一、选择题

1、设 A、B 是 2 个随机事件，则

(A) $P(AB)\le P(A)P(B)$　　(B) $P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\le \frac{P(A)+P(B)}{2}$　　(D) $P(AB)\ge \frac{P(A)+P(B)}{2}$

【详解】 $\left.\begin{array}{r} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\Rightarrow P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(AB) \\ A\cup B\supset AB\Rightarrow P(A\cup B)\ge P(AB)\end{array}\right\}\Rightarrow$

$P(A)+P(B)\ge 2P(AB)\Rightarrow P(AB)\le\frac{P(A)+P(B)}{2}$，答案选(C)

【知识点】①加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；②概率的“单调性”：$A\supset B\Rightarrow P(A)\ge P(B)$。

2、设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{c}{\sqrt{1-x^2}} & |x|<1 \\ 0 & 其他\end{cases}$，则 c=

(A) $\frac{2}{\pi}$　　(B) $\frac{1}{\pi}$　　(C) 2π　　(D) π

【详解】 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{c}{\sqrt{1-x^2}}dx=c\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=c\pi$，由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 得 $c=\frac{1}{\pi}$；答案选(D)

【知识点】概率密度函数的性质：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$。

3、设 X、Y 是 2 个相互独立的随机变量，且已知 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(0,1)$，则 $P(XY-Y\le 0)=$

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $\frac{1}{3}$

【详解】 $P(XY-Y\le 0)=P((X-1)Y\le 0)=P(X-1\ge 0,Y\le 0)+P(X-1\le 0,Y\ge 0)$

$=P(X\ge 1,Y\le 0)+P(X\le 1,Y\ge 0)=P(X\ge 1)P(Y\le 0)+P(X\le 1)P(Y\ge 0)=[1-F_X(1)]F_Y(0)$

$+F_X(1)[1-F_Y(0)]=[1-\Phi(\frac{1-1}{1})]\Phi(0)+\Phi(\frac{1-1}{1})[1-\Phi(0)]=\frac{1}{2}$。答案选(B)

【知识点】①X,Y 相互独立 $\Rightarrow P(X\in I_x,Y\in J_Y)=P(X\in I_x)P(Y\in J_Y)$；②正态分布的计算：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$；③$\Phi(0)=\frac{1}{2}$。

4、设随机变量 X、Y 不相关，且 $EX=EY=1$，$DX=3$，则 $E[X(X+Y)-2]=$

(A) -3　　(B)3　　(C) -5　　(D)5

【详解】 $E[X(X+Y)-2]=E(X^2+XY-2)=EX^2+E(XY)-2=DX+(EX)^2+EXEY-2=3$。答

案选(B)

【知识点】①数学期望的性质：$E(X+Y)=EX+EY$， X、Y独立$\Rightarrow E(XY)=EXEY$；②方差的计算：$DX=EX^2-(EX)^2$。

5、设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自正态分布 $N(0,\sigma^2)$的容量为 n 的简单随机样本， $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则$E\hat{\sigma}^2=$

(A)σ^2　　(B)$\frac{\sigma^2}{n}$　　(C)$\frac{\sigma^2}{n-1}$　　(D)$\frac{n-1}{n}\sigma^2$

【详解】$\hat{\sigma}^2=\frac{n-1}{n}S^2\Rightarrow E\hat{\sigma}^2=E\frac{n-1}{n}S^2=\frac{n-1}{n}ES^2=\frac{n-1}{n}DX=\frac{n-1}{n}\sigma^2$。答案选(D)

【知识点】①样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；②样本方差的期望： $ES^2=DX$；③正态分布的方差：$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow DX=\sigma^2$。

二、填空题

1、设两个独立的随机事件 A 和 B 都不发生的概率为$\frac{1}{16}$，A 发生而 B 不发生概率与 B 发生而 A 不发生的概率相等，则 $P(A)$=_________。

