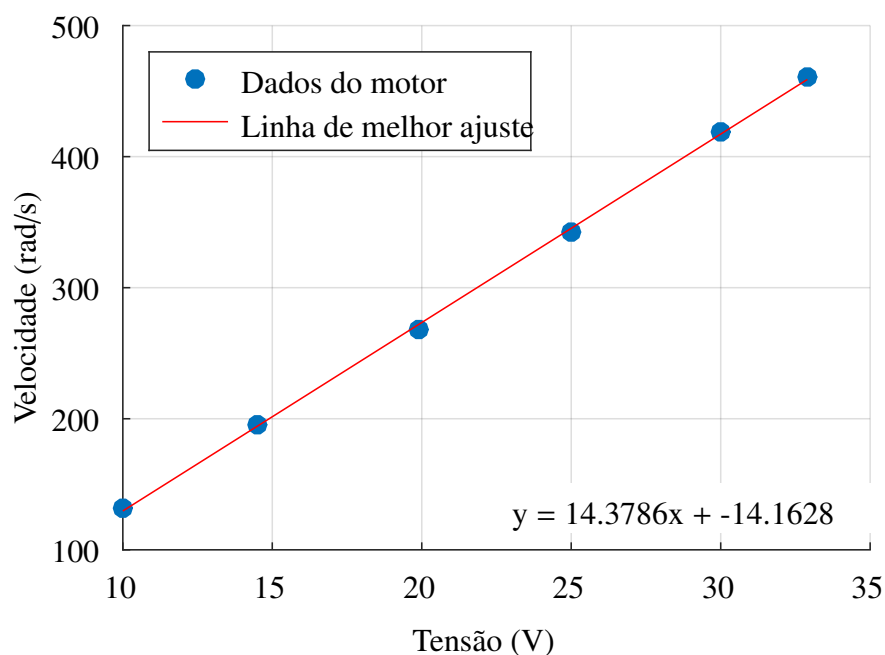
## 3.2 MODELAGEM DO SISTEMA

A modelagem do sistema BoW é realizada através do espaço de estados, que consiste em um conjunto de equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico do sistema. O modelo de espaço de estados utilizado na modelagem que está disponível na Seção 2.1.2 foi baseado em modelos utilizados em trabalhos relacionados como (HO, ano de publicação; PEZHMAN, ano de publicação).

### 3.2.1 Obtenção de Variáveis

Os valores das variáveis que estão listados na Tabela 2 foram encontrados utilizando métodos práticos e matemáticos dependendo da variável desejada. Com o intuito de encontrar o valor para a resistência de armadura do motor e da constante do motor, foi realizado um teste utilizando o motor sem carga e ligado a uma fonte de tensão variável.

Figura 12 – Teste do motor.



Fonte: O autor (2023)

O experimento foi realizado em diferentes valores de tensão aplicados ao motor, e um tacômetro foi utilizado para verificar a velocidade em cada um desses valores. Utilizando esses dados, foi gerado um gráfico representado na Figura 12 que, após ser linearizado, resultou em  $14.3789x - 141628$ , onde  $K_m = 1/14.3789$ , ou seja  $K_m = 0.069546$ . Para calcular a resistência de armadura é necessário apenas o ponto onde a tensão será a máxima utilizada no projeto que é de aproximadamente  $24V_{cc}$  no gráfico. Fazendo a relação onde a tensão menos a constante do motor, vezes a velocidade, e tudo isso dividido pela corrente resulta em  $R_a = 3.767926$ . Para a bola, as variáveis de tamanho e massa foram obtidas através de medições, enquanto o momento de inércia foi calculado utilizando a equação de uma casca esférica (OPENSTAX, 2016):

$$I_b = \frac{2}{3}MR_b^2 \quad (24)$$

No caso da roda, as variáveis de tamanho e massa foram obtidas da mesma forma que para a bola. No entanto, o momento de inércia foi encontrado no *software* de modelagem 3D por meio do comando "propriedade de massa", que gera dados sobre a peça desenhada, incluindo o momento de inércia.

### 3.2.2 Espaço de Estado da Planta

Utilizando o modelo do espaço de estados da Equação (2), e substituindo as variáveis nas equações para  $a(3)$ ,  $b(4)$ ,  $c(5)$ ,  $q(7)$ ,  $p(6)$  e  $r(8)$ . obtemos os seguintes valores para as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$ :

Tabela 2 – Valores das Variáveis do Sistema

Símbolo	Variável	Valor
$g$	Gravidade	$9,815 \text{ m/s}$
$M$	Massa da Bola	$0.045 \text{ Kg}$
$R_b$	Raio da Bola	$0.027 \text{ m}$
$I_b$	Inercia da Bola	$0.00002187 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$R_w$	Raio da Roda	$0.123 \text{ m}$
$I_w$	Inercia da Roda	$0.0016522564 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$R_a$	Resistência de Armadura do Motor	$3.767926 \Omega$
$K_m$	Constante de Torque do Motor	$0.069546 \text{ N} \cdot \text{m/A}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 49.74 & 0 & 0 & -0.2518 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12.98 & 0 & 0 & -1.075 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.62 \\ 0 \\ 15.45 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

O espaço de estados obtido permite analisar e projetar um controlador para o sistema BoW. É importante mencionar que o modelo apresentado é uma simplificação e aproximação da realidade, sendo assim, o controlador projetado pode necessitar de ajustes e adaptações em sua implementação prática.

### 3.2.3 Algoritmo e Ferramentas de Simulação

O algoritmo que pode ser visualizado na Figura 13 é implementado no microcontrolador utilizando o *software* Arduino IDE. o código foi desenvolvido em linguagem C. Sendo projetado para controlar o motor com base nas entradas do sensor óptico e do *encoder*. As bibliotecas utilizadas já se encontram disponíveis no próprio *software*. O algoritmo implementado no código realiza as seguintes tarefas:

- **Inclusão das bibliotecas necessárias:** As bibliotecas `Wire.h`, `VL53L0X.h` e `avr/pgmspace.h` são incluídas para as comunicações I2C, operação do sensor VL53L0X e armazenamento de constantes na memória flash, respectivamente.
- **Inicialização das variáveis e constantes:** As variáveis são inicializadas para armazenar a posição do encoder, a posição e o ângulo do objeto, a potência e a direção do motor, entre outros. Além disso, as constantes são definidas para os pinos do motor, o raio da roda, a constante de conversão entre ângulo e posição, entre outros.
- **Configuração do sensor e do motor:** Na função `setup()`, o sensor VL53L0X e o motor são configurados para operação. Os pinos de controle do motor são configurados como saídas e o sensor é inicializado com um orçamento de tempo de medição e um tempo limite.
- **Cálculo do valor de controle:** Na função de interrupção `ISR(TIMER2_OVF_vect)`, o ângulo e a posição são calculados com base nas leituras do sensor e do encoder.

Essas informações são usadas para calcular o valor de controle para o motor, que é limitado entre -255 e 255.

- **Aplicação do valor de controle ao motor:** O valor de controle calculado é então aplicado ao motor através da função `setMotor()`, que controla a direção e a magnitude da potência aplicada ao motor.
- **Leitura e armazenamento dos dados do sensor e do encoder:** Na função `loop()` principal do Arduino, os dados do encoder são requisitados, a distância do sensor é lida e esses valores são armazenados para uso na próxima interrupção do temporizador.
- **Monitoramento do valor alvo:** A função `loop()` também verifica se o valor alvo mudou, e se sim, imprime o novo valor alvo na saída serial.



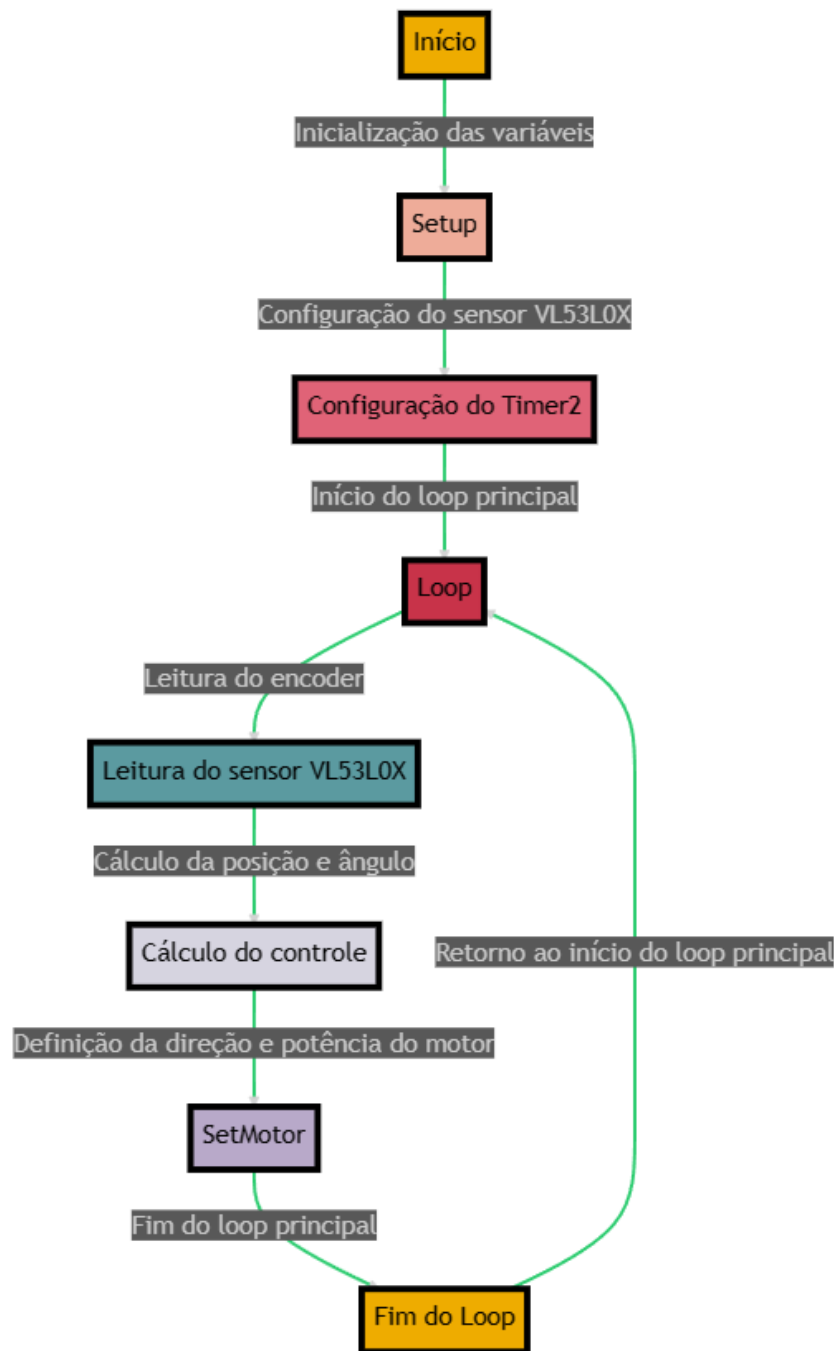


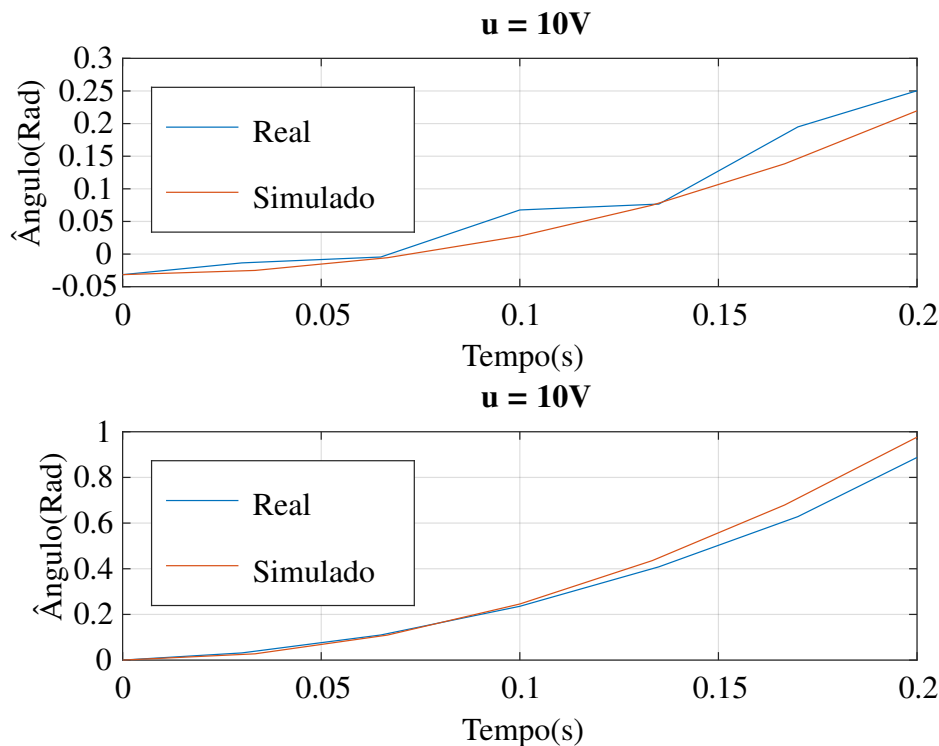
Figura 13 – Diagrama do algoritmo implementado

Fonte: O autor

A ferramenta de simulação utilizada para o projeto dentre as diversas opções disponíveis foi *software* GNU Octave devido à sua facilidade de uso e disponibilidade como *software* livre. O GNU Octave é uma linguagem de programação de alto nível voltada principalmente para computação numérica e é amplamente utilizado em áreas como engenharia, física e matemática. O GNU Octave é uma linguagem interpretada, o que significa que os comandos são executados diretamente sem a necessidade de compilação prévia. Isso permite que os usuários executem

Figura 14 – Teste em malha aberta aplicando 10 Vcc.

