

一、选择题

1、设 A, B 是两个互不相容的随机事件, 则

- (A) $P(\overline{AB}) = 0$ (B) $P(\overline{AB}) \neq 0$ (C) $P(A \cup B) = P(A)$ (D) $P(A \cup \overline{B}) = P(\overline{B})$

【详解】 $P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(\overline{AB}) = P(A) + 1 - P(B) - [P(A) - P(AB)] = 1 - P(B) = P(\overline{B})$, 答案选(D)

【知识点】①“ A, B 互不相容”的概念: $AB = \Phi$; ②加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$; ③减法公式: $P(A - B) = P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB)$; ④对立事件的概率公式: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 。

2、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} a + be^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, 则

- (A) $a = 1, b = 1$ (B) $a = 1, b = -1$ (C) $a = -1, b = 1$ (D) $a = 0, b = 1$

【详解】 $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a + be^{-x}) = a$, 由 $F(+\infty) = 1$ 得 $a = 1$; 再由 $0 \leq F(x) \leq 1$ 排除(A) 答案选(B)

【知识点】分布函数的性质: $F(+\infty) = 1$; $0 \leq F(x) \leq 1$ 。

3、设 X, Y 是 2 个相互独立同服从正态分布 $N(\mu, \frac{1}{2})$ 的随机变量, 且已知 $P(X + Y \leq 1) = \frac{1}{2}$, 则 $\mu =$

- (A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

【详解】 $X + Y \sim N(2\mu, 1)$, 则 $P(X + Y \leq 1) = F(1) = \Phi(\frac{1-2\mu}{1}) = \Phi(1-2\mu)$ 。由 $P(X + Y \leq 1) = \frac{1}{2}$ 得 $\Phi(1-2\mu) = \frac{1}{2}$, 因此 $1-2\mu = 0$, $\mu = \frac{1}{2}$ 。答案选(C)

【知识点】①正态分布的可加性: $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X, Y 相互独立, 则 $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$; ②正态分布的计算: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$; ③ $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ 。

4、设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \Phi(\frac{x-1}{2})$, 其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布 $N(0, 1)$ 的分布函数, 则 $Y = 2X + 1$ 的方差为

- (A) 5 (B) 16 (C) 9 (D) 8

【详解】由 $F(x) = \Phi(\frac{x-1}{2})$ 知 $X \sim N(1, 2^2)$, 则 $DY = D(2X + 1) = 2^2 DX = 2^2 \times 2^2 = 16$ 答案选(B)

【知识点】①正态分布的计算: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$; ②正态分布的方差:

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $DX = \sigma^2$; ③方差的性质: $Da = 0$, $D(aX) = a^2DX$ 。

5、设 (X_1, \dots, X_n) 是来自正态分布 $N(0,1)$ 的容量为 n 的简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则

(A) $\frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n-1} \sim t(n)$ (B) $\frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n-1} \sim t(n-1)$

(C) $\frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n} \sim t(n)$ (D) $\frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n} \sim t(n-1)$

【详解】 $U = \frac{\bar{X} - 0}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \sim N(0,1)$, $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{1^2} \sim \chi^2(n-1)$, 则 $T = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}}} \sim t(n-1)$, 即

$\frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n} \sim t(n-1)$ 。答案选(D)

【知识点】统计量的分布: ① $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$;

② $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$; ③ $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n) \Rightarrow T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)$ 。

二、填空题

1、设 A 、 B 是 2 个事件, $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{6}$, 则 $P(\overline{A}|\overline{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【详解】 $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(B)P(A|B)]$, 则 $P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(B)P(A|B)]}{1 - P(B)}$

$= \frac{1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{6})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{7}{12}$, 答案为 $\frac{7}{12}$ 。

【知识点】①条件概率定义: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$; ②乘法公式: $P(AB) = P(B)P(A|B)$; ③对偶

律: $\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$; ④加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 。

2、随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=c(\frac{2}{3})^k, k=0,1,2,\dots$; 则 $c=$ _____。

【详解】 $\sum_{k=0}^{\infty} c(\frac{2}{3})^k = \frac{c}{1-\frac{2}{3}} = 3c$, 由 $\sum_{k=0}^{\infty} c(\frac{2}{3})^k = 1$ 得 $c = \frac{1}{3}$ 。

