一、选择题

1、1、设A、B是随机事件，且$P(A)\neq P(B)>0$，$B\subset A$，则必有

(A) $P(A|B)=1$ (B) $P(B|A)=1$ (C) $P(B|\overline{A})=1$ (D) $P(A|\overline{B})=0$

【详解】$B\subset A\Rightarrow AB=B\Rightarrow P(AB)=P(B)\Rightarrow P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，答案选(A)

【知识点】①随机事件包含的性质：$B\subset A\Rightarrow AB=B$；②条件概率的定义：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$。

2、设$X\sim N(3,\sigma^2)$，且已知$P(X>5)=0.2$，则$P(1<X\leq 3)=$

(A)0.2 (B)0.3 (C)0.4 (D)0.5

【详解】由于$P(X>5)=1-F(5)=1-\Phi(\dfrac{5-3}{\sigma})=\Phi(-\dfrac{2}{\sigma})=0.2$，则$P(1<X\leq 3)=F(3)-F(1)$

$=\Phi(\dfrac{3-3}{\sigma})-\Phi(\dfrac{1-3}{\sigma})=\dfrac{1}{2}-\Phi(-\dfrac{2}{\sigma})=0.3$，答案选(B)

【知识点】①用分布函数计算概率：$P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$；②正态分布的计算：$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow F(x)=\Phi(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$；③标准正态分布的性质：$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$。

3、设随机变量X、Y独立，X服从参数为$\lambda=1$的指数分布$e(1)$，Y在区间$(-1,2)$上服从均匀分布$U(-1,2)$，则$P(\min\{X,Y\}>1)=$

(A)$\dfrac{2}{3}e^{-1}$ (B)$\dfrac{2}{3}(1-e^{-1})$ (C)$\dfrac{1}{3}e^{-1}$ (D)$\dfrac{1}{3}(1-e^{-1})$

【详解】由已知$X\sim f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$，$Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & -1<y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则$P(\min\{X,Y\}>1)$

$=P(X>1,Y>1)=P(X>1)P(Y>1)=\int_1^{+\infty}f_X(x)dx\cdot\int_1^{+\infty}f_Y(y)dy=\int_1^{+\infty}e^{-x}dx\cdot\int_1^2\dfrac{1}{3}dy=\dfrac{1}{3}e^{-1}$。答案选(C)

【知识点】①随机变量最小值的概率转化：$P(\min\{X,Y\}>a)=P(X>a,Y>a)$；②指数分布：$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$；③均匀分布：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$；④随机变量的独立性：$X$、$Y$独立$\Rightarrow P(X>a,Y>b)=P(X>a)P(Y>b)$；⑤连续型随机变量概率的计算：$X\sim f(x)\Rightarrow$ $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$。

4、设随机变量X服从参数为$\lambda=1$的Poisson分布$P(1)$，则$P(X\geq EX^2)=$

(A)$1-e^{-1}$　(B)e^{-1}　(C)$2e^{-1}$　(D)$1-2e^{-1}$

【详解】X 服从 Poisson 分布 $P(1)$，则 $EX=DX=1$，且 $P(X=m)=\frac{1}{m!}e^{-1}\quad m=0,1,2,\cdots$，则 $EX^2=DX+(EX)^2=1+1=2$，$P(X\geq EX^2)=P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-2e^{-1}$。答案选(D)

【知识点】①Poisson 分布的分布律：$X\sim P(\lambda)\Rightarrow P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\quad m=0,1,2,\cdots$；②Poisson 分布的数学期望和方差：$X\sim P(\lambda)\Rightarrow EX=DX=\lambda$；③方差的计算：$DX=EX^2-(EX)^2$。

5、设随机变量 X、Y、Z 独立都服从标准正态总体 $N(0,1)$，则 $\frac{2X^2}{(Y-Z)^2}$ 服从的分布为

(A)$F(1,1)$　(B)$F(1,2)$　(C)$F(2,1)$　(D)$F(2,2)$

【详解】$X\sim N(0,1)\Rightarrow X^2\sim\chi^2(1)$，$Y\sim N(0,1),\ Z\sim N(0,1)\Rightarrow Y-Z\sim N(0,2)\Rightarrow\frac{Y-Z}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

