一、选择题

1、设随机事件 A、B 互不相容，则

(A) $P(\overline{A}\overline{B})=0$　　(B) $P(\overline{AB})=1$　　(C) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0$　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

【详解】 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1$，答案选(D)

【知识点】①“A、B 互不相容”的概念：$AB=\Phi$；②对偶律：$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；③对立事件的概率公式：$P(\overline{A})=1-P(A)$。

2、$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，记 $p=P(X\le\mu+\sigma^2)$，则

(A) p 随着 μ 的增加而增加　　(B) p 随着 σ 的增加而增加

(C) p 随着 μ 的增加而减少　　(D) p 随着 σ 的增加而减少

【详解】 $p=P(X\le\mu+\sigma^2)=F(\mu+\sigma^2)=\Phi(\frac{\mu+\sigma^2-\mu}{\sigma})=\Phi(\sigma)$，再由 $\Phi(x)$ 的单调性，答案选(B)

【知识点】①正态分布的计算：$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$；②分布函数的单调性。

3、设 X, Y 是 2 个相互独立同服从参数为 $\lambda=1$ 的 Poisson 分布 $P(1)$ 的随机变量，则 $P(X=0|X+Y=1)=$

(A)0　　(B)$\frac{1}{2e}$　　(C)$\frac{1}{2}$　　(D)$\frac{1}{e}$

【详解】 $P(X=0|X+Y=1)=\frac{P(X=0,X+Y=1)}{P(X+Y=1)}=\frac{P(X=0,Y=1)}{P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)}$

$=\frac{P(X=0)P(Y=1)}{P(X=0)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=0)}=\frac{\frac{1^0}{0!}e^{-1}\cdot\frac{1^1}{1!}e^{-1}}{\frac{1^0}{0!}e^{-1}\cdot\frac{1^1}{1!}e^{-1}+\frac{1^1}{1!}e^{-1}\cdot\frac{1^0}{0!}e^{-1}}=\frac{1}{2}$。答案选(C)

【知识点】①条件概率的定义：$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$；②离散型随机变量概率计算：$P$　()　；③随机变量的独立性：X、Y 独立 $\Rightarrow P(X=m,Y=n)=P(X=m)P(Y=n)$；④Poisson 分布：

$X\sim P(\lambda)\Rightarrow P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\quad m=0,1,2,\cdots$。

4、设随机变量 X、Y 独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(1,4)$，则 $E(XY^2)=$

(A)4　　(B)5　　(C)3　　(D)2

【详解】$E(XY^2)=EXEY^2=EX\cdot[DY+(EY)^2]=1\times(4+1^2)=5$。答案选(B)

【知识点】①独立的性质：X、Y独立$\Rightarrow f(X)$、$g(Y)$独立；②数学期望的性质：X、Y独立$\Rightarrow E(XY)=EXEY$；③正态分布的数学期望和方差：$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow EX=\mu$，$DX=\sigma^2$。

5、设$(X_1,\cdots,X_n)$是来自正态分布$N(0,1)$的容量为 n 的简单随机样本， $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则

(A)$\frac{\sqrt{n\overline{X}}}{S}\sim t(n-1)$　　(B)$\frac{\overline{X}}{S^2}\sqrt{n}\sim t(n-1)$

(C)$\frac{\overline{X}}{S}n\sim t(n-1)$　　(D)$\frac{\overline{X}}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$

【详解】$U=\frac{\overline{X}-0}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\sim N(0,1)$，$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{1^2}\sim\chi^2(n-1)$，则 $T=\frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}}}\sim t(n-1)$，即$\frac{\overline{X}}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$。答案选(D)

【知识点】统计量的分布：①$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$；

②$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$；③$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)\Rightarrow T=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}\sim t(n)$。

二、填空题

1、设甲盒中有 5 个白球，4 个黑球；乙盒中有 3 个白球，6 个黑球。先从甲盒中任取 1 球放入乙盒中，然后从乙盒中任取 1 球放入甲盒中，则甲盒中黑球个数不变的概率是_____。