Fonte: Autor



cálculos interativamente e também criem scripts para realizar tarefas mais complexas. O GNU Octave possui uma ampla variedade de funções e pacotes disponíveis que permitem executar desde cálculos simples até simulações complexas de sistemas de controle.

### 3.2.4 Validação do Espaço de Estados

O processo de validação da planta consiste na execução de testes em diferentes situações, com modificações na tensão do motor, aplicando valores de 5 Vcc, 10 Vcc(14), 15 Vcc(15), 20 Vcc e 24 Vcc(16). O objetivo é simular diferentes cenários, posicionando a bola no centro da roda e enviando um sinal de degrau ao motor para rotacionar a roda. Após a queda da bola, o sistema é desligado manualmente e os resultados dos sensores são utilizados em um código desenvolvido no *software* Octave para simular o sinal do ângulo da bola em relação ao eixo central e da roda em relação ao eixo central.

Os resultados são comparados com o sinal real, e é possível observar que a resposta da prova real segue a tendência do sinal simulado, apresentando pequenas divergências devido a outros fatores não considerados na criação do espaço de estados como o atrito da planta, também há alguma imprecisão nos valores do motor e da inércia da roda devido aos métodos utilizados nas medições.

Figura 15 – Teste em malha aberta aplicando 15 Vcc.

Fonte: Autor

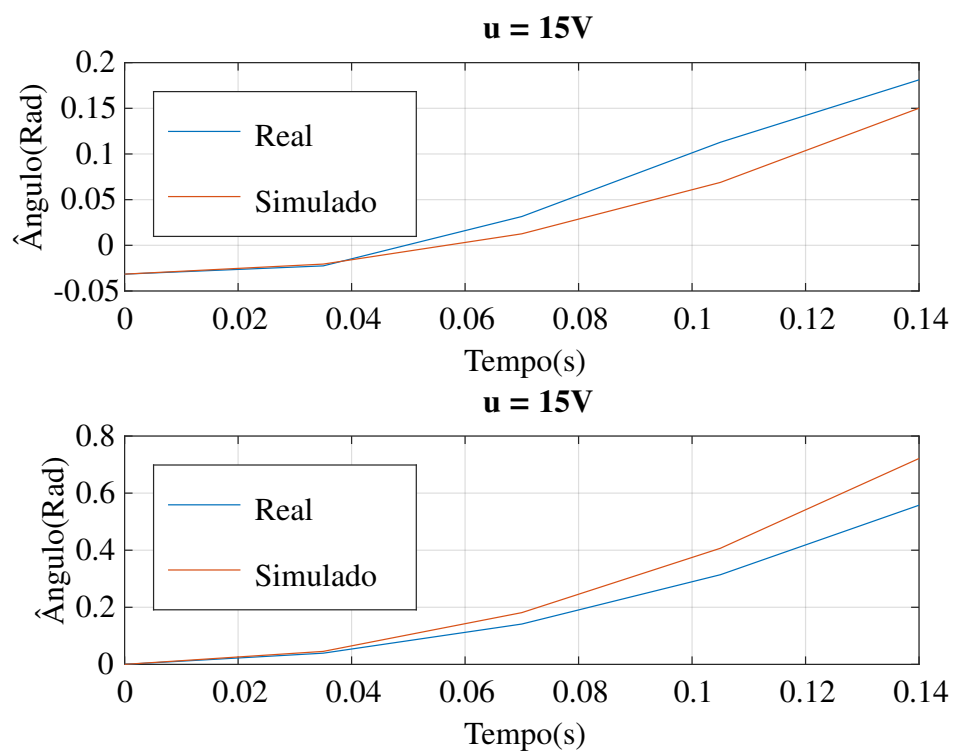
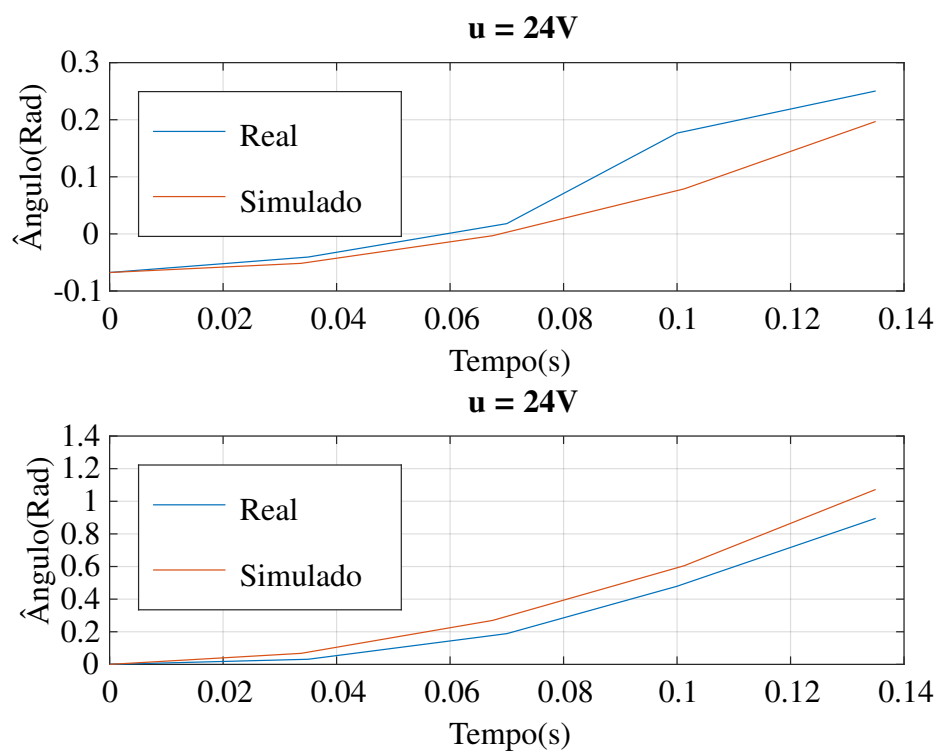


Figura 16 – Teste em malha aberta aplicando 24 Vcc.

Fonte: Autor



## 4 DESENVOLVIMENTO DO CONTROLE

Nesta seção, daremos continuidade ao desenvolvimento do controle para o sistema BoW, com base no espaço de estados obtido no processo de modelagem. Utilizando o software GNU Octave, foram desenvolvidos os códigos para a construção do controlador e dos observadores, permitindo a simulação e análise do sistema.

### 4.0.1 Teste de Estabilidade do Sistema

A estabilidade de um sistema é um aspecto fundamental para o seu correto funcionamento. Nesta subseção, serão analisados dois métodos para comprovar a instabilidade do sistema: a análise dos autovalores e a resposta do sistema a uma entrada em impulso.

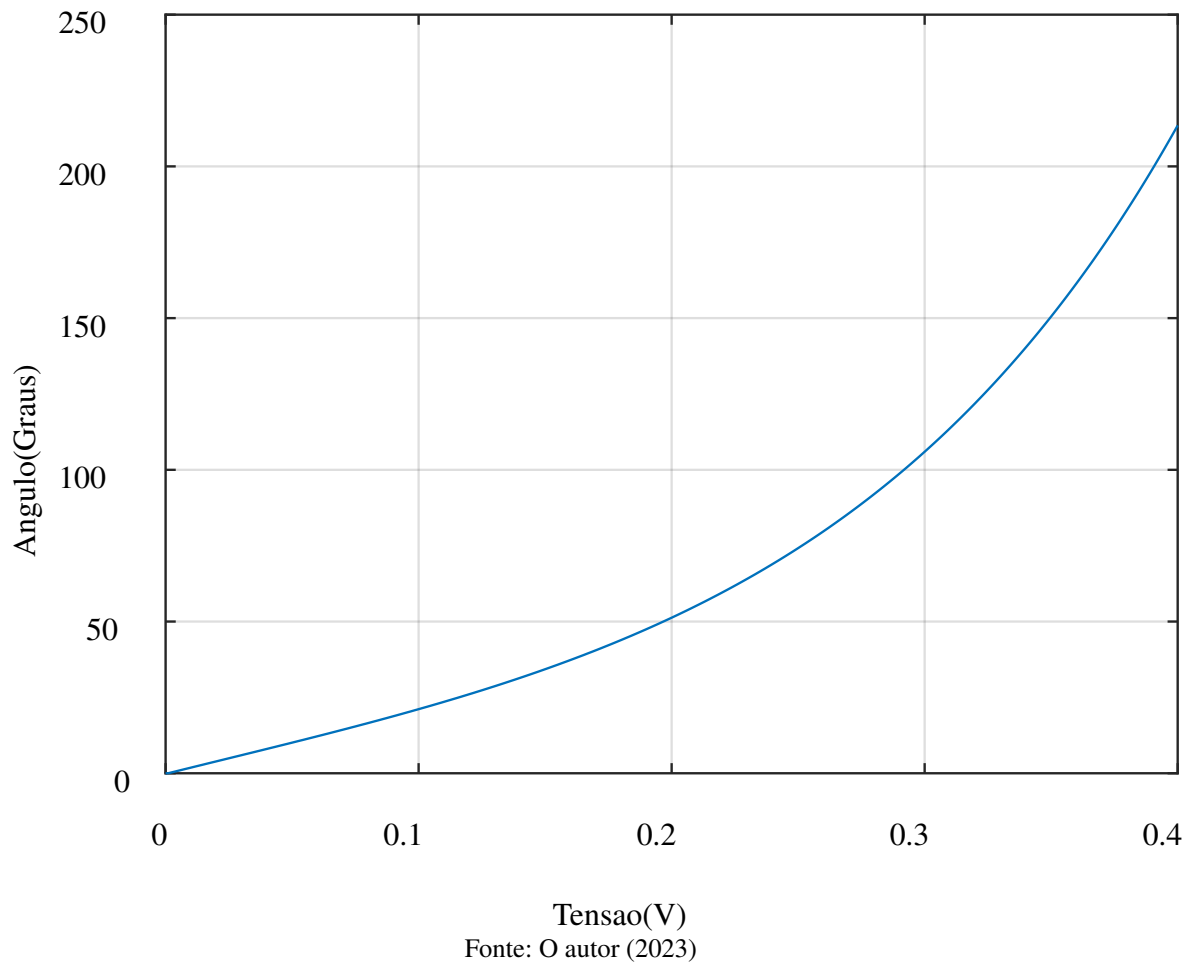
Uma maneira de verificar a estabilidade é por meio dos autovalores do sistema, também conhecidos como polos. Os polos do sistema são dados pela matriz:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.1508 \\ 0.86778 \\ 0.98005 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Observa-se que todos os polos são positivos. Essa característica indica que o sistema é instável. Polos positivos indicam que as variáveis de estado do sistema crescem indefinidamente ao longo do tempo, levando a um comportamento não desejado.

Outra forma de comprovar a instabilidade é analisar a resposta do sistema a uma entrada em impulso. Ao simular o comportamento do sistema nessa condição, observa-se que o sistema se desestabiliza e as variáveis de estado tendem ao infinito. Na prática, isso significa que a bola cai da roda, indicando que o sistema não está funcionando de forma adequada. A Figura 17 apresenta o resultado da simulação do ângulo da bola quando aplicado um impulso.

