С. А. Барвенов, Т. П. Бахтина

МАТЕМАТИКА

ЦТ за 60 уроков

Минск
«Аверсэв»
2019

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я721
Б24

Рецензент
учитель математики гос. учреждения образования «Гимназия с белорусским языком обучения № 23 г. Минска»
А. Н. Новик

Барвенов, С. А.

Б24 Математика : ЦТ за 60 уроков / С. А. Барвенов, Т. П. Бахтина. — Минск : Аверсэв, 2019. — 304 с. : ил.

ISBN 978-985-19-3484-9.

Книга позволит старшеклассникам и абитуриентам самостоятельно и качественно подготовиться к централизованному тестированию. Она содержит разноуровневые задания по 22 темам курса математики, а в плане индивидуальной подготовки представлено системное распределение этих заданий по 60 урокам. Учителям и репетиторам пособие даст возможность проработать с учащимися все темы школьного курса математики, а также проверить предусмотренные программой навыки и умения.

Адресуется учащимся старших классов учреждений общего среднего образования, абитуриентам, учителям.

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я721

Справочное издание

Барвенов Сергей Александрович
Бахтина Татьяна Петровна

МАТЕМАТИКА
ЦТ за 60 уроков

Изображение на обложке используется по лицензии Shutterstock.com
Дизайнеры *С. Г. Скрипниченко, А. А. Яцук*
Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 21.12.2018. Формат 60×84 $^1/_8$. Бумага газетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 35,34. Уч.-изд. л. 30,84. Тираж 3100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/15 от 02.08.2013.
Ул. Н. Олешева, 1, офис 309, 220090, г. Минск.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Контактные телефоны: (017) 268-09-79, 268-08-78.
Для писем: а/я 3, 220090, г. Минск.

УПП «Витебская областная типография».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/19 от 26.11.2013.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, г. Витебск.

12+

ISBN 978-985-19-3484-9

Предисловие

Книга «Математика. Тренинг решения задач, используемых на централизованном тестировании» стала удобным и надежным помощником для многих тысяч абитуриентов и учителей. Она смогла удовлетворить их потребность в качественном материале для подготовки к централизованному тестированию (ЦТ). Однако программы для поступающих в вузы меняются, и поэтому в пособие постоянно добавляются задания, которые отсутствовали в предыдущих изданиях.

Новое, усовершенствованное издание выходит под названием «Математика. ЦТ за 60 уроков». Книга по-прежнему состоит из 22 тем. В каждой теме все задания систематизированы и организованы в блоки по 4 задачи. Задачи в одном блоке объединены одной или очень близкими идеями решения.

В конце книги имеются указания к решению задачи *а* каждого блока. Это очень удобно для подготовки: если задачи определенного блока вызывают затруднения, то, разобравшись в решении задачи *а*, можно сразу же закрепить полученный навык на задачах *б*, *в* и *г*. Ко всем задачам в книге даны ответы.

В пособии представлены два параграфа по геометрии. Параграф 21 «Геометрия (часть А)» включает задачи базового уровня сложности, соответствующие заданиям части А на ЦТ. Параграф 22 «Геометрия (часть В)» содержит более сложные задачи.

Авторы тщательно изучили все материалы, разработанные Республиканским институтом контроля знаний, начиная с 2004 года (учтены и все туры репетиционного тестирования). Наиболее интересные задачи, аналогичные тем, которые предлагались на ЦТ, были включены в эту книгу. Кроме того, были проанализированы задания, которые выполняли абитуриенты на общегосударственных экзаменах в России и Украине.

Задачи в книге условно разделены на три уровня сложности. Задачи без каких-либо обозначений должны решать все абитуриенты, которые намереваются получить на ЦТ более 20 баллов. Задания, помеченные одной звездочкой, ориентированы на тех учащихся, которые не только без ошибок решают все задачи первого уровня, но и хотят получить на ЦТ более 50 баллов. Задания с двумя звездочками рассчитаны на абитуриентов, которые нацелены получить на ЦТ более 80 баллов.

В начале пособия приведен раздел «Основные определения и формулы», в который включены задачи на знание определений. Практика показывает, что даже хорошо подготовленных учащихся часто ставят в тупик простейшие задания первого уровня сложности. По мнению авторов, основная причина этого заключается в том, что большее внимание при подготовке к ЦТ уделяется решению задач в ущерб изучению теоретического материала. Для недостаточно хорошо подготовленных абитуриентов такие задачи позволят вспомнить или заново выучить азы математики.

В первой части пособия авторы сознательно предлагают задачи без выбора вариантов ответа. Это позволит абитуриенту научиться осознанно решать задачи и не бояться заданий части В на ЦТ. Эффективной работе при решении заданий части А посвящен отдельный параграф «Стратегия подготовки к ЦТ и советы абитуриенту».

Во второй части книги приведены модельные варианты тестов с выбором вариантов ответа, как на ЦТ.

Замечания, предложения и отзывы просим присылать на электронный адрес prep@tut.by.

МОЙ ЛИЧНЫЙ ПЛАН ПОДГОТОВКИ К ЦТ

№ занятия	ЗАДАНИЕ	Дата	Примечания
1	№ 0.1—0.62 Алгебра: основные определения, простейшие вычисления		
2	№ 1.1—1.25 Алгебра: вычисления		
3	№ 0.63—0.72, 2.1—2.29 Алгебра: преобразование алгебраических выражений		
4	№ 0.91—0.135, 21.1—21.12 Планиметрия: часть А		
5	№ 2.30—2.63 Алгебра: преобразование алгебраических выражений		
6	№ 21.13—21.20 Планиметрия: часть А		
7	№ 0.80, 3.1—3.30 Алгебра: линейные уравнения, неравенства, системы		
8	№ 21.21—21.29 Планиметрия: часть А		
9	№ 0.81, 4.1—4.25 Алгебра: квадратные уравнения и неравенства		
10	№ 21.30—21.37 Планиметрия: часть А		
11	№ 5.1—5.21 Алгебра: квадратный трехчлен, квадратичная функция		
12	№ 21.38—21.45 Планиметрия: часть А		
13	№ 0.82—0.84, 0.88, 6.1—6.16 Алгебра: функции		
14	№ 0.85—0.87, 6.17—6.39 Алгебра: графики функций		
15	№ 21.46—21.51 Планиметрия: часть А		
16	№ 7.1—7.28 Алгебра: рациональные уравнения		
17	№ 0.90, 8.1—8.19 Алгебра: рациональные неравенства, метод интервалов		
18	№ 21.52—21.57 Планиметрия: часть А		
19	№ 0.76—0.81, 9.1—9.10 Алгебра: системы уравнений		
20	№ 9.11—9.17 Алгебра: системы уравнений		
21	№ 0.89, 10.1—10.14 Текстовые задачи: задачи на проценты		
22	№ 21.58—21.60 Стереометрия: часть А		
23	№ 10.15—10.19 Текстовые задачи: задачи на смеси и сплавы		
24	№ 21.61—21.67 Стереометрия: часть А		
25	№ 10.20—10.37 Текстовые задачи: задачи на движение		
26	№ 21.68—21.76 Стереометрия: часть А		
27	№ 10.38—10.49 Текстовые задачи: задачи на работу, задачи на числа, задачи повышенной сложности		

№ занятия	ЗАДАНИЕ	Дата	Примечания
28	№ 21.77—21.85 Стереометрия: часть А		
29	№ 0.73—0.75, 11.1—11.14 Алгебра: последовательности, арифметическая прогрессия		
30	№ 11.15—11.26 Алгебра: геометрическая прогрессия		
31	№ 22.1—22.22 Планиметрия: часть В		
32	№ 0.48—0.50, 12.1—12.24 Алгебра: уравнения, содержащие переменную под знаком модуля		
33	№ 22.23—22.48 Планиметрия: часть В		
34	№ 13.1—13.23 Алгебра: неравенства, содержащие переменную под знаком модуля		
35	№ 22.49—22.67 Планиметрия: часть В		
36	№ 14.1—14.23 Алгебра: иррациональные уравнения		
37	№ 22.68—22.75 Стереометрия: часть В		
38	№ 0.38, 0.62, 0.69, 0.70, 16.1—16.30 Алгебра: преобразование показательных и логарифмических выражений		
39	№ 22.76—22.85 Стереометрия: часть В		
40	№ 0.78, 17.1—17.29 Алгебра: показательные уравнения, неравенства, системы		
41	№ 22.86—22.97 Стереометрия: часть В		
42	№ 18.1—18.31 Алгебра: логарифмические уравнения, неравенства, системы		
43	№ 22.98—22.103 Стереометрия: часть В		
44	№ 19.1—19.31 Тригонометрия: преобразование тригонометрических выражений		
45	№ 0.77, 0.79, 20.1—20.40 Тригонометрия: тригонометрические уравнения		
46	Тренировочный вариант 1		
47	Тренировочный вариант 2		
48	Тренировочный вариант 3		
49	Тренировочный вариант 4		
50	Тренировочный вариант 5		
51	Тренировочный вариант 6		
52	Тренировочный вариант 7		
53	Тренировочный вариант 8		
54	Тренировочный вариант 9		
55	Тренировочный вариант 10		
56	Тренировочный вариант 11		
57	Тренировочный вариант 12		
58	Тренировочный вариант 13		
59	Тренировочный вариант 14		
60	Тренировочный вариант 15		

СТРАТЕГИЯ ПОДГОТОВКИ К ЦТ И СОВЕТЫ АБИТУРИЕНТУ

Даже твердые знания, как это ни парадоксально, не гарантируют получение высокой отметки на ЦТ. В условиях реального конкурсного экзамена важную роль играет и психологическая подготовка абитуриента.

В этом параграфе остановимся на стратегиях поведения на тестировании по математике и в процессе подготовки к нему.

Методика выполнения теста

Считается, что задания в тесте размещаются по возрастанию уровня сложности и выполнять их нужно по порядку. Тем не менее понятие сложности — довольно субъективное, и, возможно, некоторые задания из части В именно для вас не будут трудными.

Полезно заранее решить для себя, в какой примерно последовательности вы будете решать тестовые задания: сначала простые — потом сложные или наоборот.

Для выработки своей стратегии необходимо за неделю решить 4—5 тестов (на каждый отводить по 180 минут), желательно соответствующих таким, которые РИКЗ предлагал на централизованном тестировании в прошлые годы, и отмечать у каждой задачи время начала и завершения ее решения. Анализируя затем результат выполнения каждого теста, обратите внимание, в каких заданиях вы допускали больше ошибок: в тех, что решали в начале своей работы или в конце. Постарайтесь понять, учитывая ваш уровень владения предметом, что лучше: решать более сложные задачи в начале (когда вы еще не устали) или в конце отведенного времени. Возможно, что в уставшем состоянии вы допускаете много досадных ошибок при решении совсем элементарных задач. В этом случае для вас будет лучшей стратегией решить сразу же 8—10 первых задач теста и затем переходить к остальным заданиям, будучи уверенным, что хорошую оценку вы уже заработали. Но для некоторых наиболее подготовленных абитуриентов возможна и другая стратегия: взяться сразу за решение сложных задач (А15—А18 и В8—В12), чтобы не волноваться по поводу оставшегося времени, и только потом перейти к решению элементарных задач А1—А10. В дальнейшем придерживайтесь выбранного плана решения теста и помните, что 180 минут **достаточно** для решения **всех** предложенных задач, если правильно распределить время. В среднем на каждую из 30 задач можно тратить только 6 минут. Понятно, что задачи первого и второго уровня сложности необходимо решать намного быстрее.

Для поступления на подавляющее число специальностей в вуз (кроме нескольких, самых престижных) нет необходимости сдавать централизованное тестирование по математике на 70—100 баллов. Поэтому если вы сразу не видите, как нужно решать самые сложные задачи (В9—В12), то и не нужно на них тратить много времени, поскольку для решения этих заданий обычно требуется знание многих специальных приемов, которые применяются при решении задач, отмеченных двумя звездочками в нашей книге. Лучше перепроверить ответы уже решенных задач, чем напрасно тратить время, пытаясь разобраться с совершенно непонятным для вас заданием.

Если вы не можете решить задачу из-за незнания какой-либо формулы, то не теряйте время на попытки ее вспомнить. В стрессовой ситуации конкурсного экзамена она, скорее всего, вспомнится неправильно. Другое дело, если вы можете в короткий срок осуществить вывод необходимой формулы. Тогда затраты времени имеют смысл.

Обязательно потратьте первые 3—5 минут после получения варианта на то, чтобы отметить для себя задачи из обеих частей теста, алгоритмы решения которых вам известны. Стоит даже сделать краткие пометки в самом листике с заданиями (например, написать около задачи «замена», «однородность» или «разложить на множители»).

Учитывайте, что при проверке работ каждая задача имеет свою «цену». Задания части В правильно решает меньшее число абитуриентов, поэтому при выставлении окончательной оценки они «имеют немного бóльший вес», чем задачи из части А.

Сложилось мнение, что все задачи части В сложные или, по крайней мере, более сложные, чем любое задание части А. Это не так. В любом варианте, предложенном на тестировании, будет 3—5 заданий в части А, правильно решить которые не очень просто, и 2—4 задачи в части В, которые составители вполне могли бы включить и в часть А. Не допускайте нелепых ошибок во время вычисления значения, которое надо указать в ответе. Безусловно, такие ошибки — самые обидные. Не забывайте, что 0 — целое число, но не натуральное, 1 — не простое и не составное число. Повторите классификацию чисел (натуральные, четные, нечетные, простые, составные, целые, рациональные, иррациональные, действительные, положительные, отрицательные, неположительные, неотрицательные) (с. 9).

В централизованном тестировании, в отличие от любого сборника задач, не бывает неграмотно составленных заданий, а тем более ошибок в заданиях или ответах. Все задания проходят тщательную проверку многих экспертов. Поэтому если ваш ответ в задании части А не совпадает ни с одним из предложенных или в задании части В получается не целый ответ, то ищите ошибку в своем решении и вычислениях. Часто она связана с простой невнимательностью. Однако и не спешите радоваться, если в процессе решения задачи из части А вы получили ответ, который есть среди вариантов ответа. Это еще не означает, что именно он и есть правильный. Составители тестовых заданий тщательно просчитывают также и неправильные варианты ответа. Все они получаются в результате наиболее типичных ошибок школьников.

Последние 10—15 минут посвятите последней проверке правильности заполнения бланка ответов. Отметим, что, в отличие от письменного экзамена, где ошибки делятся на грубые и негрубые, в централизованном тестировании любая ошибка в ответе (в том числе описка, допущенная в момент заполнения бланка) приводит к тому, что задача считается нерешенной.

Учитывая вышесказанное, не спешите заполнять бланк ответов. Помните, что отменить можно только 6 ошибочных меток в части А. Вообще, отнеситесь к заполнению бланка со всей серьезностью и внимательностью. Постарайтесь заранее приучить себя правильно ставить метку (крестик) и правильно писать цифры (особенно единицу и семерку). Мы рекомендуем все полученные вами ответы помечать карандашом прямо в задании и лишь в конце тестирования, когда все равно вряд ли вы сможете решить еще хоть одну задачу, заполнять бланк ответов.

Все задачи в тестировании рассчитаны на 5—10-минутное решение, и в них не может быть громоздких вычислений. Поэтому, если в процессе решения какой-либо задачи уже выполнено 4—5 операций, а она все еще не решена, значит, вы сделали вычислительную ошибку или выбрали нерациональный способ решения. Скорее всего, вы не заметили подходящей замены переменных, не использовали подходящую формулу сокращенного умножения или не заметили однородности выражения. Помните, что замена переменной эффективна не только при решении уравнений, но и даже при преобразовании выражений.

Рекомендации по решению задач

Начинать решение конкретной задачи можно только тогда, когда ясно условие. К сожалению, многие абитуриенты не в состоянии решить даже элементарные математические задачи, когда вопрос в них сформулирован необычным образом.

Задача	Возможная формулировка этой задачи
Решите уравнение: $f(x)=g(x)$, $h(x)=C$, $t(x)=0$.	Найдите, в каких точках пересекаются графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$; при каких значениях x график функции $y=t(x)$ пересекает ось абсцисс; при каких значениях x график функции $y=h(x)$ пересекает прямую $y=C$.
Решите уравнение: $f(x)=g(x)$, $h(x)=C$, $t(x)=0$.	При каких значениях аргумента совпадают значения функций $f(x)$ и $g(x)$? При каких значениях аргумента функция $h(x)$ принимает значение, равное C? Найдите нули функции $t(x)$.
	При каких значениях x не имеет смысла выражение $\frac{1}{f(x)-g(x)}$?
Решите неравенство: $f(x)>g(x)$, $h(x)>C$, $t(x)\geq 0$.	Найдите, при каких значениях x имеет смысл (определено) выражение $\sqrt{t(x)}$, $\lg(h(x)-C)$, $\frac{1}{\sqrt{h(x)-C}}$.
	Найдите, при каких значениях x график функции $y=f(x)$ лежит выше графика функции $y=g(x)$; при каких значениях x график функции $y=h(x)$ лежит выше, чем прямая $y=C$; при каких значениях x график функции $y=t(x)$ лежит не ниже оси абсцисс.
	Найдите, при каких значениях x функция $h(x)$ принимает значения, большие, чем C.
	Решите неравенство $\lvert t(x)\rvert \leq t(x)$.

Если школьник ни разу не встречал таких задач за время подготовки к экзамену, то ему сложно понять, что от него требуют.

При вычислениях, преобразованиях и упрощениях выражений советуем следовать следующим рекомендациям.

- Прежде чем начинать любые вычисления и преобразования, упростите выражение: вынесите общий множитель за скобки, приведите подобные слагаемые.
- Проанализируйте внешний вид выражения. Возможно, вы распознаете фрагменты известных вам формул сокращенного умножения, применение которых позволит упростить задачу.
- Существенно помогает упростить задачу замена переменной. Также не упустите возможности воспользоваться однородностью выражения.
- Не стоит работать с десятичными дробями (кроме случая, когда все числа заданы в таком виде). Переходите от десятичной дроби к обыкновенной. При этом полезно помнить наизусть, что $0,2=\frac{1}{5}$; $0,5=\frac{1}{2}$; $0,25=\frac{1}{4}$; $0,125=\frac{1}{8}$.
- Бесконечные периодические дроби представьте в виде обыкновенных. При этом полезно помнить наизусть, что $0,(1)=\frac{1}{9}$, $0,(10)=\frac{10}{99}$.
- Не работайте со смешанными дробями. Если можно без особых сложностей перейти к обыкновенной дроби, то сделайте это ($2\frac{1}{12}=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}$). В противном случае надо их записать в виде суммы целого числа и обыкновенной дроби: $-117\frac{2}{13}=-\left(117+\frac{2}{13}\right)$.
- Если в выражении присутствует несколько близкорасположенных больших чисел, то стоит одно из них обозначить, например, буквой a, остальные выразить через a и заняться упрощением полученного выражения.
- Полезно квадратные трехчлены раскладывать на множители. Это очень часто помогает упростить выражение. При этом не забывайте проверить, что вы произвели разложение верно: перемножьте скобки — должен получиться исходный трехчлен.
- При приведении дробей к общему знаменателю ищите *наименьший* общий знаменатель. Для этого сначала разложите все знаменатели дробей на множители.
- Не стоит в процессе вычислений значений дробей перемножать числа в числителе и знаменателе. Лучше разложить их на множители. Чаще всего эти числа подобраны так, что полученные в результате преобразований дроби являются сократимыми.
- Избавляйтесь от иррациональности в знаменателе выражений.
- Если в выражении присутствует корень под знаком корня (например, $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ или $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$), то пробуйте преобразовывать подкоренное выражение с целью получить полный квадрат либо куб. Помните, что $\sqrt{a^2}=\sqrt[4]{a^4}=\sqrt[6]{a^6}=\lvert a\rvert$, $\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[5]{a^5}=a$, $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$.
- В задачах с модулями анализируйте знаки выражений, находящихся под знаком модуля при допустимых значениях переменных. Это позволит преобразовать выражения по определению модуля.

При решении уравнений и неравенств стоит придерживаться следующих рекомендаций.

- Используйте, где это только возможно, графическую интерпретацию задачи. Используйте свойства функций, которые участвуют в записи условия задачи, а именно: характер четности, ограниченность, монотонность, периодичность.
- Не забывайте выписать ОДЗ переменной и условия, при которых задача может иметь решения. Иногда это позволяет упростить условие и решение задачи. Проверьте, удовлетворяют ли выписанным ограничениям полученные в результате решения ответы.
- Помните, что вы потратите значительно меньше усилий при решении, если воспользуетесь, например, замеченной однородностью выражений или возможностью выполнить замену переменной.

- Если имеется 4, 6, 8, ... множителей или слагаемых, то стоит попробовать сгруппировать эти множители (слагаемые) по парам и перемножить (сложить) их. Может быть, появится возможность сделать замену переменной.
- Если в процессе своего решения вы получили уравнение 3-й или 4-й степени, то, скорее всего, на каком-то этапе решения вы не заметили замену переменной или возможности разложения на множители.
- Для вычисления суммы или произведения корней квадратного уравнения используйте теорему Виета. Это поможет сэкономить время. Но необходимо помнить, что она применима только при положительном дискриминанте.
- Рациональные неравенства решайте *только* методом интервалов. Не стоит придумывать собственные «методы»!
- В процессе решения задачи ни в коем случае не «вычеркивайте» одинаковые множители в обеих частях уравнения или неравенства. При этом можно потерять корни. Выносите общий множитель за скобки и анализируйте полученное произведение.
- Приучите себя проверять найденные значения x непосредственной подстановкой в исходное уравнение (если x — рациональное число). Таким образом вы всегда сможете обнаружить посторонние корни.
- При решении задач с модулями используйте геометрический смысл модуля и его свойства.
- Если выражения, стоящие под знаками модулей, громоздкие, то проанализируйте внешний вид уравнения (неравенства). Возможно, вы заметите некие ограничения на значения переменной, которые позволят однозначно избавиться от знаков модулей.
- Задачи на нахождение множества значений функции (нахождение минимальных и максимальных значений) чаще всего надо решать, анализируя график этой функции. Для этого необходимо знать графики основных элементарных функций и порядок геометрических преобразований графиков.
- При отборе корней тригонометрических уравнений используйте единичную окружность или графики тригонометрических функций.

Для решения геометрических задач дадим только один совет, а именно: правильный чертеж — залог правильного решения геометрической задачи. Поэтому обязательно используйте паспорт или край листика с заданиями в качестве линейки. При построении чертежа старайтесь сохранять пропорции данных в условии элементов. Обычно первый чертеж позволяет увидеть только общую картину взаимного размещения объектов. Уточняйте чертеж до тех пор, пока он не станет легко читаемым. Обозначайте данные и уже найденные элементы прямо на чертеже. Одинаковые углы обозначайте не только одинаковыми дужками, но и одинаковыми буквами, например α. Возможно, удастся составить уравнение, где неизвестной будет именно угол α.

Использование специфики тестового контроля знаний. Как угадать правильный ответ?

После того как вам стало понятно, что дано в задаче и что требуется получить в ответе, не спешите сразу же преобразовывать уравнение (неравенство, систему). Внимательно изучите предложенные варианты ответов. Возможно, анализируя их, можно понять, что большинство ответов (а в идеале все, кроме одного) не подходят. Тогда шанс угадать правильный ответ повышается до 100 %. Например, если до начала решения задания А10 в тренировочном тесте 2 обратить внимание на то, что выражение, которое надо найти ($\sqrt{a-1}-\sqrt{a}$), принимает только отрицательные значения, то становится ясно, что варианты ответа 1, 4 и 5 не подходят. Значит, даже после такого несложного рассуждения можно уже наудачу выбирать 2-й или 3-й вариант ответа с 50 % вероятностью угадать верный ответ.

Иногда наличие ответов помогает в поиске идеи решения задачи или вообще позволяют не решать ее, но указать верный ответ. Например, если стоит задача выделить полный квадрат в квадратном трехчлене или разложить на множители многочлен, то быстрее можно узнать номер правильного ответа, не преобразуя исходное выражение, а, наоборот, перебрав варианты ответа и выяснив, который из них тождественно равен исходному выражению. Такая ситуация смоделирована, например, в задании А13 тренировочного теста 3. Более того, если стоит задача упростить некоторое выражение, то часто можно просто подставить и в исходное выражение, и в варианты ответов вместо переменной какое-то ее допустимое значение (например, $x=0$), и тогда сразу ясно, какие варианты ответов не являются верными. Это позволяет сэкономить немало времени в преобразованиях тригонометрических выражений. Например, при решении задания А12 тренировочного теста 5 можно подставить $\alpha=\pi$.

Часто формулировка в тестовом задании включает в себя подсказки, которые, конечно же, стоит использовать. Например, если в задании сказано: «Если $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ — решения системы уравнений, то чему равно значение выражения $x_1y_2+x_2y_1$?», то понятно, что система должна иметь два решения. Если задание имеет вид «Решите уравнение и укажите в ответе значение выражения 3^{x_0}, где x_0 — наименьший корень», то понятно, что не надо находить значение x_0. Достаточно вычислить значение выражения 3^{x_0}.

Очень часто предлагают задачи, в которых ответ проще получить подбором. Напомним, что уравнения вида $f(x)=g(x)$ и $h(x)=c$, где $h(x)$ — монотонная функция, $f(x)$ — возрастающая функция, $g(x)$ — убывающая функция, имеют не более одного решения и его часто можно угадать или найти, используя графическую интерпретацию задачи. Например, при решении уравнения $\sqrt{614+x}+\sqrt{x+350}=44$ единственный корень $x=11$ легче подобрать, чем решать уравнение любым из методов.

Заключительные замечания

При подготовке к централизованному тестированию не гонитесь за количеством решенных задач. Качество подборок задач значительно важнее.

Подводя итог, отметим, что разговоры о «задачах-ловушках» в централизованном тестировании, как и вообще о сложности этого вида экзаменов, немного преувеличены. Лучше психологически настроиться на то, что именно тестирование, в отличие от остальных форм контроля знаний, позволяет выявить даже минимальное владение предметом. Безусловно, в условиях стресса и ограниченного времени успешное выполнение тестовых заданий возможно только при условии уверенного владения школьным материалом. Однако мы глубоко убеждены, что успевающий школьник способен сдать централизованное тестирование по математике на неплохую оценку даже без дополнительных занятий с репетитором.

0. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Натуральные числа $\mathbf{N}=\{1,2,3,...\}$

Целые числа $\mathbf{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

> Число 0 — целое число, но не натуральное.

Целые числа могут быть ***четными*** (делятся нацело на 2 и могут быть обозначены как $2n$) либо ***нечетными*** (делятся на 2 с остатком 1 и могут быть обозначены как $2n+1$).

Однозначные числа — целые числа из промежутка $[-9; 9]$, ***двузначные*** имеют в своей записи две цифры (например, 10, 67, –89), ***трехзначные*** — три цифры и т. д.

Натуральные числа	
Простые	**Составные**
Имеют ровно два натуральных делителя, то есть делятся нацело только на себя и на 1.	Имеют более двух натуральных делителей. Их можно записать в виде произведения простых чисел (разложить на простые множители).
Например: 2, 3, 5, 7, 11, 97. Таких чисел бесконечное количество.	Например, $6=2\cdot3$, $12=2\cdot2\cdot3$, $91=7\cdot13$, $143=11\cdot13$.

> Число 1 — не простое и не составное число.

Если натуральное число A делится на натуральное число B с остатком r, то это значит, что $A=B\cdot n+r$, где A — ***делимое***, B — ***делитель***, n — ***неполное частное***, r — ***остаток*** $(r=0,1,2,...,B-1)$.

Если $r=0$, то говорят, что A ***кратно*** B или A ***делится нацело*** на B, а число B является ***делителем*** числа A.

Нуль делится на любое натуральное число.

1 является делителем любого числа. Любое число делится на 1. Любое число кратно 1.

Любое число делится на само себя. Любое число кратно самому себе.

Взаимно простые натуральные числа — это числа, для которых НОД$(a, b) = 1$, то есть при разложении на простые множители a и b не имеют одинаковых простых множителей. Например, 9 и 8 взаимно простые числа. Любое натуральное число либо делится на простое, либо взаимно просто с ним. Любые два простых числа взаимно просты.

Чтобы найти ***наибольший общий делитель*** (НОД) нескольких натуральных чисел, надо разложить каждое из этих чисел на простые множители, выделить максимально возможный комплект множителей, которые присутствуют в записи каждого из чисел, и перемножить их между собой.

Чтобы найти ***наименьшее общее кратное*** (НОК) нескольких натуральных чисел, надо разложить каждое из этих чисел на простые множители и вычислить произведение всех записанных простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (из имеющихся) показателем.

НОД(a, b) · НОК$(a, b) = a \cdot b$ для любых **двух** чисел,

НОК$(a, b) \geq a$ и НОК$(a, b) \geq b$,

НОД$(a, b) \leq a$ и НОД$(a, b) \leq b$.

Числа называются ***противоположными***, если их сумма равна 0. Например, 3 и –3.

Числа называются ***обратными***, если их произведение равно 1. Например, 2 и 0,5; -3 и $-\frac{1}{3}$.

Рациональные числа — те, что можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное. Множество рациональных чисел $\mathbf{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{N}\right\}$ состоит из конечных десятичных дробей и бесконечных периодических десятичных дробей.

Иррациональные числа — те, что не являются рациональными, то есть бесконечные непериодические десятичные дроби. Примеры: π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $0{,}1010010001000010000001...$.

Действительные числа — объединение множеств рациональных и иррациональных чисел.

Прямую линию с выбранным на ней началом отсчета, единичным отрезком и направлением называют **координатной прямой**. Каждому действительному числу можно поставить в соответствие единственную точку на координатной прямой. Больше то число, которое расположено на координатной прямой правее.

Число называется:

- **положительным**, если оно больше нуля;
- **отрицательным**, если оно меньше нуля;
- **неположительным**, если оно меньше либо равно нулю;
- **неотрицательным**, если оно больше либо равно нулю.

Напомним названия разрядов чисел на примере числа 1 234 567,89:

9 — разряд сотых,
8 — разряд десятых,
7 — разряд единиц,
6 — разряд десятков,
5 — разряд сотен,
4 — разряд тысяч,
3 — разряд десятков тысяч,
2 — разряд сотен тысяч,
1 — разряд миллионов.

Округление числа — замена его на ***приближенное значение***, записанное с меньшим количеством значащих цифр. При округлении числа *до какого-нибудь разряда* все следующие за ним цифры заменяются нулями; если первая следующая за этим разрядом цифра меньше 5, то последнюю оставшуюся цифру не изменяют, а если первая следующая за этим разрядом цифра больше или равна 5, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу. Например, с точностью до десятков 14 994 ≈ 14 990, 14 995 ≈ 15 000. Если при округлении десятичной дроби последней из оставшихся цифр в дробной части окажется 0, то отбрасывать его нельзя. В этом случае 0 в конце дробной части показывает, до какого разряда округлено число. Например, $12{,}796\approx12{,}80$ округлили до сотых.

Стандартный вид числа — запись его в виде $m\cdot10^k$, где $m\in[1;10)$. При этом m называется ***мантиссой***, а целое число k — ***порядок*** числа.

Одночлен — произведение чисел и переменных в *натуральных* степенях. Например: 112, $\frac{xy^5}{3}$, $\sqrt{12}x^5(3y^6z)^2$.

Многочленом называется сумма конечного числа одночленов. Например, $2abc + 1 - x$.

Стандартный вид одночлена — это запись одночлена в виде произведения числового множителя (***коэффициент одночлена***) и степеней переменных с разными основаниями. Например, $2xy \cdot \frac{z}{-7}x^2$ запишем в стандартном виде: $-\frac{2}{7}x^3yz$ и поэтому коэффициент одночлена равен $-\frac{2}{7}$.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней всех *переменных*, входящих в запись этого одночлена. Если одночлен не содержит переменных, то его степень равна нулю.

Одночлен вида 0 называется ***нулевым одночленом***. Для него не определена степень. Его коэффициент, естественно, равен нулю.

Степенью многочлена называется наибольшая степень одночлена, входящего в этот многочлен.

Многочлен называется ***однородным***, если все одночлены, входящие в его запись, имеют одинаковую степень. Например, $x^2 - 3xy - 2y^2$; $2a^3 + ab^2$.

Целое выражение — это математическое выражение, составленное из чисел и буквенных переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения. Также к целым относятся выражения, которые имеют в своем составе деление на какое либо число, отличное от нуля. Произведение одинаковых множителей может быть записано и в виде степени с натуральным показателем.

Дробное выражение — это математическое выражение, которое содержит деление на выражения с буквенными переменными.

Рациональное выражение — это сумма (разность) целых и дробных выражений.

Рациональная дробь (частный случай рациональных выражений) — дробь, числитель и знаменатель которой многочлены.

Целое выражение имеет смысл при любых значениях переменных, которые в него входят, а дробное выражение может не иметь смысла, так как на 0 делить нельзя. Значения переменных, при которых дробное выражение будет иметь смысл, называют ***допустимыми значениями переменных***. Для рациональной дроби допустимыми будут являться все значения переменных, при которых знаменатель дроби отличен от нуля.

Тождеством называется равенство двух выражений с одной или несколькими переменными, обращающееся в истинное числовое равенство при любых допустимых значениях переменных.

Уравнением называется равенство двух выражений с одной или несколькими переменными. Если уравнение содержит только одну переменную, то его называют ***уравнением с одной переменной***.

Уравнения, в которых левая и правая часть являются целыми выражениями, называются ***целыми уравнениями с одной переменной***.

Рациональное уравнение, если его и левая, и правая части — рациональные выражения.

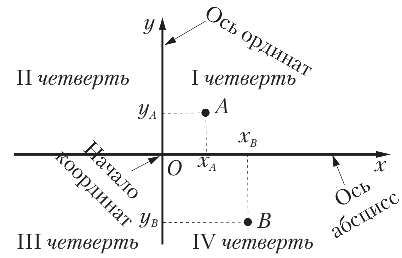
Решением, или ***корнем***, уравнения $f(x) = g(x)$ называется такое число x_0, при подстановке которого вместо x в обе части уравнения получается верное числовое равенство, то есть при x_0 обе части уравнения определены (одновременно имеют смысл) и их значения совпадают. ***Решить уравнение*** — значит найти все его корни (решения) или доказать, что оно решений не имеет.

Решением неравенства с одной переменной называется число, подстановка которого в данное неравенство обращает его в верное числовое неравенство. ***Решить неравенство*** — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Два уравнения (неравенства) называются ***равносильными***, если их множества решений совпадают. В частности, если два уравнения (неравенства) не имеют решений, то они равносильны.

Если провести на плоскости две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, то горизонтальная ось Ox называется ***осью абсцисс***, а вертикальная — ***осью ординат***. Точка пересечения осей O называется ***началом координат***. Оси координат разбивают плоскость на четыре части, которые называют ***координатными четвертями*** (см. рис.).

Для каждой точки A плоскости ее координаты $(x; y)$ определяются так: опускаем из A перпендикуляры на оси и записываем соответствующие значения, которые отсекаются на осях Ox и Oy соответственно.



Расстояние между двумя точками находится обычно с помощью теоремы Пифагора:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Все точки оси абсцисс имеют координату $y = 0$, а все точки оси ординат имеют координату $x = 0$. Начало координат имеет координаты (0;0).

Симметричность фигур

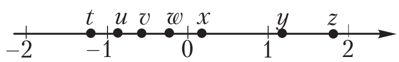
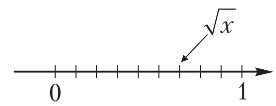
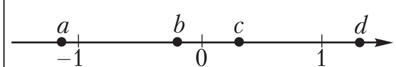
• Точки M и M_1 называются ***симметричными относительно точки*** O, если O является серединой отрезка MM_1. Точка O называется ***центром симметрии*** точек M и M_1.

• Точки M и M_1 называются ***симметричными относительно прямой*** l, если прямая l проходит через середину отрезка MM_1 и перпендикулярна ему. Прямая l называется ***осью симметрии*** точек M и M_1.

• Точки M и M_1 называются ***симметричными относительно плоскости*** α, если плоскость α проходит через середину отрезка MM_1 и перпендикулярна этому отрезку. Плоскость α называется ***плоскостью симметрии*** точек M и M_1.

Точка O (прямая l, плоскость α) называется центром (осью, плоскостью) симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно O (прямой l, плоскости α) некоторой точке этой же фигуры.

0.1	Найдите число, обратное числу 5.
0.2	Найдите число, противоположное числу 5.
0.3	Какое число не имеет обратного?
0.4	Верно ли, что значение выражения $-x$ есть всегда отрицательное число?
0.5	Найдите наименьшее натуральное число.
0.6	Найдите наибольшее двузначное число.
0.7	Найдите наименьшее однозначное число.
0.8	Найдите наименьшее простое число.
0.9	Простыми числами из данных являются: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4; 6) 6; 7) 9.
0.10	Составными числами из данных являются: 1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 9; 5) 11; 6) 13; 7) 117.
0.11	Сколько натуральных делителей имеет простое число? 1) один; 2) два; 3) ни одного; 4) зависит от числа.
0.12	Среди чисел 2, 6, 22, 27, 35 укажите все пары взаимно простых чисел.
0.13	Разложите на простые множители число 4290.
0.14	Для каких натуральных чисел A и B верно равенство $A \cdot B = \text{НОД}(A; B) \cdot \text{НОК}(A; B)$?
0.15	Для каких натуральных чисел A и B верно неравенство $A \le \text{НОК}(A; B)$?
0.16	Среди данных утверждений укажите номера неверных. 1) число π — иррациональное; 2) число 13 — составное; 3) число 12 кратно числу 2; 4) остаток от деления числа 2 на 5 равен 2; 5) остаток от деления числа 13 на 7 равен -1; 6) число 16 является делителем числа 4; 7) число 30 кратно числу 0; 8) число 132 кратно числу 1; 9) число 1 является делителем любого целого числа.
0.17	Натуральные числа a и b, $a > b > 1$ являются взаимно простыми и их произведение равно 120. Найдите все такие пары.
0.18	Какие из следующих утверждений являются неверными? 1) -5 — это натуральное число; 2) -5 — это целое число; 3) -5 — это простое число; 4) -5 — это рациональное число; 5) -5 — это действительное число; 6) 5 — это неположительное число.
0.19	Какие из следующих утверждений являются неверными? 1) число 6 кратно числу 24; 2) число 6 является делителем числа 3; 3) число 4 является делителем числа 10; 4) число 24 кратно числу 3.
0.20	Какое натуральное число является делителем любого натурального числа?
0.21	Найдите остаток от деления числа 123 456 789 на 5.
0.22	На столе лежит книга, открытая так, что сумма номеров левой и правой страниц равна 25. Чему равно произведение этих номеров?
0.23	Если открыть книгу так, что видны номера левой и правой страниц, то произведение этих номеров всегда является: 1) простым числом; 2) нечетным числом; 3) составным числом; 4) четным числом; 5) числом, делящимся нацело на число страниц в книге.
0.24	Во сколько раз уменьшили число, если его уменьшили на 20 %?
0.25	Во сколько раз $\frac{5}{6}$ мин меньше, чем 4 мин 10 с?
0.26	Чему равна разность 25 мин 11 с – 15 мин 31 с?
0.27	Чему равна половина одной сотой? 1) 0,02; 2) 0,002; 3) 0,05; 4) 0,005; 5) $\frac{1}{50}$.
0.28	Округлите число 9,124599 с точностью до сотых.
0.29	Округлите число 9,124599 с точностью до тысячных.
0.30	Приближенное значение числа 15,78 равно 16. Чему равна абсолютная погрешность вычисления?
0.31	Какое наибольшее натуральное число удовлетворяет неравенству $n \le \frac{92}{13}$?
0.32	Представьте число 0,00013 в стандартном виде.

0.33	Чему равен порядок числа 27?
0.34	Во сколько раз 60 ц больше, чем 20 кг?
0.35	Вычислите в метрах квадратных 2 гектара + 20 аров + 70 метров квадратных и запишите в стандартном виде.
0.36	Выразите 201 ц и 8 кг с точностью до сотых в тоннах.
0.37	Сравните числа $\frac{5}{7}$ и $\frac{2}{3}$.
0.38	Расположите числа 0,(4), $\frac{3}{7}$, $\log_3 6$, $\sqrt{0{,}99}$, $2^{\sqrt{2}}$, $\sin 30°$ в порядке возрастания.
0.39	Расположите числа 125^{80} , 26^{120}, 9^{180} в порядке убывания.
0.40	На числовой оси отмечены числа t, u, v, w, x, y, z. Какое из них ближайшее к значению $\lvert u+v\rvert$, какое ближайшее к $\sqrt[3]{7}$, какое ближайшее к $\sqrt[9]{-7}$? 
0.41	На числовой оси отметили 9 равных интервалов между 0 и 1 и отметили значение $\sqrt{x}$. Чему равно x? 
0.42	Числа отмечены на координатной прямой. Расположите в порядке убывания числа $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ и a. 
0.43	Если $a \in (0;1)$, то расположите в порядке убывания числа $\lvert a\rvert$, $\sqrt{a}$, $\frac{1}{a}$.
0.44	Сравните 33 % от 73 и 73 % от 33.
0.45	Сравните числа 2 и $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.
0.46	Верно ли, что $10 \le 10$?
0.47	Вычислите $\lvert -9\rvert$.
0.48	Укажите, какое из данных утверждений выражает тот факт, что расстояние между точками x и -2 а) не больше 3; б) не меньше 3; в) больше 3; г) меньше 3: $\lvert x-2\rvert<3$, $\lvert x-2\rvert>3$, $\lvert x-2\rvert\le 3$, $\lvert x-2\rvert\ge 3$, $\lvert x+2\rvert<3$, $\lvert x+2\rvert>3$, $\lvert x+2\rvert\le 3$, $\lvert x+2\rvert\ge 3$.
0.49	Упростите $\left\lvert a^2\right\rvert$.
0.50	Упростите $\left\lvert -a^4\right\rvert$.
0.51	Верно ли, что $\sqrt{100}=\pm 10$?
0.52	Верно ли, что $\lvert 5\rvert=\pm 5$?
0.53	Запишите 1,2 в виде обыкновенной несократимой дроби.
0.54	Запишите в виде десятичной дроби $\frac{1}{40}$.
0.55	Какие из данных дробей можно представить в виде конечной десятичной дроби? 1) $\frac{100}{6}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{17}{2000}$; 4) $\frac{14}{15}$; 5) $\frac{111}{1024}$; 6) $\frac{511}{512}$; 7) $\frac{777}{256}$.
0.56	Запишите $13\frac{2}{3}$ в виде неправильной дроби.
0.57	Какие из данных равенств являются неверными? 1) $0{,}1=10\ \%$; 2) $\frac{1}{2}=50\ \%$; 3) $2=200\ \%$; 4) $2{,}1=21\ \%$; 5) $3+50\ \%=4{,}5$.
0.58	Какие из данных равенств являются неверными? 1) $\frac{20}{30}=\frac{21}{31}$; 2) $\frac{1}{2}=\frac{3}{9}$; 3) $\frac{42}{49}=\frac{6}{7}$; 4) $\frac{21}{22}=\frac{42}{44}$; 5) $\frac{155555}{255555}=\frac{1}{2}$.

0.59	Вычислите $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$.
0.60	Вычислите $2\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{3}$.
0.61	Какие из данных выражений не имеют смысла? 1) $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{-5}$; 4) $\sqrt[3]{-5}$; 5) $-\sqrt{-5}$; 6) $\left(\sqrt{-5}\right)^2$; 7) $\sqrt{-5^2}$; 8) $\sqrt{(-5)^2}$.
0.62	Какие из данных выражений имеют смысл? 1) $\log_2\left(\sqrt{2}-3\right)$; 2) $\log_{\sqrt{2}-4}1$; 3) $\log_{2009}1$; 4) $\log_2 0$; 5) $\log_1 5$; 6) $\log_2(-1)$; 7) $(-2)^{2,22}$; 8) $\left(3-\sqrt{9}\right)^0$.
0.63	Какие из данных рациональных выражений являются целыми? 1) $\frac{a+b}{c}$; 2) $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$; 3) $\frac{a-2b}{3}$; 4) $a-\frac{b}{c}$; 5) $\frac{a+b}{2a+2b}$; 6) $\frac{2a}{3}+\frac{2}{3b}$.
0.64	Какие из данных выражений являются одночленами? 1) $2a-b$; 2) ab^{2009}; 3) $\frac{ac}{2}$; 4) $\frac{abac}{a^2}$; 5) $a+b$; 6) $a^2+b^2-a\cdot a$; 7) 1; 8) 0; 9) $\frac{abcd}{2\cdot 3\cdot 4}$.
0.65	Укажите, какие из данных выражений являются одночленами первой степени: 1) $x\sin 2$; 2) $\frac{xy}{y}$; 3) 2^2x^3; 4) 2^3x; 5) $2\sqrt{xy}$; 6) 1; 7) $3a$.
0.66	Определите степень многочлена $21ab^2+a-20ab+b$.
0.67	Определите степень многочлена $\left(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)(x-1)-x^2\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)$ после преобразования его к стандартному виду.
0.68	Укажите среди данных уравнений квадратные: 1) $2x^4+3x^2-5=0$; 2) $2^2-3\cdot x+5=0$; 3) $\left(x^2-1\right)^2=0$; 4) $3x-2=x^2$; 5) $2x^2-x=0$.
0.69	Какие из данных формул являются неверными? 1) $a^na^m=a^{n+m}$; 2) $a^n:a^m=a^{n-m}$; 3) $a^n+a^m=a^{nm}$; 4) $a^n+b^n=ab^n$; 5) $\left(a^n\right)^m=a^{nm}$.
0.70	Какие из данных формул являются неверными? 1) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$; 2) $a^nb^m=(ab)^{mn}$; 3) $\sqrt[m]{a^n}=a^{m:n}$; 4) $a^{-2}=-a^2$; 5) $\sqrt[m]{a^n}=a^{n:m}$.
0.71	Какие из данных формул являются верными? 1) $(a+b)^2=a^2+b^2$; 2) $(a-b)^2=a^2-b^2$; 3) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; 4) $(a+b)^3=a^3+b^3$; 5) $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$.
0.72	Какие из данных формул являются верными? 1) $\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}=\frac{a}{b}$; 2) $\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}=\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert$; 3) $\lvert a\rvert\lvert b\rvert=ab$; 4) $\lvert a\rvert\lvert b\rvert=\pm ab$; 5) $\lvert a\rvert\lvert b\rvert=\lvert ab\rvert$.
0.73	Какие из данных последовательностей являются геометрической прогрессией? 1) 2; 2; 2; 2; 2) 1; 2; 4; 8; 3) 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 4) 80; 40; 20; 5; 5) 2; 20; 40; 80.
0.74	Какие из данных последовательностей являются арифметической прогрессией? 1) 2; 2; 2; 2; 2) 1; 2; 4; 8; 3) 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 4) –1; 1; 3; 5; 5) 2; 20; 40; 80.
0.75	Найдите сумму первых семнадцати членов геометрической прогрессии с первым членом, равным 7, и знаменателем прогрессии, равным 1.
0.76	Равносильны ли уравнения $x^2=-10$ и $\sqrt{x}=-1$?
0.77	Равносильны ли уравнения $\sin x=2$ и $\frac{1}{x}=0$?
0.78	Какое из данных уравнений равносильно уравнению $x^2=25$? 1) $\log_2\lvert x\rvert=32$; 2) $\log_{32}\lvert x\rvert=5$; 3) $\log_{25}\lvert x\rvert=0,5$; 4) $2^x=32$; 5) $x^4-25=24x^2$; 6) $(x-5)^2=0$; 7) $(x-5)(x-1)(x+5)=0$.
0.79	Какие из данных утверждений верные? 1) уравнения $2^{3x}+2=0$ и $\sin\frac{\pi}{3}=x$ равносильны; 2) уравнения $\sin x=\frac{\pi}{3}$ и $x-1=x$ равносильны;

3) уравнения $\frac{0,1}{x}=\frac{0,02}{x+1}$ и $x^2=1,25^2$ равносильны;
4) уравнение $a-3a=0$ не имеет корней;
5) уравнение $\sin 2+x\cos 2=0$ является тригонометрическим;
6) уравнение $\sqrt{23}t+1=0$ является линейным;
7) равенство $(x+1)^2=x^2+3x+1$ является уравнением;
8) равенство $3+7-1=9$ является уравнением;
9) значение t, равное 2, является корнем уравнения $\frac{t-2}{t^2+t-6}=0$;
10) при $t=1,5$ уравнение $(t+1)(2t+3)=0$ обращается в верное числовое равенство.

0.80 Сколько решений может иметь линейное уравнение?

0.81 Сколько решений может иметь квадратное уравнение?

0.82 Величины a и b являются обратно пропорциональными. Используя данные таблицы, найдите неизвестное значение величины a.

a	1,4	
b	3	5

0.83 Величины a и b являются прямо пропорциональными. Используя данные таблицы, найдите неизвестное значение величины b.

a	5	2
b	1,3	

0.84 На черно-белой фотографии 80 % поверхности было покрыто черным цветом, а 20 % — белым. Фотографию увеличили в 2 раза. Сколько процентов поверхности полученной фотографии покрыто белым цветом?

0.85 Чему равен радиус окружности, уравнение которой в прямоугольной системе координат имеет вид $x^2+y^2+2y=0$?

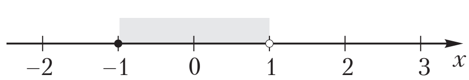
0.86 Для окружности, заданной уравнением $(x-3)^2+(y+1)^2=25$, найдите:
а) расстояние от центра окружности до точки $A(-1;1)$;
б) ее радиус;
в) длину этой окружности;
г) точки пересечения окружности с прямой $x+2y=11$.

0.87 Окружность, заданная уравнением $(x+2)^2+(y-1)^2=R^2$, проходит через точку $A(2;2)$. Найдите длину этой окружности.

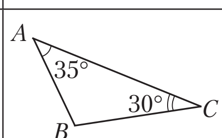
0.88 Какие знаки имеют координаты всех точек II координатной четверти?

0.89 Какие из данных единиц измерения используют при измерении площади?
1) 1 см; 2) 1 с; 3) 1 акр; 4) 1 кг; 5) 1 г; 6) 1 кв. м; 7) 1 т.

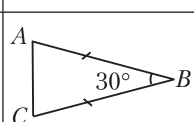
0.90 Укажите, какие из данных неравенств соответствует множеству точек, изображенных на рисунке.



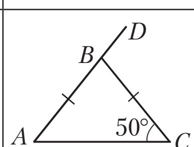
1) $-1<x<1$; 2) $-1\le x\le 1$; 3) $-1<x\le 1$; 4) $-1\le x<1$; 5) $|x|<1$; 6) $|x|\le 1$; 7) $\frac{x+1}{x-1}\le 0$.

0.91 

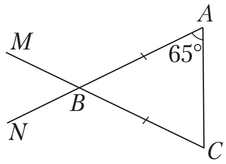
В треугольнике ABC угол при вершине A равен 35°, а угол при вершине C равен 30°. Найдите градусную меру угла при вершине B.

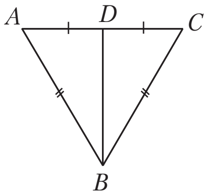
0.92 

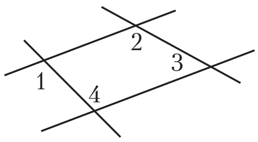
В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Угол при вершине B равен 30°. Найдите градусную меру угла при вершине A.

0.93 

В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Угол при вершине C равен 50°. На луче AB лежит точка D, причем точка B расположена между точками A и D. Найдите градусную меру угла CBD.

<table>
<tr><td>0.94</td><td>

В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Угол при вершине A равен 65°. На луче AB лежит точка N так, что точка B расположена между точками A и N. На луче CB лежит точка M так, что точка B расположена между точками C и M. Найдите градусную меру угла NBM.</td></tr>
<tr><td>0.95</td><td>

В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D — середина стороны AC. Найдите градусную меру угла ADB.</td></tr>
<tr><td>0.96</td><td>

На рисунке $\angle 1 = 125°$, $\angle 2 = 132°$, $\angle 4 = 125°$. Найдите величину $\angle 3$.</td></tr>
<tr><td>0.97</td><td>Чему равен угол между биссектрисой и стороной данного угла, равного 52°?</td></tr>
<tr><td>0.98</td><td>Чему равна разность суммы углов четырехугольника и суммы углов треугольника?</td></tr>
<tr><td>0.99</td><td>Расположите углы треугольника в порядке возрастания, если $AB = 6$, $BC = 7$, $AC = 2$.</td></tr>
<tr><td>0.100</td><td>Найдите внешний угол правильного 18-угольника.</td></tr>
<tr><td>0.101</td><td>Определите количество сторон правильного многоугольника с внутренним углом 150°.</td></tr>
<tr><td>0.102</td><td>Стороны треугольника равны 24 см и 25 см. Укажите, какой из приведенных ниже может быть длина его третьей стороны:
а) 46 см; б) 49 см; в) 50 см; г) 1 см.</td></tr>
<tr><td>0.103</td><td>В каких пределах может изменяться длина стороны треугольника, если длины двух других сторон равны 3 см и 4 см?</td></tr>
<tr><td>0.104</td><td>Установите соответствие между тройками чисел, являющимися длинами сторон треугольника, и видом этого треугольника.
<table>
<tr><th>Длины сторон треугольника</th><th>Вид треугольника</th></tr>
<tr><td>а) 1, 2, 3
б) 2, 3, 4
в) 3, 4, 5
г) $\sqrt{5}, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}$
д) $\sqrt{26}$, 12, 13
е) $2\sqrt{2}$, 3, 4</td><td>1) тупоугольный
2) прямоугольный
3) остроугольный
4) не существует</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>0.105</td><td>Основания трапеции равны 17 и 31. Найдите длину средней линии трапеции.</td></tr>
<tr><td>0.106</td><td>В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Длина отрезка MN равна 7. Найдите длину отрезка AC.</td></tr>
<tr><td>0.107</td><td>Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. $AB = 63$, $BC = 35$, $A_1B_1 = 9$. Найдите длину отрезка B_1C_1.</td></tr>
<tr><td>0.108</td><td>В прямоугольнике одна из сторон равна 8 см, а диагональ — 10 см. Найдите площадь прямоугольника.</td></tr>
<tr><td>0.109</td><td>В прямоугольном треугольнике катеты равны 5 см и 12 см. Найдите длину гипотенузы.</td></tr>
<tr><td>0.110</td><td>В прямоугольном треугольнике гипотенуза AB равна 18 м, а угол при вершине B равен 60°. Найдите длину катета AC.</td></tr>
<tr><td>0.111</td><td>В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Во сколько раз гипотенуза больше, чем меньший катет?</td></tr>
<tr><td>0.112</td><td>Образующая конуса вдвое больше радиуса основания. Под каким углом наклонена образующая к плоскости основания?</td></tr>
<tr><td>0.113</td><td>Найдите площадь треугольника, все стороны которого равны 5 м.</td></tr>
<tr><td>0.114</td><td>Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 4 см и 7 см, а угол между ними равен 30°.</td></tr>
<tr><td>0.115</td><td>Найдите радиус окружности, описанной вокруг правильного шестиугольника со стороной 5.</td></tr>
<tr><td>0.116</td><td>Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник с площадью $18\sqrt{3}$.</td></tr>
</table>

0.117	Какая фигура является сечением конуса плоскостью, параллельной основанию?
0.118	Какая фигура является сечением конуса плоскостью, содержащей высоту конуса?
0.119	Какая фигура является осевым сечением конуса?
0.120	Какая фигура является сечением цилиндра плоскостью, параллельной основанию?
0.121	Какая фигура является сечением цилиндра плоскостью, параллельной высоте цилиндра?
0.122	Центральный угол окружности, опирающийся на дугу AB, равен 78°. Чему равен вписанный угол, опирающийся на ту же дугу?
0.123	Вычислите площадь круга, радиус которого равен 7 см.
0.124	Чему равен радиус сферы, площадь поверхности которой составляет 100π см^2?
0.125	Вычислите объем шара, радиус которого равен 6 см.
0.126	Чему равен радиус шара, объем которого составляет 36π см^3?
0.127	Ребро куба равно 5 см. Вычислите длину диагонали куба.
0.128	Вычислите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, каждое ребро которой равно 12 см.
0.129	Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2,5 см, 5 см и 5 см. Вычислите длину ребра куба, объем которого в два раза больше объема данного параллелепипеда.
0.130	В правильной четырехугольной пирамиде высота составляет с боковой гранью угол, равный 37°. Найдите угол между апофемами противоположных боковых граней.
0.131	Осевое сечение цилиндра — квадрат, длина стороны которого равна 4. Вычислите объем цилиндра.
0.132	Что представляет собой множество точек плоскости, отстоящих на расстоянии R от заданной точки O?
0.133	Что представляет собой множество точек плоскости, равноудаленных от двух заданных точек A и B?
0.134	Что представляет собой множество точек плоскости, равноудаленных от сторон угла?
0.135	Что представляет собой множество точек плоскости, равноудаленных от двух параллельных прямых?

1. ВЫЧИСЛЕНИЯ

Некоторые рекомендации.

• Прежде чем начинать любые вычисления и преобразования, вынесите общий множитель за скобки, приведите подобные слагаемые (№ 1.6, 1.8, 1.15, 1.20, 1.22 (б)).

• Не работайте со смешанными дробями. Если можно без особых сложностей перейти к обыкновенной дроби, то сделайте это ($2\frac{1}{12}=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}$). В противном случае (№ 1.5—1.7) надо их записать в виде суммы целой и дробной частей: $-117\frac{2}{13}=-\left(117+\frac{2}{13}\right)$.

• Переходите от десятичной дроби к обыкновенной. Не стоит работать с десятичными дробями, кроме некоторых простейших случаев, когда все или почти все числа заданы в таком виде (№ 1.8). При этом полезно помнить наизусть, что

$0{,}5=\frac{1}{2}; 0{,}25=\frac{1}{4}; 0{,}75=\frac{3}{4}; 0{,}125=\frac{1}{8}$, откуда легко получить, что, например, $0{,}375=3\cdot 0{,}125=\frac{3}{8}$; $0{,}875=1-0{,}125=\frac{7}{8}$ и т. д.

• Бесконечные периодические дроби представьте в виде обыкновенных. При этом полезно помнить наизусть, что

$0{,}111111...=0{,}(1)=\frac{1}{9}$, откуда легко получить, что, например, $0{,}444...=\frac{4}{9}$.

$0{,}10101010...=0{,}(10)=\frac{10}{99}$, откуда легко получить, что, например, $0{,}505050...=5\cdot 0{,}(10)=\frac{50}{99}$.

Рассмотрим пример перевода бесконечной периодической десятичной дроби 12,3(45) в вид обыкновенной дроби.

Обозначим 12,3(45) = x, умножим обе части равенства на 100, получим 1234,5(45) = $100x$. Вычтем почленно из второго равенства первое: 1222,2 = $99x$, откуда $x=\frac{1222{,}2}{99}=\frac{12222}{990}=\frac{679}{55}$. (Заметьте, что важно было произвести сдвиг запятой ровно на один период, чтобы вычитание бесконечных дробей дало конечный результат.)

• Проанализируйте внешний вид выражения. Возможно, там используется фрагмент известных формул сокращенного умножения (№ 1.9, 1.10, 1.18, 1.21), применение которых позволит упростить задачу.

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

• Если в выражении присутствует несколько близкорасположенных больших чисел, то стоит одно из них обозначить, например, буквой a, остальные выразить через a и заняться упрощением полученного выражения (№ 1.10).

• Не стоит в процессе вычислений значений дробей перемножать числа в числителе и знаменателе. Лучше разложить их на множители. Чаще всего эти числа подобраны так, что полученные в результате преобразований дроби являются сократимыми.

• При приведении дробей к общему знаменателю ищите наименьший общий знаменатель (НОК чисел). Для этого сначала разложите все знаменатели дробей на простые множители. С помощью разложения на множители решаются задачи, связанные с непосредственным вычислением НОД, НОК.

• В задачах с модулями анализируйте знаки выражений, находящихся под знаком модуля при допустимых значениях переменных. Это позволит преобразовать выражения по определению модуля (№ 1.13, 1.14, 1.17, 1.19). А именно:
$$|a|=\begin{cases}a, \text{если } a\ge 0;\\ -a, \text{если } a\le 0.\end{cases}$$

Основные свойства модуля

$\lvert a\rvert\ge 0$ $\lvert a\rvert=\lvert -a\rvert, \lvert a-b\rvert=\lvert b-a\rvert$ $\lvert a\rvert^2=a^2=\lvert a^2\rvert$	$\lvert ab\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$ $\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$

• Геометрическая интерпретация модуля: если на числовой оси точка A имеет координату a, то расстояние от A до 0 равно $|a|$. Расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ на числовой оси равно $|a-b|$.

• В степенных выражениях удобно перейти к основаниям — простым числам (№ 1.12, 1.16). Затем используются либо алгебраические преобразования (вынесение общего множителя за скобки, приведение подобных слагаемых), либо свойства степеней.

Свойства степеней (при допустимых значениях переменных)

$a^0=1$ $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$	$a^p\cdot a^r=a^{p+r}$ $a^p:a^r=a^{p-r}$ $\left(a^p\right)^r=a^{pr}$	$a^r\cdot b^r=(ab)^r$ $\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-r}=\left(\frac{b}{a}\right)^r$

• Избавляйтесь от иррациональности в знаменателе дроби умножением числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное знаменателю (сопряженными называются выражения $a+b$ и $a-b$) (№ 1.17, 1.22).

• Если в выражении присутствует корень под знаком корня (например, $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$), то пробуйте преобразовывать подкоренное выражение с целью представить его в виде полного квадрата (№ 1.19, 1.20, 1.23).

Помните, что $\left(\sqrt{a}\right)^2=a,\ a\ge 0$, но $\sqrt{a^2}=\sqrt[4]{a^4}=\sqrt[6]{a^6}=|a|$, $\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[5]{a^5}=a$, $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$ (№ 1.14, 1.17).

1.1. Найдите все натуральные числа

а) вида $\overline{71x1y}$, кратные 45;	б) вида $\overline{56x3y}$, кратные 36;
в) которые при делении на 11 с остатком дают частное, равное 11.	г) Остаток от деления натурального числа n на 17 равен 8; остаток от деления n на 13 равен 7. Чему равен остаток от деления наименьшего из возможных n на 25?

1.2. Найдите все натуральные двузначные числа

а) произведение цифр которых равно 28;	б) сумма цифр которых равна 16;
в) которые в 4 раза больше суммы своих цифр;	г) произведение цифр которых в два раза меньше самого числа и сумма цифр искомого числа в два раза меньше произведения цифр этого числа.

1.3.

а) Вычислите НОК(165;150) – НОД(330;162).	б) При каких натуральных n выполняется условие НОК(n; 20) = 20?
в) Прямоугольный параллелепипед с ребрами 54, 24 и 42 требуется сложить из равных кубов. Найдите наибольший возможный объем одного такого куба, если известно, что длина его ребра — целое число.	г) Маршрутные такси номер 1101 отправляются с конечной станции каждые 30 мин, а такси номер 2201 отправляются с этой же станции каждые 34 мин. Известно, что в 12.00 одновременно отправились две маршрутки. Через сколько минут две маршрутки еще раз одновременно отправятся в путь с конечной станции?

1.4. При каких натуральных n и m верно равенство

а) НОК(n, 20) = 2n?	б) НОК(n, 20) = 20?
в) НОД(n, 66) = 22?	г) НОД(n, m) · НОК(n, m) = 1300 и число n больше числа m на 27?

1.5. Вычислите

а) $2019\frac{1}{3}-3017\frac{2}{3}+0{,}6\cdot 1\frac{2}{3}$;	б) $2346\frac{1}{2}+3210\frac{1}{3}-0{,}3:1\frac{1}{2}$;
в) $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}+\left(-2\frac{1}{2}\right)\cdot 3\frac{1}{3}$;	г) $3\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}-\left(-2\frac{1}{2}\right):\left(-3\frac{1}{3}\right)$.

1.6. Вычислите

а) $\left(3{,}8-3\frac{4}{5}\cdot 0{,}8\right):1{,}9+10:0{,}1$;	б) $\left(1{,}2^2-1\frac{1}{5}\cdot 0{,}2\right):0{,}3+0{,}3\cdot 3\frac{1}{3}$;
в) $2\frac{1}{2}\cdot 0{,}1-\left(-7{,}77+\frac{2}{3}:2\frac{2}{3}\right)$;	г) $\left(\frac{33}{7}+6\frac{3}{5}:\frac{7}{5}\right):3{,}3\cdot 2\frac{3}{5}$.

1.7. Найдите x из пропорции

а) $\dfrac{\frac{11}{3}:3\frac{1}{3}}{x}=\dfrac{2{,}3}{11{,}2-9\frac{2}{3}}$;	б) $\dfrac{1\frac{11}{100}+0{,}19-\frac{13}{10}:\frac{2}{4}}{2{,}06+0{,}54}=\dfrac{3\frac{1}{4}}{x}$;
в) $\dfrac{0{,}003}{7{,}5}-\dfrac{0{,}0002}{0{,}25}=\dfrac{0{,}02x}{50}$.	г) Найдите A, если $\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-2^{-1}}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+2^{-1}}}\right):(-5)^{-1}$ составляет 20 % числа A.

1.8. Вычислите

а) $-1{,}3\cdot 2\frac{1}{3}+1\frac{3}{10}\cdot 3-2{,}6\cdot\frac{1}{3}$;	б) $1{,}2\cdot 2{,}8+2{,}4\cdot 3{,}3+3{,}6\cdot 0{,}2$;
в) $21\cdot 3{,}1-2{,}1\cdot 28-4{,}2\cdot 3\frac{1}{4}$;	г) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot 9{,}9+2{,}2\cdot 3{,}25+11\cdot 0{,}05$.

1.9. Вычислите

а) $\dfrac{11^2-21^2+32\cdot 5}{17^2-15^2}$;	б) $\dfrac{6{,}2^2+6{,}8^2-2\cdot 6{,}8\cdot 6{,}2}{3{,}6\cdot 2{,}71+7{,}29\cdot 3{,}6}$;
в) $\sqrt{\dfrac{69^2-169}{24^2-289}}$;	г) $\dfrac{1222-2222}{144-24\cdot 22+22^2}$.

