数学技巧

由于鱼竿数学底子太弱，所以写了这些东西来记录一些数学技巧

数的表示方法

1. 利用质因数分解把一个数转为质数乘积

   $N = p_1^{c_1} p_2^{c_2} p_3^{c_3} p_4^{c_4} p_5^{c_5} \ldots\ldots$

2. 二进制表示（涉及位运算）每个正整数可以唯一表示为若干指数不重复的2的次幂的和

   $b = c_{k-1}2^{k-1} + c_{k-2}2^{k-2} + c_{k-3}2^{k-3} + \ldots\ldots + c_0 2^0$

   应用：

   1. 快速幂
   2. 位运算
   3. 求方案数，每一位二进制位的选取

数学式子的思考

1. 式子的转化
   1. 指数对数
   2. 加减乘除
   3. 左右移动变换
2. 等号的意义
   1. 值的相等
   2. 效果相等
      1. 把同类的运算放到一边
3. 解
   1. 有没有解
      1. 能否被整除
   2. 有多少解
      1. 二进制每位，在什么限制条件下，怎么选每位
      2. 质因数分解，在什么限制条件下，选哪些质因子，选多少
   3. 有没有重复解
      1. k*k：完全平方数
      2.
4. 限制条件
   1. 题目条件
   2. 数学运算中的式子
5. 式子解决不了的问题，那就暴力枚举啊！想办法缩小枚举范围

位数

求x位数

```
double s=log10(x)
int len=s+1
```

求x最左边一位$ans=x/10^{len-1}$

对数

指数转化
$lg(x^x)=xlg(x),x=10^{xlg(x)}$
$lg(x^n)=nlg(x),x=10^{nlg(x)}$

乘机转加法防溢出

$$ans=lg(x_1*x_2*x_3\ldots\ldots x_n)=lg(x_1)+lg(x_2)+lg(x_3)+\ldots\ldots lg(x_n)$$

质数

1. 1到n中大约（可以用来估算时间复杂度和开空间）有$\frac{n}{ln(n)}$个质数
2. 质数的倍数一定是合数
3. 若一个正整数N为合数，则存在一个能整除N的数T，其中$2<=T<=\sqrt{N}$
4. 唯一分解定理：$N=p_1^{c_1}p_2^{c_2}p_3^{c_3}p_4^{c_4}p_5^{c_5}\ldots\ldots$
5. 约数个数$(c_1+1)(c_2+1)(c_3+1)(c_4+1)\ldots\ldots$
6. 约数之和$(p_1^0+p_1^1+\ldots\ldots+p_1^{c_1})*\ldots\ldots*(p_k^0+p_k^1+p_k^2+\ldots\ldots+p_k^{c_k})$
7. 若p为质数：p=1*p唯一表示，可以把1和p对应p相关的式子

递推式子

打表技巧

强行凑数逆推

常见递推式子有,打表找规律把系数逆推出来
$f[n]=af[n-1]+bf[n-2]+cf[n-3]\ldots\ldots$
$f[n]=a+bn+cn^2+dn^3\ldots\ldots$