【知识点】①离散型随机变量分布律的性质: 若 X 的分布律为 $P(X=x_n)=p_n, n=1,2,3,\dots$, 则

$$\sum_n p_n = 1; \text{ ②几何级数的和: } \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}。$$

3、设随机向量 (X,Y) 的联合分布律为

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0.2	a	0.1
2	b	0.1	0.3

且 $P(Y \geq 2|X=1) = 0.6$, 则

$a=$ _____, $b=$ _____。

【详解】 $P(Y \geq 2|X=1) = \frac{P(Y \geq 2, X=1)}{P(X=1)} = \frac{P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3)}{P(X=1)} = \frac{a+0.1}{0.2+a+0.1}$, 由

$P(Y \geq 2|X=1) = 0.6$ 得 $a = 0.2$ 。又 $0.2 + a + 0.1 + b + 0.1 + 0.3 = 1$, 则 $b = 0.1$ 。

【知识点】①条件概率定义: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$; ②离散型随机变量分布律的性质: 若 (X,Y) 的

分布律为 $P(X=x_i, Y=y_j) = p_{ij}, i, j=1,2,3,\dots$, 则 $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$; ③边缘分布的计算: 若 (X,Y) 的分布律为 $P(X=x_i, Y=y_j) = p_{ij}, i, j=1,2,3,\dots$, 则 $P(X=x_i) = \sum_j p_{ij}$ 。

4、设 X_1, X_2, \dots, X_n 为独立同分布的随机变量序列, 其共同的分布为

X	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

若对任意的 $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1$, 则 $a =$ _____。

【详解】若 X_1, X_2, \dots, X_n 为独立同分布, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i\right| < \varepsilon\right) = 1$ 。因此

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = EX = -1 \times 0.25 + 0 \times 0.5 + 1 \times 0.25 = 0。答案为 0。$$

【知识点】①大数定律: 若 X_1, X_2, \dots, X_n 为独立同分布, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i\right| < \varepsilon\right) = 1$;

②离散型随机变量的数学期望: 若 X 的分布律为 $P(X=x_n)=p_n, n=1,2,3,\dots$, 则 $EX = \sum_n x_n p_n$ 。

5、设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 Poisson 分布总体 $P(\lambda)$ 的简单随机样本, $c \sum_{i=1}^n X_i$ 是 λ 的无偏估计量, 则 $c =$ _____。

【详解】 $E(c \sum_{i=1}^n X_i) = c \sum_{i=1}^n EX_i = c \cdot n\lambda$, $E(c \sum_{i=1}^n X_i) = \lambda$ 得 $c = \frac{1}{n}$ 。答案为 $\frac{1}{n}$ 。

【知识点】① $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计的定义: $E\hat{\theta} = \theta$; ② 重要离散型随机变量的数字特征:

$$X \sim P(\lambda) \Rightarrow EX = \lambda。$$

三、设某种材料的质量指标 $X \sim N(100, 4^2)$ 。用这种材料制造产品, 若材料的质量指标值不超过 93.42, 则次品率为 0.6, 若材料的质量指标在 93.42~106.58 之间, 则次品率为 0.3, 若材料的质量指标值超过 106.58, 则次品率为 0.1。从用此材料制造的产品中任取 1 件, 求: 1、取到次品的概率; 2、若已知取到的是次品, 则该产品是由材料指标值在 93.42~106.58 之间的材料制造的概率。

【详解】1、用 A_1 表示该产品是由材料指标值不超过 93.42 的材料制造, 用 A_2 表示该产品是由材料指标值在 93.42~106.58 之间的材料制造, 用 A_3 表示该产品是由材料指标值超过 106.58 的材料制造, 用 B 表示取到次品。则 $P(A_1) = P(X \leq 93.2) = F(93.2) = \Phi(\frac{93.2-100}{4}) = \Phi(-1.7)$
 $= 1 - \Phi(1.7) = 0.05$, $P(A_2) = P(93.2 < X \leq 106.58) = F(106.58) - F(93.2) = \Phi(\frac{106.58-100}{4})$
 $- \Phi(\frac{93.2-100}{4}) = \Phi(1.645) - \Phi(-1.7) = \Phi(1.645) + \Phi(1.7) - 1 = 0.9$, $P(A_3) = P(X > 106.58)$
 $= 1 - \Phi(\frac{106.58-100}{4}) = 1 - \Phi(1.645) = 0.05$ 。

$$1、P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 0.05 \times 0.6 + 0.9 \times 0.3 + 0.05 \times 0.1 = 0.305;$$

$$2、P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{0.9 \times 0.3}{0.305} = \frac{54}{61} \approx 0.885。$$

