一、选择题

1、设 A、B 是 2 个随机事件，且 0<$P(A)$<1，0<$P(B)$<1，若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则

(A) $P(B|A)>P(B|\overline{A})$　　(B) $P(B|A)<P(B|\overline{A})$

(C) $P(\overline{B}|A)>P(B|\overline{A})$　　(D) $P(\overline{B}|A)<P(B|\overline{A})$

【详解】由已知 $P(A|B)>P(A|\overline{B})\Rightarrow \dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}\Rightarrow P(AB)[1-P(B)]>$

$P(B)[P(A)-P(B)]\Rightarrow P(AB)>P(A)P(B)$。因此 $P(B|A)-P(B|\overline{A})=\dfrac{P(AB)}{P(A)}-\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}$

$=\dfrac{P(AB)}{P(A)}-\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(A)}=\dfrac{P(AB)[1-P(A)]-P(A)[P(A)-P(AB)]}{P(A)[1-P(A)]}=\dfrac{P(AB)-P(AB)}{P(A)[1-P(A)]}>0$。答案选(A)。

【知识点】①条件概率的定义：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$；②减法公式：$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$；③对立事件的概率公式：$P(\overline{A})=1-P(A)$。

2、设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P(|X-\mu|<\sigma)$

(A)单调增加　　(B)单调减少

(C)保持不变　　(D)增减不定

【详解】由于 $P(|X-\mu|<\sigma)=P(\left|\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right|<1)=2\Phi(1)-1=0.6826$，答案选(C)

【知识点】①正态分布的计算：$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow \dfrac{x-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$；②标准正态分布分布函数的性质：$X\sim N(0,1)\Rightarrow P(|X|<a)=2\Phi(a)-1$。

3、设随机变量 X、Y 独立，X 服从正态分布 $N(0,1)$，Y 服从 Piosson 分布 $P(1)$，则 $P(\min\{X,Y\}>0)$=

(A) $\frac{1}{2}e^{-1}$　　(B) $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$　　(C) e^{-1}　　(D) $1-e^{-1}$

【详解】则 $P(\min\{X,Y\}>0)=P(X>0,Y>0)=P(X>0)P(Y>0)=\Phi(0)\cdot[1-\frac{1}{0!}e^{-1}]=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$。答案选(B)

【知识点】①随机变量最小值的概率转化：$P(\min\{X,Y\}>a)=P(X>a,Y>a)$；②标准正态分布的计算：$X\sim N(0,1)\Rightarrow P(a<X<b)=\Phi(b)-\Phi(a)$；③标准正态分布分布函数的性质：$\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$；④Piosson 分布的概率分布：$X\sim P(\lambda)\Rightarrow P(X=m)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$，$m=0,1,2,3,\cdots$。

4、设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，则 $P(X<EX)=$

(A) $\frac{2}{3}$　(B) $\frac{4}{3}$　(C) $\frac{4}{9}$　(D) $\frac{8}{9}$

【详解】$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$。则 $P(X<EX)=P(X<\frac{2}{3})=\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}}f(x)dx=\int_0^{\frac{2}{3}}2xdx=\frac{4}{9}$。答案选(C)

【知识点】①数学期望的计算：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$；②连续型随机变量的计算：$X\sim f(\lambda)\Rightarrow P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$。

5、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 独立同服从分布 $N(\mu,1)$，则下列结论不正确的是

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布　(B) $(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布　(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

【详解】由 $\sigma=1$，则 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$；$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$；

$X_n-X_1\sim N(0,2)\Rightarrow\frac{X_n-X_1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)\Rightarrow(\frac{X_n-X_1}{\sqrt{2}})^2\sim\chi^2(1)$；

$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)\Rightarrow(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n})^2=n(\overline{X}-\mu)\sim\chi^2(1)$。答案选(B)

【知识点】①正态总体统计量的分布：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$；②$\chi^2$ 分布的定义：$X_i\sim N(0,1)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立 X、Y 独立，则 $\sum_{i=1}^{n}X_i^n\sim\chi^2(n)$。

二、填空题

1、已知在 10 件产品中有 2 件次品，在其中取两次，每次任取 1 件，作不放回抽样，则第二次取到次品的概率是________。

【详解】$\frac{8\times2+2\times1}{10\times9}=\frac{1}{5}$，答案为 $\frac{1}{5}$。

【知识点】①古典概率模型中事件概率：$p=\frac{m}{n}$；②乘法原理。

2、随机变量 X、Y 独立，其分布律为 $\begin{array}{c|cc} X & a & b \\ \hline P & q & p \end{array}$，$\begin{array}{c|cc} Y & a & b \\ \hline P & q & p \end{array}$，其中 $0<p<1$，$q=1-p$，则 $P(X=Y)=$_________。