【详解】记从甲盒中取到白球为 A，从乙盒中取到白球为 B，则甲盒中黑球个数不变的概率是$P(AB+\overline{A}\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}\overline{B})=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{5}{9}\times\frac{4}{10}+\frac{4}{9}\times\frac{7}{10}=\frac{8}{15}$，答案为$\frac{8}{15}$。

【知识点】①复杂事件用基本事件的；②加法公式：$AB=\Phi\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；③乘法公式：$P(AB)=P(B)P(A|B)$对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}$；④古典概率模型中事件概率：$p=\frac{m}{n}$。

2、随机变量X服从正态分布$N(\mu,2^2)$，且已知$P(X\le 3)=0.8413$。则$\mu=$_______。

【详解】$\left.\begin{array}{r} P(X \le 3) = F(3) = \Phi(\frac{3-\mu}{2}) \\ P(X \le 3) = 0.8413 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3-\mu}{2} = 1 \Rightarrow \mu = 1$。

【知识点】正态分布的计算：$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$。

3、设 X, Y 是 2 个相互独立同服从参数为 λ 的指数分布 $e(\lambda)$ 的随机变量，且已知 $P(\min\{X,Y\} > 1) = e^{-2}$ 则 $\lambda =$_________。

【详解】$P(\min\{X,Y\} > 1) = P(X > 1, Y > 1) = P(X > 1)P(Y > 1) = \int_1^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \int_1^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = e^{-2\lambda}$，由 $P(\min\{X,Y\} > 1) = e^{-2}$ 得 $\lambda = 1$。

【知识点】①随机变量最小值的概率转化：$P(\min\{X,Y\} > a) = P(X > a, Y > a)$；②随机变量的独立性：$X$、$Y$ 独立 $\Rightarrow P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$；③指数分布的概率密度：$X \sim e(\lambda) \Rightarrow X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$；④连续型随机变量的概率计算：$X \sim f(x) \Rightarrow P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$。

4、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立同服从参数为 $\lambda = 1$ 的 Poisson 分布 $P(1)$ 的随机变量序列。$T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的函数，若对任意的 $\varepsilon > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} P(|T(X_1, X_2, \cdots, X_n) - 1| < \varepsilon) = 1$，则 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n) =$________。

【详解】若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立同分布的随机变量序列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i\right| < \varepsilon) = 1$。而 $\sum_{i=1}^n EX_i = EX = 1$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - 1\right| < \varepsilon) = 1$。答案为 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$。

【知识点】①大数定律：若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立同分布，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i\right| < \varepsilon) = 1$；②Poisson 分布的数学期望：$X \sim P(\lambda) \Rightarrow EX = \lambda$。

5、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自分布总体 $b(10, p)$ 的简单随机样本，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，且已知 $E\overline{X} = 5$，则 p=________。

【详解】$\left.\begin{array}{r} E\overline{X} = EX = 10p \\ E\overline{X} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow p = 0.5$。

【知识点】①样本均值的期望：$E\overline{X}=EX$；②重要离散型随机变量的数字特征：$X\sim b(n.p)\Rightarrow EX=np$。

三、某厂生产的电子元件的寿命 X（以小时计）的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}0.005e^{-0.005x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$。一仪器由 3 个元件组成，3 个元件寿命是否超过 200 小时相互独立，若有 i 个寿命超过 200 小时，则该仪器使用到 200 小时能正常工作的概率分别为 $0.i(i=0,1,2,3)$，求：1、该仪器使用到 200 小时能正常工作的概率；2、若已知该仪器使用到 200 小时能正常工作，则 3 个元件寿命都超过 200 小时的概率。(提示：$\sum\limits_{i=0}^{3}C_3^i e^{-i}(1-e^{-1})^{3-i}\cdot i=3e^{-1}$)

【详解】1、用 A_i 表示 3 个元件中有 i 个寿命超过 200 小时，i=0,1,2,3。用 B 表示该仪器使用到 200 小时能正常工作。由 $P(X>200)=\int_{200}^{+\infty}f(x)dx=e^{-1}$，则 $P(A_i)=C_3^i e^{-i}(1-e^{-1})^{3-i}$，$i$=0,1,2,3。