Figura 17 – Resposta ao impulso do sistema



A partir dessas análises, é evidente que o sistema apresenta instabilidade. Os polos positivos e a resposta do sistema em impulso corroboram essa conclusão. Essa instabilidade compromete o correto funcionamento do sistema e indica a necessidade de desenvolver estratégias de controle para estabilizá-lo.

#### 4.0.2 Teste de Controlabilidade e Observabilidade

Antes de prosseguir com o projeto do controle para o sistema BoW, é fundamental verificar se o sistema é controlável e observável. Essas propriedades são essenciais para garantir que o projeto do controlador e dos observadores seja viável e eficiente. Com base na Equação (13) de controlabilidade e na Equação (14) de observabilidade, a ordem dos valores na matriz foi alterada com o objetivo de verificar a observabilidade de ordem mínima. Isso foi feito para garantir que as variáveis de estado relevantes estivessem dispostas de forma adequada, permitindo a análise das propriedades de observabilidade do sistema reduzido e a aplicação de técnicas de controle baseadas em observadores. A matriz de estados  $A$ , a matriz de entrada  $B$  e a matriz de saída  $C$  são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 49.74 & 0 & 0 & -0.2518 \\ 12.98 & 0 & 0 & -1.075 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.62 \\ 15.45 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Utilizando o *software* GNU Octave, foi realizada a análise no espaço de estados da planta. Verificou-se que o sistema é controlável e observável em ambos os casos, tanto para o observador de ordem mínima quanto para o observador de ordem plena. Essa constatação é de extrema importância, pois valida que as técnicas de controle baseadas em realimentação de estados e observadores de estado podem ser aplicadas ao sistema BoW. A análise no espaço de estados da planta é feita utilizando o *software* GNU Octave. Ao aplicar essas equações no sistema, verificou-se que a planta é controlável e observável em ambos os casos, tanto para o observador de ordem mínima quanto para o observador de ordem plena.

#### 4.1 PROJETO DO CONTROLADOR

Nesta seção, vamos abordar o desenvolvimento do controle para o sistema BoW, utilizando o espaço de estados obtido no processo de modelagem. O *software* GNU Octave foi utilizado para desenvolver os códigos necessários para a construção do controlador e dos observadores, permitindo a simulação e análise do sistema.

##### 4.1.1 Discretização do Sistema

A discretização do sistema BoW é uma etapa essencial para o desenvolvimento do controle, especialmente quando consideramos a implementação prática no Arduino Mega. A discretização envolve a transformação do modelo contínuo em um modelo discreto, adequado para a implementação de um controlador digital. O Arduino Mega é um microcontrolador que opera em tempo discreto, ou seja, suas operações são realizadas em intervalos de tempo discretos. Portanto, para controlar o sistema BoW utilizando o Arduino Mega, é necessário primeiro discretizar o sistema e projetar um controlador que funcione desta forma. Antes de discretizar o sistema, foram analisados os *datashets* dos componentes para verificar o tempo de amostragem mínimo possível de implementar no sistema. Sendo que o tempo de amostragem selecionado para a discretização do sistema foi de 0.02 segundos. Essa escolha foi baseada no menor tempo de resposta do sensor de distância ToF, que garante uma adequada captura dos dados. As matrizes discretas do sistema BoW resultaram na seguinte Equação (28):

$$A_d = \begin{bmatrix} 1.01 & 0 & 0.02007 & -5.008 \times 10^{-5} \\ 0.002582 & 1 & 1.724 \times 10^{-5} & 0.01979 \\ 0.9975 & 0 & 1.01 & -0.004998 \\ 0.2577 & 0 & 0.002582 & 0.9787 \end{bmatrix} B_d = \begin{bmatrix} 0.0007201 \\ 0.003069 \\ 0.07187 \\ 0.3058 \end{bmatrix} C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

#### 4.1.2 Controlador LQR

O controle linear quadrático é uma técnica amplamente utilizada para projetar controladores ótimos para sistemas lineares. Sendo especialmente adequado para sistemas discretizados e oferece uma abordagem sistemática para realocar os autovalores do sistema a fim de atingir os objetivos desejados de controle.

Uma vez estabelecida a controlabilidade e observabilidade do sistema, podemos prosseguir com o projeto do controlador LQR. O objetivo é encontrar um ganho de realimentação de estados que minimize uma função de custo definida, geralmente expressa como a soma ponderada dos estados e entradas do sistema.

A função de custo da Equação (29) é caracterizada pelas matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ . Sendo que a matriz  $Q$  está relacionada às variáveis de estado e é uma matriz quadrada com dimensões iguais ao número de estados do sistema. Por sua vez, a matriz  $R$  está relacionada às entradas do sistema e é um escalar (ou uma matriz diagonal caso haja múltiplas entradas). Onde para  $R$  quanto menor o valor, maior será a energia do sistema, ou seja, a ação de controle se torna mais brusca, e para um  $R$  maior a ação torna-se mais suave. Já para a matriz  $Q$  quanto maior o valor de uma variável, maior será sua prioridade para alcançar a estabilidade no controle.

Os valores  $Q$  e  $R$  utilizados no controlador foram obtidos experimentalmente na planta após testes com diferentes valores. os melhores resultados obtidos resultaram nos valores da Equação (29).

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000000001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$R = 100$$

Para determinar o ganho  $K$  foi utilizado o algoritmo da Figura 18 obtido em (CASTRUCCI, 2015), A fim de garantir a convergência da solução da equação de Riccati, é necessário escolher um valor adequado para o parâmetro  $N$ . O parâmetro  $N$  representa o número de iterações realizadas no algoritmo de repetição para calcular o vetor de realimentação  $K$  no LQR. Quanto maior o valor de  $N$ , maior será a precisão e a estabilidade alcançadas na solução do sistema.



```

Iniciar  $F = Q$ ;
Para  $k$  de 1 até  $N$ 
     $W = R + B_d^T F B_d$ ;
     $P = F - F B_d W^{-1} B_d^T F$ ;
     $F = A_d^T P A_d + Q$ ;
fim para;
 $K = W^{-1} B_d^T F A_d$ 

```

Figura 18 – Algoritmo para Encontrar o Valor de Ganho K

Fonte: (CASTRUCCI, 2015)

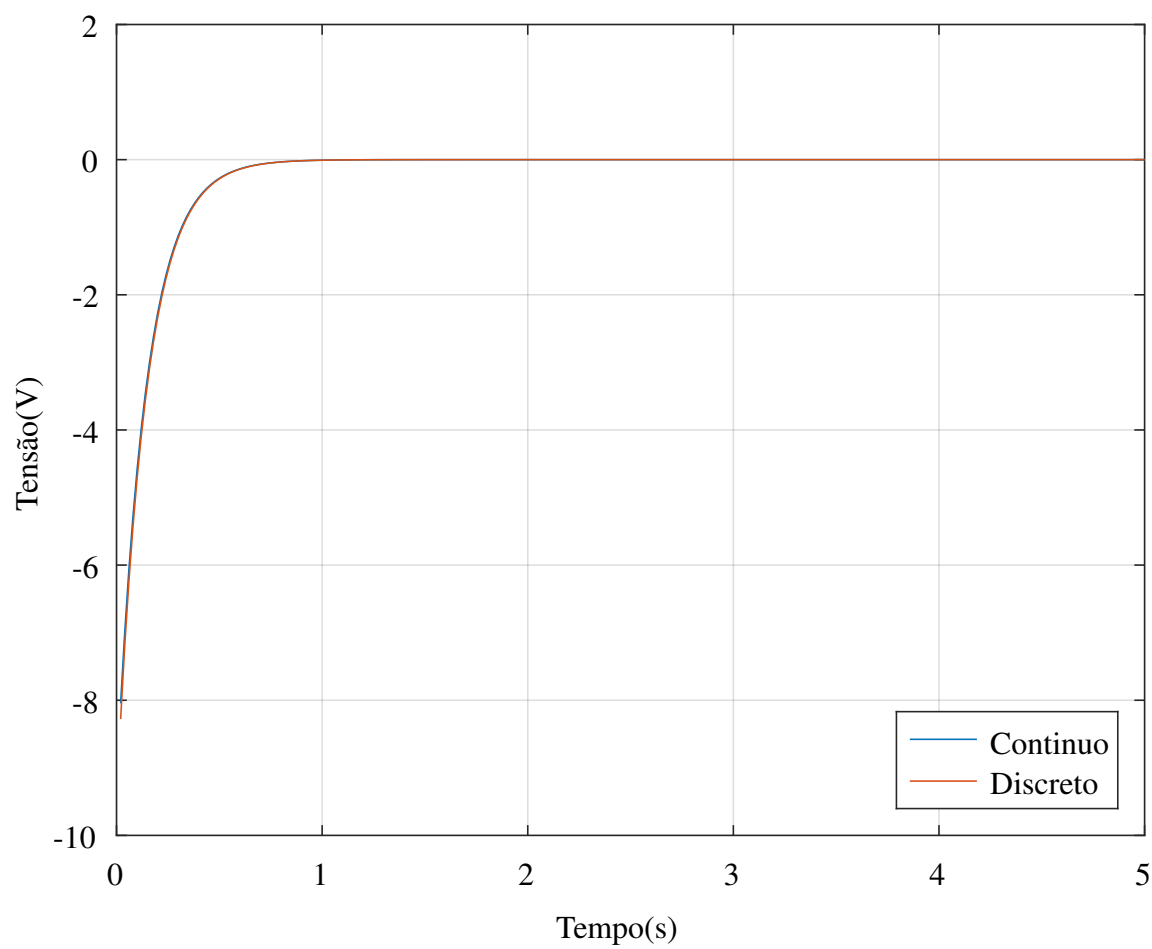
Ao executar o algoritmo temos como resultado a Equação (30) de ganho K do controlador LQR com os seguintes valores:

$$K = \begin{bmatrix} 31.427 & -0.0000031623 & 4.4743 & -0.1391 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Para verificar a eficácia do controle LQR, é útil visualizar o comportamento das variáveis do sistema, como posição e velocidade, em relação ao tempo. Isso pode ser feito simulações do sistemas que podem ser através dos gráficos nas Figuras 19, 20, 22, 21 e 23. Onde são ilustradas as mudanças nas variáveis ao longo do tempo. A posição e a velocidade da roda e da bola são variáveis particularmente importantes para o nosso sistema, e assim, elas são especificamente analisadas.

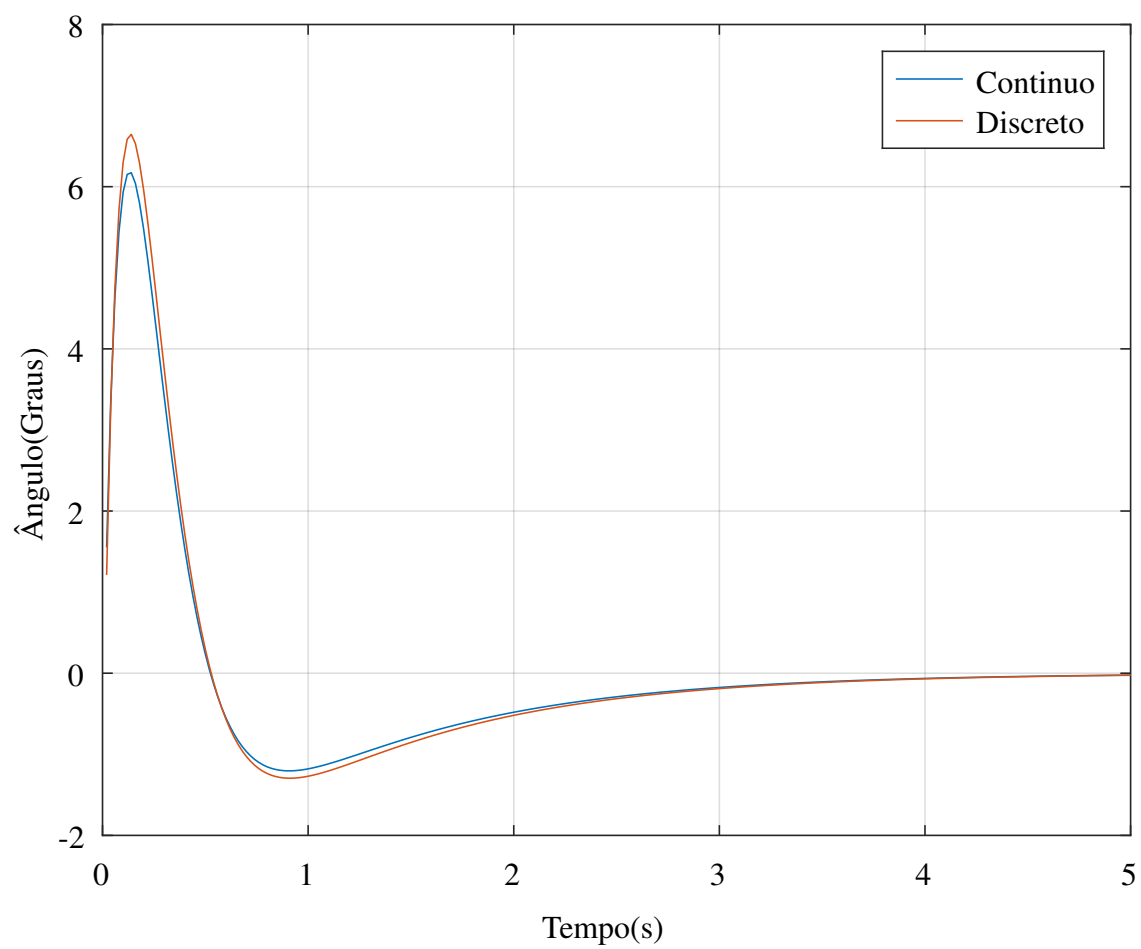
A ação de controle, que é a entrada no sistema, também é de interesse. Os gráficos de ação de controle mostram a evolução das entradas que o controlador LQR está fornecendo ao sistema para alcançar o desempenho desejado. Para confirmar que a discretização do sistema está correta, esses gráficos foram gerados em duas versões do sistema: uma contínua e outra discreta. A comparação entre os gráficos resultantes de ambas as versões permite a verificação da precisão da discretização.