***1.10.** Вычислите

а) $\left(\dfrac{110{,}3}{111{,}9}-\dfrac{11{,}19}{11{,}03}\right):\dfrac{1{,}6\cdot 111{,}1}{0{,}64-(111{,}1)^2}$;	б) $\left(\dfrac{12{,}37}{123{,}3\cdot 123{,}5}-\dfrac{1}{1234^2+1234}\right):\dfrac{2470}{1234^2-1234}$;
в) $\left(\dfrac{2{,}220}{2{,}224}-\dfrac{22{,}24}{22{,}20}\right)\cdot\left(\dfrac{12\cdot 2222}{4-2222^2}\right)^{-1}$;	г) $\dfrac{111^2+2222^2}{111^2-2222^2}+\dfrac{2222}{2333}+\dfrac{2222}{2111}$.

****1.11.** Вычислите

а) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 101}$;	б) $\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\ldots+\dfrac{1}{98\cdot 100}$;
в) $\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\dfrac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{61\cdot 63\cdot 65}$;	г) $2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+98\cdot 99$.

1.12. Вычислите

а) $(-2)^2\cdot 4^3\cdot 6^{-2}:3^{-2}\cdot\left(8^{-2}\cdot(\sqrt{3})^6\right)^3$;	б) $\dfrac{\sqrt[6]{5\sqrt[7]{125\cdot 25}}}{\sqrt[7]{25}}$;
в) $0{,}25^{-\frac{3}{2}}+3\cdot 81^{-0{,}25}+\sqrt[3]{-0{,}027}$;	г) $5\cdot 625^{-2{,}25}\cdot 25^{-\frac{2}{3}}\cdot 125^{\frac{25}{9}}$.

1.13. Вычислите значение выражения

а) $\lvert x\rvert-\lvert 5-x\rvert$ при $x=-1234567890$;	б) $\sqrt[4]{(x-6)^4}-\sqrt[5]{-x^5}$ при $x=-987654321$;
в) $\left\lvert\sqrt{2}+3\right\rvert-\left\lvert\sqrt{2}-3\right\rvert$;	г) $\left\lvert 2^{30}-3^{20}\right\rvert+3^{20}+4^{15}$.

1.14. Вычислите

а) $\sqrt{21^2}-\sqrt{(-21)^2}+\sqrt{(-11)^4}$;	б) $\sqrt[3]{(-3)^6}+\sqrt[3]{(-3)^3}+\left(\sqrt[3]{-3}\right)^6+\left(-\sqrt[3]{-3}\right)^3$;
в) $\sqrt[3]{6\cdot 36}+\sqrt[3]{45\cdot 75}$;	г) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}-\dfrac{\sqrt[4]{5}\sqrt[4]{250}}{\sqrt{\sqrt{2}}}$.

1.15. Вычислите

а) $\sqrt{50}-6\sqrt{2}+\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}$;	б) $5\sqrt{2}-4\sqrt{32}+\sqrt{8}$;
в) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt[3]{3}\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$;	г) $\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{7}+\sqrt{112}}{\sqrt{7}}$.

1.16. Вычислите

а) $\sqrt[3]{38}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4}{-19}}+\dfrac{5\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}}$;	б) $\dfrac{\sqrt[3]{136}}{4\sqrt[3]{17}}-\sqrt[3]{10}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{32}}$;
в) $\sqrt[3]{-0{,}008\cdot 27}+\sqrt[4]{625}$;	г) $\sqrt[4]{0{,}0625\cdot 81}-\sqrt[5]{32}$.

1.17. Вычислите

а) $\sqrt[6]{\left(\sqrt[4]{24}-\sqrt{5}\right)^6}-\left(\sqrt[6]{\sqrt[4]{24}+\sqrt{5}}\right)^6$;	б) $\sqrt{\left(3\sqrt{3}-5\right)^2}-\sqrt{\left(3\sqrt{3}+5\right)^2}$;
в) $\sqrt{27(\sqrt{3}-2)^2}-6\sqrt{3}$;	г) $\dfrac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{26}+5\right)^2}}{\sqrt[3]{5-\sqrt{26}}}+\sqrt{26}$.

1.18. Вычислите

а) $\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$;	б) $\left(\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{25}\right)\left(\sqrt[6]{8}-\sqrt{5}\right)$;
в) $\left(7-\left(\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{3}\right)^2\right)\left(7+\left(\sqrt[4]{27}-\sqrt[4]{3}\right)^2\right)$;	г) $\dfrac{\left(\sqrt{11}-1\right)^2+\sqrt{44}}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}$.

***1.19.** Вычислите

а) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;	б) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}$;
в) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}$;	г) $\sqrt{\dfrac{6-4\sqrt{2}}{7-4\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{\sqrt{11-4\sqrt{6}}-\sqrt{8}-\sqrt[6]{27}}$.

***1.20.** Вычислите

а) $\sqrt{\dfrac{6\sqrt{2}-8}{3\sqrt{2}+4}}$;	б) $\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}-4}{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}}$;
в) $\dfrac{\sqrt{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$;	г) $\dfrac{\sqrt{4\sqrt{3}+6}-\sqrt{5\sqrt{3}+6\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$.

****1.21.** Вычислите

а) $\left(1-\sqrt[3]{2}\right)\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$;	б) $\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{36}-3\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\right)\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\sqrt[3]{3}$;
в) $\dfrac{\left(4+\sqrt{2}\right)\left(8^{\frac{2}{3}}-2^{0,5}\right)}{\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{2}\right)}$;	г) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{4}+1-\sqrt[3]{2}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(9^{0,5}-5^{0,5}\right)}$.

1.22. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;	б) $\dfrac{1}{\sqrt{50}+7}+\dfrac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{18}-\sqrt{2}}+\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}$;
в) $\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}+\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;	г) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$.

***1.23.** Вычислите

а) $\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$;	б) $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$;
в) $\sqrt{5-\sqrt{21}}-\sqrt{5+\sqrt{21}}$;	г) $\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$.

****1.24.**

а) При каких целых значениях n число $m=\dfrac{3n+5}{2n+1}$ является целым?	б) При каких целых значениях n число $m=\dfrac{5n^2+13n-1}{n+3}$ является целым?
в) Решите уравнение $2x^2+xy=x+7$ в целых числах.	г) Решите уравнение $x^2+xy-y=2$ в целых числах.

****1.25.** Найдите все целые числа x и y такие, что

а) $x^2-y^2=11$;	б) $x^2=5+4y^2$;
в) $2x^2+2xy+y^2=5$;	г) $2x^2+y^2+2xy+4x=9$.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

• Прежде чем начинать любые вычисления и преобразования, вынесите общий множитель за скобки, приведите подобные слагаемые (№ 2.7—2.11, 2.20).

• Проанализируйте внешний вид выражения. Часто там используется фрагмент формул сокращенного умножения, применение которых позволит упростить задачу (№ 2.21, 2.22, 2.24, 2.53).

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b) \qquad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2}$$

• Полезно квадратные трехчлены раскладывать на множители (§ 5). Это очень часто помогает упростить выражение (№ 2.23, 2.24, 5.1). При этом не забывайте проверить, что вы произвели разложение верно: перемножьте скобки — должен получиться исходный трехчлен.

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c в случае, когда его дискриминант $D=b^2-4ac\geq 0$, можно разложить на линейные множители:

если $D>0$, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$;

если $D=0$, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$.

В случае, когда $D<0$, трехчлен нельзя разложить на множители, но в квадратном трехчлене можно выделить полный квадрат (№ 5.2), т. е. представить его в виде $(Ax+B)^2+C$ (№ 2.43, 2.44).

• Однородные выражения также пытайтесь раскладывать на множители (№ 2.28 и 2.29). Используйте однородность, чтобы найти хорошую связь между переменными (№ 2.33).

• При приведении дробей к общему знаменателю ищите наименьший общий знаменатель. Для этого сначала разложите все знаменатели дробей на множители (№ 2.14, 2.25—2.27).

• Если в задаче (№ 2.33—2.37, 2.59) надо найти значение выражения и задана связь между переменными, обычно не стоит находить сами переменные. Преобразуйте исходные выражения.

• Существенно упростить задачу часто помогает замена переменной (№ 2.50, 2.53—2.55, 2.63).

• Если имеется 4, 6, ... множителей или слагаемых, то стоит попробовать сгруппировать эти множители (слагаемые) по парам и перемножить (сложить) их. Может быть, появится формула сокращенного умножения или возможность сделать замену переменной (№ 2.38).

• В задачах с модулями (№ 2.45, 2.46) анализируйте знаки выражений, находящихся под знаком модуля при допустимых значениях переменных. Это позволит преобразовать выражения по определению модуля (см. справочник).

• В степенных выражениях стоит перейти к степеням с одинаковыми основаниями (№ 2.16—2.19) и затем либо выполнить алгебраические преобразования (вынесение общего множителя за скобки, приведение подобных слагаемых), либо использовать свойства степеней (см. справочник).

• Избавляйтесь от иррациональности в знаменателе дроби умножением числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное знаменателю (№ 2.62, 2.63).

• Если в выражении присутствует корень под знаком корня, то попробуйте преобразовать подкоренное выражение с целью представить его в виде полного квадрата (№ 2.49—2.51).

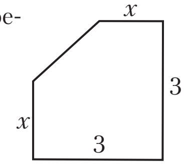
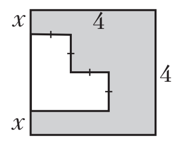
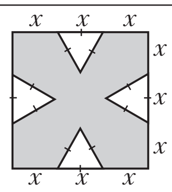
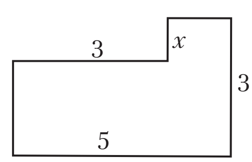
• Помните, что $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $a\geq 0$, но $\sqrt{a^2}=\sqrt[4]{a^4}=\sqrt[6]{a^6}=|a|$, $\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[5]{a^5}=a$, $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$ (№ 2.47—2.52).

• Вынесение/внесение множителя из-под знака корня (с. 288) помогает упростить выражение (№ 2.56—2.58).

2.1.

а) Составьте выражение, которое определяет, на сколько копеек величина 5 руб. 5 коп. меньше величины a руб.	б) Купили a фломастеров по цене 1 руб. 3 коп. за штуку и 132 тетради по цене b коп. за штуку. Составьте выражение, которое определяет, сколько рублей стоит эта покупка.
в) Составьте выражение, которое определяет, во сколько раз величина 2 центнера больше, чем величина a килограммов.	г) Составьте выражение, которое определяет, на сколько процентов величина числа a ($a>17$) больше, чем число 17.

2.2.

а) Составьте выражение для определения площади фигуры. 	б) Составьте выражение для определения площади закрашенной части квадрата. 
в) Составьте выражение для определения периметра закрашенной части квадрата. 	г) Составьте выражение для определения площади фигуры. 

2.3. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые

а) $2a(3x-2a)-3x(2a-1)$;	б) $ab(a-2b)-2ba(b-a)$;
в) $(3+x)(-2y)-(2x-1)(1-y)$;	г) $(2p-q)(2q-p)-(p+1)(1-q)$.

2.4. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые

а) $3y^2\left((2y-1)+y+1\right)-y\left(1-y+y^2\right)-y^2+y$;
б) $a+(2a-c)-a(4a+2)-\left((a+3a)(-a)-c\right)$;
в) $ax(-x-2)+x^2(3-a)-a\left(-2(-x)^2-2x\right)$;
г) $2(x+1)(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2+3x)-(x-1)(1-5x)$.

2.5. Найдите коэффициент при x^2 после преобразования выражения к многочлену стандартного вида

а) $(2x+3)(x^2-2x-1)+2x(x+3)$;
б) $(x^2-x-1)(x^2+x+1)-(x-3)(x^3+2x^2-3x-2)$;
в) $\left(2x^3+3x^2-17x+1\right)\left(x^2+x-1\right)+\left(4x^4+3x^3+2x^2+x+1\right)(3-x)$;
г) $\left(5x^2+5x+\dfrac{3}{x}\right)(-x^3-x)+2x^2(x^{2009}+x^{2008}+x^{2007}+\ldots+x^2+x+1)$.

2.6. Восстановите коэффициент A в произведении

а) $\left(x^2+x+1\right)(x+A)$, если после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых коэффициент при x^2 равен -1;	б) $\left(-x^2+Ax+1\right)(3x-A)$, если после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых коэффициент при x^2 равен 8;
в) $\left(x^2+2x+3\right)\left(x^3+Ax^2\right)$, если после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых коэффициент при x^3 равен 1;	г) $\left(x^2-Ax+2x^3\right)\left(0{,}1x-0{,}25x^2+25x^3\right)$, если после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых коэффициент при x^3 равен 1,8.

2.7.

а) Разложите на множители $ax+ab-yb-xy$.	б) Разложите на множители $cd+xy-xd-yc$.
в) Известно, что многочлен $ab+ac+bx+\ldots$ можно разложить на множители способом группировки, но последнее слагаемое забыли записать. Восстановите это слагаемое.	г) Известно, что многочлен $x^2-xy-xz+\ldots$ можно разложить на множители способом группировки, но последнее слагаемое забыли записать. Восстановите это слагаемое.

2.8. Упростите

а) $\dfrac{xy+y}{y}$;	б) $\dfrac{xy+x}{y+1}$;
в) $\dfrac{xy-x^2}{x(x^2-y^2)}$;	г) $\dfrac{xy+y}{x^2+x}+\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{2a}+\frac{0{,}5}{b}}+\dfrac{xy+x}{y^2-1}$.

2.9. Сократите дробь

а) $\dfrac{2a^2-(-a)^3}{a^3}$;	б) $\dfrac{2a^2-(-3a)^3}{2+27a}$;
в) $\dfrac{(-a)^2+(-a)^3}{a^2-1}$;	г) $\dfrac{a^{-2019}-2a^{-2018}}{a^{-2020}-2a^{-2019}}$.

2.10. Вынесите общий множитель за скобки и упростите

а) $15a^3x^5y^{-2}+9a^2(-x)^3y^{-4}-12a^4x^4y^{-1}z$;	б) $6a^2b^{x+1}-10a^3b^x+4ab^{2x+1}$;
в) $74ab^3c^4+111a^2(-b)^2c^4+148a^2(-b)^3c^3$;	г) $\dfrac{6^{2x+1}a^{3x+2}b^{-2x}+18^xa^{5x-1}b^{-x}+12^{x+1}(ab)^{2(x+1)}}{6^{x+1}a^x+3^xa^{3x-3}b^x+6\cdot 2^{x+1}b^{4x+2}}$.

2.11. Упростите

а) $2^{x}\left(2^{x+1}-8\cdot 2^{x-1}\right)$;	б) $2^{x^2}\left(2^{x^2+2}+20\cdot 2^{x^2-2}\right)$;
в) $\dfrac{2\cdot 3^{x-1}-5\cdot 3^{x+1}}{3^{x}}$;	г) $\dfrac{2^{6x^2+1}+6\cdot 2^{6x^2-1}}{\left(2^{6x}\right)^{x}}$.

2.12. Выразите a из равенства

а) $\dfrac{22}{3a+1}=\dfrac{66}{a-b}$;	б) $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{a-b}{3}$;
в) $\dfrac{3a+b}{0,2}=10-\dfrac{5}{b}$;	г) $\dfrac{\sqrt{2}}{2-5a}=\dfrac{\sqrt{8}c}{b}$.

2.13. Известно, что

а) $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Выразите из этого равенства переменную a через переменные b и c.	б) $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Выразите из этого равенства переменную b через переменные a и c.
в) $a=\dfrac{2b+c}{b}$. Выразите из этого равенства переменную b через переменные a и c.	г) $abc=a+b+c$. Выразите из этого равенства переменную a через переменные b и c.

2.14. Упростите

а) $\dfrac{3a}{a-3}-\dfrac{5+a}{2a-6}\cdot\dfrac{54}{a^2+5a}$;	б) $\dfrac{8a^2-5b^2}{ab}-\dfrac{a-5b}{a}+1$;
в) $\left(\dfrac{2a+6}{a^2-1}-\dfrac{2}{a^2+a}\right):\dfrac{2a+2}{a^2-a}$;	г) $\left(\dfrac{b-5}{b+5}+\dfrac{b+5}{b-5}\right):\dfrac{4b^2+100}{25-b^2}$.

2.15. Упростите

а) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$;	б) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{b}{a^2}}$;
в) $\dfrac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}$;	г) $\dfrac{x}{y}$, если $x=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}$, $y=\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}$.

2.16. Упростите

а) $x^{-\frac{2}{3}}:x^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a^{12}}+\sqrt{b^{0,2}:b^{3,2}\cdot b^{4}}$;	б) $a^{\frac{1}{8}}a^{\frac{1}{2}}+\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^{6}:b^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{c^{\frac{1}{2}}:c^{0,25}}$;
в) $\dfrac{\sqrt[5]{32a^6}\cdot a^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{8\sqrt[5]{a^7}}}$;	г) $\dfrac{\left(x^2\right)^3\left(y^2x^{-1}\right)^2}{0,5x^{-3}y^2}\cdot\left(-x^4y^5\right)$.

2.17. Известно, что

а) $5^x:5^y=25$. Чему равно значение выражения $y-x$?	б) $2^x\cdot 0,5^y=\sqrt{2}$. Чему равно значение выражения $y-x$?
в) $\dfrac{x^{a^2}}{x^{b^2}}=x^{16}$, $x\neq 1$ и $a+b=2$. Чему равно значение выражения $b-a$?	г) $\sqrt{2^x}:0,25^y=4$. Чему равно значение выражения $x+4y$?

***2.18.**

а) Найдите значение n, если $\sqrt{\frac{1}{27}\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}}}=3^{-n}$.	б) Найдите значение a, если $\sqrt[3]{x^{a}\sqrt{x^{-a}\sqrt{\frac{1}{x^{a}}}}}=x^{\frac{1}{12}}$.
в) При каком значении p выполнено условие $25^{-3}(0,2)^{-2}\frac{125^{2}}{5^{p}}=1$?	г) При каком значении p выполнено условие $3^{-\frac{5}{3}}(0,(1))^{-\frac{2}{3}}\frac{243^{2}}{27^{p:9}}=1$?

2.19. Упростите

а) $\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{24}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\right)^{2}:\left(b^{\frac{2}{3}}\cdot\left(b^{-1}\right)^{-2}\right)$;	б) $\frac{\left(\left(a^{2}\right)^{-5}\cdot(a:b)^{5}\right)^{3}}{\left(\left(a^{-2}\right)^{2}(b:a)^{-3}\right)^{4}}$;
в) $\frac{\left(x^{2}y^{-3}\right)^{-8}}{\left(x^{4}y^{6}\right)^{2}}\cdot\frac{\left(x^{2}y\right)^{-4}:\left(x^{-6}y^{3}\right)^{2}}{\left(x^{3}\right)^{-5}y^{7}}$;	г) $\left(\left(\frac{a}{b}\left(\frac{b^{4}}{a^{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right):\left(\frac{a^{2009}}{b^{2010}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^{7}}{b^{2}}}\cdot\frac{b^{2010}}{a^{2009}}\right):\left(\frac{a^{4}}{b}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$.

2.20. Известно, что

а) $a=x^{2/3}-x^{1/3}$, $b=x^{1/3}-1$. Упростите выражение $\frac{a}{b}$.	б) $a=x-5x^{1/6}$, $b=x^{7/6}-5x^{1/3}$. Представьте в виде степени с рациональным показателем выражение $a\cdot b^{-1}$.
в) $a=x-2x^{1/6}$, $b=\sqrt[3]{\sqrt{x^{5}}}-2$. Упростите выражение $\frac{a}{b}$.	г) $a=2b^{1-x}+\frac{3}{b^{x}}$, $c=2b+3$, $d=b^{x}$. Упростите выражение $\frac{a}{c}:d$.

2.21. Разложите на множители

а) $(x+y)^{2}-9a^{2}$;	б) $(2x-y)^{2}-4z^{4}$;
в) $(x-y-z)^{2}-2z^{2}$.	г) Сократите $\frac{x^{4}+6x^{2}+9-y^{4}}{(x+y)^{2}-2xy+3}$.

2.22. Разложите на множители

а) $a^{2}+b^{2}-2ab-c^{2}$;	б) $a^{4}+4a^{2}b+4b^{2}-4c^{2}$;
в) $a^{2}-1+b(b+2a)$;	г) $(101-288x)^{2}-2\left(101^{2}-288^{2}x^{2}\right)+(101+288x)^{2}-100$.

2.23. Сократите дробь

а) $\frac{2x^{2}+x-1}{3x-2x^{2}-1}$;	б) $\frac{x+1-2x^{2}}{-4x+1+3x^{2}}$;
в) $\frac{3-2\cdot 9^{x}-3^{x}}{2\cdot 3^{2x}+5\cdot 3^{x}+3}$;	г) $\frac{\sin x(6\sin x+5)+1}{6\sin^{2}x-1+\sin x}$.

2.24. Разложите на множители

а) $a^{2}+2ab+b^{2}+3(a+b)+2$;	б) $a^{2}+b^{2}-2ab-a+b-2$;
в) $4a^{2}+b^{2}-4ab-6a+3b+2$;	г) $\left(x^{2}+x+1\right)\left(x^{2}+x+2\right)-6$.

2.25. Упростите

а) $\frac{5}{x+3}-\frac{3x+5}{x^{2}-9}+\frac{1}{x-3}$;	б) $\frac{x+3}{2x+2}-\frac{x+1}{2x-2}+\frac{2}{x^{2}-1}$;
в) $\frac{1}{x-2}-\frac{2x-1}{x^{2}-4}-\frac{2}{x+2}$;	г) $\frac{2x}{x^{2}-1}:\left(\frac{1}{x^{2}+2x+1}-\frac{1}{1-x^{2}}\right)$.

2.26. Упростите

а) $\frac{2}{x-3}-\frac{3x+1}{x^2+x-12}-\frac{3}{x+4}$;	б) $\frac{x}{x+2}-\frac{(x-2)^2}{2}\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4(1-x)}\right)$;
в) $\left(\frac{2x-1}{x^2+2x+4}+\frac{1}{x-2}+\frac{9x+6}{x^3-8}\right)\cdot\left(x^2-4\right)$;	г) $\left(\frac{1}{x^2-4x}+\frac{2}{16-x^2}+\frac{1}{16+4x}\right)\cdot\left(1+\frac{8}{x-4}\right)^2+$ $+\frac{2}{4x-x^2}$.

***2.27.** Упростите

а) $\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}$;	б) $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{2x}{1+x^2}-\frac{4x^3}{1+x^4}$;
в) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}$;	г) $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}$.

2.28. Разложите на множители

а) $x^2+xy-2y^2$;	б) $3x^2-xy-4y^2$;
в) $x^3-2x^2y+2xy^2-y^3$;	г) $4^x+2^{x+1}\cdot 3^x-3^{2x+1}$.

***2.29.** Сократите дробь

а) $\frac{(2x-1)^2+2(4x^2-1)+(2x+1)^2}{(2x^2+1)^2-(2x^2-1)^2}$;	б) $\frac{(2-3x)^2-4(9x^2-4)+4(2+3x)^2}{(2-3x)^2-4(2+3x)^2}$;
в) $\frac{(x^2+1)^2+(x-1)(x^2+1)-2(x-1)^2}{x^2+2x-1}$;	г) $\frac{(x+1)^2+3(x^3+1)+2(x^2-x+1)^2}{2x^2-x+3}$.

2.30. Сократите дробь

а) $\frac{x^2-1+xy+y}{x+1}$;	б) $\frac{25x^2-9y^2+6y-10x}{5x+3y-2}$;
в) $\frac{x^2-y^2+2x+2y}{x-y+2}$;	г) $\frac{2x^2+y^2+3xy+4x+2y}{2x+y}$.

2.31. Решите уравнение

а) $2x^3+7x^2+7x+2=0$;	б) $2x^3-x^2+2x-1=0$;
в) $4-6x+2x^2-3x^3=0$;	г) $3x^3+4x^2+4x+1=0$.

2.32. Сократите дробь

а) $\frac{1-6y+12y^2-8y^3}{4y^2-4y+1}$;	б) $\frac{1+3a+3a^2+a^3}{1+2a+a^2}$;
в) $\frac{1-a^3-3a+3a^2}{1-a(2-a)}$;	г) $\frac{a^4-1}{a^3+a^2+a+1}$.

***2.33.** Известно, что

а) $\frac{a+2b}{2a-b}=-7$. Вычислите значение выражения $\frac{2a^2+ab+b^2}{b^2-2a^2}$.	б) $\frac{3a^2+ab-b^2}{a^2+b^2-ab}=3$, $ab>0$. Вычислите значение выражения $\frac{a+2b}{a-2b}$.

в) $\dfrac{2a+3b}{a+b}=1$. Вычислите значение выражения $\dfrac{a^3+3b^3}{ab^2+2ba^2}$.	г) $\dfrac{b^2-a^2+ab}{a^2+b^2}=3^{-\log_3 2}$. Вычислите значение выражения $\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$.

2.34. Известно, что

а) $a+\dfrac{1}{a}=3$. Вычислите $a^2+\dfrac{1}{a^2}$.	б) $a-\dfrac{2}{a}=2$. Вычислите $a^3-\dfrac{8}{a^3}$.
в) $x+\dfrac{1}{x}=3$. Вычислите $\dfrac{(x^2+3x+1)(x^2-4x+1)}{x^2}$.	г) $\dfrac{a^4+9}{a^2}=7$, $a<-\sqrt{3}$. Вычислите $a-\dfrac{3}{a}$.

***2.35.** Известно, что

а) $ab>0$. Вычислите минимальное значение выражения $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)$.	б) $x>0$. Вычислите минимальное значение выражения $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$.
в) $xy<0$. Вычислите максимальное значение выражения $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$.	г) $b<0$. Вычислите максимальное значение выражения $\left(3b+\dfrac{1}{b}\right)$.

***2.36.** Вычислите значение выражения

а) xy, если известно, что $x-y=\sqrt{111}$, $x+y=\sqrt{37}$;	б) x^2+y^2, если известно, что $x-y=\sqrt{11}$, $xy=3$;
в) xy, если известно, что $2x-y=\sqrt{3}$, $2x+y=\sqrt{27}$;	г) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, если известно, что $x+y=\sqrt{37}$, $x^2+y^2=33$.

2.37. Вычислите значение выражения

а) x^3y+xy^3, если известно, что $x-y=4$, а $xy=3$;	б) $a^2+b^2+c^2$, если известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=5$;
в) xyz, если известно, что $xy=12, xz=4, yz=3, y<0$;	г) $ab+bc+ac$, если известно, что $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$.

***2.38.** Вычислите значение выражения

а) $a(a-1)(a-2)(a-3)$ при $a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$;	б) $(b+1)(b+2)(b+3)(b+4)$ при $b=\dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}$;
в) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{a+3}$ при $a=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$.	г) Используя формулу Герона, найдите площадь треугольника со сторонами длины $\sqrt{20}$, $\sqrt{13}$, 7.

****2.39.** Методом неопределенных коэффициентов найдите коэффициенты a, b, c

а) $\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}$;	б) $\dfrac{1}{(x+1)(2x+1)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{2x+1}$;
в) $\dfrac{x^2+6x+7}{(1+x)(2+x)(3+x)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{x+3}$;	г) $\dfrac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x-3}$.

2.40. Выделите целую часть в дроби

а) $\dfrac{2x-5}{x-1}$;	б) $\dfrac{5x+3}{2x+1}$;
в) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$;	г) $\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$.

****2.41.**

а) Разделите многочлен x^3+x^2+x+1 на многочлен $x-2$.	б) Разделите многочлен $x^4-3x^3-x^2+4x-2$ на многочлен x^2-1.

в) Разделите многочлен $2x^3-x^2+x-1$ на многочлен $x+1$.	г) Чему равны коэффициенты p и q, если многочлен $2x^3+x^2+px+1$ делится без остатка на многочлен x^2+x+q?

***2.42.** Какое число надо прибавить к многочлену, чтобы его можно было представить в виде квадрата некоторого двучлена?

а) $4x^4+4x^2-1$;	б) $x^2y^2-8xy+4$;
в) $81a^2b^{-2}-18\dfrac{a}{b}-2$;	г) $4x^2+x$.

***2.43.**

а) Представьте многочлен $x^2-4xy+5y^2$ в виде суммы квадратов двух выражений.	б) Выделите полный квадрат в выражении $x^2+y^2+2xy+2x+2y-1$.
в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $4x^2+y^2+4xy+4$?	г) Какое наибольшее значение может принимать выражение $1-a^2-b^2-2ab$?

****2.44.** Представьте многочлен

а) $2a^2+2b^2$ в виде суммы квадратов двух двучленов;	б) $3a^2+2$ в виде суммы квадратов трех выражений;
в) $2n+1$ в виде разности квадратов двух выражений;	г) $3a^4+1$ в виде суммы квадратов трех двучленов.

2.45. Упростите

а) $\left\|x^2+100\right\|+\left\|x^2-x+2\right\|-\left\|-2x^2\right\|$;	б) $\left\|\|x\|+1\right\|-\sqrt{x^2}$;
в) $\|2-\pi\|-\|e-3\|$;	г) $-\|\sin x-1\|-\left\|2^{x^2}-1\right\|$.

2.46. Упростите

а) $\|-x\|-\|x-1010\|$ при $2000<x<2020$;	б) $\|100-x\|-\|-x\|$ при $x\in(-10;-8)$;
в) $\|(x-1)(10-x)\|+2\|x-1\|-3\|10-x\|$ при $x>10$;	г) $\left\|\log_2\|x-1\|\right\|-\left\|\log_2\dfrac{1}{1-x}\right\|$ при $x\in(0;1)$.

2.47. Вынесите множитель из-под знака корня

а) $\sqrt{36x^6y^4}$, если $\dfrac{1}{x}<0$;	б) $2\sqrt{x^2}+3\sqrt[3]{x^3}-4\sqrt[4]{x^8}$ при $x<0$;
в) $\sqrt{(2x-2{,}1)^2}-2{,}1-\sqrt{\sqrt{25x^4}}$ при $-2<x<-1$.	г) При каких значениях a выполняется равенство $\sqrt{a^2}+\sqrt[4]{a^4}+2a=0$?

***2.48.** Упростите

а) $\sqrt{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)^2}$;	б) $\sqrt[8]{\left(\left(-1-x^2\right)^4\right)^2}$;
в) $\sqrt[6]{\left(\log_{\lg 11}(1-x^2)\right)^6}$;	г) $\dfrac{\sqrt{5+\left(\dfrac{x^2-5}{2x}\right)^2}}{\left(x^2+5\right):x}$.

***2.49.** Упростите

а) $\sqrt{a^2-6a+9}+\sqrt{a^2-12a+36}$ при $3<a<6$;	б) $\sqrt{x^2-8x+16}-\|-x\|$ при $x\in[1;4]$;
в) $\sqrt{(a-1)^2+4a}+\sqrt{a^2+2+2\sqrt{2}a}$;	г) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ при $x=\dfrac{2009+\sqrt{2008}}{2}$.

***2.50.** Упростите

а) $\sqrt{25^a + 5^a \cdot 2^{b+1} + 4^b}$;	б) $\sqrt{1+\log_2 x^2 + \log_2^2 x}$ при $x \geq 0,5$;
в) $\sqrt{\sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x}$;	г) $\sqrt{2009^0 + x^{1+\log_{x^2} 4} + 81^{\log_9 x}}$.

***2.51.** Найдите значение выражения

а) $\sqrt[4]{a^2 + 2\sqrt{2}a + 2} \cdot \sqrt{a - \sqrt{2}}$ при $a = \sqrt{3}$;	б) $\sqrt{a + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{a^2 - 2\sqrt{3}a + 3}$ при $a = \sqrt{7}$;
в) $\sqrt[4]{a + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[8]{a^2 - \sqrt{28}a + 7}$ при $a = \sqrt{23}$;	г) $\sqrt[4]{a + \sqrt{5}} \cdot \left(\sqrt[8]{a^2 - \sqrt{20}a + 5} + \sqrt[4]{a - \sqrt{5}}\right)$ при $a = \sqrt{21}$.

2.52. Упростите

а) $\sqrt[6]{x^3} + \sqrt[3]{x^6} + \sqrt{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$;	б) $x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^2} + x^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{-x^4}$;
в) $x^{\frac{5}{4}} : \sqrt[4]{x^3} - \sqrt[7]{-x} : \left(\left(x^2\right)^{-\frac{3}{7}}\right)$;	г) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} - \sqrt{-\sqrt[3]{-a}} + \sqrt[4]{a^3}\, a^{\frac{1}{4}} - \sqrt[3]{(-a)^4} : a$.

2.53. Упростите

а) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;	б) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x-1}$;
в) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+9}{x-81}$;	г) $\dfrac{\sqrt{x}-4}{x^{\frac{1}{4}}-2}$.

2.54. Сократите дробь, упростите

а) $\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{x-\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}}$;	б) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}$;
в) $\dfrac{x+\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$;	г) $\left(1+\dfrac{2}{a^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$ при $a > 0$.

2.55. Упростите

а) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right) : \sqrt{\dfrac{b}{a}}$;	б) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} : \left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} - \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right)$;
в) $\left(\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2} + \dfrac{8\sqrt{a}}{a-4}\right) : \dfrac{\sqrt{a}+2}{a-2\sqrt{a}}$;	г) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \dfrac{4\sqrt{a}}{a-1}\right) : \dfrac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}}$.

2.56. Вынесите множитель из-под знака корня

а) $\sqrt{-16a^3}$;	б) $\sqrt{-8(x-1)^5}$;
в) $\sqrt[4]{-32y^5}$;	г) $\sqrt{\sqrt{-y^7} - \sqrt[3]{-y^7}}$.

2.57. Внесите множитель под знак корня

а) $x\sqrt{-x} - x\sqrt[3]{-x}$;	б) $x\sqrt{x} - x\sqrt[3]{x}$;
в) $(2-x)\sqrt{2x-4}$;	г) $x\sqrt{-x-3} + (x+1)\sqrt{-x-4}$.

2.58. Упростите

а) $b:\sqrt{-b}$;	б) $\dfrac{\sqrt{ab}+a}{\sqrt{-a}}$;
в) $\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}}-1$;	г) $\sqrt{\sqrt{-2a}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{a}{\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[4]{2}$.

2.59. Вычислите

а) $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$, если $\sqrt{a}+\sqrt{a+1}=2$;	б) $\sqrt{a-2}+\sqrt{a}$, если $\sqrt{a}-\sqrt{a-2}=1$;
в) $\sqrt{a+2}+\sqrt{a}$, если $\sqrt{3^{-1}}\sqrt{9a}-\sqrt{3a+6}=-1$;	г) $\sqrt[3]{1-a}\sqrt[3]{a-2}$, если $\sqrt[3]{1-a}+\sqrt[3]{a-2}=-0{,}5$.

***2.60.** Упростите

а) $ab\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{a+b}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right)\left(\dfrac{(a+b)^2}{ab}\right)^{-1}$;	б) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)^{-1}(b+a)^2+\left(a^4+b^4-2a^2b^2\right)\left(b^2-a^2\right)^{-2}$;
в) $\dfrac{a^2+b(b-2a)}{b^2-a^2}+\dfrac{a-b}{b+a}-$ $-(a(a+1)-b(b+1))\cdot(a+b+1)^{-1}$;	г) $\left(\sqrt{ab}+\dfrac{ab}{a-\sqrt{ab}}\right):\dfrac{a}{a-b}-\sqrt{a}\sqrt{b}$.

2.61. Упростите

а) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2\right)\left(\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{x}{x-y}\right)^{-1}$;	б) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}:\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}+\dfrac{a^2}{b^2-ab}-\dfrac{b^2}{a^2+ab}\right)$;
в) $\left(\dfrac{a}{1+\sqrt{a}}+\dfrac{a}{1-\sqrt{a}}-2\cdot\dfrac{1+a^2}{1-a^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2}\right)$;	г) $\left(\dfrac{(a+b)^2}{a-b}-4\cdot\left(\dfrac{a-b}{ab}\right)^{-1}\right):\dfrac{a^3-b^3}{(a+b)^2-ab}$.

***2.62.** Упростите

а) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+2}}\right):\left(\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}\right)$;	
б) $\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\right)\left(\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-1}\right)^{-1}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)^{-1}\right)$;	
в) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$;	г) $\dfrac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}+1}\sqrt[4]{x}+1$.

***2.63.** Упростите

а) $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2a^{\frac{3}{2}}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b^{\frac{3}{2}}}+3\dfrac{\sqrt{ab}-b}{a-b}$;	б) $\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy^{\frac{1}{2}}-yx^{\frac{1}{2}}}\right)\dfrac{x\sqrt{xy}}{x+y}-\dfrac{2y}{x-y}$;
в) $\left(\dfrac{x^{1,5}+y^{-1,5}}{x^{0,5}+y^{-0,5}}-x^{0,5}y^{-0,5}\right)\left(x-y^{-1}-2\dfrac{y^{-0,5}-x^{-0,5}y^{-1}}{x^{-0,5}}\right)^{-1}$;	
г) $\dfrac{1}{mn}\left(\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}-\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right)\left(\dfrac{\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{\sqrt{m^{-1}}+\sqrt{n^{-1}}}\cdot\dfrac{1}{mn}\right)^{-1}$.	

3. ЛИНЕЙНЫЕ И ПРИВОДЯЩИЕСЯ К НИМ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА

Решением, или ***корнем***, ***уравнения*** называется такое число, при подстановке которого вместо переменной в обе части уравнения получается верное равенство, то есть при этом обе части уравнения определены (одновременно имеют смысл) и их значения совпадают. ***Решить уравнение*** — значит найти все его корни (решения) или доказать, что оно решений не имеет.

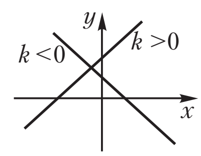
Решением неравенства с одной переменной называется число, подстановка которого вместо переменной в данное неравенство обращает его в верное числовое неравенство. ***Решить неравенство*** — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Прежде чем начинать любые вычисления и преобразования, вынесите общий множитель за скобки, приведите подобные слагаемые (№ 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.8), чтобы получить **линейное уравнение в общем виде**:

$$\boxed{ax = b,}$$

где a и b — действительные числа или выражения, зависящие от параметров, а x — неизвестное. В зависимости от значений выражений a и b линейное уравнение либо имеет единственный корень (при $a \neq 0$ получим $x = \frac{b}{a}$), либо имеет корнями все действительные числа (принимает вид $0 \cdot x = 0$), либо вообще не имеет решений (если $a = 0$ и $b \neq 0$) (№ 3.20).

Графиком линейной функции $y = ax + b$ является прямая (№ 3.3, 3.6, 3.7, 3.19). Эту прямую можно построить, вычислив координаты двух любых точек, принадлежащих ей. Например, $x = 0$, $y = b$ и $x = 1$, $y = a + b$.



Неравенства вида

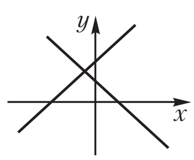
$$\boxed{ax > b,\ ax < b,\ ax \geq b,\ ax \leq b,}$$

где a и b — действительные числа или выражения, зависящие от параметров, а x — неизвестное, называются ***линейными*** неравенствами. Решение линейного неравенства зависит от значений коэффициентов a и b (№ 3.24, 3.25). Решением каждого из них может быть либо неограниченный промежуток, либо вся числовая прямая, либо пустое множество.

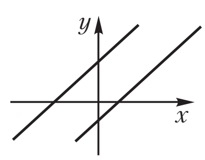
Решением системы уравнений с двумя неизвестными называется упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, являющаяся *одновременно* решением всех уравнений в системе. ***Решить систему*** — это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Основными методами решения системы уравнений являются метод подстановки и метод исключения неизвестных (№ 3.12–3.17). Часто система приводится к линейной после замены переменных (№ 3.18, 3.14).

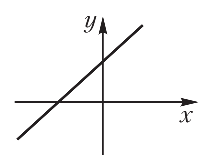
Рассмотрим графическую интерпретацию системы $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$. Каждому уравнению системы на плоскости xOy соответствует прямая, а самой системе — пара прямых. Если прямые пресекаются, то система имеет единственное решение. Если прямые параллельны, то у системы нет решений, а в случае совпадения прямых система имеет бесконечно много решений (№ 3.21).



одно решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$



нет решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$



бесконечно много решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Решением системы неравенств с одной неизвестной называется число, являющееся *одновременно* решением всех неравенств в этой системе. Обычно решается каждое из неравенств в системе и записывается в ответе пересечение полученных множеств решений (№ 3.27—3.30).

3.1. Решите уравнение

а) $2x + 5 = 7x - 2(x + 3) + 2$;	б) $\frac{8x - 7}{3} = \frac{12x + 3}{5}$;
в) $\frac{3}{2}(x + 2) - \frac{1}{2}(4 - x) + \frac{x}{2} = 3\left(\frac{x}{2} - 3\right)$.	г) Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций $f(x) = \frac{1}{4}(3 - x) - \frac{3}{4}(2 + x) - x$ и $g(x) = 5\left(2 - \frac{x}{2}\right) - 7$.

3.2. Решите уравнение

а) $x(2x-1)+(2x+1)(1-x)=2x-2;$	б) $(x-1)(x^2+x+1)-(x+1)(x^2-x+1)=x-2;$
в) $x^3+(x+1)(x+2)=x\left(\dfrac{5}{x}+x+x^2\right);$	г) $\dfrac{17}{7}-\dfrac{3x^2+2x}{3}=\dfrac{3-7x^2}{7}.$

3.3. Найдите координаты точки пересечения прямой, заданной уравнением

а) $y=\dfrac{7x-2}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$, с осью Ox;	б) $y=\dfrac{3x}{\sqrt{2}}+5$, с осью Oy;
в) $y=\dfrac{3x+2}{\sqrt{\sqrt{\sin 111^\circ}+\sqrt{\cos 1000^\circ}}}$, с осью Ox;	г) $y=\dfrac{x}{\ln 2009}-1$, с осью Oy.

***3.4.** Решите уравнение

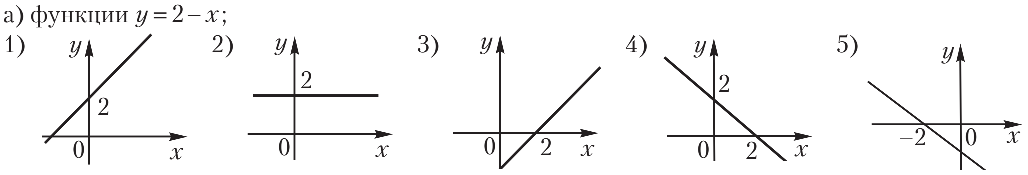
а) $x\cdot\left(7{,}605:7\dfrac{1}{2}+30{,}86\cdot0{,}1\right)=3{,}3+0{,}84\left(6\dfrac{8}{9}:2\dfrac{7}{12}-\dfrac{5}{12}\cdot4\dfrac{4}{35}\right);$	
б) $\sqrt{15}x=\dfrac{\sqrt{3^7\cdot75}}{\sqrt[3]{15}};$	в) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}}{\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{3+\sqrt{8}}}\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)=\dfrac{x-4\sqrt{2}}{\sqrt{8}};$
г) $\dfrac{x}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}-\dfrac{x}{\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}=\left(\dfrac{7}{3}-\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{1}{13}+0{,}5\right).$	

3.5.

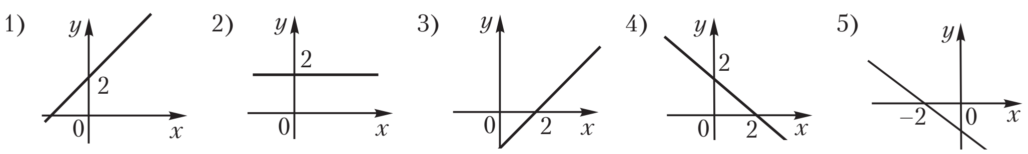
а) При каком значении x график функции $f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}$ пересекает ось абсцисс?	б) Решите уравнение $\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{3}{3-x}$.
в) Решите уравнение $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}=\cos 90^\circ$.	г) Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций $y=\dfrac{21}{x-3}$ и $y=\dfrac{5}{2-x}$.

3.6. Укажите рисунок, на котором изображен график

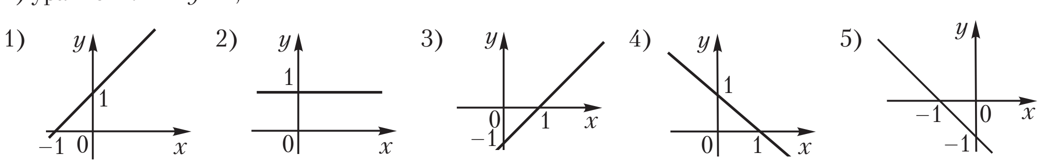
а) функции $y=2-x$;



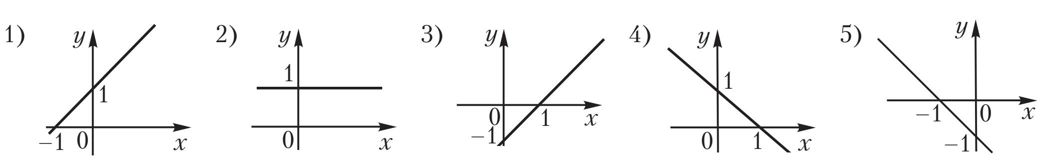
б) функции $y=2$;



в) уравнения $x-y=1$;



г) который не пересекается с графиком функции $y=2019-x$.



3.7.

а) Запишите уравнение прямой, которая проходит через точки $A(2;\,1)$ и $B(-1;\,-1)$.	б) Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку $A(1;\,1)$ и отсекает от положительной полуоси ординат отрезок длины 2.
в) Запишите уравнение прямой, которая отсекает от положительного направления осей координат отрезки длины 3.	г) Запишите уравнение прямой, параллельной прямой, заданной уравнением $2x+y=5$ и проходящей через точку $(4;\,1)$.

3.8. Решите уравнение

а) $\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{3x+5}{x^2-9}+\dfrac{1}{x-3}=0;$	б) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2x-1}{x^2-4}=\dfrac{2}{x+2};$
в) $\dfrac{9x}{x-3}+\dfrac{x}{x^2-9}=3^{\log_5 25}.$	г) При каком значении x функция $f(x)=\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{3x+1}{(x-3)(x+4)}-\dfrac{3}{x+4}$ принимает значение, равное 0?

3.9.

а) Известно, что $5x-7=3y+b$ и $5y-7=3x+c$. Если число b меньше, чем c, на 2, то чему равно $x-y$?	б) Известно, что сумма двух чисел x и y равна $4+a$. Если $2x-4y=5+a$, то на сколько b меньше, чем a?
в) Известно, что при $a=1$ и $a=-2$ значение выражения $6a^3+4a^2-ab+c$ равно 0. Найдите b и c.	г) Известно, что при $a=-1$ значение выражения $6a^3+4a^2-ac-b$ равно 0. Найдите значение выражения $b-c$.

***3.10.**

а) Если число A увеличить в 2 раза, то оно станет на 30 больше, чем половина исходного числа A. Найдите A.	б) Известно, что числитель дроби на 2 больше знаменателя. Если от дроби отнять $\dfrac{1}{3}$, то получим дробь с прежним знаменателем и числителем, на 1 большим, чем знаменатель. Найдите исходную дробь.
в) Если 30 % от числа A больше на 3, чем число A, уменьшенное на 80 %, то чему равно A?	г) Вкладчик снял со счета в банке четверть своих денег, потом $\dfrac{4}{9}$ оставшихся денег и еще 64 у. е. После этого у него осталось на счете $\dfrac{3}{20}$ всех денег. Сколько денег (в у. е.) было на счете первоначально?

***3.11.** Известно, что

а) $f(x)=3x+2$. При каком значении x верно равенство $f(2x+1)=f(3x-1)$?	б) $f(x)=2x-1$. При каком значении x верно равенство $f(2x-3)==f(3x+1)$?
в) $f(x)=\dfrac{3x-3}{2}$. При каком значении x верно равенство $f(2x)=13{,}5$?	г) $f(x)=\dfrac{x+23}{2}$. При каком значении x верно равенство $2f(3x)=3f(2x)$?

3.12. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases}3x+2y=5,\\3x=4-y;\end{cases}$	б) $\begin{cases}-5x+3y=8,\\2y=5+3x;\end{cases}$
в) $\begin{cases}(y+1)(2x-1)=2xy+y+3,\\2x+y=6(y+\operatorname{tg}45°)-x;\end{cases}$	г) $\begin{cases}2^{3x+4y}=4\cdot 2^x,\\2y=2019^0-(2x+y).\end{cases}$

3.13. Найдите

а) точку пересечения прямых $y=x-11$ и $x=4y+2$ и укажите в ответе сумму ее координат;	б) точку пересечения прямых $2y+5x=11$ и $x+y=2(5-y)$ и укажите в ответе среднее арифметическое ее координат;
в) площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=4y+20$, $3x+8y=0$ и осью ординат;	г) площадь четырехугольника, ограниченного прямыми $y+3x=3$, $y+2x=6$ и осями координат.

3.14. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{x-1}{y+2}=\dfrac{1}{6}; \end{cases}$	б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{3y-1}, \\ \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{2y+3}{5}; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \dfrac{x+y+4}{5}+\dfrac{x-y-4}{7}=9, \\ \dfrac{x+y+4}{5}-\dfrac{x-y-4}{7}=1; \end{cases}$	г) $\begin{cases} \dfrac{2x+y+4}{2}+\dfrac{x-2y-4}{3}=1, \\ \dfrac{x+2y+4}{3}-\dfrac{x-3y-4}{2}=-1. \end{cases}$

3.15. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x+y=2, \\ 4x=1-4y; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x+3y=2, \\ x+1{,}5y=2; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 2019^{3x+y}=2019, \\ 900x+290y=3000-10y; \end{cases}$	г) $\begin{cases} x(x-y+2)=x^2-xy+y+2019^{\log_5 1}, \\ 40x-y=19y+21. \end{cases}$

3.16. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} 2x+5y=2, \\ 4x=4-10y; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 5x+1=2y, \\ 4y-2=10x; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ 9x-3=6y; \end{cases}$	г) $\begin{cases} -5x+2y=3, \\ \lg 4y=\lg(6+10x). \end{cases}$

3.17. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x(x+1)+2y+1=x^2+2-(x+y), \\ 4x+y=2-5y; \end{cases}$	б) $\begin{cases} (y+1)(x-1)=xy+1+y, \\ x=4(y-1)-x; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 1+(x+y)(y+1)=y^2+xy+3, \\ 2(x-1)+y=4+2y-x; \end{cases}$	г) $\begin{cases} x(x+y)-y(1-x-y)=(x+y)^2-x+1, \\ 2x+y=3(1+y). \end{cases}$

3.18. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} 3x^{-1}-5y^{-1}=1, \\ 2x^{-1}+\dfrac{1}{2y}=4{,}5; \end{cases}$	б) $\begin{cases} \dfrac{2}{x+y}+\dfrac{9}{2x+y}=2, \\ \dfrac{4}{x+y}=\dfrac{12}{2x+y}-1; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 2x^2-y^2=7, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$	г) $\begin{cases} \lg\lvert x\rvert-3\lg y+3=0, \\ \lg x^2+\lg y=1. \end{cases}$

****3.19.** Найдите, при каких значениях параметра a[1]

а) прямая $y=2ax-a^2+1$ проходит через точку с координатами $(-1;-7)$;	б) уравнение $2\left(a^2+2a-1\right)x=a+2+x$ имеет корень $x=1$;
в) уравнение $ax+4a=x+4(x(x-1)-x^2+x+1)$ имеет корень, равный a;	г) и параметра b пара чисел $(1;\,2)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} (a-1)x-by=a-3b, \\ bx+(b+1)y=a+2b. \end{cases}$

[1] Задачи с параметрами в ЦТ вам не встретятся, но они могут быть легко переформулированы так, что термин «параметр» не будет упоминаться (см., например, задачу В12 из тренировочного теста 6).

****3.20.** Найдите, при каких значениях параметра a

а) график функции $y=a^2x+a+2(1-2x)$ лежит целиком выше оси абсцисс;	б) график функции $y=-a(2x-a)+3(x-1)-2a$ не пересекает ось Ox, и в ответе укажите их произведение;
в) уравнение $\frac{8}{3a}-\frac{x}{a}+(2+3a)x-7=3a$ не имеет решений;	г) уравнение $\frac{8-3x}{a}+(2+a)x=7+a$ имеет более одного решения.

****3.21.** Найдите, при каких значениях параметра a

а) система $\begin{cases}x+ay=1,\\ax-3ay=2a+4\end{cases}$ не имеет решений;	б) система $\begin{cases}3x+7y=20,\\ax+14y=15\end{cases}$ имеет единственное решение;
в) система $\begin{cases}(a+1)x+8y=4a,\\ax+(a+3)y=3a-1\end{cases}$ имеет бесконечно много решений;	г) и параметра b система уравнений $\begin{cases}a^2x-ay=1-a,\\ax+(3-2b)y=a+3\end{cases}$ имеет единственное решение.

3.22. Решите неравенство

а) $\frac{2x-1}{5}\geq 2+\frac{2x-2}{3}$;	б) $5x<\frac{2x+48}{-2}$;
в) $7+\frac{8x-2}{11}-\frac{5x+1}{2}<\sin 90°$.	г) При каких значениях x график функции $y=\frac{3-7x}{7\cos 0}-\frac{8+9x}{-\sqrt{81}}$ лежит ниже оси абсцисс?

3.23. Решите неравенство

а) $(x^2-x-1)(x+1)>x(x^2+2)-4$;	б) $(x-3)x^2+1\geq x^3-3(x^2-x)-5$;
в) $(x-1)(x-2)(x+1)>x^2(x+2)-4(x^2-1)$.	г) Найдите, при каких значениях x график функции $y=\frac{x(3x^2-2x+1)}{7}$ расположен не выше, чем график $y=\frac{3x^3+2x}{7}-\frac{4x^2-3x}{14}+1$.

3.24. Решите неравенство

а) $(4-\sqrt{17})(3x-9)<0$;	б) $(\sqrt{15}-4)(2x-6)\geq 0$;
в) $3\sqrt{13}(2x-3)>11(2x-3)$;	г) $(\log_2 5-2)(\sin 2009°-1)(2x+3)\geq 0$.

***3.25.** Решите неравенство

а) $(\sin 1000°-1)x\leq 1-\sin 10\,000°$;	б) $(\sqrt{5}-\sqrt{6})x>\sqrt{5}-\sqrt{6}$;
в) $(2^{\sqrt{3}}-4)x\geq 2^{\sqrt{3}}-4$;	г) $x\log_{0,2}20>\log_5 0{,}05$.

***3.26.** Решите неравенство

а) $\frac{\left(11185\frac{7}{30}-11183\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{2\frac{1}{5}}x\leq 1$;	б) $\frac{x\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}03}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}>10^3$;
в) $\frac{3333\cdot 4444-3334\cdot 4443}{111}(x-1)>10$;	г) $\frac{\overbrace{99\ldots 9}^{100\text{ цифр}}}{\underbrace{99\ldots 9}_{50\text{ цифр}}}x<\underbrace{100\ldots 00}_{51\text{ цифра}}+1$.

3.27. Решите систему неравенств

а) $\begin{cases} x-1>2(x+1), \\ x+5\geq 0; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2(x-3)>3(x-2), \\ 5-x\geq 10; \end{cases}$
в) $\begin{cases} -3(x-3)<4(x+2), \\ 2^{1-x}\geq 4; \end{cases}$	г) $\begin{cases} -4(x+x^2-3)\leq 5(x-3)-4x^2, \\ (x+1)(x-2)<x^2-1. \end{cases}$

3.28. Решите двойное неравенство

а) $-1\leq \frac{7-2x}{3}<5$;	б) $1\leq \frac{5+3x}{-2}<2$;
в) $6<\frac{3x-7}{5}-\frac{2-3x}{2}\leq 8$;	г) $-2<\frac{4-3x}{-2}<-1$.

3.29. Найдите область определения функции

а) $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}+2\sqrt{5-x}}{x-2}$;	б) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{x+3}}{x+1}$;
в) $f(x)=\frac{\sqrt{6x-5}}{\sqrt{7x-8}\lvert x-2\rvert}$;	г) $f(x)=\frac{\log_{\lvert x-1\rvert}(x+3)^2}{\sqrt{3-x}\sqrt{2x-5}}$.

3.30. Решите систему неравенств

а) $\begin{cases} 3x-15\geq x-13, \\ 2x+10<3x+11, \\ 7-5x>-2x-2; \end{cases}$	б) $\begin{cases} \frac{3x-1}{3}-\frac{4x-2}{5}>\frac{2}{15}, \\ \frac{2x-1}{2}-\frac{6x-1}{3}\leq 4-2x; \end{cases}$
в) $\begin{cases} (2\sqrt{2}-3)(x+1)<0, \\ 1-2x<3(2x-1), \\ 3x+5<11-2(1-x); \end{cases}$	г) $\begin{cases} \frac{x+1}{2}-\frac{8-7x}{10}>1-\frac{7-4x}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}, \\ (\cos 1260^\circ+1)(1260x-1)\geq 0, \\ \frac{(x-2)^2+1}{5}+\frac{x}{2}\leq \frac{2(x-2)^2+1}{10}+\frac{x+1}{2}+x-3. \end{cases}$

4. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, где a, b, c — некоторые действительные числа или выражения, зависящие от параметров, называется ***квадратным***, а выражение $ax^2 + bx + c$ — ***квадратным трехчленом***. Корни квадратного уравнения находят по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется ***дискриминантом*** квадратного уравнения.
Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня;
если $D = 0$, то уравнение имеет два совпадающих действительных корня;
если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

В случае, когда второй коэффициент квадратного уравнения четный, то есть $b = 2k$, корни (они существуют, если $D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac \geq 0$) удобно находить по формуле: $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$.

Неполные квадратные уравнения (№ 4.5), в которых $c = 0$, удобно решать методом разложения на множители левой части уравнения, то есть $x(ax + b) = 0$.

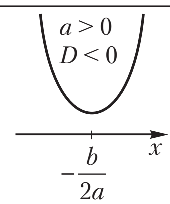
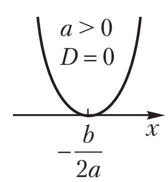
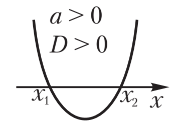
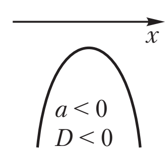
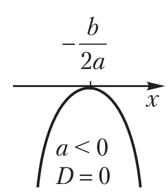
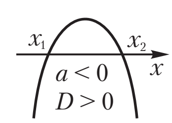
Неполные квадратные уравнения (№ 4.6), в которых $b = 0$, удобно решать, приведя к виду $x^2 = -\frac{c}{a}$. Напомним, что квадраты чисел могут принимать только неотрицательные значения.

Неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0,\ ax^2 + bx + c \geq 0,$$
$$ax^2 + bx + c < 0,\ ax^2 + bx + c \leq 0\ (a \neq 0),$$

где a, b, c — действительные числа или выражения, зависящие от параметров, называются ***квадратными***.

В зависимости от знака коэффициента a и дискриминанта возможны следующие случаи расположения параболы $y = ax^2 + bx + c$ на координатной плоскости относительно оси Ox:

	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

В каждом из представленных выше случаев легко выписывается решение любого квадратного неравенства.

4.1. Решите уравнение

а) $5x^2 - 11x + 2 = 0$;	б) $0{,}6x^2 - 0{,}1x - 1{,}5 = 0$;
в) $700x^2 - 100x - 600 = x(x - 6) : 0{,}01$;	г) $3x\left(x^2 - 2x\right) - x^2(x + 1) = 2x^3 - 6x - 1$.

4.2. Найдите

а) координаты точек пересечения параболы $y = 2x + 3 - x^2$ и прямой $y = -x + 5$;	б) координаты точек пересечения парабол $y = x(2 - x) + 3$ и $y = x^2 - 1$;
в) координаты точек пересечения графика функции $y = 5x - 3x^2 - 2$ с осями Ox и Oy;	г) при каких значениях x функция $y = 3x^2 + x + 1$ принимает значение, равное 5.

***4.3.** Найдите

а) гипотенузу прямоугольного треугольника, если известно, что длины его сторон образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 1;	б) натуральное число, квадрат которого на 6 больше, чем увеличенное в 5 раз искомое число;
в) периметр треугольника, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 1, а косинус среднего по величине угла равен $\frac{2}{3}$.	г) В треугольнике ABC известно, что $AB=10$, $BC=9$, $\angle A=60°$. Найдите AC.

4.4.

а) Если число 2 является одним из корней уравнения $x^2-bx-6=0$, то чему равен коэффициент b и второй корень этого уравнения?	б) Известно, что число 3 является одним из корней уравнения $ax^2+2x+3=0$. Чему равен коэффициент a и второй корень этого уравнения?
в) Известно, что уравнение $x^2+ax+b=0$ имеет только одно решение: $x=2$. Чему равны коэффициенты a и b этого уравнения?	г) При каких значениях a парабола $y=-x^2+ax-\frac{a}{2}$ касается оси абсцисс?

4.5. Решите уравнение

а) $x^2-2009x=0$;	б) $12\,221x-11x^2=2^{\log_2 25}-5^2$;
в) $2x=303x^2-\lg\sin\frac{2021\pi}{2}$;	г) $201x^2=333x+\sin(\arcsin 0)$.

4.6. Решите уравнение

а) $2x^2-5=0$;	б) $x^2+100=\log_{2019}1$;
в) $99\,999x^2=\sin 270°$;	г) $10^4\cdot x^2=4$.

4.7. Решите уравнение

а) $x^3-2x^2-x-1=(x-1)(x^2+1)$;	б) $(x-1)(x+2)=40$.
в) Одна сторона прямоугольника на 2 см больше, чем другая. Найдите большую сторону, если площадь прямоугольника равна 15.	г) При каком значении x функция $y=(x-1)(x-3)+(x+1)x$ принимает значение, равное 23?

4.8. Решите уравнение

а) $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{x+2}{11}=\frac{2-5x}{4}$;	б) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{(x-2)^2}{6}=\frac{(x+2)^2}{4}-3$.
в) При каком значении x пересекаются графики функций $y=\frac{x^2+1}{2}+\frac{(3x+2)^2}{3}$ и $y=\frac{(x-1)^2}{3}$?	г) При каком значении x не имеет смысла выражение $\left(\frac{(x-3)(x-2)}{2}-\frac{x^2+2}{3}+\frac{x+3}{5}+1\right)^{-1}$?

4.9. Решите уравнение

а) $\frac{x^2-2x-8}{\sqrt{x+2}}=0$;	б) $(x^2-x-6)\sqrt{1-x}=0$;
в) $(2x^2-x)\log_2 x=0$;	г) $(3x^2-5x-2)\arcsin x=0$.

***4.10.** Решите уравнение

а) $-2010x^2-2011x-1=0$;	б) $(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)+$ $+(x+4)(x+5)=2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6$;
в) $x(x+1)+(x+1)(x+2)+\ldots+(x+2009)(x+2010)=$ $=1\cdot2+2\cdot3+\ldots+2010\cdot2011$;	г) $x^2-x+\sqrt{3}=3$.

4.11. Решите уравнение

а) $x^4+3x^2+1=0$;	б) $(0{,}1x)^4-0{,}0007x^2+0{,}0012=0$;
в) $4\sqrt[4]{x}-3\sqrt{x}-1=0$.	г) При каких значениях x совпадают значения функций $y=(x+1)\left(x^2-x+1\right)-x\left(x^2+(-x)^3\right)$ и $y=2x^2$?

4.12. Решите уравнение

а) $x-\frac{1}{x}=1{,}5$;	б) $x+\frac{3}{x}=4$;
в) $\frac{3x}{2}-\frac{1}{3x}-1\frac{1}{6}=0$;	г) $x=\frac{3}{x}+2$.

***4.13.** Решите уравнение

а) $(x^2+x)^2+x^2+x=6$;	б) $(2x^2-x)^2-6x^2+3x=0$;
в) $(2x^2+x)^2-2x^2-x=6$;	г) $(x^2+2x)^2-x(x+2)=6$.

4.14. Решите неравенство

а) $-0{,}03x^2+0{,}01x+0{,}02\geq 0$;	б) $0{,}1x^2+0{,}7x-1{,}8\geq 0$;
в) $\frac{1}{17}x^2+\frac{3}{17}x<\frac{4}{17}$.	г) При каких значениях x график функции $y=2x-x^2+3$ лежит не выше оси абсцисс?

4.15. Решите неравенство

а) $x^2\leq 15$;	б) $x^2-361>0$;
в) $x^2>-11$.	г) При каких значениях x график функции $y=6+x\left(x^2-2\right)$ лежит выше графика функции $y=x^3-2x(1-x)$?

4.16. Решите неравенство

а) $6x^2-5x>0$;	б) $x(2x+3)<0$;
в) $x^2<-x$.	г) Найдите область определения выражения $\lg(x(2-x)-x)$.

4.17. Решите неравенство

а) $(2+x)(3-x)\geq 4$;	б) $(x+5)(x-2)\leq 8$.
в) Найдите, при каких значениях x, удовлетворяющих условию $\lvert x\rvert<10$, имеет смысл выражение $\sqrt{(x+1)(x-2)-4}$.	г) При каких значениях x график функции $y=(x+1)(x+2)(x+3)-x^3$ лежит ниже прямой $y=23$?

4.18. Решите неравенство

а) $\frac{x^2-1}{2}-\frac{x^2+2}{6}+\frac{x-1}{3}>-0{,}5$;	б) $\frac{x^2+x+1}{2}-\frac{x^2-x-1}{3}\leq\frac{1}{6}$;
в) $\frac{2x^2-1}{8}+\frac{4x-3}{12}-\frac{5-8x}{16}\leq 19\cdot 2^{-4}\cdot 3^{-1}$.	г) При каких значениях x график функции $y=\frac{3x-2}{2}+\frac{2x^2+x}{3}-\frac{x+1}{4}-1$ лежит ниже оси абсцисс?

4.19. Решите неравенство

а) $(2x-5)^2\geq(5x+1)^2$;	б) $(2x-1)^2<(x+2)^2$.
в) При каких значениях x график функции $f(x)=(x-1)^2$ лежит выше графика функции $g(x)=(3x+1)^2$?	г) Найдите, при каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{(2x+3)^2-(3x+2)^2}$.

