学习线性代数的方法

从例题中发现知识点的联系

主讲人：曹洋波

线性代数的基本概念

- 式

  行列式　　余子式　代数余子式　顺序主子式
三角行列式　　对角行列式

- 阵

m×n矩阵　方阵 零矩阵　三角矩阵
单位矩阵　数量矩阵 对角矩阵　对称矩阵
反对称矩阵 伴随矩阵　可逆矩阵　正交矩阵

- 向量（组）

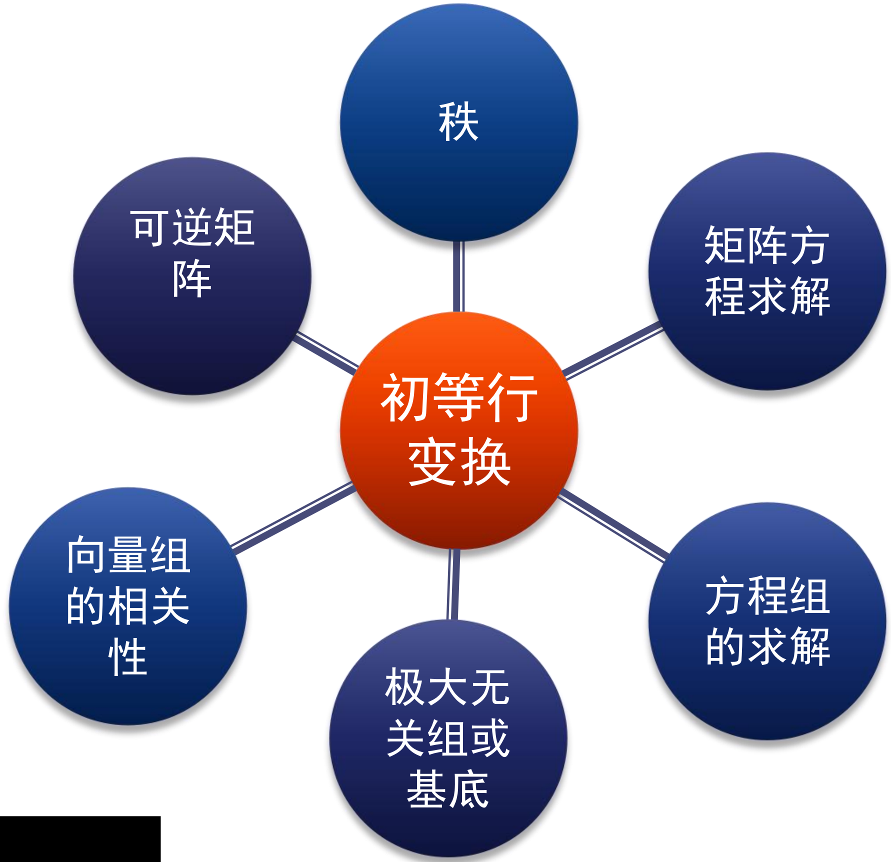
行向量　列向量　单位向量　n维向量
无关组　相关组　极大无关组
基础解系 基底　特征向量

核心概念

- 秩

核心算法

- 初等行变换



线性代数的基本题型

- 一.行列式的计算
- 二. 矩阵的运算、伴随矩阵、分块矩阵的运算
- 三.初等变换求秩、逆矩阵、解矩阵方程
- 四. 方程组解的判断及求通解
- 五. 线性相关性的判断、最大无关组的求法及其他向量有其表示
- 六. 正交判断及标准正交向量组的求法，正交相似对角化的计算
- 七. 二次型的正定判断、正负惯性指数的判断及二次型化标准形

一.线性代数典型例题之 行列式的计算

利用按行按列展开定理，并结合性质，可简化行列式计算：

计算行列式时，可先用行列式的性质将某一行（列）化为仅含1个非零元素，再按此行（列）展开, 变为低一阶的行列式，如此继续下去，直到化为三阶或二阶行列式.

计算方法：

(1) 化上(下)三角形法; **(2)降阶法.**

计算行列式常用方法：利用运算$r_i + kr_j$把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 1．
$$D = \begin{vmatrix} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times 3 \\ \oplus \end{array}$$

解： $$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underline{\underline{r_2+3r_1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+3r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \times(-2) \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\xlongequal{r_3-2r_1}\begin{matrix} (-4)\times \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \times(-3) \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$
(-4)\times\;
\begin{vmatrix}
\boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\
3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\
4 & -4 & 10 & -10 & 2
\end{vmatrix}
\;\times(-3)
$$