$\Rightarrow\frac{(Y-Z)^2}{2}=(\frac{Y-Z}{\sqrt{2}})^2\sim\chi^2(1)$，则 $\frac{2X^2}{(Y-Z)^2}=\frac{X^2}{\frac{(Y-Z)^2}{2}}\sim F(1,1)$。答案选(A)

【知识点】统计量的分布：① $X\sim N(0,1)\Rightarrow X^2\sim\chi^2(1)$；② $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 X、Y 独立 $aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$；③ $X\sim\chi^2(m),\ Y\sim\chi^2(n)\Rightarrow\frac{nX}{mY}\sim F(m,n)$。

二、填空题

1、盒子中有 3 个黑球、2 个白球、2 个红球，从盒子中任意取出 4 个球，则取出的 4 个球中含有 1 个黑球 2 个白球的概率为________。

【详解】$\frac{C_3^1C_2^2C_2^1+C_3^2C_2^2}{C_7^3}=\frac{3\times1\times2+3\times1}{35}=\frac{9}{35}$，答案为 $\frac{9}{35}$。

【知识点】①古典概率模型中事件概率：$p=\frac{m}{n}$；②组合的计算：$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$。

2、设二维连续型随机向量(X,Y)的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & |y|<1,0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则 $P(X+Y\leq 1)=$_____。

【详解】$P(X+Y\leq 1)=\iint\limits_{x+y\leq 1}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_{-1}^{1-x}\frac{1}{2}dy=\int_0^1(1-\frac{1}{2}x)dx=\frac{3}{4}$。

【知识点】二维连续型随机向量概率的计算：$P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$。

3、设随机变量 X、Y 独立，DX=1，DY=2，则 Cov(X−3Y, X+Y)=________。

【详解】$\mathrm{Cov}(X-3Y,X+Y)=\mathrm{Cov}(X,X+Y)-\mathrm{Cov}(3Y,X+Y)=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)$

$-\mathrm{Cov}(3Y,X)-\mathrm{Cov}(3Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)-3\mathrm{Cov}(Y,X)-3\mathrm{Cov}(Y,Y)=DX-3DY=-5$

【知识点】协方差的性质：① $\mathrm{Cov}(X+Y,Z)=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(Y,Z)$；② $\mathrm{Cov}(X,X)=DX$；

③ $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$；④ X、Y独立 $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0$。

4、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同服从均匀分布 $U(0,1)$的随机变量，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 以概率收敛于________。

【详解】若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布的随机变量序列，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 以概率收敛于

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=EX^2=DX+(EX)^2=\frac{(1-0)^2}{12}+(\frac{0+1}{2})^2=\frac{1}{3}$。

【知识点】①大数定律：若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布，则 $\lim_{n\to\infty}P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon)=1$，

即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 以概率收敛于 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$；②均匀分布的数学期望和方差：$X\sim U(a,b)\Rightarrow EX=\frac{a+b}{2}$，

$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$；③方差的计算：$DX=EX^2-(EX)^2$。

5、设($X_1,X_2,\cdots,X_{10}$)是来自二项分布 $b(10,0.5)$ 的容量为 10 的简单随机样本，则 $D\overline{X}=$____。

【详解】$D\overline{X}=\frac{1}{n}DX=\frac{1}{10}\times10\times0.5\times(1-0.5)=0.25$。

【知识点】①样本均值的方差：$D\overline{X}=\frac{1}{n}DX$；②二项分布的方差：$X\sim b(n.p)\Rightarrow DX=np(1-p)$。

三、有甲、乙两个箱子，其中甲箱装有 3 个正品、3 个次品，乙箱是空的。从甲箱中转移 3 个产品到乙箱中，再从乙箱中不放回地抽取 2 个产品，求：

1、从乙箱取出的 2 个产品都是次品的概率；

2、已知从乙箱取出的 2 个产品都是次品的条件下，从甲箱中转移到乙箱中的 3 个产品都是次品的概率。

【详解】1、用 A_i 表示甲箱中转移到乙箱中的 3 个产品中有 i 个是次品，i=0,1,2,3。用 B 表示乙箱取出的 2 个产品都是次品。

1、$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}\times0+\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}\times0+\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}\times\frac{C_2^2}{C_3^2}+\frac{C_3^3C_3^0}{C_6^3}\times\frac{C_3^2}{C_3^2}=\frac{1}{5}$；

