

翻译


Matrix_11

于 2018-06-02 19:13:21 发布

15836

收藏 35

分类专栏：机器学习

机器学习 专栏收录该内容

119 订阅 110 篇文章

订阅专栏

今天介绍数值计算和优化方法中非常有效的一种数值解法，共轭梯度法。我们知道，在解大型线性方程组的时候，很少会有一步到位的精确解析解，一般都需要通过迭代来进行逼近，而 PCG 就是这样一种迭代逼近算法。

我们先从一种特殊的线性方程组的定义开始，比如我们需要解如下的线性方程组：

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

这里的是对称，正定矩阵，同样也是已知的列向量，我们需要通过和来求解，这其实是我们熟知的一些线性系统的表达式。

直接求解

首先，我们来看一种直观的解法，我们定义满足如下关系的向量为关于矩阵的共轭向量，

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = 0$$

因为矩阵是对称正定矩阵，所以矩阵定义了一个内积空间：

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{A}} := \langle \mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{A}^T \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v}$$

基于此，我们可以定义一组向量

$$P = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$$

其中的向量，...，都是互为共轭的，那么构成了空间的一个基，上述方程的解可以表示成中向量的线性组合：


$$\mathbf{x}_* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{p}_i$$

根据上面的表达式，我们可以得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax}_* &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{A} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_k^T \mathbf{Ax}_* &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_i \quad (\text{Multiply left by } \mathbf{p}_k^T) \\ \mathbf{p}_k^T \mathbf{b} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_i \rangle_{\mathbf{A}} \quad (\mathbf{Ax}_* = \mathbf{b} \text{ and } \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{A}} = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v}) \\ \langle \mathbf{p}_k, \mathbf{b} \rangle &= \alpha_k \langle \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k \rangle_{\mathbf{A}} \quad (\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \text{ and } \forall i \neq k : \langle \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_i \rangle_{\mathbf{A}} = 0) \end{aligned}$$

这意味着：

$\alpha_k =$

Matrix_11

关注

迭代求解

上面的方法已经说明，是一系列共轭向量的线性组合，学过 PCA 的都知道，可以用前面占比高的向量组合进行逼近，而不需要把所有的向量都组合到一起，PCG 也是用到了这种思想，通过仔细的挑选共轭向量来重建方程的解。

我们先来看下面的一个方程：

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

对上面的方程求导，我们可以得到：

$$D^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$$

$$Df(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

可以看到，方程的一阶导数就是我们需要解的线性方程组，令一阶导数为 0，那么我们需要解的就是这样一个线性方程组了。

假设我们随机定义的一个初始向量为，那么我们可以定义第一个共轭向量为，后续的基向量都是和梯度共轭的，所以称为共轭梯度法。

下面给出详细的算法流程：

```

 $\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ 
 $\mathbf{p}_0 := \mathbf{r}_0$ 
 $k := 0$ 
repeat
     $\alpha_k := \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k}$ 
     $\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$ 
     $\mathbf{r}_{k+1} := \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A} \mathbf{p}_k$ 
    if  $\mathbf{r}_{k+1}$  is sufficiently small, then exit loop
     $\beta_k := \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}$ 
     $\mathbf{p}_{k+1} := \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k$ 
     $k := k + 1$ 
end repeat
The result is  $\mathbf{x}_{k+1}$ 

```

而 preconditioned conjugate gradient method 与共轭梯度法的不同之处在于预先定义了一个特殊矩阵：



```
z0 := M^-1 r0
p0 := z0
k := 0
repeat
    alpha_k := (r_k^T z_k) / (p_k^T A p_k)
    x_{k+1} := x_k + alpha_k p_k
    r_{k+1} := r_k - alpha_k A p_k
    if r_{k+1} is sufficiently small then exit loop end if
    z_{k+1} := M^-1 r_{k+1}
    beta_k := (z_{k+1}^T r_{k+1}) / (z_k^T r_k)
    p_{k+1} := z_{k+1} + beta_k p_k
    k := k + 1
end repeat
The result is x_{k+1}
```

参考来源：wiki 百科

https://en.wikipedia.org/wiki/Conjugate_gradient_method#The_preconditioned_conjugate_gradient_method

预处理共轭梯度法(PCG) OORRANNGGE 的博客 1万+
开始读研了，研究方向是SLAM。SLAM中很重要的一部分是位姿估计，需要用到一些优化算...

PCG(preconditioned conjugate gradient)算法 weixin_34032779 的博客 2617
转载于:https://www.cnblogs.com/lansebandaoti/p/10401758.html

评论 4

-  请发表有价值的评论， 博客评论不欢迎灌水，良好的社区氛围需大家一起 评论
-  qq_42800841 2020.11.18

这个M怎么取呢

👍
-  77年IT大叔 2020.05.16

没看懂

👍
-  CLM_Only 2019.03.14

博主好，请问您提到的PCG中的 迭代终止条件r(k+1)具体该怎么设置呢？在这同时用考虑最大迭代步数k吗？

👍

 引力波烤箱 回复 CLM_Only 2019.04.26

一般会设置判断: ||r||/||b||<eps作为退出条件，eps我通常取(10^-4 - 10^-8)的数值。k值必须设定，否则遇到不收敛的就死循环了。

👍

【腾讯实习生】-PCG视频内容理解算法实习生_zero的博客 3-15

【腾讯实习生】-PCG视频内容理解算法实习生 工作职责: - 负责挖掘和提取视频相关特征(图...

pcg算法 matlab,关于Newton-pcg法解方程的编程思路... 2-16

pcg算法 matlab,关于Newton-pcg法解方程的编程思路 - 数学 - 小木虫 - 学术 科研 互动社区... ..