$\oplus$ $\oplus$

$$
\overline{\overline{r_2-2r_1}}
$$

$$
\underset{r_4-4r_1}{\overline{\overline{r_3-3r_1}}}
\begin{vmatrix}
1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\
0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\
0 & 0 & 2 & 2 & -2
\end{vmatrix}
$$

$$\xlongequal[r_4 - 4r_1]{r_3 - 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-2) \\ \oplus \\ \oplus \end{matrix}$$

$$\xlongequal[r_5-2r_3]{r_4+r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \times 4 \\ \oplus \end{matrix}$$

$$
= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \times 4 \\ \oplus \end{matrix}
$$

$$
\xlongequal{r_5 + 4r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) \boxed{= 12.}
$$

例2. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

解： 按第二行展开，得

$$D=0\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=27.$$

例3. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}9&3&0&2\\5&5&5&5\\6&5&0&6\\6&6&1&0\end{vmatrix}$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$，$6A_{21}+9A_{22}+5A_{24}$.

解：利用性质6，可通过构造行列式来计算：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}9&3&0&2\\5&5&5&5\\6&5&0&6\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

例4. 设 A,B是3阶方阵，且 $|A|=2,|B|=3$，则

$$|2A| = \underline{\qquad},|2A^TB| = \underline{\qquad},\left|3\begin{pmatrix} A^T & O \\ O & B \end{pmatrix}\right| = \underline{\qquad}.$$

例5. 设 A,B是3阶方阵，且满足 $A^2+AB+2E=O,$

且$|A|=2,$ 求$|A+B|$

例6. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 4 & 3 & 5\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}8 & 2 & 6\\ 5 & 3 & 4\end{bmatrix}$

求满足 $2A+X=B-2X$ 的 X

解: $X=\frac{1}{3}(B-2A)=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}$

例7. $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}, C=AB$ 求 C^{100}.

解： $C=ABAB\cdots AB=(BA)^{99}AB$

$$=(32)^{99}\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\8 & 10 & 12\\12 & 15 & 18\end{pmatrix}$$

例8 设方阵 A 满足方程 $A^2 - A - 2E = 0$, 证明: A, $A+2E$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵.

证明 由 $A^2 - A - 2E = 0$,

得 $A(A-E) = 2E \Rightarrow A\dfrac{A-E}{2} = E$ $\quad A^{-1}$

$\Rightarrow |A|\left|\dfrac{A-E}{2}\right| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$, 故 A 可逆.

$\therefore \quad A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A-E).$

又由 $A^2 - A - 2E = 0$

$\Rightarrow (A+2E)(A-3E) + 4E = 0$

$\Rightarrow (A+2E)\left[-\dfrac{1}{4}(A-3E)\right] = E$ $\quad (A+2E)^{-1}$

$\Rightarrow |A+2E|\left|-\dfrac{1}{4}(A-3E)\right| = 1$, 故 $A+2E$ 可逆.

且 $(A+2E)^{-1} = -\dfrac{1}{4}(A-3E) = \dfrac{3E-A}{4}.$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

例9: 设 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$.

解: 将A分块 $A = \left(\begin{array}{c:cc} 5 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$,

形成分块对角矩阵.

其中 $A_1 = (5), A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则$A_1^{-1} = (1/5); A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

例10. 将矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

化为行阶梯形矩阵、行最简形矩阵，并求秩

解：
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&1\\0&-3&-1&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&1\\0&0&-4&-4\end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵.

$$\xrightarrow{r_3\times\left(-\frac{1}{4}\right)}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

行最简形矩阵.

例11.设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\3&\lambda&-1&2\\5&3&\mu&6\end{pmatrix}$,已知$R(A)=2$, 求$\lambda$与$\mu$的值.

解:

$$A \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&\lambda+3&-4&-4\\0&8&\mu-5&-4\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&\lambda+3&-4&-4\\0&5-\lambda&\mu-1&0\end{pmatrix},$$

由$R(A)=2$, 得 $\begin{cases}5-\lambda=0\\ \mu-1=0\end{cases}$, 即 $\begin{cases}\lambda=5\\ \mu=1\end{cases}$.

例12. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,求 A^{-1}.

解: $(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}$

$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \end{pmatrix}$$

例13. 设矩阵A, B满足$AB = A + 2B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad 求 B.$$

解： 因为 $AB - 2B = A$

则 $\left(A - 2E\right)B = A$ 即 $B = \left(A - 2E\right)^{-1} A$

$$\left(A-2E \;\vdots\; A\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times(-1)]{\substack{r_2+r_3\\ r_1-r_3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)$$

则 $B=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$

例14（1）.设线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2\end{cases}$，

问λ取何值时, 方程组有解? 有无穷多个解?

解: 对增广矩阵 $\overline{A}$ =$(A|b)$, 作初等行变换,

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{array}\right)$$

(1) 当$\lambda = -2$时，

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

则$R(A) < R(\overline{A})$，故方程组无解.