【详解】$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)\Rightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)\Rightarrow P(A)=P(B)$， $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$
$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]=1-2P(A)+[P(A)]^2$，由$P(\overline{A}\overline{B})=\frac{1}{16}$得$P(A)=\frac{3}{4}$，答案为$\frac{3}{4}$。

【知识点】①用事件的关系和运算表示事件；②减法公式：$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$；③对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}$；④加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；⑤事件的独立定义：$P(AB)=P(A)P(B)$。

2、设 X~$b(2,p)$，Y~$b(3,p)$。已知$P(X\geq 1)=\frac{5}{9}$，则$P(Y\geq 1)=$_____。

【详解】$X\sim b(2,p)\Rightarrow P(X\geq 1)=C_2^1p(1-p)+C_2^2p^2=2p-p^2$，由$P(X\geq 1)=\frac{5}{9}$得 $p=\frac{1}{3}$；$Y\sim b(3,\frac{1}{3})\Rightarrow P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-C_3^0(1-\frac{1}{3})^3=\frac{19}{27}$，答案为$\frac{19}{27}$。

【知识点】①二项分布的分布律：$X\sim b(n,p)\Rightarrow P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n$；②对

立事件的概率：$P(\overline{A})=1-P(A)$。

3、随机变量 X、Y 是独立同服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布 $e(1)$，即其共同的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$，则 $P(\min\{X,Y\}\le 1)=$________。

【详解】$P(\min\{X,Y\}\le 1)=1-P(\min\{X,Y\}>1)=1-P(X>1,Y>1)=1-P(X>1)P(Y>1)$

$=1-\int_1^{+\infty}e^{-x}dx\int_1^{+\infty}e^{-y}dy=1-(-e^{-x}\Big|_1^{+\infty})(-e^{-y}\Big|_1^{+\infty})=1-e^{-2}$，答案为$1-e^{-2}$。

【知识点】①最小值概率的转化：$P(\min\{X,Y\}>a)=P(X>a,Y>a)$；②$X$, Y 相互独立 $\Rightarrow P(X\in I_x,Y\in J_Y)=P(X\in I_x)P(Y\in J_Y)$；③连续型随机变量概率的计算：$X\sim f(x)\Rightarrow P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$。

4、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，其共同的分布列为

X	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

，若存在实数 a，则任意的$\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2-a\right|\ge\varepsilon)=0$，则 a=______。

【详解】若 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，则 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2,\cdots$ 独立同分布，由大数定律得 $\lim\limits_{n\to\infty}P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i^2\right|\ge\varepsilon)=0$。因此$a=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i^2=EX^2=(-1)^2\times 0.25+0^2\times 0.5+1^2\times 0.25$ =0.5。答案为 0.5。

【知识点】①大数定律：$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i\right|<\varepsilon)=1$；

②离散型随机变量的数学期望：X 的分布为 $P(X=x_n)=p_n,n=1,2,3,\cdots\Rightarrow Eg(X)=\sum_n g(x_n)p_n$。

5、设(X_1,X_2,X_3)是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则 $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}\sim$_____分布。

【详解】$X_1\sim N(0,\sigma^2)$，$X_2\sim N(0,\sigma^2)\Rightarrow X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)\Rightarrow X=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，

$X_3\sim N(0,\sigma^2)\Rightarrow\frac{X_3}{\sigma}\sim N(0,1)\Rightarrow Y=(\frac{X_3}{\sigma})^2\sim\chi^2(1)$；$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}\sim t(1)$。答案为$t(1)$。

【知识点】①正态分布：$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$；②$\chi^2$ 分布的定义：$X_i\sim N(0,1),X_1,X_2,\cdots,X_n$独立$\Rightarrow\sum_{i=1}^n X_i\sim\chi^2(n)$；③$t$ 分布的定义：$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，

X、Y独立$\Rightarrow \dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}} \sim t(n)$。