Figura 19 – Ação de controle



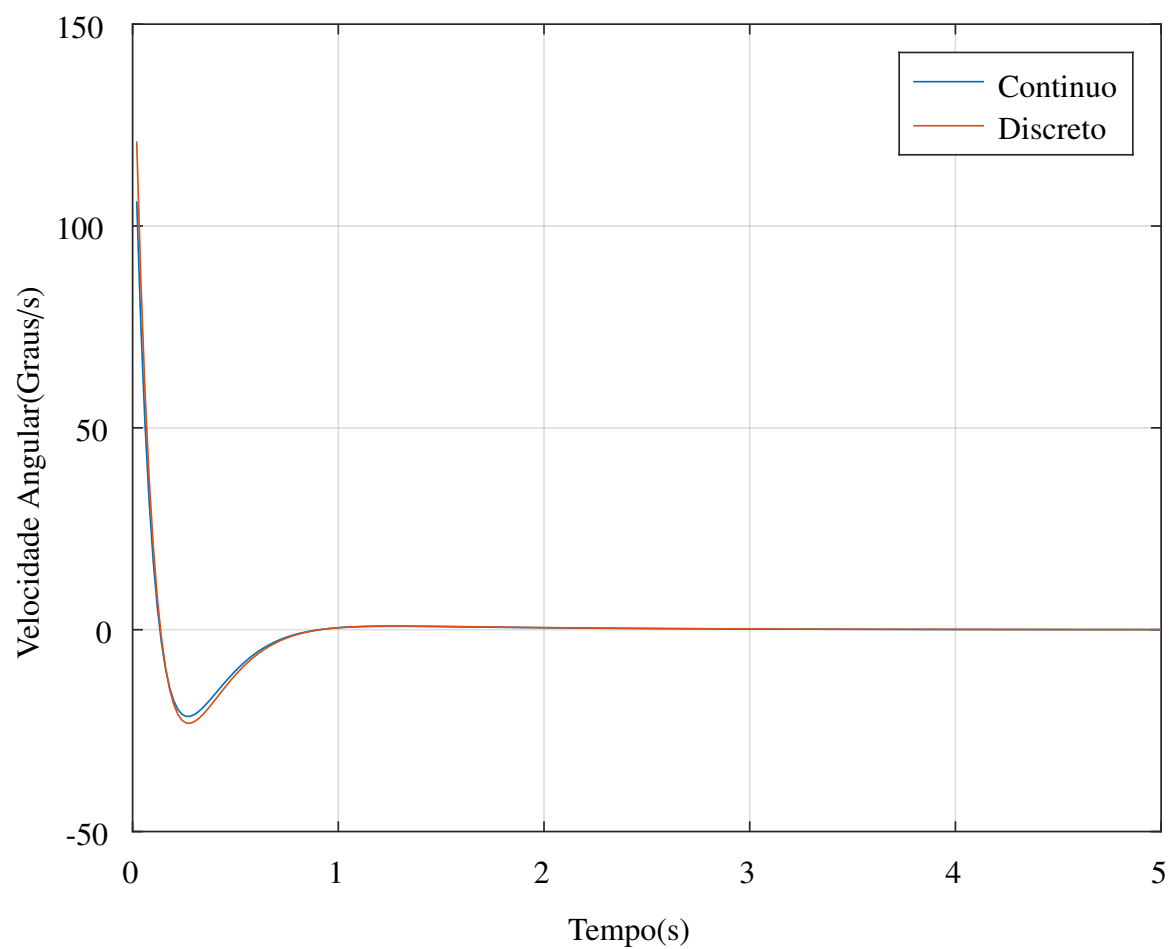
Fonte: O autor (2023)

Figura 20 – Angulo da bola com controle



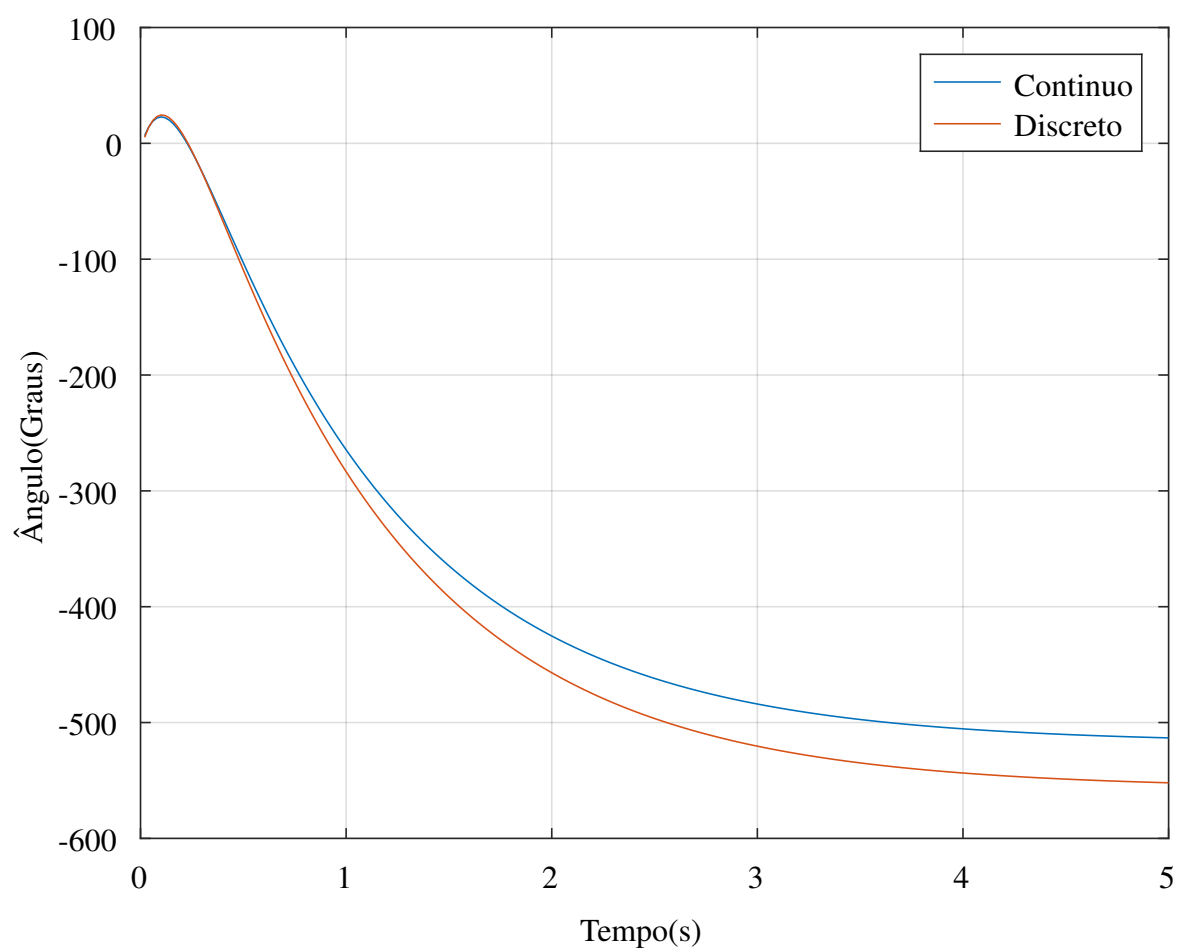
Fonte: O autor (2023)

Figura 21 – Velocidade da bola com controle



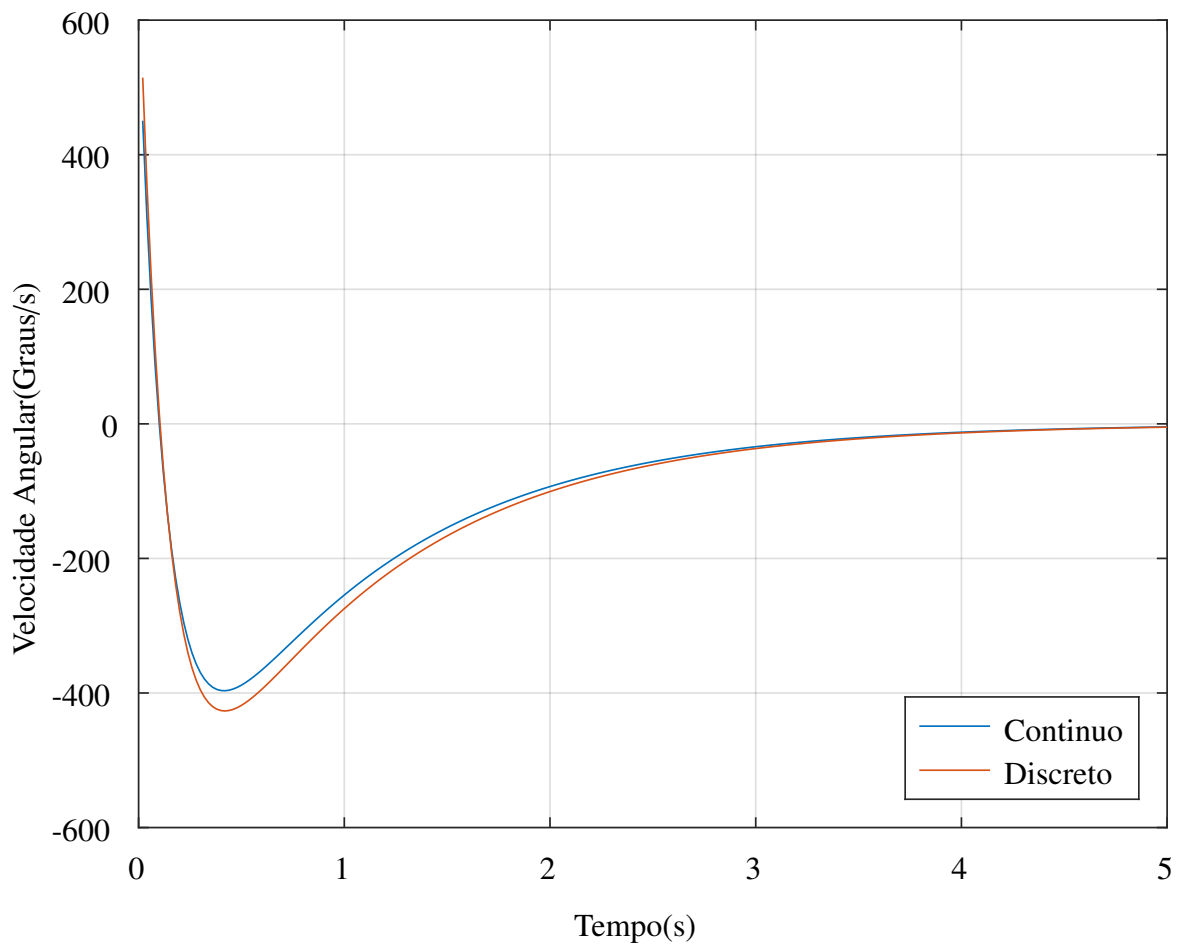
Fonte: O autor (2023)

Figura 22 – Ângulo da roda com controle



Fonte: O autor (2023)

Figura 23 – Velocidade da roda com controle



Fonte: O autor (2023)

Embora a simulação sugira que os objetivos do controle tenham sido atingidos, é importante notar que os resultados da simulação podem não refletir com precisão o comportamento real do sistema. Especificamente, não temos medições diretas das variáveis de velocidade da roda e da bola, que são parâmetros essenciais para o controle eficaz do sistema.