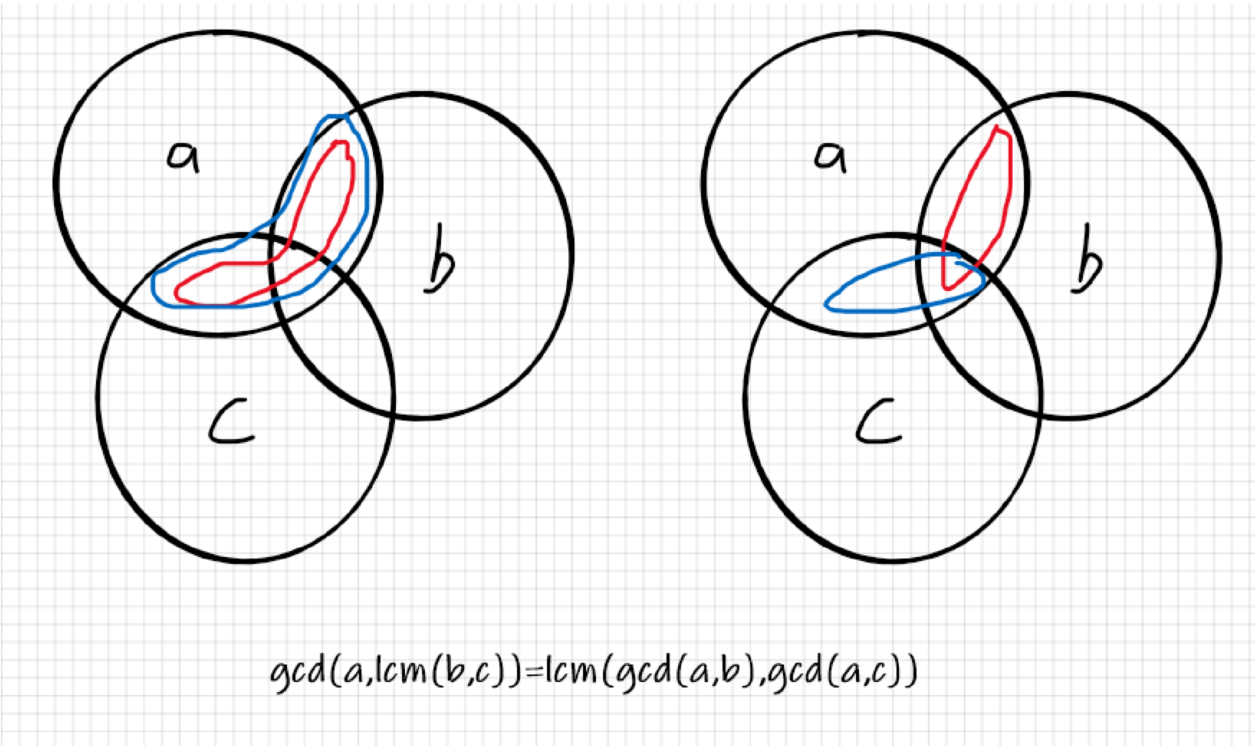
分类讨论

1. 分奇数偶数讨论
2. 把比较前面的情况特殊化（所以逆推凑数的时候n选稍微大一些）

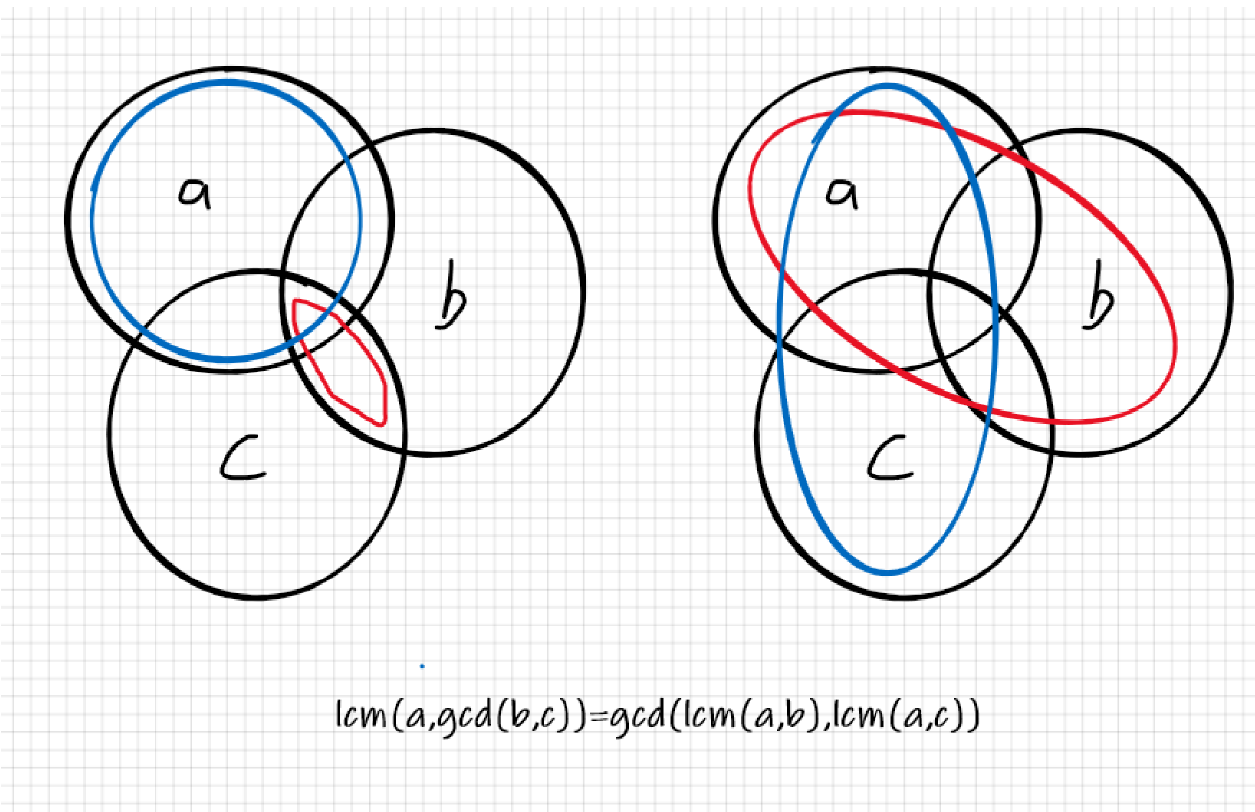
GCD/LCM

1. $gcd(a,b)lcm(a,b)=ab$
   lcm问题可以转化为gcd问题
   若a,b互质$gcd(a,b)=1$,则$lcm(a,b)=ab$

2. gcd是“最大”“公约数”
   最大：包含了所有公约数，你可以从gcd中提取出所有公约数（通过质因数分解选数）
   公约数：gcd是a，b，lcm（a,b)约数
3. $gcd(ma, mb) = mgcd(a, b)$
4. $m = gcd(a, b)$则$gcd(a/m, b/m) = gcd(a, b)/m = 1$
   可以顺便知道a/m和b/m互质即，$gcd(a, b) = k_1 a = k_2 b$，$k_1, k_2$互质,这个经常用
5. $gcd(a, lcm(b, c)) = lcm(gcd(a, b), gcd(a, c))$



6. $lcm(a, gcd(b, c)) = gcd(lcm(a, b), lcm(a, c))$



这里有个想法，对于5，6这种只有lcm和gcd的等式是否可以用韦恩图来解释大部分等式，因为没有加减乘除来改变他们的集合

7. $gcd(a,b)=gcd(b,a-b)=gcd(a,a-b)$
   1. 推广①：$gcd(a+mb,b)=gcd(a,b)$
      gcd线性封闭
   2. 推广②：$gcd(x,y,z)=gcd(x,y-x,z-y)$
   3. 推广③：$gcd(a_1,a_2,a_3\ldots\ldots a_n)=gcd(a_1,gcd(a_2,a_3\ldots\ldots a_n))$
   4. 推广④：
      $gcd(a_1+t,a_2+t,a_3+t\ldots\ldots,a_n+t)=gcd(a_1+t,gcd(a_2-a_1,a_3-a_2,\ldots\ldots a_n-a_{n-1}))$
      可以利用差分序列+线段树做gcd的区间修改和单点查询