三、调查资料显示，某校学生一学期上网时间(小时)$X\sim N(80,20^2)$，一学生上网时间不超过 80 小时，他的概率统计及格的概率为 0.8；上网时间在 80-112.9 小时之间，他的概率统计及格的概率为 0.1；上网时间超过 112.9 小时，概率统计及格的概率为 0.05。求：1、挑选的学生概率统计及格的概率；2、若已知挑选的学生概率统计不及格，他一学生上网时间超过 112.9 小时的概率。

【详解】1、用 A_1 表示学生上网时间不超过 80 小时，用 A_2 表示上网时间在 80-112.9 小时之间，用 A_3 表示上网时间超过 112.9 小时，用 B 表示概率统计不及格。则

$P(A_1)=P(X\le 80)=F(80)=\Phi(\dfrac{80-80}{20})=\Phi(0)=0.5$；

$P(A_2)=P(80<X\le 112.9)=F(112.9)-F(80)=\Phi(\dfrac{112.9-80}{20})-\Phi(\dfrac{80-80}{20})=0.45$，

$P(A_2)=P(X>112.9)=1-F(112.9)=1-\Phi(\dfrac{112.9-80}{20})=0.05$。

1、$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.5\times 0.2+0.45\times 0.9+0.05\times 0.95=0.5545$，$P(\overline{B})=1-P(B)=0.4455$；

2、$P(A_3|B)=\dfrac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\dfrac{0.05\times 0.95}{0.5545}=\dfrac{95}{1109}\approx 0.08566$。

【知识点】①正态分布的计算：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $F(x)=\Phi(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$；②全概率公式：$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$；③贝叶斯公式：$P(A_k|B)=\dfrac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$。

四、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，求：1、求 $Y=\ln X$ 的分布函数 $F_Y(y)$；2、$E\sin\dfrac{\pi X}{2}$。

【详解】1、$y<0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\ln X\le y)=P(X\le e^Y)=\int_{-\infty}^{e^y}f(x)dx=\int_0^{e^y}1dx=e^y$；$y>1$时，$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{e^y}f(x)dx=\int_0^1 1dx+\int_1^{e^y}0dx=1$。总之 $F_Y(y)=\begin{cases}e^y & y<0\\ 1 & y\ge 0\end{cases}$。

2、$E\sin\dfrac{\pi X}{2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2}f(x)dx=\int_0^1\sin\dfrac{\pi x}{2}dx=\dfrac{2}{\pi}$。

【知识点】①连续型随机变量函数 $Y=G(X)$ 分布的求法：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$；②

连续型随机变量函数的数学期望的计算：$Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$。

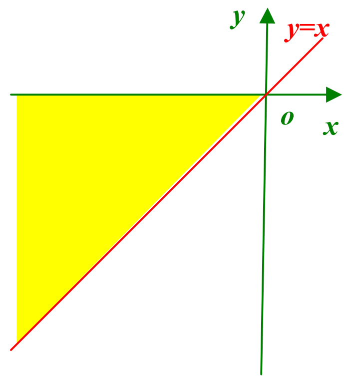
五、设二维连续型随机变量(*X*, *Y*)的联合概率密度函数为

$f(x,y)=\begin{cases}e^x & x\le y<0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求：1、*Y* 的边缘分布密度；2、条件分布密度 $f_{X|Y}(x|y)$；3、*Z*=*X*−*Y* 的分布函数。

【详解】1、$y\le 0$ 时 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{y}e^x dx=e^y$，

$y>0$ 时 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$，总之，

$f_Y(y)=\begin{cases}e^y & y\le 0\\ 0 & y>0\end{cases}$。



2、$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}e^{x-y} & x\le y\\ 0 & x>y\end{cases}$；

3、$z\le 0$ 时 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)$

$=\iint\limits_{x-y\le z}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{y\ge x-z}e^x dxdy=\int_{-\infty}^{z}dx\int_{x-z}^{0}e^x dy=e^z$，$z>0$ 时 $F_Z(z)=\iint\limits_{x-y\le z}f(x,y)dxdy=1$，总之，