#### 4.1.3 Observador de ordem mínima com controlador LQR

Para garantir uma estimativa precisa das variáveis de velocidade da roda e da bola, que não são diretamente mensuráveis, é crucial implementar observadores. Começaremos com o observador de ordem mínima acoplado ao controlador LQR. Neste caso, apenas os estados não mensuráveis são estimados pelo observador, enquanto os estados mensuráveis são alimentados diretamente ao controlador.

As equações que descrevem o observador de ordem mínima são dadas abaixo. Nelas,  $L_{min}$  representa o ganho do observador de ordem mínima, que é projetado para garantir que as estimativas dos estados converjam rapidamente para os valores reais.

$$L1_{min} = A_{oo} - L_{min}A_{mo}B_{min} = B_o - L_{min}B_mA_{min} = A_{om} - L_{min}A_{mm} \quad (31)$$

Os resultados para o ganho do observador e as matrizes ajustadas são os seguintes:

$$L1_{min} = \begin{bmatrix} 0.75242 & -0.0073253 \\ 0.00013271 & 0.75439 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0.062167 & 0.27093 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$L_{min} = \begin{bmatrix} 12.834 & 0.15009 \\ 0.11234 & 11.338 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$A_{min} = \begin{bmatrix} -11.965 & -0.15009 \\ 0.11501 & -11.338 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Após a implementação prática do controlador LQR e do observador de ordem mínima na planta real, constatou-se que o sistema não atendia aos parâmetros mínimos necessários para um funcionamento adequado. Especificamente, o observador de ordem mínima apresentou um problema de amplificação do ruído do sensor de posição.

O observador, ao tentar estimar os estados do sistema, acabou também estimando e amplificando o ruído inerente às medições do sensor de posição. Esse fenômeno é conhecido como "amplificação do ruído de medição". Em outras palavras, o ruído do sensor de posição foi inadvertidamente intensificado pelo observador de ordem mínima, levando a um desempenho de controle aquém do esperado.

Esse é um desafio comum na concepção de observadores, pois a precisão e a qualidade das medições dos sensores são vitais para a eficácia do observador. Neste caso, o ruído do sensor de posição prejudicou o desempenho do sistema de controle, uma vez que as estimativas baseadas nessas medições foram comprometidas.

Os resultados dessa implementação e suas implicações serão discutidos posteriormente na seção de Discussão de Resultados.

#### 4.1.4 Observador de ordem plena com controlador LQR

Com base nas observações dos testes realizados com o observador de ordem mínima e o controlador LQR, notou-se a necessidade de aperfeiçoar o sistema para atenuar o ruído de medição amplificado. A solução encontrada foi a implementação de um observador de ordem plena em conjunto com o controlador LQR.

O observador de ordem plena é uma alternativa ao observador de ordem mínima que fornece estimativas mais precisas e robustas dos estados do sistema, mesmo na presença de ruídos de medição. O observador de ordem plena consegue lidar de maneira mais eficaz com o ruído do sensor de posição, não permitindo sua amplificação.

As matrizes do observador de ordem plena, obtidas através dos cálculos apresentados anteriormente, são aplicadas para implementar esse observador no sistema BoW.

$$\begin{aligned}
 L1 &= \begin{bmatrix} 0.72811 & -0.020773 & 0.020066 & -0.000050077 \\ -0.01819 & 0.75515 & 0.000017235 & 0.019787 \\ -0.98542 & -0.1199 & 1.01 & -0.0049982 \\ -0.11787 & -0.6547 & 0.0025824 & 0.97873 \end{bmatrix} \\
 Bd' &= \begin{bmatrix} 0.00072006 & 0.0030686 & 0.071869 & 0.3058 \end{bmatrix} \\
 L &= \begin{bmatrix} 0.28185 & 0.020773 \\ 0.020773 & 0.24485 \\ 1.9829 & 0.1199 \\ 0.37562 & 0.6547 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{36}$$

Uma vez implementado, o observador de ordem plena foi capaz de lidar com a questão da amplificação do ruído, oferecendo assim um melhor desempenho na estimação dos estados do sistema. Isso resultou em um controle mais preciso e robusto, superando as limitações enfrentadas com o observador de ordem mínima.

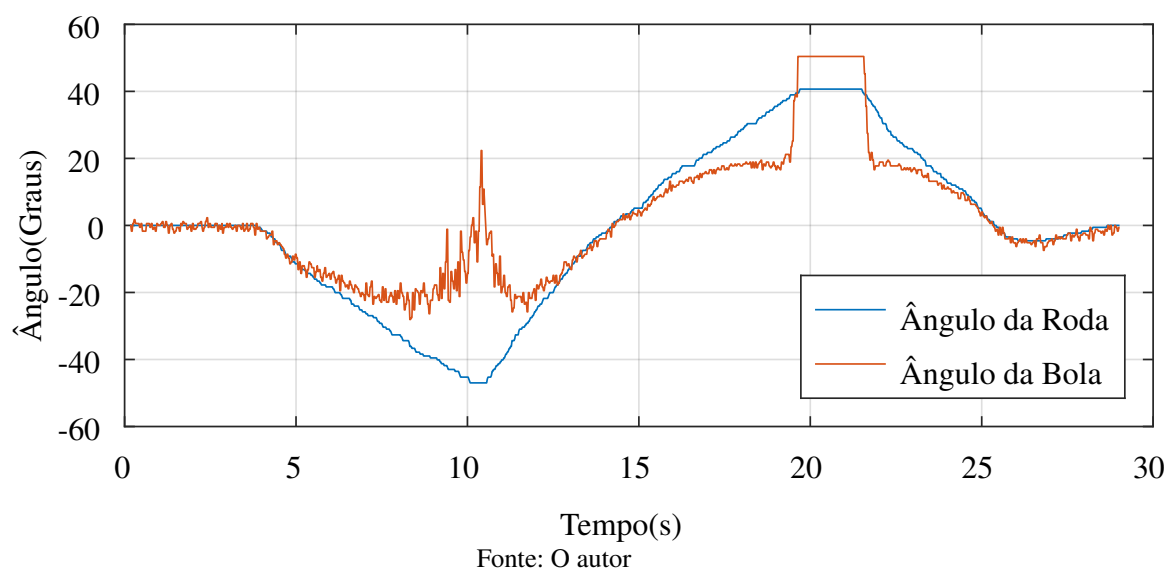
Os detalhes dos testes e resultados obtidos com o observador de ordem plena serão discutidos no capítulo de Discussão de Resultados.



## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 5.1 MEDIÇÃO DOS SENSORES

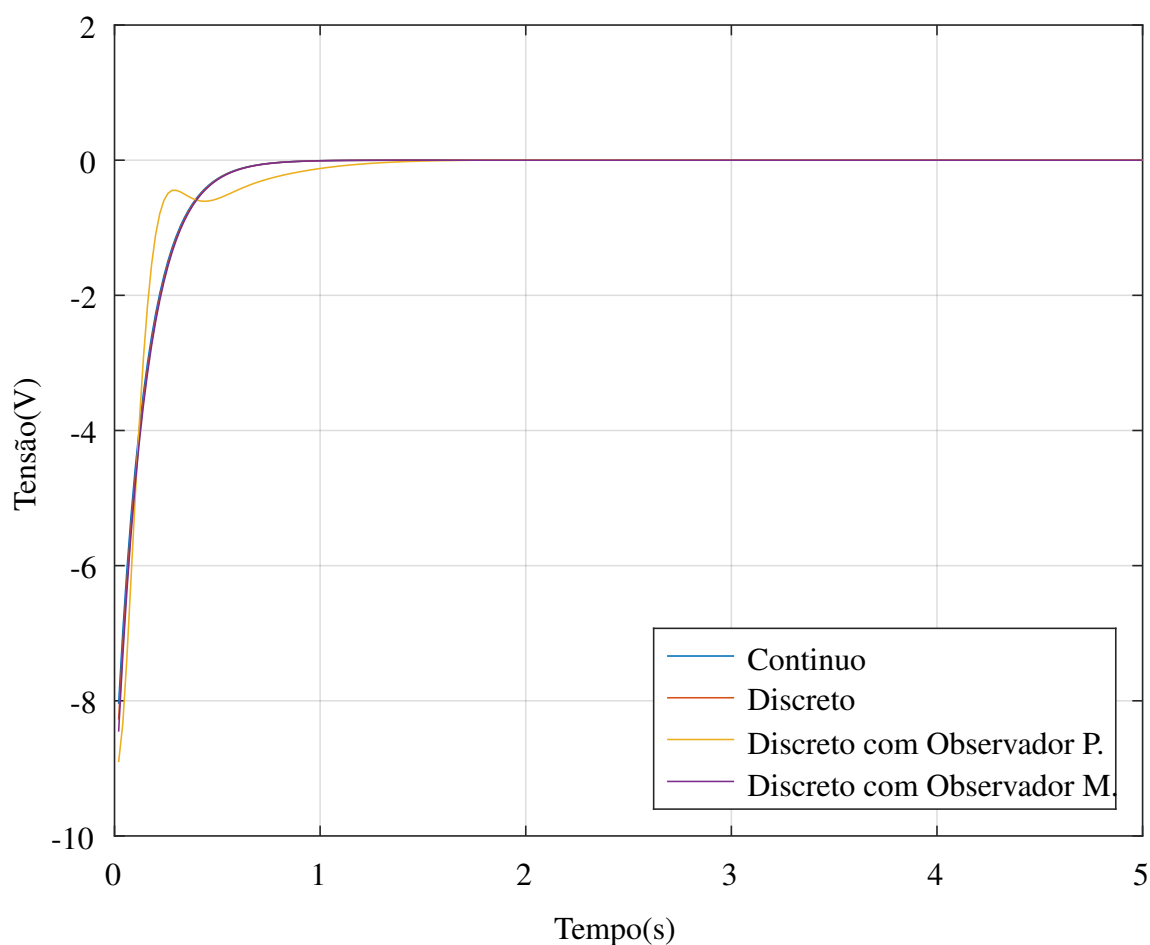
Figura 24 – Comparação de leitura entre os sensores



### 5.2 RESULTADOS SIMULADOS

A fim de validar o funcionamento do controlador com o observador, realizou-se uma simulação no software Octave antes de implementar no sistema real. Nesta simulação, um impulso foi aplicado ao sistema. A Figura 25 exibe uma comparação entre as ações de controle no contínuo, discreto, discreto com Observador Pleno e discreto com Observador Mínimo.

Figura 25 – Simulação Comparativa das ações de controle no contínuo, discreto, discreto com Observador Pleno, discreto com Observador Mínimo

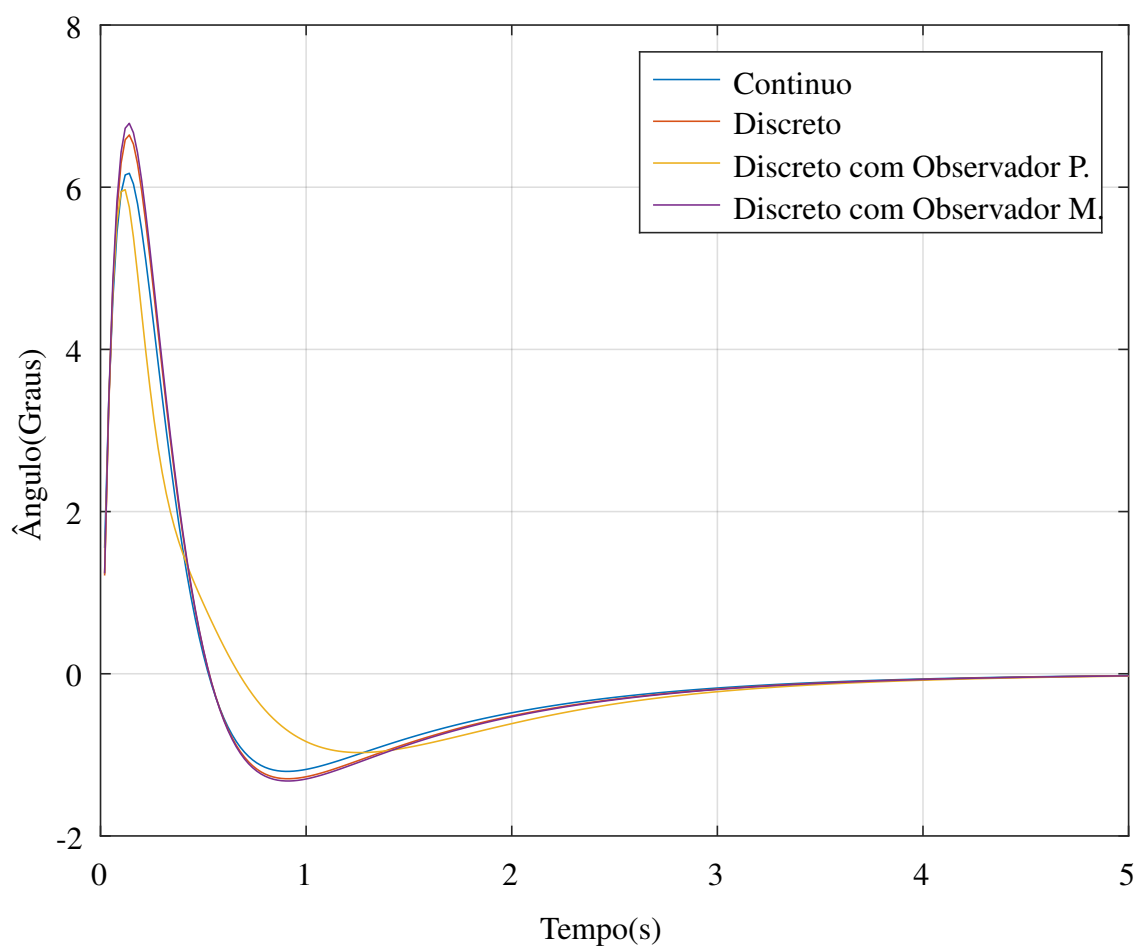


Fonte: O autor (2023)