2、$P(A_3|B)=\dfrac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\dfrac{\dfrac{C_3^3C_3^0}{C_6^3}\times\dfrac{C_3^2}{C_3^2}}{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{4}$。

【知识点】①全概率公式：$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$；②贝叶斯公式：$P(A_k|B)=\dfrac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$；

③古典概率模型中事件概率：$p=\dfrac{m}{n}$；④组合的计算：$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$。

四、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & -2\le x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，求：1、$Y=X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$；2、$E|X|$。

【详解】1、$y<0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=0$，$0\le y\le 1$ 时，$F_Y(y)=P(X^2\le y)$

$=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)dx=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\dfrac{1}{3}dx=\dfrac{2\sqrt{y}}{3}$；$1<y<4$ 时，$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)dx=\int_{-\sqrt{y}}^{1}\dfrac{1}{3}dx$

$=\dfrac{1+\sqrt{y}}{3}$；$y\ge 4$ 时，$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)dx=\int_{-2}^{1}\dfrac{1}{3}dx=1$。总之 $F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \dfrac{2\sqrt{y}}{3} & 0\le y\le 1\\ \dfrac{1+\sqrt{y}}{3} & 1<y<4\\ 1 & y\ge 4\end{cases}$。

2、$E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-2}^{0}-x\cdot\dfrac{1}{3}dx+\int_{0}^{1}x\cdot\dfrac{1}{3}dx=\dfrac{5}{6}$。

【知识点】①连续型随机变量函数 $Y=G(X)$ 分布的求法：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$；②连续型随机变量函数的数学期望的计算：$Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$。

五、设二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度函数为

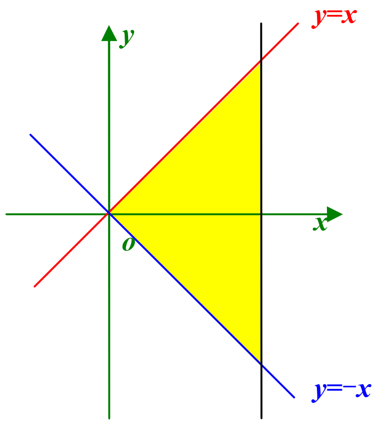
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x}{2} & |y|\le x,0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

求：1、X 的边缘分布密度；2、$P(X+Y>1)$；3、EXY。

【详解】1、$x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$，

$0<x<1$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-x}^{x}\dfrac{3}{2}xdx=3x^2$，总之，

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}。$$



2、$P(X+Y>1)=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{1-x}^{x}\frac{3x}{2}dy$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{3x}{2}(2x-1)dx=(x^3-\frac{3}{4}x^2)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{5}{16}$；

3、$E(XY)=\iint\limits_{R^2} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}xy\cdot\frac{3}{2}xdy$

$=\int_0^1\frac{3}{4}x^2y^2\Big|_{y=-x}^{y=x}dx=0$。

【知识点】①连续型随机变量边缘概率密度的计算：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$；②连续型随机向量概率的计算：$(X,Y)\sim f(x,y)\Rightarrow P((X,Y)\in D)=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$；③连续型随机向量数学期望的计算：$(X,Y)\sim f(x,y)\Rightarrow Eg(X,Y)=\iint\limits_{D}g(x,y)f(x,y)dxdy$。

六、盒子中有 6 个相同大小的球，其中有 1 个球标有号码 1，有 2 个球标有号码 2，有 3 个球标有号码 3，从盒子中有放回地抽取 125 个球，求取出的 125 球中球的号码之和不大于 300 的概率。

【详解】用 X_i 表示取出的第 i 个球的号码，则 X_i 的概率分布为 $\begin{array}{c|ccc} X & 1 & 2 & 3\\ P & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{array}$，因此

$EX_i=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$，$DX_i=EX_i^2-(EX_i)^2=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{2}-(\frac{7}{3})^2=\frac{5}{9}$，$i$=1,2, ⋯, 125。由中心极限定理，$X$ 近似地服从 $N(125\times\frac{7}{3},125\times\frac{5}{9})$。则

$$P(\sum_{i=1}^{125}X_i\le 300)=F(300)\approx\Phi(\frac{300-125\times\frac{7}{3}}{\sqrt{125\times\frac{5}{9}}})=\Phi(1)=0.8413。$$

