线性代数的思维定势

1. 若题设条件与代数余子式 A_{ij} 或 A^* 有关，则用行列式按行（列）展开定理以及 $AA^*=A^*A=|A|E$.

2. 若涉及到 A,B 是否可交换，即 $AB=BA$，则要立刻联想到逆矩阵的定义.

3. 题目中涉及初等变换，要联想到初等方阵，把矩阵变换转化成矩阵相乘的等式.

4. 若题设 n 阶方阵 A 满足 $f(A)=0$，要证 $aA+bE$ 可逆，则先分解出因子 $aA+bE$.

5. 若要证明一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性无关，先考虑用定义再说.

6. 若已知 $Ax=0$ 的线性无关的解为 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$，则 $n-r(A)\ge s$，即 $r(A)\le n-s$.

7. 若已知 $AB=O$，则联想到
   ① B 的列向量是齐次方程组 $Ax=0$ 的解；
   ② $r(A)+r(B)\le n$.

8. 若题目涉及求参数的值，则联想到是否有某行列式为零.

9. 若已知 A 的特征向量 ξ_0，则先用定义 $A\xi_0=\lambda_0\xi_0$ 处理一下.

10. n 阶对称矩阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow n-r(A-\lambda_0 E)=k$，其中 k 是特征值 λ_0 的重数.

11. 若题目中涉及到二次型，要联想到实对称阵 A，将二次型问题转化成实对称阵 A 的相关问题讨论.

12. 若要证明抽象的 n 阶实对称矩阵 A 为正定矩阵，则用定义处理一下.

题型 1　数字型行列式计算，重点是掌握三、四阶行列式及简单 n 阶行列式的计算.

1. 用性质化为三个重要行列式；
2. 按行（列）展开去降阶
3. 建立 D_n 与 D_{n-1},D_{n-2} 之间的关系，递推.

题型 2 方阵的幂

①求出 A^2,A^3，递推求出 A^n；

②若 $r(A)=1$，则 $A=\alpha\beta^T$，$A^2=lA,\ l=\beta^T\alpha=\alpha^T\beta$；

③若 $A=E+B,$ 且 $B^k\ne 0$，$B^{k+1}=0$，则 $A^n=(E+B)^n=E+C_n^1B+\cdots+C_n^kB^k+0$

④ $P^{-1}AP=B\Rightarrow A^n=PB^nP^{-1}$ 若 $A\sim\Lambda\Rightarrow A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

题型 3 抽象矩阵的行列式

1. 先矩阵运算，再行列式运算；注意 E 的恒等变形

$E=E^T=AA^{-1}=A^{-1}A,\quad |AB|=|A||B|,\ |kB|=k^n|A|$

2. $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

题型 4 解矩阵方程

方法 通过矩阵运算，把方程化简为下述基本方程：

① $Ax=C$，则 $x=A^{-1}C$ ② $xA=C$，则 $x=CA^{-1}$ ③ $AxB=C$，则 $x=A^{-1}CB^{-1}$

注 A,B 都可逆，才用上述方法；若 A,B 不可逆，则设出矩阵 $A\ \ B$ 建立方程组求解。

题型 5 初等变换与初等阵的关系

1. 初等矩阵 P 左（右）乘 A，所得 PA（AP）就是 A 作了一次与 P 同样的行（列）变换
2. 初等矩阵均可逆，且其逆阵仍为同类型的初等矩阵

步骤：先用箭头写出初等变换；2. 用初等阵将 $\to$ 改为 $=$

题型 6 求矩阵的秩

法一：A 经初等行变换化为行阶梯型阵 B，则 $r(A)=r(B)=B$ 的非零行行数；

法二： 矩阵 A 的秩=A 的行向量组的秩=A 的列向量组的秩

法三：A 为抽象矩阵利用秩的不等式证明 $r\le r(A)\le r$.

题型 7 求矩阵的逆

1. 用伴随矩阵：$AA^*=A^*A=|A|E\Rightarrow A\dfrac{A^*}{|A|}=E\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$

二阶矩阵用伴随求逆最简单. 三阶可以用伴随求逆, 四阶五阶不可取.

2. 用初等行变换： $(A\,|\,E)\xrightarrow{\text{行}}\left(E\,|\,A^{-1}\right)$

$$(A\ \vdots\ E)\xrightarrow{\text{从上到下}}\begin{pmatrix}\ddots & * & \vdots & \\ 0 & \ddots & \vdots & *\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{从下到上}}\begin{pmatrix}\ddots & 0 & \vdots & \\ 0 & \ddots & \vdots & *\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{某行乘k}}\left(E\ \vdots\ A^{-1}\right)$$

3. 用分块矩阵

$$\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ O & B^{-1}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O & B^{-1}\\ A^{-1} & O\end{pmatrix}$$，A,B 是可逆矩阵

4. 用定义：$AB=kE$，$k\neq 0$，则 $BA=kE$； $A^{-1}=\frac{1}{k}B$

若题设 n 阶方阵 A 满足 $f(A)=O$，要证 $aA+bE$ 可逆，则先分解出因子 $aA+bE$，若 $(aA+bE)B=kE(k\neq 0)$，则 $aA+bE$ 可逆，且 $(aA+bE)^{-1}=\frac{1}{k}B$

题型 8 判定向量组的线性相关性及证明抽象向量组的线性无关

如何证明线性无关?