É possível perceber que ambos os métodos apresentam resultados similares na simulação, o que indica que a inserção dos observadores não altera de forma significativa o comportamento do controlador. Entretanto, o Observador Pleno apresenta resultados levemente diferentes, devido à filtragem das variáveis de estado. Este processo resulta em um controle mais amortecido, que, apesar de reduzir o sobresinal, também diminui a resposta em alta frequência.

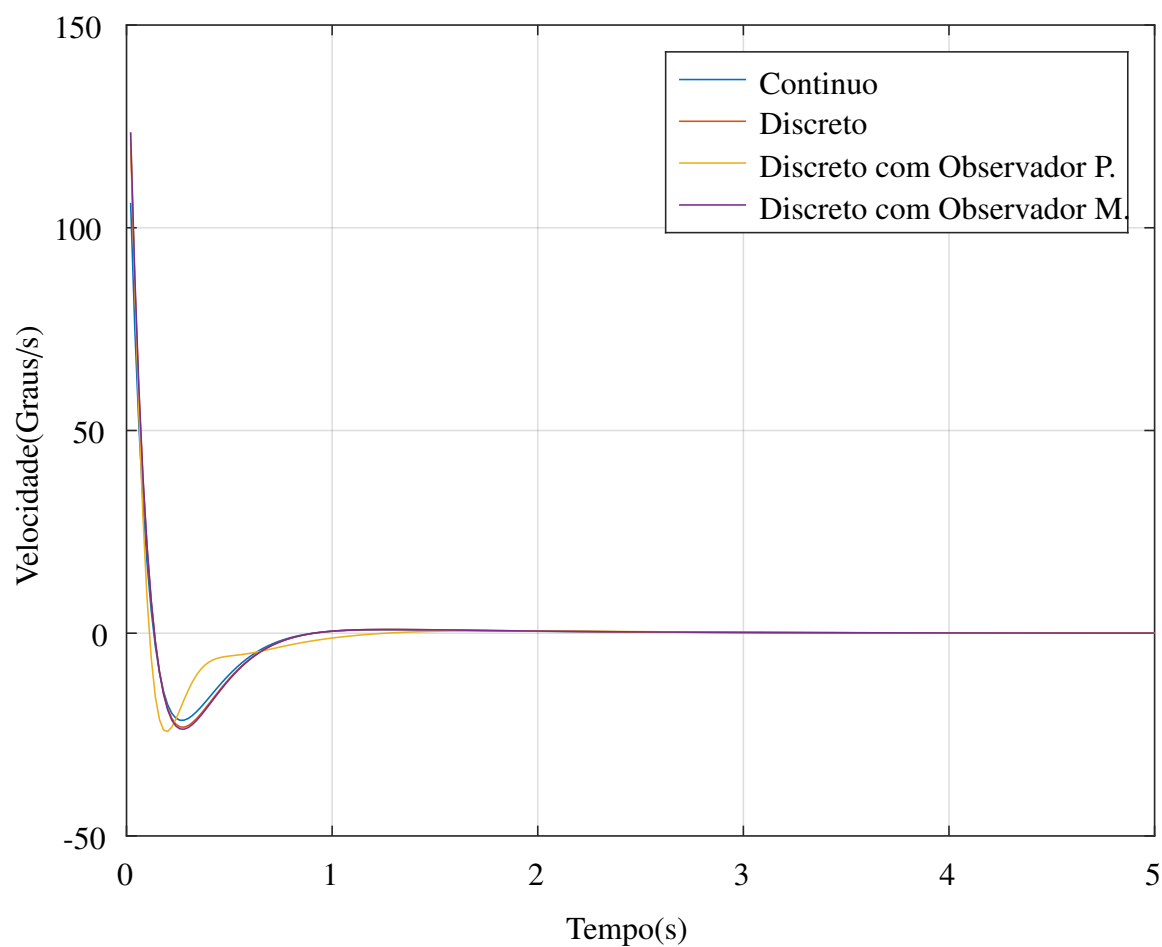
Para uma análise mais detalhada, a Figura 26 mostra o ângulo da bola, enquanto a Figura 27 mostra a velocidade da bola para os diferentes métodos.

Figura 26 – Simulação Comparativa do ângulo da bola no contínuo, discreto, discreto com Observador Pleno, discreto com Observador Mínimo.



Fonte: O autor (2023)

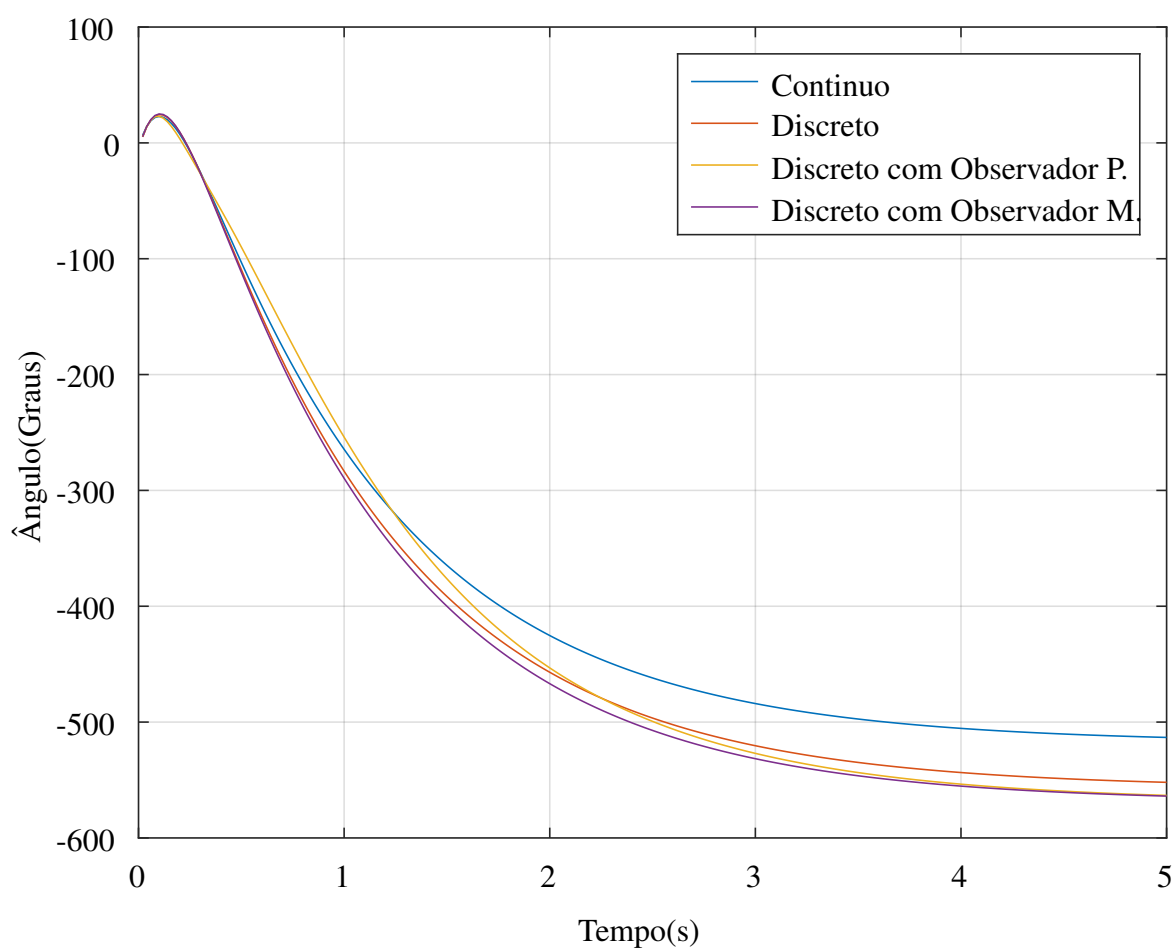
Figura 27 – Simulação Comparativa da velocidade da bola no contínuo, discreto, discreto com Observador Pleno, discreto com Observador Mínimo.



Fonte: O autor (2023)

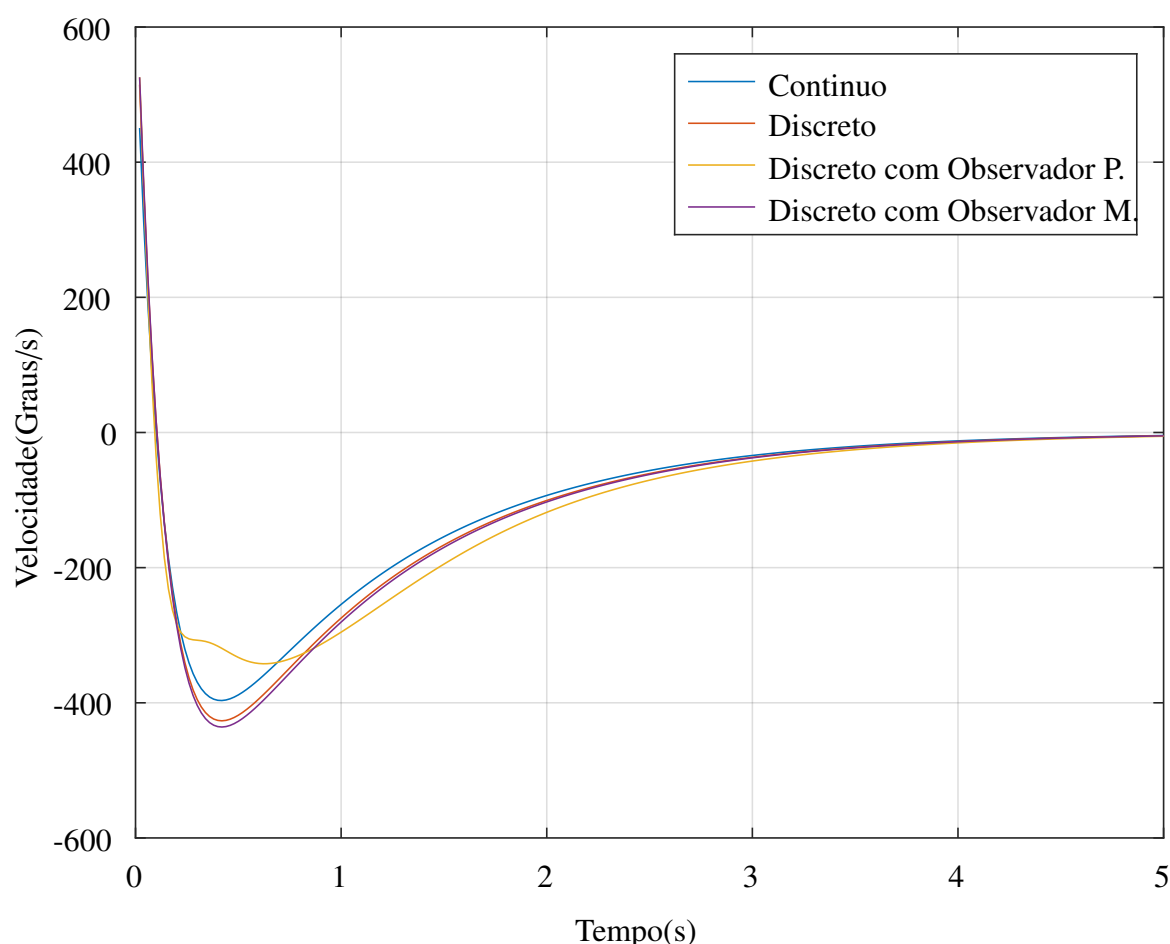
De maneira similar, a Figura 28 e a Figura 29 mostram, respectivamente, o ângulo e a velocidade da roda.