***4.20.** Найдите область определения функции

а) $y=\sqrt[6]{2x^2+2\sqrt{2}x+1}$;	б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+3-2\sqrt{6}x}}$;
в) $f(x)=\sqrt{\sqrt{2}x^2-2x-\sqrt{8}x+4}$;	г) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-9}}}$.

***4.21.** Решите неравенство

а) $x^4+2x^2<3$;	б) $x^4+3x^2+1>0$;
в) $\left(x^2+1\right)^2-6\left(x^2+1\right)+5\geq 0$.	г) При каких значениях x график функции $y=x^4+7x^2+15$ лежит выше оси абсцисс?

4.22. Решите систему неравенств

а) $\begin{cases} x-1<0, \\ 3x^2-2x-5\leq 0; \end{cases}$	б) $\begin{cases} (x-2)(2x-5)\leq 0, \\ 5x-2x^2>0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x(x-1)-(2-x)(x+1)<2, \\ x^3-2x^2<0; \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2(x+2)-x(2-x)>5x, \\ (x+1)(x-4)-2\left(x^2-1\right)<x+2. \end{cases}$

4.23. Решите систему неравенств

а) $\begin{cases} x^2-9\geq 0, \\ (x+3)(4-x)\geq 0; \end{cases}$	б) $\begin{cases} x^2-4\leq 0, \\ x^2+x-2\geq 0. \end{cases}$
в) Найдите область определения функции $y=3\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+x-2}+2\sqrt{-x^2-6-5x}$.	г) Найдите область определения функции $y=\sqrt{x^2-5x+6}+2\sqrt{8x-15-x^2}-3\sqrt{3-x}$.

***4.24.** Решите неравенство (см. № 8.1)

а) $\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-2}}\leq 0$;	б) $\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{-x-1}}<0$;
в) $\dfrac{\sqrt{(x-5)^2}}{(x-1)(7-x)}>0$;	г) $\dfrac{\sqrt{x^2+16-8x}}{-10x+x^2+16}<\log_{2009}1$.

***4.25.** Решите неравенство

а) $\left(x^2+4x-5\right)\sqrt{2+x}\geq 0$;	б) $\left(x^2+4x+4\right)\sqrt{x-3}\leq 0$;
в) $(x^2-4x+4)\sqrt{x+1}\leq 0$;	г) $\left(3x^2-2\sqrt{3}x+1\right)\sqrt{x}\leq\cos(\arcsin 1)$.

5. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН, КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Выражение вида $ax^2 + bx + c$ при $abc \neq 0$ называется ***квадратным трехчленом***.

В случае, когда $D = b^2 - 4ac \geq 0$, квадратный трехчлен можно разложить на линейные множители (№ 5.1, 5.11, 5.15):

если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;

если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$;

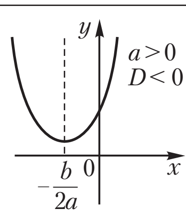
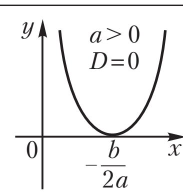
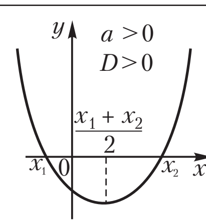
если $D < 0$, то квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ нельзя разложить на множители.

В квадратном трехчлене можно выделить полный квадрат (№ 5.2), т. е. представить его в виде $(Ax + B)^2 + C$, где A, B, C — некоторые числа, которые требуется найти.

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ называется ***квадратичной***.

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ является парабола, ветви которой направлены вверх (если $a > 0$) или вниз (при $a < 0$). Вершина параболы (№ 5.3) находится в точке с абсциссой $x_{\text{вершины}} = -\dfrac{b}{2a}$, а прямая $y = -\dfrac{b}{2a}$ служит *осью симметрии параболы*.

Если квадратичная функция записана в виде $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ или $y = a(x - x_0)^2 + d$, то полезно знать, что в этом случае парабола строится проще, чем в общем случае (№ 5.3).

$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
 парабола не пересекает ось Ox $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + d$ $x_{\text{вершины}} = x_0$ $y_{\text{вершины}} = d$	 парабола касается оси Ox $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ $x_{\text{вершины}} = x_0$ $y_{\text{вершины}} = 0$	 парабола пересекает ось Ox в двух точках $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ $x_{\text{вершины}} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

С помощью анализа расположения параболы решаются задачи, связанные с множеством значений квадратичной функции (№ 5.4, 5.5, 5.16, 5.18), а также задачи с параметром на расположение корней квадратного трехчлена (№ 5.19—5.23).

Теорема Виета:

если квадратное уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1, x_2, то $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Для приведенного ($a = 1$) квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ формулы приобретают вид $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

Верна и теорема, ***обратная теореме Виета***:

если числа x_1 и x_2 удовлетворяют равенствам $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

> В условии теоремы Виета указано, что уравнение должно иметь корни, то есть условие $D \geq 0$ необходимо проверить прежде, чем начинать любые вычисления.

Используя формулы из теоремы Виета, можно, не вычисляя корней уравнения, находить некоторые выражения (№ 5.13), содержащие x_1 и x_2. Например, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 - 2q$.

Теорема, обратная теореме Виета, используется для составления квадратных уравнений с дополнительными условиями на корни (№ 5.15).

5.1. Разложите квадратный трехчлен на множители

а) $2x^2+2x-4$;	б) $2x^2-2x-4$;
в) $2x^2-x-1$;	г) $4x(1+x)+1$.

5.2. Выделите в квадратном трехчлене полный квадрат

а) x^2+2x-1;	б) $-x^2+2x+1$;
в) $2x-x^2$;	г) x^2+x+2.

5.3. Найдите координаты вершины параболы, заданной уравнением

а) $y=3(2x-3)^2-1$;	б) $y=-2x^2+4x+1$;
в) $y=(x+1)(9-x)$;	г) $y=(x+1)(x-5)+1$.

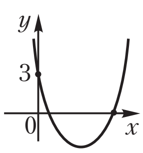
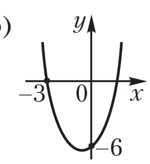
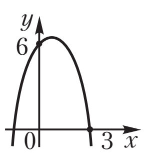
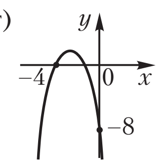
5.4. Найдите множество значений функции

а) $y=x^2+2x-2$;	б) $y=-x^2-2x$;
в) $y=x(2-x)+1$;	г) $y=\lvert x^2+2x+2\rvert$.

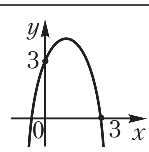
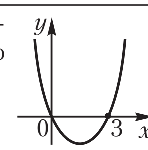
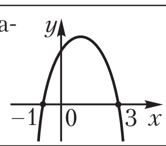
***5.5.** Найдите

а) какое минимальное значение может принять многочлен $a^2+4ab+4b^2+2a+4b+2$;	б) какое максимальное значение может принять многочлен $2a-4b+1-a^2+4ab-4b^2$;
в) какое минимальное значение может принять многочлен $a^2+a+b^2-b-2ab$;	г) какое максимальное значение может принять выражение $\sqrt{2a+2b-2ab-a^2-b^2}$.

5.6. На рисунке дан график функции $y=ax^2+bx+c$. Эта функция может задаваться формулой

а) 	1) $y=-x^2-4x-3$; 2) $y=x^2+4x-3$; 3) $y=x^2+4x+3$; 4) $y=x^2-4x+3$; 5) $y=x^2+6x+3$.	б) 	1) $y=x^2-2x-6$; 2) $y=x^2-x-6$; 3) $y=x^2+x-6$; 4) $y=-x^2+x-6$; 5) $y=x^2+x+6$.
в) 	1) $y=-x^2-x+6$; 2) $y=-x^2+2x+6$; 3) $y=-x^2+x+6$; 4) $y=-x^2+x-3$; 5) $y=-x^2-2x+6$.	г) 	1) $y=-x^2-6x+8$; 2) $y=-x^2+6x-8$; 3) $y=-x^2-6x-8$; 4) $y=-x^2-4x-8$; 5) $y=-x^2-7x-8$.

5.7.

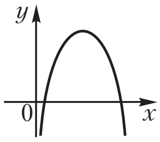
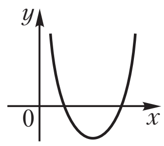
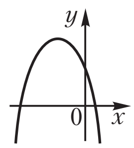
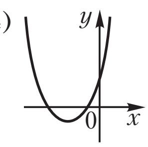
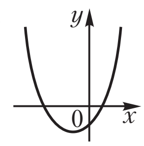
а) Используя график, запишите уравнение параболы, если известно, что коэффициент при x^2 равен -1. 	б) Используя график, запишите уравнение параболы, если известно, что коэффициент при x^2 равен 1. 
в) Найдите абсциссу вершины параболы, изображенной на рисунке. 	г) Известно, что прямая $y = 2009$ пересекает параболу $y=ax^2+bx+c$ в точках с абсциссами $x_1=1$ и $x_2=2009$. Найдите абсциссу вершины этой параболы.

***5.8.**

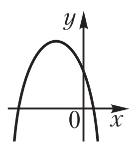
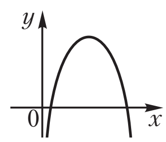
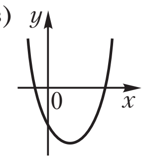
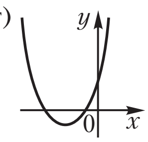
а) Укажите уравнение параболы с вершиной в точке $(-2;4)$, проходящей через начало координат.	б) Укажите уравнение параболы с вершиной в точке $(2;1)$, проходящей через точку $(1;-2)$.
в) Укажите уравнение параболы с вершиной в точке $(-2;1)$, проходящей через начало координат.	г) Точки A и B принадлежат параболе $y=x^2$, C — середина отрезка AB. Найдите ординату точки C, если абсциссы точек A и B равны соответственно x_1 и x_2.

5.9. На одном из рисунков, приведенных ниже, изображен график функции

а) $y = 2x^2 + 17x - 3$. Укажите номер этого рисунка.	б) $y = -x^2 + 7x - 11$. Укажите номер этого рисунка.
в) $y = x^2 - 20x + 3$. Укажите номер этого рисунка.	г) $y = -x^2 - 10x + 3$. Укажите номер этого рисунка.

1) 
2) 
3) 
4) 
5) 

***5.10.** По изображению графика функции $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки коэффициентов a, b, c

а) 	б) 	в) 	г) 

***5.11.** Составьте приведенное квадратное уравнение с корнями

а) 1 и $\sqrt{2}$;	б) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{0,5}$;
в) $5\sqrt{2} - 4\sqrt{8} - \sqrt{32}\cos\pi$ и $\dfrac{4+\sqrt{7}}{6+\sqrt{\left(1+\sqrt{7}\right)^2}} + \dfrac{4-\sqrt{7}}{6-\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2}}$.	г) Найдите, при каких значениях a решением неравенства $x^2 - (a^2 - 2a - 3)x + a^2 + 2 \le 0$ является множество [2;3].

***5.12.**

а) Длины двух меньших сторон прямоугольного треугольника являются корнями уравнения $2x^2 - 17x + 6 = 0$. Найдите площадь этого треугольника и радиус описанной вокруг него окружности.	б) Если длины катетов прямоугольного треугольника являются корнями уравнения $2x^2 - 17x = 6$, то чему равна площадь этого треугольника?
в) Длины оснований трапеции являются корнями уравнения $9a - 2a^2 = 3$. Найдите длину средней линии этой трапеции.	г) Длины сторон прямоугольника являются корнями уравнения $x^2 - 16x + 9 = 0$. Найдите площадь этого прямоугольника и диаметр описанной вокруг него окружности.

***5.13.** Не вычисляя значений x_1 и x_2 действительных корней уравнения

а) $3x^2 + 8x - 1 = 0$, вычислите $x_1^2 + x_2^2$;	б) $x^2 - x + 2 = 0$, вычислите $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$;
в) $3x^2 + x + 1 = 0$, вычислите $\dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2}$;	г) $x^2 + 3x - 1 = 0$, вычислите $x_1^3 + x_2^3$.

***5.14.**

а) Брат младше сестры на 2 года, а произведение их возрастов равно 120. Составьте уравнение, одним из корней которого является возраст брата.	б) Длина высоты трапеции на 4 больше длины ее средней линии, а площадь трапеции равна 48. Составьте уравнение, одним из корней которого является длина высоты трапеции.
в) Длина одного катета прямоугольного треугольника на 3 больше длины другого катета, а площадь треугольника равна 60. Составьте уравнение, одним из корней которого является длина большего катета.	г) В одинаковые коробки упакован 351 фломастер. Всего коробок оказалось на 30 больше, чем фломастеров в каждой из них. Составьте уравнение, один из корней которого равен количеству коробок.

****5.15.** Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами

а) одним из корней которого является число $5 - \sqrt{3}$;	б) одним из корней которого является число $\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$;
в) корнями которого будут числа $x_1 x_2$ и $\dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_1}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 5x - 1 = 0$;	г) один из корней которого будет равен сумме, а другой — произведению корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

****5.16.** Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать выражение

а) $x+y$, если $x^2-2xy+2y^2-5\le 0$;	б) $x-y$, если $3x^2-2xy+4y^2=5$;
в) $2x+y$, если $2x^2-xy+3y^2\le 1$;	г) $2x^2+3xy+4y^2$, если $x^2-xy+2y^2=3$.

****5.17.** Найдите, при каких значениях параметра a уравнение имеет только один корень

а) $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$;	б) $(1+a)x^2+3ax-1=0$;
в) $ax^2+2(a+1)x+a+3=0$;	г) $ax^2+(a+1)x+2a=1$.

****5.18.** Найдите, при каких значениях параметра a

а) график функции $y=(a-1)x^2-4ax+4x-3$ лежит целиком ниже оси абсцисс;	б) областью определения функции $y=\sqrt{x^2+2x(a+2)+(a+4)}$ является вся числовая прямая;
в) выражение $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+1$ принимает положительные значения при всех $x\in\mathbf{R}$;	г) функция $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+4}{4x^2+ax+1}$ принимает положительные значения на всей числовой прямой.

****5.19.** Найдите, при каких значениях параметра a

а) вершина параболы $y=x^2+24x+140+a$ находится на расстоянии, равном 13 от начала координат;	б) вершина параболы $y=x^2+2ax+3a^2-1$ находится в точке с ординатой 7;
в) наименьшее значение функции $y=(a^2+a)x^2+4ax-1$ равно (-2);	г) вершина параболы $y=x^2+2ax+a+6$ находится в первой координатной четверти.

****5.20.** Найдите, при каких значениях параметра a

а) уравнение $x^2-(a-2)x-2-3a=0$ имеет корни разных знаков;	б) неравенство $2x^2+ax-12\le 0$ имеет число 4 среди своих решений;
в) корни уравнения $x^2+4ax+(1-2a+4a^2)=0$ находятся по разные стороны от -1;	г) один корень уравнения $x^2+x+a=0$ находится левее, а второй — правее a.

****5.21.** Найдите, при каких значениях параметра a квадратный трехчлен

а) $ax^2-3x+(a-1)$ можно представить в виде квадрата двучлена;	б) $3x^2-ax+a+2$ можно представить в виде квадрата двучлена;
в) $ax^2+(3a+8)x+25$ можно представить в виде квадрата двучлена;	г) $ax^2+(a-5)x+(a+3)$ можно представить в виде квадрата двучлена.

****5.22.** Найдите, при каких значениях параметра a

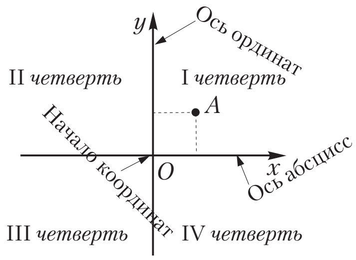
а) корни уравнения $x^2-x=a$ удовлетворяют условию $5x_1-2x_2=19$;	б) корни уравнения $2ax^2-3x=2a$ удовлетворяют условию $2x_1-6x_2=7$;
в) корни уравнения $5x^2-ax+1=0$ удовлетворяют условию $x_1-x_2=1$;	г) сумма квадратов корней уравнения $x^2-ax+a=0$ равна 3.

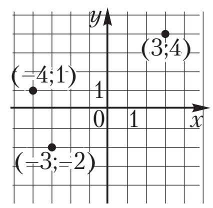
****5.23.** Найдите, при каких значениях параметра a

а) неравенство $ax^2-4x+3a+1>0$ справедливо при всех положительных значениях x;	б) из неравенства $x^2-2ax+a^2-a<0$ следует двойное неравенство $-2<x<6$;
в) из неравенства $1<x\le 2$ следует неравенство $x^2-2ax+a<0$.	г) Найдите все значения x, при каждом из которых неравенство $(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+(5+4a-a^2)<0$ выполняется хотя бы при одном $a\in[-1;2]$.

6. ФУНКЦИИ, ГРАФИКИ

Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy. Горизонтальная ось Ox называется ***осью абсцисс***, а вертикальная — ***осью ординат***. Точка пересечения осей O называется ***началом координат***. Оси координат разбивают плоскость на четыре части, которые называют ***координатными четвертями***.





Для каждой точки A плоскости ее координаты $(x;\ y)$ определяются так: опускаем из A перпендикуляры на оси и записываем соответствующие значения, которые отсекаются на осях Ox и Oy соответственно.

Расстояние между двумя точками находится обычно с помощью теоремы Пифагора:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Все точки оси абсцисс имеют координату $y = 0$, а все точки оси ординат имеют координату $x = 0$. Начало координат имеет координаты (0;0).

Функция f — это правило, по которому каждому числу из некоторого множества X ставится в соответствие *единственное* число y. Запись $y = f(x)$ означает, что y является функцией от x.

Все значения переменной x, при которых функция определена (то есть числа, которые можно подставить вместо переменной x и вычислить значение y), составляют ***область определения функции***. Говорят также, что функция задана на области определения (№ 6.3, 6.4).

Все значения, которые может принять y, составляют ***множество значений функции*** (№ 6.33—6.36).

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве $\mathbf{X}$, называется ***четной***, если выполнены следующие два условия:

1. Множество $\mathbf{X}$ симметрично относительно начала координат (для любого числа $x \in \mathbf{X}$ число $(-x)$ также принадлежит множеству $\mathbf{X}$).

2. Для любого $x \in \mathbf{X}$ справедливо равенство $f(x) = f(-x)$.

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве $\mathbf{X}$, называется ***нечетной***, если выполнены следующие два условия:

1. Множество $\mathbf{X}$ симметрично относительно начала координат (для любого числа $x \in \mathbf{X}$ число $(-x)$ также принадлежит множеству $\mathbf{X}$).

2. Для любого $x \in \mathbf{X}$ справедливо равенство $f(x) = -f(-x)$ (№ 6.11—6.14).

Например, $y = |x|$, $y = |x-1| + |x+1|$, $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = 3x^2 + 5|x|$ — четные функции,

а $y = x + \dfrac{1}{x}$, $y = x$, $y = x^3$, $y = \dfrac{1}{x^5}$, $y = \dfrac{2|x| + x^2}{3x}$, $y = (x-1)^3 + (x+1)^3$ — нечетные.

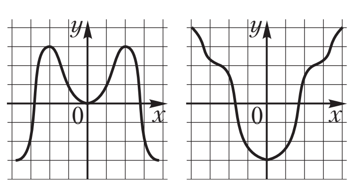


График любой четной функции симметричен относительно оси Oy.

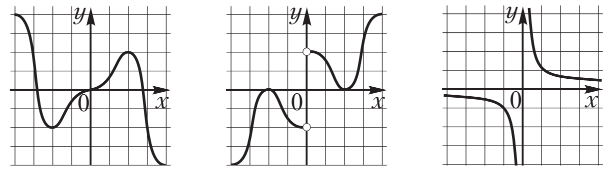


График любой нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической с периодом*** $\boldsymbol{T \neq 0}$, если выполнены следующие два условия:

1. Для любого x, принадлежащего области определения функции, $x \pm T$ также принадлежат области определения функции.

2. Для любого x, принадлежащего области определения функции, справедливо равенство $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$ (№ 6.15, 6.16).

Основными способами задания функции является ***аналитический*** (задается формула для вычисления значения y) и ***графический*** (приводится график функции).

График функции — множество точек с координатами $(x; y)$ таких, что $y = f(x)$ (*то есть абсциссы точек графика — все возможные значения x, а ординаты — соответствующие значения y*).

Итак, если некоторая точка $A(x_a; y_a)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то при подстановке ее координат соответственно вместо x и y в уравнение $y = f(x)$ получается верное числовое равенство.

И наоборот. Если при подстановке координат какой-то точки $A(x_a; y_a)$ вместо x и y в уравнение $y = f(x)$ получается верное числовое равенство, то график функции $y = f(x)$ проходит через точку A (№ 6.18).

График функции несет в себе наибольшую информацию о ее поведении и свойствах. В частности, по графику легко можно указать:

• промежутки возрастания (те промежутки, где большему значению переменной x соответствует большее значение y);

• промежутки убывания (промежутки, на которых большему значению переменной x соответствует меньшее значение y) (№ 6.10, 6.19);

• точки пересечения графика с осями координат;

• максимальное и минимальное значения функции;

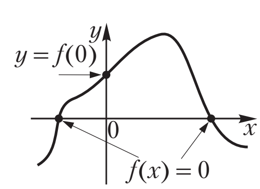
• промежутки, на которых функция принимает только положительные (промежутки положительности) или только отрицательные (промежутки отрицательности) значения и т. д.

График функции $y = f(x)$ пресекает ось Oy, если $x = 0$. То есть для нахождения этой точки пересечения надо подставить в формулу вместо x значение 0 и вычислить соответствующее значение y.

График функции $y = f(x)$ пресекает ось Ox, если $y = 0$. То есть для нахождения этих точек пересечения надо решить уравнение $0 = f(x)$. Сколько корней имеет это уравнение, столько и точек пересечения у графика с осью абсцисс.

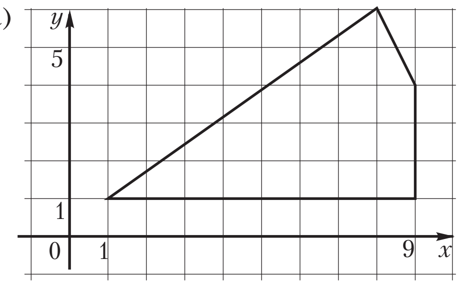
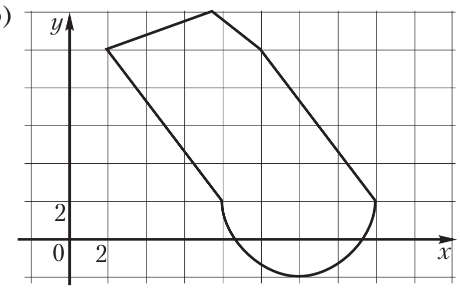
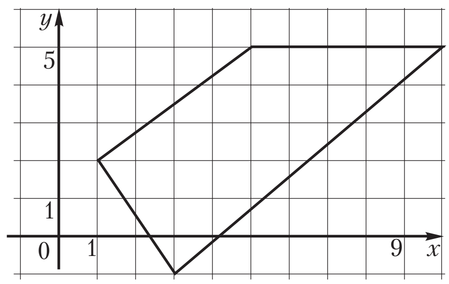
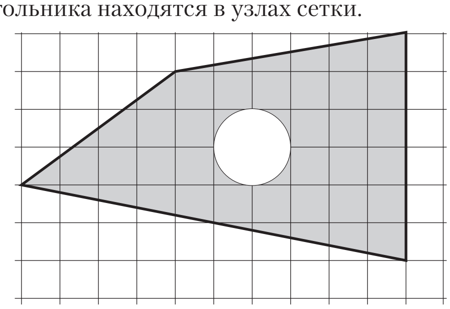
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ — ***уравнение окружности*** с центром в точке $(x_0;\ y_0)$ и радиусом R.

$|x - x_0| + |y - y_0| = R$ — ***уравнение квадрата*** с центром в точке $(x_0;\ y_0)$ и вершинами $(x_0; y_0 \pm R)$, $(x_0 \pm R; y_0)$.



Обратите внимание, что № 6.40—6.95 адресованы тем читателям, которые ориентированы не только на сдачу ЦТ.

6.1. Найдите площадь изображенных фигур

а) 	б) 
в) Известно, что площадь изображенной фигуры составляет 30 % от площади некоторого параллелограмма. Найдите площадь этого параллелограмма. 	г) Площадь каждого квадрата на клетчатой бумаге равна 2. Из многоугольника вырезали круг. Найдите площадь закрашенной фигуры, если вершины многоугольника находятся в узлах сетки. 

6.2.

а) Шахматный клуб в некотором городе планирует увеличивать количество своих членов на n человек ежегодно. В начале текущего года в клубе состоят b человек. Какая из функций моделирует общее количество человек y, которые будут членами клуба через x лет? 1) $y=b\cdot n^x$; 2) $y=n\cdot b^x$; 3) $y=nx-b$; 4) $y=nx$; 5) $y=b+nx$.	б) Кофе стоит 3 руб. 20 коп. Если цена кофе каждый год увеличивается на 10 %, то какое из следующих выражений моделирует цену P кофе в рублях через t лет? 1) $P=3{,}2\cdot 10^t$; 2) $P=3{,}2\cdot 1{,}10^t$; 3) $P=3{,}2\cdot 0{,}10^t$; 4) $P=3{,}2+1{,}10^t$; 5) $P=1{,}10\cdot 3{,}5^t$.
в) В баке было 30 л воды. Каждую секунду в него наливается 5 дм^3 воды. Какая формула задает зависимость объема V воды в баке (в литрах) от времени t (в минутах) его заполнения? 1) $V=30\cdot 5t$; 2) $V=30+0{,}5t$; 3) $V=30+5t$; 4) $V=30+300t$; 5) $V=30+\frac{5}{60}t$.	г) Уравнение $y=29{,}99+0{,}5t$ используется компанией, чтобы вычислить общую стоимость (y) в евро аренды автомобиля на один день и поездки на нем в t километров. Общая стоимость представляет собой фиксированную плату плюс доплата за каждый километр пробега. Если изобразить это уравнение на координатной плоскости tOy, то что представляет собой точка пересечения с осью ординат? 1) плата за километр 0,5 евро; 2) плата за километр 29,99 евро; 3) фиксированная оплата, равная 29,49; 4) общая суточная оплата 30,49; 5) фиксированная оплата, равная 29,99.

6.3. Найдите естественную область определения функции

а) $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}$;	б) $y=\sqrt{x-3}-\sqrt{4-x}$;
в) $y=\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{-x^2+2x+3}}+\sqrt{x^2-5x+6}$;	г) $y=\frac{\sqrt[6]{7-\lvert 2x+3\rvert}}{\sqrt{(x+1)^2}}$.

6.4. Если $f(x)$ определена при $x\in(-1;2]$, то какова область определения функции

а) $g(x)=\frac{1}{2}f(x-2)$?	б) $g(x)=3f(2x)$?
в) $g(x)=5f\left(\frac{x}{2}+3\right)$?	г) $g(x)=f\left(x^2-1\right)$?

***6.5.** Пусть $f(x)=\dfrac{2x-3}{2}$. Найдите выражение для

а) $f(2x-1)$;	б) $2f\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$;
в) $2+f(3x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;	г) $2+3f(4x-5)-f(1-x)$.

***6.6.** Пусть $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3+1$. Найдите выражение для

а) $f(x+1)-g(x-1)$;	б) $f^2(x)+g(2x)$;
в) $f(g(x))$;	г) $f(x-1)+g(x^2)$.

****6.7.** Найдите выражение для $f(x)$, если

а) $f(2x)=x-3$;	б) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+1$;
в) $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=x$;	г) $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x$.

****6.8.** Найдите выражение для $g(x)$, если

а) $f(x)=x+1$ и $f(g(x))=2x$;	б) $f(x-1)=2x+3$ и $f(g(x))=3(x+2)$;
в) $f(x+1)=x+2$ и $f(g(x))=f(x-1)+1$;	г) $f(2x-1)=\dfrac{x-1}{x}$ и $f(g(x))=\dfrac{1}{x}$.

6.9. Укажите, какие функции среди данных
1) $y=(\sqrt{2}-1)^x$, 2) $y=0{,}2^x$, 3) $y=\sqrt{2}x^2$, 4) $y=\sqrt{2}x$, 5) $y=\sqrt{x}$,
6) $y=x^{\sqrt{2}}$, 7) $y=x^{-2}$, 8) $y=x^0$, 9) $y=\sin\sqrt{2}\cdot x$, 10) $y=x^{-\cos\frac{2\pi}{3}}$ являются

а) степенными;	б) показательными;
в) линейными;	г) квадратичными.

6.10. Укажите номера функций

а) убывающих на всей области определения: 1) $y=\log_{0,5}x$; 2) $y=\dfrac{1-2x}{3}$; 3) $y=\dfrac{1}{x}$; 4) $y=6^x$; 5) $y=\ln(1-x)$;	б) возрастающих на всей области определения: 1) $y=\log_{0,1}x$; 2) $y=\dfrac{x}{6}$; 3) $y=-\dfrac{6}{x}$; 4) $y=6^x$; 5) $y=\lg(x-1)$;
в) убывающих на интервале $(-\infty;0)$: 1) $y=\ln(-x)$; 2) $y=\dfrac{1}{x}$; 3) $y=\log_{0,5}(-x)$; 4) $y=2^x$; 5) $y=(0{,}111)^{-x}$;	г) возрастающих на интервале $(2;5)$: 1) $y=\ln(5-x)$; 2) $y=\dfrac{1}{5-x}$; 3) $y=\log_{0,5}x$; 4) $y=2^x$; 5) $y=(0{,}5)^{-x}$.

6.11. Исследуйте характер четности (нечетности) функции

а) $y=\dfrac{x-1}{\lvert x-1\rvert}$;	б) $y=\left(\sqrt{x}\right)^4$;
в) $y=3^{\log_3 x}$;	г) $f(f(f(x)))$, если $f(x)$ — нечетная.

***6.12.** Исследуйте характер четности (нечетности) функции

а) $y=a^x+a^{-x}$;	б) $y=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$;
в) $y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$;	г) $y=\log_a\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

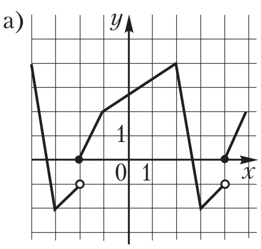
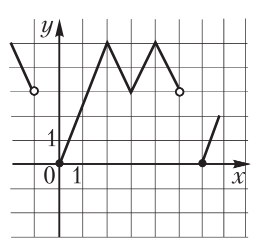
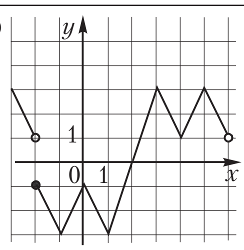
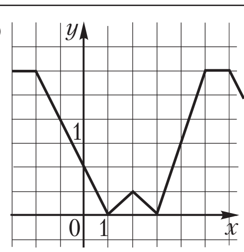
****6.13.** Укажите номера всех

а) четных функций из данных: 1) $y=x\frac{a^x-1}{a^x+1}$; 2) $y=x\cdot\operatorname{tg}x$; 3) $y=\sqrt[3]{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$; 4) $y=\arcsin x$; 5) $y=(2-x)^5$;	б) нечетных функций из данных: 1) $y=\log_a\frac{1-x}{1+x}$; 2) $y=\arccos x-\arccos\sqrt[3]{x}$; 3) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$; 4) $y=\sin^2 x$; 5) $y=2^x-2^{-x}$;
в) четных функций из данных: 1) $y=\lvert x\rvert\sin x$; 2) $y=\lvert x-1\rvert+\lvert x+1\rvert$; 3) $y=x^2\cos x$; 4) $y=\frac{2^{\operatorname{ctg}x}+2^{-\operatorname{tg}x}}{4^{\operatorname{ctg}2x}+1}$; 5) $y=\frac{a^x}{a^{2x}+1}$;	г) нечетных функций из данных: 1) $y=x^{2008}+x^{2010}$; 2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $y=\sin x^2$; 5) $y=\sin x+x$.

***6.14.**

а) Нечетная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x)=2{,}4+f(x-9)$ вычислите сумму $g(6)+g(8)+g(10)+g(12)$.	б) Четная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x)=2{,}1+\frac{f(x-5{,}5)}{x-5{,}5}$ вычислите сумму $g(5)+g(6)$.
в) Четная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x)=x+(x-9)\cdot f(x-9)+9$ вычислите сумму $g(8)+g(9)+g(10)$.	г) Найдите значение выражения $\frac{3f(-x_0)+2g(x_0)}{2f(x_0)-3g(-x_0)}$, если известно, что функция $y=f(x)$ — четная, $y=g(x)$ — нечетная, $f(x_0)=2$, $g(x_0)=3$.

6.15. На рисунке изображен фрагмент графика некоторой периодической функции. Укажите ее наименьший возможный положительный период

а) 	б) 
в) 	г) 

***6.16.**

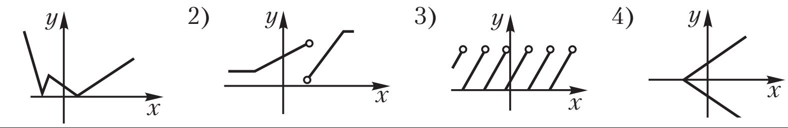
а) Функция $y=f(x)$ имеет период $T=2$ и на промежутке $[0;2)$ задана формулой $y=x^2-2x$. Вычислите $f(3)$.	б) Функция $y=f(x)$ имеет период $T=2$ и на промежутке $(0;2]$ задана формулой $y=2x-x^2$. Вычислите $f(2009{,}5)$.
в) Нечетная функция $y=f(x)$ имеет период $T=2$ и на промежутке $[0;1)$ задана формулой $y=x^2-x$. Вычислите $f(1{,}5)$.	г) Нечетная функция $y=f(x)$ имеет период $T=2$ и на промежутке $[0;1)$ задана формулой $y=x-x^2$. Вычислите $f(-12{,}5)$.

6.17.

а) Какая геометрическая фигура не может быть графиком некоторой функции? 1) точка; 2) прямая; 3) окружность; 4) ломаная.
б) Какая геометрическая фигура не может быть графиком некоторой функции? 1) квадрат; 2) треугольник; 3) ромб; 4) парабола.

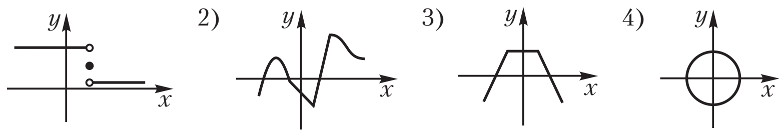
в) Какой из графиков на рисунках не является графиком функции y от x?

1) 2) 3) 4)



г) Какой из графиков на рисунках не является графиком функции y от x?

1) 2) 3) 4)



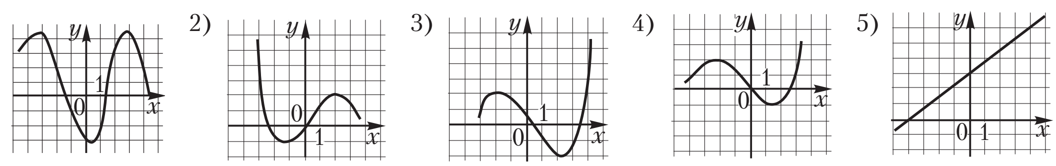
6.18.

а) График которой из данных функций проходит через точку $A(1;0)$? 1) $y=\cos x$; 2) $y=\cos \pi x$; 3) $y=\sin \pi x$; 4) $y=\ln x$.	б) График которой из данных функций проходит через точку $B(-1;0)$? 1) $y=\sqrt[3]{x-1}$; 2) $y=\sqrt[4]{x+1}$; 3) $y=1^x$; 4) $y=2^{-x}-2$.
в) Которому из графиков данных функций принадлежит точка $C(8;2)$? 1) $y=x^3$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$; 3) $y=2^x$; 4) $y=\log_2 x$; 5) $\log_x 2$.	г) Который из графиков данных функций пересекает ось абсцисс правее нуля? 1) $y=2^x-3$; 2) $y=2^{x-2}$; 3) $y=\lg(x-2)$; 4) $y=\ln(e-x)$; 5) $y=\lg(x+2)$.

6.19. На каком из рисунков приведен эскиз графика

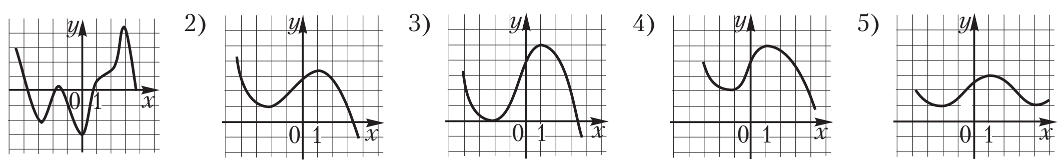
а) функции, убывающей на промежутке $[-1;2]$?

1) 2) 3) 4) 5)



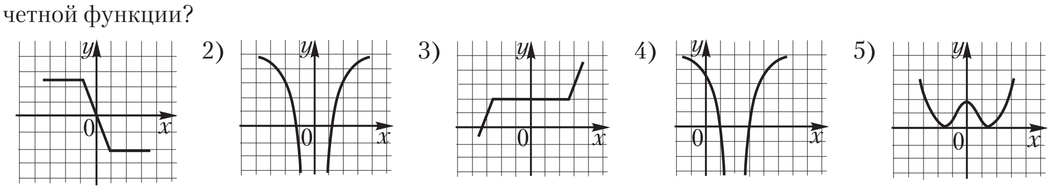
б) функции, возрастающей на промежутке $[1;3]$?

1) 2) 3) 4) 5)



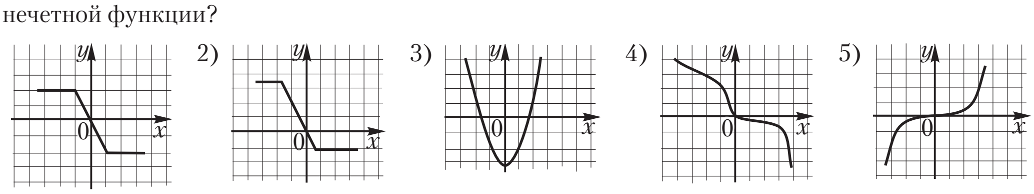
в) четной функции?

1) 2) 3) 4) 5)



г) нечетной функции?

1) 2) 3) 4) 5)



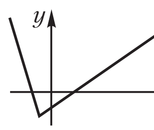
6.20. Как нужно перенести график функции $y=\lg x$, чтобы получить график функции

а) $y=\lg(x+1)$? 1) на 1 единицу вправо; 2) на 1 единицу влево; 3) на 1 единицу вниз; 4) на 1 единицу вверх.	б) $y=\lg x+1$? 1) на 1 единицу вправо; 2) на 1 единицу влево; 3) на 1 единицу вниз; 4) на 1 единицу вверх.
в) $y=-1+\lg x$? 1) на 1 единицу вправо; 2) на 1 единицу влево; 3) на 1 единицу вниз; 4) на 1 единицу вверх.	г) $y=\lg(x-1)$? 1) на 1 единицу вправо; 2) на 1 единицу влево; 3) на 1 единицу вниз; 4) на 1 единицу вверх.

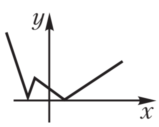
6.21. График функции $y = 2^x$ перенесли

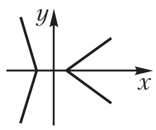
а) на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вверх вдоль оси ординат. График какой функции получили? 1) $y = 2^{x+1} + 2$; 2) $y = 2^{x+1} - 2$; 3) $y = 2^{x+2} + 1$; 4) $y = 2^{x-2} + 1$; 5) $y = 2^{x+2} - 1$.	б) на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вниз вдоль оси ординат. График какой функции получили? 1) $y = 2^{x+1} - 1$; 2) $y = 2^{x-1} - 1$; 3) $y = 2^{x+2} + 1$; 4) $y = 2^{x-2} - 1$; 5) $y = 2^{x+2} - 1$.
в) на 2 единицы влево вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вверх вдоль оси ординат. График какой функции получили? 1) $y = 2^{x+1} + 1$; 2) $y = 2^{x+2} + 2$; 3) $y = 2^{x+2} + 1$; 4) $y = 2^{x-2} + 1$; 5) $y = 2^{x+2} - 1$.	г) так, что точка $A(2;4)$ исходного графика перешла в точку $B(1;0)$. График какой функции получили? 1) $y = 2\left(2^x + 2\right)$; 2) $y = 2^{x-1} - 1$; 3) $y = 2^x - 2$; 4) $y = 2\left(2^x - 1\right)$; 5) $y = 2\left(2^x - 2\right)$.

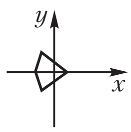
***6.22.**

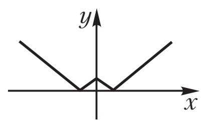
а) Если график $y = f(x)$ изображен на рисунке 

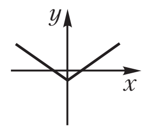
, то графиком функции $y = f(|x|)$ является:

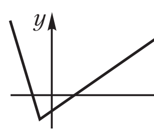
1) 

2) 

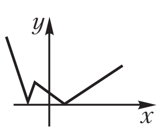
3) 

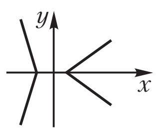
4) 

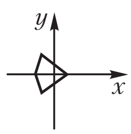
5) 

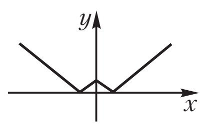
б) Если график $y = f(x)$ изображен на рисунке 

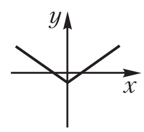
, то графиком функции $y = |f(x)|$ является:

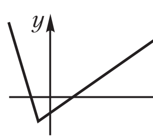
1) 

2) 

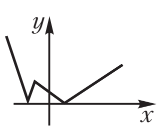
3) 

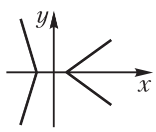
4) 

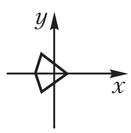
5) 

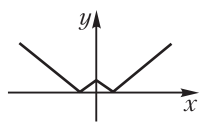
в) Если график $y = f(x)$ изображен на рисунке 

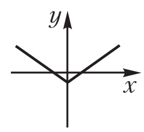
, то графиком функции $y = |f(|x|)|$ является:

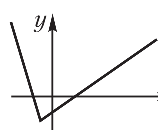
1) 

2) 

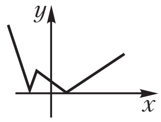
3) 

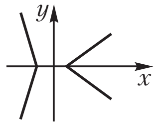
4) 

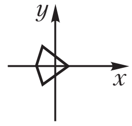
5) 

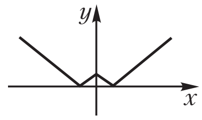
г) Если график $y = f(x)$ изображен на рисунке 

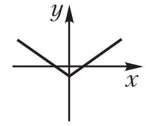
, то графиком функции $y = |-f(|-x|)|$ является:

1) 

2) 

3) 

4) 

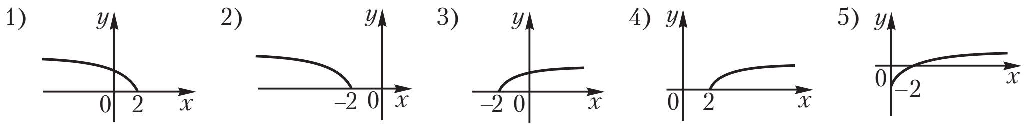
5) 

***6.23.** Постройте график функции

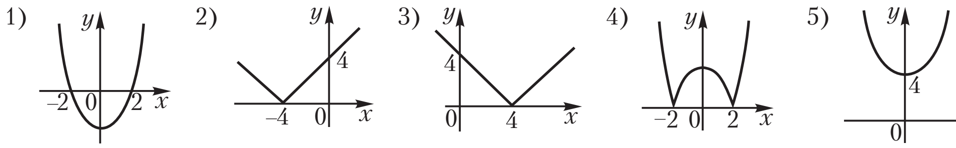
а) $y = \dfrac{2x+2}{x+1}$;	б) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$;
в) $y = 4^{\log_4 x}$;	г) $y = \log_x x^4$.

6.24. Укажите рисунок, на котором схематично изображен график функции

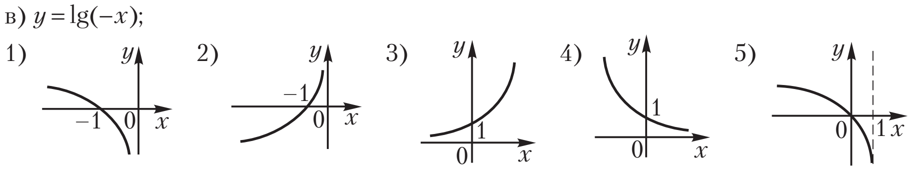
а) $y=\sqrt{2-x}$;



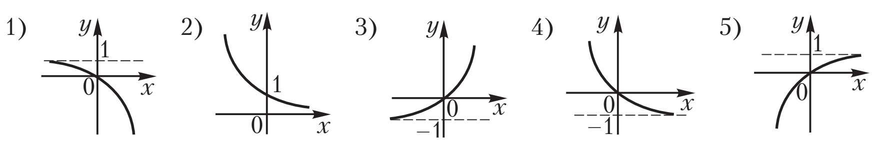
б) $y=\left|4-x^2\right|$;



в) $y=\lg(-x)$;

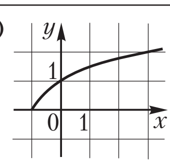


г) $y=1-2^{-x}$.



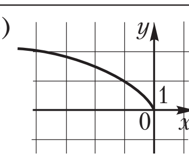
6.25. График какой из данных функций изображен на рисунке?

а)



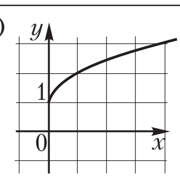
1) $y=\sqrt{x}$;
2) $y=\sqrt{x+1}$;
3) $y=\sqrt{-x}$;
4) $y=\sqrt{x}+1$;
5) $y=\sqrt{1-x}$.

б)



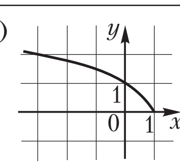
1) $y=-\sqrt{x}$;
2) $y=\sqrt{x-1}$;
3) $y=\sqrt{-x}$;
4) $y=\sqrt{x}+1$;
5) $y=\sqrt{1-x}$.

в)



1) $y=\sqrt{x}$;
2) $y=\sqrt{x+1}$;
3) $y=\sqrt{-x}$;
4) $y=\sqrt{x}+1$;
5) $y=\sqrt{1-x}$.

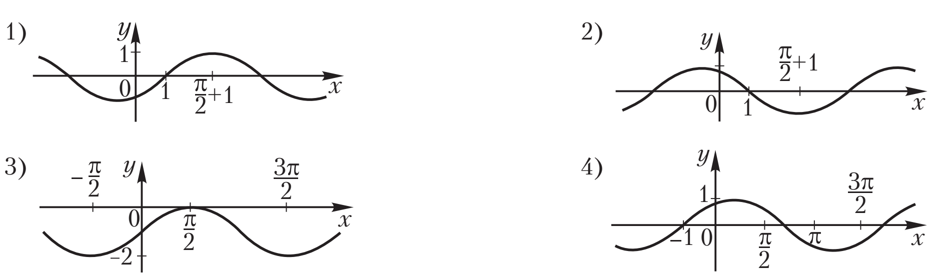
г)



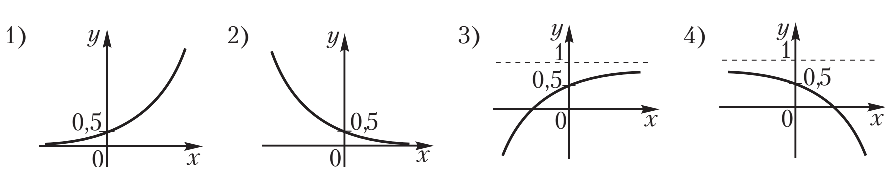
1) $y=\sqrt{x}$;
2) $y=\sqrt{x+1}$;
3) $y=\sqrt{-x}$;
4) $y=\sqrt{x}-1$;
5) $y=\sqrt{1-x}$.

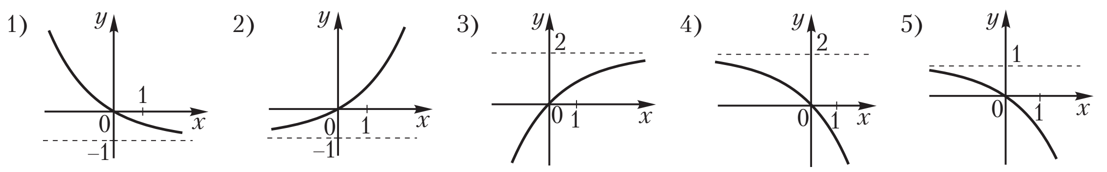
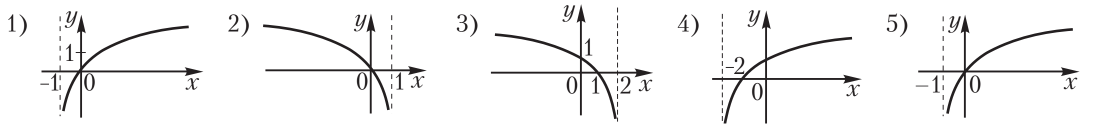
6.26. На каком из рисунков приведен график функции

а) $y=\sin(x-1)$?

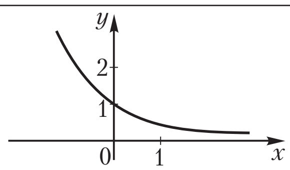
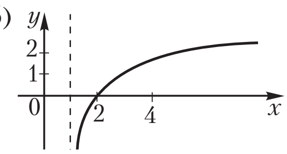
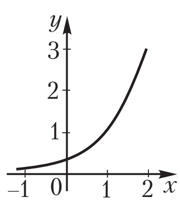
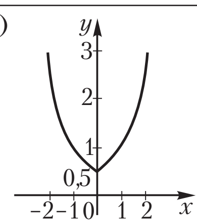


б) $y=2^{x-1}$?



в) $y=2^{-x}-1$? 
г) $y=\ln(x+1)$? 

6.27. График какой из перечисленных функций приведен на рисунке?

а)  1) $y=\log_2 x$; 2) $y=\log_{0,5} x$; 3) $y=2^x$; 4) $y=(0,5)^x$; 5) $y=-2^x$.	б)  1) $y=1-\log_2 x$; 2) $y=1+\log_2 x$; 3) $y=\log_2(x-1)$; 4) $y=\log_2(x+1)$; 5) $y=\log_2(1-x)$.
в)  1) $y=3^{x+1}$; 2) $y=3^{x-1}$; 3) $y=3^x+1$; 4) $y=3^x-1$; 5) $y=1-3^x$.	г)  1) $y=2^{\lvert x-1\rvert}$; 2) $y=2^{\lvert x+1\rvert}$; 3) $y=2^{\lvert x\rvert-1}$; 4) $y=2^{\lvert x\rvert+1}$; 5) $y=2^{\lvert x-1\rvert+1}$.

***6.28.** Постройте график функции

а) $y=\lvert x+3\rvert+x$;	б) $y=\lvert x+1\rvert+\lvert x-2\rvert$;
в) $y=4\lvert x+3\rvert-\lvert x+1\rvert-\lvert x-2\rvert$;	г) $y=\lvert x^2+2x-3\rvert$.

***6.29.** Постройте график функции

а) $y=2^{x^2}$;	б) $y=10^{\lvert x\rvert}$;
в) $y=2^{-x^2+1}$;	г) $y=2^{1-\lvert 2x-1\rvert}$.

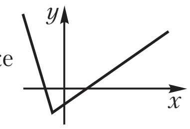
****6.30.** Постройте график функции

а) $y=\lg\lvert x\rvert$;	б) $y=\lvert\lg(x+1)\rvert$;
в) $y=\lvert\lg\lvert x-1\rvert\rvert$;	г) $y=\left\lvert\log_4(x-4)^2\right\rvert$ и укажите количество натуральных значений аргумента из промежутков ее убывания.

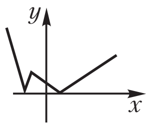
***6.31.** Постройте график функции

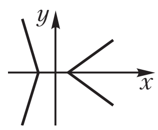
а) $y=\sqrt{x+2}$;	б) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$;
в) $y=\sqrt{49-x^2}$;	г) $y=\sqrt{3+2x-x^2}$.

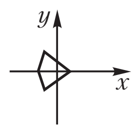
***6.32.**

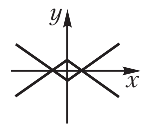
а) Если график $y = f(x)$ изображен на рисунке 

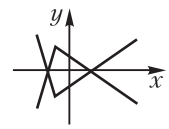
, то графиком уравнения $|-y| = f(x)$ является:

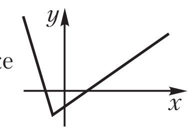
1) 

2) 

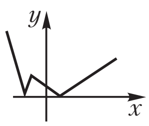
3) 

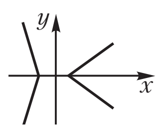
4) 

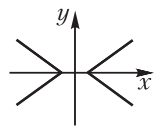
5) 

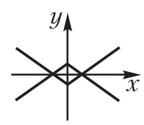
б) Если график $y = f(x)$ изображен на рисунке 

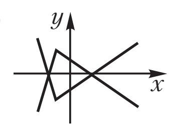
, то графиком уравнения $|y| = f(|x|)$ является:

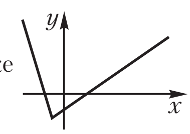
1) 

2) 

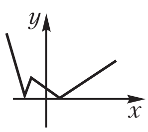
3) 

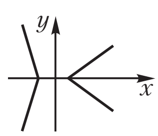
4) 

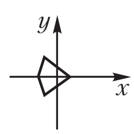
5) 

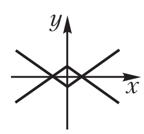
в) Если график $y = f(x)$ изображен на рисунке 

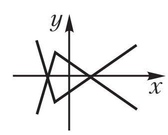
, то графиком уравнения $|-y| = |f(x)|$ является:

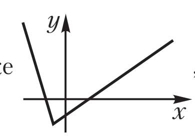
1) 

2) 

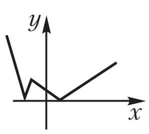
3) 

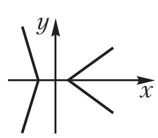
4) 

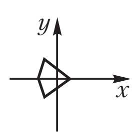
5) 

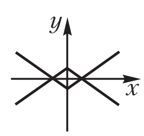
г) Если график $y = f(x)$ изображен на рисунке 

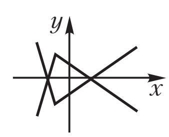
, то графиком уравнения $|y| = |f(|x|)|$ является:

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

****6.33.** Найдите множество значений функции

а) $y = x + \dfrac{1}{x}$;	б) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
в) $y = \dfrac{x(x-2)}{x(x-2)+2}$;	г) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 3}$.

****6.34.** Найдите множество значений функции

а) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$;	б) $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$;
в) $y = \sqrt{25 - x^2}$;	г) $y = \sqrt{16\cos^2 x - 7}$.

****6.35.** Найдите множество значений функции

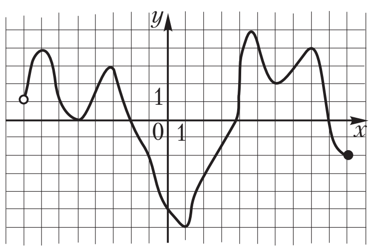
а) $y = 2^{x^2-1}$;	б) $y = 3^{-\lvert x\rvert+2}$;
в) $y = 3^x + 10$;	г) $y = \dfrac{2\lvert x\rvert}{x} + 2^{\lvert x\rvert}$ при $x \geq -1$.

****6.36.** Найдите множество значений функции

а) $y=\lg\left(100-x^2\right)$ при $x\in\left[-\sqrt{90};1\right]$;	б) $y=\log_{\frac{1}{6}}\left(36-5x^2\right)$ при $x\in\left[-\sqrt{6};2\right]$;
в) $y=\log_2((x-2)(4-x))$;	г) $y=\log_6\left(9x+\dfrac{1}{x}\right)$.

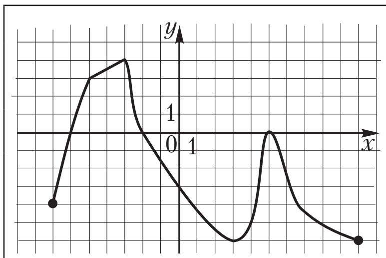
6.37.

а) На рисунке приведен график функции $y=f(x)$. Укажите для этой функции:



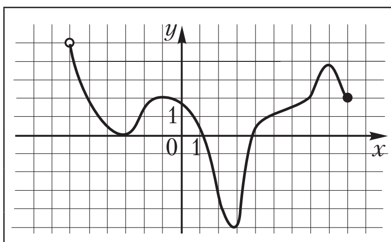
1) область определения;
2) множество значений;
3) решения уравнения $f(x)=-2$;
4) нули функции;
5) промежутки, на которых функция принимает только положительные значения;
6) промежутки, на которых функция принимает неотрицательные значения;
7) промежутки возрастания;
8) промежутки убывания;
9) промежутки, где $f'(x)>0$;
10) промежутки, на которых $f'(x)<0$;
11) точки, в которых производная функции обращается в 0;
12) точки экстремума;
13) точки, в которых производная $f'(x)$ меняет свой знак;
14) значения x, в которых касательная к графику перпендикулярна оси ординат.

б) На рисунке приведен график функции $y=f(x)$. Укажите для этой функции:



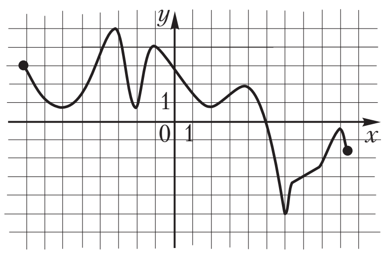
1) область определения;
2) разность между максимальным и минимальным значениями функции;
3) решение уравнения $f(x)=0$;
4) наибольшую из длин промежутков, на которых функция не меняет своего знака;
5) точки, в которых производная функции обращается в 0;
6) промежутки, где $f'(x)>0$;
7) промежутки, где $f'(x)<0$;
8) абсциссы точек графика функции, в которой угловой коэффициент касательной к данному графику равен нулю.

в) На рисунке приведен график функции $y=f(x)$. Укажите для этой функции:



1) область определения;
2) множество значений;
3) решение уравнения $f(x)=2$;
4) решение неравенства $f(x)\geq 0$;
5) решение неравенства $f(x)\leq 0$;
6) промежутки, где $f'(x)\geq 0$;
7) промежутки, где $f'(x)\leq 0$;
8) точки, в которых производная $f'(x)$ меняет свой знак.

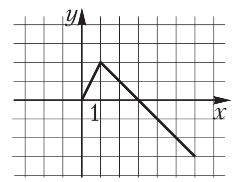
г) На рисунке приведен график функции $y = f(x)$. Укажите для этой функции:



1) область определения;
2) множество значений;
3) нули функции;
4) значение $f(0)$;
5) модуль разности между максимальным и минимальным значениями функции;
6) количество точек, в которых производная $f'(x)$ меняет свой знак;
7) количество промежутков, где $f'(x) < 0$.

***6.38.**

а) Выберите утверждения, которые являются свойствами нечетной функции, определенной на промежутке $[-6;6]$. Ее график при $x \geq 0$ приведен на рисунке.



1) График функции симметричен относительно начала координат.
2) График функции симметричен относительно оси ординат.
3) Функция имеет три нуля.
4) $f(x) > 0$ при $x \in (-5;-3)$.
5) Наибольшее значение функции равно 2.
6) Функция убывает на промежутке $[-4;-2]$.
7) Решением уравнения $f(x) = 2$ являются числа -5 и 1.
8) $f(5) \cdot f(-5) = -4$.
9) Уравнение $2^{x-1} = f(x)$ имеет три корня.
10) График уравнения $xy = -3$ имеет с графиком функции $f(x)$ три точки пересечения.

б) Нечетная функция $f(x)$ определена на множестве $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ и при $x > 0$ задается формулой $f(x) = 2^{3x-7} - 9$. Решите уравнение $f(x) = 7$.

в) Функция $f(x)$ определена при всех $x \in (-\infty;+\infty)$, является нечетной и при $x \leq 0$ задается формулой $f(x) = -x(6+x)$. Решите уравнение $f(x) = -5$.

г) Известно, что $f(x)$ — нечетная функция и $f(2) = -3$, $f(-3) = 2$. Найдите значение выражения $f(3) - f(f(2))$.

***6.39.** Нечетная функция $y = f(x)$ при $x > 0$ задана формулой

а) $1 + \log_2 x$. Решите уравнение $f(x) = 2$.	б) $(x-3)(x-5)$. Решите уравнение $f(x) = 1$.
в) $-\log_2 x$. Решите уравнение $f(x) = 1$.	г) Найдите абсциссы точек пересечения прямой $y = 2$ и графика нечетной функции, которая определена на множестве $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ и при $x > 0$ задается формулой $y = 2^{5x-9} - 6$.

Задачи, связанные с применением производной

6.40. Найдите производную функции

а) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 100\pi$;	б) $f(x) = \dfrac{2}{x^5} + \sqrt{x} + 1$;
в) $f(x) = 2x^5 + 7x - 4$;	г) $f(x) = x\sqrt{x} + \pi$.

6.41. Вычислите значение производной функции

а) $f(x) = x^2 - 5x + e^3$ в точке $x_0 = 3$;	б) $f(x) = \sqrt{x} + 2x^2 + \sin 5$ при $x_0 = 0{,}25$;
в) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + x - \sqrt{5}$ в точке $x_0 = 3$;	г) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x} + \ln 10$ в точке $x_0 = -2$.

6.42. Вычислите

а) $f'(-1)$, если $f(x)=2+\lvert x\rvert$;	б) $f'(-5)$, если $f(x)=x-\lvert x\rvert$;
в) $y'(1)$, если $y=\dfrac{12-7\lvert x\rvert}{2x-1}$;	г) $y'\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, если $y=\dfrac{x}{1+2\lvert x\rvert}$.

6.43. Найдите производную функции

а) $f(x)=2\operatorname{tg}\dfrac{11\pi}{3}+\sin x-\cos x$;	б) $f(x)=1+3\operatorname{tg}x+2\cos x$;
в) $f(x)=22+2(\sin x+\cos x)$;	г) $f(x)=3\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x-\sin 2$.

6.44. Найдите производную функции

а) $f(x)=\sin 2+e^2+\log_2 3$;	б) $f(x)=x\log_2 7-\cos 3$;
в) $f(x)=5^3-x^5\sin\pi$;	г) $f(x)=e^5-x^5\sin(1{,}5\pi)$.

6.45. Найдите производную функции

а) $f(x)=\dfrac{\cos(\pi-x)}{\sin(2\pi-x)}$;	б) $f(x)=\sin(6\pi-x)+\cos 8\pi$;
в) $f(x)=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x+\cos(2010\pi-x)$;	г) $f(x)=\dfrac{3x+2\sqrt{x}-5}{3\sqrt{x}+5}$.

6.46. Найдите производную функции

а) $f(x)=\lg 7+7^x+5\log_7 x$;	б) $f(x)=6^x+x^6-6$;
в) $f(x)=2e^x-5\ln x$;	г) $f(x)=e^x+\ln(x^3)+2$.

6.47. Найдите производную функции

а) $f(x)=x\cdot\sin x$;	б) $f(x)=x\cdot\ln x$;
в) $f(x)=x^3\cdot e^x$;	г) $f(x)=e^x\cdot\sin x$.

6.48. Найдите производную функции

а) $f(x)=\dfrac{2x-1}{3x+3}$;	б) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$;
в) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2}$;	г) $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x^3+3}$.

****6.49.** Найдите производную функции

а) $f(x)=\dfrac{3}{(2x-1)^3}+\sqrt{\dfrac{1}{1+3x}}$;	б) $f(x)=(3x-1)^3-\dfrac{2}{2x+5}$;
в) $f(x)=(1-x)^2+\sqrt{2-x}$;	г) $f(x)=(2x+1)^5+\sqrt{4x-3}$.

****6.50.**

а) В какой точке производная функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x+1}}{3}$ равна 0,5?	б) Решите уравнение $y'=42$, где $y=(13-7x)^6$.
в) В какой точке производная функции $f(x)=\ln(2x+1)$ равна 0,5?	г) В каких точках значение производной функции $y=x^5$ совпадает со значением самой функции в этих точках?

****6.51.** Найдите значение производной функции

а) $f(x)=\sin\dfrac{x+\pi}{3}$ в точке $x_0=\pi$;	б) $f(x)=\left(x^2-2x-1\right)^4$ в точке $x_0=0$;
в) $f(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)^5$ в точке $x_0=4$;	г) $f(x)=\ln^3 x$ в точке $x_0=e$.

**6.52. Найдите производную функции

а) $f(x)=e^{3x+1}+\cos 2x$;	б) $f(x)=\sin 2x+\cos(3x-1)$;
в) $f(x)=\operatorname{tg} 5x+\log_2(3-x)$;	г) $f(x)=e^{3x}+\sqrt{6x+1}+\ln(1-2x)$.

**6.53. Вычислите значение производной функции

а) $f'(\pi)$, если $f(x)=x^2\sin\dfrac{x}{2}$;	б) $f'(1)$, если $f(x)=xe^{2x}$;
в) $f'(0)$, если $f(x)=e^{-2x}\cos x$;	г) $f'(2)$, если $f(x)=\dfrac{\sin(2-x)}{x}$.