【知识点】① 全概率公式: $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$; ② 贝叶斯公式: $P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$;

③ 正态分布的计算: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ 。

四、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 求: 1、 $Y = (X-1)^2$ 的分布函数; 2、 EY 。

【详解】1、 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P((X-1)^2 \leq y) = 0$, $0 \leq y \leq 1$ 时, $F_Y(y) = P((X-1)^2 \leq y)$
 $= P(1-\sqrt{y} \leq X \leq 1+\sqrt{y}) = \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x)dx = \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} e^{-x} dx = e^{-(1-\sqrt{y})} - e^{-(1+\sqrt{y})}$; $y > 1$ 时,

$$F_Y(y) = \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x)dx = \int_0^{1+\sqrt{y}} e^{-x} dx = 1 - e^{-(1+\sqrt{y})}。 总之 F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ e^{-(1-\sqrt{y})} - e^{-(1+\sqrt{y})} & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 - e^{-(1+\sqrt{y})} & y > 1 \end{cases}$$

2、法一： $EY = E(X-1)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-1)^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) - 2\Gamma(2) + 1 = 1$ 。法二：

$X \sim e(1)$ ，则 $EX = DX = 1$ ， $EY = E(X-1)^2 = D(X-1) + [E(X-1)]^2 = DX + (EX-1)^2 = 1$ 。法三：

$$\begin{aligned} EY &= E(X-1)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-1)^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x} dx = -[(x-1)^2 e^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2(x-1)e^{-x} dx \\ &= 1 - 2[(x-1)e^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 - 2(1 + e^{-x}|_0^{+\infty}) = 1。 \end{aligned}$$

【知识点】①连续型随机变量函数 $Y = G(X)$ 分布的求法： $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$ ；②

连续型随机变量函数的数学期望的计算： $Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ ；③ Γ 函数的有关知识：

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(1) = 1 \text{ 或指数分布的数字特征: 若 } X \sim f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则 $EX = \frac{1}{\lambda}$, $DX = \frac{1}{\lambda^2}$ & 期望性质 $E(aX+b) = aEX+b$ & 方差公式 $DX = EX^2 - (EX)^2$ 或分布积分

法： $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$ 。

五、设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & |y| < x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ ，求：1、 X 的

边缘分布密度；2、条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$ ；3、 $Z=X+Y$ 的分布函数。

【详解】1、 $x \leq 0$ 时 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0$ ，

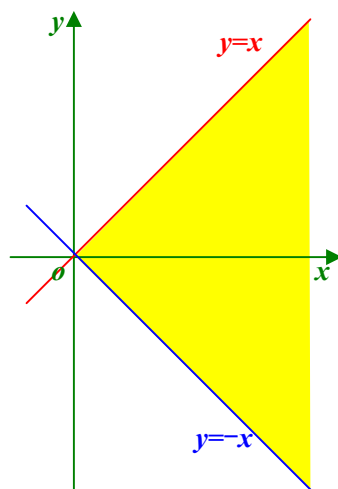
$x > 0$ 时 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-x}^x \frac{1}{2}e^{-x}dy = xe^{-x}$ ，总之，

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}。$$

$$2、f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2x} & |y| < x \\ 0 & |y| \geq x \end{cases}；$$

3、 $z \leq 0$ 时 $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z)$

$$= \iint_{x+y \leq z} f(x,y)dx dy = \iint_{x+y \leq z} 0dx dy = 0, \quad z > 0 \text{ 时 } F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} f(x,y)dx dy = 1 - \int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} dx \int_{z-x}^x e^{-x} dy = 1 - e^{-\frac{z}{2}}, \text{ 总}$$



$$\text{之, } F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z}{2}} & z > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

【知识点】①连续型随机变量边缘概率密度的计算: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$; ②条件概率密度的计算: $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$; ③函数 $Z = g(X, Y)$ 分布函数的计算: $F_Z(z) = P(Z \leq z)$
 $= P(g(X, Y) \leq z) = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$ 。

六、某生产线上组装每件产品所需要的时间 X (分钟)服从指数分布 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} & x > 0, \text{ 且} \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