Figura 28 – Simulação Comparativa do ângulo da roda no contínuo, discreto, discreto com Observador Pleno, discreto com Observador Mínimo.



Fonte: O autor (2023)

Figura 29 – Simulação Comparativa da velocidade da roda no contínuo, discreto, discreto com Observador Pleno, discreto com Observador Mínimo.



Fonte: O autor (2023)

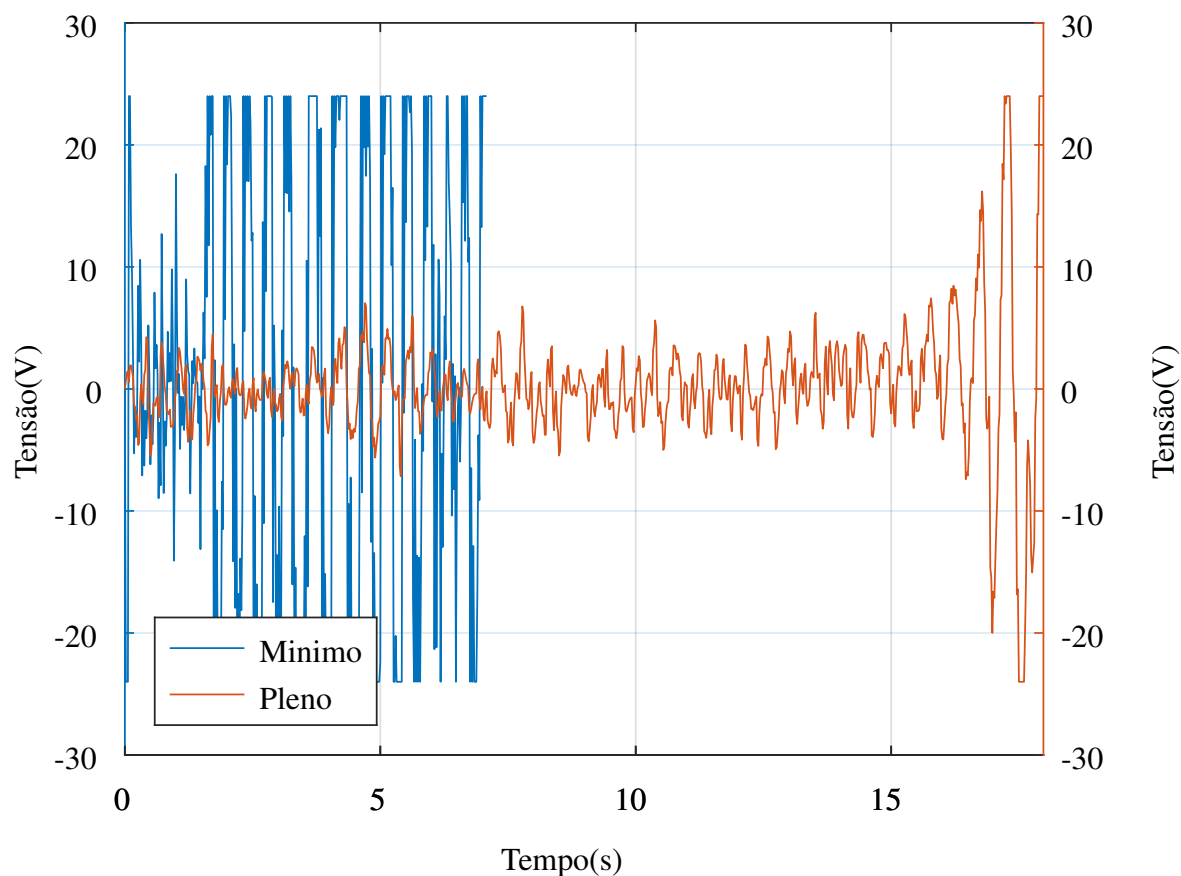
### 5.3 RESULTADOS PRÁTICOS

A próxima etapa consistiu na implementação dos observadores no sistema real. Para isso, a bola foi inicialmente posicionada no ângulo zero, com o sistema em repouso. Após a inicialização do sistema, os resultados foram coletados.

A Figura 30 apresenta uma comparação entre a ação de controle dos observadores de ordem mínima e plena. Observa-se que o observador pleno conseguiu manter a bola na posição de estabilidade por um tempo aproximadamente três vezes maior. Esse desempenho se deve à capacidade do observador pleno de filtrar os ruídos do sensor de posição, ao contrário do observador de ordem mínima, que, quando associado ao ruído do sensor, causa uma saturação no motor.

Figura 30 – Comparação na planta real ação de controle entre observador de ordem mínima e observador de ordem plena

Fonte: O autor (2023)



As Figuras 31 e 32 mostram a comparação entre o ângulo e a velocidade da bola para os dois tipos de observadores. Nota-se que as velocidades estimadas pelo observador mínimo são consideravelmente mais altas, o que acaba por saturar a ação de controle.

Figura 31 – Comparação na planta real do ângulo da bola entre observador de ordem mínima e observador de ordem plena

Fonte: O autor (2023)

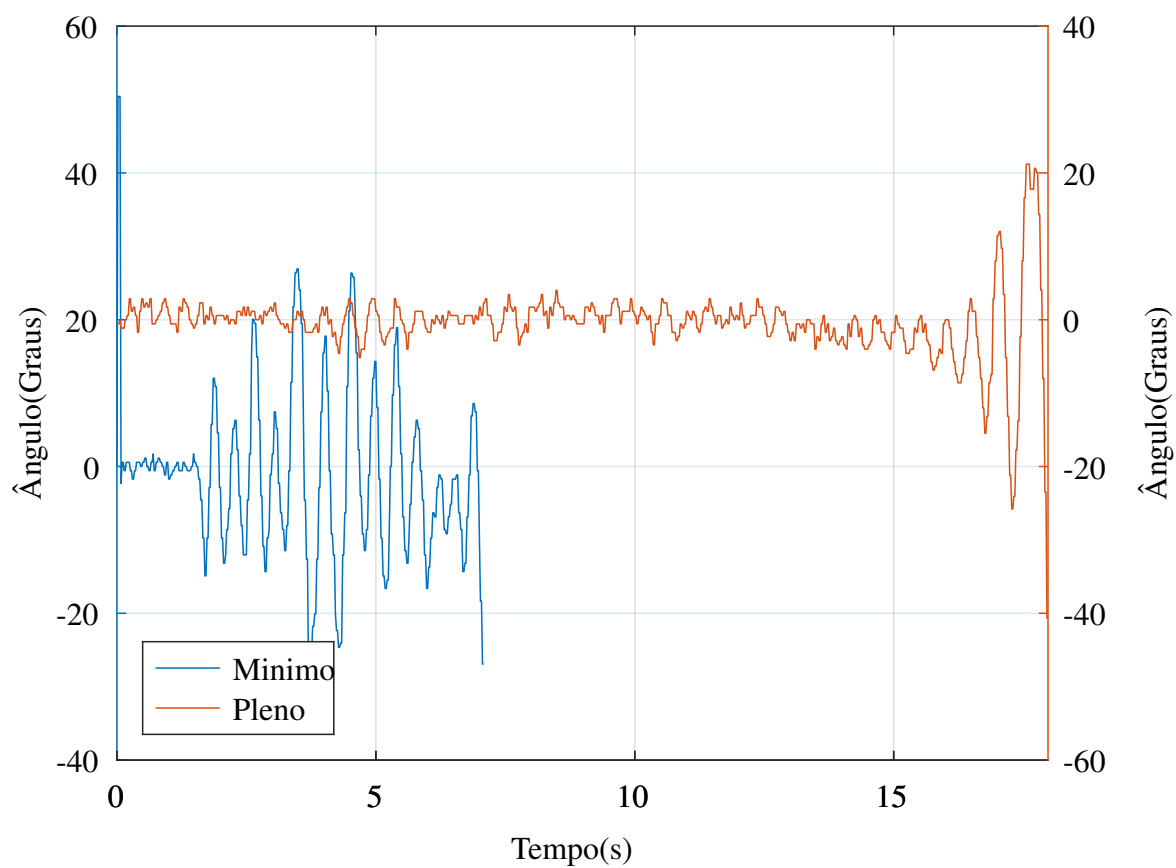
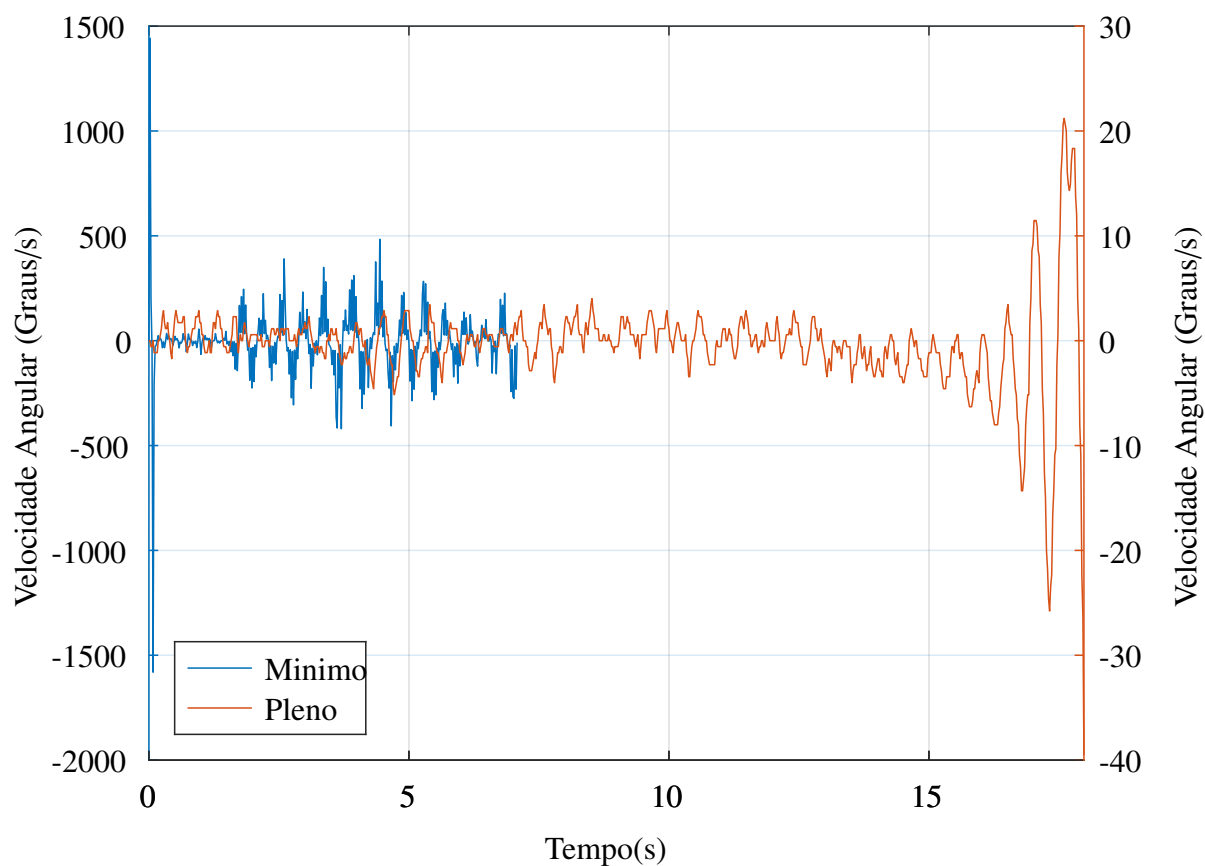




Figura 32 – Comparação na planta real da velocidade da bola entre observador de ordem mínima e observador de ordem plena

Fonte: O autor (2023)



As Figuras 33 e 34 mostram as comparações entre o ângulo e a velocidade da roda para ambos os observadores. É interessante notar que, devido às não-linearidades do motor, o ângulo da roda tende a ir para o mesmo sentido anti-horário, independentemente do tipo de observador.