1、$P(B)=\sum\limits_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\sum\limits_{i=0}^{3}C_3^i e^{-i}(1-e^{-1})^{3-i}\cdot 0.i=0.3e^{-1}$；

2、$P(A_3|B)=\dfrac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum\limits_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\dfrac{0.3e^{-2}}{0.3e^{-1}}=e^{-1}$。

【知识点】①全概率公式：$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$；②贝叶斯公式：$P(A_k|B)=\dfrac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$；

③连续型随机变量的概率计算：$X\sim f(x)\Rightarrow P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$；④二项分布的概率分布：$X\sim b(n,p)\Rightarrow P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad k=0,1,2,\cdots n$。

四、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求：1、$Y=e^X$ 的分布函数 $F_Y(y)$；2、Ee^X。

【详解】1、$y<0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=0$，$0\le y\le 1$ 时，$F_Y(y)=P(e^X\le y)$ $=P(X\le \ln y)=\int_{-\infty}^{\ln y}f(x)dx=0$；$1\le y\le e$ 时，$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{\ln y}f(x)dx=\int_0^{\ln y}1dx=\ln y$；$y>e$ 时，$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{\ln y}f(x)dx=\int_0^1 1dx=1$。总之 $F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<1\\ \ln y & 1\le y\le e\\ 1 & y>e\end{cases}$。

2、$EY=Ee^X=\int_{-\infty}^{+\infty}e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x\times 1dx=e-1$。

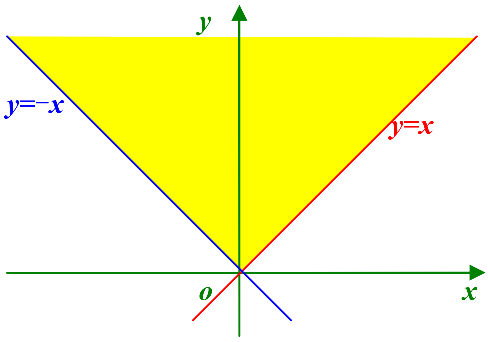
【知识点】①连续型随机变量函数 $Y=G(X)$ 分布的求法：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$；②连续型随机变量函数的数学期望的计算：$Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$。

五、设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y} & |x|<y \\ 0 & 其他\end{cases}$，求：1、$Y$ 的边缘分布密度；2、条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；3、$P(Y\le 1)$。

【详解】1、$y\le 0$ 时 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$，

$y>0$ 时 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-y}^{y}\frac{1}{2}e^{-y}dx=ye^{-y}$，总之，

$f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y} & y>0 \\ 0 & y\le 0\end{cases}$。



2、$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2y} & |x|<y \\ 0 & |x|\ge y\end{cases}$；

3、法Ⅰ：$P(Y\le 1)=\iint\limits_{y\le 1}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{-y}^{y}\frac{1}{2}e^{-y}dx=1-2e^{-1}$。

法Ⅱ：$P(Y\le 1)=\int_{-\infty}^{1}f_Y(y)dy=\int_0^1 ye^{-y}dy=1-2e^{-1}$。

【知识点】①连续型随机变量边缘概率密度的计算：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$；②连续型随机变量条件概率密度的计算：$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$；③连续型随机向量概率的计算：$(X,Y)\sim f(x,y)\Rightarrow P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ & 续型随机变量概率的计算：$X\sim f(x)\Rightarrow P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$。

六、某宾馆有 400 间客房，每间客房需要 2 千瓦的电力。设每间客房任一时刻需要用电的概率为 0.9(即开房率为 90%)，求需要多少千瓦的电力才能以 0.9772 的概率满足该宾馆客房用电的需要？

【详解】用 X 表示用电的客房数目，则 $X\sim b(400,0.9)$。由中心极限定理，$\sum_{i=1}^{100}X_i$ 近似地服从 $N(400\times 0.9,400\times 0.9\times 0.1)$。设需要 n 千瓦的电力，则 $P(\sum_{i=1}^{400}X_i\le n)=0.9772$。而