【知识点】①离散型随机变量的数学期望与方差的计算：$P(X=x_i)=p_i\Rightarrow Eg(X)=\sum_i g(x_i)p_i$，$DX_i=EX_i^2-(EX_i)^2$；②中心极限定理：$EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布 $\Rightarrow P(a<\sum_{i=1}^{n}X_i\le b)\approx\Phi(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})-\Phi(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$。

七、设总体 X 服从二项分布 $b(100,\theta)$，即 X 的分布律为 $f(x,\theta)=C_{100}^{x}\theta^x(1-\theta)^{100-x}$，$x$=0,1,2, ⋯,100，$0<\theta<1$ 为未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本，求：

1、θ的矩估计量$\hat{\theta}$；2、θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_L$。

【详解】1、$EX=100\theta$，由$EX=\overline{X}$得θ的矩估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{100}$；

2、似然函数为$L(\theta)=C_{100}^{x_1}\theta^{x_1}(1-\theta)^{100-x_1}C_{100}^{x_2}\theta^{x_2}(1-\theta)^{100-x_2}\cdots C_{100}^{x_n}\theta^{x_n}(1-\theta)^{100-x_n}$

$=C_{100}^{x_1}C_{100}^{x_2}\cdots C_{100}^{x_n}\theta^{x_1+x_2+\cdots+x_n}(1-\theta)^{100n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$，

取对数：

$\ln L(\theta)=\ln(C_{100}^{x_1}C_{100}^{x_2}\cdots C_{100}^{x_n})+(x_1+x_2+\cdots+x_n)\ln\theta+[100n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)]\ln(1-\theta)$，

求导：$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{\theta}-\dfrac{100n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{1-\theta}$，

由$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$得$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}_L=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{100n}=\dfrac{\overline{X}}{100}$。

【知识点】①矩估计量的求法：解方程$EX=\overline{X}$；②最大似然估计量的求法：写似然函数、取对数、求导、解方程。

八、设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma>0$是未知常数，$(X_1, X_2,\cdots, X_{81})$是来自$X$的容量为81的简单随机样本。

1、写出统计量$\dfrac{9(\overline{X}-\mu)}{S}$所服从的分布；

2、若已知$\overline{X}$的观察值$\bar{x}=10$及μ的置信度为95％的置信区间下限为9.78，求样本均方差的观察值s。

【详解】1、$\dfrac{9(\overline{X}-\mu)}{S}=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{81}\sim t(80)$；

2、σ未知时μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$(\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$。由已知$\bar{x}=10$，

$\alpha=0.05$，则$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(80)=1.98$。则$\mu$的置信度为0.95的置信区间下限为$\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$=10-\dfrac{s}{\sqrt{81}}\times1.98$。由$10-\dfrac{s}{\sqrt{81}}\times1.98=9.78$可得$s=1$。

【知识点】①总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$；②$\sigma$未知时$\mu$的置信度为$1-\alpha$的置信区间：$(\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$。

九、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ、σ 均未知，$(X_1,X_2,\cdots,X_{81})$是来自 X 的容量为 81 的简单随机样本观察值，算得样本方差 S^2 的观察值为 s^2=0.25，在显著水平 α=0.05 下检验假设：H_0：$\sigma^2 \ge 0.4^2 \leftrightarrow H_1$：$\sigma^2 < 0.4^2$。

【详解】 待检验问题为 H_0：$\sigma^2 \ge 0.4^2 \leftrightarrow H_1$：$\sigma^2 < 0.4^2$；由于 μ 未知，选取的统计量为 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{80S^2}{0.4^2}$；拒绝域为 $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n-1) = \chi^2_{0.95}(80) = 60.39$；又 S^2 的观察值为 s^2=0.25，则 $\chi^2 = \dfrac{80\times 0.25^2}{0.4^2} = 125 > 60.39$，因此应接受 H_0。

【知识点】 μ 未知时对 H_0：$\sigma^2 \ge \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1$：$\sigma^2 < \sigma_0^2$ 的检验：①统计量：$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$；②拒绝域：$S = \{(x_1,\cdots,x_n) \big| \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$。