Figura 33 – Comparação na planta real do ângulo da roda entre observador de ordem mínima e observador de ordem plena

Fonte: O autor (2023)

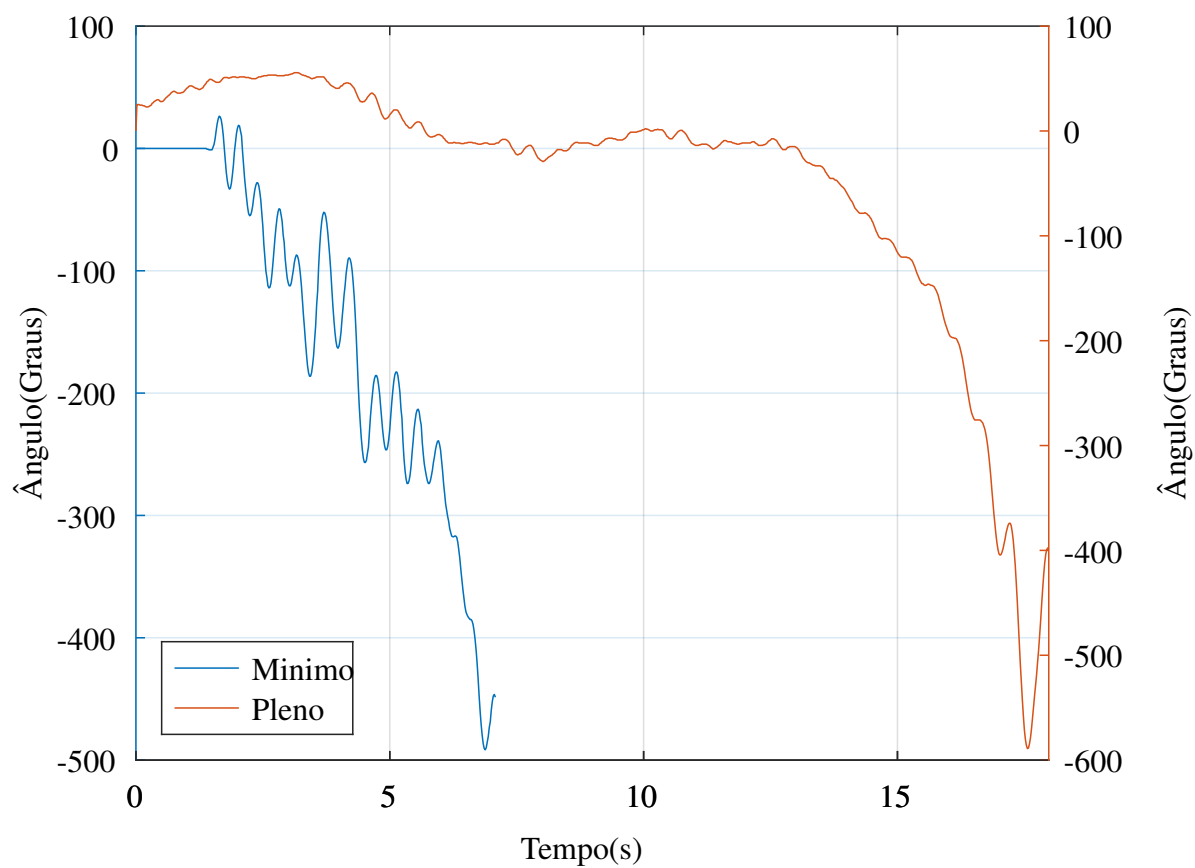
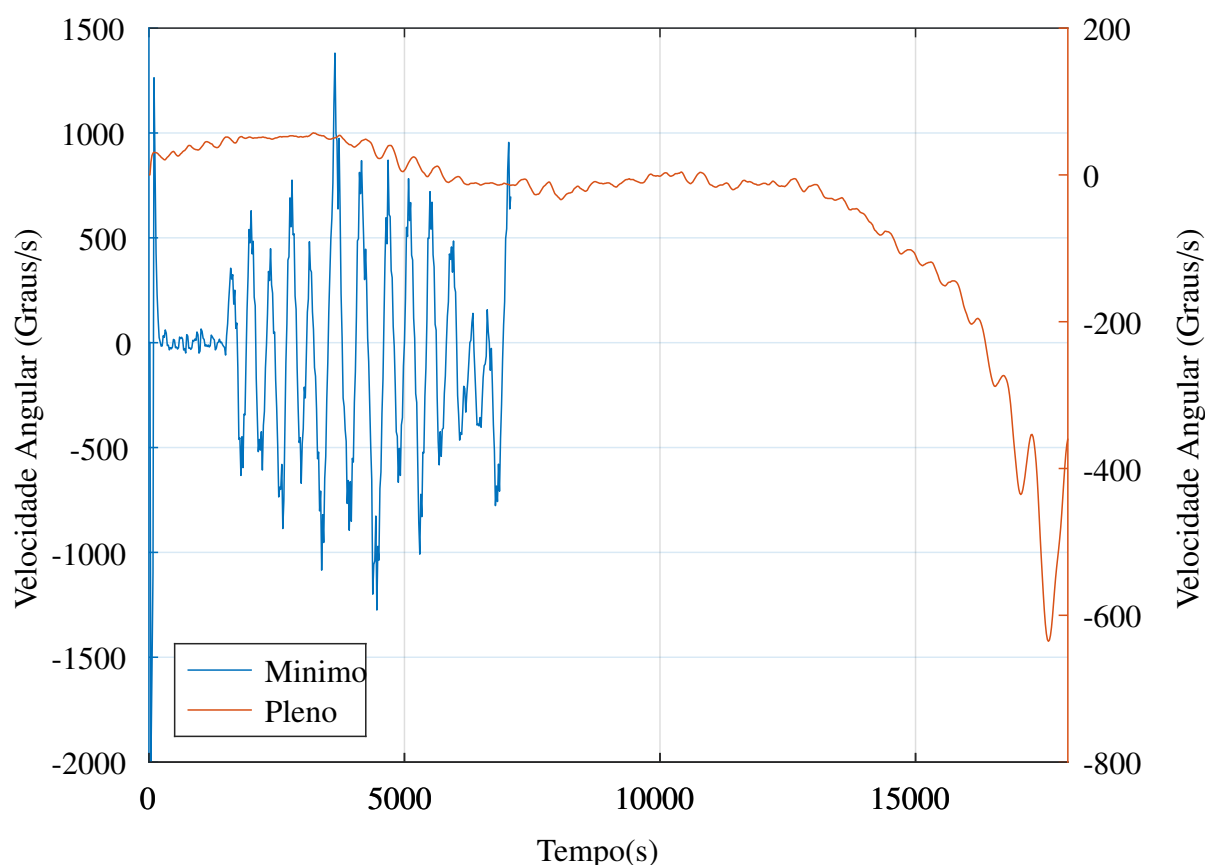


Figura 34 – Comparação na planta real da velocidade da roda entre observador de ordem mínima e observador de ordem plena

Fonte: O autor



fazer o gráfico do resultado prático do observador pleno, simulando o observador pleno e mínimo. comparando os dois!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

#### 5.4 DESEMPENHO DO CONTROLADOR LQR

Finalmente, é importante comparar o desempenho do controlador LQR com os resultados de outros trabalhos e com os dados obtidos a partir do observador de ordem plena. Deve-se prestar atenção especialmente ao tempo de resposta e ao máximo sobressinal, pois esses são indicadores significativos do desempenho do controlador.

Os dados coletados sugerem que o observador de ordem plena proporciona um melhor desempenho em comparação ao observador de ordem mínima. Além disso, a eficácia do observador de ordem plena também pode ser observada na prática, onde ele demonstrou ser capaz de manter a bola na posição de estabilidade por um período de tempo mais longo.

Os resultados obtidos neste trabalho podem ser comparados a outros com as especificações desejadas e os dados disponíveis na literatura. Isso proporcionará uma visão mais completa sobre a eficiência do controlador LQR e dos observadores implementados, além de indicar

possíveis melhorias e direções para futuras pesquisas.

## **6 CONCLUSÃO**

### **6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

### **6.2 LIMITAÇÕES DO TRABALHO**

### **6.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, Luis Antonio. **Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais**. [S.l.]: Editora UFMG, 2007.
- ARDUINO. **Arduino Mega 2560 Datasheet**. [S.l.], n.d. Acessado em: 18/05/2023. Disponível em: [https://www.arduino.cc/en/uploads/Main/arduino-mega2560\\_R3-sch.pdf](https://www.arduino.cc/en/uploads/Main/arduino-mega2560_R3-sch.pdf).
- ARDUINO. **Arduino Uno Rev3 Datasheet**. [S.l.], n.d. Acessado em: 18/05/2023. Disponível em: [https://www.arduino.cc/en/uploads/Main/Arduino\\_Uno\\_Rev3-schematic.pdf](https://www.arduino.cc/en/uploads/Main/Arduino_Uno_Rev3-schematic.pdf).
- CANON NF5475 Motor Datasheet. Canon. Acessado em: 18/05/2023. Disponível em: <https://ftn.canon/en/product/motor/encoder.html>.
- CASTRUCCI, Plinio. **Controle automático**. [S.l.: s.n.], 2015.
- DORF, Richard C; BISHOP, Robert H. Sistemas de Controle Modernos, 8ª Edição. **Tradução: Bernardo Severo da Silva Filho, LTC–Livros Técnicos e Científicos Editora SA, Rio de Janeiro, RJ, 1998.**
- DOYLE, John C; GLOVER, Keith; KHARGONEKAR, P P; FRANCIS, Bruce A. State-space solutions to standard H2 and H control problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989.
- FERNANDES, John Manuel; NIEKERK, Theo van. Implementation of an Industrial Controller for a Ball-on-Wheel System. *In*: NELSON MANDELA METROPOLITAN UNIVERSITY, PORT ELIZABETH, SOUTH AFRICA. 6TH Robotics and Mechatronics Conference (RobMech). Durban, South Africa: [s.n.], out. 2013.
- FRANKLIN, Gene F; POWELL, J David; WORKMAN, Michael L *et al.* **Digital control of dynamic systems**. [S.l.]: Addison-wesley Menlo Park, 1998. v. 3.
- FRANKLIN, Gene F.; POWELL, J. David; EMAMI-NAEINI, Abbas. **Feedback Control of Dynamic Systems**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1994.
- BTS7960 Motor Driver Datasheet. Handsontec. Acessado em: 18/05/2023. Disponível em: <https://www.handsontec.com/dataspecs/module/BTS796020.%5C%Motor20.%5C%Driver.pdf>.

HO, Ming-Tzu. Controlling a ball and wheel system using full-state-feedback linearization. **Nome do periódico**, número do volume, número da edição, intervalo de páginas, ano de publicação.

LIN, Chun-Yi; CHEN, Chih-Hui; YANG, Yi-Chang; CHENG, Chih-Hsien. Adaptive Control of a Ball and Wheel System. **International Journal of Advanced Robotic Systems**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 11, n. 8, p. 129, 2014.

NEVES, Gabriel P.; ANGÉLICO, Bruno A.; TANNURI, Eduardo A. Controle por Modos Deslizantes para Sistemas sub-atuado aplicado em um Sistema Ball-and-Wheel. *In*: CONGRESSO Brasileiro de Automática-CBA. [S.l.: s.n.], 2020.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 9788576058106.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2010.

OGATA, Katsuhiko. **Modern Control Engineering**. [S.l.]: Prentice Hall, 2010.

OPENSTAX. **University Physics Volume 1**. [S.l.]: OpenStax, 2016.

PEZHMANN, Alireza. An optimal hybrid adaptive controller based on the multi-objective evolutionary algorithm for an under-actuated nonlinear ball and wheel system. **Nome do periódico**, número do volume, número da edição, intervalo de páginas, ano de publicação.

PHILLIPS, Charles L; NAGLE, H Troy; CHAKRABORTTY, Aranya. **Digital control system analysis and design**. [S.l.]: Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1990. v. 2.

VL53L0X Datasheet. STMicroelectronics. Acessado em: 18/05/2023. Disponível em: <https://www.st.com/resource/en/datasheet/vl53l0x.pdf>.

## APÊNDICE A – Github

Dada a complexidade do projeto e a quantidade de arquivos envolvidos, foi feito um repositório no Github para uma organização mais eficiente do trabalho. Este repositório contém informações adicionais sobre o projeto. Você pode acessá-lo pelo link ou utilizando o QR code disponível a seguir:

<https://github.com/HorimiLucas/Ball-on-Wheel>



Este repositório contem:

- Gráficos;
- Algoritmo de Simulação e de Implementação;
- Imagens e vídeos;