$P(\sum_{i=1}^{400} X_i \le n) = F(n) \approx \Phi(\frac{n-400\times 0.9}{\sqrt{400\times 0.9\times 0.1}}) = \Phi(\frac{n-360}{6})$，由 $\Phi(2)=0.9772$ 得 $\frac{n-360}{6}=2$，则 $n=744$。

【知识点】①二项分布的数字特征：$X \sim b(n.p) \Rightarrow EX = np$，$DX = np(1-p)$；②中心极限定理：$EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2 \Rightarrow P(a < \sum_{i=1}^{n} X_i \le b) \approx \Phi(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}) - \Phi(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$。

七、设总体 X 的分布密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta(x-1)^{\theta-1} & 1<x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，其中 $\theta>1$ 是未知参数，$c>0$ 是已知常数。$(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本，求：1、θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；2、θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$。

【详解】1、$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_1^2 x\cdot\theta(x-1)^{\theta-1}dx = \theta\int_1^2[(x-1)^{\theta}+(x-1)^{\theta-1}]dx = \frac{2\theta+1}{\theta+1}$，由 $EX=\overline{X}$ 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{\overline{X}-1}{2-\overline{X}}$；

2、似然函数为 $L(\theta)=\theta(x_1-1)^{\theta-1}\theta(x_2-1)^{\theta-1}\cdots\theta(x_n-1)^{\theta-1}=\theta^n[(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)]^{\theta-1}$，

取对数：$\ln L(\theta) = n\ln\theta + (\theta-1)[\ln(x_1-1)+\ln(x_2-1)+\cdots+\ln(x_n-1)]$，

求导：$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta}+\ln(x_1-1)+\ln(x_2-1)+\cdots+\ln(x_n-1)$，

由 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$ 得 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L = -\frac{n}{\ln(x_1-1)+\ln(x_2-1)+\cdots+\ln(x_n-1)}$。

【知识点】①矩估计量的求法：解方程 $EX=\overline{X}$；②最大似然估计量的求法：写似然函数、取对数、求导、解方程。

八、设 $(x_1,\cdots,x_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，σ 未知，样本均值的观察值 $\overline{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间上限为 10.8，求 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间。

【详解】σ 已知时 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \overline{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$。由已知 $\overline{x}=9.5$，$\overline{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=10.8$，则 $\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=1.3$。$\mu$ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为

$(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))=(9.5-1.3,10.8)=(8.2,10.8)$。

【知识点】σ未知时μ的置信区间：$(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$。

九、设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$\mu,\sigma>0$都是未知参数，$(X_1,\cdots,X_n)$是来自总体X的容量为36的简单随机样本，对检验问题：H_0：$\sigma^2=2^2\leftrightarrow H_1$：$\sigma^2\neq 2^2$若已知在显著水平$\alpha$下接受$H_0$的区域为$\overline{S}=\{(x_1,\cdots,x_n)\Big|a\leq\sum_{i=1}^{36}(x_i-\bar{x})^2\leq 212.8\}$。求$a$。

【详解】待检验问题为H_0：$\sigma^2=2^2\leftrightarrow H_1$：$\sigma^2\neq 2^2$；由于$\mu$未知，选取的统计量为$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{\sum_{i=1}^{36}(x_i-\bar{x})}{2^2}$；拒绝域为$S=\{(x_1,\cdots,x_n)\Big|\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)或\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$；则接受域为$\overline{S}=\{(x_1,\cdots,x_n)\Big|\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\leq\chi^2\leq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=\{(x_1,\cdots,x_n)\Big|\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\leq\frac{\sum_{i=1}^{36}(x_i-\bar{x})}{2^2}\leq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

$=\{(x_1,\cdots,x_n)\Big|2^2\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(35)\leq\sum_{i=1}^{36}(x_i-\bar{x})\leq 2^2\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(35)\}$，由已知可得$2^2\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(35)=212.8$，$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(35)=53.2$，$\alpha=0.025$。$a=2^2\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(35)=4\chi^2_{0.975}(35)=4\times 20.57=82.28$。

【知识点】μ未知时对H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2\leftrightarrow H_1$：$\sigma^2\neq\sigma_0^2$的检验：①统计量：$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$；②拒绝域：$S=\{(x_1,\cdots,x_n)\Big|\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)或\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$。