   Tip：在使用这一性质的时候，可能需要对**a**，**b**交换或者排序来保证**a-b**不出现负数的情况（当然直接**abs**也**ok**）
8. $gcd(a,b)=gcd(a,amodb)$
   欧几里得辗转相除法原理
9. $gcd(x+y,lcm(x,y))=gcd(x,y)$
10. 不等式(可以用来缩小枚举范围)
11. $lcm(a,b)>=max(a,b)$
12. $gcd(a,b)<=min(a,b)$
13. 质因数分解
    $a=p_1^{c_1}p_2^{c_2}p_3^{c_3}\ldots\ldots p_n^{c_n}$
    $b=p_1^{r_1}p_2^{r_2}p_3^{r_3}\ldots\ldots p_n^{r_n}$
    $lcm(a,b)=p_1^{max(c_1,r_1)}p_2^{max(c_2,r_2)}\ldots\ldots p_n^{max(c_n,r_n)}$
    $gcd(a,b)=p_1^{min(c_1,r_1)}p_2^{min(c_2,r_2)}\ldots\ldots p_n^{min(c_n,r_n)}$

综上我们可以到一个等式链

$$gcd(x,y)=\frac{lcm(x,y)}{xy}=gcd(a+mb,b)=gcd(a,b+ka)=gcd(x+y,lcm(x,y))=k_1x=k_2y(k_1,k_2\text{互质})$$

互质

1. a,b互质$gcd(a,b)=1$
2. 1与任意非0互质
3. 2与任意奇数互质
4. 相邻的两个非0自然数互质
5. 相邻两个奇数互质
6. 任意两个质数是互质数
7. 一个质数一个合数，合数不是质数的倍数，一定互质
8. 构造两两不互质
   1. $2\times1,2\times2,2\times3,2\times4\ldots\ldots$增速慢
   2. $2\times3,3\times5,5\times7,7\times9\ldots\ldots$增速快
9. 欧拉函数：$\varphi(x)=N(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})(1-\frac{1}{p_3})\ldots\ldots(1-\frac{1}{p_k})$