$F_Z(z)=\begin{cases}e^z & z\le 0\\ 1 & z>0\end{cases}$。

【知识点】①连续型随机变量边缘概率密度的计算：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$；②条件概率密度的计算：$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$；③函数 $Z=g(X,Y)$ 分布函数的计算：$F_Z(z)=P(Z\le z)$ $=P(g(X,Y)\le z)=\iint\limits_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy$。

六、某保险公司有 10000 个人购买了一年期人寿保险，投保人每年缴纳 60 元保费。若投保人则一年内死亡，则保险公司赔付 5 万元。各投保人在一年内是否死亡相互独立，死亡的概率为 0.1。利用中心极限定理求保险公司一年内赔付总额不超过 5300 万元的概率。

【详解】用 *X* 表示一年内死亡的投保人人数，则 $X\sim b(10000,0.1)$。由中心极限定理，*X* 近似地服从 $N(10000\times 0.1,10000\times 0.1\times 0.9)$。$P(5X\le 5300)=P(X\le 1060)=F(1060)\approx\Phi(\dfrac{1060-1000}{\sqrt{900}})$

$=\Phi(2)=0.9772$。

【知识点】①二项分布的应用背景：*n* 重 Bernoulli 试验中成功的次数；②中心极限定理：

$X\sim b(n,p)\Rightarrow P(a<X\le b)\approx\Phi(\dfrac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}})-\Phi(\dfrac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}})$。

七、设总体 X 的分布密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta x^{-\theta-1} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$，其中 $\theta>1$ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自 X 的容量为 n 的简单随机样本，求 1、θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；2、θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$。

【详解】1、$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{1}^{+\infty}x\theta x^{-\theta-1}dx=\dfrac{\theta}{\theta-1}$，由 $EX=\overline{X}$ 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$；

2、似然函数为 $L(\theta)=\theta x_1^{-\theta-1}\theta x_2^{-\theta-1}\cdots\theta x_n^{-\theta-1}=\theta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{-\theta-1}$，

取对数：$\ln L(\theta)=n\ln\theta-(\theta+1)(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)$，

求导：$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}-(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)$，由 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$ 得 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L=\dfrac{n}{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}$。

【知识点】①矩估计量的求法：解方程 $EX=\overline{X}$；②最大似然估计量的求法：写似然函数、取对数、求导、解方程。

八、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，σ 未知，$(x_1,x_2,\cdots,x_{36})$是来自总体 X 的容量为 36 的简单随机样本，算得样本均值的观测值 $\overline{x}=10$，样本方差的观测值 $s^2=8.76$，求 μ 的置信度为 95％的置信区间。

【详解】σ 未知时 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\overline{x}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{x}+\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$。其中 $n=36$，$\alpha=0.05$，则 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.03$。又 $\overline{x}=10$，$s^2=8.76$，则 μ 的置信度为 95％的置信区间为 $(10-\dfrac{\sqrt{8.76}}{\sqrt{36}}\times 2.03,10+\dfrac{\sqrt{8.76}}{\sqrt{36}}\times 2.03)$，即 $(9,11)$。

【知识点】①σ 未知时 μ 的置信区间：$(\overline{x}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{x}+\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$。

九、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_{101})$是来自 X 的容量为 101 的简单随机样本观察值，μ、σ 未知，对检验问题：H_0：$\sigma^2=1^2\leftrightarrow H_1$：$\sigma^2<1^2$，若已知在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝了 H_0，求样本方差 s^2 的观察值允许的最大值。

【详解】检验问题为 H_0：$\sigma^2=1^2\leftrightarrow H_1$：$\sigma^2<1^2$；选取的统计量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{100S^2}{1^2}$；拒绝域为 $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.95}(100)=77.93$；由于拒绝 H_0，则 $\dfrac{100S^2}{1^2}<77.93$。$S^2<0.7793$。样

本方差 s^2 的观察值允许的最大值为 0.7793。

【知识点】 μ 未知时对 H_0： $\sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow H_1$： $\sigma^2<\sigma_0^2$ 的检验(单边检验)。