各件产品组装所需要的时间相互独立。利用中心极限定理求组装 100 件产品需要 15 小时至 20 小时的概率近似值。

【详解】用 X_i 表示组装第 i 件产品需要的时间, 则 $EX_i = 10$, $DX_i = 100$ 。由中心极限定理,

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \text{ 近似地服从 } N(10 \times 100, 100 \times 100)。P(15 \times 60 < \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 20 \times 60) = F(20 \times 60) - F(15 \times 60)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{20 \times 60 - 10 \times 100}{\sqrt{100 \times 100}}\right) - \Phi\left(\frac{15 \times 60 - 10 \times 100}{\sqrt{100 \times 100}}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0.8185。$$

【知识点】①指数分布的数字特征: 若 $X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 则 $EX = \frac{1}{\lambda}$, $DX = \frac{1}{\lambda^2}$; ②

中心极限定理: $EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2 \Rightarrow P(a < \sum_{i=1}^n X_i \leq b) = \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$ 。

七、设总体 X 的分布密度函数为 $f(x; \theta) = \begin{cases} c^\theta \theta x^{-(\theta+1)} & x \geq c \\ 0 & x < c \end{cases}$, 其中 $\theta > 1$ 是未知参数, $c > 0$ 是

已知常数。(X_1, \dots, X_n) 是来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本, 求: 1、 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

2、 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$ 。

【详解】1、 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_c^{+\infty} xc^\theta \theta x^{-(\theta+1)} dx = c^\theta \theta \int_c^{+\infty} x^{-\theta} dx = \frac{c^\theta}{\theta-1}$, 由 $EX = \bar{X}$ 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - c}$; 2、似然函数为 $L(\theta) = c^\theta \theta x_1^{-(\theta+1)} c^\theta \theta x_2^{-(\theta+1)} \dots c^\theta \theta x_n^{-(\theta+1)} = c^{n\theta} \theta^n (x_1 x_2 \dots x_n)^{-(\theta+1)}$, 取

对数: $\ln L(\theta) = n\theta \ln c + n \ln \theta - (\theta+1)(\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n)$, 求导:

$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = n \ln c + \frac{n}{\theta} - (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n)$, 由 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$ 得 θ 的最大似然估计量

$$\hat{\theta}_L = \frac{n}{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n - n \ln c}。$$

【知识点】①矩估计量的求法：解方程 $EX = \bar{X}$ ；②最大似然估计量的求法：写似然函数、取对数、求导、解方程。

八、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 4^2)$, (x_1, \cdots, x_n) 是来自总体 X 的容量为 n 的样本观察值, 为使 μ 的置信度为 95% 的置信区间长度不大于 0.98, 求样本容量 n 的最小值。

【详解】 $\sigma = 4$ 已知时 μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为 $(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}})$, 由 $\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{1 - 95\%}{2} = 0.975$ 得 $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ 。又 $\sigma = 4$, 则置信区间的长度为 $2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}} = 2 \times \frac{4}{\sqrt{n}} \times 1.96$, 由置信区间长度不大于 0.98 可得 $n \geq 256$ 。

【知识点】① σ 已知时 μ 的置信区间: $(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}})$; ② 标准正态分布的上侧分位点:

$$\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}。$$

九、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu, \sigma > 0$ 都是未知参数, (X_1, \cdots, X_n) 是来自总体 X 的容量为 36 的简单随机样本, 对检验问题: $H_0: \sigma^2 = 5^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 < 5^2$ 若已知在显著水平 α 下拒绝 H_0 的区域为 $S = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{36} (x_i - \bar{x})^2 \leq 561.625\}$ 。求 α 。

【详解】检验问题为 $H_0: \sigma^2 = 5^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 < 5^2$; 选取的统计量为 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^{36} (x_i - \bar{x})}{5^2}$;

拒绝域为 $S = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid \chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\}$; 由拒绝 H_0 , 则 $\frac{\sum_{i=1}^{36} (x_i - \bar{x})}{5^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n-1) = \chi_{1-\alpha}^2(35)$ 。由

题意 $5^2 \chi_{1-\alpha}^2(35) = 561.625 \Rightarrow \chi_{1-\alpha}^2(35) = 22.465 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow 0.05$ 。

【知识点】 μ 未知时对 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ 的检验(单边检验)。