**6.54.

а) Функция $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$ является производной для функции: 1) $f(x)=-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; 3) $f(x)=-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; 4) $f(x)=-2\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; 5) $f(x)=-2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.	б) Для какой из данных функций $f'(x)=x$? 1) $f(x)=2x$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{2}$; 3) $f(x)=x^2$; 4) $f(x)=2x^2$; 5) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$; 6) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2}$.
в) Известно, что $f'(x)=\sqrt{x}$. Какая из данных функций может быть функцией $y=f(x)$? 1) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 2) $y=\dfrac{2}{3\sqrt{x}}$; 3) $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x^3}+3$; 4) $y=\sqrt{x^3}-1$; 5) $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+\pi$; 6) $y=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-1$.	г) Известно, что $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Какая из данных функций может быть функцией $y=f(x)$? 1) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$; 2) $y=\sqrt{1-x}$; 3) $y=2\sqrt{1-x}$; 4) $y=-2\sqrt{1-x}$; 5) $y=-\dfrac{\sqrt{1-x}}{2}$; 6) $y=-2\sqrt{1-x}+3$.

**6.55.

а) Рассмотрим функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что для любого действительного числа x верно равенство $f'(x)=g'(x)$. Какое из данных утверждений обязательно является истинным? 1) $f(x)=g(x)$; 2) $f(x)$ и $g(x)$ — константы; 3) $f(x)-g(x)$ — константа; 4) $f(x)+g(x)$ — константа.	б) Числа –5 и 1 — нули некоторой квадратичной функции. Найдите, в какой точке производная этой квадратичной функции обращается в нуль.
в) Найдите уравнение горизонтальной касательной к параболе $y=4x^2-8x+9$.	г) Найдите сумму абсцисс точек, в которых касательная к графику функции $y=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{10x^3}{3}-\dfrac{7x^2}{2}$ перпендикулярна оси Oy.

6.56. Найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции

а) $f(x)=x^3-27x$;	б) $f(x)=2x^4-2x^3-x^2+7$;
в) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$.	г) Найдите сумму всех натуральных чисел, принадлежащих промежутку возрастания функции $y=\dfrac{x^2+10}{-10x}$.

**6.57. При каких значениях параметра a функция

а) $f(x)=x^3-ax^2+3ax+2$ возрастает на всей числовой прямой?	б) $f(x)=x^3+ax^2-2ax+3$ возрастает на всей числовой прямой?

в) $f(x)=(a-8)x^3-3(a-8)x^2-12x-3$ убывает на всей числовой прямой?	г) $f(x)=(a-12)x^3+3(a-12)x^2+6x-5$ возрастает на всей числовой прямой?

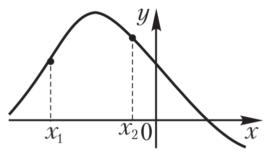
****6.58.** Найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции

а) $f(x)=(3x-1)e^{2x}-77$;	б) $f(x)=(2x-1)e^{3x}+e$.
в) Сколько натуральных чисел принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)=\dfrac{e^x}{x-2}$?	г) Найдите середину промежутка убывания функции $f(x)=x-2\ln x$.

6.59. Пользуясь графиком функции $y=f(x)$

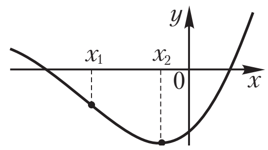
а) сравните значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

1) $f'(x_1)>f'(x_2)$; 2) $f'(x_1)<f'(x_2)$;
3) $f'(x_1)=f'(x_2)$; 4) сравнить невозможно.



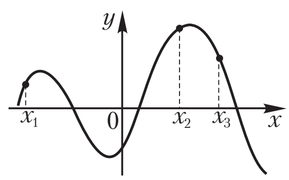
б) сравните значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

1) $f'(x_1)>f'(x_2)$; 2) $f'(x_1)<f'(x_2)$;
3) $f'(x_1)=f'(x_2)$; 4) сравнить невозможно.



в) среди приведенных неравенств укажите верное.

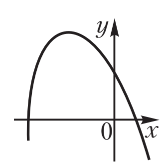
1) $f'(x_1)<f'(x_3)<f'(x_2)$; 2) $f'(x_1)<f'(x_2)<f'(x_3)$;
3) $f'(x_3)<f'(x_2)<f'(x_1)$; 4) $f'(x_3)<f'(x_1)<f'(x_2)$;
5) $f'(x_2)<f'(x_3)<f'(x_1)$.

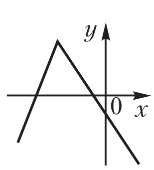
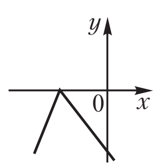
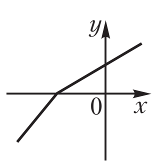
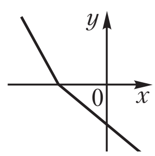
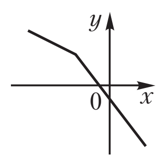


г) Известно, что для любого x из промежутка $[a;b]$ для функции $f(x)$ выполняется неравенство $f'(x)>0$. Сравните значения $f(a)$ и $f(b)$.

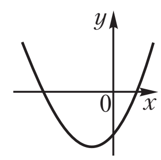
6.60.

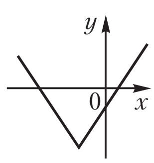
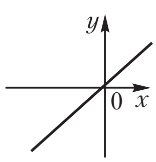
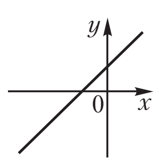
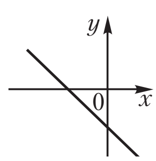
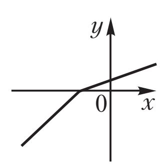
а) На рисунке изображен график функции $y=f(x)$.
Среди приведенных графиков укажите тот, который может быть графиком функции $y=f'(x)$.



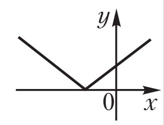
1) 
2) 
3) 
4) 
5) 

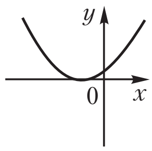
б) На рисунке изображена парабола — график функции $y=f(x)$.
Среди приведенных графиков укажите тот, который может быть графиком функции $y=f'(x)$.

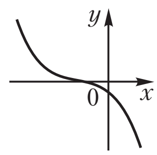


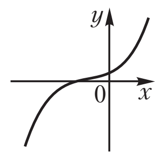
1) 
2) 
3) 
4) 
5) 

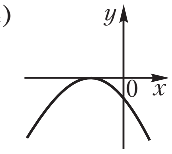
в) На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$.
Среди приведенных графиков укажите тот, который может быть графиком функции $y = f(x)$.

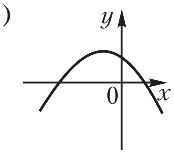


1) 

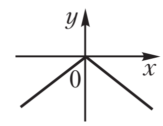
2) 

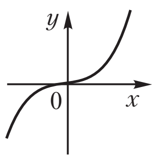
3) 

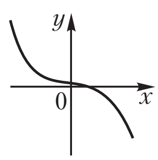
4) 

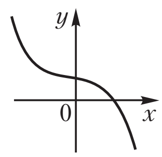
5) 

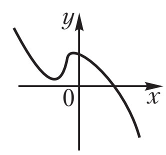
г) На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$.
Среди приведенных графиков укажите те, которые могут быть графиками функции $y = f(x)$.

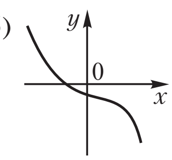


1) 

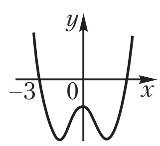
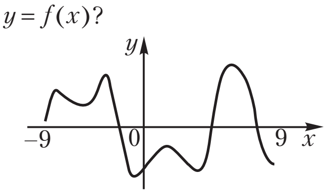
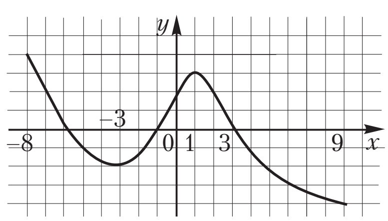
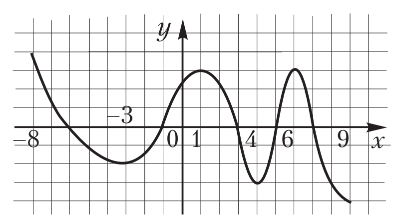
2) 

3) 

4) 

5) 

6.61.

а) На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на множестве $[-3;3]$. Сколько промежутков убывания имеет функция $y = f(x)$?  	б) На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на множестве $[-9;9]$. Сколько промежутков возрастания имеет функция $y = f(x)$? 
в) Функция $y = f(x)$ определена на множестве $[-8;9]$ и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$. Определите промежутки возрастания функции $y = f(x)$.  	г) Функция $y = f(x)$ определена на множестве $[-8;9]$ и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$. Определите промежутки убывания функции $y = f(x)$. 

6.62.

а) Какая из данных функций имеет хотя бы одну точку, в которой возможен экстремум? 1) $f(x) = x$; 2) $f(x) = x^5 + 1$; 3) $f(x) = x^5 + x$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} x$.	б) Какая из данных функций не имеет точек, в которых возможен экстремум? 1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = x^3 + 1$; 3) $f(x) = x^3 + x$; 4) $f(x) = x^3 + x^2$.
в) При каком значении c функция $y = x^3 - 2{,}4x^2 + cx - 8{,}4$ не имеет экстремума в критической точке?	г) Найдите значение x или сумму значений, если их несколько, при котором функция $y = 10 \cdot \ln(x-4) - x^2 - 11$ имеет экстремум.

6.63.

а) Найдите точку максимума и минимума функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x}{x - 9}$.	б) Найдите точки экстремума функции $y = (x-1)^3(x-2)^3$.

в) Даны функции: а) $y=3x^2-12x+5$; б) $y=\operatorname{tg}(\pi x)$; в) $y=3-(x-2)^6$; г) $y=-0{,}5x^2+2x-3$; д) $y=\sin\dfrac{3\pi x}{4}$. Укажите те из них, для которых $x=2$ есть точка минимума.	г) Найдите все значения a, при которых точка $x_0=1{,}25$ является точкой максимума функции $y=\sqrt[3]{-4x^2-2ax+a}$.

6.64.

а) Найдите значения функции $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x-2\dfrac{1}{3}$ в точке максимума и в точке минимума.	б) Если m и M — значения функции $f(x)=\dfrac{6}{5}x+\dfrac{30}{x+3}$ в точках минимума и максимума соответственно, то чему равно значение выражения $m+2M$?
в) Найдите наибольшее значение a, при котором $x=6$ является точкой экстремума функции $y=(x-a)^3-3x+a$.	г) Пусть x_1 и x_2 — соответственно точка максимума и точка минимума функции $f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x+1$. При каких значениях a выполняется равенство $x_1^2=x_2$?

****6.65.**

а) При каких значениях a функция $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-(a-1)\dfrac{x^2}{2}-2(a-1)x-9$ имеет положительную точку минимума?	б) При каких значениях параметра a функция $y=4\ln x+ax+5$ не имеет точек, в которых возможен экстремум?
в) Сколько точек, подозрительных на экстремум, имеет функция $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$ на промежутке $[-a;a]$ в зависимости от значений параметра a $(a>0)$?	г) В зависимости от значений параметра a найдите точку минимума функции $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{a+1}{2}x^2+ax+1$.

6.66. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

а) $f(x)=2x^3-3x^2-12x-1$ на промежутке $[0;3]$;	б) $f(x)=2+3x^2-x^3$ на промежутке $[-1;1]$;
в) $f(x)=1+\dfrac{4}{x^2}+x$ на промежутке $[1;4]$;	г) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}-2$ на промежутке $[-2;3]$.

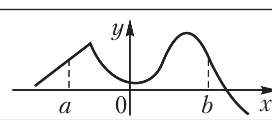
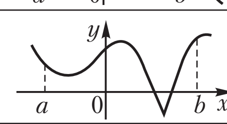
***6.67.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

а) $y=\left\|x^3+6x^2+9x+1\right\|$ на промежутке $[-3;1]$;	б) $f(x)=x^2+\|2x+1\|$ на промежутке $[-1;0]$;
в) $f(x)=-x^3+3x\|x-3\|$ на промежутке $[0;4]$.	г) Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)=\sqrt{81-x^2}$ на отрезке $\left[-3\sqrt{5};4\sqrt{2}\right]$.

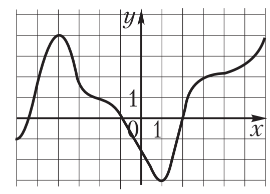
***6.68.**

а) Сколько точек пересечения с осью абсцисс имеет график функции $y=x^3-x^2+2x-10$?	б) Сколько корней имеет уравнение $x^3-12x+1=0$?
в) Сколько корней имеет уравнение $x^3+3x^2-5=0$?	г) Найдите длину интервала значений параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3-2x^2+x=a$ имеет три различных корня.

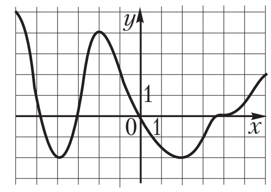
6.69.

а) Сколько точек экстремума на промежутке $[a;b]$ имеет функция, график которой изображен на рисунке?	
б) Сколько точек экстремума на промежутке $[a;b]$ имеет функция, график которой изображен на рисунке?	

в) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на множестве $[-6;6]$. Укажите все точки, в которых $f'(x) = 0$.

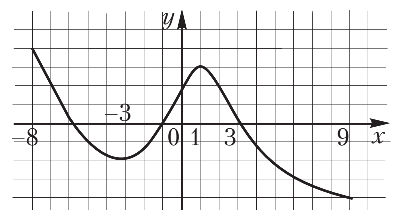


г) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на множестве $[-6;6]$. Укажите все точки, в которых $f'(x) = 0$.

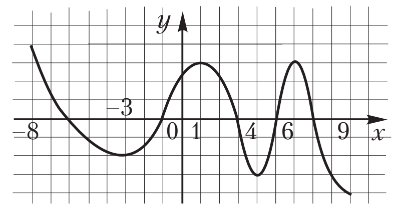


6.70.

а) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-8; 9]$. Укажите все точки минимума данной функции.

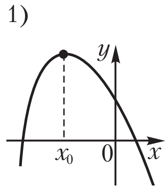


б) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-8; 9]$. Укажите все точки максимума данной функции.

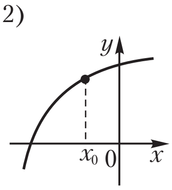


в) В каком случае точка x_0 является точкой максимума функции, график которой изображен на рисунке?

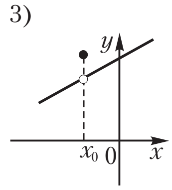
1)



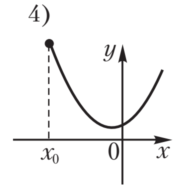
2)



3)

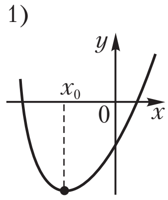


4)

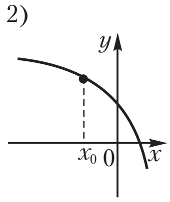


г) В каком случае точка x_0 является точкой минимума функции, график которой изображен на рисунке?

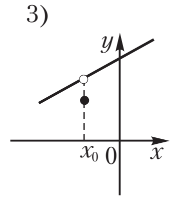
1)



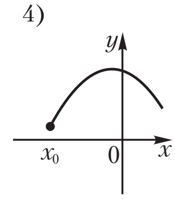
2)



3)

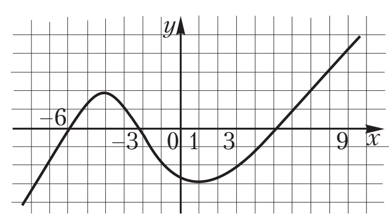


4)

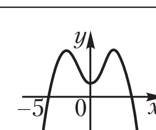


6.71.

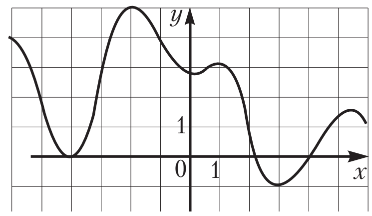
а) Функция $y = f(x)$ определена на множестве $[-8; 9]$ и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке изображен график $y = f'(x)$. Найдите точки экстремума функции $y = f(x)$.



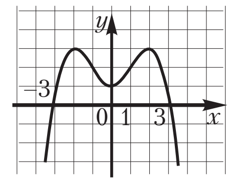
б) Функция $y = f(x)$ определена на множестве $[-5; 5]$ и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке изображен график $y = f'(x)$. Сколько точек экстремума имеет функция $y = f(x)$?



в) Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-5;7)$ и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$. Сколько точек экстремума имеет функция $y = f(x)$? В каких точках касательная к графику $y = f(x)$ перпендикулярна оси ординат?

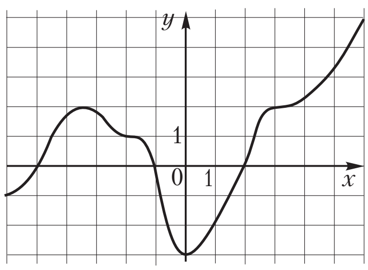


г) Функция $y = f(x)$ определена при $x \in [-4;4]$ и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке изображен график $y = f'(x)$. Найдите точки минимума функции $y = f(x)$.



6.72.

а) Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-6;6)$ и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$. Укажите для функции $f(x)$:



1) промежутки возрастания;

2) промежутки убывания;

3) точку минимума на промежутке $[-1;3]$;

4) точку максимума на интервале $(-5;2)$;

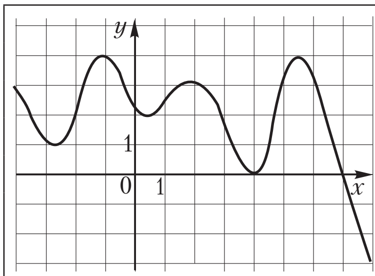
5) точки экстремума;

6) количество точек, в которых касательная к графику $y = f(x)$ образует угол 135° с положительным направлением оси абсцисс;

7) точку на отрезке $[-3;2]$, в которой функция принимает наибольшее значение;

8) точку на отрезке $[3;5]$, в которой функция принимает наименьшее значение.

б) Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-4;8)$ и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$. Укажите для функции $f(x)$:



1) промежутки возрастания;

2) промежутки убывания;

3) точку минимума;

4) точку максимума;

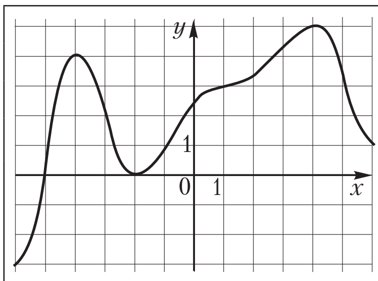
5) точки экстремума;

6) количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ составляет с положительным направлением оси абсцисс угол 45°;

7) точку на отрезке $[-3;3]$, в которой функция принимает наибольшее значение;

8) точку на отрезке $[-3;3]$, в которой функция принимает наименьшее значение.

в) Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-6;6)$ и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$. Укажите для функции $f(x)$:



1) промежутки возрастания;

2) промежутки убывания;

3) точку минимума;

4) точку максимума;

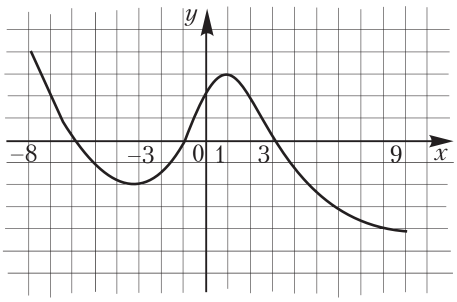
5) абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ перпендикулярна оси ординат;

6) угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$;

7) точку на отрезке $[-4;5]$, в которой функция принимает наибольшее значение;

8) точку на отрезке $[-5;0]$, в которой функция принимает наименьшее значение.

г) Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-8; 9)$ и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$. Укажите для функции $f(x)$:



1) промежутки возрастания;

2) промежутки убывания;

3) точку минимума;

4) точку максимума;

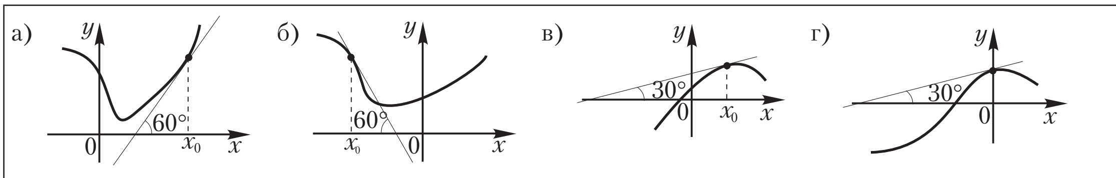
5) количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ составляет с положительным направлением оси абсцисс угол 60°;

6) угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$;

7) точку на отрезке $[-5;3]$, в которой функция принимает наименьшее значение;

8) точку на отрезке $[-3;2]$, в которой функция принимает наибольшее значение.

6.73. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$

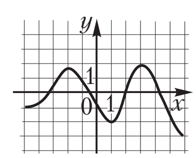


6.74. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции

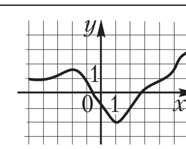
а) $y = x^2 - 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$?	б) $y = 6\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 9$?
в) $y = \dfrac{16}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$?	г) $y = e^{-7x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$?

6.75.

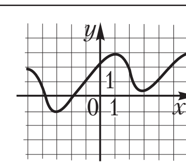
а) К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$ проведена касательная. Найдите ее угловой коэффициент, если на рисунке изображен график $y = f'(x)$.



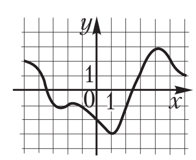
б) К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 проведена касательная. Известно, что ее угловой коэффициент равен -2. Найдите значение x_0, если на рисунке изображен график $y = f'(x)$.



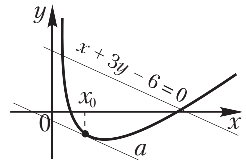
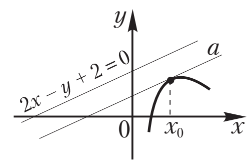
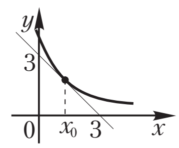
в) К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 проведена касательная, которая составляет с положительным направлением оси абсцисс угол 135°. Найдите значение x_0, если на рисунке изображен график $y = f'(x)$.



г) К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 проведена касательная, параллельная прямой $y - 3x = 2011$. Найдите значение x_0, если на рисунке изображен график $y = f'(x)$.



6.76.

а) Прямые a и b, изображенные на рисунке, параллельны, причем прямая a является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, а уравнение прямой b имеет вид $x + 3y - 6 = 0$. Найдите значение $f'(x_0)$. 
б) Прямые a и b, изображенные на рисунке, параллельны, причем прямая a является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, а уравнение прямой b имеет вид $2x - y + 2 = 0$. Найдите значение $f'(x_0)$. 
в) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Чему равно значение $f'(x_0)$? 
г) К графику функции $y = \frac{a^2}{x}$ в точке $(a;a)$ проведена касательная. Найдите угол наклона этой касательной к положительному направлению оси Ox.

***6.77.**

а) Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 4x - x^2$, в которой угловой коэффициент касательной к данному графику равен 2.	б) Сумма угловых коэффициентов касательных к параболе $y = 3x^2 - 15x + 7$ в ее вершине и в точке с абсциссой x_0 равна 9. Найдите значение x_0.
в) Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 1$ наклонена к оси абсцисс под углом 45°.	г) Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$ наклонена к оси абсцисс под углом $\alpha = 3\pi / 4$.

***6.78.**

а) Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = x^2 - 4x$, в которой касательная к этому графику параллельна прямой $y = 6x - 7$.	б) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 0{,}4x^2 + 3x - 9$, параллельной прямой $y = 7x - 6$.
в) Найдите все значения a, при каждом из которых касательная к графику функции $y(x) = \cos 7x + 7\cos x$ в точке с абсциссой a параллельна касательной к этому же графику в точке с абсциссой $\pi / 6$.	г) Найдите все значения a, при каждом из которых касательные к графикам функций $y(x) = 3\cos 5x$ и $y(x) = 5\cos 3x + 2$ в точках с абсциссой a параллельны.

***6.79.**

а) К графику функции $y = \frac{4}{x^2} + x + 2$ проведена касательная, составляющая с осью Ox угол, равный $\operatorname{arctg} 2$. Найдите абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox.	б) На графике функции $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 22x - 28$ найдите точку, касательная в которой к этому графику пересекает положительные полуоси, отсекая от них равные отрезки.
в) Касательная к графику функции $y = 4x - x^2 - 2$ пересекает положительную полуось оси абсцисс в точке A, а положительную полуось оси ординат — в точке B. Известно, что $BO = 2 \cdot AO$, где точка O — начало координат. Найдите длину отрезка AB.	г) На графике функции $y(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ найдите все точки, касательная в каждой из которых к этому графику отсекает от положительной полуоси Ox вдвое меньший отрезок, чем от отрицательной полуоси Oy. Определите длины отсекаемых отрезков.

6.80. Найдите уравнение касательной к графику функции

а) $f(x) = x^3 - 5x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$;	б) $f(x) = \cos^2 x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
в) $y = x^2 - 6x + 5$ в точке ее пересечения с осью ординат.	г) Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 3$ в каждой точке графика с ординатой 5.

***6.81.**

а) Найдите сумму координат центра окружности, описанной около треугольника, образованного осями координат и касательной к гиперболе $y=\frac{18}{x}$ в точке $A(2;9)$.	б) На гиперболе $y=\frac{1}{x}$, $x<0$ задана точка $M(x_0;y_0)$ такая, что $y_0=\frac{1}{4}x_0$. Найдите площадь треугольника, образованного касательной к гиперболе в точке M и осями координат.
в) Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y=\frac{3x+1}{2x-1}$: первая — в точке на графике с абсциссой $x=-1$, а вторая — в точке с абсциссой $x=3$.	г) Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=x$, $y=-x$ и касательной к кривой $y=\sqrt{x^2-5}$ в точке с координатами $(3;2)$.

***6.82.**

а) Прямая $y=6x-7$ касается параболы $f(x)=x^2+bx+c$ в точке $M(2;5)$. Найдите уравнение параболы.	б) Прямая $y=4x+2$ касается параболы $f(x)=x^2+bx+c$ в точке $M(1;6)$. Найдите уравнение параболы.
в) Прямая $y=2x-1$ касается параболы $y=x^2+bx+c$ в точке $K(2;3)$. Найдите уравнение параболы.	г) Прямые $y=4x-13$ и $y=-4x+3$ касаются параболы $y=x^2+bx+c$. Найдите уравнение параболы.

***6.83.**

а) В какой точке плоскости xOy прямая $x+4y=4$ касается гиперболы $y=\frac{1}{x}$?	б) Найдите все значения b, при которых прямая $y=15x+b$ касается графика функции $y=2x^3-9x-3$.
в) На параболе $y=x^2$ выбраны две точки с абсциссами $x=1$ и $x=3$. Через эти точки провели прямую. Найдите уравнение касательной к параболе $y=x^2$, параллельной этой прямой.	г) Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y=x-a$ касается графика функции $y=-\frac{1}{x}-3x$.

***6.84.**

а) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=-x^2+4$, перпендикулярной прямой $x-2y+1=0$.	б) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=-x^2-3$, перпендикулярной прямой $x-y+7=0$.
в) На графике функции $y(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{18}{5}x+\frac{14}{5}$ найдите все точки, касательная в каждой из которых к этому графику перпендикулярна прямой $5x-3y+2=0$.	г) В какой точке нужно провести касательную к графику функции $y=x^2+2x-3$, чтобы она была перпендикулярна касательной, проведенной к этому графику в точке пересечения его с осью ординат? Найдите уравнения обеих касательных.

****6.85.** Найдите уравнения касательных к графику функции

а) $f(x)=\frac{1}{x}$, проходящих через точку $M(-1;3)$;	б) $f(x)=x^2$, проходящих через точку $M(1;-3)$;
в) $f(x)=x^2+4$, проходящих через начало координат;	г) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, проходящих через точку $M(0;2)$.

****6.86.**

а) К графику функции $f(x)=\frac{x+9}{x+5}$ проведены касательные, проходящие через начало координат. Найдите уравнение каждой из них.	б) К графику функции $f(x)=3x^2+4$ проведены касательные, проходящие через точку $(0;-8)$. Найдите уравнение каждой из них.
в) При каком значении параметра a прямая $y=ax+4$ касается графика функции $y=-\frac{10}{x}$?	г) При каком значении k прямая $y=kx+5$ касается графика функции $y=-\frac{4}{x}$?

6.87. Найдите уравнение общей касательной к параболам

а) $f(x)=x^2-2x+5$ и $g(x)=x^2+2x-11$;	б) $y=x^2+4x+8$ и $y=x^2+8x+4$;
в) $y=-x^2+6x+2$ и $y=4x^2+6x+\frac{13}{4}$;	г) $y=-x^2-4x-3$ и $y=x^2-8x+17$.

6.88.

а) Хорда параболы $y=-k^2x^2-5kx-4$ касается кривой $y=\frac{1}{1-x}$ в точке с абсциссой $x=2$ и делится этой точкой пополам. Найдите значение k.	б) Найдите значение a, при котором касательная к параболе $y=2x^2+3x+5$ в точке $x_0=-2$ является касательной к параболе $y=-x^2+4x+a$.
в) Найдите уравнение такой касательной к графику $y=x^3+2x$, для которой существует параллельная касательная к графику $y=\sin 2x$.	г) Найдите уравнения двух параллельных касательных соответственно к графикам $y=\sin 2x-3x^3$ и $y=\frac{x^3}{3}+2x^2+6x$.

6.89.

а) При каком уменьшаемом разность будет наибольшей, если вычитаемое равно удвоенному квадрату уменьшаемого?	б) Найдите число, которое превышает свой квадрат на максимальное значение.
в) Найдите положительное число, которое в сумме с обратным ему числом дает наименьшую сумму.	г) Найдите число, утроенный квадрат которого превышает его куб на максимальное значение.

6.90.

а) Число 36 разложите на два таких положительных множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.	б) Число 8 разложите на два слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.
в) Число 180 представьте в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы два из них относились как 1 : 2, а произведение этих чисел было наибольшим.	г) Число 1,25 представьте в виде произведения трех положительных сомножителей так, чтобы произведение первого сомножителя на квадрат второго равнялось 5 и чтобы сумма всех трех сомножителей была наименьшей.

6.91.

а) Треугольник ограничен осями координат и касательной к графику функции $y=-(x-3)^2$ в точке с абсциссой $x_0\in[0;2,5]$. Найдите наибольшую возможную площадь такого треугольника.	б) Из всех прямоугольников, у которых две вершины лежат на интервале $(-2;2)$ оси абсцисс, а две другие — на графике функции $y=4-x^2$, найдите прямоугольник наибольшей площади и вычислите эту площадь.
в) На координатной плоскости xOy рассматривается прямоугольник $ABCD$, у которого сторона AB лежит на оси ординат, вершина C лежит на параболе $y=x^2-4x+3$, вершина D лежит на параболе $y=-x^2+2x-2$, а абсцисса вершины D принадлежит отрезку $[0,8;1,5]$. Какое значение должна иметь абсцисса вершины D, чтобы площадь прямоугольника $ABCD$ была наибольшей?	г) На координатной плоскости xOy рассматривается треугольник ABC, у которого вершина A совпадает с началом координат, вершина B лежит на параболе $y=3x^2-10x+2$, вершина C лежит на параболе $y=-2x^2+5x-10$, сторона BC параллельна оси ординат, а абсцисса вершины B принадлежит отрезку $[0,6;1,5]$. Какое значение должна иметь абсцисса вершины B, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

6.92.

а) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. Какими должны быть катеты этого треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?	б) Необходимо огородить забором длиной 160 м прямоугольный участок земли, примыкающий к стене здания. Найдите размеры прямоугольника, при которых площадь участка максимальна.
в) Найдите наименьшую длину забора, с помощью которого можно огородить прямоугольный участок земли площади S, примыкающий к стене здания.	г) На странице книги печатный текст должен занимать площадь S; верхнее и нижнее поля должны быть шириной a, а правое и левое — шириной b. Если брать во внимание только экономию бумаги, то какими должны быть размеры печатного текста?

***6.93.**

а) Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6 см. Найдите среди них параллелепипед с наибольшим объемом и запишите в ответ этот объем.	б) Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 32 см^3, а основания являются квадратами. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и запишите в ответ этот периметр.
в) В правильной четырехугольной призме диагональ равна d. При какой высоте призмы ее объем будет наибольшим?	г) Найдите размеры открытого бассейна объема V с дном в форме прямоугольника, стороны которого относятся как $1:3$, чтобы на облицовку его дна и стенок ушло наименьшее количество материала.

***6.94.**

а) В шар объема V вписан цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность. Найдите объем этого цилиндра.	б) В сферу радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите высоту этого цилиндра.
в) Площадь сферы, вписанной в конус, равна S. Какова наименьшая площадь поверхности этого конуса?	г) Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

****6.95.**

а) Материальная точка движется по закону $s(t)=3t^2-12t+18$ (время t измеряется в секундах, перемещение s — в метрах). В какой момент времени после начала движения точка остановится?	б) При движении тела по прямой расстояние s (в метрах) изменяется по закону $s(t)=3t^2-2t+4$ (t — время движения в секундах). Найдите скорость тела через 2 с после начала движения.
в) Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $s_1(t)=3t^2+2t+7$ и $s_2(t)=0{,}5t^2+7t-3$ (время t измеряется в секундах, перемещение s — в метрах). В какой момент времени скорость второй точки в два раза меньше скорости первой?	г) Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)=-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}x^2-2t+\frac{1}{6}$ (время t измеряется в секундах, перемещение s — в метрах). В какой момент времени скорость движения точки будет наибольшей, если $t\in[0;3]$?

7. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение называется ***рациональным***, если и левая, и правая части — рациональные выражения (см. § 0). То есть если в нем над неизвестными выполняются только рациональные алгебраические операции: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в натуральную степень (причем конечное число таких операций).

Дробно рациональное уравнение — рациональное уравнение, в котором левая или правая часть является дробным выражением.

Решением, или ***корнем***, уравнения $f(x)=g(x)$ называется такое число x_0, при подстановке которого вместо x в обе части уравнения получается верное числовое равенство, то есть при x_0 обе части уравнения определены (одновременно имеют смысл) и их значения совпадают (№ 4.9). ***Решить уравнение*** — значит найти все его корни (решения) или показать, что оно решений не имеет.

Прежде чем начинать любые иные преобразования, вынесите общий множитель за скобки, упростите дроби, приведите подобные слагаемые (№ 7.11, 7.12).

Основными методами решения являются:

- приведение дробей к общему знаменателю (№ 7.3—7.7);
- разложение на множители группировкой (№ 7.24), с помощью формул сокращенного умножения (№ 7.9, 7.10), методом неопределенных коэффициентов (№ 7.23, 7.25);
- замена переменных (№ 7.15—7.18, 7.26, 7.27, 4.11, 4.13). Важно, чтобы новая переменная не просто упрощала уравнение, а максимально его упрощала (№ 7.15, 7.17). Часто замена сразу не видна. Приходится искать, где автор задачи «спрятал» ее (№ 7.16, 7.18), или знать часто встречающиеся ситуации (№ 7.18, 7.26);
- использование однородности уравнения (№ 7.21);
- выделение целой части в каждой из дробей (№ 7.13);
- использование производной пропорции (№ 7.22);
- выделение полного квадрата (№ 7.20);
- разложение каждой из дробей на сумму простейших (№ 7.13);
- графический метод, метод оценок (№ 7.28—7.31).

7.1. Решите уравнение

а) $\dfrac{x^2-7x+6}{18-3x}=0;$	б) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-2}=0;$
в) $\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}=2.$	г) При каких значениях x функция $y=\dfrac{x^2+6x+5}{x+1}$ принимает значение, равное 4?

7.2. Решите уравнение

а) $\dfrac{5x+1}{x+2}-\dfrac{16x+32}{45x+9}=0;$	б) $\dfrac{1}{x^2+2x+3}=\dfrac{1}{x+5}.$
в) При каких значениях x совпадают значения функций $y=\dfrac{1}{x+7}$ и $y=\dfrac{1}{x^2+5x+2}$?	г) При каких значениях x пересекаются графики функций $y=\dfrac{2}{x+1}$ и $y=\dfrac{x}{x^2+x-1}$?

7.3. Решите уравнение

а) $\dfrac{2x^2+x+3}{x^2+x}=3;$	б) $\dfrac{x(x+5)}{x+1}=2x+1;$
в) $\dfrac{2x^2-x}{x+2}=x+2.$	г) При каких значениях x график функции $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}-1$ пересекает ось абсцисс?

7.4. Решите уравнение

а) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3}{4};$	б) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{x+3}=\dfrac{2}{x-2}.$
в) При каких значениях x график функции $y=\dfrac{3x+1}{x-3}-\dfrac{2x-3}{4x+3}$ пересекается с прямой $y=-\dfrac{9}{2}$?	г) При каких значениях x не имеет смысла выражение $\dfrac{1}{\dfrac{2x-5}{3x+1}-5{,}5-\dfrac{21x+7}{5-2x}}$?

***7.5.** Решите уравнение

а) $\frac{8}{x^2+4x}-\frac{2^5}{x^2-4x}=\frac{1}{x}$;	б) $\frac{x}{x+8}+\frac{x+8}{x-8}=\frac{x^2+x+72}{x^2-64}$;
в) $\frac{5}{x^2-4x+4}=\frac{4}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}$.	г) При каких значениях x график функции $y=\frac{1}{x}+\frac{x-2}{x(x+2)}-\frac{4x}{x^2+4(x+1)}$ пересекает ось абсцисс?

***7.6.** Решите уравнение

а) $\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{2}{x^2-5x+6}=0$;	б) $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{3}{x^2-5x+6}=0$;
в) $\frac{x^2+x+16}{x^2-x+1}-\frac{36-x}{x^3+1}=\frac{x-6}{x+1}$.	г) Найдите нули функции $y=\frac{65}{1-x^3}-\frac{10-17x}{x^2+x+1}-\frac{25}{x-1}$.

***7.7.** Решите уравнение

а) $\frac{x(8-4x)}{1-x^2}+\frac{4x-x^3}{x+1}=0$;	б) $\frac{x^2-1}{x-2}=\frac{x^2-1}{2x+1}$;
в) $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$;	г) $(x-2)(x^2+2x+1)=x^2+3x-10$.

***7.8.** Решите уравнение

а) $(x+1)(x^2+5x-6)=x-1$;	б) $52(32-2x^2)(3-x)=(2x+8)^2(13x-39)$;
в) $3x(x^2-2)=x^4-4$;	г) $(x^2+13)^2-14x(x^2+13)=0$.

***7.9.** Решите уравнение

а) $(2x^2+2x-4)^2=(x^2+2x-1)^2$;	б) $(x^2+1)^2=(x^2+2x-1)^2$.
в) Найдите нули функции $y=x^2(x+1)^2-(x^2-x-3)^2$.	г) $0{,}01x^4+0{,}01-0{,}02x^2=(0{,}1x^2+0{,}1x-0{,}3)^2$.

****7.10.** Решите уравнение

а) $(x^2+2x-1)^2=(2x^2+x+1)^2-(x^2-x+2)^2$;	б) $(x^2-x-1)^2+(x+2)^2=(x^2+1)^2$;
в) $1=\frac{(x^2+1)^2-(x+2)^2}{x^2+x+3}$.	г) При каких значениях x выражение $x^2-3x+2+\frac{(x^2-9x-10)^2}{x^2-3x+2}-\frac{36(x+2)^2}{x^2-3x+2}$ обращается в нуль?

***7.11.** Решите уравнение

а) $x-3=\frac{x^2+2x-15}{x^2+2x+1}$;	б) $x+2=\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-2}$;
в) $4-2x=\frac{x(x+1)-6}{x(x-2)-1}$;	г) $x+3^{\lg 10}=\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-1}$.

***7.12.** Решите уравнение

а) $\frac{x^2+8x+15}{x+3}=7x^2+x-2$;	б) $\frac{x^2+8x-20}{x-2}=5x^2+2x+4$;
в) $\frac{x^2-8x+15}{x-3}=\frac{2x^2-x-1}{x-1}+x^2-8$.	г) При каких значениях x график функции $y=\frac{x^2-x-6}{x+2}$ пересекается с параболой $y=6x^2-3x-5$?

***7.13.** Решите уравнение

а) $\dfrac{2x+1}{x}+\dfrac{2x+3}{x+1}+\dfrac{2x+5}{x+2}=6;$	б) $\dfrac{2x^2+x^3-3x}{x^2-3}+\dfrac{3x^2-3}{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}=7+x;$
в) $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=$ $=\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3};$	г) $112+19\left(\dfrac{8-3x}{x+3}+\dfrac{3-2x}{x+7}\right)=17\left(\dfrac{15-x}{4+x}+\dfrac{2x+31}{6+x}\right).$

7.14. Решите уравнение

а) $\dfrac{x^2+x+3}{(x+1)(x^2+2)}+\dfrac{x^2-x-1}{(x+3)(x^2+2)}=\dfrac{3}{4};$	б) $\dfrac{x^2+x+6}{(x+1)(x^2+5)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2+x+8}{(x+3)(x^2+5)};$
в) $\dfrac{7x-1}{(2x-1)(x+2)}-\dfrac{1+2x}{x^2+3x+1}=1{,}5;$	г) $\dfrac{x^2+2x-6}{(x-1)(x^2-4)}=\dfrac{x^2+2x}{(x+2)(x-1)(x-2)}+\dfrac{3}{4}.$

***7.15.** Решите уравнение

а) $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{1}{x^2-2x+3}=\dfrac{9}{2x^2-4x+8};$	б) $\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+1}+\dfrac{1}{12}.$
в) При каких значениях x пересекаются графики функций $f(x)=1-\dfrac{5}{x(x+3)}$ и $g(x)=\dfrac{6}{x^2+3x+2}$?	г) Найдите нули функции $y=\dfrac{1}{6x^2-7x-1}+\dfrac{2}{12x^2-14x-2}+3.$

***7.16.** Решите уравнение

а) $(2x^2+3x-2)(5-6x-4x^2)=-5(2x^2+3x+2);$	б) $(x+1)(x+5)=\dfrac{12}{x^2+6x+6};$
в) $(x+1)(x+2)(x+5)(x+4)=10;$	г) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}=0.$

***7.17.** Решите уравнение

а) $\dfrac{x-2}{x+2}-4\dfrac{x+2}{x-2}=0;$	б) $\dfrac{x}{(x-1)^2}+\dfrac{4(x-1)^2}{x}=4.$
в) При каких значениях x график функции $y=\dfrac{2}{2x^2+x-1}-\left(2x^2+x-2\right)$ пересекает ось абсцисс?	г) Найдите нули функции $y=\dfrac{4}{x^2+4x+2}-x\left(x+4\right)+1.$

****7.18.** Решите уравнение

а) $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2;$	б) $\left(x^2-6x-9\right)^2=x^3-4x^2-9x;$
в) $(x+2)(x+3)=\dfrac{4x^2}{(x+12)(x+8)};$	г) $\dfrac{x^2-13x+15}{x^2-14x+15}-\dfrac{x^2-15x+15}{x^2-16x+15}=-\dfrac{1}{12}.$

7.19. Решите уравнение

а) $\dfrac{(x^2-1)^2}{x(x^2-x+1)}=\dfrac{3}{2};$	б) $\dfrac{(1+x^2)^2}{4(1-x^2)}=x;$
в) $\left(\dfrac{1+x^2}{25}\right)^2=\dfrac{x(1+x)^2}{112};$	г) $\dfrac{x^4+1}{x(x^2+1)}=\dfrac{41}{15}.$

****7.20.** Решите уравнение

а) $x^2\left(1+\frac{81}{(9+x)^2}\right)=40;$	б) $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8;$
в) $\left(\frac{4x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{4x}{x-1}\right)^2=45;$	г) $x^2(x+2)^2+4x^2=5(x+2)^2.$

****7.21.** Решите уравнение

а) $2(x^2-1)^2-(x^4-1)-(x^2+1)^2=0;$	б) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+3\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}-4\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2=0;$
в) $(x-1)^2+\frac{x^2-1}{x}=2\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.$	г) При каких значениях x совпадают значения функций $f(x)=6\frac{x^2}{(x-2)^2}$ и $g(x)=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-\frac{x}{x+1}$?

****7.22.** Решите уравнение

а) $\frac{x^2+1}{x^2-2x+2}=\frac{2x^2+x}{2x^2-x+1};$	б) $\frac{x^2+2}{x^2-2x}=\frac{2x^2+x+1}{1-3x};$
в) $\frac{(x^2+1)(3x^2-x-1)}{x^2-x}=3x^2+x+1.$	г) При каких значениях x совпадают значения функций $y=\frac{2x^2+3}{2x^2-x}$ и $y=\frac{x^2+x+4}{x^2+1}$?

***7.23.** Решите уравнение

а) $x^3-3x^2+3x=9;$	б) $x^2(x+3)+3x=7;$
в) $x^3+3x^2+3x=26.$	г) Найдите нули функции $y=x^3-3x^2+3x-4.$

***7.24.** Решите уравнение

а) $x^3+x-2=0;$	б) $x^3+x^2+2x+2=0;$
в) $4+6x+2x^2+3x^3=0.$	г) При каких значениях x график функции $y=-3x^3+4x^2-4x+1$ пересекает ось абсцисс?

****7.25.** Решите уравнение

а) $x^4+2x^3+2x^2+x-2=0;$	б) $x^4+x^3+x-1=0;$
в) $x^4+x^3-x^2-2x-2=0;$	г) $x^2+2x-2\sqrt{x^2+2x}-6\sqrt[4]{x^2+2x}=3+2\sqrt[4]{x^2+2x}.$

****7.26.** Решите уравнение

а) $x^2+\frac{9}{x^2}+x-\frac{3}{x}=8;$	б) $18x^2+\frac{8}{x^2}=3\lvert x\rvert-\frac{2}{\lvert x\rvert}+25.$
в) При каких значениях x функция $y=x\left(x+\frac{4}{x^2}\right)+x\left(\frac{4}{x^3}+2\right)$ принимает значение, равное 11?	г) Найдите нули функции $y=x^4+4x^3+x^2-4x+1.$

****7.27.** Решите уравнение

а) $(6-x)^4+(8-x)^4=16;$	б) $x^5+(6-x)^5=1056;$
в) $(x-2)^6+(x-4)^6=64.$	г) Найдите нули функции $y=(x-3)^4+(x-2)^4-(2x-5)^4.$

****7.28.** Решите уравнение

а) $(x^2+2x+2)^4=2^{-\lvert x+1\rvert}$;	б) $\dfrac{21}{x^4-10x^2+28}=x^2-2\sqrt{5}x+12$;
в) $(4x^2+4x+17)(x^2+x+1)=12$;	г) $(x^2+3x-2)^2+3(x^2+3x-2)-2=x$.

****7.29.** Решите уравнение

а) $\left(x^2+2x+2\right)\left(y^2-4y+6\right)=2$;	б) $\left(x^2-4x+5\right)\left(y^2+6y+12\right)=3$;
в) $\left(2x^2+2x+1\right)\left(y^2-2y+3\right)=1$;	г) $\left(x^2+y(y+2x)+1\right)\left(x^2+2(x+1)\right)=1$.

****7.30.** Решите уравнение

а) $x^2y^2+x^2+y^2-14xy+2x-2y+37=0$;	б) $x^2+5y^2+4xy+2y+1=0$;
в) $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$;	г) $x^2+\dfrac{5}{2}y^2+3xy-y+1=0$.

****7.31.** Решите неравенство

а) $x^2+y^2-6x-4y+13\le 0$;	б) $x^2+4x-2xy+2y^2+8\le 0$;
в) $2x^2+2xy+y^2\le -1+2x$;	г) $x^2+y^2-2x-4y+5\le 0$.

8. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Решением неравенства с одной переменной называется число, подстановка которого в данное неравенство обращает его в верное числовое неравенство. ***Решить неравенство*** — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Основным методом решения неравенств является ***метод интервалов***, который заключается в следующем:

1) приводим исходное неравенство к виду $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}<0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}\ge 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}\le 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ — некоторые многочлены (все члены неравенства переносятся в левую часть и приводятся к общему знаменателю);

2) числитель и знаменатель раскладываем на множители;

3) определяем значения переменной, в которых числитель или знаменатель обращаются в нуль (корни числителя и знаменателя);

4) эти значения переменной наносим на числовую прямую, разбивая ее при этом на интервалы;

5) определяем знак на крайнем справа интервале: если произведение коэффициентов при старших степенях множителей числителя и знаменателя больше нуля, то на этом интервале будет знак «+», в противном случае — «–»;

6) определяем знаки на остальных интервалах, двигаясь справа налево (знак при переходе через корень четной кратности не меняется, при переходе через корень нечетной кратности меняется);

7) записываем ответ: множеством решений неравенства является объединение интервалов с соответствующим знаком, при этом в случае нестрогого неравенства к этому множеству добавляются корни числителя, корни знаменателя никогда не попадают в ответ.

Для упрощения рациональных неравенств используются те же преобразования, что и для рациональных выражений и уравнений (см. § 2, 7):

- вынесение общего множителя за скобки (№ 8.7);
- приведение дробей к общему знаменателю (№ 8.8—8.13);
- замена переменных (№ 8.14—8.17, 8.19);
- использование однородности (№ 8.18).

8.1. Решите неравенство (см. № 4.24, 4.25)

а) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$;	б) $(x-2)\sqrt{x^2-x-6}\le 0$;
в) $\dfrac{x+1}{\sqrt{6-x^2-x}}\ge 0$;	г) $\dfrac{x+2}{\sqrt{10-3x-x^2}}\le \log_{2009}1$.

8.2. Решите неравенство

а) $(x+2)(3-x)(x-2)^2>0$;	б) $(x-1)^2\left(4-x^2\right)\le 0$;
в) $\dfrac{x^2-1}{x-1}>0$.	г) Найдите область определения функции $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{3-x}}$.

8.3. Решите неравенство

а) $\left(3\sqrt{3}-5\right)\dfrac{(\sin 2-2)(3-x)}{3-x^2+2x}\le 0$;	б) $\sqrt[3]{\sqrt{10}-\sqrt{11}}(6+x)(x^2+3x-18)(5x^3-x^4-8x^2)\ge 0$;
в) $\dfrac{(x^2+49)(x-7)^2}{(\lg 99-2)(30-x^2)}\ge 0$;	г) $\lvert x+7\rvert^2\left(2x^2+7\right)\ge\left((2x+1)(x+7)\right)^2$.

8.4. Найдите область определения функции

а) $y=\sqrt{\dfrac{2x-x^2-1}{x(x+3)+2}}$;	б) $y=\log_2\left(\dfrac{x^2+3x-4}{x-2}\right)$;
в) $y=\sqrt{\left(\dfrac{1}{x}-x^2\right)^{-1}}$;	г) $y=\arcsin\left(\dfrac{2}{x-1}\right)$.

***8.5.** Решите неравенство

а) $\dfrac{(x+5)^3(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})x^2}{3-2x} \geq 0;$	б) $\dfrac{\left(x^2-4x+3\right)(-x+5)^2}{(x-3)^2} \geq 0.$
в) При каких значениях x график функции $y=\dfrac{\left(x^2-2x+1\right)(x-2)^2}{6+5x-x^2}$ лежит не выше оси абсцисс?	г) Найдите область определения функции $y=\sqrt[8]{\dfrac{(x-1)^2\left(x^2+2x-3\right)}{(x+3)^{33}(2-x)}}.$

***8.6.** Решите

а) уравнение $\left\lvert\dfrac{x-1}{x+1}\right\rvert=\dfrac{x-1}{x+1};$	б) уравнение $\left\lvert\dfrac{x^2-1}{x+2}\right\rvert=\dfrac{1-x^2}{x+2};$
в) неравенство $\left\lvert\dfrac{x^2-4}{x-1}\right\rvert \leq \dfrac{x^2-4}{x-1};$	г) неравенство $\left\lvert\dfrac{x}{x^2+x-2}\right\rvert > \dfrac{x}{x^2+x-2}.$

***8.7.** Решите неравенство

а) $x^2+2x \geq \dfrac{2x}{x+1};$	б) $(x+1)\sqrt{x+5} < -3x-3;$
в) $\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x^2-x+10} > \dfrac{\lvert x-1\rvert}{x^2-x-2};$	г) $\dfrac{x(x-4)^8}{x^2-x-6} \leq \dfrac{(x-4)^8}{6+x-x^2}.$

8.8. Решите неравенство

а) $\dfrac{1}{x+1} \leq -2;$	б) $\dfrac{2x}{x+1} \leq 1;$
в) $\dfrac{x}{2x-1} \leq 1.$	г) При каких значениях x график функции $f(x)=\dfrac{3^x}{3^{x+1}-1}$ лежит не ниже прямой $y=\dfrac{3}{8}$?

8.9. Решите неравенство

а) $x \geq \dfrac{1}{x};$	б) $x-\dfrac{4}{x} < 0;$
в) $x \leq \dfrac{-2}{x+1};$	г) $x \geq \dfrac{2^{\log_2 3}}{1-x}.$

***8.10.** Решите неравенство

а) $\dfrac{2x+3}{x^2+x-12} \leq \dfrac{1}{2};$	б) $\dfrac{2x^2+5x+9}{x^2-1} \geq 1;$
в) $\dfrac{5x^2+4x-9}{x^2+8x-9} \leq 2.$	г) При каких значениях x функция $f(x)=\dfrac{3x^2+x+2}{x^2-4}$ принимает значения не больше, чем -2?

***8.11.** Решите неравенство

а) $\dfrac{x(2x-3)-2}{x-2} \geq x(x-1)-3;$	б) $\dfrac{x^2-6x+5}{x+1} \geq x^2-2x+1;$
в) $\dfrac{2x-1}{2x^2+3x-2} > \dfrac{1}{x^2-4};$	г) $\dfrac{3x+1}{3x^2+4x+1} \geq \dfrac{1}{x^2+1}.$

8.12. Решите неравенство

а) $\dfrac{2}{-x+1}+\dfrac{6}{x+4} \geq 3;$	б) $\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{1}{x-3} \geq 2;$

в) $\frac{3x}{x-1}+\frac{x-1}{6x}\le\frac{11}{6}$.	г) При каких значениях x график функции $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}$ лежит выше графика функции $g(x)=\frac{3}{x+2}$?

***8.13.** Решите неравенство

а) $\frac{20}{x^2-7x+12}+\frac{10}{x-4}+1\le 0$;	б) $\frac{4x}{x+1}+\frac{6}{x^2-x-2}+1\le 0$;
в) $\frac{1}{x^2+8x-9}\ge\frac{1}{3x^2-5x+2}$;	г) $\frac{1-2x}{x^3+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-x+1}\ge 2^{\log_3 4}-4^{\log_3 2}$.

8.14. Решите неравенство

а) $x^2(x^2+1)<2$;	б) $x^4+3x^2+12>0$;
в) $x^4+4x^2+3\le 0$.	г) Найдите, при каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt[8]{5x^2-1-4x^4}$.

***8.15.** Решите неравенство

а) $\left(2x^2+x\right)^2+2x^2+x<12$;	б) $\left(x^2-2x\right)^2+x(2-x)\ge 2$.
в) При каких значениях x функция $f(x)=((x+1)(x+2))^2+x^2+3x$ принимает значения, меньшие, чем 4?	г) Найдите решения неравенства $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{5}{2}<0$, удовлетворяющие условию $\lvert x\rvert<10$.

****8.16.** Решите неравенство

а) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1\le 0$;	б) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)\le 5$;
в) $(8x+7)^2(4x+3)(x+1)<4{,}5$;	г) $4x^2-1\le\frac{18}{(x-2)(x-1)}$.

****8.17.** Решите неравенство

а) $36>6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x-\frac{1}{x}\right)$;	б) $2x^2+3x+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}\le 4$;
в) $x(x-5)+\frac{12}{x}\left(\frac{12}{x}-5\right)\le 0$;	г) $x^4+2x^3-6x^2+2x+1\le 0$.

****8.18.** Решите неравенство

а) $(x+5)^4+36x^4-13x^2(x+5)^2<0$;	б) $2\left(x^2+x+1\right)^2-7(x-1)^2-13\left(x^3-1\right)<0$;
в) $2\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2\le\frac{x^2-1}{x^2-4}$;	г) $(x^2-3x+2)^4+4(x^2-1)^4>5(x^2-3x+2)^2(x^2-1)^2$.

****8.19.** Решите неравенство

а) $\left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2+5x+1\right)<-12x^2$;	б) $\left(3x^2-2x+1\right)^2+\left(3x^2-x+1\right)^2>13x^2$;
в) $\frac{4x}{x^2-4x+7}+\frac{3x}{x^2-5x+7}>2$;	г) $\frac{15(x+1)^4}{x(x^2+1)}\le 128$.

****8.20.** Решите неравенство

а) $\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\le 1$;	б) $\frac{3x^2}{2x+1}<x-2x^4$;
в) $x^4+2000x^2+1999x+2000\le 0$;	г) $x^4+3x^3-4x>0$.

9. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Решением системы с двумя переменными называется пара значений переменных, которая обращает в верное числовое равенство каждое уравнение системы. Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Основной подход при решении систем уравнений состоит в следующем: каким-то образом (за счет алгебраических преобразований, введения новых переменных и т. п.) получить более простую систему уравнений (или даже одно уравнение). Дальнейшие преобразования проводятся над полученной системой (или уравнением).

Основными методами решения систем уравнений являются:

• подстановка (№ 9.1—9.4, 9.6—9.8). Надо выразить одно неизвестное через другие и подставить его в оставшиеся уравнения системы. Если сразу выразить одно неизвестное через другое затруднительно или подстановка такого выражения приведет к сложному уравнению, то предварительно преобразуют уравнения системы (№ 9.8);

• замена переменных (№ 9.5, 9.12—9.16);

• преобразования системы. Уравнения системы можно складывать, вычитать, умножать на число, перемножать, делить, учитывая при этом возможность выполнения таких операций (№ 9.9—9.11). Цель всех этих преобразований — получить такое уравнение, из которого можно легко выразить одну из переменных через другие (№ 9.17, 9.18). Далее используют метод подстановки.

Например,

1) Система $\begin{cases} P = Q, \\ R \pm P = S \pm Q \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} P = Q, \\ R = S. \end{cases}$

2) Система $\begin{cases} P + R = Q + S, \\ P - R = Q - S \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} P = Q, \\ R = S. \end{cases}$

3) Система $\begin{cases} P = Q, \\ P \cdot R = Q \cdot S \end{cases}$ является следствием системы $\begin{cases} P = Q, \\ R = S \end{cases}$, так как возможно одновременное обращение P и Q в нуль, но при этом $R \neq S$.

4) Система $\begin{cases} P = Q, \\ \dfrac{P}{R} = \dfrac{Q}{S} \end{cases}$ при условии $R \neq 0$, $S \neq 0$ является следствием системы $\begin{cases} P = Q, \\ R = S \end{cases}$, так как возможно одновременное обращение P и Q в нуль, но при этом $R \neq S$;

• графический метод (№ 9.19, 12.22, 3.21).

9.1. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} 2xy - y = 9, \\ x + 2y = 8; \end{cases}$	б) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y + y^2 = 0, \\ 3^{x-3y} = 0,(3); \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - xy + x = 5, \\ x + 2y = \sqrt{25}. \end{cases}$

9.2. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2^{x(y+1)} = 4 \cdot 2^x; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 3y(x - y) = 1 - 3y^2, \\ y + 3x = 3^{\log_3 2}; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 2^{xy} = 8, \\ y(3 + x) = 10 + x(y - 1); \end{cases}$	г) $\begin{cases} \lg 2x + \lg(1 + y) = \lg(5 + 2x), \\ 2x + y = 6. \end{cases}$

9.3. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 4x^2 + 9y^2 = 13; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 4x^2 - 9y^2 = 55; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 6xy - 4x^2 = 5; \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 2x^2 - 3y^2 = 225 + xy. \end{cases}$

9.4. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ x+y=3; \end{cases}$	б) $\begin{cases} x^3-y^3=7, \\ x-y=1; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \sqrt{x+y-1}=\sin 90°, \\ \sqrt{x-y+2}=2y-2; \end{cases}$	г) $\begin{cases} \left(\sqrt{x+3y+1}\right)^{-1}=0{,}5, \\ \lg(2x-y+2)=2\lg(7y-6). \end{cases}$

***9.5.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} \dfrac{2}{2a+b}+\dfrac{3}{2(a-b)}=5, \\ \dfrac{1}{2a+b}-\dfrac{2}{a-b}=-3; \end{cases}$	б) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-y^2=7; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x\left(y^2-1\right)=9, \\ xy-xy^3+18=0; \end{cases}$	г) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ x+y=13. \end{cases}$

***9.6.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} y+x-3=0, \\ \sqrt{y^2}-x+1=0; \end{cases}$	б) $\begin{cases} \lvert x\rvert+2\lvert y\rvert=3, \\ 5y+7x=2; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \lvert x-1\rvert+\lvert y-2\rvert=1, \\ y=2-\sqrt{(x-1)^2}; \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2^{y-2\lvert x\rvert}=0{,}125, \\ \log_{100} y^2=\lg(3-x). \end{cases}$

***9.7.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x^3-\sqrt{y}=1, \\ 5x^6+2y-8x^3\cdot\sqrt{y}=2; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2^x+2\lg y=4, \\ 2^{x+1}-\lg y=3; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 3^x+2^{x+y+1}=5, \\ 3^{x+1}-2^{x+y}=1; \end{cases}$	г) $\begin{cases} \log_3 xy=1, \\ \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{y}+1=0. \end{cases}$

***9.8.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x(y+3)=y+3, \\ x^2+2xy=7; \end{cases}$	б) $\begin{cases} y(x+1)-2=2x, \\ 2x^2-xy=4; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x^2-y+xy=x, \\ 2x^2+y^2=12; \end{cases}$	г) $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$

***9.9.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} xy+2x+3y=14, \\ xy-x+y=5; \end{cases}$	б) $\begin{cases} x^2+3xy=10, \\ x^2-xy=-2; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 3x^2+2xy-9x-4y+6=0, \\ 5x^2+2xy-12x-4y+4=0; \end{cases}$	г) $\begin{cases} x^2+3y^2-xy-4y=-1, \\ x^2-4y^2-xy+5y=1. \end{cases}$

****9.10.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x^2-y=2, \\ y^2-x=2; \end{cases}$	б) $\begin{cases} x^2+y=2, \\ y^2+x=2; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x^2-y^2-3x+3y=2, \\ xy=y^2+2. \end{cases}$	г) Найдите координаты точек, которые удовлетворяют одновременно уравнениям $2x^2+y=3$ и $2y^2+x=3$.

****9.11.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x^2+xy=6, \\ y^2+xy=3; \end{cases}$	б) $\begin{cases} x^2+3xy=7, \\ y^2-xy=2; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x^2+2y=6, \\ y^2+4x=9; \end{cases}$	г) $\begin{cases} x^2-6y=-14, \\ y^2-4x=1. \end{cases}$

***9.12.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+xy}+\dfrac{2}{x^2-xy}=3, \\ \dfrac{3}{x^2+xy}-\dfrac{1}{x^2-xy}=2; \end{cases}$	б) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-xy^2}-\dfrac{3}{xy-1}=7, \\ \dfrac{1}{x-xy^2}+\dfrac{2}{xy-1}=0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 10\sqrt{xy}+3x-3y=58, \\ x-y=6; \end{cases}$	г) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+xy=5, \\ xy+\dfrac{6(x-y)}{x+y}=4. \end{cases}$

****9.13.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=3, \\ 2x+y=10; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2\dfrac{x}{y}+3\dfrac{y}{x}=5, \\ 2x^2+y^2=3; \end{cases}$	в) $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+y}-\dfrac{x+y}{x}=1, \\ 2x-3y=1; \end{cases}$	г) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}=2, \\ x+y=12. \end{cases}$

****9.14.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x^2+2y+\sqrt{x^2+2y+1}=1, \\ 2x+y=2; \end{cases}$	б) $\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+y)^2=25, \\ x^2-y^2=3; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \log_x y+\log_y x=2{,}5, \\ \log_{12}\left(x^2+y^2\right)=1; \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2x^y-x^{-y}=1, \\ \log_2 y=\sqrt{x}. \end{cases}$

****9.15.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x^2y+xy^2=30; \end{cases}$	б) $\begin{cases} x+y\cdot(1+x)=11, \\ x^2+y^2+xy=31; \end{cases}$	в) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}, \\ x^2+y^2=2; \end{cases}$	г) $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10, \\ (x+y)(xy-1)=3. \end{cases}$

****9.16.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x+xy-y=13, \\ x^2y-xy^2=30; \end{cases}$	б) $\begin{cases} x^2+y^2=7+xy, \\ x-y=1; \end{cases}$	в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}, \\ x^2+y^2=13; \end{cases}$	г) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{5}{2}xy, \\ x-y=\dfrac{1}{4}xy. \end{cases}$

****9.17.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} 3x^2+2y^2=7xy, \\ xy+x^2=6; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x^2-xy=y^2, \\ 2xy-x^2+5=0; \end{cases}$	в) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0, \\ x^2-xy-2x-3y=6; \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2\cdot 25^{x^2}+5^{x^2}10^{1+y^2}=100^{1+y^2}, \\ 25^{x^2}-2\cdot 5^{x^2}+5=20\cdot 10^{y^2}. \end{cases}$

****9.18.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} 3x^2+xy=5, \\ y^2+3xy=10; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x^2-xy=1, \\ 3y^2+2xy=5; \end{cases}$	в) $\begin{cases} x^2-xy=x-4y, \\ x^2-y^2=2x+y; \end{cases}$	г) $\begin{cases} x^2+xy=5x-y, \\ x^2+y^2=3x+y. \end{cases}$

10. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Стандартная схема решения текстовых задач состоит из нескольких этапов:

1) выбор неизвестных;

2) составление уравнений или систем уравнений, а в некоторых случаях — систем неравенств;

3) нахождение неизвестных или нужной комбинации неизвестных;

4) отбор тех решений, которые подходят по смыслу задачи.

Прочитывая условие задачи, надо каждое условие попытаться реализовать в виде уравнения, связывающего введенные неизвестные. Неизвестные вводятся при крайней необходимости. Если что-то можно записать с помощью уже введенных неизвестных, то это обязательно нужно сделать. Иногда при решении задач трудно с самого начала установить, сколько и какие придется вводить неизвестные. Каждое условие, которое приведено в тексте задачи, должно быть представлено в виде уравнения или неравенства.

