

图像分割的凸优化：实验报告

赵楷越 522031910803

2024 年 4 月 25 日

1 优化问题中的目标函数和约束条件

为了进行图像的分割，我们需要找到最优的二进制变量，以最小化分割区域与真实区域之间的差异。这可以被描述为以下优化问题：我们希望找到一个最优的变量 x ，使分割区域与其对应的真实区域之间的平方差之和最小化。因此得到目标函数如下，该优化问题要求最小化该目标函数。通过最小化这个目标函数，我们的目标是将圆从背景中分割出来。

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i,j} (x_{i,j} \times \text{image}[i,j])^2 + \sum_{i,j} ((1 - x_{i,j}) \times (1 - \text{image}[i,j]))^2$$

约束条件如下，表示每个 $x_{i,j}$ 必须是 0 或 1，这样能反映了每个像素的分割选择。这个约束强制执行了分割的决策性质，使得每个像素要么是图形的一部分，要么是背景的一部分，不允许有中间值。这是一种凸优化的特殊情况，因为决策变量是整数，所以被称为整数规划。

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \quad \text{for All Pixels } (i,j)$$

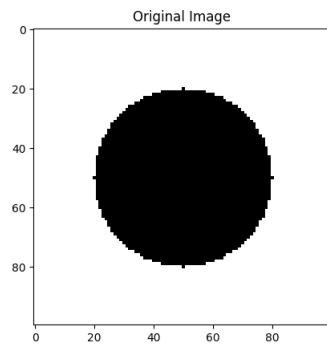
2 代码实现的逻辑

在 CVXPY 中，我们通过 $\text{objective} = \text{cp.sum}(\text{cp.square}(\text{cp.multiply}(\text{image}, x))) + \text{cp.sum}(\text{cp.square}(\text{cp.multiply}(1 - \text{image}, 1 - x)))$ 语句描述目标函数，其中 cp.multiply 函数用于两个矩阵间对应位置元素的相乘；我们通过 $x = \text{cp.Variable}((\text{size}, \text{size}), \text{boolean} = \text{True})$ 语句来实现约束条件，能表示每个 $x_{i,j}$ 必须是 0 或 1；我们最后通过 $\text{problem} = \text{cp.Problem}(\text{cp.Minimize}(\text{objective}))$, $\text{problem.solve}(\text{solver} = \text{cp.ECOS_BB})$, $\text{optimal_x} = x.\text{value}$ 三条语句，先后实现优化问题的定义（最小化问题），优化问题的解决（利用 ECOS_BB 求解器，支持布尔变量），最后获取了最优解 optimal_x 。

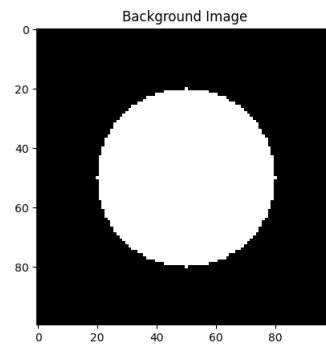
```
30 # 假设image是已经给定的图像
31 x = cp.Variable((size, size), boolean=True) # 定义优化变量, boolean=True 表示这是一个二进制变量
32 # 目标函数是要将图像中的黑色区域和白色区域分开
33 objective = cp.sum(cp.square(cp.multiply(image, x))) + cp.sum(cp.square(cp.multiply(1 - image, 1 - x)))
34 # 定义优化问题
35 problem = cp.Problem(cp.Minimize(objective))
36 # 解决优化问题
37 problem.solve(solver=cp.ECOS_BB) # 使用 ECOS_BB 求解器, 支持布尔变量
38 # 获取最优解
39 optimal_x = x.value
40 # 可视化原始图像
41 plt.imshow(image, cmap='gray')
42 plt.title('Original Image')
43 plt.show()
44 # 可视化最优解
45 plt.imshow(optimal_x.astype(float), cmap='gray')
46 plt.title('Background Image')
47 plt.show()
```

3 结果与讨论

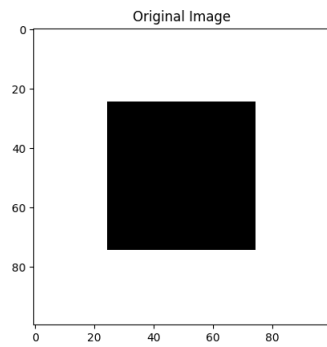
最终通过 matplotlib 绘制出图形的原始图像和分割后图像，又在圆形的基础上添加了正方形和三角形图像的分割测试。分割效果如下图所示，图像边界清晰，分割效果优秀。（正方形和三角形对应的 image 初始化代码也可以在上传的代码中查看到）



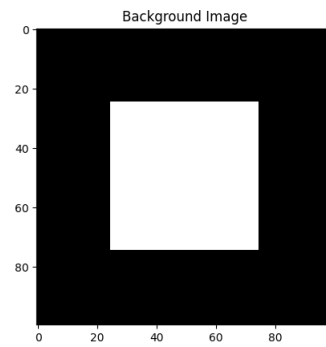
(a) 圆形的原始图像



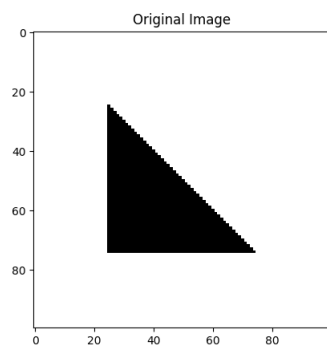
(b) 圆形的分割后图像



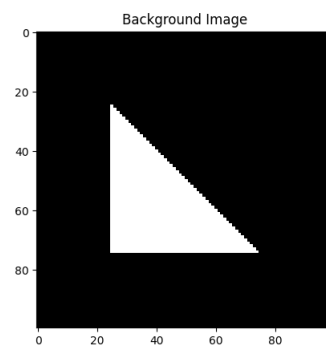
(c) 正方形的原始图像



(d) 正方形的分割后图像



(e) 三角形的原始图像



(f) 三角形的分割后图像