共轭梯度 (CG) 算法 热门推荐 LSEC小陆的博客 6万+

共轭梯度 (CG) 方法计算数学与科学与工程计算研究所 陆嵩简单介绍共轭梯度方法也是一种迭...

SSOR-PCG算法 12-13

SSOR-PCG算法, 预处理过程含求逆。为了更加简便的计算, 可以将其中的求逆过程转换, ...

pcgmatlab代码-ok:好的

pcg matlab代码流体网 此仓库包含复制论文

Matrix_11

关注

- 共轭梯度法详细推导分析

开贰锤 3万+

共轭梯度法是一种经典的优化算法。算法求解速度较快，虽然比梯度下降法复杂，但是比二阶...
- (一) 共轭梯度算法

秦时明月的博客 2万+

共轭梯度算法是干什么？共轭梯度算法是一种迭代算法，在一次次的对待中最终求得结果，...
- 数学优化入门：梯度下降法、牛顿法、共轭梯度法

TangowL 2万+

1、基本概念 1.1 方向导数 1.2 梯度的概念 因此，对于一元函数，即 $y=f(x)$ ，其梯度的方向总...
- 基于PCG信号分析的智能算法诊断心脏病

06-03

本文提出了一种使用心动图 (PCG) 进行心脏病诊断的智能算法。所提出的技术包括四个阶...
- 优化算法-共轭梯度法

06-28

共轭梯度法的matlab代码
- 最优化方法——共轭梯度法

小憨的学习博客 122

共轭梯度法线性共轭梯度法FR非线性共轭梯度法 线性共轭梯度法 线性共轭梯度法程序 functio...
- 鼎捷 易飞 ERP 9.0.12.0 下载 算号 注册

3840

信息已迁移 https://blog.csdn.net/pigeon_info 到以上链接中查看！
- 最优化方法：共轭梯度法 (Conjugate Gradient)

皮皮blog 1万+

<http://blog.csdn.net/pipisorry/article/details/39891197>共轭梯度法 (Conjugate Gradient) 共轭...
- 程序化生成(PCG)算法的改进——基于以地学为主的多...

小孩子少吃糖的博客 2593

如题，为了申请关于程序化生成算法的大创，自己翻译了一些相关论文并且进行了总结归纳，...
- 共轭梯度法 (Conjugate Gradient)

maum61的专栏 5296

共轭梯度法 (Conjugate Gradient) 是介于最速下降法与牛顿法之间的一个方法，它仅需利用...
- 最优化学习笔记 (十四) ——共轭梯度法

chunyun0716的专栏 1万+

共轭梯度法不需要预先给定 Q 共轭方向，而是随着迭代的进行不断产生 Q ...
- 共轭梯度法(Conjugate gradient)详解 最新发布

bitcarmanlee的博客 1482

1.什么是共轭向量 对于正定矩阵 Q ，如果有 $x^T Q y = 0, x^T Q y = 0, x^T Q y = 0$ 那么我们可以称 x, y 是...
- 共轭梯度法的简单直观理解

beidou111的博客 382

共轭梯度法的简单直观理解 共轭梯度法可以看作是梯度下降法 (又称最速下降法) 的一个改...

“相关推荐”对你有帮助？

非常没帮助

没帮助

一般

有帮助

非常有帮助

©2022 CSDN 皮肤主题：技术黑板 设计师：CSDN官方博客 返回首页

关于我们 招贤纳士 商务合作 寻求报道 400-660-0108 kefu@csdn.net 在线客服 工作时间 8:30-22:00

公安备案号11010502030143 京ICP备19004658号 京网文〔2020〕1039-165号 经营性网站备案信息 北京互联网违法和不良信息举报中心 家长监护 网络110报警服务 中国互联网举报中心 Chrome商店下载

©1999-2022北京创新乐知网络技术有限公司 版权与免责声明 版权申诉 出版物许可证 营业执照

Matrix_11 专家 码龄11年 暂无认证

238 原创

1万+ 周排名

1万+ 总排名

160万+ 访问

 等级

1万+ 积分

1890 粉丝

489 获赞

312 评论

1476 收藏

私信 关注

搜博主文章



Matrix_11 关注



大千世界，无奇不有，在浩瀚的世界里寻找各种可能。

热门文章

- 机器学习 F1-Score, recall, precision 60559
- 人脸表情识别常用的几个数据库 36687
- PS图层混合算法之三（滤色，叠加，柔光，强光） 30613
- 机器学习：VAE(Variational Autoencoder)模型 29556
- 机器学习：Kullback-Leibler Divergence (KL 散度) 28653

分类专栏

-  这些年，那些事 15篇
-  计算摄影与图像处理 36篇
-  Photoshop 图像处理... 92篇
-  机器学习 110篇
-  OpenCV 图像处理 52篇
-  深度学习框架

最新评论

- PS图层混合算法之一（不透明度，正片...
虫虫侠: 算法中，当除以0时如何计算？如：
当C=1-(1-B)/A中的A为0时，C怎么计算
- 机器视觉: LBP-TOP
- RevoWang: 这个网站打不开了，请问最新
的是什么呢
- 机器学习: Colorization using Optimization
weixin_47856580: 我记得matlab里说这两
个Y是一样的
- PS 滤镜算法—— 表面模糊
- jh-lam: 实质上与双边滤波相当，但后者复
杂一点
- 相机的内外参与相机标定
- 郎爱上羊: 看看博主其他的文章，总结得很
优秀👍👍

您愿意向朋友推荐“博客详情页”吗？

-     
- 强烈不推荐 不推荐 一般般 推荐 强烈推荐

最新文章

- 有趣的纹理合成
- 相机的内外参与相机标定
- 图像的几何变换