В простейших случаях число уравнений совпадает с числом неизвестных, но нередки задачи, в которых число неизвестных больше числа уравнений. Если при этом использованы все условия задачи, то наверняка окажется, что надо отыскать не сами неизвестные, а некоторое соотношение между ними. Нужную комбинация неизвестных обязательно можно найти — об этом позаботились авторы задач.

В задачах, связанных с понятием процента (№ 10.6—10.13), основное количество ошибок школьников связано с тем, что они не понимают, что проценты не бывают «подвешены в воздухе». Всегда необходимо составить пропорцию, в которой будет указана некоторая величина, которую мы принимаем за 100 %. На величину, которую следует принять за 100 %, указывают слова «ПО СРАВНЕНИЮ С», предлог «ОТ» или союз «ЧЕМ». Если этих слов в тексте нет, то перефразируйте предложение с точки зрения русского языка так, чтобы их вставить. Например: «первый больше второго» заменим на «первый больше, чем второй». Значит, второй есть 100 %. Например, «цена увеличилась на 20 %» заменим на «цена увеличилась на 20 % по сравнению с первоначальной ценой».

При решении задач, связанных с понятием концентрации (№ 10.15—10.19), будем руководствоваться законом сохранения вещества: вещество ниоткуда не появляется и никуда не исчезает. Для этого необходимо установить жесткий контроль всего за двумя параметрами: массой данного «чистого» вещества (что в каждой задаче принять за «чистое» вещество, решает сам школьник) и его концентрацией при каждом действии (отливание, доливание, сплавление с чем-то и т. п.). В результате такого контроля получаем разрешающее уравнение, которое обычно выражает равенство массы «чистого» вещества в начале и конце наших манипуляций.

При решении задач «на движение» (№ 10.20—10.37) на каждом участке, где двигались объекты, пройденный путь определяется по формуле $S = v \cdot t$, где v — скорость движения, t — время. Составив все такие уравнения и решив полученную систему, получаем ответ.

При движении объектов навстречу (№ 10.28, 10.29) скорость сближения равна сумме скоростей объектов. При движении вдогонку (№ 10.31, 10.32) важно, чья скорость больше. В любом случае из большей скорости надо вычесть меньшую. При этом если тот, что сзади, движется быстрее, то расстояние между объектами уменьшается со скоростью разность скоростей. А если тот, что сзади, движется медленнее, то расстояние между объектами увеличивается со скоростью разность скоростей.

Если (№ 10.34, 10.35) объект, имеющий собственную скорость v (скорость в стоячей воде), движется по течению реки (по ветру), скорость течения которой равна $v_{\text{теч}}$, то скорость объекта (в формуле $S = v \cdot t$) будет равна $v + v_{\text{теч}}$. Если объект движется против течения реки (против ветра), то его скорость (в формуле) равна $v - v_{\text{теч}}$. Если в условии задачи речь идет о движении плотов, то считают, что плот имеет ту же скорость, что и скорость течения реки.

При движении двух тел ***по окружности*** (№ 10.37) в одном направлении из одной точки независимо от того, на каком круге одно тело «догоняет» первый раз второе и сколько прошло времени, первое тело между ближайшими встречами проходит только на один круг больше (то есть на $S = 2\pi r$), чем второе. При этом они встречаются каждые $t_{\text{встречи}} = \dfrac{S}{v_1 - v_2}$ (при движении в разные стороны $t_{\text{встречи}} = \dfrac{S}{v_1 + v_2}$).

При решении задач «на работу» (№ 10.38—10.41) на каждом этапе, где работали объекты (рабочие, станки или, например, насосы), работа A определяется по формуле $A = p \cdot t$, где p — скорость выполнения работы (производительность, пропускная способность и т. п.), t — время. Если работало несколько объектов (№ 10.38, 10.41), то совместная производительность в формуле вычисляется как сумма «производительностей» каждого объекта. Составив все такие уравнения и решив полученную систему, будем иметь ответ. *Часто величина выполняемой работы не задана и нас не интересует, поэтому объем всей работы в таких задачах принимается за единицу, но можно этого и не делать. При решении величина А не влияет на ответ.*

Тематический указатель задач

- Задачи на составление уравнений (№ 10.2).
- Простейшие задачи на проценты (№ 10.4).
- Задачи на проценты (№ 10.6—10.11).
- Процентное повышение и понижение (№ 10.12).
- Сложные проценты (№ 10.13).
- Целочисленные неизвестные в задачах на проценты (№ 10.14).
- Задачи на смеси и сплавы (№ 10.15—10.19).
- Простейшие задачи на движение (№ 10.20, 10.21, 10.24).
- Средняя скорость движения (№ 10.23).
- Движение туда и обратно (№ 10.25).
- Движение запланированное и реализованное (№ 10.26).
- Движение нескольких участников (№ 10.27).
- Движение навстречу (№ 10.28, 10.29).
- Движение вдогонку (№ 10.31, 10.32).
- Движение навстречу и вдогонку (№ 10.33).
- Движение по течению и против течения (№ 10.34—10.36).
- Движение по окружности (№ 10.37).
- Простейшие задачи на совместную работу (№ 10.38).
- Задачи на совместную работу (№ 10.39—10.41).
- Объединение и пресечение множеств (№ 10.42).
- Задачи о числах (№ 10.43—10.46).
- Наибольшее и наименьшее значения (10.47, 10.48).
- Инвариант и проценты (№ 10.49).

10.1.

а) Составьте систему для нахождения x — возраста сестры и y — возраста брата, если известно, что, во-первых, произведение их возрастов на 98 больше, чем их сумма, а во-вторых, сестра младше брата в 1,2 раза.

б) Удвоенное первое число на 12 меньше, чем второе число. Составьте выражение, которое описывает эту зависимость.

в) Составьте выражение для нахождения x, если известно, что это число в 10 раз больше, чем уменьшенное на 3 число a.

г) Составьте выражение для нахождения x, если оно в 3 раза меньше, чем увеличенное на 5 число a.

10.2.

а) В двух сараях сложено сено. В первом сарае сена в три раза больше, чем во втором. После того как из первого сарая взяли 20 т сена, а во второй добавили 20 т, оказалось, что во втором сарае масса сена равна $\frac{5}{7}$ массы сена, оставшегося в первом сарае. Сколько тонн сена было первоначально во втором сарае?

б) На одной котельной запасено на зиму в 3 раза меньше торфа, чем на второй. Если на первую котельную завезти 680 т топлива, а на вторую — 220 т, то торфа на обеих котельных станет поровну. Сколько всего тонн топлива запасено на обеих котельных?

в) Хозяин одного из двух равных по площади смежных участков земли купил у хозяина другого участка 2 га земли. После этого площадь участка продавца составила $\frac{3}{4}$ площади участка покупателя. Какова была первоначальная площадь каждого участка?

г) В двух пачках 112 тетрадей. Если из меньшей пачки взять 8 тетрадей, то оставшиеся составят 62,5 % большей пачки. Сколько тетрадей в каждой пачке?

10.3.

а) По новому тарифному плану какое-то количество минут абонент получает бесплатно, а сверх этого использованное время оплачивается из расчета 54 коп. за одну минуту. Таня, использовав 580 мин, превысила допустимую норму и заплатила 43 руб. 20 коп. Сколько рублей должен заплатить Саша, если он использовал 496 мин?

б) Стоимость 1 м^3 воды составляет 10 руб. при норме расхода до 140 л воды в сутки на одного человека. Каждый кубический метр воды, израсходованной сверх нормы, стоит 50 руб. Какую сумму (в рублях) заплатила за месяц (30 суток) семья из четырех человек за потребление 20 м^3 воды?

в) Для изготовления шкафа требуется заказать 12 одинаковых панелей в одной из трех фирм. Площадь каждой панели равна 1,5 м^2. В таблице приведены цены на панели и на их покраску. Какую сумму (в рублях) нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость панели (руб. за 1 м^2)	Стоимость покраски панелей (руб. за одну панель)
1	33	12
2	35	9
3	40	Бесплатно

г) Магазины № 1 и № 2 купили, соответственно, 18 и 19 телевизоров у одного из трех поставщиков, выбрав для себя наиболее дешевый вариант. Стоимость одного телевизора и условия доставки всей покупки приведены в таблице. Определите, на сколько рублей дороже обошлась эта покупка с доставкой одному из магазинов.

Фирма	Стоимость (руб. за 1 шт.)	Стоимость доставки (руб. за всю покупку)	Специальное предложение
1	205	1850	
2	240	1950	Доставка со скидкой 50 %, если сумма заказа превышает 4500 руб.
3	275	2050	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 5000 руб.

10.4.

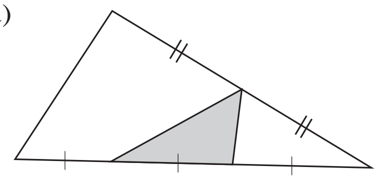
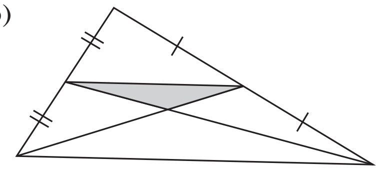
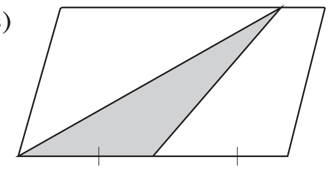
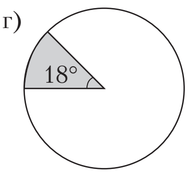
а) Содержание сахара в яблоках 9,6 %. Сколько килограммов сахара содержат 75 кг таких яблок?

б) Раствор содержит 4 % соли. Сколько граммов соли содержится в 350 г раствора?

в) Товар стоил 1400 руб. Через некоторое время его цена увеличилась на 350 руб. На сколько процентов повысилась цена товара?

г) Если a и b — положительные числа, то сколько процентов составляет $a + 1$ от $b + 1$?

10.5. На сколько процентов площадь незакрашенной части фигуры больше площади закрашенной части?

а) 	б) 
в) 	г) 

10.6.

а) Известно, что 7 % от числа A равно 107 % от числа B. Чему равно отношение $\frac{A}{B}$?	б) Чему равно 45 % от $\frac{7}{12}$ от 240?
в) Петя купил две книги. Первая из них на 50 % дороже второй. На сколько процентов вторая книга дешевле первой?	г) Числитель дроби увеличили на 20 %. На сколько процентов надо уменьшить ее знаменатель, чтобы в итоге дробь возросла вдвое?

10.7.

а) Получаемый при сушке винограда изюм составляет 32 % массы винограда. Из какого количества винограда получится 2 кг изюма?	б) Чему равно a, деленное на a % от a? 1) $\frac{a}{100}$; 2) $\frac{100}{a}$; 3) $\frac{a^2}{100}$; 4) $\frac{100}{a^2}$; 5) $100a$.
в) K составляет 10 % от P, P — 20 % от M, M — 30 % от 10 000. Чему равно K?	г) Каков угол сектора, площадь которого составляет 15 % от площади круга?

10.8.

а) В классе 35 учеников, причем число мальчиков составляет 75 % от числа девочек. Сколько мальчиков в классе?	б) В старших классах учатся 380 человек, из них девочек на 20 больше, чем мальчиков. 81 мальчик посещает спортивные секции. Сколько процентов мальчиков посещает спортивные секции?
в) В двух девятых классах 56 человек. Если из 9 «А» перевести в 9 «Б» 12,5 % учеников, то в обоих классах учеников станет поровну. Сколько учеников в каждом классе?	г) При заключении договора с фирмой на изготовление и установку двух окон заказчик заплатил 390 000 руб. Согласно договору в случае нарушения фирмой сроков доставки и монтажа окон фирма обязуется за каждый просроченный день выплачивать заказчику 1,5 % суммы договора. Сроки договора были нарушены фирмой, и она возвратила заказчику 23 400 руб. На сколько дней позже срока были установлены окна?

10.9.

а) В двух залах кинотеатра было 640 мест для зрителей. После замены кресел число мест в первом зале увеличилось на 20 %, во втором — на 15 %. Сколько новых кресел установили в первом зале, если общее количество мест в двух залах увеличилось на 114?	б) С двух участков ежегодно собиралось 500 т пшеницы. После проведения агротехнических мероприятий урожай на первом участке увеличился на 30 %, а на втором — на 20 %. Поэтому с двух участков собрали 630 т пшеницы. Сколько пшеницы собирали с первого участка первоначально?

в) Цена электродрели, входящей в комплект инструментов, составляет 80 % цены всего комплекта. После повышения цен на инструменты новая цена дрели стала равна прежней цене всего комплекта. На сколько процентов повысились цены на инструменты?	г) Писатель, получив гонорар 1 500 000 руб., решил положить эти деньги в банк. Для уменьшения риска он разделил всю сумму на две части и положил их в два банка: в первый — под 4 % годовых, а во второй — под 3 % годовых. Через год первый вклад принес доход, в два раза больший, чем второй. Какую сумму положил писатель в первый банк?

10.10.

а) Яблоки при сушке теряют 85 % массы. Сколько килограммов свежих яблок надо взять, чтобы получить 10,5 кг сушеных?	б) Цветы при сушке теряют 72 % массы. Сколько килограммов цветов надо взять, чтобы получить из них 12,25 кг сухих цветов?
в) Свежие грибы содержат 90 % воды, а сушеные — 12 %. Сколько получится сушеных грибов из 88 кг свежих?	г) На овощной базе получен крыжовник. Влажность крыжовника — 99 %. При сдаче в магазин влажность оказалась 98 %. На сколько процентов уменьшилась масса крыжовника?

***10.11.**

а) Цена входного билета на стадион составляла 20 руб. После снижения входной платы число зрителей увеличилось на 25 %, а выручка возросла на 12,5 %. Сколько стал стоить входной билет после снижения цены?	б) В связи с финансовыми проблемами дирекция предприятия уменьшила продолжительность рабочего дня с 8 до 7 ч. На сколько процентов предстоит рабочим повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках их заработная плата возросла на 5 %?
в) С 1 января цена билета в кинотеатр возросла на 20 %. Подводя итоги работы кинотеатра за январь, его директор отметил, что выручка кинотеатра по сравнению с декабрем возросла на 14 %. На сколько процентов изменилась посещаемость кинотеатра в январе по сравнению с декабрем?	г) Цена билета в театр возросла на 40 %, а выручка снизилась на 16 %. На сколько процентов уменьшилось число зрителей?

10.12.

а) Рыночная цена картофеля в связи с ненастной погодой повысилась на 20 %. Через некоторое время цена картофеля на рынке понизилась на 20 %. Когда картофель стоил дешевле — до повышения или после снижения цены, на сколько процентов?	б) Цену товара повысили на 150 %. На сколько процентов надо уменьшить полученную цену товара, чтобы она стала равна первоначальной цене?
в) До распродажи мужской и женский костюмы стоили одинаково. В начале распродажи на 15 % была снижена цена на мужской костюм, но покупателя не нашлось, поэтому еще раз снизили цену на 15 %. На сколько процентов нужно однократно снизить цену на женский костюм, чтобы оба костюма снова стали стоить одинаково?	г) Торговая база закупила партию альбомов у изготовителя и поставила ее магазину по оптовой цене, которая на 30 % больше цены изготовителя. Магазин установил розничную цену на альбом на 20 % выше оптовой. При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 10 %. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с ценой изготовителя, если на распродаже он приобрел альбом за 7020 руб.?

***10.13.**

а) Банк ежегодно увеличивает на одно и то же число процентов сумму, имеющуюся на вкладе к моменту начисления процентов. На сколько процентов ежегодно увеличивается сумма, если за два года она возросла с 200 000 до 242 000 руб.?	б) Число членов школьного научного общества учащихся (НОУ) в течение двух лет увеличивалось на p % ежегодно. Через два года число членов НОУ возросло по сравнению с начальным на 21 %. Найдите значение p.
в) За одно качание воздушный насос откачивает из резервуара десятую часть имеющегося там воздуха. Сколько процентов воздуха останется в резервуаре после пяти качаний?	г) В 2008 г. в конкурсе участвовало 200 000 школьников — на 50 % больше, чем в 2007 г. Если и дальше каждый год число участников будет увеличиваться на 50 %, то в каком году это число превысит 1 000 000?

****10.14.**

а) Две мастерские вместе должны отремонтировать по плану 18 моторов. Первая мастерская выполнила свой план на 120 %, а вторая — на 125 %. Сколько моторов отремонтировала каждая мастерская?	б) В корзине лежало не более 70 грибов. После разбора оказалось, что 52 % из них — белые. Если отложить три самых маленьких гриба, то среди оставшихся будет ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?
в) В автобусе ехало не более ста пассажиров, причем число сидящих пассажиров было в 2 раза больше числа стоящих. На остановке из автобуса вышло ровно 4 % всех пассажиров. Найдите число пассажиров, оставшихся в автобусе.	г) В первом туре олимпиады по чистописанию приняло участие не более трехсот школьников, причем число девочек среди них оказалось ровно в 6 раз больше числа мальчиков. Во второй тур прошло ровно 32 % всех участников. Найдите число участников, не прошедших во второй тур.

10.15.

а) Морская вода содержит 5 % соли (по весу). Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 60 кг морской воды, чтобы содержание соли в полученной воде составило 4 %?	б) Содержание сахара в одном соке 10 %, а в другом — 15 %. Смешали 2 л первого и 3 л второго сока. Каково содержание сахара в смеси?
в) Сколько воды надо добавить к 400 кг 12%-ного раствора спирта, чтобы он стал 8%-ным?	г) В 20%-ную уксусную кислоту добавили 175 г 40%-ной уксусной кислоты и получили 30%-ный раствор. Сколько граммов 30%-ного раствора получили?

10.16.

а) Бронза состоит из меди, олова и цинка. В 40 кг бронзы 88 % меди. Олова в этом сплаве на 2,8 кг больше, чем цинка. Сколько цинка содержится в 40 кг бронзы?	б) В каком отношении следует смешать 6%-ный и 30%-ный растворы поваренной соли, чтобы получить 12%-ный раствор?
в) Из 40 т руды выплавляют 20 т металла, содержащего 6 % примесей. Каков процент примесей в руде?	г) Какое максимальное количество 12%-ного раствора кислоты можно получить, имея по 1 л 5%-ного, 10%-ного и 15%-ного растворов?

10.17.

а) Сплавили 300 г сплава олова и меди, содержащего 60 % олова, и 900 г сплава олова и меди, содержащего 80 % олова. Сколько процентов олова в получившемся сплаве?	б) Смешали 300 г 60%-ного раствора серной кислоты и 200 г 80%-ного раствора серной кислоты. Сколько процентов серной кислоты в получившемся растворе?
в) В двух одинаковых сосудах находятся растворы серной кислоты концентрации 28,7 % и 37,3 %. Растворы смешивают. Какова концентрация полученного раствора кислоты?	г) Проценты спирта в трех растворах составляют геометрическую прогрессию. Если взять смесь этих растворов в пропорции 2 : 3 : 4, то получится 32%-ный раствор спирта, а если взять смесь в пропорции 3 : 2 : 1, то получится 22%-ный раствор спирта. Сколько процентов спирта в каждом из трех данных растворов?

***10.18.**

а) В смеси спирта и воды спирта в 4 раза меньше, чем воды. Когда к этой смеси добавили 20 л воды, получили смесь с содержанием спирта 12 %. Сколько воды было в смеси первоначально?	б) Имеется два сплава. Один содержит 2,8 кг золота и 1,2 кг примесей, другой — 2,7 кг золота и 0,3 кг примесей. Отрезав по куску от каждого сплава и сплавив их, получили 2 кг сплава с содержанием золота 85 %. Сколько килограммов металла отрезали от второго сплава?
в) В смеси ацетона и спирта ацетона в 2 раза меньше, чем спирта. Когда к этой смеси добавили 300 л спирта, получили смесь с содержанием ацетона 28 %. Сколько литров ацетона было в смеси первоначально?	г) Отношение массы олова к массе свинца в куске сплава равно 2 : 3. Этот кусок сплавили с куском олова весом 3 кг и получили новый сплав с содержанием свинца 10 %. Сколько килограммов олова в новом сплаве?

****10.19.**

а) В сосуде было 20 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили, и сосуд дополнили водой. Затем отлили в 2 раза большую (чем в первый раз) часть полученной смеси и снова дополнили сосуд водой. В результате получился 28%-ный раствор кислоты. Сколько литров кислоты отлили в первый раз?	б) В двух сосудах находилось 600 г и 150 г растворов соли различной концентрации. Из каждого сосуда взяли одновременно по n граммов раствора. Взятое из первого сосуда вылили во второй, а взятое из второго — в первый. После этого концентрация растворов в обоих сосудах стала одинаковой. Найдите n.
в) В двух сосудах находилось 40 г и 60 г растворов соли различной концентрации. Из каждого сосуда взяли одновременно по n граммов раствора. Взятое из первого сосуда вылили во второй, а взятое из второго — в первый. После этого концентрация растворов в обоих сосудах стала одинаковой. Найдите n.	г) Два сосуда равных объемов до краев заполнены раствором кислоты одинаковой концентрации. Из первого сосуда отлили 1 л раствора и долили 1 л воды. Потом эту же процедуру повторили еще раз. Из второго сосуда отлили 3 л раствора и долили 3 л воды. Потом эту же процедуру повторили еще раз. В результате концентрация кислоты в первом сосуде стала в 1,96 раза больше, чем во втором. Найдите объем сосуда (л).

10.20.

а) Маша доходит от дома до школы за 12 мин, а ее брат Миша добегает до школы и обратно без остановки за 8 мин. Во сколько раз скорость Миши больше, чем скорость Маши?	б) Белка за 20 мин приносит орех в гнездо. Сколько метров от гнезда до орешника, если известно, что налегке белка бежит со скоростью 5 м/с, а с орехом — 3 м/с?
в) За 5 ч мотоциклист проезжает на 259 км больше, чем велосипедист за 4 ч. За 10 ч велосипедист проезжает на 56 км больше, чем мотоциклист за 2 ч. Определите скорость (км/ч) велосипедиста.	г) В двух сосудах находится по 540 л воды. Из первого сосуда вытекает по 25 л воды в минуту, а из другого — по 15 л. Через сколько минут во втором сосуде воды останется в шесть раз больше, чем в первом?

10.21.

а) От турбазы в город, находящийся на расстоянии 24 км, вышел турист со скоростью 4 км/ч. Через 2 ч за ним отправился второй турист. С какой скоростью (км/ч) должен идти второй турист, чтобы прийти в город одновременно с первым?	б) Первые 280 км дороги от пункта A до пункта B автобус проехал с некоторой скоростью, а оставшиеся 480 км — со скоростью, на 10 км/ч большей. Найдите начальную скорость (км/ч) автобуса, если на весь путь от пункта A до пункта B он потратил 10 ч.
в) Поезд был задержан на станции на 2 ч 12 мин. Чтобы ликвидировать отставание к прибытию на конечную станцию, машинист, преодолевая отрезок пути в 660 км, увеличил скорость на 10 км/ч. Определите время (ч) движения на этом отрезке пути.	г) Автомобиль двигается со скоростью 54 км/ч. Выразите его скорость в метрах в минуту.

10.22.

а) Из пунктов A и B, расстояние между которыми S км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились через t часов. Составьте выражение для определения скорости (км/ч) второго велосипедиста, если первый проезжает расстояние до B за a часов ($a > t$).	б) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 10 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста со скоростями a км/ч и b км/ч соответственно. Составьте выражение для определения расстояния (км) от пункта A до места встречи велосипедистов.
в) Расстояние от пункта A до пункта B по реке плот проходит за 10 ч, а катер — за t мин. Составьте выражение для определения собственной скорости катера (км/ч), если скорость течения реки v км/ч.	г) Катер может пройти за 3 ч по течению реки такое же расстояние, как за 3 ч 12 мин против течения реки. Если скорость катера в стоячей воде равна 4 км/ч, то составьте уравнение, из которого можно найти v — скорость течения реки.

***10.23.**

а) Автомобиль половину пути ехал со скоростью 50 км/ч, а вторую половину — со скоростью 30 км/ч. Какова его средняя скорость (км/ч)?	б) Велосипедист проехал 20 км со скоростью 10 км/ч и 15 км — со скоростью 5 км/ч. Найдите среднюю скорость (км/ч) движения велосипедиста.
в) Автобус выполнял рейс между двумя городами: от A до B со средней скоростью 60 км/ч, а от B до A со средней скоростью 40 км/ч. Какова была средняя скорость (км/ч) рейса?	г) Путник шел в гору со скоростью v км/ч, а с горы — $2v$ км/ч. Какова средняя скорость путника, если он поднимался в гору и возвращался в исходный пункт у подножия горы по одной и той же тропинке?

10.24.

а) На путь между двумя деревнями пешеход затратил на 4 ч 30 мин больше, чем мотоциклист. Скорость мотоциклиста 40 км/ч, скорость пешехода составляет $\frac{1}{10}$ скорости мотоциклиста. Найдите расстояние между деревнями.	б) Почтальон проехал на мотоцикле от почты до села со скоростью 30 км/ч. Назад он возвращался пешком со скоростью, составляющей $\frac{1}{5}$ скорости его движения на мотоцикле. Поэтому на обратный путь он затратил на 1 ч 12 мин больше, чем от почты до села. Найдите расстояние от почты до села.
в) Расстояние между деревней и поселком мотоциклист проезжает на 0,4 ч быстрее велосипедиста. Скорость мотоциклиста 18 км/ч, а скорость велосипедиста составляет $\frac{8}{9}$ скорости мотоциклиста. Найдите расстояние между деревней и поселком.	г) Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м меньше, чем мотоциклист. Поэтому на путь в 30 км он затратил времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжает мотоциклист?

10.25.

а) Между городами A и B через возвышенность ходит автобус. При подъеме на возвышенность он идет со скоростью 25 км/ч, а при спуске — со скоростью 50 км/ч. От A до B автобус идет 3,5 ч, а от B до A — 4 ч. Найти расстояние между городами A и B.	б) На дороге, соединяющей два аула, нет ровных участков. Автобус едет в гору всегда со скоростью 15 км/ч, а с горы — 30 км/ч. Найдите расстояние (км) между аулами, если известно, что путь туда и обратно автобус проезжает за 4 ч без остановок.
в) Путешественник вышел из гостиницы в 3 ч дня и возвратился в 9 ч вечера по тому же маршруту. Известно, что по ровным участкам он шел со скоростью 4 км/ч, в гору — 3 км/ч, с горы — 6 км/ч. Сколько километров прошел путешественник, если он нигде не останавливался?	г) Расстояние между поселками 9 км. Дорога имеет подъем, равнинный участок и спуск. Скорость пешехода на подъеме равна 4 км/ч, на равнинном участке — 5 км/ч, а на спуске — 6 км/ч. Сколько километров составляет равнинный участок, если пешеход проходит расстояние от одного поселка до другого и обратно за 3 ч 41 мин?

10.26.

а) Велосипедист должен был проехать весь путь с определенной скоростью за 2 ч. Но он ехал со скоростью, превышающей намеченную на 3 км/ч, и поэтому на весь путь затратил $1\frac{2}{3}$ ч. Найдите длину пути.	б) Автобус прошел $\frac{5}{6}$ пути со скоростью 50 км/ч, а затем задержался на 3 мин. Чтобы прибыть в конечный пункт вовремя, оставшуюся часть пути он шел со скоростью 60 км/ч. Найдите путь, пройденный автобусом.
в) Путь от A до B пешеход проходит за 2 ч. Если он увеличит скорость на 2 км/ч, то уже за 1,8 ч пройдет на 3 км больше, чем расстояние от A до B. Найдите расстояние от A до B.	г) Расстояние между двумя пунктами поезд проходит по расписанию с намеченной скоростью за 6 ч. Через 5 ч после отправления он был задержан в пути на 12 мин. Поэтому, чтобы прибыть на станцию назначения вовремя, поезд увеличил скорость на 15 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

***10.27.**

а) Из города A в город B вышел поезд со скоростью 70 км/ч. Спустя 1 ч 40 мин из B в A отправился поезд, скорость которого равна 60 км/ч. Через сколько часов после выхода поезда из A произойдет встреча, если расстояние между городами равно 420 км?	б) Из пункта A в пункт B выехал автобус со скоростью 40 км/ч. После того как автобус проехал 30 км, из пункта A со скоростью 60 км/ч выехал автомобиль, который прибыл в пункт B на $\frac{1}{12}$ ч позже автобуса. Найдите расстояние между пунктами A и B.
в) Из города A в город B выехал грузовик со скоростью 45 км/ч. После того как грузовик проехал 15 км, из города A выехал со скоростью 60 км/ч автомобиль, который приехал в город B на $\frac{1}{6}$ ч раньше грузовика. Найдите расстояние между городами.	г) Расстояние между городами A и B равно 50 км. Из города A в город B выехал велосипедист, а через 1 ч 30 мин вслед за ним выехал мотоциклист. Обогнав велосипедиста, он прибыл в город B на 1 ч раньше его. Найдите скорость мотоциклиста, если известно, что она в 2,5 раза больше скорости велосипедиста.

***10.28.**

а) Из двух городов, расстояние между которыми 770 км, одновременно вышли навстречу друг другу два поезда. К моменту встречи один из них прошел на 70 км больше другого. Найдите скорости (км/ч) поездов, если разность между ними 10 км/ч.	б) Два автомобиля одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 5 ч езды расстояние между ними было равно 40 км. Найдите расстояние (км) между A и B, если все расстояние один может проехать за 10 ч, а другой — за 12.
в) Из городов A и B навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 8 ч. Если бы скорость автомобиля, выехавшего из A, была больше на 14 %, а скорость автомобиля, выехавшего из B, была больше на 15 %, то встреча произошла бы через 7 ч. Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго?	г) Расстояние между городами A и B пассажирский поезд проходит за 16 ч, а скорый поезд такое же расстояние — за 8 ч. В 21 ч из A в B отправился пассажирский поезд, а в 23 ч из B в A навстречу ему — скорый. Найдите сумму числа часов и числа минут времени встречи этих двух поездов.

***10.29.**

а) Из двух городов A и B одновременно навстречу друг другу с постоянными скоростями выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в город B через 6 ч после встречи, а велосипедист — в город A через 24 ч после встречи. За какое время мотоциклист проезжает путь от A до B?	б) Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?
в) Два туриста выезжают одновременно навстречу друг другу из двух пунктов A и B. При встрече оказалось, что первый проехал на 30 км больше второго и что через 4 дня он будет в B. Второй попадет в A через 9 дней после встречи. Найдите расстояние AB.	г) Два приятеля, живущие в разных местах, совершили в один и тот же день прогулку. Первый вышел в 10 ч 36 мин из A и пришел в 16 ч 21 мин в B. Второй вышел в 10 ч 30 мин из B и пришел в 15 ч 06 мин в A. В какое время приятели встретились?

10.30.

а) По двум сторонам прямого угла по направлению к его вершине движутся два тела. В начальный момент тело A отстояло от вершины прямого угла на 60 м, а тело B — на 80 м. Через 3 с расстояние между A и B стало равным 70 м, а еще через 2 с — 50 м. Найдите скорости каждого тела.	б) Два шара двигаются вдоль сторон прямого угла AOB к вершине O с постоянными и неравными скоростями. Центр шара радиусом 2 см находится в точке A и перемещается со скоростью 0,5 см/с. Центр шара радиусом 3 см находится в точке B. В начальный момент времени расстояние AB между центрами шаров равно $\sqrt{292}$. Найдите скорость (см/с) второго шара, если известно, что через 6 с после начала движения шары столкнулись, не дойдя до вершины (первоначально длины отрезков AO и BO выражались целыми числами и $AO < BO$).
в) Пункты A и B находятся на двух прямолинейных шоссе, пересекающихся друг с другом под углом 120°. Если идти из A в B сначала по первому шоссе до перекрестка C, а потом по второму, то потребуется 5 ч. Туристы идут из A в B напрямик, без дороги, и проделывают путь за 6,5 ч. Если туристы пойдут без дороги, напрямик, от A до середины D отрезка шоссе CB, то они затратят на путь AD более 5 ч. Сколько времени нужно, чтобы дойти от A по шоссе до перекрестка C, если скорость ходьбы без дороги в 1,5 раза меньше, чем скорость ходьбы по шоссе?	г) Из вершины правильной треугольной пирамиды с плоским углом 60° при вершине одновременно начинают движение вдоль боковых ребер три точки с постоянными скоростями, образующими арифметическую прогрессию. Вычислите скорости движения точек, если известно, что через 3 с после начала движения расстояние между самой быстрой и самой медленной точкой равнялось $3\sqrt{37}$ см, а расстояние между самой быстрой и третьей точкой равнялось $3\sqrt{39}$ см.

10.31.

а) Миша идет от дома до школы 30 мин, а его брат Петя — 40 мин. Петя вышел из дома на 5 мин раньше Миши. Через сколько минут Миша догонит Петю?	б) В 336-ведерную емкость всякий час через одну трубу втекает 70 ведер воды, а через другую — вытекает 42 ведра. За какое время емкость наполнится?
в) Через кран вода заполняет бак за 3 ч, а через сливное отверстие вся вода из бака выливается за 5 ч. За какое время вода заполнит бак при открытых кране и отверстии?	г) Лисица находится впереди собаки на 60 своих прыжков. Три прыжка собаки равны семи прыжкам лисицы. За одно и то же время собака делает шесть прыжков, а лисица — девять. Сколько прыжков надо сделать собаке, чтобы догнать лисицу?

****10.32.**

а) Рыболов, охотник и грибник идут в одном направлении с постоянными скоростями. Когда рыболов и охотник находились в одной точке, грибник отставал от них на 220 м. Когда грибник догнал охотника, рыболов отставал от них на 180 м. Найдите расстояние (м) между охотником и рыболовом в тот момент, когда грибник и рыболов находились в одной точке.	б) Из города A в город B, расстояние между которыми 100 км, с постоянной скоростью выезжает автобус. Через 30 мин за ним выезжает мотоциклист со скоростью 40 км/ч, который, догнав автобус, возвращается обратно в город A с прежней скоростью. Найдите наибольшее целое значение скорости (км/ч), при котором автобус прибудет в город B раньше, чем мотоциклист возвратится в город A.
в) По дороге мимо наблюдателя проехали через равные промежутки времени автобус, мотоцикл и автомобиль. Мимо другого наблюдателя они проехали с такими же промежутками времени, но в другом порядке: автобус, автомобиль, мотоцикл. Найдите скорость автобуса (км/ч), если скорость автомобиля 60 км/ч, а мотоцикла — 30 км/ч.	г) Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. 70 коров могут съесть ее за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколько коров съели бы всю траву за 96 дней?

****10.33.**

а) Пешеход и велосипедист отправились одновременно из пункта A в пункт B. В пункте B велосипедист повернул обратно и встретил пешехода через 20 мин после начала движения. Не останавливаясь, велосипедист доехал до пункта A, снова развернулся и догнал пешехода через 10 мин после первой встречи. Запишите в ответе число, выражающее время (ч), за которое пешеход пройдет путь от A до B.	б) Из поселка в одном и том же направлении выехали последовательно с интервалом в 1 ч три велосипедиста. Так как первый из них двигался со скоростью 12 км/ч, второй — 10 км/ч, то третий велосипедист, имея более высокую скорость, догнал сначала второго велосипедиста, а еще через 2 ч — первого. Запишите в ответе число, выражающее скорость (км/ч) третьего велосипедиста.
в) Из города A в город B выезжает велосипедист, а через 3 ч после его выезда из города B выезжает навстречу ему мотоциклист, скорость которого в три раза больше скорости велосипедиста. К моменту встречи велосипедист проехал половину пути до B. Если бы мотоциклист выехал не через 3, а через 2 ч после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к A. Найдите расстояние (км) между A и B.	г) Из города A в город B выходит пешеход, а через 3 ч после его выхода из города B выезжает навстречу ему велосипедист, скорость которого в четыре раза больше скорости пешехода. К моменту встречи пешеход прошел треть пути до B. Если бы велосипедист выехал не через 3, а через 6 ч после выхода пешехода, то встреча произошла бы на 10 км ближе к B. Найдите расстояние (км) между A и B.

10.34.

а) Скорость течения реки 4 км/ч, а скорость катера в стоячей воде 20 км/ч. Сколько часов нужно катеру, чтобы спуститься по течению на 144 км, а потом вернуться обратно?	б) Найдите скорость лодки в стоячей воде (км/ч), если за 5 ч она прошла по реке 20 км и вернулась назад, а скорость течения 3 км/ч.
в) Лодка проплывет за 3 ч по течению такое же расстояние, какое за 4 ч против течения. Найдите расстояние, которое проплывет лодка вниз по течению, если собственная скорость лодки 14 км/ч.	г) Из города A в город B корабль плывет по реке одни сутки, а обратно — трое суток. Сколько суток понадобится, чтобы добраться из города A в город B на плоту?

***10.35.**

а) Самолет пролетит по направлению ветра за 5,5 ч такое же расстояние, какое в обратном направлении за 6 ч при условии, что ни скорость, ни направление ветра не меняются. Найдите расстояние, которое пролетит самолет туда и обратно, если собственная скорость самолета равна 690 км/ч.	б) Из пункта A вниз по течению реки движется лодка с собственной скоростью 17 км/ч. Ей навстречу из пункта B движется катер с собственной скоростью 26 км/ч. Лодка до встречи шла 2 ч, катер — 1,5 ч. Какое расстояние проплывет за 3 ч плот, если расстояние между пунктами A и B равно 74 км?
в) Катер, собственная скорость которого равна 15 км/ч, прошел 60 км по реке от одной пристани до другой и вернулся обратно. За это же время спасательный круг, упавший за борт с катера, проплыл 25 км. Найдите время движения катера вверх по реке.	г) Монтер сбежал по лестнице движущегося эскалатора за 30 с. Второй раз он спустился за 45 с по неподвижной ленте. За сколько секунд он спустился бы, стоя на ступеньке движущегося эскалатора?

***10.36.**

а) От пристани A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему от пристани B, расположенной ниже по течению относительно пристани A, отправляется катер. Встретившись с плотом, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению. Скорость катера в стоячей воде в N раз больше скорости течения реки. На сколько процентов расстояние, пройденное катером от пристани B до места встречи с плотом и обратно, больше, чем расстояние, пройденное плотом от пристани A до момента возвращения катера к пристани B?	б) Из пункта A в пункт B вниз по течению одновременно отправились лодка и плот. В тот же самый момент из пункта B вверх по течению отплыл катер. Собственная скорость лодки (т. е. скорость в стоячей воде) 5 км/ч. Расстояние AB равно 60 км. Катер встретил лодку и еще через 2 ч плот. Найдите собственную скорость катера.
в) От пристани A вниз по течению отправились катер и плот. Катер доплыл до B, повернул обратно, встретил плот через 2 ч после выхода из A, затем доплыл до A, вновь повернул обратно и нагнал плот еще через 2 ч после того, как он его встретил. За какое время проплывет плот расстояние от A до B?	г) От пристани A вниз по реке, скорость течения которой v км/ч, отходит плот. Через час вслед за ним выходит моторная лодка, скорость которой в стоячей воде 10 км/ч. Догнав плот, лодка возвращается обратно. Найдите все возможные целые значения v, при которых к моменту возвращения лодки к пристани A плот пройдет более 15 км.

****10.37.**

а) Ваня и Петя участвуют в велогонке. Они стартуют вместе и едут по кругу в одном направлении. Ваня проезжает весь круг за 6 мин, а Петя — за 4 мин. Через сколько минут после старта Петя догонит Ваню?	б) Два спортсмена Денис и Максим бегут с постоянными скоростями по 400-метровой дорожке стадиона. Если они бегут в одном направлении, то оказываются рядом каждые 3 мин 20 с, а если бегут в разных направлениях, то встречаются каждые 25 с. Найдите скорости спортсменов.
в) Две материальные точки, двигаясь по окружности в одном направлении, оказываются рядом через каждые 36 мин, а двигаясь в разных направлениях, встречаются каждые 4 мин. За какое время каждая точка совершает полный оборот?	г) Два тела движутся по окружности равномерно в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 2 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 с. За какое время каждое тело проходит окружность?

10.38.

а) Маша съедает тарелку каши за 10 мин, а Витя такую же тарелку — за 15 мин. За сколько минут Маша и Витя съедят тарелку каши, если будут есть из одной тарелки?	б) Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 8 ч. Один рабочий может выполнить эту же работу за 24 ч. За сколько часов может выполнить эту работу другой рабочий?
в) Первая труба наполняет бассейн за 10 ч, а вторая — за 15 ч. За сколько часов будет наполнен бассейн, если одновременно наполнять его из двух труб?	г) Одна труба наполняет весь бассейн за 2 ч, другая — за 3 ч. За сколько минут обе трубы, работая вместе, наполнят полбассейна?

10.39.

а) Заказ по выпуску машин завод должен был выполнить за 20 дней. Но завод выпускал ежедневно по 2 машины сверх плана, а поэтому выполнил заказ за 18 дней. Сколько машин выпустил завод?	б) Фермеры должны были закончить сев за 5 дней. Но, узнав о предстоящем ухудшении погоды, они засевали в день на 20 га больше, чем предполагалось по плану, и поэтому закончили сев за 4 дня. Сколько гектаров они засеяли?
в) Бригада цветоводов должна была высадить в понедельник на центральных площадях города 7200 цветов. Однако три человека заболели, и каждому из вышедших на работу пришлось высадить на 400 цветов больше нормы, чтобы успеть вовремя. Сколько человек вышло на работу в понедельник?	г) Два секретаря должны были сделать по 120 звонков клиентам фирмы к определенному сроку. Один из них выполнил работу на 5 ч раньше второго, так как делал на 2 звонка в час больше второго. Скольким клиентам дозвонились во второй час работы оба секретаря?

***10.40.**

а) Одна труба подает в бассейн 1 $м^3$ воды на 4 мин быстрее, чем другая. Сколько кубических метров воды подаст вторая труба за 5 ч, если она подает за это время на 100 $м^3$ воды меньше, чем первая?	б) На обработку одной детали один рабочий затрачивает на 1 мин меньше, чем другой. Сколько деталей обработает первый рабочий за 4 ч, если он обрабатывает за это время на 8 деталей больше, чем второй?

в) Два переводчика переводили рукопись. Первые 2 ч работал первый переводчик, следующие 6 ч они работали вместе. За это время было переведено 80 % рукописи. Сколько часов потребовалось бы первому переводчику, чтобы перевести всю рукопись, если известно, что ему потребуется на эту работу на 4 ч меньше, чем второму?	г) Два насоса разной мощности, работая одновременно, наполняли бассейн водой за 4 ч. После реконструкции производительность первого насоса увеличилась на 20 %, а второго — на 60 %. Теперь они, работая одновременно, наполняют бассейн за 3 ч. За сколько часов может наполнить бассейн первый насос после реконструкции?

****10.41.**

а) Заказ по изготовлению деталей выполняется на станках марок A и B. За 9 ч выполняют заказ 55 станков марки A и 36 станков марки B, а 13 станков марки A и 43 станка марки B — за 18 ч. На сколько процентов время выполнения заказа одним станком марки A меньше времени выполнения заказа одним станком марки B?	б) Два станка разной мощности, работая вместе, могут выполнить работу за 6 ч. Если бы первый станок проработал 4 ч, а затем один второй — 6 ч, то они выполнили бы 80 % всей работы. За сколько часов каждый станок, работая отдельно, может выполнить всю работу?
в) Трое рабочих выполнили работу за 10 дней, причем третий из них работал только первые три дня. За сколько дней выполнил бы работу каждый рабочий, если известно, что за первые три дня они вместе выполнили 37 % всей работы, а за 5 дней первый рабочий сделал столько же, сколько второй за 4 дня?	г) На угольной шахте сначала работали два участка, а через некоторое время вступил в строй третий участок, в результате чего производительность шахты увеличилась в полтора раза. Сколько процентов составляет производительность второго участка от производительности первого, если известно, что за 4 месяца первый и третий участки выдают угля столько же, сколько второй за год?

***10.42.**

а) В штучном отделе магазина посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и одну коробку конфет. В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?	б) В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 — французский и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?
в) В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 — на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на лыжах, и на коньках?	г) В поход ходили 80 % учеников класса, а на экскурсии было 60 % класса, причем каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса были и там, и там?

10.43.

а) Разность двух взаимно обратных чисел равна $\frac{5}{6}$. Найдите эти числа.	б) Числитель несократимой дроби на 2 меньше знаменателя. Если знаменатель увеличить в 3 раза, а числитель — на 13, то сумма полученной дроби и данной будет равна дроби, обратной данной. Найдите данную дробь.
в) Числитель несократимой дроби на 1 больше, чем знаменатель. Если уменьшить числитель и знаменатель на 2 и полученную дробь умножить на $\frac{5}{8}$, то получим дробь, обратную исходной. Найдите произведение числителя и знаменателя исходной дроби.	г) Знаменатель несократимой дроби на 3 больше, чем числитель. Если дробь умножить на $\frac{2}{3}$, а затем у новой дроби числитель уменьшить на 2 и знаменатель уменьшить на 19, то получим дробь, обратную исходной. Найдите произведение числителя и знаменателя исходной дроби.

10.44.

а) Одно число больше другого на 44. При делении чисел в частном получается 2, а в остатке 15. Найдите эти числа.	б) Число 59 разделили на некоторое натуральное число и получили, что неполное частное на 6 меньше делителя, а остаток на 7 меньше делителя. Найдите делитель.
в) Число 78 разделили на некоторое натуральное число и получили, что неполное частное равно разности делителя и остатка, а остаток равен половине делителя. Найдите остаток.	г) Число 69 разделили на некоторое натуральное число и получили, что разность неполного частного и остатка равна 8, а разность неполного частного и делителя равна 5. Найдите неполное частное.

10.45.

а) Сумму двузначных чисел, отличающихся только порядком цифр, увеличили на 1. Полученный результат больше меньшего из чисел в 3 раза. Найдите эти числа.	б) Найдите двузначное число, зная, что число его единиц на 2 больше числа десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.
в) Если утроенную сумму цифр двузначного числа уменьшить на 4, то получится само число. Найдите это число, если у него число единиц на 7 больше, чем число десятков.	г) Если сумму цифр двузначного числа увеличить в 4 раза и к полученному произведению прибавить 18, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число, если у него десятков на 1 меньше, чем единиц.

***10.46.**

а) Сумма цифр трехзначного числа равна 12. Цифра сотен равна $\frac{1}{23}$ числа, выраженного цифрами десятков и единиц, написанных в том же порядке. Найдите число.	б) Сумма цифр четырехзначного числа равна 15. Число, записанное двумя крайними цифрами этого числа, взятыми в порядке их написания, равно $\frac{1}{2}$ числа, записанного двумя средними цифрами. Число, записанное двумя первыми цифрами этого числа, равно $\frac{8}{21}$ числа, записанного последними двумя цифрами. Сумма цифр сотен и тысяч равна цифре десятков. Найдите число.
в) Число десятков двузначного числа составляет $\frac{2}{3}$ числа единиц, а число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, больше первоначального числа на 18. Найдите число.	г) Найдите двузначное число, зная, что оно в сумме с числом, составленным из тех же цифр, но взятых в обратном порядке, дает 121 и что произведение его цифр равно 28. Если таких чисел несколько, то в ответе укажите меньшее из них.

****10.47.**

а) Три бригады должны выполнить некоторую работу. Первая бригада делает в день 400 деталей, вторая — на $2x$ деталей меньше, а третья — на $6x$ деталей больше, чем первая. Сначала первая и вторая бригада совместно выполнили $\frac{1}{3}$ всей работы, а затем к ним присоединилась третья бригада, и они вместе выполнили оставшуюся часть работы. При каком значении x вся работа будет выполнена указанным способом за наименьшее время?	б) По двум улицам движутся к перекрестку две машины с постоянными скоростями 40 и 50 км/ч. Считая, что улицы пересекаются под прямым углом, и зная, что в некоторый момент времени машины находятся от перекрестка на расстояниях 2 и 3 км соответственно, определите, через сколько часов расстояние между ними станет наименьшим.
в) В геометрической прогрессии первый член положителен. При каком значении знаменателя прогрессии сумма первых трех ее членов принимает наименьшее значение?	г) Числа a, b, c в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию, а числа $a-c, c-b, 2a$ составляют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать выражение $2a^2-4b^2-c^2+6a+4bc$?

****10.48.**

а) Из города A в город B, находящийся на расстоянии 105 км от A, с постоянной скоростью v км/ч выходит автобус. Через 30 мин вслед за ним из A со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определите все те значения v, при которых автомобиль возвращается в город A позже, чем автобус приходит в город B.	б) Поезд, идущий с постоянной скоростью из пункта A в пункт B, был задержан у семафора на 16 мин. Расстояние от семафора до пункта B равно 80 км. При каких значениях первоначальной скорости поезд прибудет в пункт B не позже запланированного срока, если после задержки он увеличил скорость на 10 км/ч?

в) На реке, скорость течения которой равна 4 км/ч, в направлении ее течения расположены в указанном порядке пристани A, B, C, причем расстояние от A до B вдвое меньше, чем расстояние от B до C. От пристани B в один и тот же момент по направлению к пристани C отправлены плот (плывущий относительно берегов со скоростью течения реки) и катер. Дойдя до пристани C, катер разворачивается и движется по направлению к пристани A. Найдите все значения собственной скорости катера (т. е. скорости катера в стоячей воде), при которых катер приходит в пункт A позже, чем плот приходит в пункт C.	г) В две бочки налиты солевые растворы, причем в первую бочку налито 16 кг, а во вторую — 25 кг. Оба раствора разбавили водой так, что процентное содержание соли уменьшилось в m раз в первой бочке и в n раз — во второй бочке. О числах m и n известно только то, что $mn = m + n + 3$. Найдите наименьшее количество воды, которое могло быть долито в обе бочки вместе.

****10.49.**

а) В ящик вложили 8 ящиков. В каждый из этих ящиков либо опять вложили 8 ящиков, либо не вложили ни одного. Данная процедура повторилась несколько раз. В результате наполненных ящиков оказалось 20. Найдите, сколько процентов составляет количество пустых ящиков от количества наполненных.	б) В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. т железной руды, в течение нескольких следующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25 % по сравнению с каждым предшествующим годом, а затем на протяжении последующих трех лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем добытой руды за все время добычи составил 850 тыс. т. Сколько лет разрабатывалось месторождение?
в) Трое рабочих (не все одинаковой квалификации) копали канаву. Сначала первый из них проработал $\frac{1}{N}$ часть времени, необходимого двум другим для выполнения всей работы. Затем второй проработал $\frac{1}{N}$ часть времени, необходимого двум другим для того, чтобы вырыть всю канаву. И, наконец, третий проработал $\frac{1}{N}$ часть времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. Во сколько раз быстрее работа была бы выполнена, если бы трое рабочих работали одновременно?	г) Пусть стоимость алмаза пропорциональна квадрату его массы. При огранке алмаз раскололся на две части. Стоимость одной из частей оказалась на 98,56 % меньше, чем первоначальная стоимость алмаза. Найдите, сколько процентов от первоначальной массы алмаза составляет масса этой части.

11. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ПРОГРЕССИИ

Числовой последовательностью (a_n) называется функция, заданная на множестве натуральных чисел. Если функция задана на множестве **всех** натуральных чисел, то последовательность называется ***бесконечной***. Последовательность называется ***конечной***, если она задана на множестве **первых** n натуральных чисел (№ 11.1—11.3).

Последовательность называется ***возрастающей***, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т. е. $a_{n+1} > a_n$ для любого n.

Последовательность называется ***убывающей***, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т. е. $a_{n+1} < a_n$ для любого n.

Последовательность, все члены которой равны между собой, называется ***постоянной*** последовательностью.

Арифметической прогрессией называется последовательность (a_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом (d), которое называется ***разностью прогрессии*** (№ 11.4).

Если последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, то

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_{n+1} - a_n = \ldots = d,$$

где d — ***разность*** арифметической прогрессии.

Арифметическая прогрессия задается первым членом и разностью прогрессии. Можно вычислить любой член арифметической прогрессии (№ 11.5—11.7) по формуле:

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — **формула *n*-го (общего) члена**.

Числовая последовательность является арифметической прогрессией **тогда и только тогда**, когда каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов (№ 11.9):

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$ для любого n — **характеристическое свойство арифметической прогрессии**.

Чтобы посчитать сумму n первых членов арифметической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ (№ 11.10—11.13, 11.8), можно воспользоваться формулами:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Геометрической прогрессией называется последовательность (a_n), у которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число ($q \neq 0$), которое называется ***знаменателем прогрессии***.

Первый член геометрической прогрессии по определению также не равен нулю. Среди членов геометрической прогрессии не встречается число 0.

Если последовательность (a_n) является геометрической прогрессией, то

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots = q,$$

где q — ***знаменатель*** геометрической прогрессии.

Геометрическая прогрессия задается первым членом и знаменателем прогрессии (№ 11.14). Можно вычислить любой член геометрической прогрессии (№ 11.15, 11.16) по формуле:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ — **формула *n*-го (общего) члена**.

Числовая последовательность является геометрической прогрессией **тогда и только тогда**, когда квадрат каждого ее члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов (№ 11.17):

$a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$ для любого n — **характеристическое свойство геометрической прогрессии**.

Чтобы посчитать сумму n первых членов (№ 11.18—11.20) геометрической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$, можно воспользоваться формулой:

$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ при $q \neq 1$.
Если $q = 1$ (геометрическая прогрессия постоянна), то сумму n ее членов можно посчитать так: $S_n = a_1 \cdot n$.

Геометрическая прогрессия, у которой $0 < |q| < 1$, называется ***бесконечно убывающей геометрической прогрессией***. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно посчитать сумму **всех** ее членов по формуле (№ 11.21, 11.22):

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \ 0 < |q| < 1.$$

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии позволяет переводить бесконечные периодические десятичные дроби в вид обыкновенных дробей, как, например, 0,(17) = 0,17 + 0,0017 + 0,000017 + ... — сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 0,17 и знаменателем 0,01.

Тематический указатель задач

- Последовательности (№ 11.1—11.3).
- Определение арифметической прогрессии (№ 11.4).
- Формула общего члена арифметической прогрессии (№ 10.5—10.7).
- Общие члены нескольких арифметических прогрессий (№ 11.8, 11.9).
- Характеристическое свойство арифметической прогрессии (№ 10.10).
- Сумма n первых членов арифметической прогрессии (№ 11.11—11.14, 11.8).
- Определение геометрической прогрессии (№ 11.15).
- Формула общего члена геометрической прогрессии (№ 10.16, 10.17).
- Характеристическое свойство геометрической прогрессии (№ 10.18).
- Сумма n первых членов геометрической прогрессии (№ 11.19—11.21).
- Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии (№ 10.22, 10.23).
- Решение уравнений с применением формул суммы n первых членов арифметической (геометрической) прогрессии (№ 11.24).
- Задачи на применение всех формул темы (№ 10.25, 10.26).

11.1.

а) Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 2n^2 - n - 3$. Найдите a_1.	б) Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = 3n^2 - 2n - 4$. Найдите a_2.
в) Из последовательности чисел –9; –8; –6; 4; 5; 6 выбрали два числа и нашли их произведение. Какое наименьшее значение может принимать это произведение?	г) Из последовательности чисел –9; –7; –6; 2; 3; 5 выбрали два числа и нашли их произведение. Какое наибольшее значение может принимать это произведение?

11.2.

а) В каждом подъезде на каждом этаже 9-этажного дома находится по 6 квартир. В каком подъезде находится квартира № 176?	б) Два теплохода вышли из порта во вторник. Первый теплоход выполняет рейс за 6 суток, а второй — за 4. В какой день недели оба теплохода снова окажутся в порту?
в) Десять автобусных остановок расположены на прямой улице так, что расстояния между любыми соседними остановками одинаковы. Расстояние между первой и третьей остановками равно 1,4 км. Какое расстояние между первой и последней остановками?	г) Саша и Маша ехали в одном поезде. Саша сел в седьмой вагон от головы поезда, а Маша — в одиннадцатый вагон от хвоста поезда. Однако они ехали в одном вагоне. Сколько вагонов в поезде?

***11.3.**

а) Зеленый, желтый и красный цвета светофора горят попеременно следующим образом: 50 с — зеленый, 5 с — желтый, 20 с — красный, 5 с — желтый и снова по порядку, начиная с зеленого. В некоторый момент времени загорелся зеленый свет. Какой свет будет гореть через 5 мин?	б) Когда в Минске 13:00, в Токио — 22:00, а в Нью-Йорке — 5:00 этого же дня. Который час, число и месяц в Нью-Йорке, когда в Токио 12:00, а в Минске 1 января?
в) За прокат лодки в первый час или его часть берут 1000 руб. Каждый следующий час проката или его часть стоит 700 руб. Петр взял лодку в 9 ч 40 мин, а вернул в 13 ч 15 мин в тот же день. Сколько заплатил Петр за прокат лодки?	г) Объем бака автомобиля составляет 40 л, а затраты топлива на каждые 100 км — 10 л. Какое наименьшее количество раз водителю придется заехать на заправку, если ему надо проехать 31 300 км, а бак в начале движения был заполнен наполовину?

11.4.

а) Среди данных последовательностей укажите арифметическую прогрессию: А) 1; 2; 4; 8. Б) 45; 40; 35; 27. В) 0,1; 0,3; 0,5; 0,7. Г) 7; 10; 12; 14.	б) Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 2{,}3$, $a_2 = 3{,}2$.
в) Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_{10} = 13$, $a_5 = 18$.	г) Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 42. Найдите разность прогрессии, если первое число в 6 раз больше третьего.

***11.5.**

а) Первый член арифметической прогрессии $a_1 = -3$, а разность $d = 1$. Чему равен шестой член прогрессии?	б) Является ли число 34 членом арифметической прогрессии –47; –44; –41; –38; ...? Если да, то укажите его номер.
в) В арифметической прогрессии $\frac{a_{170}}{a_2} = 15$. Найдите отношение $\frac{a_{21}}{a_{12}}$.	г) В арифметической прогрессии $\frac{a_{133}}{a_5} = 17$. Найдите отношение $\frac{a_{25}}{a_{47}}$.

11.6.

а) Найдите номер члена арифметической прогрессии 11,8; 12,4; 13; ..., равного 20,8.	б) Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия 4,6; 4,2; 3,8; ...?
в) Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 16,4; 15,6; 14,8;	г) При делении девятого члена арифметической прогрессии на ее второй член в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена этой прогрессии на ее шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найдите первый член и разность прогрессии.

***11.7.**

а) Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 2, а сумма квадратов этих чисел равна $\frac{14}{9}$. Найдите эти числа.	б) Между числами 3 и 19 вставьте три числа, чтобы получилась арифметическая прогрессия.
в) При каком значении разности арифметической прогрессии, седьмой член которой равен 3, произведение четвертого и девятого членов будет наибольшим?	г) В арифметической прогрессии пятый член равен 2. При каком значении разности прогрессии сумма всевозможных попарных произведений четвертого, седьмого и восьмого членов прогрессии будет наименьшей?

***11.8.**

а) Даны две арифметические прогрессии: 1; 4; 7; ...; 2002; 2005 и 1; 6; 11; 16; ...; 2001; 2006. Сколько общих членов у этих прогрессий? Чему равна сумма всех общих членов этих прогрессий?	б) Найдите сумму первых 50 совпадающих членов двух арифметических прогрессий 2; 7; 12; ... и 3; 10; 17; ... .
в) Найдите количество совпадающих членов у двух арифметических прогрессий: 3; 15; 27; ...; 363 и 7; 12; 17; ...; 352.	г) В арифметической прогрессии 3; 6; 9; ... содержится 463 члена, а в арифметической прогрессии 2; 6; 10; ... содержится 351 член. Сколько одинаковых членов содержится в этих прогрессиях?

****11.9.**

а) Елочные игрушки, которых было больше 200, но меньше 400, разложили в коробки по 6 штук. Определите, сколько всего было игрушек, если известно, что при попытке разложить их в коробки по 9 штук 6 игрушек оставались лишними, а при попытке разложить их в коробки по 7 штук 3 игрушки оставались лишними.	б) Петя задумал целое число, большее 200, но меньшее 400, про которое известно, что оно делится нацело на 6, при делении на 9 дает в остатке 6, а при делении на 7 дает в остатке 3. Какое число задумал Петя?
в) На доске выписаны целые числа от 100 до 900, которые при делении на 4 и на 6 дают в остатке 1, а при делении на 9 дают в остатке 7. Найдите количество этих чисел.	г) Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 3, а при делении на 6 и на 9 дают в остатке 5.

11.10.

а) При каком значении x числа $3x-2$, $x+2$ и $x+8$ будут последовательными членами арифметической прогрессии?	б) При каких значениях t числа $2t-2$, t^2+1, $4t$, $3t^2-1$ являются четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии?
в) Найдите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии, если ее четвертый член равен –6, а седьмой равен 2,4.	г) Сумма четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 14. Найдите сумму первых девяти членов этой прогрессии.

11.11.

а) Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_5=-0{,}8$, $a_{11}=-5$.	б) За каждый следующий купленный DVD дается скидка в 2 руб. Если за всю покупку уплачено 312 руб. и последний DVD стоил 15 руб., то сколько купили DVD?
в) Сумма первых 10 членов арифметической прогрессии равна 5, а сумма первых 40 ее членов равна 80. Чему равна сумма первых 20 членов этой прогрессии?	г) Шестой член арифметической прогрессии равен 10, а сумма первых шестнадцати членов этой прогрессии равна 200. Найдите двенадцатый член прогрессии.

11.12.

а) В кинотеатре в каждом следующем ряду на 4 места больше, чем в предыдущем, а всего мест в зале — 1050. Сколько рядов в кинотеатре, если в первом ряду 10 мест?	б) Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а в каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты 5700 м?
в) Первый член арифметической прогрессии равен 4, а ее разность равна 3. Сколько членов прогрессии, начиная с первого, надо взять, чтобы их сумма была равна 246?	г) Сумма n первых членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле $S_n=6n-n^2$. Найдите шестой член этой прогрессии.

11.13.

а) Сумма пяти последовательных натуральных чисел равна 875. Чему равно наибольшее из этих чисел?	б) Найдите сумму всех трехзначных чисел, меньших 250, которые кратны 3.
в) Найдите сумму всех целых чисел K, каждое из которых делится без остатка на 22 и удовлетворяет условию $-375 \le K \le 507$.	г) Найдите сумму всех нечетных чисел K, каждое из которых делится без остатка на 17 и удовлетворяет условию $-221 \le K \le 324$.

***11.14.**

а) В арифметической прогрессии 20 членов. Известно, что сумма членов с нечетными номерами меньше суммы членов с четными номерами на 50. Найдите разность этой прогрессии.	б) Число членов арифметической прогрессии равно 10. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 15, а сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 12,5. Найдите первый член и разность прогрессии.
в) В арифметической прогрессии с нечетным числом членов сумма членов с нечетными номерами равна S, а с четными — S_1. Найдите число членов этой прогрессии.	г) Найдите число членов арифметической прогрессии, у которой отношение суммы первых 13 членов к сумме последних 13 членов равно $\frac{1}{2}$, а отношение суммы всех членов без первых трех к сумме членов без последних трех равно $\frac{4}{3}$.

11.15.

а) Укажите среди данных последовательностей геометрическую прогрессию: А) 6; 18; 54; 162. Б) 1; 2; 3; 5. В) 3; 8; 13; 18. Г) 21; 19; 17; 15.	б) Чему равен четвертый член геометрической прогрессии, если ее первый член $b_1 = 6$, а знаменатель $q = -2$?
в) Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = -20$, а знаменатель $q = -5$.	г) Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_6 = 121{,}5$, $q = 3$.

***11.16.**

а) Произведение пятого и седьмого членов геометрической прогрессии с положительными членами равно 25. Найдите произведение второго, третьего и тринадцатого членов этой прогрессии.	б) Произведение пятого, восьмого и одиннадцатого членов геометрической прогрессии равно 64. Найдите произведение шестого и десятого членов этой прогрессии.
в) Определите три числа, которые являются тремя последовательными положительными членами геометрической прогрессии, если сумма их равна 21, а сумма обратных величин равна $\frac{7}{12}$.	г) Между числами 5 и 1280 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовывали геометрическую прогрессию.

11.17.

а) Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_4 - b_1 = -9$ и $b_2 + b_3 + b_4 = -6$.	б) Три числа составляют геометрическую прогрессию. Среднее арифметическое второго и третьего ее членов равно 20, а среднее арифметическое первого и второго членов равно 5. Найдите эти три числа.
в) Пять положительных чисел образуют геометрическую прогрессию. Произведение первых двух чисел равно 2187, а произведение последних двух равно 3. Найдите большее из данных чисел.	г) В геометрической прогрессии первый член положителен. При каком значении знаменателя прогрессии сумма первых трех ее членов принимает наименьшее значение?

11.18.

а) В геометрической прогрессии, знаменателем которой является положительное число, $b_3 = 3$, а $b_5 = 12$. Найдите b_4.	б) При каком значении x числа $2x - 1$, $x + 3$ и $x + 15$ будут последовательными членами геометрической прогрессии?
в) При каких значениях t числа $2t - 1$, $2t + 1$, $9t$, $t + 26$ являются четырьмя последовательными членами геометрической прогрессии?	г) Алеша, Боря и Вася покупали блокноты и карандаши. Алеша купил 4 карандаша и 2 блокнота, Боря — 6 карандашей и блокнот, Вася — 3 карандаша и блокнот. Сколько стоит блокнот, если известно, что карандаш стоит 300 руб., а суммы денег, потраченные Алешей, Борей и Васей, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию?

11.19.

а) Чему равна сумма первых трех членов геометрической прогрессии, первый член которой $b_1 = \frac{1}{13}$, а знаменатель $q = \frac{1}{3}$?	б) Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 1$, $b_6 = 243$.
в) Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 = 18$, а знаменатель $q = 3$.	г) Первый член геометрической прогрессии равен 2, а сумма первых восьми членов в 5 раз больше суммы первых четырех членов. Найдите девятый член прогрессии.

***11.20.**

а) Найдите первый член геометрической прогрессии, состоящей из шести членов, если сумма трех первых ее членов равна 168, а сумма трех последних равна 21.	б) Найдите первый член геометрической прогрессии со знаменателем $\lvert q \rvert < 1$, если сумма первых трех ее членов равна $-4{,}5$, а их произведение равно 27.
в) В геометрической прогрессии отношение сумм $\frac{S_{18}}{S_9} = 7$. Найдите отношение $\frac{b_{18} - b_{16}}{b_9 - b_7}$.	г) Найдите третий член геометрической прогрессии, если сумма первых n ее членов выражается формулой $S_n = \frac{3(5^n - 1)}{25}$.