【详解】$P(X=Y)=P(X=a,Y=a)+P(X=b,Y=b)=P(X=a)P(Y=a)+P(X=b)P(Y=b)$

$=p^2+q^2$。

【知识点】①离散型随机向量概率的计算：$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}\Rightarrow P((X,Y)\in D)=\sum\limits_{(x_i,y_j)\in D}p_{ij}$；

②随机变量的独立性：$P(X=a,Y=b)=P(X=a)P(Y=b)$。

3、设随机变量 X 的概率分布律为 $\begin{array}{c|ccc} X & -2 & 1 & 3 \\ \hline P & \frac{1}{4} & a & b \end{array}$，且已知 $EX=0.75$，则 $a=$_______，$b=$_______。

【详解】
$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} EX=-2\times\frac{1}{4}+1\times a+3\times b=a+3b-\frac{1}{2} \\ EX=0.75 \end{array}\right\}\Rightarrow a+3b=\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4}+a+b=1 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{4} \end{cases}$$
。

【知识点】①离散型随机变量数学期望的计算：$P(X=x_n)=p_n\Rightarrow EX=\sum\limits_n x_n p_n$；②离散型随机变量概率分布的性质：$P(X=x_n)=p_n\Rightarrow\sum\limits_n p_n=1$。

4、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布 $U(-1,1)$的随机变量序列，则 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$ 依概率收敛于______。

【详解】$X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1 \\ 0 & 其他\end{cases}$。若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布的随机变量序列，则 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$ 以概率收敛于 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E|X_i|=E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-1}^{1}|x|\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}$。

【知识点】①均匀分布的概率密度：$X\sim U(a,b)\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & 其他\end{cases}$；②大数定律：$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}P(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon)=1$，即 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 以概率收敛于 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i$；③连续型随机变量数学期望的计算：$X\sim f(x)\Rightarrow Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$。

5、设$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$是来自二项分布 $b(10,0.5)$总体的容量为 10 简单随机样本，则 $E\overline{X}^2 =$________。

【详解】$E\overline{X}^2 = D\overline{X} + (E\overline{X})^2 = \frac{1}{n}DX + (EX)^2 = \frac{1}{10}\times 10\times 0.5\times(1-0.5)+(10\times 0.5)^2 = 25.25$。

【知识点】①方差的计算：$DX = EX^2 - (EX)^2$；②样本均值的期望和方差：$E\overline{X} = EX$，$D\overline{X} = \frac{1}{n}DX$；③二项分布的期望和方差：$X \sim b(n.p) \Rightarrow EX = np$，$DX = np(1-p)$。

三、钥匙掉了。掉在宿舍里、掉在教室里、掉在路上的概率分别为 50%、30%、20%，而掉在上述三个地方被找到的概率分别为 0.8、0.3、0.1。求：

1、钥匙被找到的概率；

2、已知钥匙被找到，则钥匙掉在宿舍的概率。

【详解】1、用 A_1、A_2、A_3 分别表示钥匙掉在宿舍里、掉在教室里、掉在路上。用 B 表示钥匙被找到。

1、$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i) = 0.50\times 0.8 + 0.30\times 0.3 + 0.20\times 0.1 = 0.51$；

2、$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.50\times 0.8}{0.51} = \frac{40}{51} \approx 0.785$。

【知识点】①全概率公式：$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$；②贝叶斯公式：$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$。

四、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，求：1、$Y=-X$ 的分布函数 $F_Y(y)$；2、$EX|X-1|$。

【详解】1、$y \le -1$时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-X \le y) = P(X \ge -y) = \int_{-y}^{+\infty} f(x)dx = 0$，$-1 < y < 0$时，$F_Y(y) = \int_{-y}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-y}^{1} 2xdx = 1 - y^2$；$y \ge 0$ 时，$F_Y(y) = \int_{-y}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 2xdx = 1$。总之 $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le -1 \\ 1-y^2 & -1 < y < 0 \\ 1 & y \ge 0 \end{cases}$。

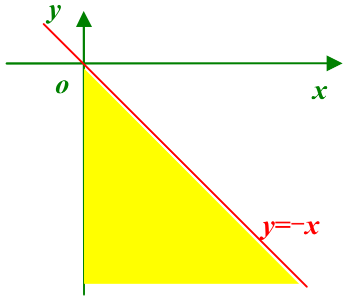
2、$EX|X-1| = \int_{-\infty}^{+\infty} x|x-1|f(x)dx = \int_0^1 x(1-x)\cdot 2xdx = \frac{5}{12}$。

【知识点】①连续型随机变量函数$Y = G(X)$分布的求法：$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$；②连续型随机变量函数的数学期望的计算：$Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$。

五、设二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} e^y & 0\le x\le -y \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，求：1、$X$ 的边缘分布密度；2、$Z=X+Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$；3、EX。