法一:在考研中主要使用定义法:先设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 通过恒等变形，

1. 找某个代数式乘一下，证必有 $k_1=\cdots=k_s=0$

2. 重新组合 $\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_s=0$

法二:用秩的一些定理、公式证出：$r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)=s$

题型 9 求具体向量组的秩和极大线性无关组

将向量组构成矩阵，求矩阵的秩，即得向量组的秩；

将 $A\to$ 行最简型，选阶数为 $r(A)$ 的非 0 子式对应的列即为极大无关组（每个台阶选一个，取竖线右边第一个对应的向量）

题型 10 求抽象向量组的秩

1. 矩阵 A 的秩= A 的列秩= A 的行秩；
2. $r(AB)\leq\min\left(r(A),r(B)\right)$；. 若 A 可逆，则 $r(AB)=r(B)$，$r(BA)=r(B)$；

   $A_{m\times n}B_{n\times s}=O\Rightarrow r(A)+r(B)\leq n$

3. 利用秩的性质求出矩阵 A 的秩即求出对应的列向量组 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$ 的秩；

4. 无关组增加分量仍无关.

题型 11 利用向量组的秩与极大无关组证明有关矩阵秩的结论

方法　将矩阵写成向量组，用极大无关组的性质证明.

题型 12 抽象方程组的求解

①必须先求 $A\vec{x}=0, A\vec{x}=\vec{b}, r(A), n-r(A)$

②把条件写成矩阵形式，利用矩阵运算，求出 $A\vec{x}=0$ 的 $n-r(A)$ 个线性无关的解，及 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的一个特解。

题型 13 求证或讨论方程组 $Ax=b$ 有解（向量组的线性表示，两向量组是否等价）的条件

1：写矩阵转化为矩阵的命题，利用初等变换求满足的条件

注：①$(A\vdots B)\overset{\text{行}}{\sim}$ 行阶梯形。　　②$\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ B \end{pmatrix}\overset{\text{列}}{\sim}$ 列阶梯形。

2：当 A 为方阵时，求出 $|A|\neq 0$ 的条件即，$A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解的条件。再把 $|A|=0$ 中的参数代回原方程，对 $(A\vdots\vec{b})\overset{\text{行}}{\sim}$ 行阶梯；若 $r(A)=r(A\vdots b)$，则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多解；若 $r(A)<r(A\vdots b)$，则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 无解。

题型 14 两方程组解的关系（同解，公共解）

①转化为矩阵秩的等价命题。
② 方程组的基础解系，特解入手求解。

题型 15 抽象阵的特征值、特征向量

方法 1．定义法　将条件写成矩阵形式后与 $A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq 0$ 比较；

2. 特征多项式法　λ 为 A 的特征值 $\Leftrightarrow |A-\lambda E|=0 \Leftrightarrow |\lambda E-A|=0$

3. 相似　已知 $P^{-1}AP=B$，

　若 $A\alpha=\lambda\alpha$, 则 $B(P^{-1}\alpha)=\lambda(P^{-1}\alpha)$；

　若 $B\alpha=\lambda\alpha$, 则 $A(P\alpha)=\lambda(P\alpha)$；

4. 若 $r(A)=1$，则 $\lambda=tr(A)$ 和 0

求特征向量

1. 定义法 $A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq 0$；　　2. 基础解系法　$(A-\lambda E)x=0$ 的基解

题型 16 矩阵与其特征值、特征向量互求问题.

1. 上、下三角阵, 对角阵的特征值为主对角线上的元素;

2. 零矩阵的特征值全为零, 特征值全为零的矩阵不一定是零矩阵. 例如 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

题型 17 相似矩阵性质

相似则"四同"; $r(A)=r(B)$; $|A|=|B|$; $tr(A)=tr(B)$; $\lambda_A=\lambda_B$

题型 18 方阵相似于对角阵

1. "四同"是相似的必要条件, 用四个必要条件求解，只要有一 "不同"，则不相似;

2. 若 A,B 均与对角阵 Λ 相似，则 A,B 相似.

题型 19 与实对称矩阵有关的问题:

1. 实对称阵 A 的不同特征值所对应的特征向量正交;

2. 实对称阵 A 的秩 $r(A)$ 即为非 0 特征值的个数;

3. 实对称阵一定可以正交相似对角阵（步骤）;

4. 已知特征值和特征向量，反求矩阵 A

题型 20 二次型的基本概念与标准化

(1) 写出 f 的矩阵 A;

(2) 求出 A 的特征值及对应的特征向量

(3) 正交单位化，得正交单位向量组 η_1,η_2,η_3;

(4) 构造正交阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$;

(5) 写出正交变 $x=Qy$, 得 $x^TAx=y^T\Lambda y$， $\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

题型 21 判定二次型、对称矩阵的正定性

1. 具体阵用顺序主子式法;

2. 抽象阵用特征值法或定义法; 并注意：当 α 为 n 维非 0 列向量时 $\alpha^T\alpha>0$.

3. 任何 x，恒有 $f=x^TAx\geq 0,\ f=0\Leftrightarrow x=0$;

4. A为正定阵$\Rightarrow a_{ii}>0,|A|>0$

注：要证一个矩阵是正定矩阵。1. 是否对称;2. 证明其正定性.

题型 22 如何判断矩阵的等价，相似，合同

A与B等价$\Leftrightarrow PAQ=B,\quad P,Q$可逆$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$，$A$、$B$同型；

A与B合同$\Leftrightarrow C^TAC=B\Leftrightarrow x^TAx$与$x^TBx$有相同的正、负惯性指数；

A与B相似$\Leftrightarrow P^{-1}AP=B\Leftarrow A$，$B$都与同一个对角阵相似。

特别：当A、B为对称阵时，A与B相似$\Leftrightarrow\lambda_A=\lambda_B\Rightarrow p_A=p_B$，$q_A=q_B\Leftrightarrow A$与$B$合同.