***11.21.**

а) Найдите первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что знаменатель ее равен 3, а сумма шести ее первых членов равна 1820.	б) Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 357, а третий член прогрессии на 255 больше первого. Найдите разность между первым и вторым членами прогрессии.
в) В геометрической прогрессии сумма первых четырех членов равна 15, а сумма членов от второго до пятого включительно равна 30. Найдите знаменатель прогрессии.	г) Сколько членов геометрической прогрессии нужно сложить, чтобы получить сумму 3069, если $b_1 + b_5 = 51$, $b_2 + b_6 = 102$?

11.22.

а) Чему равна сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой $b_1 = 16$, а знаменатель $q = \frac{3}{4}$?	б) Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 = 0{,}8$, $b_4 = 0{,}16$.
в) Вычислите: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$.	г) Бесконечную периодическую десятичную дробь 0,(41) представьте в виде обыкновенной дроби.

11.23.

а) Чему равен знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой равен 15, а сумма всех членов равна 75?	б) Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 16, а сумма квадратов ее членов равна $153\frac{3}{5}$. Найдите четвертый член и знаменатель прогрессии.
в) Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.	г) Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой отношение каждого члена к сумме всех последующих членов равно $\frac{2}{3}$.

***11.24.**

а) Решите уравнение $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$.	б) Решите уравнение $(x+2) + (x+5) + (x+8) + \ldots + (x+32) = 220$.
в) Найдите произведение корней уравнения $(x^2+1) + (x^2+3) + \ldots + (x^2+119) = 6000$.	г) Решите уравнение $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} = 0$.

****11.25.**

а) Три числа, из которых третьим является 12, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Если вместо 12 взять 9, то эти три числа будут тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите эти числа.	б) Найдите четыре числа, первые три из которых образуют арифметическую прогрессию, а последние три — геометрическую; сумма крайних чисел равна 66, а сумма средних — 60.
в) Найдите три числа, являющиеся последовательными членами геометрической прогрессии, если известно, что увеличение второго числа на 2 делает эти числа арифметической прогрессией, а если после этого увеличить последнее число на 9, то вновь полученные числа снова будут членами геометрической прогрессии.	г) Первый член арифметической прогрессии равен 1, а сумма первых девяти членов равна 369. Первый и девятый члены геометрической прогрессии совпадают с первым и девятым членами арифметической прогрессии. Найдите седьмой член этой геометрической прогрессии.

****11.26.**

а) Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим членам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующие арифметическую прогрессию. Найдите седьмой член исходной геометрической прогрессии.	б) Три положительных числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 8, то прогрессия станет арифметической. Но если после этого увеличить третье число на 64, то прогрессия снова станет геометрической. Найдите эти числа.
в) Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 70, а если из них вычесть соответственно 2, 8 и 24, то вновь полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите сумму первых двенадцати членов исходной геометрической прогрессии.	г) Коля, Петя, Миша и Ваня ловили рыбу. Оказалось, что количества рыб, пойманных Колей, Петей и Мишей, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если бы Коля поймал на 2 рыбы меньше, а Ваня — на 12 меньше, чем на самом деле, то количества рыб, пойманных Колей, Петей, Мишей и Ваней, образовали бы в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша, если известно, что он поймал на 18 рыб меньше Вани?

12. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Решением, или ***корнем***, уравнения $f(x)=g(x)$ называется такое число x_0, при подстановке которого вместо x в обе части уравнения получается верное числовое равенство, то есть при x_0 обе части уравнения определены (одновременно имеют смысл) и их значения совпадают. ***Решить уравнение*** — значит найти все его корни (решения) или доказать, что оно решений не имеет.

Основными методами являются:

• использование равносильных переходов для *простейших* уравнений:

$\lvert f(x)\rvert=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x).\end{array}\right.\end{cases}$ Этот способ рекомендуется, если решить неравенство $g(x)\ge 0$ проще, чем неравенства $f(x)\ge 0$ и $f(x)\le 0$ (№ 12.4, 12.6, 12.7). В частности, $\lvert f(x)\rvert=a$ имеет решения только при $a\ge 0$, и тогда переходим к совокупности $\left[\begin{array}{l}f(x)=a,\\ f(x)=-a.\end{array}\right.$ Если $a<0$, то решений нет (№ 12.1—12.3, 12.10).	$\lvert f(x)\rvert=g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}-f(x)=g(x),\\ f(x)\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$ Этот способ рекомендуется, если решить неравенства $f(x)\ge 0$ и $f(x)\le 0$ проще, чем неравенство $g(x)\ge 0$ (№ 12.4, 12.5).

$\lvert f(x)\rvert=\lvert g(x)\rvert\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.$ (№ 12.8);

• метод промежутков (№ 12.9—12.17);

• использование области допустимых значений переменной или свойств уравнения, чтобы однозначно раскрыть некоторые модули (№ 12.11—12.14);

• замена переменной (№ 12.18—12.20) и использование равносильных переходов:

$$|a|=a\Leftrightarrow a\ge 0,$$

$$|a|+|b|=a+b\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 0,\\ b\ge 0;\end{cases}$$

$$|a|-|b|=a+b\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge 0,\\ b\le 0,\end{cases}\\ a+b=0;\end{array}\right.$$

$$|a|-|b|=a-b\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge 0,\\ b\ge 0,\end{cases}\\ a-b=0;\end{array}\right.$$

$$|a+b|=|a|+|b|\Leftrightarrow ab\ge 0,$$

$$|a-b|=|a|+|b|\Leftrightarrow ab\le 0;$$

$$|a+b|=|a|-|b|\Leftrightarrow\begin{cases}ab\le 0,\\ |a|\ge|b|;\end{cases}$$

• графический метод (№ 12.1—12.11, 12.21—12.24).

12.1. Решите уравнение

а) $\lvert x+1\rvert=3$;	б) $\lvert 3-x\rvert=3$;
в) $\lvert 3-2x\rvert=1$;	г) $x\lvert x\rvert=-x$.

12.2. Решите уравнение

а) $\lvert 9-x^2\rvert=8$;	б) $\lvert 2x^2-x\rvert=1$;
в) $\lvert x^2-x-6\rvert=6\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$;	г) $\lvert x^2-6x-7\rvert=(\sqrt{3}-2)\dfrac{x+2}{\lvert x+2\rvert}$.

***12.3.** Решите уравнение

а) $\left\|\left\|3x-5\right\|-1\right\|=1$;	б) $\left\|\left\|x\right\|-3\right\|=3$;
в) $(x-1)\left\|\left\|2x-1\right\|-1\right\|=\left\|1-x\right\|$;	г) $\left\|\left\|20x+1\right\|-1\right\|=\dfrac{3^{\log_4 5}}{5^{\log_4 3}}$.

12.4. Решите уравнение

а) $\left\|2x-3\right\|=x+1$;	б) $\left\|2x+4\right\|+3x=-5$;
в) $\dfrac{\left\|2-x\right\|}{3}=x-4$.	г) При каких значениях x не имеет смысла выражение $\dfrac{2019}{\left\|2x+4\right\|+3x}$?

12.5. Решите уравнение

а) $\left\|3x-5\right\|=x^2-5$;	б) $\left\|4-x\right\|+x^2-6x+8=0$;
в) $\left\|x-2\right\|=3-2x(x+1)$.	г) При каких значениях x совпадают значения функций $f(x)=\sqrt{17-x^2}\left\|2-x\right\|$ и $g(x)=\left(x^2-14\right)\sqrt{17-x^2}$?

12.6. Решите уравнение

а) $\left\|x^2-2x-3\right\|=3x-3$;	б) $\left\|(x-1)^2-2\right\|=x-1$;
в) $\left\|x^2+2x-5\right\|=5-x$;	г) $\left\|x-10\right\|\left\|x^2-x-3\right\|=(x-10)(3-2x)$.

***12.7.** Решите уравнение

а) $\left\|\left\|x+2\right\|-3\right\|=2x+13$;	б) $\left\|\left\|x-3\right\|-2\right\|=x-1$;
в) $\left\|x^3+2x^2-9\right\|=x^3+9$.	г) При каких значениях x функции $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-2x}$ и $g(x)=\left\|\left\|x-1\right\|-x\right\|$ принимают одинаковое значение?

12.8. Решите уравнение

а) $\left\|2x^2-x\right\|=\left\|2x^2+3x-8\right\|$;	б) $\left\|3x^2+2x-1\right\|-2\left\|x+1\right\|=0$.
в) Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y=\left\|2x^2-3x-2\right\|$ и $y=\left\|3x+2\right\|$.	г) Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y=\left\|x^2+x-2\right\|$ и $y=\left\|x^2+3x+2\right\|$.

***12.9.** Решите уравнение

а) $\left\|\dfrac{x-2}{2x+5}\right\|=2$;	б) $\left\|3x^2+2\left\|x\right\|\right\|-1=0$;
в) $\left\|\dfrac{x+1}{x^2-2}\right\|=0{,}5$;	г) $\left\|\dfrac{3x^2-2}{x^2-x-1}\right\|=1$.

***12.10.** Решите уравнение

а) $\left\|x-2\right\|+\left\|6-x\right\|=4$;	б) $\left\|x-4\right\|-19=2\left\|x-1\right\|-3\left\|x+1\right\|$;
в) $\left\|x\right\|-2\left\|x+1\right\|+3\left\|x+2\right\|=0$;	г) $(x^2+2-3x)\left(\left\|x\right\|+\left\|3x+2\right\|+\left\|2x-1\right\|\right)=5(x-1)(2-x)$.

***12.11.** Решите уравнение

а) $\left\|x^2-9\right\|+\left\|x-2\right\|=5$;	б) $\left\|x^2-4x+3\right\|+\left\|x^2-5x+6\right\|=1$;
в) $(x-1)\left(\left\|x\right\|+\left\|x+2\right\|\right)=6\left\|1-x\right\|$;	г) $\dfrac{3\left\|x-1\right\|-11-\left\|x\right\|}{\sqrt{5-x}}=0$.

****12.12.** Решите уравнение

а) $\dfrac{\lvert x^2-4x\rvert+3}{\lvert x-5\rvert+x^2}=1;$	б) $\dfrac{1+2\lvert x\rvert}{3-\lvert 1-x\rvert}=1;$
в) $x-\lvert x\rvert=\lvert x-1\rvert;$	г) $\lvert x^2-2x-3\rvert(\lvert x-4\rvert+\lvert x-9\rvert+\lvert 14-x\rvert)=15(x+1)(3-x).$

12.13. Решите уравнение

а) $\lvert\lvert x\rvert+1\rvert=2;$	б) $\lvert 3x^2+2\lvert x+1\rvert\rvert=3x^2.$
в) При каких значениях x график функции $y=\lvert\lvert 2x\rvert+\lvert 2x+3\rvert\rvert-1$ пересекает ось абсцисс?	г) При каких значениях x функция $f(x)=\lvert\lvert\lvert x-1\rvert+1\rvert+3\rvert$ принимает значение, равное 5?

***12.14.** Решите уравнение

а) $\lvert x^2+2\rvert=x+2;$	б) $\lvert x^2+x+3\rvert-1=4x;$
в) $\lvert 4x-x^2-10\rvert+\lvert x-3\rvert=x^2-3x+11.$	г) При каких значениях x функция $f(x)=\lvert x^2+2x-5\rvert+x$ принимает значение, равное 5?

****12.15.** Решите уравнение

а) $\dfrac{\lvert x+23\rvert-2\lvert x\rvert-3\lvert x+2\rvert}{\sqrt{x-3}}=1;$	б) $\dfrac{x^2-4x+3+\lvert x-3\rvert}{\sqrt{3-x}}=0;$
в) $(\lvert\lvert x-1\rvert-2\rvert+\lvert x\rvert-11)\sqrt{x-3}=0;$	г) $\lg(5-x)(\lvert 11x-x^2-30\rvert-2x)=0.$

****12.16.** Решите уравнение

а) $\dfrac{\lvert 3x-2\rvert+9x^2-6\lvert x\rvert+1}{x-1}=\lvert 11x+7\rvert;$	б) $\lvert 2x+1\rvert-3\lvert x\rvert+5\lvert 1-x\rvert=8\dfrac{x-2}{\lvert x-2\rvert};$
в) $\lvert x\rvert+\lvert x+1\rvert+\lvert x+2\rvert+\ldots+\lvert x+10\rvert=12x;$	г) $\lvert 2x-5\rvert+4\lvert x^2\rvert-12\lvert x\rvert+9=\lvert 3x+1\rvert(x-2).$

12.17. Решите уравнение

а) $x^2-3\lvert x\rvert=4;$	б) $2x^4+x^2(2-\lvert x\rvert)=3(2-\lvert x\rvert)^2;$
в) $(x^2-2\lvert x\rvert-12)(x^2-2\lvert x\rvert-9)=4.$	г) При каких значениях x график функции $y=\lvert x^2-2\lvert x\rvert-3\rvert+2\lvert 2^{\log_4 x^2}-2\rvert$ пересекает прямую, перпендикулярную оси ординат и проходящую через точку $A(5;5)$?

****12.18.** Решите уравнение

а) $\left\lvert\dfrac{x+1}{x^2}-1\right\rvert+\left\lvert\dfrac{x+1}{x^2}+1\right\rvert=4;$	б) $\lvert x^2+2x-1\rvert+\lvert x^2+2x\rvert=\lvert x^2+2x-2\rvert;$
в) $\lvert\sqrt{x-1}-1\rvert-2\lvert\sqrt{x-1}-2\rvert=\lvert\sqrt{x-1}-3\rvert;$	г) $\left\lvert 2-\dfrac{x}{x-2}\right\rvert+\left\lvert 2+\dfrac{2x-2}{x-2}\right\rvert=7.$

12.19. Решите уравнение

а) $\lvert 2x-3\rvert=3-2x.$	б) При каких значениях x совпадают значения функций $f(x)=\left\lvert\dfrac{1}{x-3}\right\rvert$ и $g(x)=\left\lvert\dfrac{1}{3-x}\right\rvert$?
в) $\lvert(x-5)(x^2-x-6)\rvert=\lvert x-5\rvert(6+x-x^2);$	г) $\left\lvert-\dfrac{-x^2+10x-21}{x^2-12x+32}\right\rvert=\dfrac{-x^2+10x-21}{x^2-12x+32}.$

****12.20.** Решите уравнение

а) $\left\|\frac{x-1}{x}\right\|+\|x+5\|=x+6-\frac{1}{x}$;	б) $\left\|\frac{1-x^2}{x}\right\|+\|x+5\|=\frac{1}{x}+5$;
в) $\|x^2-3x+2\|=x^2-4x+15-\|x-13\|$;	г) $\left\|\|x^2-9\|-\|x^2+7x\|\right\|=2x^2+7x-9$.

***12.21.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases}\|x\|+y=6,\\ x=\|y\|-1;\end{cases}$	б) $\begin{cases}\|x\|-y=3,\\ \|x-1\|+y=6;\end{cases}$
в) $\begin{cases}y=\left\|\|x\|-1\right\|,\\ 2y=\|x\|+2;\end{cases}$	г) $\begin{cases}x+\|y\|=1,\\ \|x\|+\|y\|=1.\end{cases}$

****12.22.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases}\|x\|+\|y\|=3,\\ x^2+y^2=9;\end{cases}$	б) $\begin{cases}\|x+1\|+\|y\|=1,\\ (x-1)^2+y^2=1;\end{cases}$
в) $\begin{cases}\|x+y\|+\|x-y\|=10,\\ x^2+y^2=50.\end{cases}$	г) Сколько решений имеет система $\begin{cases}\|x+y\|+\|x-y\|=4,\\ x^2+y^2=5?\end{cases}$

****12.23.** Найдите, при каком значении a

а) уравнение $\left\|\|x-1\|-2\right\|=a$ имеет 3 различных корня;	б) уравнение $\left\|\|x+1\|-3\right\|=a$ имеет 3 различных корня;
в) уравнение $\left\|\|x\|-3\right\|=a$ имеет 4 различных корня;	г) график функции $y=\left\|\|x\|-1\right\|$ и прямая $y=a$ имеют ровно 2 общие точки.

****12.24.** Найдите, при каком значении a уравнение

а) $x\|x-2a\|=-a$ имеет 2 различных корня;	б) $\|x^2+ax\|=a$ имеет 4 различных корня;
в) $\|x-2\|+\|x-4\|=a$ имеет более двух различных корней;	г) $x\|2a-x\|=a$ имеет 3 различных корня.

13. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Решением неравенства с одной переменной называется число, подстановка которого в данное неравенство обращает его в верное числовое неравенство. ***Решить неравенство*** — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Основными методами являются:

• использование равносильных переходов для простейших неравенств:

$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$ (№ 13.1, 13.6—13.8, 13.10),

$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$ (№ 13.3, 13.6, 13.7, 13.9),

$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 > (g(x))^2$;

• метод промежутков (№ 13.5, 13.15);

• использование ОДЗ (области допустимых значений) переменной или свойств уравнения, чтобы однозначно раскрыть некоторые модули (№ 13.18—13.20);

• замена переменной (№ 13.16, 13.20, 13.22) и использование равносильных переходов:

$|a| \le a \Leftrightarrow a \ge 0$,

$|a| > a \Leftrightarrow a < 0$;

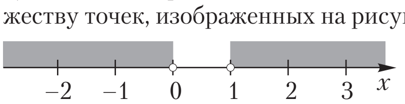
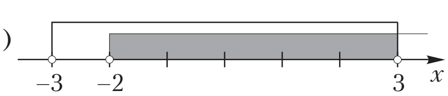
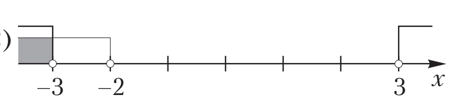
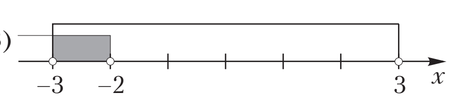
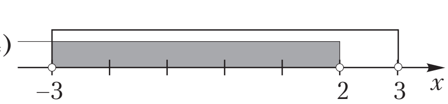
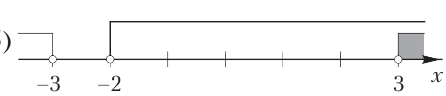
$|a| + |b| \le a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0, \\ b \ge 0; \end{cases}$

$|a+b| \ge |a| + |b| \Leftrightarrow ab \ge 0$,

$|a-b| \ge |a| + |b| \Leftrightarrow ab \le 0$;

• графический метод (№ 13.1—13.9, 13.23).

13.1. Решите неравенство

а) Диаметр детали должен быть равен 10 см с максимальной погрешностью 2 мм. Укажите, какое из данных утверждений выражает тот факт, что деталь бракованная, если x — это радиус детали в сантиметрах. 1) $\|x-10\| < 2$; 2) $\|2x-10\| < 0,2$; 3) $\|2x-10\| \le 0,2$; 4) $\|2x-10\| \ge 0,2$; 5) $\|x-5\| > 0,1$.	б) Две различные точки на числовой прямой лежат на расстоянии меньше 3 единиц от точки с координатой -4. Какое из следующих выражений задает координаты всех таких точек? 1) $\|x-4\| < 3$; 2) $\|x-3\| < 4$; 3) $\|x+4\| < 3$; 4) $\|x+3\| < 4$; 5) $\|x+4\| + 3 < 0$.
в) Укажите неравенство, соответствующее множеству точек, изображенных на рисунке.  1) $\|x\| > 1$; 2) $\|x-1\| < 1$; 3) $\|x+0,5\| > 1$; 4) $\|x+1\| > 0,5$; 5) $\|x-0,5\| - 0,5 > 0$.	г) Укажите номер рисунка, на котором изображено множество решений системы неравенств $\begin{cases} \|x\| \le 3, \\ -3x > 6. \end{cases}$ 1)  2)  3)  4)  5) 

13.2. Решите неравенство

а) $\left\|2x-\frac{1}{2}\right\|<5$;	б) $\|5-2x\|<1$;
в) $\frac{\|3x-1\|}{2}\le\frac{2}{3}$;	г) $\left\|\frac{5x-3}{2}\right\|\le\sin\left(\frac{2009\pi}{2}\right)$.

13.3. Решите неравенство

а) $\left\|\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right\|\ge 5$;	б) $\|11x+5\|>6$.
в) При каких значениях x график функции $y=\|2x-1\|-5$ лежит выше оси абсцисс?	г) Решите неравенство $2\le\left\|\frac{x}{5}-3\right\|<3$.

13.4. Решите неравенство

а) $\left\|2-\|3x-x^2\|\right\|<2$;	б) $\left\|6-\|4x-x^2\|\right\|\ge 6$;
в) $\left\|30-\|30-30x\|\right\|<30$;	г) $\left\|55x+\|55+55x\|\right\|\ge 55$.

***13.5.** Решите неравенство

а) $(\|x\|-2)(\|x-1\|-2)\le 0$;	б) $(\|x+1\|-2)(x^2-4)\le 0$;
в) $(\|x-3\|-1)(\sqrt{x}-2)>0$;	г) $(\|x\|-5)(\|x+1\|-6)\le 0$.

***13.6.** Решите неравенство

а) $1<\|2x^2-3x-1\|\le 8$;	б) $\left\|x^2-4\|x\|+3\right\|<1$.
в) При каких значениях x функция $y=\|x^2+2x-15\|$ принимает значения, меньшие, чем 16?	г) Решите неравенство $(x-1)\|x-5\|\ge 3$.

13.7. Решите неравенство

а) $\left\|\frac{2x+5}{x-3}\right\|\le 1$;	б) $\left\|\frac{x+1}{3-2x}\right\|\ge 1$;
в) $\left\|\frac{3x+1}{3-x}\right\|<2$;	г) $1\le\left\|\frac{4x+1}{x-1}\right\|<3$.

13.8. Решите неравенство

а) $\|2x-1\|<x+2$;	б) $2\|x-2\|<x-1$;
в) $\left\|\frac{2x-3}{2}\right\|<\frac{x}{2}+1{,}5$.	г) Найдите, при каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{2x-1-\left\|\frac{x-1}{2}\right\|}$.

13.9. Решите неравенство

а) $\left\|\frac{x}{2}+1\right\|>x-5$;	б) $\frac{\|x+1\|}{3}\ge x$;
в) $\|2x-1\|>\frac{x}{2}+2$;	г) $2\|x+1\|>x+4$.

***13.10.** Решите неравенство

а) $\|x^3+2x^2-4\|<x^3+4$;	б) $\|x^2-2x-1\|<x-1$;
в) $\|x-6\|+5x\ge x^2+9$;	г) $\|x^3-x\|\le 1-x$.

***13.11.** Решите неравенство

а) $\left\|x^2+x+3\right\|\le 4x+1$;	б) $\left\|x^2-\|x\|+1\right\|\le 10-\|x\|$;
в) $\left\|\|x-1\|+2\right\|>3$;	г) $\left\|\left\|\left\|x-1\right\|+2\right\|-1\right\|+3\right\|<6$.

***13.12.** Решите неравенство

а) $\left\|x^2-5x+1\right\|\le\sqrt{(x-6)^2}$;	б) $\left\|\dfrac{-5}{x+2}\right\|>10\left\|\dfrac{1}{1-x}\right\|$;
в) $\left\|x^2-x-1\right\|-\left\|x^2-3x-5\right\|\le 0$.	г) Определите, при каких значениях x график функции $y=\left\|2x^2-x-2\right\|$ лежит не выше, чем график функции $y=\left\|x^2-3x-2\right\|$.

***13.13.** Решите неравенство

а) $\left\|\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right\|<3$;	б) $\left\|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right\|\le 1$;
в) $\left\|\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-x+1}\right\|\ge 2$.	г) Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x)=\dfrac{6x-5}{4x-6}$ и $g(x)=x$ меньше, чем 1,5.

13.14. Решите неравенство

а) $\|1-x\|+\|x-4\|>7$;	б) $\|2x+5\|+\|x-4\|-\sqrt{(2x+1)^2}\le 4$;
в) $\sqrt{(2x+5)^2}+\|x-4\|<8+2^{1+\log_4(x+1)^2}$;	г) $\|x+2\|\le\|x-1\|-4\|x+4\|$.

***13.15.** Решите неравенство

а) $\dfrac{\|x-2\|}{\|x+1\|-3}<1$;	б) $\dfrac{\|x+2\|-3}{\|x\|-1}>3$;
в) $\dfrac{\|2x+5\|}{\|x-4\|-2}\le 1$;	г) $\dfrac{\left\|x^2-4x\right\|+3}{x^2+\|x-5\|}\le 1$.

13.16. Решите неравенство

а) $\sqrt{(3x+2)^2}\ge 3x+2$;	б) $\sqrt{(4x+1)^2}>4x+1$.
в) Определите, при каких значениях x график функции $y=\|3-x\|$ лежит выше, чем прямая $y=3-x$.	г) Определите, при каких значениях x график функции $y=\|2x-1\|$ лежит ниже, чем прямая $y=1-2x$.

****13.17.** Решите неравенство

а) $\left\|x^2-5x-6\right\|-2<2\|x+1\|-\|x-6\|$;	б) $\left\|x^2-5x+6\right\|\le 3-\|x-3\|+3\|2-x\|$;
в) $\left\|x^2+x-2\right\|+2<\|x+2\|+\|2x-2\|$;	г) $4\|x-1\|\le 2^{x+1}+8-2^x\|x-1\|$.

****13.18.** Решите неравенство

а) $\sqrt{x-5}\left(\|x-1\|-2\|2x-3\|-2\|x\|\right)\ge 0$;	б) $\dfrac{\|5x+30\|-\|18-3x\|-8x-12}{\sqrt{x+4}}\ge 0$;
в) $\dfrac{\|x\|+2\|x+1\|-16}{\lg^2(-x-2)}\le 0$;	г) $\left(\|x+1\|-3\|x+2\|+4\right)\arcsin x>0$.

****13.19.** Решите неравенство

а) $\|x\|-\|x-1\|+\|x-2\|-\|x-3\|+\|x-4\|\le 2x-10$;	б) $\dfrac{\|x^2-7x+12\|}{1-x}\ge x^2-8x+16$;
в) $\left\|\dfrac{\|x\|}{x}-\dfrac{\|x-1\|}{1-x}\right\|<2$;	г) $\left\|\dfrac{\|x\|}{x}+\dfrac{\|x-1\|}{x-1}+\dfrac{\|x-3\|}{x-3}\right\|\le 3$ и укажите все его решения, удовлетворяющие условию $\|x\|<10$.

***13.20.** Решите неравенство

а) $\left\|x^2+\|x\|\right\|\le 6$;	б) $\dfrac{2}{3-\|14-x\|}\ge\|x-14\|$;
в) $x(2\|x\|+1)(x+2)(2\|x\|+5)\le 24$.	г) Найдите область определения функции $y=\sqrt{\left\|2-\dfrac{\|2x\|}{2+\|x\|}\right\|-1}$.

***13.21.** Решите неравенство

а) $\left\|\dfrac{2x^2-6}{2x+3}+1\right\|+\left\|\dfrac{2x^2+4x}{2x+3}+1\right\|\le 4$;	б) $\left\|\dfrac{x^2-12}{x-3}-2\right\|+\left\|\dfrac{x^2-12}{x-3}-6\right\|\le 8$;
в) $\left\|2-\dfrac{x^2+x-7}{x-2}\right\|+\left\|2-\dfrac{x^2-x-3}{x-2}\right\|\le 4$;	г) $x^2-7\|x\|+10<\dfrac{7}{x^2-11\|x\|+28}$.

****13.22.** Решите неравенство

а) $\|x-3\|+\|x^2-4\|>x^2+x-7$;	б) $\|x+3\|-\|x^2-5\|\ge x^2+x-2$;
в) $\|x^3+1\|+\|x^2-1\|\le x^3+x^2$;	г) $\|x^5-x^3\|+\|x^2+x\|\le\|x^5-x^3+x^2+x\|$.

****13.23.** Найдите, при каких значениях a неравенство

а) $\|x^2-4x+3\|\le a$ не имеет решений;	б) $\|x^2+3\|<a^2-2a$ не имеет решений;
в) $\|1-x\|\le ax$ имеет лишь одно решение;	г) $\left\|\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right\|<3$ верно для любых значений x.

14. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решением, или ***корнем***, уравнения $f(x)=g(x)$ называется такое число x_0, при подстановке которого вместо x в обе части уравнения получается верное числовое равенство, то есть при x_0 обе части уравнения определены (одновременно имеют смысл) и их значения совпадают. ***Решить уравнение*** — значит найти все его корни (решения) или доказать, что оно решений не имеет.

Основными методами являются:

• использование равносильных переходов для простейших уравнений:

$\sqrt{f(x)}=a \Leftrightarrow f(x)=a^2$ при $a \geq 0$ (№ 14.5, 14.6);

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x)=(g(x))^2 \end{cases}$$ (№ 14.7, 14.9—14.11, 14.13);

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \, (\text{или } f(x) \geq 0), \\ f(x)=g(x) \end{cases}$$ (№ 14.3, 14.4);

• возведение обеих частей уравнения в квадрат (№ 14.10, 14.11, 14.13). При этом могут как появляться, так и не появляться посторонние корни (не забудьте выполнить проверку корней подстановкой в исходное уравнение);

• возведение обеих частей уравнения в куб является равносильным переходом, но использование затем формулы, не являющейся тождеством, может привести к появлению посторонних корней (не забудьте выполнить проверку корней подстановкой в исходное уравнение) (№ 14.12);

• алгебраические преобразования уравнения (группировка, вынесение за скобки множителя и т. д.) (№ 14.8);

• замена переменной (№ 14.14—14.19, 14.23). Обратите внимание, что часто надо ввести несколько новых переменных и перейти от уравнения к ***системе уравнений***;

• умножение и деление выражения на сопряженное выражение (№ 14.21);

• выделение полного квадрата в подкоренном выражении (№ 14.20);

• графический метод (№ 14.22).

14.1. Решите уравнение

а) $\sqrt{-2x+3}+\sqrt{x-3}=0$;	б) $\sqrt{4-x}-\sqrt{x-6}=2$;
в) $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=\log_{2009}2010$;	г) $5\sqrt{x}-3\sqrt{-x}+\frac{17}{x}=4\arccos(\operatorname{tg}2009°)$.

14.2. Решите уравнение

а) $\sqrt[3]{x+\frac{1}{x}}=\sqrt{-x}-1$;	б) $\sqrt{-1-x}=\sqrt[3]{x-5}$;
в) $\sqrt{x+2}=-2$;	г) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=x-x^2-3$.

14.3. Решите уравнение

а) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+5}=0$;	б) $\sqrt{3x+19}-\sqrt{5x-3}=0$;
в) $\frac{\sqrt{x+7}}{3\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3x-2}}$;	г) $\sqrt[3]{x^2+15}-2\cdot\sqrt[3]{x+1}=2^3-8$.

14.4. Решите уравнение

а) $\sqrt{x-4}=\sqrt{x^2-10x+14}$;	б) $\sqrt{x-3}=\sqrt{(x-3)(x+1)}$;
в) $\sqrt{2-x}=\sqrt{(x-2)(x-4)}$;	г) $\sqrt{3-x}=\sqrt{x^2-12x+21}$.

14.5. Решите уравнение

а) $\sqrt{x^2-3x+1}=1$;	б) $\sqrt{2x+3}=3$;
в) $\sqrt{3x+1}=4$;	г) $\sqrt{-x^2+2x+1}=(\sin 45°)^{-1}$.

14.6. Решите уравнение

а) $\sqrt{7-\sqrt[3]{x^2-101}}=2\sqrt{2}$;	б) $\sqrt[3]{-9+\sqrt{x^3-7}}=-2$;
в) $\sqrt[3]{x^2+3x-12}=-2$;	г) $\sqrt[5]{x^2(x^2-1)-1}=-1$.

***14.7.** Решите уравнение

а) $\sqrt{1+3x}+x=1$;	б) $\sqrt{1+3x}=x+1$;
в) $\sqrt{2x-1}\sqrt{x-2}=4-x$;	г) $\sqrt{4+2x-x^2}+2=x$.

***14.8.** Решите уравнение

а) $\sqrt{x^2-8x+12}=2\sqrt{6-x}-x\sqrt{2-x}+2x$;	б) $\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}-2=2\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}$;
в) $\sqrt{4x-3-x^2}-x^2=x\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}\right)$.	г) Найдите нули функции $\sqrt{\frac{2-x}{2}+\frac{x-2}{2-\sqrt{x}}}$.

***14.9.** Решите уравнение

а) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$;	б) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}=\frac{3}{\sqrt{x-1}}$;
в) $\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=1$.	г) При каких значениях x функция $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$ принимает значение, равное 1?

***14.10.** Найдите, при каких значениях x график функции

а) $y=\sqrt{4+x}-\sqrt{x-6}$ пересекает прямую $y=2$;	б) $y=3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}$ пересекает прямую $y=7$;
в) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}$ пересекает прямую $y=4$;	г) $y=\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{x}}-\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{x}}-\sqrt[4]{28}$ пересекает ось абсцисс.

***14.11.** Решите уравнение

а) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$;	б) $\sqrt{2x-1}=\frac{12}{\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-4}$;
в) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}$.	г) При каких значениях x пересекаются графики функций $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$ и $y=\sqrt{2x^2-4x}$?

***14.12.** Решите уравнение

а) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$;	б) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$;
в) $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=3$;	г) $\sqrt[3]{x-6}+\sqrt[3]{x+10}=\sqrt[3]{2x+4}$.

***14.13.** Решите уравнение

а) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}$;	б) $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$;
в) $\sqrt{6x+1}+\sqrt{4x+2}=\sqrt{8x}+\sqrt{2x+3}$.	г) Найдите нули функции $y=\sqrt{8-x}-\sqrt{9+5x}-\sqrt{4-5x}+\sqrt{5+x}$.

***14.14.** Решите уравнение

а) $x^2-4\sqrt{x^2-5}=10$;	б) $x+3\sqrt{x}=10$;
в) $x+5\sqrt{x+5}=19$;	г) $x^2+2\sqrt{x^2+4}=31$.

***14.15.** Решите уравнение

а) $\sqrt{x-1}+6\sqrt[4]{x-1}=16$;	б) $x\sqrt{x^2+15}-2=\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2+15}$;
в) $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$.	г) При каких значениях x график функции $y=\frac{x-4}{2+\sqrt{x}}$ пересекает прямую $y=x-8$?

***14.16.** Решите уравнение

а) $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}+3\cdot\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}}=4;$	б) $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}-2\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}=1;$
в) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=12;$	г) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x-21}}-\sqrt{(x+1)^2-22}=1.$

***14.17.** Решите уравнение

а) $\sqrt{3x^2-18x+25}+\sqrt{4x^2-24x+29}=6x-x^2-4;$	б) $\sqrt{2x^2+3x-2}-\sqrt{2x^2+3x-9}=1;$
в) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$	г) При каких значениях x пересекаются графики функций $y=\sqrt{2x^2+6x+1}+\sqrt{x^2+3x-3}$ и $y=2\sqrt{x}\sqrt{x+3}$?

****14.18.** Решите уравнение

а) $x^2+\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2=3+2\sqrt[3]{x-1}\sqrt{x^2-3};$	б) $2x^2-x-12=x\sqrt{x+12};$
в) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{\sqrt{7-6x}}{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{7-6x}}=0;$	г) $2\dfrac{2x+3}{x}+\sqrt{2x+3}=3x.$

****14.19.** Решите уравнение

а) $\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}-2\right)=2x-5;$	б) $\left(\sqrt{2x-2}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x+3}+3\right)=x-5;$
в) $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)}=2;$	г) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+4}+x}{x}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+4}-x}{x^{-1}}}=1.$

****14.20.** Решите уравнение

а) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}=2-\sqrt{x-4\sqrt{x-4}};$	б) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=4-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}};$
в) $(\sqrt{x})^2-0{,}25=\sqrt{x+0{,}5-\sqrt{x+0{,}25}}.$	г) При каких значениях x функция $y=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x(x+2)+1}$ принимает значение, равное 2?

****14.21.** Решите уравнение

а) $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2};$
б) $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{x}\sqrt{x+4}-\sqrt{2}\sqrt{2x+6}\right)=\sqrt{6}\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\sqrt{2x+6};$
в) $\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\dfrac{2}{x};$
г) $\left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}\right)=4.$

****14.22.** Решите уравнение

а) $\sqrt[4]{(x-2)(4-x)}=(3-x)^4+1;$	б) $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8;$
в) $\sqrt{(x-2)(8-x)}=2^{\lvert x-5\rvert}+2;$	г) $\sqrt{x}+2\sqrt{x+3}=8-\sqrt{3x+6}.$

***14.23.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x-100+25y-10\sqrt{xy}=0, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2; \end{cases}$	б) $\begin{cases} \sqrt{2x+4y}=10-\sqrt{4y-2x}, \\ \sqrt{16y^2-4x^2}=21; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \sqrt{2x+4}=8-\sqrt{y-2}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}+\sqrt{(y-2)^{-1}}=\dfrac{8}{7}; \end{cases}$	г) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+3\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=4, \\ x^2+4x+y^2-3y=0. \end{cases}$

15. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Обратите внимание, что этот параграф адресован только тем читателям, которые ориентированы не только на сдачу ЦТ.

Решением неравенства с одной переменной называется число, подстановка которого в данное неравенство обращает его в верное числовое неравенство. ***Решить неравенство*** — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Основными методами являются:

• использование равносильных переходов для *простейших* уравнений:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases} \quad (\text{№ } 15.1,\ 15.4);$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{array}\right. \quad (\text{№ } 15.2,\ 15.5,\ 15.7);$$

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < g(x) \quad (\text{№ } 15.3,\ 15.9);$$

• алгебраические преобразования неравенства (группировка, вынесение за скобки множителя и т. д.) (№ 15.10);

• замена переменной (№ 15.11—15.13);

• умножение и деление выражения на сопряженное выражение (№ 15.18);

• выделение полного квадрата в подкоренном выражении (№ 15.17);

• графический метод (№ 15.5, 15.8, 15.14).

15.1. Решите неравенство

а) $\sqrt{2x-1}-5 \leq 0$;	б) $\sqrt{9-24x+16x^2} \leq 8$;
в) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x-2}} \leq 3$;	г) $\sqrt{\dfrac{1-x}{2x-5}} < 3$.

15.2. Решите неравенство

а) $\sqrt{3x+1}-5 > 0$;	б) $\sqrt{x+3} > -1$;
в) $\sqrt{\dfrac{x+3}{4-x}} \geq 2$;	г) $\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}} > -2009$.

15.3. Решите неравенство

а) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} > 0$;	б) $\sqrt[5]{x^5} \geq \sqrt[4]{x^4}$;
в) $\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}$;	г) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}} < \sqrt[3]{\dfrac{6}{x-1}}$.

15.4. Решите неравенство

а) $\sqrt{x-1} < 7-x$;	б) $x+1 > \sqrt{2+x}$;
в) $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$;	г) $2+\sqrt{2x-5} < x$.

15.5. Решите неравенство

а) $\sqrt{x+2} > x$;	б) $x-3 < \sqrt{x^2-4x}$;
в) $x+4 < \sqrt{-x^2-8x-12}$;	г) $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}} > x-2$.

***15.6.** Решите неравенство

а) $\sqrt[3]{8x-4}+2 > \sqrt[3]{8x+4}$;	б) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x} > 8$;
в) $\sqrt[3]{x+5}+2 > \sqrt[3]{x-3}$;	г) $\sqrt[3]{x^2+x+1}+\sqrt[3]{3-x^2-2x} \geq \sqrt[3]{4-x}$.

***15.7.** Найдите область определения функции

а) $y=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{21-4x-x^2}}{x+3}}$;	б) $y=\lg\left(3-\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}\right)$;
в) $y=\sqrt{\dfrac{1-2\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}}{x}-1}$;	г) $y=\sqrt{x-\dfrac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x}}$.

***15.8.** Решите неравенство

а) $\sqrt{x+9}+\sqrt{2(x+2)}>5$;	б) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}<1$;
в) $\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}<1$;	г) $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$.

***15.9.** Решите неравенство

а) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}>\sqrt{x+4}+\sqrt{x-2}$;	б) $\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}<\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}$;
в) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}>\sqrt{3x-3}+\sqrt{4-x}$;	г) $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.

***15.10.** Решите неравенство

а) $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}\ge\sqrt{4x^2-18x+18}$;	б) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+2x-3}\le\sqrt{2x^2-x-1}$;
в) $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{9x^2-1}}\le 3x-2$;	г) $\sqrt{x+7}-\sqrt{-x-5}<-1+\sqrt{(x+7)(-x-5)}$.

***15.11.** Решите неравенство

а) $x^2+5x+4<5\sqrt{x^2+5x+28}$;	б) $\sqrt{x^2-3x+5}+(x+1)(x-4)\le 3$;
в) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{x(3x+5)+2}>1$;	г) $\dfrac{\sqrt{x^2}-2\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-2}<0$.

****15.12.** Решите неравенство

а) $x+7-\sqrt{x+7}\sqrt{x^2+1}>2(x^2+1)$;	б) $4\sqrt{4x+3}\sqrt{x^2+x}\ge 4x+3+4(x^2+x)$;
в) $4\left(\sqrt{2x^2-3}\right)^2+9(3x-1)-12\sqrt{3x-1}\sqrt{2x^2-3}\le 0$;	г) $x^4-5-2\left(x^4+x\right)+\sqrt{x^4-5}\sqrt{x^4+x}>0$.

****15.13.** Решите неравенство

а) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\dfrac{3}{2}$;	б) $\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}>2\dfrac{2}{3}$;
в) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}\le\dfrac{7}{12}$;	г) $\sqrt{3+2x+2\sqrt{x}\sqrt{x+3}}>3x$.

***15.14.** Решите неравенство

а) $\sqrt{(x-1)(5-x)}\ge 2^{1+\lvert x-3\rvert}$;	б) $\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\ge\cos(\pi x)+5$;
в) $\sqrt{x+15}\le\log_{0,5}\left(x-\dfrac{15}{16}\right)$;	г) $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{6-x}\ge\sqrt{2}$.

****15.15.** Решите неравенство

а) $\sqrt{9-\dfrac{9}{x}}<x-\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}$;	б) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}>\dfrac{x-1}{x}$;
в) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}>\dfrac{2}{x}$;	г) $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\dfrac{1}{x}$.

16. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Определение: $\log_a b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$ — показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т. е. $a^{\log_a b}=b$.

Десятичные логарифмы — логарифмы по основанию 10: $\lg b=\log_{10} b$.

Натуральные логарифмы — логарифмы по основанию e: $\ln b=\log_e b$.

При решении большинства задач надо во всех выражениях перейти к одинаковым основаниям степеней или одинаковым основаниям логарифмов — простым числам (2, 3, 5, 7, ...) и, воспользовавшись свойствами степеней и логарифмов, упростить выражение.

Основными методами при преобразованиях являются:

• использование основного логарифмического тождества $a^{\log_a b}=b$ (№ 16.16—16.20, 16.22);

• использование свойств логарифмов при допустимых значениях переменных:

$\log_a 1=0$	$\log_a a=1$	$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$
$\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$	$\log_{a^n} x^m=\dfrac{m}{n}\log_a x$	$\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\log_c a}$

• использование тождеств: $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$, $a^{\sqrt{\log_a b}}=b^{\sqrt{\log_b a}}$ (№ 16.21);

• замена переменной (№ 16.14, 16.24, 16.25).

Знак логарифма:

$\log_a b>0$, если $a>1$ и $b>1$ или $0<a<1$ и $0<b<1$,

$\log_a b<0$, если $a>1$ и $0<b<1$ или $b>1$ и $0<a<1$.

Задачи на упрощение показательных выражений приведены также в § 2 (2.11, 2.17, 2.18, 2.20, 2.23, 2.50).

16.1.

а) Упростите $2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}$.	б) Упростите $5^{x+1}-0{,}2^{-x}+25^{\frac{x}{2}+1}+9^{\frac{3}{4}}-3\sqrt{3}$.
в) Если $3x-y=3$, то чему равно $\dfrac{216^x\cdot 0{,}5^{y+1}}{3^y}$?	г) Если $x=10^{1,4}$, $y=10^{0,7}$ и $x^z=y^3$, то чему равно значение $2z$?

16.2.

а) При каком значении x верно равенство $2^x=3$?	б) Сколько знаков содержит число, равное $2^{30}\cdot 3^{20}$, если известно, что $\lg 2\approx 0{,}301030$, $\lg 3\approx 0{,}477121$?
в) Решением какого из данных уравнений является число $\lg 2$? 1) $10^x=2$; 2) $2^x=10$; 3) $x^{10}=2$; 4) $x^2=10$; 5) $\log_2 x=2$; 6) $\log_x x=\lg 10$.	г) Если $x=\log_2 10$, то какое из следующих утверждений верно? 1) $x\in(-1;0)$; 2) $x\in(0;1)$; 3) $x\in(1;2)$; 4) $x\in(2;3)$; 5) $x\in(3;4)$.

16.3. Вычислите

а) $\log_4 \dfrac{1}{8}+\log_2 \sin\dfrac{5\pi}{6}$;	б) $\log_8 \dfrac{1}{4}-\log_{27}\dfrac{1}{9}$;
в) $\log_9 \dfrac{1}{27}-\log_4 \dfrac{1}{32}$;	г) $\left(\log_8 4+\log_4 8-\log_{\sqrt{2}} 2\right)^{-1}$.

16.4. Вычислите

а) $\log_{3\sqrt{3}} 27-\log^3_{2\sqrt{2}} 8$;	б) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \dfrac{64}{27}-\log_{2\sqrt{2}}\dfrac{1}{8}$;
в) $\log_{0,6}\dfrac{\sqrt{15}}{5}+\log_{\sqrt[4]{3}}\sqrt{27}-\log_2 0{,}5$;	г) $\log_q\left(q^{\frac{5}{9}}:q^{\frac{1}{18}}\right)-\log_{b^{-1}}\dfrac{b+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+1}+\log_a\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$.

16.5. Вычислите

а) $\log_a \log_b b + \log_b \log_a a^b$;	б) $\log_5 \log_3 \sqrt{\sqrt[5]{9}} + \log_2 \log_3 81$;
в) $\log_2 \log_{0,5} \log_5 \sqrt[16]{5}$;	г) $\log_9 \log_{0,5} \log_3 \sqrt[8]{3}$.

16.6. Вычислите

а) $\log_5(25a)$, если $\log_5 a = 0,2$;	б) $\log_5 a^2 + 2\log_5 b$, если $\log_{25}(ab) = 2$;
в) $\log_2 \dfrac{4a}{b^4}$, если $\log_2 a = 5$, $\log_2 b^3 = 0,3$;	г) $\lg\left(0,01a\sqrt{b}\right)$, если $\lg a = \sqrt{3}$, $\log_{100} b = \sin\dfrac{\pi}{3}$.

16.7. Вычислите

а) $\log_{2\sqrt{2}} \dfrac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$;	б) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt[3]{81}\sqrt{3}}{9}$;	в) $\log_{\sqrt{27}} \left(\dfrac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{27}}{9}}\right)$;	г) $\log_{\sqrt{5\sqrt[3]{25}}} \left(\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{125}}{5}} 7^{\log_{\sqrt{7}} \sqrt[3]{5}}\right)$.

***16.8.** Вычислите

а) $\log_{\sqrt{2}-1}\left(\sqrt{2}+1\right)$;	б) $\log_{1+\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}+4\right)$;
в) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2x}$, если $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{x} = 5$;	г) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x} + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x}$, если $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2x} + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2x} = 7$.

16.9. Вычислите

а) $\log_{\sqrt{5}} 8 \cdot \log_{16} \sqrt{125\sqrt{5}}$;	б) $\dfrac{\log_2 36}{\log_2 6} + \dfrac{\log_3 5}{\log_3 \sqrt{5}}$;	в) $\dfrac{\log_{11} 16}{\log_{11} 4} + \dfrac{\log_{2009} 16}{\log_{2009} 2}$;	г) $\log_{\sqrt{2}} 27 \cdot \log_{81} \sqrt{8\sqrt{2}}$.

***16.10.** Вычислите

а) $\log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}\right) + \log_{0,5}\left(7 + 2\sqrt{6}\right)$;	б) $\log_2 5 + \log_2 \dfrac{2}{5} + \log_7 5 + \log_7 \dfrac{7}{5}$;
в) $\log_7 36 + 2\log_7 \dfrac{7}{6} + \log_5 2 + \log_5 \dfrac{5}{2}$;	г) $\lg 15 - \lg 1,5 + \log_3 7 + \log_3 \dfrac{3}{7}$.

***16.11.** Вычислите

а) $\dfrac{\lg 250 - 1}{\lg 2,5 + 1}$;	б) $\dfrac{\lg 64}{\lg 48 - \lg 3}$;	в) $\dfrac{2\lg 2 + \lg 3}{\lg 48 - \lg 4}$;	г) $\dfrac{\lg 210 - 1}{\lg 2,1 + 1}$.

16.12. Выразите значение логарифма

а) $\log_6 2$, если $\log_3 6 = a$;	б) $\lg 5$, если $\log_2 10 = a^{-1}$;	в) $\log_2 6$, если $\log_6 3 = a$;	г) $\log_6 4$, если $\log_2 3 = a$.

***16.13.** Выразите значение логарифма

а) $\log_5 6$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$;	б) $\log_{\sqrt{pq}} \dfrac{q}{\sqrt{p}}$, если $\log_p q = \sqrt{5}$;
в) $\log_{60} 30$, если $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$;	г) $\log_{\frac{p}{\sqrt{q}}} \sqrt[3]{q^5 p^2}$, если $\log_p q = \sqrt{11}$.

***16.14.** Вычислите

а) $\dfrac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \dfrac{\log_5 150}{\log_6 5}$;	б) $\dfrac{\log_6 30}{\log_{30} 6} - \dfrac{\log_6 180}{\log_5 6}$;	в) $\dfrac{\log_3 12}{\log_{12} 3} - \log_9 1296 \cdot \log_3 4$;	г) $\dfrac{1 + 2\log_3 2}{(1 + \log_3 2)^2} + \log_6^2 2$.

***16.15.** Вычислите

а) $\log_6 2 \cdot \log_6 18 + \log_6^2 3$;	б) $\lg^2 2 + \lg 50 \cdot \lg 200$;	в) $\lg 5 \cdot \lg 20 + \lg^2 2$;	г) $\lg 200 \cdot \lg 20 - \lg^2 2 - \lg 8$.

16.16. Вычислите

а) 3^{1+a}, если $a = \log_9 5$;	б) 4^{a-1}, если $a = \log_2 10$;	в) 9^{a+1}, если $a = \log_{27} 4$;	г) $\left(\sqrt{2}\right)^{a+2}$, если $a = \log_{0,5} 9$.

16.17. Вычислите

а) $2^{\log_2\sqrt{5}}+2^{1+\log_2 7}+8^{3\log_8 3}-0{,}04^{\log_{0,2}5}$;	б) $\sqrt{6}\cdot 3^{\log_3\sqrt{6}}-17^{3\log_{17}2}-0{,}1^{-1-\log_{0,1}2}+9^{1+\log_3\sqrt{5}}$;
в) $2^{\log_2 5}+3^{3-\log_3 0{,}25}+(0{,}5)^{-\log_2 3}+3^{4\log_9 2}$;	г) $2^{2+\log_2 3}+3^{-\log_3 0{,}5}+(0{,}25)^{-\log_2 5}+2^{4\log_4 3}$.

16.18. Вычислите

а) $2^{\log_4(1-\sqrt{2})^2}$;	б) $8^{\log_{64}\left(\sqrt{3}-4\right)^2}$;	в) $2^{-\log_{\sqrt{2}}x}$, если $x^2=5$;	г) $3^{\log_3(-x)}$, если $x^2=100$.

16.19. Вычислите

а) $9^{\frac{\lg 2}{\lg 4}}+4^{1-4\log_{16}0{,}2}+\left(3^{\log_2 5}\right)^{\log_5 8}$;	б) $2^{\frac{\log_3 125}{\log_3 5}}-5^{-4\log_{25}0{,}5}+2^{\log_3 5\log_5 9}$;
в) $11^{\log_{12}2+\log_{12}72}-3^{-4\log_4 0{,}5}-\left(8^{\log_5 3}\right)^{\log_{27}5}$;	г) $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)^{\lg 9-2}+0{,}01^{\lg 0{,}2-0{,}5}$.

16.20. Вычислите

а) $5^{\frac{\lg\lg 6}{\lg 5}}+\lg 6^{-1}$;	б) $13^{\frac{\lg\lg 5}{\lg 13}}+\lg 0{,}2$;
в) $11^{\frac{\log_2\lg 9}{\log_2 11}}-\lg 9$;	г) $\left(5+\sqrt{26}\right)^{\log_3\left(3+\sqrt{8}\right)}\cdot 100^{\lg\sqrt{22}}\cdot\left(3-\sqrt{8}\right)^{-\log_9\left(5-\sqrt{26}\right)^2}$.

***16.21.** Вычислите

а) $5^{\log_6 7}-6^{\log_7 8}-49^{\log_{36}5}+2^{3\log_7 6}$;	б) $6^{\log_7 8}+7^{\log_8 81}:9^{\log_8 49}-8^{\log_7 6}$;
в) $12^{\sqrt{\log_{12}2}}\cdot 11^{-\sqrt{\log_{11}3}}\cdot 2^{-\sqrt{\log_2 12}}\cdot 3^{\sqrt{\log_3 11}}$;	г) $\dfrac{12^{\sqrt{\log_{12}11}}}{11^{\sqrt{\log_{11}12}}}+\dfrac{5^{\lg 20}}{2^{\lg 5}}$.

****16.22.** Упростите

а) $\left(1+3\cdot x^{1+\log_x 2}+9\cdot 8^{\frac{2}{3}\log_2 x}\right)^{\frac{1}{2}}$;	б) $\left(1+2\cdot x^{1+\frac{1}{\log_2 x}}+4\cdot 8^{\frac{2}{3}\log_2 x}\right)^{\frac{1}{2}}$;
в) $\left(1+2\cdot x^{1+\frac{1}{\log_8 x^3}}+4\cdot 8^{\log_{2^3}x^2}\right)^{\log_9 3}$;	г) $\left(-\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}+5^{\log_5 3}\cdot x^{1+\log_x 2}+9\cdot 8^{\frac{2}{\log_x 8}}\right)^{2^{-1}}$.

****16.23.** Упростите

а) $\sqrt{\log_2 6+2\sqrt{\log_2 3}}$;	б) $\sqrt{\log_2 6-2\sqrt{\log_2 3}}$;
в) $\sqrt{\lg 20-2\sqrt{\lg 2}}$.	г) Найдите значение выражения 2^A, если $A=(\log_2 3+\log_3 2-2)^{0,5}\cdot\left(\log_{1,5}3\cdot\sqrt{\log_2 3}-\log_2^{1,5}3\right)+$ $+4\log_4^2 3$.

***16.24.** Упростите

а) $\sqrt{2^{2x}+2\cdot 3^y\cdot 2^x+3^{2y}}$;	б) $\sqrt{2^{4x}+5^y\cdot 4^{x+0,5}+25^y}$;
в) $\sqrt{3^{2y}-3^y\cdot 2^{x+1}+2^{2x}}-2^x$ при $x=11$, $y=5$;	г) $\sqrt{3^{2y}-3^y\cdot 2^{x+1}+2^{2x}}+2^x$ при $x=300$, $y=200$.

***16.25.** Упростите

а) $\sqrt{\log_2^2 7+\log_7^2 2+2}$;	б) $\sqrt{2^x+0{,}5^x+2}$;
в) $\left(\lg^2 2+\lg^2 3-2\dfrac{\lg 2}{\log_3 10}\right)^{0,5}$;	г) $\sqrt{\lg^2 x+\log_x^2 100+4}$.

***16.26.** Вычислите

а) $\lg\left(\sqrt{2}\cos 1^\circ\right)\cdot\lg\left(\sqrt{2}\cos 3^\circ\right)\cdot\ldots\cdot\lg\left(\sqrt{2}\cos 89^\circ\right)$;	б) $\lg\sin 2^\circ\cdot\lg\sin 4^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\sin 178^\circ$;
в) $\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\ldots+\lg\operatorname{tg}89^\circ$;	г) $\lg\operatorname{tg}1^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}89^\circ$.

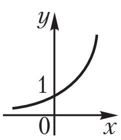
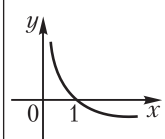
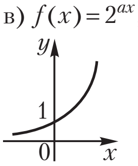
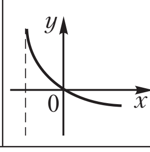
***16.27.** Вычислите

а) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{127}128$;	б) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{63}64$;
в) $\log_9\left(\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8\right)$;	г) $\lg 2\cdot\lg 3\cdot\lg 5\cdot\log_4 10\cdot\log_9 10\cdot\log_{25}10$.

****16.28.** Чему равно значение выражения

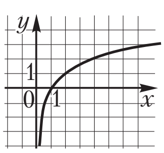
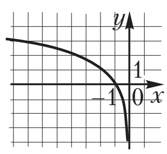
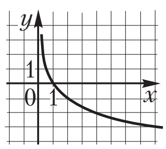
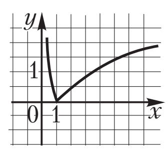
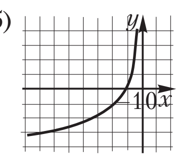
а) $2^x:3^x$, если $\dfrac{2^x+3^{x+1}}{2^{x-1}-2\cdot 3^{x+1}}=-\dfrac{4}{7}$?	б) $\dfrac{3\cdot 2^{x-1}+3^x}{2^{x+1}+2\cdot 3^{x-1}}$, если $(1{,}5)^x=3$?
в) $\dfrac{4^{x+1}+5\cdot 6^x+9^x}{4^x-9^x}$, если $(1{,}5)^x=2$?	г) $\dfrac{2^{a+1}-3^a}{2^a+2\cdot 3^a}$, если $\dfrac{4^a-6^{a+1}+3^{2a+2}}{4^{a+0{,}5}-10\cdot 6^a+3^{2a}}=4$?

16.29. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Какое из следующих утверждений верно?

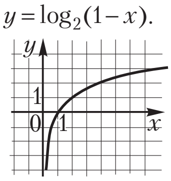
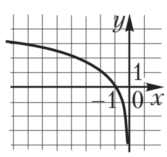
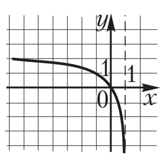
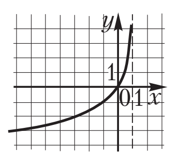
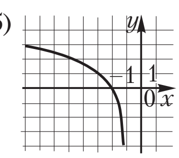
а) $f(x)=a^x$, 	1) $a>1$; 2) $a<1$; 3) $a=1$; 4) $a<0$; 5) $a<-1$.
б) $f(x)=\log_a x$, 	1) $a>1$; 2) $0<a<1$; 3) $a=1$; 4) $-1<a<0$; 5) $a<-1$.
в) $f(x)=2^{ax}$, 	1) $a>0$; 2) $a<x$; 3) $a\neq 1$; 4) $a<0$; 5) $a<-1$.
г) $f(x)=\log_b(x-a)$, 	1) $a>0$; 2) $b\le x$; 3) $0<a<1$; 4) $a<0$; 5) $a>1$.

16.30. Укажите номер рисунка, на котором изображен график функции

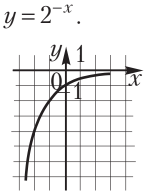
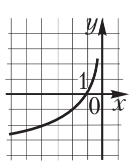
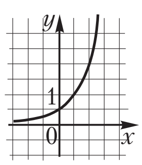
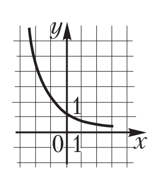
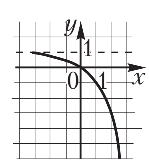
а) $y=\log_2\dfrac{1}{x}$.

1) 
2) 
3) 
4) 
5) 

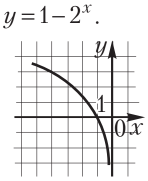
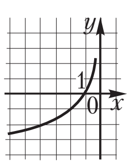
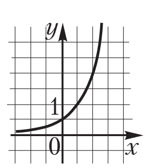
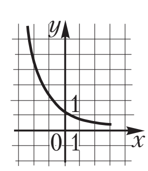
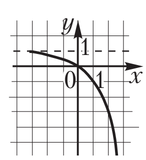
б) $y=\log_2(1-x)$.

1) 
2) 
3) 
4) 
5) 

в) $y=2^{-x}$.

1) 
2) 
3) 
4) 
5) 

г) $y=1-2^x$.

1) 
2) 
3) 
4) 
5) 

17. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

Решением, или ***корнем***, уравнения $f(x) = g(x)$ называется такое число x_0, при подстановке которого вместо x в обе части уравнения получается верное числовое равенство, то есть при x_0 обе части уравнения определены (одновременно имеют смысл) и их значения совпадают. ***Решить уравнение*** — значит найти все его корни (решения) или доказать, что оно решений не имеет.

Решением неравенства с одной переменной называется число, подстановка которого в данное неравенство обращает его в верное числовое неравенство. ***Решить неравенство*** — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

При решении большинства задач надо во всех выражениях перейти к одинаковым основаниям степеней — простым числам (2, 3, 5, 7, ...) и, воспользовавшись свойствами степеней, упростить выражение. При этом непременно используйте факт, что основания являются взаимно обратными числами (например, $9-\sqrt{80}$ и $\sqrt{80}+9$ или $\operatorname{tg}2$ и $\operatorname{ctg}2$, как в № 17.11, 17.21).

Основными методами являются:

• использование равносильных переходов для *простейших* уравнений и неравенств:

$a^f = a^g \Leftrightarrow f = g$,

$a^f < a^g$ при $a > 1 \Leftrightarrow f < g$,

$a^f < a^g$ при $0 < a < 1 \Leftrightarrow f > g$,

$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) < 0$, если $a > 0$, $a \neq 1$;

• алгебраические преобразования неравенства (группировка, вынесение за скобки множителя и т. д.) (№ 17.7, 17.14, 17.23);

• замена переменной (№ 17.8—17.12, 17.18, 17.24—17.26, 17.28);

• обобщенный метод интервалов (№ 17.27);

• графический, функциональный метод (№ 17.16, 17.29).

17.1. Решите уравнение

а) $8^{3\log_8 x} = 5^{1+\log_7 \frac{1}{7}} + 7$;	б) $11^{\log_{11}(70x)} = 10^{1+2\lg 7}$;
в) $8^{\log_2 x} = 10^{1+\lg\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)}$;	г) $7^{\log_7\left(16\sqrt{x}\right)} = 9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2}$.

17.2. Решите уравнение

а) $6^{3-x} = 216$;	б) $3^{3^{x-1}} = 27$;
в) $3^{x^2-4x-0,5} = 81\sqrt{3}$;	г) $2^{4x^2-3x} = 4^{\log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8}$.

17.3. Решите уравнение

а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x$;	б) $3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{3^0}{27}\right)^x$;
в) $\sqrt{9^{2x-1}} - 27^{\frac{2x-1}{x}} = 0$;	г) $5^{\lvert x-1\rvert} \cdot 5^{\lvert 1-x\rvert} = 0,2^{-4-x}$.

17.4. Решите уравнение

а) $\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{x^2-x+3}{2}} = 7\sqrt[4]{7}$;	б) $7^{\frac{2x^2-5x-9}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{3\log_2 7}$;
в) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$;	г) $\sqrt{3} \cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}} = 81$.

17.5. Решите уравнение

а) $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$;	б) $2^{x^2} + 128 = 5^{1-x^2}10^{x^2}$;
в) $2^{3x} \cdot 5^x = 3200 - (0,2)^{-x} \cdot 8^x$;	г) $2^{x+1}3^{x-1} = 4 \cdot 6^{\frac{x+3}{x}}$.

***17.6.** Решите уравнение

а) $3\cdot 15^{2x+1}-27^x\cdot 5^{x+3}=0$;	б) $6^{3x+4}=9^{2x+1}\cdot 32^x$;
в) $77^x=49^{x-1}\cdot 11^{3x-4}$;	г) $0{,}001^{-x}=4^{2x-1}\cdot 5^{x+4}$.

***17.7.** Решите уравнение

а) $10^x-5^{x-1}2^{x-2}=950$;	б) $2^{\sqrt{x}+2}-\sqrt{2}^{2\sqrt{x}+2}=12+2^{\sqrt{x}-1}$;
в) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$;	г) $2^x+4^{\frac{x+1}{2}}=8\cdot 3^{\frac{x}{3}}$.

***17.8.** Решите уравнение

а) $6^{2x}-8\cdot 6^x+12=0$;	б) $4^{\frac{x+1}{2x-1}}-5\cdot 2^{\frac{3x}{2x-1}}+16=0$;
в) $4^{\sqrt{x-2}}+4^2=5\cdot 2^{\sqrt{x-2}+1}$;	г) $\sqrt{6\cdot 2^{x-1}+4}=4\cdot 2^{x-2}$.

***17.9.** Решите уравнение

а) $16^x-12\cdot 2^{\frac{3x-3}{2}}=2^{3-x}$;	б) $9^x+9\cdot 3^{\frac{x-3}{2}}-2\cdot 3^{1-x}=0$;
в) $16^x+12\cdot\sqrt{2^{3x-3}}=2^{3-x}$;	г) $16^x-28\cdot 2^{\frac{3x-3}{2}}=2^{4-x}$.

***17.10.** Решите уравнение

а) $16^{x+\frac{1}{2}}=15\cdot 4^x+2^2$;	б) $4^{-x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{-x}=4$;
в) $2^{6x}+8^{x+\frac{2}{3}}-5=0$;	г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x}-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}=128$.

***17.11.** Решите уравнение

а) $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x=62$;	б) $5^{1+x^3}-5^{1-x^3}=24$;
в) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{x-1}+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x+1}=\dfrac{8}{\sqrt{4-\sqrt{15}}}$;	г) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{(x-1)^2}=52$.

***17.12.** Решите уравнение

а) $6\cdot 4^x-13\cdot 6^x+6\cdot 9^x=0$;	б) $27^x+12^x=2\cdot 8^x$;
в) $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}$;	г) $8^x-4^x=2^x$.