【详解】1、 $x<0$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dy=0$，

$x\ge 0$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{-x} e^y dy=e^{-x}$， 总之，



$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$。

2、 $z\ge 0$ 时 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=1$；

$z<0$ 时 $F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{z-y} e^y dy=z^z$； 总 之，

$f_Z(z)=\begin{cases} e^z & z<0 \\ 1 & z\ge 0 \end{cases}$。

3、 $EX=\iint\limits_{R^2} xf(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{-x} xe^y dy=1$。

【知识点】①连续型随机变量边缘概率密度的计算： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$；②连续型随机向量函数的分布： $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$；③连续型随机向量数学期望的计算：$(X,Y)\sim f(x,y)\Rightarrow Eg(X,Y)=\iint\limits_D g(x,y)f(x,y)dxdy$。

六、某生产线上组装每件产品所需要的时间 X(分钟) 服从指数分布 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$。且各件产品组装所需要的时间相互独立。利用中心极限定理求 x 使得在 x 小时内能够组装 100 件产品的概率为 0.92。

【详解】用 X_i 表示取出的第 i 件产品所需要的时间，则 $EX_i=10$， $DX_i=10^2$，i=1,2, ⋯, 100。

由中心极限定理，$\sum_{i=1}^{100} X_i$ 近似地服从 $N(1000,10000)$。则

$P(\sum_{i=1}^{100} X_i\le 60x)=F(60x)\approx\Phi(\frac{60x-1000}{\sqrt{10000}})$。由 $P(\sum_{i=1}^{100} X_i\le 60x)=0.92\approx\Phi(1.4)$ 得 $\frac{60x-1000}{\sqrt{10000}}=1.4$，

因此 $x=19$。

【知识点】①指数分布的数学期望与方差的计算： $X\sim e(\lambda)\Rightarrow EX=\frac{1}{\lambda}$， $DX=\frac{1}{\lambda^2}$；②中心极

限定理：$EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$，i=1,2, ⋯, n。$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布

$$\Rightarrow P(a<\sum_{i=1}^{n}X_i\le b)\approx\Phi(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})-\Phi(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})\text{。}$$

七、设总体 X 的分布密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 是未知参数。$(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本，求：1、θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；2、θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$。

【详解】1、$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}d(-\frac{x^2}{2\theta^2})==\sqrt{\frac{2}{\pi}}\theta$，由 $EX=\overline{X}$

得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\overline{X}$；

2、似然函数为 $L(\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_1^2}{2\theta^2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_2^2}{2\theta^2}}\cdots\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_n^2}{2\theta^2}}=(\sqrt{\frac{2}{\pi}})^n\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2\theta^2}}$，

取对数：$\ln L(\theta)=n\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}}-n\ln\theta-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2\theta^2}$，

求导：$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{\theta^3}$，

由 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$ 得 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$。

【知识点】①矩估计量的求法：解方程 $EX=\overline{X}$；②最大似然估计量的求法：写似然函数、取对数、求导、解方程。

八、设某厂生产的零件重量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ、σ^2 是未知参数，现从该厂生产的零件中抽取 9 个，测得其重量为 $x_1,x_2,\cdots,x_9$ 是(单位：克)，算得 s^2=0.032。求 σ^2 的置信度为 95％的置信区间。

【详解】μ 未知时 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)})=(\frac{(9-1)\times0.032}{\chi^2_{0.025}(9-1)},\frac{(9-1)\times0.032}{\chi^2_{0.975}(9-1)})=(\frac{8\times0.032}{17.535},\frac{8\times0.032}{2.180})=(0.015,0.119)\text{。}$$

【知识点】μ 未知时 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间：$(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)})$。

九、设某次考生的考试成绩 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ、σ 均未知。现随机地抽取 36 位考生的成绩 $X_1,X_2,\cdots,X_{36}$，算得平均成绩为 $\bar{x}=66.5$ 分，标准差 s 为 15 分。在显著水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分，即检验假设：H_0：$\mu=70\leftrightarrow H_1$：$\mu\neq 70$。

【详解】待检验问题为 H_0：$\mu=70\leftrightarrow H_1$：$\mu\neq 70$；由于 σ 未知，选取的统计量为 $t=\dfrac{\overline{X}-70}{S}\sqrt{36}$；拒绝域为 $|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.301$；又 $\bar{x}=66.5$，S =0.25，则 $|t|=\left|\dfrac{66.5-70}{15}\sqrt{36}\right|=1.4<2.301$，因此应接受 H_0，即可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分。

【知识点】σ 未知时对 H_0：$\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1$：$\mu\neq\mu_0$ 的检验：①统计量：$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$；②拒绝域：$S=\{(x_1,\cdots,x_n)\,\big|\,|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$。