(2) 当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$ 时，

则$R(A) = R(\overline{A}) = 3$，故方程组有唯一解.

(3) 当$\lambda = 1$时，

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

则$R(A) = R(\overline{A}) = 1$，故方程组有无穷多解.

例14（2）问当 k 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_1 \qquad\quad - x_3 = 0 \\ x_1 \qquad\quad - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

解：齐次线性方程组有非零解的充要条件是

$r(A) < n$ 即：$|A| = 0$

因为 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ k & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3k - 1$

所以当 $k = \dfrac{1}{3}$ 时，方程组有非零解。

小结:

对n元线性方程组:

$R(A)=n \Leftrightarrow Ax=0$只有零解;

$R(A)<n \Leftrightarrow Ax=0$有非零解;

$R(A)=R(A\,\vdots\,b)=n \Leftrightarrow Ax=b$有唯一解;

$R(A)=R(A\,\vdots\,b)<n \Leftrightarrow Ax=b$有无穷多解;

$R(A)<R(A\,\vdots\,b) \quad \Leftrightarrow Ax=b$无解.

例15 求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$

解 对增广矩阵B施行初等行变换：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见$R(A)=R(B)=2$,故方程组有解,并有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2, \\ x_3 = \quad\quad 2x_4 + 1/2. \end{cases}$$

取 $x_2 = x_4 = 0$, 则 $x_1 = x_3 = \frac{1}{2}$,即得方程组的一个解

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在对应的齐次线性方程 组$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = \quad\quad 2x_4 \end{cases}$中,取

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 则 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方 程组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

例 16

求证：$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}7\\4\\5\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\3\\-4\\1\end{bmatrix}$线性无关.

证　设　$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$

即 $\begin{bmatrix}2&3&7&1\\0&-1&4&3\\0&0&5&-4\\0&0&0&1\end{bmatrix}x=0$

显然只有零解　$x_1=x_2=x_3=x_4=0.$

$\therefore\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关.

例 17 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明 $\beta_1=2\alpha_1+\alpha_3$, $\beta_2=3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=5\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$也线性无关．

证 设 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$

即 $x_1(2\alpha_1+\alpha_3)+x_2(3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)+x_3(5\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3)=0$

即 $(2x_1+3x_2+5x_3)\alpha_1+(-x_2-x_3)\alpha_2+(x_1+x_2+3x_3)\alpha_3=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} x=0$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\Rightarrow x=0$$

$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关

解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-4r_1}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&0&0&-1&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-4&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$$

所有$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 与 β_1,β_2,β_4 等价，

β_1,β_2,β_4 线性无关，

因此极大线性无关组是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ ，

且 $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$ $\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2$

例18 设 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$ $\alpha_2=(0,3,1,2)^T$ $\alpha_3=(3,0,7,14)^T$

$\alpha_4=(1,-2,2,0)^T$ $\alpha_5=(2,1,5,10)^T$

求（1）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩

（2）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的极大线性无关组

（3）把其余向量用极大无关组表示

例18. 求一单位向量，使它与 $\alpha_1 = (1,1,-1,1)$，
$\alpha_2 = (1,-1,-1,1)$，$\alpha_3 = (2,1,1,3)$ 正交.

解 设所求向量为$x = (a,b,c,d)$，则由题意可得：

$$
\begin{cases}
\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = 1, \\
a+b-c+d = 0, \\
a-b-c+d = 0, \\
2a+b+c+3d = 0.
\end{cases}
$$

解之可得：$x = \left(-2\sqrt{\dfrac{2}{13}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{26}}, \dfrac{3}{\sqrt{26}}\right)$

[redacted] $= \left(2\sqrt{\dfrac{2}{13}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{26}}, -\dfrac{3}{\sqrt{26}}\right)$.

例19. 设实三阶对称矩阵A的三个特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -$

属于λ_1, λ_2的特征向量依次为 $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求$A$.

解： 设 $p_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, 由 $p_1 \perp p_3$, $p_2 \perp p_3$ 可得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

该齐次方程组的一个非零解为 $p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

令 $P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$

则有 $P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

二、对称矩阵正交对角化的方法

根据上述结论, 利用正交矩阵将对称矩阵A化为对角矩阵, 其具体步骤为:

1. 求A的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$;
2. 由$(A-\lambda_i E)x=0$求出λ_i的r_i个特征向量;
3. 将λ_i的r_i个特征向量正交化;
4. 将所有特征向量单位化.

例20: 对实对称矩阵A, 求正交矩阵P, 使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角阵.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解: 第一步, 求A的特征值.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2)=0$$

得A的特征值$\lambda_1=4,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-2.$

第二步, 由$(A-\lambda_i E)x=0$, 求A的特征向量.