***17.13.** Решите уравнение

а) $2^x\cdot 3^{x-1}+16-4\cdot 2^{x-2}-144\cdot 3^{x-3}=0$;	б) $\left(2^{3x}-4\right)\left(3^{\lvert x+2\rvert-3}+1\right)=0$;
в) $5\cdot 15^{x-1}+3^{x-1}-9-45\cdot 5^{x-1}=0$;	г) $175+\dfrac{35^{x+1}}{125}=25\cdot 7^{x+1}+\dfrac{7}{5}\cdot 5^{x-1}$.

****17.14.** Решите уравнение

а) $x\cdot 2^x-4^2=16x-2^x$;	б) $x\cdot 5^x-250=125x-2\cdot 5^x$;
в) $x^2 2^x+2^{x+1}-x^2=2$;	г) $4^{\log_3 x}=48-2\cdot x^{\log_3 4}$.

****17.15.** Решите уравнение

а) $\lvert x-2\rvert^{1-10x^2}=\lvert x-2\rvert^{-3x}$;	б) $\lvert x-1\rvert^{\lg^2 x-\lg x^2}=\lvert x-1\rvert^3$;
в) $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$;	г) $5^x\cdot 8^{\frac{x}{x+1}}=10^2$.

****17.16.** Решите уравнение

а) $7^{6-x}=x+2$;	б) $2^{3x^2-2x^3}=\dfrac{x^2+1}{x}$;
в) $\dfrac{x}{18}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_x 12}$.	г) Найдите количество корней уравнения $3^{3-x}=\lvert 2x-7\rvert$.

***17.17.**

а) Решите уравнение $\cos\pi x+5^{\lvert x-3\rvert}=0$.	б) Найдите сумму корней уравнения $3\cdot 2^{\lvert x-3\rvert}+x^2=6x+22$.
в) Решите неравенство $3^{1-\lvert x-2\rvert}\ge(x-2)^2+3$.	г) Решите неравенство $2^{-x^2+2x+1}\ge 4+\sin^2\dfrac{\pi x}{2}$.

***17.18.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases}2x+2^y=-2,\\ 10x+3{,}5\cdot 2^{2y+1}=82;\end{cases}$	б) $\begin{cases}7\cdot 2^x+6y=2,\\ 3\cdot 2^{x+1}-5y=93;\end{cases}$
в) $\begin{cases}4\cdot 3^x+2^{y-1}=12{,}5,\\ 3^{2x+1}+2^y=28;\end{cases}$	г) $\begin{cases}0{,}5\cdot 3^{x+1}+7{,}5\cdot 5^{y-1}=12,\\ 2\cdot 9^x+5^y=23.\end{cases}$

***17.19.** Найдите решения системы уравнений

а) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=\dfrac{1}{9},\\ \dfrac{1}{9}3^y=3^x;\end{cases}$	б) $\begin{cases}4^{y+1}=8^x,\\ 9^{2y-x}=3^{x+y};\end{cases}$
в) $\begin{cases}4^{\frac{x}{y}}=32\cdot 8^{\frac{y}{x}},\\ 3^{\frac{x}{y}}=3\cdot 9^{\frac{1-y}{y}};\end{cases}$	г) $\begin{cases}y^{\frac{1}{x}}=2,\\ y^x=16.\end{cases}$

17.20. Решите неравенство

а) $\left(\dfrac{1}{0{,}125}\right)^x\le 128$;	б) $\sqrt{9^{x(x-1)-0{,}5}}-\sqrt[4]{3}>0$;
в) $3^{x-2}<\dfrac{2^{\log_2 3}}{9^{\frac{1}{x}}}$;	г) $\sqrt[3]{3^{\frac{3x-1}{x-1}}}-27^{\frac{x-3}{3x-7}}\ge 0$.

17.21. Решите неравенство

а) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2-2x}\le\left(\dfrac{8}{27}\right)^{x-2}$;	б) $\left(\dfrac{13}{17}\right)^{3x+1}>\left(\dfrac{17}{13}\right)^{x-5}$;
в) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\ge\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^x$;	г) $64\cdot 3^{\sqrt{x-8}}-6^{\frac{x-8}{\sqrt{x-8}}}\ge\arcsin 0$.

17.22. Решите неравенство

а) $3^{x+3}7^{x+3}\le 3^{2x}7^{2x}$;	б) $3^{2(2x+5)}5^{2(3x+1)}-15^{5x+6}>0$;
в) $2^{2x+1}3^{x+1}\le 2^{x+2}3^{2x}$;	г) $\dfrac{1}{8}6^{3x}-2^{2x}3^{3x}\le\log_{2009}1$.

***17.23.** Решите неравенство

а) $2^{x+3}-2^x-112>0$;	б) $2^{5x-1}+2^{5x-2}+2^{5x-3}-896<0$;

в) $3^x+2^{x-1}-2^{x+2}-3^{x-1}+2^{x-3}\geq 0$;	г) $2^{x^2-1}-3^{x^2}-3^{x^2-1}+2^{x^2+2}\geq \arccos 1$.

***17.24.** Решите неравенство

а) $2^{4x}-63\cdot 4^x-64>0$;	б) $2^{x+1}+4^x\leq 5\cdot 2^4$;
в) $3^{x+5}\leq 3^{\frac{x}{2}+2}+3^{\log_3 2}$;	г) $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}\leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

***17.25.** Решите неравенство

а) $\dfrac{2^{-x}-2^x+1{,}5}{2^x-1}\leq 0$;	б) $\sqrt{4^{x+1}+17}-5>2^x$;
в) $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-3^2$;	г) $\dfrac{2}{2^x-2^2}<\dfrac{2^0}{3\cdot 2^{x+1}-2}$.

****17.26.** Решите неравенство

а) $3\cdot 4^{\frac{1}{x}}-2\cdot 9^{\frac{1}{x}}+6^{\frac{1}{x}}<0$;	б) $2\cdot 7^x-3\cdot 2^x>\dfrac{43}{7}\cdot 14^{\frac{x}{2}}$;
в) $4^x\leq 3\cdot 2^{\sqrt{x}+x}+4^{1+\sqrt{x}}$;	г) $\left(4^x-1\right)^2+2^{x+1}\left(4^x-1\right)<8\cdot 4^x$.

***17.27.** Решите неравенство

а) $(2^x-4)(x^2-2x-3)>0$;	б) $\sqrt{x+1}\left(3^x-1\right)\geq 0$;
в) $x^2\cdot 5^x-5^{x+2}<0$;	г) $2^{x+3}-x^3\cdot 2^x\leq 16-2x^3$.

***17.28.** Найдите область определения функции

а) $y=\sqrt[4]{9^{\frac{x+4}{2x}}-3-2^3\cdot 3^{\frac{2}{x}}}$;	б) $y=\sqrt[6]{8^{\frac{x+4}{3x}}-5\cdot 2^{\frac{2}{x}}+2}$;
в) $y=\sqrt{27^{\frac{2+x}{3x}}-10\cdot 3^{\frac{1}{x}}+3}$;	г) $y=\sqrt{x+3}\sqrt{35^{x+2}-625^{x-1}\cdot 49^x}$.

****17.29.** Решите неравенство

а) $x\cdot 5^{\sqrt{16-x^2}}+\dfrac{x^{-1}}{5^{\sqrt{16-x^2}}}>\left(\operatorname{tg}^2\pi x+\operatorname{ctg}^2\pi x\right)^{-3}$;	б) $\left(\sin^6 1+\cos^8 1\right)^{\log_4\frac{10}{20-x}}\leq\sqrt{x+15}-4$;
в) $\left\lvert\cos\dfrac{x\pi}{4}\right\rvert^{\sqrt{x+10}\cdot\log_{\left\lvert\sin\frac{x\pi}{4}\right\rvert}\frac{49-7x-x^2}{31}}\leq 1$;	г) $(0{,}5)^{(3-2x)^3}\geq(14-2x)^{\log_{0,5}^2(14-2x)}$.

18. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

Решением, или ***корнем***, уравнения $f(x)=g(x)$ называется такое число x_0, при подстановке которого вместо x в обе части уравнения получается верное числовое равенство, то есть при x_0 обе части уравнения определены (одновременно имеют смысл) и их значения совпадают. ***Решить уравнение*** — значит найти все его корни (решения) или доказать, что оно решений не имеет.

Решением неравенства с одной переменной называется число, подстановка которого в данное неравенство обращает его в верное числовое неравенство. ***Решить неравенство*** — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

При решении большинства задач надо во всех выражениях перейти к одинаковым основаниям логарифмов — простым числам (2, 3, 5, 7, ...) и, воспользовавшись свойствами логарифмов, упростить выражение.

Основными методами являются:

• использование равносильных переходов для простейших уравнений и неравенств:

$\log_a f = B \Leftrightarrow f = a^B$,

$\log_a f = \log_a g \Leftrightarrow f = g > 0$,

$\log_a f < \log_a g$ при $a > 1 \Leftrightarrow 0 < f < g$,

$\log_a f < \log_a g$ при $0 < a < 1 \Leftrightarrow f > g > 0$,

$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-g(x)}{a-1} < 0$ при всех допустимых значениях переменной и $a > 0$ (№ 18.22—18.24);

• алгебраические преобразования неравенства (группировка, вынесение за скобки множителя и т. д.) (№ 18.10, 18.12, 18.13);

• замена переменной (№ 18.8—18.11, 18.27, 18.28);

• обобщенный метод интервалов (№ 18.26, 18.29);

• графический метод (№ 18.14, 18.31).

18.1. Решите уравнение

а) $2^x = 5$;	б) $3^x = (0,2)^{-1}$.
в) Между какими последовательными целыми числами находится корень уравнения $2^x = 22$?	г) Между какими последовательными целыми числами находится корень уравнения $3^x = 10$?

18.2. Решите уравнение

а) $\log_2(x+1) = 3$;	б) $\log_3(x-1) = -1$;
в) $\log_{\sin\frac{\pi}{3}}(2x+1) = -2$;	г) $\log_4 \log_2 \log_{\sqrt{5}} x = \frac{1}{2}$.

18.3. Решите уравнение

а) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7\sqrt[3]{7}}}} x = -\frac{3}{4}$;	б) $\log_7(x(2x-5)+31) = 2$;
в) $\lg\left(64 \cdot \sqrt[24]{2^{x^2-40x}}\right) = 0$;	г) $\log_x 9 = 2$.

18.4. Решите уравнение

а) $\log_{x+1}\left(x^2-3x+1\right) = 1$;	б) $\log_{1+x}\left(x^3+3x^2-3x+3\right) = 3$;
в) $\lg\left(3^x+x-17\right) = x\lg 30 - x$;	г) $\log_6\left(5+6^{-x}\right) = x+1$.

18.5. Решите уравнение

а) $\lg(x(x+9)) + \lg\frac{x+9}{x} = 0$;	б) $2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$;
в) $\frac{\lg\left(35-x^3\right)}{\lg(5-x)} = 3$;	г) $\log_{\frac{1}{9}}(2x-1) = \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$.

18.6. Решите уравнение

а) $\log_6(x+1)+\log_6(2x+1)=1$;	б) $2\log_7(x-2)=\log_7(x-10)^2-2$;
в) $\lg 5-1=\lg(x-3)-\frac{1}{2}\lg(3x+1)$;	г) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=3\lg 2+\lg(x-2)$.

***18.7.** Решите уравнение

а) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=5{,}5$;	б) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-\log_2(x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=1$;
в) $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2$;	г) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=6$.

***18.8.** Решите уравнение

а) $\frac{1+\lg(x-1)}{1-\lg^2(x-1)}+\frac{1}{1-\lg(x-1)}=1$;	б) $4\log_4^2(-x)+2\log_4 x^2+1=0$;
в) $\lg^2 x-\lg x^4=\lg^2 5-4$;	г) $\lg^2 x^3-10\lg x+1=0$.

***18.9.** Решите уравнение

а) $\sqrt{\log_2 x}+\sqrt{\log_x 2}=\frac{4}{\sqrt{3}}$;	б) $2\log_7 x-\log_x 49=3$;
в) $\sqrt{\log_3 x^9}-4\log_9\sqrt{3x}=1$;	г) $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1$.

****18.10.** Решите уравнение

а) $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}\cdot\log_5 x=1$;	б) $\lg(10x)\cdot\lg(0{,}1x)=\lg x^3-3$;
в) $\log_{x+1}(x^3-9x+8)\log_{x-1}(x+1)=3$;	г) $\log_x 3\cdot\log_{\frac{x}{3}}3+\log_{\frac{x}{81}}3=0$.

***18.11.** Решите уравнение

а) $x^{\log_3 x-4}=\frac{1}{27}$;	б) $x^{\log_2 x+2}=256$;
в) $x^{\log_2\frac{x}{98}}\cdot 14^{\log_2 7}=1$;	г) $x^{2\lg^2 x}=10x^3$.

****18.12.** Решите уравнение

а) $x^{\lg 3}+3^{\lg x}=54$;	б) $5^{\log_2 x}+2\cdot x^{\log_2 5}=15$;
в) $10^{\lg^2 x}+x^{\lg x}=20$;	г) $5^{\lg x}=2\cdot 5^2-x^{\lg 5}$.

****18.13.** Решите уравнение

а) $x^2\lg x+4=x^2+\lg x^4$;	б) $(x+1)\log_3^2 x+4x\log_3 x-16=0$;
в) $x^2+(x-3)\log_2 x=4x-3$;	г) $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$.

****18.14.** Решите уравнение

а) $3^x=10-\log_2 x$;	б) $\log_2(4-x)=x-3$;
в) $\log_3\left(\frac{1}{3}-\left\lvert\frac{3\pi}{2}-\pi x\right\rvert\right)=\sin\pi x$;	г) $2\log_2\left(\frac{4}{x}+\frac{x}{4}\right)^7=-x^2+8x-2$.

***18.15.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=2,\\ 2x+y=33;\end{cases}$	б) $\begin{cases}3x+y=30,\\ \log_3 x+\log_3 y=3;\end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7, \\ \log_4 (x+y) = 2; \end{cases}$	г) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

***18.16.** Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} \lg x + \log_2 y = 1, \\ \log_4 y + \lg(10x) = 1; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2\log_2 x = 3 + 3^y, \\ 3^y \log_2 x - \log_2 x^2 = 3^y; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \log_2 x + 3y = 7, \\ 4\log_x 8 - 2y = 1; \end{cases}$	г) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$

18.17. Решите неравенство

а) $\log_2(x^2 - 2x) \ge 3;$	б) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3x-1}{x+2} < 1;$
в) $\log_{\sin\frac{\pi}{2009}} \log_2 \dfrac{x}{x+1} \le 0;$	г) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{x+1} - x\right) < 2.$

18.18. Решите неравенство

а) $\log_{0,5}(1+2x) \ge -1;$	б) $\log_2 \dfrac{x}{x-1} \le -1;$
в) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) \ge -2;$	г) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_{0,3} \log_3 \frac{x-2}{x-4}} \le 1.$

18.19. Решите неравенство

а) $22^{\log_2 (x^2-1)} \le 1;$	б) $(0,555)^{\log_5 (x+2)} \ge 1;$
в) $\left(\dfrac{1}{2009}\right)^{\log_5 \log_{0,3} (x-0,7)} < 1;$	г) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{2,25}\left(x - \frac{1}{x}\right)} \ge \sqrt{3^{-1}}.$

***18.20.** Решите неравенство

а) $\log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}} \left(-x^2 + 2x + 16 - 2\sqrt{55}\right) > 2;$	б) $\left\lvert \log_5 \dfrac{x+3}{x-4} \right\rvert > 1;$
в) $x \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3} - x\right) > \lvert x \rvert;$	г) $\log_{\sqrt{7}-2} 2 \cdot \log_2 (2-x)^2 \ge \dfrac{1}{\log_4 \left(\sqrt{7}-2\right)}.$

18.21. Решите неравенство

а) $\log_{0,5}(x^2+1) \le \log_{0,5}(2x-5);$	б) $\log_2(3x+4) > \log_2(5-2x);$
в) $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{13}} (x+4) < \log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{13}} (x^2 + 2x - 2);$	г) $\log_{\frac{1}{3}} \left(5 - \dfrac{x}{2}\right) \ge \log_{\frac{1}{9}} (x+2)^2.$

****18.22.** Решите неравенство

а) $\dfrac{\log_3 (5x+1)}{\log_3 (7x-1)^2} \le 1;$	б) $\dfrac{\lg(4x^2 + x)}{\lg(2x)} \ge 1;$
в) $\log_3 \sqrt{5-2x} \cdot \log_x 3 < 1;$	г) $\log_{\frac{x}{2}-1} \left(\dfrac{x}{2} + 1\right) > 2.$

****18.23.** Решите неравенство

а) $\log_{x+1} \left(2x^2 - 3x + 1\right) \le 2;$	б) $\log_{x+1} \left(x^2 + x - 6\right)^2 \ge 4;$

в) $\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{16}\right)^4 \ge 0;$	г) $\log_{\frac{4x}{3}-\frac{4x^2}{9}}(x-2)^2 > 0.$

****18.24.** Решите неравенство

а) $\log_{\frac{3}{x}}\frac{x-4}{(x+1)(x-5)} \ge 1;$	б) $\log_{\frac{x}{2}}\frac{x^2-4x+8}{x-3} \ge 1;$
в) $\log_{\frac{x}{20}+1}\frac{x^2-2x}{x^2-2x-3} \le 0;$	г) $\log_{\frac{x}{3}-1}(10-\lvert x-2\rvert) < 0.$

18.25. Решите неравенство

а) $\log_{0,5}(x+0,5)+\log_{0,5}x \ge 1;$	б) $\log_{0,2}(4-x) \ge \log_{0,2}2-\log_{0,2}(x-1);$
в) $\log_{\pi}(x+27)-\log_{\pi}(16-2x) < \log_{\pi}x;$	г) $\log_2(x+14)+2\log_4(x+2) < 2\log_{0,5}\frac{1}{8}.$

***18.26.** Решите неравенство

а) $\frac{\sqrt{x-0,5}}{\log_3 x^2} \ge 0;$	б) $\sqrt{4-x^2}\left(\log_3\frac{x+1}{x}+2\right) \le 0;$
в) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)(x-4)}\log_2\frac{2x+0,2}{x+1} \le 0;$	г) $\frac{\log_{\frac{1}{7}}(3x-8)+\log_7(x^2+4)}{\sqrt{10-x}} \ge 0.$

***18.27.** Решите неравенство

а) $\frac{1}{\log_2 x-4} > \frac{1}{\log_2 x};$	б) $\frac{\log_{0,(3)}x-1}{\log_{0,(3)}x+2} \le \frac{\log_{0,(3)}x-3}{\log_{0,(3)}x+4};$
в) $\sqrt{1+\log_2(7x^2+14x+8)} \le 1+\log_8(7x^2+14x+8);$	г) $\log_3(3^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{3}}(3^{x+2}-9) \ge -3.$

***18.28.** Решите неравенство

а) $\log_{\frac{1}{3}}x \ge \log_x 3-\frac{5}{2};$	б) $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x \le 1;$
в) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2 > \log_{4x}^2 2;$	г) $\log_2\log_3\frac{x+1}{x-1} < \log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-1}{x+1}.$

****18.29.** Решите неравенство

а) $\log_{\frac{5x}{2}+0,5}3 \le \log_{x^2+8}9;$	б) $\log_{\frac{x}{10}+1}\frac{1}{2} < \log_{\frac{x}{10}+31}0,25;$
в) $\log_{\frac{x}{5}+1}\cos\frac{\pi x}{2} \ge \log_{\frac{x}{5}+3}\cos^2\frac{\pi x}{2};$	г) $\log_{\frac{x}{4}-1}\left\lvert\operatorname{tg}\frac{13\pi}{12}\right\rvert < \log_{\frac{x}{4}+5}\operatorname{tg}^2\frac{11\pi}{12}.$

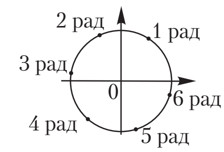
18.30. Решите неравенство

а) $3^{\log_3\sqrt{x-1}} < 3^{\log_3(x-6)}+3;$	б) $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2} < 100;$
в) $x^{2\lg x} \ge 10x;$	г) $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1+\lg x.$

****18.31.** Решите неравенство

а) $\log_{0,(3)}x \ge 3x-10;$	б) $\log_5 x \le 2-\frac{x}{5};$
в) $\log_2\frac{x-10}{20-x} \le \sqrt[3]{26-x};$	г) $\log_4^2\frac{\lvert x\rvert}{32}-\frac{x^2}{2} \ge 2.$

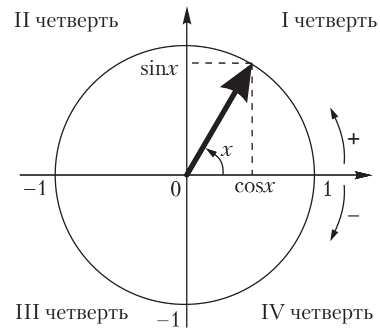
19. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ



Углы, заданные в радианах, можно переводить в градусную меру, решая пропорцию

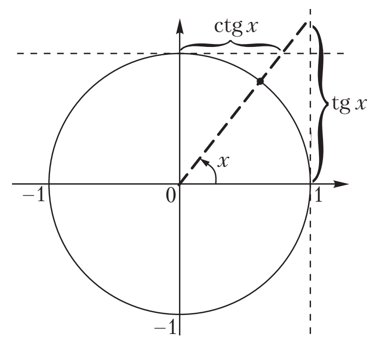
$$\boxed{\begin{array}{l} 180° - \pi \text{ радиан} \\ n° - x \text{ радиан} \end{array}}$$

На единичной окружности отмечаются углы, заданные как в градусах, так и в радианах. Начальное положение точки имеет координаты (1; 0). Направление поворота против часовой стрелки считается положительным направлением, а по часовой стрелке — отрицательным.



После поворота на угол, равный x, можно вычислить, какие координаты имеет соответствующая точка на окружности: $\cos x$ — это координата по горизонтальной оси, а $\sin x$ — это координата по вертикальной оси. Используя лишь только этот факт, легко понять, что $-1 \le \sin\alpha \le 1$, $-1 \le \cos\alpha \le 1$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, а также запомнить значения тригонометрических функций для углов, кратных 30° и 45° (см. таблицу в справочных материалах на с. 291).

Для нахождения значений тангенса и котангенса угла x надо провести две вспомогательные прямые — касательные к единичной окружности в точках (1;0) и (0;1). Продлим также и радиус-вектор до пересечения с этими прямыми. Координата полученной точки на горизонтальной оси — это $\operatorname{ctg} x$, а $\operatorname{tg} x$ — это координата полученной точки на вертикальной оси.



При решении большинства задач сначала стоит с помощью формул приведения во всех выражениях перейти к углам первой координатной четверти и затем, воспользовавшись основными тригонометрическими формулами, упростить выражение (№ 19.2—19.4, 19.14—19.16).

Основными методами упрощения также являются:
- алгебраические преобразования;
- основное тригонометрическое тождество (№ 19.5, 19.6);
- формулы понижения степени: $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$, $2\sin^2 t = 1 - \cos 2t$;
- использование вспомогательного аргумента (№ 19.17);
- замена переменной (№ 19.6, 19.18);
- использование однородности выражения (№ 19.19);
- использование универсальной тригонометрической подстановки (№ 19.21).

Часто используются следующие тригонометрические преобразования:

$\sin^2 t - \cos^2 t = -\cos 2t$;

$\sin^4 t - \cos^4 t = \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\left(\sin^2 t - \cos^2 t\right) = -1 \cdot \cos 2t$;

$\sin^4 t + \cos^4 t = \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)^2 - 2\sin^2 t \cos^2 t = 1 - \dfrac{\sin^2 2t}{2}$;

если обозначить $\sin t + \cos t = a$, то $2\sin t \cos t = a^2 - 1$;

$\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{2\sin t \cos t}{2\cos t \cos t} = \dfrac{\sin 2t}{1 + \cos 2t}$ или

$\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{2\sin t \sin t}{2\cos t \sin t} = \dfrac{1 - \cos 2t}{\sin 2t}$.

19.1. Чему равна

а) радианная мера угла величиной 100 градусов?	б) градусная мера угла величиной $\dfrac{\pi}{12}$ радиан?
в) градусная мера угла величиной $\dfrac{5\pi}{3}$ радиан?	г) радианная мера угла величиной 3000 градусов?

19.2. Вычислите

а) $\sin 30° - \cos 90° + \operatorname{tg} 180° - \operatorname{ctg} 45°$;	б) $\cos 0° - \sin 90° + \operatorname{ctg}(-270°) + \operatorname{tg}(-225°)$;
в) $\cos 30° - \sin 120° + \operatorname{ctg}(-90°) + \operatorname{tg}(-45°)$;	г) $\cos(-60°) - \sin(-30°) + \operatorname{ctg}(-45°) + \operatorname{tg}(-135°)$.

19.3. Вычислите

а) $\sin 330° \cos 390° - \operatorname{tg} 315° \operatorname{ctg} 225°$;	б) $\cos(-65°) + \sin(205°) + \operatorname{ctg}(-35°) + \operatorname{tg}(55°)$;
в) $\operatorname{tg} 10° \cdot \operatorname{tg} 11° \cdot \operatorname{tg} 79° \cdot \operatorname{tg} 80°$;	г) $\sin^2 \frac{\pi}{11} + \sin^2\left(-\frac{13\pi}{22}\right)$.

19.4. Вычислите

а) $\frac{3\sin 77° - 3\sin 257° - \cos 450°}{\cos(-13°)}$;	б) $20\sin 15° \sin 75°$;
в) $(\sin 15° + \sin 195°) \operatorname{tg} 5° \operatorname{tg} 105° \operatorname{tg} 205° \operatorname{tg} 305° \operatorname{tg} 405° \operatorname{tg} 555°$.	г) Упростите $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)}{\cos(\pi + \beta) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$.

19.5. Вычислите

а) $\sin^2 \alpha - 3 + \cos \alpha \cos \alpha$;	б) $(\sin \alpha + \cos \alpha) \sin \alpha + (\cos \alpha - \sin \alpha) \cos \alpha$;
в) $(\cos x - \sin x)^2 + \sin 2x$;	г) $\frac{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 1}$.

19.6. Упростите

а) $\frac{3 - 5\cos^2 \alpha}{2 - 5\sin^2 \alpha}$;	б) $\frac{3 + \sin^2 2\alpha}{4 - \cos^2 2\alpha}$;
в) $\frac{5 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{8 + 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$;	г) $\frac{2 + \cos 2\alpha}{6 - 4\sin^2 \alpha}$.

19.7. Упростите

а) $4\cos^4 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + 5\sin^2 2\alpha$;	б) $2 + 5\cos^2 \alpha - 7\cos(-2\alpha)$;
в) $\cos(-2\alpha) + \operatorname{tg} \alpha \sin 2\alpha$;	г) $\frac{\cos 2\alpha + 1}{\left(\operatorname{tg}^2(-\alpha) + 1\right) \sin^2 2\alpha}$.

19.8. Вычислите

а) $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8}$;	б) $\frac{\sin 15° \cos 15°}{\sin^2 15° - \cos^2 15°}$;
в) $\frac{(\sin 75° + \cos(-75°))(\sin 75° - \sin 15°)}{\sin 75° \sin 165°}$;	г) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{2}$ при $\alpha = 2018°$.

19.9. Вычислите

а) $\operatorname{ctg} 7{,}5°$;	б) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$;
в) $\operatorname{tg} 37°30' + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$;	г) $\operatorname{tg} 142°30' + \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

19.10. Найдите множество значений функции

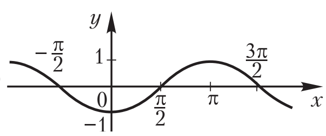
а) $y = \frac{3}{2} \sin x \cos x$;	б) $y = \lvert 2\cos x - 1 \rvert$;
в) $y = \sin 2x$, если $x \in \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2\right]$;	г) $y = \sin(x+1) + \sqrt{3} \cos(x+1)$.

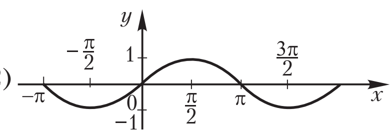
***19.11.** Найдите множество значений функции

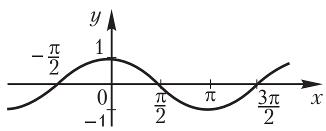
а) $y=\sin^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-3$;	б) $y=1-\sin^2 4x$;
в) $y=5\cos^2 x+\lvert\sin x\rvert$;	г) $y=\lg\sin x$.

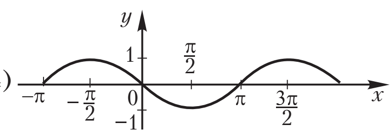
19.12. На каком из данных рисунков изображен график функции

а) $y=\cos(\pi-x)$?	б) $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$?
в) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$?	г) $y=\sin(x+\pi)$?

1) 

2) 

3) 

4) 

***19.13.** Найдите периоды функции, принадлежащие промежутку $[-5;10]$

а) $y=2009+\cos\left(\frac{\pi}{100}-\pi x\right)$;	б) $y=2010+\frac{1}{2009}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi x}{2}\right)$;
в) $y=\sin\frac{\pi x}{6}\cos\frac{\pi x}{6}$;	г) $y=2009+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x}{5}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi x}{5}\right)$.

19.14. Вычислите

а) $\cos\frac{\pi}{15}\cdot\sin\frac{11\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}\cdot\cos\frac{13\pi}{30}$;	б) $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{7\pi}{12}\sin\frac{11\pi}{12}$;
в) $\sin 50^\circ\sin 20^\circ+\sin 40^\circ\sin 430^\circ$;	г) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{18}}{\cos 19^\circ\sin 79^\circ-\sin 11^\circ\cos 71^\circ}$.

19.15. Вычислите

а) $\frac{1}{2\cos 80^\circ}-2\sin 70^\circ$;	б) $\frac{4\sin 35^\circ\sin 5^\circ-\sqrt{3}}{\cos 40^\circ}$;
в) $\operatorname{ctg}10^\circ\operatorname{ctg}50^\circ\operatorname{ctg}70^\circ$.	г) Упростите $4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\alpha$.

19.16. Вычислите

а) $\frac{\sin 27^\circ+\sin 33^\circ}{\cos 3^\circ}$;	б) $\frac{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$;
в) $\frac{(\sin 10^\circ+\sin 100^\circ)(\sin 170^\circ-\cos 10^\circ)}{2\cos 35^\circ\sin 145^\circ}$;	г) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

***19.17.** Вычислите значение выражения

а) $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$;	б) $\frac{1}{\sin 20^\circ}-\frac{1}{\sqrt{3}\cos 20^\circ}$;

в) $\sin x+\cos x-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ при $x=\frac{2009\pi}{2010}$;	г) $\sqrt{3}\cos x-\sin x-2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ при $x=\frac{2010\pi}{2009}$.

***19.18.** Вычислите значение выражения

а) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$;	б) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$;
в) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=3$;	г) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=7$, $\alpha\in(0°;90°)$.

***19.19.** Вычислите значение выражения

а) $\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}^2\alpha+25=10\operatorname{tg}\alpha$;	б) $\operatorname{tg}^3 x$, если $\frac{3\cos x-2\sin x}{\sin x-3\cos x}=1$;
в) $\frac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha+2}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-2$;	г) $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$, если $\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x-2\cos^2 x}=8$.

****19.20.** Вычислите

а) $\sin 20°\sin 40°\sin 60°\sin 80°$;	б) $\cos 10°\cos 30°\cos 50°\cos 60°\cos 70°$;
в) $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$;	г) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

***19.21.** Вычислите

а) $\sin 4\alpha+5\cos 4\alpha$, если $\operatorname{tg}2\alpha=2$;	б) $5(\cos 2\alpha-2\sin 2\alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$;
в) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$;	г) $\operatorname{tg}\alpha$, если $2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=1$.

19.22. Вычислите

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;	б) $\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-1}$;
в) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;	г) $\operatorname{arctg}\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)$.

19.23. Вычислите

а) $\sin 2x$, если $\cos x=-\frac{24}{25}$, x — угол III четверти;	б) $\sin x+\operatorname{tg}x$, если $\cos x=\frac{3}{5}$, x — угол I четверти;
в) $\cos 2x$, если $\sin x=-\frac{1}{4}$;	г) $\sin\left(\frac{13\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, α — угол II четверти.

19.24. Вычислите

а) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$, α — угол III четверти;	б) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=2$, α — угол III четверти;
в) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$, α — угол IV четверти;	г) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=2{,}4$, α — угол I четверти.

19.25. Вычислите

а) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{4}+\arccos 1\right)$;	б) $\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$;
в) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;	г) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(-3)+\arcsin 0\right)$.

19.26. Вычислите

а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;	б) $\cos\left(-\arcsin\frac{8}{17}\right)$;
в) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-2))$;	г) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{7}{25}\right)-2009\cdot\arccos 1\right)$.

19.27. Вычислите

а) $\sin\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$;	б) $\cos\left(2\arcsin\frac{15}{17}+2008\cdot\operatorname{arctg}1\right)$;
в) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arcctg}(-3)-\arcsin 0)$;	г) $\cos\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)+\arccos 1\right)$.

19.28. Вычислите

а) $\arccos(\cos(-250°))$;	б) $\arcsin(\sin(-100°))$;
в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12}\right)$;	г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-200°))$.

19.29. Вычислите

а) $\arccos(\sin 1000°)$;	б) $\arcsin(\cos 100°)$;
в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}110°)$;	г) $\operatorname{arcctg}(-\operatorname{tg}(200°))$.

19.30. Вычислите значение выражения

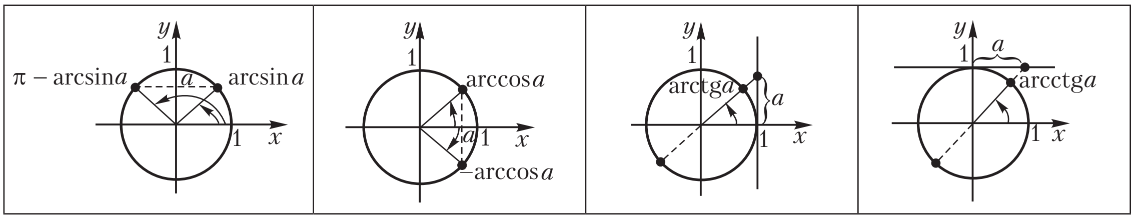
а) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{ctg}\beta=2$;	б) $\sin(\alpha+\beta)$, если известно, что $\sin\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=0{,}28$, $\alpha\in(0°;\,90°)$, $\beta\in(0°;\,90°)$.
в) Найдите угол $\alpha+\beta$, если $\operatorname{ctg}\alpha=2$, $\operatorname{ctg}\beta=3$, $\alpha\in(0°;\,90°)$, $\beta\in(0°;\,90°)$.	г) Найдите угол $2\alpha-\beta$, если $\sin\alpha=\frac{1}{6}$, $\cos\beta=\frac{17}{18}$, $\alpha\in(0°;\,90°)$, $\beta\in(0°;\,90°)$.

19.31. Вычислите

а) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}-\arcsin\frac{5}{13}\right)$;	б) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-2)+\operatorname{arcctg}4)$;
в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-2)+\operatorname{arcctg}4)$;	г) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}+3000\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

20. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

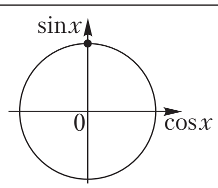
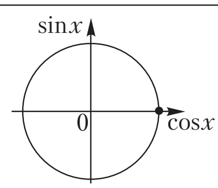
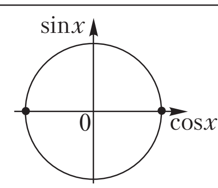
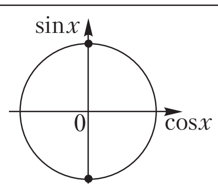
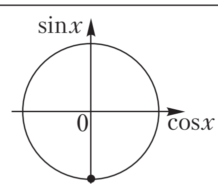
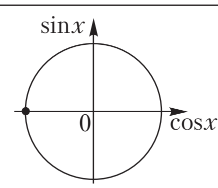
При решении *простейших* уравнений $\sin t = a$, $\cos t = a$, $\operatorname{tg} t = a$, $\operatorname{ctg} t = a$ полезно использовать единичную окружность:



Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$	Если $\lvert a\rvert \le 1$, то $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Если $\lvert a\rvert > 1$, то решений нет.	$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a$	Если $\lvert a\rvert \le 1$, то $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Если $\lvert a\rvert > 1$, то решений нет.	$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Частные случаи простейших тригонометрических уравнений

 $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	 $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	 $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
 $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ $\operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	 $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	 $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Все остальные тригонометрические уравнения сводятся тем или иным способом к простейшим.

Основными методами упрощения являются:

• приведение к простейшим с помощью тригонометрических формул (см. с. 293 справочных материалов);

• алгебраические преобразования уравнения (группировка, вынесение за скобки множителя и т. д.) (№ 20.6, 20.13—20.18);

• замена переменной (№ 20.19—20.21, 20.29);

• однородные уравнения (№ 20.22—20.25);

• использование универсальной тригонометрической подстановки (№ 20.26, 20.27);

• метод вспомогательного аргумента (№ 20.27, 20.28);

• функциональный и графический метод (№ 20.38—20.40).

При записи ответа полезно уметь отмечать корни на единичной окружности, чтобы легко было осуществить отбор корней (см. решения задач № 20.8—20.37).

20.1. Найдите среднее арифметическое различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $[0; \pi]$ (корень, если он один)

а) $\sin 2x = 0$;	б) $\cos 3x = 1$;
в) $\operatorname{tg} x = 1$;	г) $\cos(x+2) = 0$.

20.2. Найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $[-\pi; 2\pi]$

а) $\cos x = \cos\frac{4\pi}{3}$;	б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\sin x = -\frac{1}{2}$;	г) $\operatorname{tg}(-x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

20.3. Укажите количество различных корней уравнения, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) = 0$;	б) $\cos\left(\frac{5\pi}{4} - 9x\right) = 1$;
в) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$;	г) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

20.4. Решите уравнение и найдите сумму его корней, принадлежащих промежутку $\left(-\frac{5\pi}{4}; \pi\right)$

а) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$;	б) $\sin 3x = \sin\frac{10\pi}{7}$;
в) $\cos 0{,}2\pi x = \sin\frac{\pi}{10}$;	г) $\cos 2x + \sin\frac{\pi}{12} = 0$.

20.5. Решите уравнение и укажите количество различных его корней, принадлежащих промежутку $[-2\pi; 2\pi]$

а) $\frac{\sin x}{\lvert\sin x\rvert} = x$;	б) $\sin 2x = 2^{-1}$;
в) $\cos(2009x) = \sqrt{3}$;	г) $\sin(\pi x) = \frac{\pi}{3}$.

20.6.

а) Решите уравнение $2\sin^2 0{,}2x - \sqrt{3}\sin 0{,}2x = 0$. Найдите корень, принадлежащий промежутку $[-1212°; -1111°]$.	б) Решите уравнение $2\sin^2 0{,}2x + \sqrt{3}\sin 0{,}2x = 0$. Найдите корень, принадлежащий промежутку $[-614°; -555°]$.
в) Решите уравнение $\sin^2 x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0$. Найдите корень (в градусах), принадлежащий промежутку $\left[\frac{29\pi}{9}; \frac{10\pi}{3}\right]$.	г) Решите уравнение $\cos 2\pi x = 0{,}51$. Найдите количество корней, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right]$.

20.7. Определите, при каких значениях a уравнение имеет корни

а) $\sin x = \frac{a}{2}$;	б) $\cos x = -\frac{a}{\pi}$;
в) $\operatorname{tg} x = a\sqrt{3}$;	г) $\sin x \cos x = a$.

20.8. Решите уравнение и найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi)$

а) $\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)\sqrt{\sin x} = 0$;	б) $\left(2\sin x + \sqrt{3}\right)\sqrt{\cos x} = 0$;
в) $\left(2\sin x + \sqrt{2}\right)\sqrt{-\cos x} = 0$;	г) $\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 0$ количество корней из интервала $(-\pi; \pi)$.

20.9. Решите уравнение и найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $[-2\pi; 2\pi]$

а) $\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{2\sin x-\sqrt{2}}=0$;	б) $\frac{2\sin x+\sqrt{2}}{2\cos x-\sqrt{2}}=0$;
в) $\frac{2\cos x+\sqrt{3}}{2\sin x-1}=0$;	г) $\frac{2\cos x-1}{2\sin x-\sqrt{3}}=0$.

20.10. Решите уравнение и укажите среднее арифметическое различных его корней (в радианах), принадлежащих промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

а) $\cos x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$;	б) $\sin^2 x-\cos^2 x=1$;
в) $\sin^4 x-\cos^4 x=2^{-1}$.	г) Укажите среднее арифметическое различных корней уравнения $\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{8}$, принадлежащих промежутку $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

20.11. Решите уравнение и найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $[-\pi; 2\pi]$

а) $\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin x=0$;	б) $\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)+\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0$;
в) $\frac{\sin(x+15°)-2\cos x\cdot\sin 15°}{\cos(x+15°)+2\sin x\cdot\sin 15°}=1$;	г) $\frac{\sin(15°-x)+2\sin x\cdot\cos 15°}{\cos(15°-x)-2\sin x\cdot\sin 15°}=1$.

***20.12.** Решите уравнение

а) $\mathrm{tg}^2\sqrt{x}-1=0$;	б) $\log_2(\sin 3x)=0$;
в) $\sqrt{\sin^2 x}=1$;	г) $\sin x^2=1$.

***20.13.** Решите уравнение и найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $[-2\pi; \pi]$

а) $\sin x+\cos x=1+\sin x\cdot\cos x$;	б) $1+\sin x\cdot\cos 2x=\sin x+\cos 2x$;
в) $\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x=0$;	г) $\cos^2(x+405°)-\cos^2(315°+x)=0$.

***20.14.** Решите уравнение и найдите количество различных корней уравнения, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$

а) $2\,\mathrm{tg}\,2x\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}+\mathrm{tg}\,2x=0$;	б) $2\sin^2 x=\sin 2x+2$;
в) $4\sin 4x\cdot\cos 4x+\sin 8x\cdot\cos\frac{x}{2}=0$;	г) $2\sin 2x+2\sqrt{3}\cos x=2\sin x+\sqrt{3}$.

****20.15.** Решите уравнение и найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$

а) $\lvert\sin x\rvert+\sin x=2\cos x$;	б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi+2x)=\cos x$;
в) $1-\sin x-\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$;	г) $\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}=2$.

****20.16.** Решите уравнение и найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$

а) $\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin^2 2x$;	б) $(2\sin x - \cos x)(1+\cos x) = \sin^2 x$;
в) $4\cos^3 x - 4\cos^2 x - \cos(\pi + x) - 1 = 0$;	г) $\operatorname{tg} 2x \sin x + \sqrt{3}\left(\sin x - \sqrt{3}\operatorname{tg} 2x\right) = 3\sqrt{3}$.

***20.17.** Решите уравнение и найдите количество различных корней уравнения, принадлежащих промежутку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

а) $\sin 2x - 4\cos 2x = 4$;	б) $1 + \cos 2x = \sin(-2x)$;
в) $1 - \sin x \cos x = \cos^2 x$;	г) $(1+\cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$.

***20.18.** Решите уравнение и найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$

а) $1 - \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} x$;	б) $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \sin x \cos x$;
в) $(1 - \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x$;	г) $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.

***20.19.** Решите уравнение и найдите количество различных корней уравнения, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

а) $\cos^2 x + 5\cos x = 2\sin^2 x$;	б) $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 5\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 4$;
в) $2\cos 2x + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 5\sin^2 x$;	г) $2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 2\cos x = 3$.

***20.20.** Решите уравнение и найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $[0; \pi]$

а) $\sin 4x + 1 = 2\cos^2(x - \pi)$;	б) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$;
в) $1 + \cos 4x = 2\cos 2x$;	г) $4\cos^2 6x + 16\cos^2 3x = 13$.

***20.21.** Решите уравнение и найдите количество различных корней уравнения, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

а) $\cos^4 \frac{x}{5} + \sin^2 \frac{x}{5} = 1$;	б) $1 + \cos x = 0{,}75\sin^2 \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$;
в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$;	г) $f'(x) = g'(x)$, если $f(x) = \frac{\sin 2x}{2}$, $g(x) = -\frac{x}{2} - 2\cos x$.

***20.22.** Укажите количество различных корней уравнения, принадлежащих промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

а) $2\sin 3x + 3\cos 3x = 0$;	б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi + x) = \cos x$;
в) $\frac{3\sin x - 2\cos x}{\sin x + 2\cos x} = \frac{1}{2}$;	г) $\cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin(\pi - x)$.

***20.23.** Решите уравнение и вычислите значение выражения A

а) $3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$, $A = x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2$, где x_1 — это меньший, а x_2 — больший корни (в радианах) на промежутке $(0; \pi)$;	б) $5\cos^2 x - 11\sin^2 x = 3\sin 2x$, $A = x_2 \cdot \operatorname{tg} x_1$, где x_1 — это больший, а x_2 — меньший корни (в радианах) на промежутке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

в) $4\sin 2x+8\sin^2 x+9\cos 2x=0$, $A=x_2\cdot \operatorname{tg} x_1$, где x_1 — это меньший, а x_2 — больший корни (в радианах) на промежутке $\left(\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$;	г) $3\sin^2\left(5\pi-\frac{x}{2}\right)-\frac{7}{2}\sin\frac{2x}{2}+2\cos^2\left(\frac{x}{2}-3\pi\right)=0$, $A=\operatorname{tg}\frac{x_2}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}$, где x_1 — это меньший, а x_2 — больший корни (в радианах) на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

***20.24.** Решите уравнение и найдите количество различных корней уравнения, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$

а) $\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x\sin x+1=0$;	б) $\cos^2 x-3\sin x\cos x=\sin\frac{3\pi}{2}$;
в) $4\sin 2x-3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=5$;	г) $\sin\frac{3x-7\pi}{2}+\cos\frac{3x-\pi}{2}=\left(\cos\frac{3x}{2}\right)^{-1}$.

****20.25.** Решите уравнение и найдите количество различных корней уравнения, принадлежащих промежутку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$

а) $2\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x=\cos^3 x+\sin x\cos^2 x$;	б) $\sin^3 x+\sin^2 x\cos x-3\cos^3 x=3\sin x\cos^2 x$;
в) $\sin^3 x=\sin x-0{,}25\cos x$;	г) $\sin^2 x(1+\operatorname{tg} x)=3\sin x(\cos x-\sin x)+3$.

****20.26.** Решите уравнение и найдите количество различных корней уравнения, принадлежащих промежутку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$

а) $3\sin x=2(1-\cos x)$;	б) $\sqrt{2}(1+\cos x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;
в) $\frac{1}{\sqrt{3}-\operatorname{tg} x}-\frac{1}{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x}=\sin 2x$;	г) $\operatorname{ctg} x=1+2\sin 2x$.

***20.27.** Решите уравнение и найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

а) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$;	б) $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$;
в) $\sin 3x-\cos 3x=\sqrt{\frac{3}{2}}$;	г) $\frac{\sqrt{3}\sin x}{1+\cos x}=1$.

***20.28.** Решите уравнение и найдите количество различных корней уравнения, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

а) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$;	б) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin 3x$;
в) $\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos 5x$;	г) $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2-5=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$.

****20.29.** Решите уравнение и найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $[0;\pi]$

а) $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=1-\sin x$;	б) $2(\sin x+\cos x)+1+\sin 2x=0$;
в) $1-\sin 2x=\cos x-\sin x$;	г) $4\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin 10x=\frac{3}{2}$.

***20.30.** Решите уравнение и найдите количество различных корней уравнения, принадлежащих промежутку $[-2\pi; \pi]$

а) $1 = \dfrac{\sin 5x}{\sin x}$;	б) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 2x$;
в) $\operatorname{tg} 4x = \sin 8x$;	г) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{\sin 2x}$.

***20.31.** Решите уравнение и найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$

а) $\sin x + \sin 2x = \sin 3x$;	б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
в) $\sin x + \sin 3x = \sin 2x$;	г) $\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x$.

****20.32.** Решите уравнение и укажите количество его различных решений, принадлежащих промежутку $[0; 2\pi]$

а) $\sin(x + 1) = \sin x + \sin 1$;	б) $\cos 3x + \sin 5x = 0$;
в) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;	г) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 5x = \cos 9x$.

***20.33.** Решите уравнение и укажите количество его различных решений, принадлежащих промежутку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

а) $\cos x \cos 9x = \cos 3x \cos 7x$;	б) $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$;
в) $\sin 14x \cos 2x - \sin 12x = 0$;	г) $\operatorname{tg}(7\pi x)\operatorname{tg}(5\pi x) = 1$.

***20.34.** Решите уравнение и найдите сумму его различных корней (в радианах), принадлежащих промежутку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

а) $\cos^2\left(x - \dfrac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$;	б) $\sin x \cos 2x + \cos x \cos 4x = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right)$;
в) $\operatorname{tg} 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 5x = 0$;	г) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 4 \sin x$.

****20.35.**

а) Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $y(x) = 4x - \sin 2x + 4\sqrt{2} \cos x$ равна нулю.	б) Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $y(x) = \sin x - \dfrac{2}{3}\sin 3x + \dfrac{1}{5}\sin 5x$ равна нулю.
в) Решите уравнение $\left|\cos 2x + \left(\sin^2 x\right)'\right| = 1$ и найдите сумму всех его различных корней на промежутке $\left(-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$.	г) Решите уравнение $y'(x) = y^2(x) + 1$, где $y(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$.

***20.36.** Решите уравнение и укажите количество его различных решений, принадлежащих промежутку $(0; \pi)$

а) $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$;	б) $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$;
в) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$;	г) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \dfrac{3}{2}$.

**20.37. Решите уравнение и найдите сумму его различных корней (в радианах), принадлежащих промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

а) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 - \cos 6x}{4}$;	б) $\frac{\sin 2x - \cos^4 \frac{x}{2} + \sin^4 \frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2}} = 0$;
в) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2^{-2}$;	г) $\sin^2(2 + 3x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \cos^2(2 - 5x) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right)$.

**20.38. Решите уравнение и найдите сумму различных корней (в радианах) уравнения, принадлежащих промежутку $[-\pi; 2\pi]$

а) $\sin^4 x + \cos^3 x = 1$;	б) $\sin^4 x - \cos^3 x = 1$;
в) $\sin^2 x + \sin x = 2$;	г) $\sin 4x + \cos 4x + 2 = 0$.

**20.39. Решите уравнение

а) $\cos(\pi x) = 2x(2 - x) - 3$;	б) $\sin x = x^2 - x + 2$;
в) $\sin\frac{\pi x}{2} = 3x^2 - 6x + 4$;	г) $\left(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right)\cos x = 0$.

**20.40. Найдите количество корней уравнения

а) $\sin 15x = x$;	б) $3\sin 8x = x^3$;
в) $\cos x = \left\lvert\frac{x}{13\pi}\right\rvert$;	г) $\sin \pi x = \frac{-x}{14}$.

21—22. ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Тематический указатель задач по планиметрии

1. Углы смежные; углы вертикальные (№ 21.1, 21.2. 22.1).
2. Пересечение параллельных прямых секущей; признак параллельности прямых (№ 21.3, 21.4).
3. Теорема Фалеса (№ 21.5, 22.2, 22.3).
4. Сумма углов треугольника, четырехугольника, многоугольника; внешний угол (№ 21.6, 22.4).
5. Признаки равенства треугольников (№ 21.7).
6. Свойства равнобедренного треугольника (№ 21.8, 22.5).
7. Периметр равнобедренного треугольника (№ 21.9).
8. Периметр произвольного треугольника (№ 21.10, 22.6).
9. Равносторонний (правильный) треугольник (№ 21.11, 22.62).
10. Средняя линия треугольника (№ 21.12, 22.7).
11. Средние линии четырехугольника (№ 22.33).
12. Серединный перпендикуляр к отрезку; центр окружности, описанной около треугольника (№ 22.8).
13. Свойство медиан треугольника (медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины) (№ 22.10).
14. Свойство медиан треугольника (медиана треугольника делит его на два треугольника, равных по площади; три медианы треугольника делят его на шесть треугольников, равных по площади) (№ 22.11).
15. Формула длины медианы треугольника по трем сторонам (№ 21.13, 22.12).
16. Алгоритм нахождения высоты треугольника по трем сторонам (№ 21.14).
17. Свойство высот треугольника (высоты треугольника пересекаются в одной точке) (№ 22.13).
18. Свойства отрезка, соединяющего основания высот остроугольного треугольника (№ 22.14).
19. Биссектриса треугольника; центр окружности, вписанной в треугольник (№ 21.15, 22.9, 22.15).
20. Свойство биссектрисы делить противолежащую сторону (№ 21.16, 22.16).
21. Формула длины биссектрисы треугольника (№ 22.17).
22. Вписанная и описанная окружность для треугольника (№ 22.63).
23. Свойства прямоугольного треугольника (№ 21.17).
24. Теорема Пифагора (№ 21.19, 22.18).
25. Составление уравнения по теореме Пифагора (№ 21.20, 22.19, 22.20).
26. Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике (№ 22.22).
27. Теорема синусов (№ 21.21, 22.23, 22.24).
28. Теорема косинусов (№ 21.22, 22.25).
29. Составление уравнения по теореме косинусов (№ 22.26).
30. Теорема синусов и теорема косинусов в одной задаче (№ 22.27).
31. Определение подобных треугольников (№ 21.23).
32. Признаки подобия треугольников (№ 21.24, 22.28, 22.29).
33. Отношение площадей подобных фигур (№ 21.25, 22.30).
34. Подобие прямоугольных треугольников (№ 21.26, 22.31).
35. Высота, проведенная на гипотенузу; проекции катетов на гипотенузу; пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике (№ 21.27, 22.32).
36. Четырехугольники (№ 21.28).
37. Прямоугольник и его периметр (№ 21.29).
38. Свойства параллелограмма (№ 21.30).
39. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон (№ 22.34).
40. Биссектрисы углов параллелограмма (№ 22.35).
41. Свойства ромба (№ 21.31).
42. Трапеция (№ 21.32).
43. Средняя линия трапеции (№ 21.33).
44. Углы равнобедренной трапеции; стороны и диагонали равнобедренной трапеции (№ 21.34, 21.35, 22.36).
45. Трапеция прямоугольная (№ 21.36, 22.37).
46. Трапеция и дополнительное построение параллельно боковой стороне (№ 22.38).
47. Трапеция и дополнительное построение параллельно диагонали (№ 22.39).
48. Правильные многоугольники (№ 21.37, 22.40).
49. Площадь прямоугольника (№ 21.38).
50. Периметр и площадь квадрата (№ 21.39).
51. Площадь параллелограмма (№ 21.40, 22.41).
52. Площадь ромба (№ 21.41, 22.42).
53. Отношение площадей (№ 21.42, 22.45, 22.46).
54. Площадь треугольника (№ 21.43).
55. Вычисление площади треугольника по формуле $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$, откуда, в частности, следует, что $ah_a=bh_b$ (№ 22.21).
56. Вычисление площади треугольника по формуле $S=0{,}5ab\sin\alpha$ (№ 22.43).
57. Вычисление площади треугольника по формуле Герона (№ 22.44).
58. Применение формулы $S=pr$ (№ 22.60).
59. Применение формулы $R=\frac{abc}{4S}$ (№ 22.61).
60. Площадь прямоугольного треугольника (№ 21.44).
61. Площадь равнобокой трапеции (№ 22.47).
62. Площадь трапеции (№ 21.45, 22.48).
63. Окружность (№ 21.46).
64. Расстояние от центра окружности до хорды (№ 22.54).
65. Длина окружности; длина дуги (№ 21.47).
66. Площадь круга (№ 21.48).
67. Площадь круга, кольца, сектора, сегмента (№ 22.59).
68. Уравнение окружности (№ 21.49).
69. Касательная к окружности (№ 21.50, 22.49).
70. Центральные и вписанные углы (№ 21.51, 22.50).
71. Углы с вершиной внутри круга (№ 22.51).
72. Углы с вершиной вне круга (№ 22.52).
73. Угол между касательной и хордой (№ 22.53).
74. Теорема об отрезках пересекающихся хорд (№ 22.55).
75. Теорема об отрезках касательной и секущих (№ 22.56).
76. Вписанная и описанная окружность для правильного треугольника (№ 21.52).
77. Описанная окружность для прямоугольного треугольника (№ 21.53).
78. Формула радиуса вписанной окружности для прямоугольного треугольника (№ 21.54).
79. Описанная окружность для произвольного треугольника (№ 21.55).
80. Существование окружности, вписанной в четырехугольник (сумма длин противолежащих сторон) (№ 21.56).
81. Окружность, вписанная в равнобокую трапецию (№ 22.64).
82. Окружность, вписанная в произвольную трапецию (№ 22.65).
83. Окружность, вписанная в ромб (№ 22.66).
84. Существование окружности, описанной около четырехугольника (№ 21.57, 22.67).
85. Касание окружностей (№ 22.57, 22.58).

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Аксиомы стереометрии

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. («Проходить через» — означает содержать.)
2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в плоскости.
3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Способы задания плоскости в пространстве

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.
2. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.
3. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.
4. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.
5. Через одну из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная второй прямой.
6. Через любую точку проходит единственная плоскость, параллельная двум скрещивающимся прямым.
7. Через точку, не лежащую на данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.
8. Через любую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.
9. Через данную прямую проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной плоскости.

Сечение многогранника

Секущей плоскостью пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба) называется такая плоскость, по обе стороны от которой есть точки данной пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба).

Сечением пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба) называется фигура, состоящая из *всех общих точек* секущей плоскости и пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба).

Секущая плоскость пересекает грани пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба) по отрезкам, поэтому ***сечение есть многоугольник***, лежащий в секущей плоскости, ***стороны которого лежат на поверхности пирамиды*** (призмы, параллелепипеда, куба). Секущая плоскость в задаче может быть задана любым из вышеперечисленных способов задания плоскости в пространстве.

Если две различные плоскости имеют две общие точки, то они пересекаются по той единственной прямой, которая через эти две точки проходит. Следовательно, чтобы построить линию пересечения двух плоскостей, надо найти им две общие точки и провести через них **прямую**. (Обратите внимание! *Прямую*, а не отрезок между двумя точками. И проанализируйте, какие прямые, лежащие с ней в одной плоскости, она пересечет.) Чтобы построить сечение многогранника плоскостью, необходимо построить линии пересечения секущей плоскости с плоскостями тех граней многогранника, которые имеют с секущей плоскостью общие точки.

Параллельность в пространстве

	Определение	Признак	Свойства
Прямые	Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.	Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.	Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.
Прямая и плоскость	Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.	Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.	Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.
Плоскости	Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.	Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.	Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые их пересечения параллельны между собой. Отрезки параллельных прямых, расположенные между параллельными плоскостями, равны.

Скрещивающиеся прямые

Определение	Признак	Свойства
Две прямые называются скрещивающимися, если не существует плоскости, в которой они обе лежат.	Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.	Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.

Углы

	Определение	Свойства
Угол между скрещивающимися прямыми	Углом между скрещивающимися прямыми a и b называется угол между построенными пересекающимися прямыми a_1 и b_1, такими, что $a \| a_1$, $b \| b_1$.	Угол α между двумя пересекающимися прямыми есть наименьший из образованных при пересечении углов, то есть $0° < \alpha \leq 90°$.
Угол между прямой и плоскостью	Углом между прямой, не перпендикулярной плоскости, и плоскостью называется угол между прямой и ее перпендикулярной проекцией на данную плоскость.	Углом между прямой и плоскостью является наименьший из всех углов, которые данная прямая образует с прямыми, лежащими в данной плоскости и проходящими через точку пересечения прямой и плоскости.
Двугранный угол	Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, общая граничная прямая называется **ребром** двугранного угла.	Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. Под двугранным углом понимают обычно тот, линейный угол φ которого удовлетворяет условию $0° < \varphi < 180°$. Если грани двугранного угла лежат в одной плоскости, то он называется развернутым.
Линейный угол двугранного угла	Линейным углом двугранного угла называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, которые проведены в его гранях **перпендикулярно** ребру.	
Двугранный угол при ребре многогранника	Двугранным углом при ребре многогранника называется двугранный угол, ребро которого содержит ребро многогранника, а грани двугранного угла содержат грани многогранника, которые пересекаются по данному ребру многогранника.	
Угол между плоскостями	Углом между пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми, проведенными соответственно в плоскостях **перпендикулярно** их линии пересечения через некоторую ее точку.	Угол α между двумя пересекающимися плоскостями есть наименьший из образованных при пересечении двугранных углов, то есть $0° < \alpha \leq 90°$.

Перпендикулярность в пространстве

	Определение	Признак	Свойства
Перпендикулярные прямые	Две прямые (пересекающиеся или скрещивающиеся) называются **взаимно перпендикулярными** (перпендикулярными), если угол между ними равен 90°.		Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна этой прямой.
Прямая, перпендикулярная плоскости	Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости.	Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.	Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны. Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.
Перпендикулярные плоскости	Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.	Если одна из двух плоскостей содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.	Прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная прямой, по которой они пересекаются, перпендикулярна другой плоскости.

Другие особо важные теоремы и свойства

1. (О трех перпендикулярах.) Прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной.
2. Прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная наклонной, перпендикулярна и ее проекции на эту плоскость.
3. Если из одной точки, взятой вне плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и две наклонные, то:
   1) две наклонные, имеющие равные проекции, равны;
   2) из двух наклонных больше та, проекция которой больше.
4. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.
5. Отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков (середина отрезка проектируется в середину его проекции).

Расстояния

	Определение
Расстояние между точками	Расстоянием между точками называется длина отрезка с концами в этих точках.
Расстояние от точки до прямой	Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведенного из точки на прямую.
Расстояние между параллельными прямыми	Расстоянием между параллельными прямыми называется длина перпендикуляра, проведенного из любой точки одной прямой на другую прямую.
Расстояние между скрещивающимися прямыми	Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина отрезка их общего перпендикуляра (такой отрезок единственный). Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой, или расстоянию между двумя параллельными плоскостями, содержащими эти прямые.
Расстояние от точки до плоскости	Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к данной плоскости.
Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью	Расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью называется расстояние от произвольной точки прямой до плоскости.
Расстояние между параллельными плоскостями	Расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости.

Тематический указатель задач по стереометрии

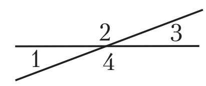
1. Взаимное расположение фигур в пространстве (№ 21.58).
2. Куб (№ 21.59).
3. Объем куба (№ 21.60).
4. Правильные многогранники (№ 22.68).
5. Прямая призма (№ 21.61).
6. Объем прямой призмы (№ 21.62, 22.72).
7. Правильная призма (№ 21.63, 22.69).
8. Объем правильной призмы (№ 21.64, 22.73).
9. Отношение объемов частей призмы (№ 21.65).
10. Объем наклонной призмы (№ 22.74).
11. Прямоугольный параллелепипед (№ 21.66).
12. Объем прямоугольного параллелепипеда (№ 21.67).
13. Прямой параллелепипед; объем прямого параллелепипеда (№ 22.75).
14. Правильная треугольная пирамида (№ 21.68).
15. Объем правильной треугольной пирамиды (№ 21.69, 22.78).
16. Правильная четырехугольная пирамида (№ 21.71).
17. Площадь сечения призмы и пирамиды (№ 22.70, 22.71).
18. Объем правильной четырехугольной пирамиды (№ 21.70, 22.79).
19. Правильная пирамида с числом сторон основания большим четырех (№ 21.72).
20. Объем треугольной пирамиды (№ 21.73, 22.80).
21. Четырехугольная пирамида (№ 21.74).
22. Объем четырехугольной пирамиды (№ 21.75, 22.81).
23. Пирамида, высота которой опускается в центр окружности, описанной вокруг основания (№ 22.82).
24. Пирамида, высота которой опускается в центр окружности, вписанной в основание (№ 22.83).
25. Усеченная пирамида (№ 21.76).
26. Усеченная пирамида; объем усеченной пирамиды (№ 22.84).
27. Отношение объемов подобных многогранников (№ 22.85).
28. Расстояние от точки до плоскости и от точки до прямой (№ 22.86).
29. Расстояние между скрещивающимися прямыми (№ 22.87).
30. Угол между скрещивающимися прямыми (№ 22.88).
31. Угол между прямой и плоскостью (№ 22.89).
32. Угол между плоскостями, двугранный угол (№ 22.90, 22.91).
33. Цилиндр (№ 21.77).
34. Площадь поверхности цилиндра (№ 21.78, 22.92).
35. Объем цилиндра (№ 21.79).
36. Конус (№ 21.80).
37. Площадь поверхности конуса (№ 21.81, 22.93).
38. Объем конуса (№ 21.82, 22.94).
39. Усеченный конус; объем усеченного конуса (№ 22.95).
40. Шар (№ 21.83).
41. Объем шара (№ 21.84).
42. Объем шара, площадь поверхности шара (№ 22.96).
43. Комбинации тел вращения (№ 21.85).
44. Конус и цилиндр (№ 22.97).
45. Конус и шар (№ 22.98).
46. Цилиндр и шар (№ 22.99).
47. Призма и шар (№ 22.100).
48. Пирамида и конус (№ 22.101).
49. Пирамида и шар (№ 22.102).
50. Комбинации фигур (№ 22.103).

ГЕОМЕТРИЯ (ЧАСТЬ А)

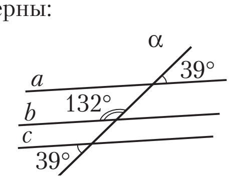
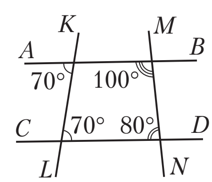
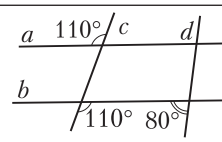
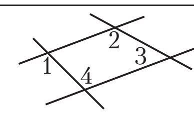
21.1.

а) Вычислите градусные меры смежных углов, если один из них в 3 раза больше другого, и укажите меньший из них.	б) Величина одного из смежных углов больше величины другого на 31°. Вычислите градусные меры этих углов и укажите больший.
в) На прямой AB взята точка C и из нее проведен луч CD так, что $\angle ACD$ в 4 раза больше, чем $\angle BCD$. Найдите градусные меры этих углов и укажите меньший.	г) Отношение двух углов равно $7:3$, а их разность равна 72°. Могут ли эти углы быть смежными?