对$\lambda_1=4$,由$(A-4E)x=0$, 得

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2 = 0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_2+4x_3=0 \end{cases},\ \text{得基础解系}\ \xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

对$\lambda_2=1$,由$(A-E)x=0$, 得

$$\begin{cases} -x_1+2x_2 = 0 \\ 2x_1+2x_3=0 \\ 2x_2+x_3=0 \end{cases},\quad \text{得基础解系}\ \xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

对$\lambda_2=-2$,由$(A+2E)x=0$, 得

$$\begin{cases} -4x_1+2x_2 \qquad\qquad = 0 \\ \quad 2x_1-3x_2+2x_3=0 \\ \qquad\qquad 2x_2-2x_3=0 \end{cases}$$, 得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

第三步, 将特征向量正交化.

由于ξ_1, ξ_2, ξ_3是属于A的3个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$的特征向量, 故它们必两两正交.

第四步, 将所有特征向量单位化.

令
$$\eta_i=\frac{\xi_i}{\|\xi_i\|}, \quad i=1, 2, 3.$$

得
$$\eta_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix},\ \eta_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\ \eta_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

作 $$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix},$$

则 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

例21:对实对称矩阵A, 求正交矩阵P, 使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角阵.

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

解: 第一步, 求A的特征值.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(4-\lambda)^2=0$$

得A的特征值$\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=4$.

第二步, 由$(A-\lambda_i E)x=0$, 求A的特征向量.

对$\lambda_1=2$,由$(A-2E)x=0$, 得

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\qquad = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 \end{cases}，\text{得基础解系}\quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

对$\lambda_2=\lambda_3=4$,由$(A-4E)x=0$, 得

$$\begin{cases} \qquad 0 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}，\quad\text{得基础解系}\ \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

第三步, 将特征向量正交化.

由于ξ_2, ξ_3恰好正交, 故ξ_1, ξ_2, ξ_3两两正交.

第四步, 将所有特征向量单位化.

令 $$\eta_i = \frac{\xi_i}{\|\xi_i\|},\quad i = 1, 2, 3.$$

得 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$

于是得正交阵

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

则 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

如果对$\lambda_2=\lambda_3=4$, 由$(A-4E)x=0$, 得

$\begin{cases}0=0\\-x_2+x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$, 求得基础解系为$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$

由于ξ_2, ξ_3不正交, 需要将其正交化:

则取 $\eta_2=\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\eta_3=\xi_3-\frac{[\eta_2,\xi_3]}{[\eta_2,\eta_2]}\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

再将所求特征向量单位化得:

$$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad p_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

二. 用正交变换化二次型为标准形

1. 将二次型表示成矩阵形式 $f = x^T A x$, 求出 A;

2. 求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

3. 求出对应特征值 λ_i 的正交单位化的特征向量组, 从而有正交规范向量组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$;

4. 记 $P=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, 作正交变换 $x=Py$, 则得 f 的标准形:

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 .$$

例22: 将二次型

$$f = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

通过正交变换 $x=Py$ 化成标准形.

解: 1. 写出对应的二次型矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

2. 求A的特征值.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 17-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 14-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 14-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-18)^2(\lambda-9)$$

从而得A的特征值: $\lambda_1=9$, $\lambda_2=\lambda_3=18$.

3. 求特征向量.

将$\lambda_1=9$代入$(A-\lambda E)x=0$得基础解系: $\xi_1=(1, 2, 2)^T$.

将$\lambda_2=\lambda_3=18$代入$(A-\lambda E)x=0$得基础解系:

$\xi_2=(-2, 1, 0)^T$, $\xi_3=(-2, 0, 1)^T$.

将特征向量正交规范化:

取 $\alpha_1=\xi_1$, $\alpha_2=\xi_2$, $\alpha_3=\xi_3-\dfrac{[\alpha_2,\xi_3]}{[\alpha_2,\alpha_2]}\alpha_2$,

得正交向量组

$\alpha_1=(1/2, 1, 1)^T$, $\alpha_2=(-2, 1, 0)^T$, $\alpha_2=(-2/5, -4/5, 1)^T$.

将正交向量组单位化，令$\eta_i = \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}\quad (i = 1, 2, 3)$,

得 $$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix},\quad \eta_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix},\quad \eta_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{45} \\ -4/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$$

4. 作正交变换

令 $$P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$$

于是所求正交变换为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

且有 $$f = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2.$$

例23 化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

为标准形，并求所用的变换矩阵 .

解

含有平方项

含有 x_1 的项配方

$$f = \boxed{x_1^2} + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

去掉配方后多出来的项

$$\boxed{-x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3} + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2.$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$