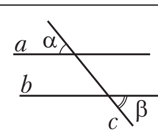
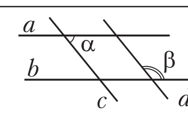
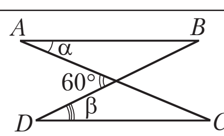
21.2.

а) Две прямые пересекаются (см. рис.). При этом $\angle 1 + \angle 3 = 50°$. Вычислите градусные меры $\angle 2$ и $\angle 4$.	
б) Две прямые пересекаются (см. рис.). При этом $\angle 2 - \angle 1 = 120°$. Вычислите градусные меры $\angle 3$ и $\angle 4$.	
в) Две прямые пересекаются (см. рис.). При этом $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 9\angle 1$. Вычислите градусную меру $\angle 1$.	
г) Сумма двух углов, полученных при пересечении двух прямых, равна 80°. Вычислите градусную меру большего из полученных при пересечении этих прямых четырех углов.	

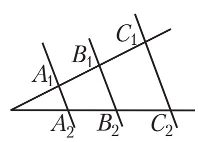
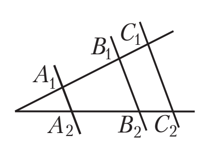
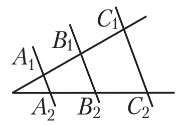
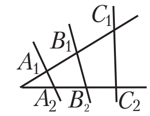
21.3.

а) Используя данные, указанные на рисунке, определите, какие утверждения верны: 1) прямая b перпендикулярна прямой d; 2) прямая a параллельна прямой b; 3) прямая a перпендикулярна прямой d; 4) прямая a параллельна прямой c; 5) прямая b параллельна прямой c. 	б) Рассмотрите рисунок и укажите пары параллельных прямых. 
в) Какие из изображенных на рисунке прямых параллельны друг другу? 	г) На рисунке $\angle 1 = 72°$, $\angle 2 = 134°$, $\angle 4 = 72°$. Вычислите градусную меру $\angle 3$. 

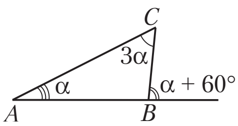
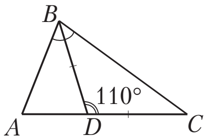
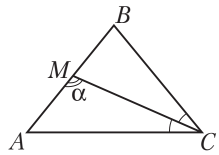
21.4.

а) На рисунке изображены параллельные прямые a и b и секущая c. Чему равна сумма углов α и β? а) 90°; б) 180°; в) 120°; г) невозможно определить. 	б) На рисунке изображены две пары параллельных прямых: $a \parallel b$ и $c \parallel d$. Чему равна сумма углов α и β? 
в) Отрезки AB и CD, изображенные на рисунке, параллельны. Чему равна сумма углов α и β? 	г) Две параллельные прямые пересечены третьей прямой, при этом один из внутренних углов равен α. Под каким углом его биссектриса пересекает каждую из параллельных прямых?

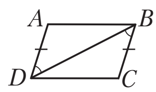
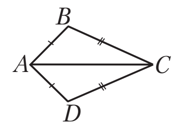
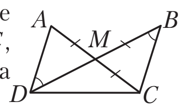
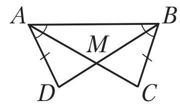
21.5.

а) Стороны угла пересечены тремя параллельными прямыми: A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 (см. рис.). При этом $A_1B_1 = 49$, $A_2B_2 = 56$, $B_1C_1 = 63$. Найдите длину отрезка B_2C_2. 	б) Стороны угла пересечены тремя параллельными прямыми: A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 (см. рис.). При этом $A_1B_1 = 19$, $A_2B_2 = 23$, а длина отрезка B_1C_1 на 2 меньше длины отрезка B_2C_2. Найдите длины отрезков B_1C_1 и B_2C_2. 
в) Стороны угла пересечены тремя параллельными прямыми: A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 (см. рис.). При этом $A_1B_1 = B_2C_2$, $B_1C_1 = 5$, а длина отрезка A_2B_2 на 1,2 больше длины отрезка B_2C_2. Найдите длину отрезка A_1B_1. 	г) Стороны угла пересечены тремя прямыми: A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 (см. рис.). Оказалось, что $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{B_1C_1}{B_2C_2}$. Означает ли это, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 обязательно параллельны? 

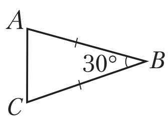
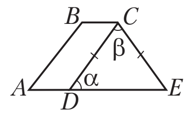
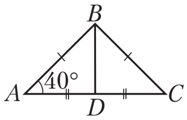
21.6.

а) Найдите градусную меру внутреннего угла при вершине B треугольника ABC, изображенного на рисунке. 	б) Найдите градусную меру наибольшего угла треугольника, если его углы относятся как $2:3:5$.
в) В треугольнике ABC, изображенном на рисунке, BD — биссектриса угла ABC, $BD = DC$, $\angle BDC = 110°$. Найдите градусную меру угла BAC. 	г) В треугольнике ABC, изображенном на рисунке, $AB = BC$, $\angle B = 80°$, CM — биссектриса. Какова величина угла α? 

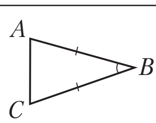
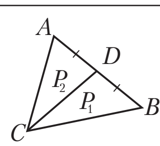
21.7.

а) На рисунке изображен четырехугольник $ABCD$, у которого $AD = BC$, $\angle ADB = \angle DBC$, $\angle DAB = 120°$. Найдите градусную меру $\angle DCB$. 	б) На рисунке изображен четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = AD$, $BC = CD$, $\angle BAD = 80°$. Найдите градусную меру $\angle BAC$. 
в) Для изображенной на рисунке фигуры $AM = MC$, $\angle ADB = \angle DBC$, $AD = 3{,}3$. Найдите длину отрезка BC. 	г) Для изображенной на рисунке фигуры $AD = BC$, $\angle DAB = \angle CBA$, $AM = 3{,}1$. Найдите длину отрезка BM. 

21.8.

а) В треугольнике ABC, изображенном на рисунке, $AB = BC$ и $\angle ABC = 30°$. Найдите градусные меры двух других углов треугольника. 	б) Тупой угол параллелограмма $ABCD$, изображенного на рисунке, равен 140°, на луче AD отметили точку E такую, что $CD = CE$. Чему равна сумма углов α и β? 
в) В треугольнике ABC, изображенном на рисунке, $AB = BC$, $AD = DC$ и $\angle BAC = 40°$. Найдите градусную меру угла CBD. 	г) Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника образует с его стороной угол 60°. Найдите длину высоты треугольника, проведенную из этой же вершины, если его боковая сторона равна 10 м.

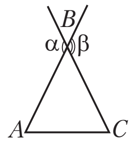
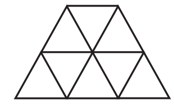
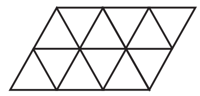
21.9.

а) В треугольнике ABC, изображенном на рисунке, $AB = BC$, $AB = 2AC$, а периметр треугольника ABC равен 20 см. Найдите длины сторон треугольника ABC. 	б) В треугольнике RTS $RT = TS$, $RT : RS = 4:7$, а периметр треугольника RTS равен 45 дм. Найдите длины сторон треугольника RTS.
в) В треугольнике ABC, изображенном на рисунке, $AB = BC$, $AD = DB$, $AC = 8$. Периметры треугольников BCD и ACD равны P_1 и P_2 соответственно, и $P_1 - P_2 = 2$. Найдите длину стороны AB. 	г) Найдите длину основания равнобедренного треугольника, периметр которого равен 28 см, а основание на 8 см меньше боковой стороны.

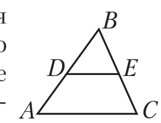
21.10.

а) Стороны треугольника относятся как $3:7:8$, а его периметр равен 54 см. Найдите наибольшую сторону треугольника.	б) Длины сторон треугольника пропорциональны числам 5, 12, 13. Наибольшая сторона треугольника превосходит наименьшую на 1,6 м. Определите периметр и площадь треугольника.
в) Боковая сторона равнобедренного треугольника, основание которого равно 6, делится точкой касания вписанной в него окружности в отношении $4:3$, считая от вершины. Найдите периметр треугольника.	г) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D так, что треугольник ADC — равнобедренный с основанием AC. Найдите длину стороны AC, если периметры треугольников ABC и ABD равны соответственно 39 и 27 см.

21.11.

а) На рисунке изображен равносторонний треугольник ABC. Чему равна сумма градусных мер углов α и β? 	б) Из восьми равных равносторонних треугольников составили трапецию, изображенную на рисунке. Чему равна площадь трапеции, если ее периметр равен 16 см? 
в) Из двенадцати равных равносторонних треугольников составили параллелограмм, изображенный на рисунке. Чему равна площадь параллелограмма, если его периметр составляет 30 см? 	г) Сторона правильного треугольника равна a. Чему равна его площадь?

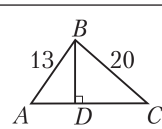
21.12.

а) В треугольнике ABC $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см, точка M — середина стороны AB, точка K — середина стороны BC. Найдите периметр четырехугольника $AMKC$.	б) Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC в точке D, а сторону BC — в точке E. Какова длина отрезка DE, если точка D — середина AC, точка E — середина BC и $AB = 16$ см?
в) Длины оснований трапеции равны 4 и 10. Найдите длины отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из диагоналей. В ответе укажите их произведение.	г) Отрезок DE — средняя линия треугольника ABC, изображенного на рисунке. Чему равно отношение площади треугольника DBE к площади треугольника ABC? 

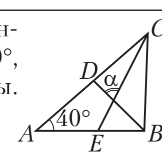
21.13.

а) В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, и основанием, равным 6, проведена медиана к боковой стороне. Найдите ее длину.	б) В равнобедренном треугольнике к боковой стороне длиной 4 см проведена медиана, длина которой равна 3 см. Найдите основание треугольника.
в) Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5 см. Найдите длину боковой стороны.	г) Две стороны треугольника равны 15 см и 25 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, — 16 см. Найдите длину третьей стороны треугольника.

21.14.

а) В треугольнике ABC, изображенном на рисунке, проведена высота BD. Длины отрезков на рисунке даны в сантиметрах. Найдите длину отрезка AD, если $AC = 21$ см. 	б) Дан треугольник со сторонами 26, 40 и 42. Найдите длину высоты, проведенной к средней по длине стороне треугольника.
в) Дан треугольник со сторонами 1,7; 2,5 и 2,6. Найдите длину высоты, проведенной к меньшей стороне треугольника.	г) Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 см и 15 см. Разность длин сторон параллелограмма равна 7 см. Найдите длины сторон параллелограмма и укажите в ответе произведение длин двух смежных сторон.

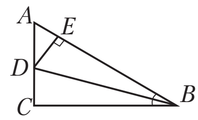
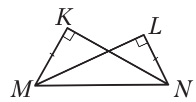
21.15.

а) В равностороннем треугольнике ABC точка O — точка пересечения его биссектрис. Чему равна градусная мера угла BOC?	б) В треугольнике ABC, изображенном на рисунке, $AB = BC$, $\angle A = 40°$, отрезки CE и BD — биссектрисы. Какова градусная мера угла α? 
в) Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника.	г) Один из отрезков, на которые биссектриса разделила сторону треугольника, оказался равным одной из двух других сторон, длины которых 45 и 75. Найдите длину третьей стороны треугольника.

21.16.

а) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, $AC = 18$ м, $CD = 15$ м, $BD = 9$ м. Найдите длину стороны AB.	б) В треугольнике биссектриса угла, образованного сторонами с длинами 21 и 28, делит противолежащую сторону на отрезки, длина большего из которых равна 24. Найдите длину меньшего из этих отрезков.
в) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, $AC = 14$ м, $AB = 8$ м, $BC = 11$ м. Найдите длины отрезков, на которые точка D разбила сторону BC.	г) Биссектриса одного из углов треугольника разделила противолежащую сторону на отрезки длиной 24 и 27 м. Найдите две другие стороны треугольника, если его периметр равен 153 м.

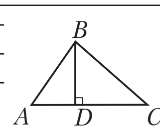
21.17.

а) Градусные меры острых углов прямоугольного треугольника относятся как $1:1$. Какова длина гипотенузы треугольника, если один из катетов равен 3 см?	б) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, изображенном на рисунке, проведена биссектриса BD, при этом $CD = 26$ м. Из точки D проведен отрезок DE — перпендикуляр на гипотенузу. Найдите длину отрезка DE. 
в) Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4 см. Найдите длину медианы треугольника, проведенной к гипотенузе.	г) Треугольники MKN и MLN, изображенные на рисунке, — прямоугольные с общей гипотенузой MN. $MK = NL = 15$, $KN = 20$. Найдите длины отрезков ML и MN. 

21.18.

а) В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$, $AB = 6$ см. Вычислите длины двух других сторон треугольника.	б) Диагональ прямоугольника равна 16 см и образует с его стороной угол 30°. Найдите стороны прямоугольника.
в) Угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен 60°, а высота конуса равна $9\sqrt{3}$ см. Найдите образующую конуса.	г) Точка A принадлежит одной из граней острого двугранного угла. Из нее опущен перпендикуляр AB на ребро двугранного угла и перпендикуляр AC на вторую грань угла, $AB = 14$ см, $AC = 7$ см. Найдите величину двугранного угла.

21.19.

а) Найдите длину высоты равнобедренного треугольника, основание которого равно 24 см, а боковая сторона — 13 см.	б) Отрезок BD — высота треугольника ABC, изображенного на рисунке. $BC = 5$, $AD = 2$, $DC = 4$. Чему равна площадь треугольника ABC? 
в) Один катет прямоугольного треугольника равен 6, радиус описанной окружности равен 5. Найдите второй катет этого треугольника.	г) Найдите площадь треугольника со сторонами 5, $2\sqrt{10}$ и $\sqrt{65}$.

21.20.

а) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 26 см, а длины его катетов относятся как $5:12$. Вычислите длину большего катета треугольника.	б) Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если известно, что длины его сторон образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 1.
в) $ABCD$ — прямоугольник, в котором $AB = 1$, $BC = 2$. На сторонах BC и AD взяты точки M и N так, что $BMDN$ — ромб. Найдите сторону ромба.	г) В равнобокую трапецию вписана окружность радиуса 1 м; меньшее основание трапеции также равно 1 м. Найдите длину большего основания.

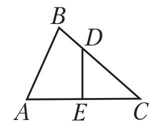
21.21.

а) В треугольнике ABC $AB = 8\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$, $\angle A = 30°$. Какова длина стороны BC?	б) Одна сторона треугольника равна 2, прилежащие углы равны 30° и 45°. Найдите две оставшиеся стороны этого треугольника.
в) Диагональ параллелограмма образует с одной стороной, равной 8, угол 60°, а с другой — 75°. Найдите длину диагонали.	г) В равнобедренном треугольнике боковая сторона в 1,5 раза больше радиуса описанной около треугольника окружности. Найдите синус угла при основании треугольника.

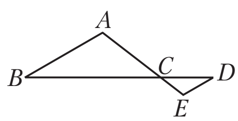
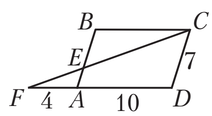
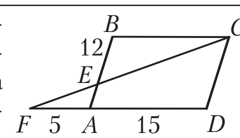
21.22.

а) В треугольнике ABC $AB = 2$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 30°$. Какова длина стороны AC?	б) В треугольнике со сторонами 6, 10 и 12 найдите косинус среднего по величине угла.
в) В треугольнике основание равно 12 см, один из углов при основании равен 120°, сторона, лежащая против этого угла, равна 28 см. Определите длину третьей стороны.	г) В треугольнике ABC отрезок, соединяющий середины AB и BC, равен 3, сторона AB равна 7, угол C равен 60°. Найдите длину стороны BC.

21.23.

а) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $A_1B_1 = 18$ см. Найдите длину стороны B_1C_1.	б) Треугольники ABC и DEC, изображенные на рисунке, подобны. Найдите длину отрезка CD, если $BC = 20$, $EC = 15$, $AE = 9$. 
в) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. $AC = 12$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если периметр треугольника ABC равен 28 см.	г) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. $AC = 2$ см, $A_1C_1 = 5$ см. Площадь треугольника ABC равна 12 см^2. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

21.24.

а) Стороны AB и DE треугольников ABC и CDE, изображенных на рисунке, параллельны, $DE = \frac{1}{3}AB$, $CD = 2$ см. Какова длина отрезка BD? 	б) В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD продолжены до взаимного пересечения в точке M. Определите длину отрезка CD, если $AB : BM = 17 : 9$, а длина DM равна 5,2.
в) Через вершину C параллелограмма $ABCD$, изображенного на рисунке, проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке E и продолжение стороны AD в точке F. Длины отрезков на рисунке даны в сантиметрах. Чему равны длины отрезков AE и EB? 	г) Через вершину C параллелограмма $ABCD$, изображенного на рисунке, проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке E и продолжение стороны AD в точке F. Длины отрезков на рисунке даны в сантиметрах. Чему равна длина отрезка AE? 

21.25.

а) На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили точки D и E соответственно так, что $DE \parallel BC$. Какова площадь треугольника ABC, если $AD = 2$ см, $AB = 4$ см, а площадь треугольника ADE равна 2 см^2?	б) На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили точки M и K соответственно так, что $MK \parallel AC$ и $AM : BM = 2 : 5$. Найдите площадь треугольника MBK, если площадь треугольника ABC равна 98 см^2.
в) Параллельно стороне AB треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке D так, что $AD : DC = 3 : 7$. Найдите площадь отсекаемой трапеции, если площадь треугольника ABC равна 200.	г) Два подобных прямоугольных треугольника имеют по катету одинаковой длины, равной 12. Найдите площадь большего треугольника, если площади треугольников относятся как $10 : 9$.

21.26.

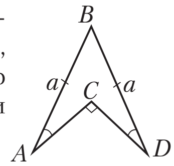
а) На стороне AC треугольника ABC взята точка D так, что $AD = 6$, $DC = 8$. Длина перпендикуляра DH, проведенного к стороне BC, равна 4. Найдите длину высоты треугольника, проведенной из вершины A.	б) Катет прямоугольного треугольника равен 18. Точка, принадлежащая данному катету, удалена от гипотенузы и другого катета на 8. Найдите периметр треугольника.
в) Вычислите площадь равнобедренного треугольника, если высота, проведенная к боковой стороне, равна 12 см и составляет с основанием угол 30°.	г) В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = 30$ м) вписана окружность; центр вписанной окружности делит биссектрису угла, противолежащего основанию, в отношении $12 : 5$, считая от вершины. Найдите длину основания треугольника.

21.27.

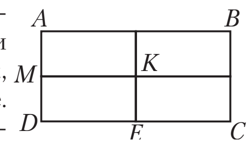
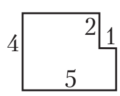
а) Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки, равные 24 и 54. Найдите катеты этого треугольника.	б) Катет прямоугольного треугольника равен 6, проекция этого катета на гипотенузу равна 2. Найдите гипотенузу и другой катет этого треугольника.

в) Один катет прямоугольного треугольника равен 5, а проекция другого катета на гипотенузу равна 2,25. Найдите гипотенузу этого треугольника.	г) Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Найдите высоту треугольника, проведенную к гипотенузе.

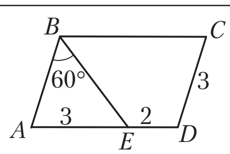
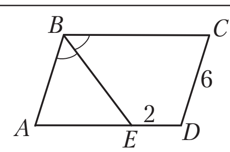
21.28.

а) В произвольном четырехугольнике *ABCD* отметили точки *K*, *L*, *M*, *N* — соответственно середины сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA*. Установите вид четырехугольника *KLMN*.	б) В четырехугольнике *ABCD* точки *E*, *F*, *N* и *M* — соответственно середины сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA*. Найдите длины отрезков *EF* и *NM*, если $AC = 48$.
в) Чему равна сумма внешних углов произвольного выпуклого четырехугольника?	г) В четырехугольнике *ABDC*, изображенном на рисунке, $AB = BD = a$, $\angle A = \angle D = 15°$. Найдите периметр четырехугольника *ABDC*, если $\angle ACD = 90°$. 

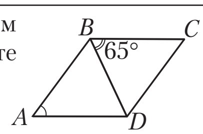
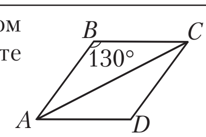
21.29.

а) Диагонали прямоугольника *MNKE* пересекаются в точке *O*, $ME = 10$ см, $MK = 18$ см. Найдите периметр треугольника *MOE*.	б) Из четырех равных прямоугольников составили прямоугольник *ABCD* так, как это показано на рисунке. Чему равен периметр прямоугольника *DMKE*, если периметр прямоугольника *ABCD* составляет 24 см? 
в) Найдите периметр пола кухни, если схема пола и его размеры указаны на рисунке (все углы — прямые). 	г) В прямоугольнике *ABCD* $CD = 30$ м, $\angle ACD = 60°$. Точки *E*, *F*, *N* и *M* — соответственно середины сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA*. Найдите периметр четырехугольника *EFNM*.

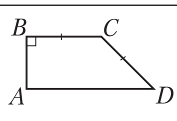
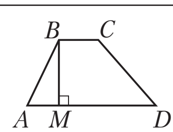
21.30.

а) Градусные меры двух углов параллелограмма относятся как 8 : 7. Вычислите градусную меру большого угла параллелограмма.	б) Чему равна меньшая из сторон параллелограмма, если одна из сторон на 8 см больше другой, а периметр параллелограмма равен 48 см?
в) В параллелограмме *ABCD*, изображенном на рисунке, проведен отрезок *BE*. При этом оказалось, что $\angle ABE = 60°$, длины отрезков на рисунке даны в сантиметрах. Найдите периметр четырехугольника *EBCD*. 	г) В параллелограмме *ABCD*, изображенном на рисунке, проведена биссектриса *BE*, длины отрезков на рисунке даны в сантиметрах. Найдите периметр параллелограмма *ABCD*. 

21.31.

а) В ромбе *ABCD*, изображенном на рисунке, $\angle CBD = 65°$. Найдите градусную меру угла *A*. 	б) В ромбе *ABCD*, изображенном на рисунке, $\angle B = 130°$. Найдите градусную меру угла *ACD*. 
в) Найдите периметр ромба, диагонали которого равны 24 см и 18 см.	г) Найдите длину стороны ромба *ABCD*, если $\angle DAB = 60°$, а длина диагонали *AC* равна $4\sqrt{3}$.

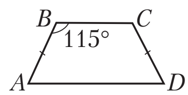
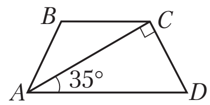
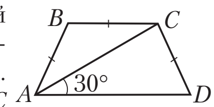
21.32.

а) В трапеции *ABCD*, изображенной на рисунке, $BC = CD = 10$, $AB = 8$, $\angle ABC = 90°$. Найдите периметр трапеции. 	б) В трапеции *ABCD*, изображенной на рисунке, основания $AD = 25$, $BC = 4$, боковая сторона $CD = 20$, высота $BM = 12$. Найдите периметр трапеции. 
в) Известно, что *AD* — большее основание трапеции *ABCD*. Через вершину *B* проведена прямая, параллельная стороне *CD* и пересекающая основание *AD* в точке *M*. Вычислите периметр трапеции *ABCD*, если периметр треугольника *ABM* равен 28 см, а основание *BC* — 5 см.	г) Известно, что *AD* — большее основание трапеции *ABCD*. Через вершину *B* провели прямую, параллельную стороне *CD* и пересекающую основание *AD* в точке *M*. Периметр трапеции *ABCD* равен 24 см, а основание *BC* — 6 см. Найдите периметр треугольника *ABM*.

21.33.

а) Длины оснований трапеции равны корням уравнения $x^2-20x+1=0$. Найдите длину средней линии трапеции.	б) Одно из оснований трапеции на 8 см больше другого, а средняя линия трапеции равна 10 см. Найдите меньшее основание трапеции.
в) Отрезок AB не пересекает плоскость α, точки A и B удалены от этой плоскости на 7 см и 11 см соответственно. Чему равно расстояние от середины отрезка AB до плоскости α?	г) Точка M — середина отрезка AB, не пересекающего плоскость α. Точка A удалена от плоскости α на 6 см, а точка M — на 14 см. Чему равно расстояние от точки B до плоскости α?

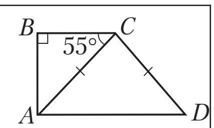
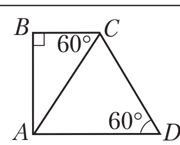
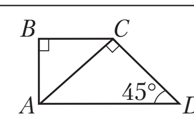
21.34.

а) $ABCD$ — равнобедренная трапеция (см. рис.), $\angle ABC=115°$. Найдите градусные меры всех остальных углов трапеции. 	б) Чему равен больший из углов равнобокой трапеции, если один из углов в 8 раз меньше другого?
в) $ABCD$ — трапеция (см. рис.), вокруг которой можно описать окружность. Угол между диагональю AC и большим основанием AD равен 35°, $\angle ACD=90°$. Найдите величины всех углов трапеции. 	г) $ABCD$ — трапеция, у которой боковые стороны равны меньшему основанию (см. рис.). Угол между диагональю AC и большим основанием AD равен 30°. Найдите величины всех углов трапеции. 

21.35.

а) Нижнее и верхнее основания равнобокой трапеции соответственно равны 21 и 5. Угол при нижнем основании равен 60°. Найдите периметр трапеции.	б) Найдите меньшее основание равнобокой трапеции, если большее основание равно 26, боковая сторона равна $8\sqrt{2}$, угол между ними составляет 45°.
в) Найдите диагональ равнобокой трапеции, если основания равны 3 см и 5 см, а боковая сторона равна 7 см.	г) Найдите периметр равнобокой трапеции, если боковая сторона равна 10, угол при нижнем основании равен 60°, а диагональ трапеции оказалась биссектрисой угла при нижнем основании.

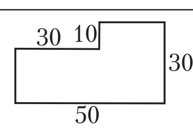
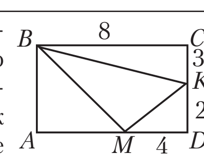
21.36.

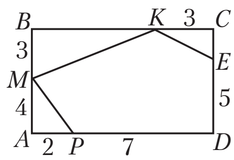
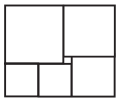
а) Острый угол прямоугольной трапеции в 4 раза меньше ее тупого угла. Вычислите градусные меры этих углов.	б) В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $\angle ABC=$ $=90°$, $\angle BCA=55°$, диагональ AC равна боковой стороне CD. Найдите градусные меры углов при вершинах C и D. 
в) В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC, $\angle ACB=\angle ADC=60°$. Найдите градусную меру угла при вершине C. 	г) В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC, $\angle ACD=90°$, $\angle ADC=45°$. Найдите величину угла при вершине C. 

21.37.

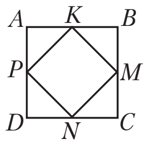
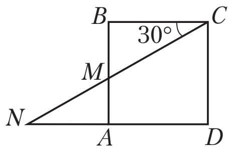
а) Вычислите градусную меру внутреннего угла правильного пятиугольника.	б) Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен 160°?
в) Найдите радиус окружности, описанной вокруг правильного шестиугольника со стороной 5 м.	г) Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $2\sqrt{3}$ дм.

21.38.

а) Найдите площадь садового участка, если схема участка и его размеры в метрах указаны на рисунке. 	б) Найдите площадь треугольника BKM, изображенного на рисунке, если четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник (длины отрезков на рисунке даны в сантиметрах). 

в) Найдите площадь пятиугольника $MKEDP$, изображенного на рисунке, если четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник (длины отрезков на рисунке даны в сантиметрах). 	г) Прямоугольник на рисунке составлен из квадратов. Найдите площадь прямоугольника, если площадь самого маленького квадрата равна 1. 

21.39.

а) Периметр квадрата равен $24\sqrt{2}$. Найдите его площадь.	б) Середины сторон квадрата $ABCD$, изображенного на рисунке, последовательно соединены отрезками. Чему равно отношение площади квадрата $ABCD$ к площади четырехугольника $KMNP$? 
в) Найдите периметр квадрата $ABCD$, изображенного на рисунке, если $NC = 20$, а $\angle BCN = 30°$. 	г) На стороне BC квадрата $ABCD$ отметили точку M так, что $\angle DAM = 60°$. Найдите длину отрезка MD, если $AB = \sqrt{3}$ см.

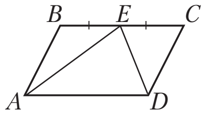
21.40.

а) Найдите площадь параллелограмма, сторона которого равна 12 см, а высота, проведенная к ней, — 8 см.	б) Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 7 см и 10 см, а угол между ними равен 30°.
в) Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 32 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.	г) Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12 см^2. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB.

21.41.

а) Вычислите площадь ромба, диагонали которого равны 10 см и 36 см.	б) Сторона ромба равна $6\sqrt{2}$, а площадь равна $12\sqrt{2}$. Найдите синус меньшего угла ромба.
в) Высота ромба равна 8, а синус угла между его высотой и меньшей диагональю равен $\frac{\sqrt{5}}{5}$. Найдите площадь ромба.	г) В параллелограмм, одна из сторон которого равна $7\sqrt{2}$, вписана окружность радиуса $3\sqrt{3}$. Найдите площадь параллелограмма.

21.42.

а) Точка E — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$, изображенного на рисунке. Чему равно отношение площади треугольника AED к площади параллелограмма $ABCD$? 	б) Одна вершина треугольника совпадает с вершиной ромба, а две другие — с серединами сторон ромба, не проходящими через эту вершину. Найдите отношение площади треугольника к площади ромба.
в) На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{1}{3}$. Найдите площадь четырехугольника $AMCN$, если площадь параллелограмма равна 6.	г) Площадь треугольника равна 5, две стороны равны 3 и 4. Найдите площади треугольников, на которые он делится биссектрисой угла между данными сторонами.

21.43.

а) Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 22$ м, а высота $CD = 15$ м.	б) Чему равна площадь треугольника ABC, если $AC = 10$ см, $AB = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$?
в) Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 16 см, а угол при основании — 75°.	г) Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, площадь которого равна $100\sqrt{3}$ см^2, а угол при основании — 30°.

21.44.

а) Найдите площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 25 см, а один из катетов — 15 см.	б) Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 26 см.
в) Площадь прямоугольного треугольника равна 150, один из катетов равен 15. Найдите длину высоты, опущенной из вершины прямого угла.	г) Найдите площадь прямоугольного треугольника, у которого медиана, проведенная к гипотенузе, равна 4 и делит прямой угол в отношении $1:2$.

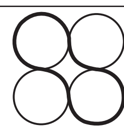
21.45.

а) Чему равна площадь трапеции, средняя линия которой равна 12 см, а высота — 6 см?	б) В трапеции, площадь которой равна 594 м^2, высота равна 22 м. Найдите сумму длин оснований трапеции.
в) Вычислите площадь прямоугольной трапеции с основаниями 7 см и 3 см и острым углом 60°.	г) Найдите площадь равнобокой трапеции, если меньшее основание равно 10, боковая сторона равна $8\sqrt{2}$, угол между ними равен 135°.

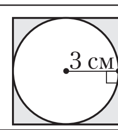
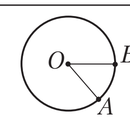
21.46.

а) В окружности, радиус которой равен 17 см, проведена хорда длиной 30 см. Найдите расстояние от центра окружности до данной хорды.	б) В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды, каждая из них делится другой на два отрезка 3 и 7. Найдите расстояния от центра до каждой хорды.
в) В круге на расстоянии 1 см от центра даны взаимно перпендикулярные хорды, каждая из которых равна 6 см. Найдите длины отрезков, на которые делятся хорды точкой их пересечения, и укажите их произведение.	г) Две окружности пересекаются так, что каждая из них проходит через центр другой окружности. Чему равно отношение радиусов этих окружностей?

21.47.

а) Как изменится длина окружности, если радиус увеличится на 1 м?	б) Длина окружности равна 7π м. Найдите радиус окружности.
в) На рисунке изображены четыре окружности, радиус каждой из которых равен R и которые касаются друг друга. Какова длина выделенной линии? 	г) Чему равно отношение длины окружности к периметру квадрата, описанного около этой окружности?

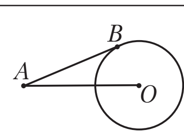
21.48.

а) На рисунке изображены квадрат и вписанная в него окружность. Найдите площадь закрашенной фигуры. 	б) На рисунке изображена окружность с центром в точке O и радиусом 3 см, $\angle AOB = 60°$. Найдите площадь сектора AOB. 
в) Чему равна площадь круга, длина окружности которого 12π см?	г) Найдите площадь круга, если длина окружности равна a.

21.49.

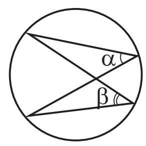
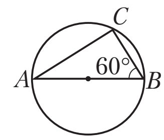
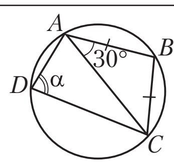
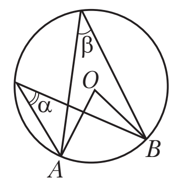
а) Напишите уравнение окружности с центром в точке $(-3; 6)$ и радиусом 5.	б) Напишите уравнение окружности с центром в точке $(2; -5)$ и радиусом 8.
в) Укажите координаты центра окружности, заданной уравнением $(x-5)^2+(y-6)^2=12$.	г) Окружность задается уравнением $(x+2)^2+(y-4)^2=121$. Определите координаты центра окружности и ее радиус. В ответе укажите значение произведения наибольшей из координат центра на радиус окружности.

21.50.

а) На рисунке изображена окружность с центром O. Через точку A к этой окружности проведена касательная AB (B — точка касания). Найдите радиус данной окружности, если расстояние от точки A до точки B равно 15 см, а расстояние от точки A до центра окружности — 17 см. 	б) Из точки A к окружности радиуса 11 см проведены две касательные. Сумма отрезков касательных равна 120 см. Найдите расстояние от центра окружности до точки A.

в) К окружности радиуса 36 см из точки A, отстоящей от центра на расстоянии 85 см, проведена касательная. Найдите расстояние от A до точки касания.	г) Касательные, проведенные из точки A к окружности радиуса 10, перпендикулярны. Определите отрезки этих касательных, ограниченные данной точкой и точками касания.

21.51.

а) Какова градусная мера угла β, изображенного на рисунке, если $\alpha = 50°$? 	б) На рисунке изображен треугольник ABC, вписанный в окружность, радиус которой равен R. Чему равна сторона AC треугольника, если сторона AB является диаметром описанной вокруг треугольника ABC окружности? 
в) На рисунке изображен равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), вписанный в окружность. Чему равна градусная мера угла α? 	г) На рисунке изображена окружность с центром в точке O. Чему равна сумма углов α и β, если $\angle AOB = 50°$? 

21.52.

а) Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника со стороной 15 см.	б) Чему равен радиус окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной 12 см?
в) Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда этой окружности длиной 2 удалена от ее центра на расстояние 3.	г) Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $2\sqrt{3}$. Прямая, параллельная стороне треугольника, делит высоту, проведенную к этой стороне, в отношении $1:2$, считая от вершины. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между другими сторонами треугольника.

21.53.

а) Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Чему равен радиус окружности, проходящей через вершину прямого угла, середину большего катета и вершину большего острого угла?	б) В треугольнике ABC стороны AB и AC равны соответственно 7 и 8, угол A равен 120°. Найдите расстояние от основания высоты, опущенной на сторону AC, до середины стороны BC.
в) Найдите наименьший острый угол прямоугольного треугольника, если известно, что медиана, проведенная из вершины прямого угла, делит этот угол в отношении $2:1$.	г) В равнобедренном треугольнике ABC со сторонами 40 и 101 проведена высота CH к боковой стороне. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ACH и BCH. Найдите расстояние между точками O_1 и O_2.

21.54.

а) Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной в этот треугольник окружности?	б) Найдите сумму длин катетов прямоугольного треугольника, если длина его гипотенузы 20 см, а радиус вписанной окружности 4 см.
в) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 1, а радиус описанной окружности равен 3.	г) Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов. Найдите отношение большего катета к меньшему.

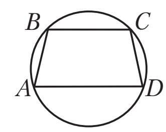
21.55.

а) Сторона треугольника равна 10 см, а противолежащий ей угол — 150°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.	б) В равнобедренном треугольнике с углом 45° при основании проведена высота к основанию. Найдите отношение этой высоты к радиусу описанной около треугольника окружности.
в) Треугольник вписан в окружность радиуса 5 см. Найдите длину стороны, лежащей против угла 45°.	г) Площадь равнобедренного треугольника с углом 45° при вершине составляет $\sqrt{2}+1$. Найдите площадь описанного около треугольника круга.

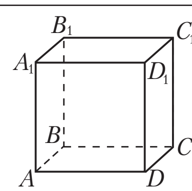
21.56.

а) Около окружности описана равнобокая трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Вычислите длину средней линии трапеции.	б) Периметр описанной около окружности трапеции равен 60 см. Определите длину средней линии трапеции.
в) В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса 2 см. Найдите синус острого угла этой трапеции, если ее площадь равна 120 см^2.	г) В равнобокую трапецию, одно из оснований которой равно 4, вписана окружность радиуса 1. Найдите периметр этой трапеции.

21.57.

а) Квадрат вписан в окружность, радиус которой равен R. Чему равна площадь квадрата?	б) На рисунке изображена трапеция $ABCD$, вписанная в окружность. Чему равно отношение стороны AB к стороне CD? 
в) В окружность вписан прямоугольник со сторонами 3 м и 4 м. Найдите радиус окружности.	г) В окружность радиуса 34 вписан прямоугольник, длины сторон которого относятся как 8 : 15. Найдите длины этих сторон и укажите их произведение.

21.58.

а) Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α. Каково взаимное расположение плоскости α и плоскости трапеции?	б) Точка M лежит вне плоскости треугольника ABC. Каково взаимное расположение прямых AB и MC?
в) На рисунке изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите прямую пересечения плоскости AB_1D и плоскости грани CC_1D_1D. 	г) Даны параллельные прямые a и b. Сколько существует плоскостей, проходящих через прямую a и параллельных прямой b?

21.59.

а) Найдите сумму длин диагоналей куба с ребром 5.	б) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2 см. Чему равна площадь треугольника ADC_1?
в) Диагональ основания куба равна a. Чему равна диагональ куба?	г) Найдите косинус угла между двумя диагоналями куба.

21.60.

а) Диагональ куба равна a. Чему равен объем куба?	б) Ребра куба уменьшили в 3 раза. Во сколько раз уменьшился объем куба?
в) Сумма длин всех ребер куба равна 24. Чему равен его объем?	г) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершины A, C_1 и середину ребра DD_1 проведено сечение. Найдите длину ребра куба, если площадь сечения равна $100\sqrt{6}$.

21.61.

а) Вычислите площадь боковой поверхности прямой призмы, основанием которой является параллелограмм со сторонами 8 см и 22 см, а высота призмы равна 15 см.	б) Вычислите площадь боковой поверхности прямой призмы, основание которой — четырехугольник со сторонами 8 см, 5 см, 12 см и 9 см, а боковое ребро равно 4 см.
в) Основание прямой призмы — ромб с диагоналями 10 см и 24 см. Меньшая диагональ призмы равна 26 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.	г) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, наибольшая ее грань — квадрат. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

21.62.

а) Если все ребра прямой треугольной призмы равны a, то чему равен ее объем?	б) Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем призмы.

в) Основание прямой призмы — ромб со стороной a и тупым углом α. Через большую диагональ нижнего основания и вершину тупого угла верхнего основания проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол β. Найдите объем призмы.	г) Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом 6 см и острым углом 45°. Объем призмы равен 108 см^3. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

21.63.

а) Вычислите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, диагональ которой равна $12\sqrt{3}$ см и наклонена к плоскости основания под углом 30°.	б) Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью основания угол, тангенс которого равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Во сколько раз площадь боковой поверхности призмы больше суммы площадей ее оснований?
в) Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол, тангенс которого равен $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Во сколько раз боковое ребро призмы больше диагонали основания?	г) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 8 см, а боковое ребро — 2 см. Через сторону AC нижнего основания и середину стороны A_1B_1 верхнего проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

21.64.

а) Вычислите объем правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой равна 6 см, а высота — 7 см.	б) Вычислите объем правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна 4 см, а ее боковое ребро — $2\sqrt{3}$ см.
в) Через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания правильной треугольной призмы проведено сечение под углом 60° к плоскости основания. Найдите объем призмы, если площадь сечения равна $8\sqrt{3}$ см^2.	г) Через сторону нижнего основания и середину противолежащего бокового ребра правильной треугольной призмы провели сечение под углом 45° к плоскости основания. Найдите объем призмы, если площадь сечения равна $16\sqrt{6}$ см^2.

21.65.

а) Плоскость, проходящая через боковое ребро треугольной призмы и медиану основания, делит эту призму на две части. Найдите отношение объемов частей.	б) Через две средние линии оснований треугольной призмы проведена плоскость, разбившая призму на две части. Найдите отношение объема меньшей части к объему большей.
в) В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 12$, $AC = 16$. Через боковое ребро AA_1 и биссектрису угла BAC проходит плоскость, разбивающая призму на две части. Найдите отношение объема меньшей части к объему большей.	г) В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону AB и середину ребра CC_1 проведена плоскость, разбившая призму на две части. Найдите отношение объема меньшей части к объему большей.

21.66.

а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD = 24$ см, $CD = 5$ см, $AA_1 = 10$ см. Чему равна площадь прямоугольника A_1B_1CD?	б) Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 6. Найдите площадь наибольшего сечения, проходящего через два параллельных не лежащих в одной грани ребра параллелепипеда.
в) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AC = m$, $BD_1 = d$, $AB = n$. Найдите расстояние между прямой A_1C_1 и плоскостью ABC.	г) Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 1 м, 2 м и 3 м. Найдите косинус угла между диагональю параллелепипеда и гранью наименьшей площади.

21.67.

а) Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 15 м, 50 м, 36 м. Найдите длину ребра равновеликого ему куба.	б) Измерения прямоугольного параллелепипеда образуют геометрическую прогрессию, второй член которой равен 4. Найдите его объем.
в) Площади попарно перпендикулярных граней прямоугольного параллелепипеда равны соответственно S_1, S_2 и S_3. Найдите его объем.	г) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано $AD_1 = x$, $AB_1 = y$, $AC = z$. Найдите объем параллелепипеда.

21.68.

а) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а высота пирамиды — $\sqrt{22}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.	б) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 8 см, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
в) Высота правильной треугольной пирамиды равна 15 см, а апофема — 17 см. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.	г) В правильной треугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол 30°, а сторона основания равна $4\sqrt{3}$. Найдите S^2, где S — площадь боковой поверхности пирамиды.

21.69.

а) Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см, а высота — 9 см.	б) Найдите объем правильного тетраэдра, ребро которого равно a.
в) Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а боковые ребра взаимно перпендикулярны.	г) В правильную треугольную пирамиду вписана правильная треугольная пирамида так, что ее вершина совпадает с центром основания данной пирамиды, а вершинами основания служат середины боковых ребер. Какую часть объема исходной пирамиды составляет вписанная пирамида?

21.70.

а) Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды, если ребро основания равно $6\sqrt{3}$.	б) Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а ее диагональное сечение — равносторонний треугольник. Найдите объем пирамиды.
в) Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°, а площадь диагонального сечения равна S.	г) Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна a. Боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол α. Найдите объем пирамиды.

21.71.

а) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12 см, а апофема — 15 см. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.	б) Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 8 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
в) Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к основанию пирамиды под углом 60°, а сторона основания равна 4. Найдите площадь сечения, проведенного через диагональ основания и вершину пирамиды.	г) В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно 20 см и составляет с основанием угол 45°. Определите расстояние от центра основания до боковой грани.

21.72.

а) Вычислите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна 8 см, а апофема — 12 см.	б) Боковое ребро правильной пирамиды вдвое больше ее высоты. Определите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.
в) Вычислите площадь боковой поверхности правильной пятиугольной пирамиды, если известно, что ее боковое ребро, равное a, со стороной основания составляет угол 60°.	г) Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, если сторона ее основания равна 2 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°.

21.73.

а) Основание пирамиды — треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Найдите площадь сечения, проходящего параллельно плоскости основания и делящего высоту пирамиды в отношении $1:2$, считая от вершины пирамиды.	б) Основание пирамиды — треугольник со сторонами 6 см, 25 см и 29 см. Найдите площадь сечения, проходящего параллельно плоскости основания и делящего высоту пирамиды в отношении $1:3$, считая от вершины пирамиды.
в) Боковые ребра пирамиды равны гипотенузе прямоугольного треугольника, лежащего в основании, и равны 12 см. Вычислите высоту пирамиды.	г) Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и равны 4, 6, 11. Найдите объем пирамиды.

21.74.

а) В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна S; каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол 45°. Угол между диагоналями основания равен 60°. Найдите высоту пирамиды.	б) Основание пирамиды — квадрат со стороной 9 см, а две смежные боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если среднее по длине боковое ребро пирамиды равно 15 см.
в) В основании пирамиды лежит ромб. Боковые грани пирамиды образуют с основанием равные углы. Площадь одной из боковых граней равна Q. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.	г) Площадь боковой поверхности пирамиды, в основании которой лежит трапеция, равна $2Q$. Боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания равные углы. Найдите сумму площадей боковых граней, проходящих через боковые стороны трапеции.

21.75.

а) Вычислите объем пирамиды, основанием которой является прямоугольник со сторонами 6 см и 10 см, а высота пирамиды равна 15 см.	б) Вычислите объем пирамиды, основанием которой является ромб с диагоналями 10 см и 18 см, а высота пирамиды равна 15 см.
в) Вычислите объем пирамиды, основанием которой является параллелограмм со сторонами 4 см и $5\sqrt{2}$ см и углом 45° между ними, а высота пирамиды равна 9 см.	г) В основании пирамиды лежит параллелограмм. Какую часть объема пирамиды отсекают четыре плоскости, проходящие через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания?

21.76.

а) Основание усеченной пирамиды — прямоугольник со сторонами 27 см и 15 см. Найдите стороны другого основания, если его периметр равен 56 см.	б) Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 4 см и 2 см, высота пирамиды — 3 см. Вычислите площадь диагонального сечения данной усеченной пирамиды.
в) Дана правильная усеченная треугольная пирамида со сторонами оснований $9\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$; длина бокового ребра — $4\sqrt{3}$. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.	г) Дана правильная усеченная треугольная пирамида, у которой сторона меньшего основания равна 3, боковое ребро — 8, а высота — 4. Найдите длину большего основания.

21.77.

а) Высота цилиндра равна 8 см, радиус основания — 5 см. На расстоянии 4 см от оси цилиндра параллельно ей проведена плоскость. Найдите площадь сечения, образовавшегося при этом.	б) Высота цилиндра равна 7 см, радиус основания — 13 см. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, площадь которого равна 70 см^2. На каком расстоянии от оси проведено сечение?
в) Параллельно оси цилиндра, радиус основания которого равен 8 см, проведена плоскость, пересекающая основание цилиндра по хорде, стягивающей дугу, градусная мера которой 120°. Найдите площадь сечения, если его диагональ равна 16 см.	г) Внутри цилиндра с высотой 12 расположен прямоугольник со сторонами $\sqrt{11}$ и 13, две вершины которого расположены на окружности нижнего основания, а две — на окружности верхнего. Найдите радиус основания цилиндра.

21.78.

а) Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра, высота которого равна 14 см, а радиус основания — 4 см.	б) Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра, осевым сечением которого является квадрат со стороной 8 см.
в) Развертка боковой поверхности цилиндра — квадрат площадью 76π. Найдите площадь основания.	г) Площадь полной поверхности цилиндра равна 15. Найдите площадь его боковой поверхности, если осевым сечением цилиндра является квадрат.

21.79.

а) Вычислите объем цилиндра, радиус основания которого равен 7 см, а образующая — 5 см.	б) Чему равна высота цилиндра, объем которого составляет 24π см^3, а радиус основания равен 2 см?
в) Объем цилиндра равен 12 см^3. Чему будет равен его объем, если радиус основания увеличить в 2 раза?	г) Разверткой боковой поверхности цилиндра с высотой 2 является прямоугольник, одна из сторон которого равна 14π. Найдите объем цилиндра.

21.80.

а) Радиус основания конуса равен 14. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите площадь сечения.	б) Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник со стороной 5. Найдите высоту конуса.
в) Радиус основания конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения — 120°. Найдите образующую конуса.	г) Развертка боковой поверхности конуса представляет собой полукруг. Найдите величину угла при вершине осевого сечения конуса.

21.81.

а) Вычислите площадь боковой поверхности конуса, радиус основания которого равен 3 см, а образующая в 3 раза больше радиуса.	б) Высота конуса равна диаметру его основания и равна 12. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
в) Площадь основания конуса 4π. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если его высота в 1,5 раза больше радиуса.	г) Высота конуса — решение уравнения $x^2-3=0$, а осевым сечением является равносторонний треугольник. Найдите площадь полной поверхности конуса.

21.82.

а) Высота конуса равна 9 см, а его объем — 6π см^3. Чему равна площадь основания конуса?	б) Площадь полной поверхности конуса равна 200π см^2, а его образующая — 17 см. Найдите объем конуса.
в) Металлический цилиндр с площадью основания 4 переплавлен в конус, высота которого в 6 раз меньше высоты цилиндра. Найдите площадь основания конуса.	г) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна l, а один из острых углов равен α. Найдите объем конуса, образованного при вращении этого треугольника вокруг катета, противолежащего данному углу.

21.83.

а) Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите радиус шара.	б) Радиус круга, полученного при сечении шара плоскостью, вдвое меньше радиуса шара. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения, если радиус шара равен R.
в) Найдите отношение площадей поверхностей двух сфер, радиусы которых равны 5 см и 10 см.	г) В шаре на расстоянии 12 см от его центра проведено сечение, площадь которого равна 64π см^2. Найдите площадь поверхности шара.

21.84.

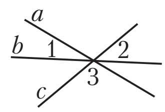
а) Объем первого шара в 27 раз больше объема второго шара. Чему равен радиус первого шара, если радиус второго шара равен 1 см?	б) Радиус одного шара в 2 раза больше радиуса другого шара. Чему равен объем шара большего радиуса, если объем шара меньшего радиуса равен 1 см^3?
в) Радиус круга, полученного при сечении шара плоскостью, вдвое меньше радиуса шара. Найдите объем шара, если площадь сечения равна $9\sqrt[3]{\pi}$.	г) Шар пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии $\dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$. Найдите площадь сечения, если объем шара равен $\dfrac{4000}{3\sqrt{\pi}}$.

21.85.

а) Объем шара, вписанного в цилиндр, равен 30. Вычислите объем цилиндра.	б) Высота конуса равна 8, а образующая — 10. Определите радиус вписанного шара.
в) Образующие конуса касаются вписанного шара по параллели 60°. Найдите объем конуса, если радиус шара равен 2.	г) Около шара описан усеченный конус, у которого площадь одного основания в 4 раза больше площади другого основания. Найдите косинус угла между образующей конуса и его большим основанием.

ГЕОМЕТРИЯ (ЧАСТЬ B)

22.1.

а) Градусные меры смежных углов относятся как $4:5$. Вычислите градусные меры этих углов и укажите модуль их разности.	б) Определите градусную меру угла, который равен $\frac{3}{7}$ своего смежного.
в) Три прямые a, b и c пересекаются в одной точке (см. рис.). Вычислите градусную меру $\angle 1+\angle 2+\angle 3$. 	г) Найдите градусную меру угла между биссектрисами двух смежных углов.

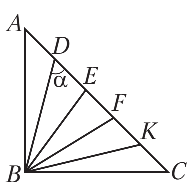
22.2.

а) В треугольнике ABC на сторонах AC и BC взяты соответственно точки E и D так, что $AE:EC=2:3$, а $BD:DC=4:3$. Отрезки AD и BE пересекаются в точке O. Найдите отношение $\frac{AO}{OD}$.	б) В треугольнике ABC на сторонах AC и BC взяты соответственно точки E и D так, что $AE:EC=2:3$, а $BD:DC=4:3$. Отрезки AD и BE пересекаются в точке O. Найдите отношение $\frac{BO}{OE}$.
в) В треугольнике ABC на сторонах AC и BC взяты соответственно точки E и D так, что $AE:EC=2:3$. Отрезки AD и BE пересекаются в точке O, причем $AO:OD=2:1$. Найдите отношение $\frac{BD}{DC}$.	г) В треугольнике ABC на сторонах AC и BC взяты соответственно точки E и D так, что $AE:EC=k:l$, а $BD:DC=m:n$. Отрезки AD и BE пересекаются в точке O. Найдите отношение $\frac{AO}{OD}$.

22.3.

а) В равнобедренном треугольнике ABC точка N лежит на высоте, проведенной к основанию, и делит ее в отношении $1:3$, считая от основания. Через вершины основания C и B и точку N проведены прямые CD и BE ($D\in AB$; $E\in AC$). Найдите площадь треугольника ABC, если площадь трапеции $CEDB$ равна 64.	б) В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D такая, что $AD:BD=1:3$, а на отрезке CD выбрана точка K такая, что $CK:KD=3:1$. Прямая BK пересекает сторону AC в точке E. Найдите площадь ΔCBE, если $S_{\Delta ABE}=16$.
в) Вычислите площадь общей части двух ромбов, из которых у первого длины диагоналей равны 2 и 3, а второй получен поворотом первого на 90° вокруг точки пересечения его диагоналей.	г) Точки M, N, K расположены соответственно на сторонах AB, AC, BC треугольника ABC так, что $AM:MB=1:4$, $AN:NC=2:3$, $CK:KB=3:2$. Отрезки AK и MN пересекаются в точке L. Во сколько раз LK больше AL?

22.4.

а) Треугольник ABC, изображенный на рисунке, — прямоугольный равнобедренный. Отрезки BD, BE, BF и BK делят прямой угол треугольника на 5 равных углов. Какова градусная мера угла α? 	б) В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Найдите градусные меры углов этого треугольника, если известно, что $AB=BB_1=B_1C$.
в) Найдите сумму внутренних углов выпуклого десятиугольника.	г) Найдите градусные меры углов выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 2, 4. В ответе укажите разность между наибольшим и наименьшим значениями.

22.5.

а) Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 100°. Вычислите градусную меру внутреннего угла при вершине.	б) В равнобокой трапеции острый угол при нижнем основании равен 60°, длина боковой стороны равна 10. Длина отрезка, соединяющего вершину верхнего основания с серединой нижнего основания, также равна 10. Вычислите периметр трапеции.
в) Медиана, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, образует с основанием угол 45°. Найдите тангенс угла при основании треугольника.	г) Найдите градусную меру угла при вершине равнобедренного треугольника, если противолежащий основанию угол между медианами, проведенными к его боковым сторонам, равен 60°.

22.6.

а) Найдите периметр треугольника ABC, если $\angle A:\angle B:\angle C = 1:2:3$ и $AB+BC=72$ см.	б) Параллелограмм с периметром 44 разделен диагоналями на четыре треугольника. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 6. Определите длины сторон параллелограмма и укажите их произведение.
в) В треугольнике ABC точки D, E и F — соответственно середины сторон AB, BC и AC. $AB:BC:AC=3:6:4$, а периметр треугольника DEF равен 10,4 м. Найдите длины сторон треугольника ABC.	г) В треугольнике ABC точки D, E и F — соответственно середины сторон AB, BC и AC. $AB:BC:AC=4:3:5$, а периметр треугольника ABC равен 60 см. Найдите длины сторон треугольника DEF.

22.7.

а) Точки M и P — соответственно середины сторон BC и CD ромба $ABCD$. Вычислите длину отрезка MP, если угол BAD равен 60°, а сторона ромба равна 24.	б) Большее основание трапеции равно 96. Найдите длину меньшего основания трапеции, если расстояние между серединами ее диагоналей равно 16.
в) Найдите отношение оснований трапеции, если известно, что ее средняя линия делится диагоналями на 3 равные части.	г) Вычислите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$, если прямые BC и AD перпендикулярны и длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 19 м.

22.8.

а) Серединный перпендикуляр к стороне MN треугольника MNK пересекает сторону MK в точке C. Найдите длину отрезка CK, если $MK=17$ см, $CN=10$ см.	б) К сторонам AB и AC треугольника ABC восстановлены серединные перпендикуляры, пересекающиеся в точке O; $AO=20$ дм, $\angle OBC=30°$. Найдите расстояние от точки O до стороны BC.
в) К сторонам AC и BC треугольника ABC восстановлены серединные перпендикуляры, пересекающиеся в точке O; $AB=20$ м, $\angle AOB=120°$. Найдите длину отрезка OC.	г) К сторонам AB и AC треугольника ABC восстановлены серединные перпендикуляры, пересекающиеся в точке O; $AO=16$ дм, $\angle OBC=60°$. Найдите площадь треугольника OBC.

22.9.

а) Биссектрисы углов M и N треугольника MKN пересекаются в точке O. Найдите градусную меру угла MON, если $\angle MKO=40°$.	б) Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке O; $\angle AOB=128°$. Найдите градусную меру $\angle OCA$.
в) В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O; $BC=20$ см, а расстояние от точки O до стороны AB равно 8 см. Найдите площадь треугольника BOC.	г) В треугольнике MEF биссектрисы углов M и F пересекаются в точке O; $EO=8$ м, $\angle MEF=60°$. Найдите расстояние от точки O до стороны MF.

22.10.

а) Медианы EF и MK треугольника ENM перпендикулярны и пересекаются в точке O, $EF=12$ см, $MK=9$ см. Найдите длину стороны EM.	б) Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 18, точка M — середина AB. Отрезки AC и DM пересекаются в точке K. Найдите длины отрезков AK и KC.
в) Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. В каком отношении делит медиану, выходящую из вершины B, прямая, проходящая через C и середину отрезка AM?	г) Медианы EF и MK треугольника ENM перпендикулярны и пересекаются в точке O; $EF=18$ см, $MK=15$ см. Найдите длину отрезка ON.

22.11.

а) Площадь треугольника равна 12. Три медианы разбили его на шесть треугольников. Найдите произведение площадей этих шести треугольников.	б) Две медианы треугольника перпендикулярны и имеют длины 9 м и 12 м. Найдите площадь треугольника.
в) В квадрате $ABCD$ со стороной 1 точки H и P — середины сторон DC и AD соответственно. Отрезки AH и CP пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника CHM.	г) Основание треугольника равно 20 см, медианы боковых сторон равны 24 см и 18 см. Вычислите площадь треугольника.

22.12.

а) Длины сторон треугольника равны соответственно 11 см, 12 см и 13 см. Найдите длину медианы, проведенной к большей стороне.	б) В треугольнике со сторонами 5, 6 и 8 найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до вершины, противолежащей большей стороне.
в) Вычислите площадь треугольника со сторонами 3 см и 5 см и медианой, проведенной к третьей стороне, равной 2 см.	г) Точка A движется по периметру треугольника KMN. Точки K_1, M_1, N_1 лежат на медианах треугольника KMN и делят их в отношении $1:5$, считая от вершин. По периметру треугольника $K_1M_1N_1$ движется точка B со скоростью, в три раза большей скорости точки A. Сколько раз точка B обойдет по периметру треугольник $K_1M_1N_1$ за то время, за которое точка A пять раз обойдет по периметру треугольник KMN?

22.13.

а) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке O; $\angle ABC = 66°$. Найдите градусную меру $\angle BCO$.	б) В треугольнике один угол 50°, а другой 60°. Найдите острый угол между высотами, проведенными из вершин этих углов.
в) В равнобедренном треугольнике MCN $MC = NC = 20$ м, $MN = 24$ м. Найдите расстояние от точки пересечения медиан до точки пересечения высот треугольника.	г) В треугольнике KMP проведены высоты KF и MR, пересекающиеся в точке O. Оказалось, что $OK = 8$ дм, $OF = 6$ дм, $FP = 8$ дм. Найдите расстояние от точки O до стороны KM.

22.14.

а) Докажите, что прямая, проходящая через основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него подобный треугольник.	б) В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Оказалось, что $A_1B_1 = 13$, $A_1C_1 = 5$, а $B_1C_1 = 12$. Найдите градусную меру угла ACB.
в) В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.	г) В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Вычислите длину стороны AC, если известно, что периметр треугольника ABC равен 15, периметр треугольника BPQ равен 9, а радиус окружности, описанной около треугольника BPQ, равен 1,8.

22.15.

а) В треугольнике ABC точка O — центр вписанной окружности. Найдите величину угла AOB, если угол ACB равен γ.	б) Вычислите градусные меры углов треугольника, если известно, что две его стороны видны из центра вписанной окружности под углами 102° и 126°.
в) Угол B треугольника ABC равен 60°, радиус окружности, описанной около ABC, равен 2. Вычислите радиус окружности, проходящей через точки A и C и центр окружности, вписанной в ABC.	г) Биссектриса угла A треугольника ABC ($\angle C = 90°$) делит катет BC на отрезки длиной 6 см и 10 см. Вычислите радиус окружности, проходящей через точки A, C и точку пересечения данной биссектрисы с катетом BC.

22.16.

а) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины A прямого угла проведены медиана AD, биссектриса AK и высота AH. Оказалось, что $DK = 4$ и $KH = 3$. Найдите площадь треугольника ABC.	б) Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника с острым углом в 15° и большим катетом, равным $\sqrt{3}$, разделила гипотенузу на две части. Найдите длину большей из этих частей.
в) Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.	г) Дан треугольник ABC со сторонами a, b и c. Найдите отношение отрезков, на которые точка пересечения биссектрис данного треугольника делит биссектрису AA_1, считая от вершины A.

22.17.

а) Вычислите длину биссектрисы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла, если известно, что острый угол треугольника равен 30°, а меньший катет равен 1.	б) В треугольнике ABC $\angle BAC = 120°$, $AB = 3$, $AC = 5$. Найдите длину биссектрисы BD и длины отрезков AD и CD. В ответе укажите наибольшее из найденных значений.
в) В равнобедренном треугольнике с основанием $\sqrt{2}$ проведена биссектриса угла при основании, величина которого 30°. Найдите длину биссектрисы.	г) Катеты прямоугольного треугольника равны 18 см и 24 см. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведенной из вершины меньшего острого угла.

22.18.

а) Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, а медиана, проведенная к нему, — 5 см. Вычислите длину гипотенузы треугольника.	б) Длины сторон треугольника пропорциональны числам 5, 12, 13. Наибольшая сторона треугольника превосходит наименьшую на 1,6 м. Вычислите площадь треугольника.
в) Точка A удалена от плоскости α на 12 см. Из этой точки проведена к плоскости α наклонная AB длиной 13 см. Найдите длину проекции наклонной AB на плоскость α.	г) В шаре с центром O проведено сечение с центром O_1 на расстоянии 12 см от центра шара. Найдите радиус шара, если радиус сечения равен 9 см.

22.19.

а) В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) высота $AE = 12$, основание $AC = 15$. Найдите площадь треугольника.	б) Периметр ромба равен 48 см, сумма длин диагоналей — 26 см. Найдите площадь ромба.
в) Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 3 см, а катет равен 10 см.	г) В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с окружностью делит один из катетов на отрезки 6 см и 10 см. Найдите площадь треугольника.

22.20.

а) В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найдите сумму длин катетов треугольника.	б) Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника соответственно равны 2 см и 5 см. Вычислите длины катетов треугольника и укажите в ответе их произведение.
в) В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 см и 6 см. Найдите радиус каждого круга.	г) В прямоугольном треугольнике длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найдите синус меньшего угла треугольника.

22.21.

а) В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Найдите длину стороны AC, если $AA_1 = 4$, $BB_1 = 5$, $BC = 6$.	б) Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.
в) В треугольнике ABC проведены высоты CD и AE. Известно, что $CD = 7$, $AE = 6$, а точка E делит сторону BC так, что $BE : EC = 3 : 4$. Найдите длину стороны AB.	г) Сфера, радиус которой 10, проходит через вершины A и S правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ и делит ребро SC в отношении $1 : 7$, считая от вершины S. Найдите длину высоты SH пирамиды, если ее боковое ребро равно 20.

22.22.

а) Треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AB, CD — высота данного треугольника, $\angle ACD = 30°$, $AC = 3$ см. Какова длина отрезка AB?	б) Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего катета равна 26,4 м. Найдите периметр треугольника.
в) В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность с радиусом, равным 2. Найдите длину стороны ромба.	г) Из точки, не лежащей в плоскости α, проведена к этой плоскости наклонная, образующая с этой плоскостью угол 30°. Найдите длину наклонной, если ее проекция на плоскость равна 6.

22.23.

а) На основании BC равнобедренного треугольника ABC взята точка D так, что $BD : DC = 11 : 7$. Радиус окружности, описанной около треугольника ABD, равен R. Вычислите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ACD.	б) Две стороны треугольника равны 4 и 6, а высота, проведенная из их общей вершины, равна 2. Найдите радиус описанной окружности.
в) В окружность радиуса 5 м вписан треугольник ABC, у которого $AB = 5$ м, а высота $BD = 4$ м. Найдите длину стороны BC.	г) В треугольнике ABC $BC = 13$, $AC = 10$, расстояние от центра описанной окружности до стороны AC равно 12. Найдите градусную меру $\angle A$.

22.24.

а) Дан квадрат со стороной 1. Вычислите длину радиуса окружности, проходящей через одну из вершин квадрата, середину одной из сторон, не содержащих этой вершины, и центр квадрата.	б) Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите радиус окружности, проходящей через вершины острых углов этого треугольника и середину большего катета.
в) Окружность радиуса 10 м описана около равнобедренного треугольника с боковой стороной $8\sqrt{5}$ м. Найдите площадь треугольника.	г) Центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки длиной 13 м и 5 м, считая от вершины. Найдите площадь треугольника.

22.25.

а) Найдите косинус угла между медианами, проведенными к катетам равнобедренного прямоугольного треугольника.	б) В треугольнике ABC известны стороны $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 6$. На стороне AB взята точка M так, что $BM = 2AM$, а на стороне BC взята точка K так, что $3BK = 2KC$. Найдите длину отрезка MK.
в) В треугольнике со сторонами 3, 4 и 6 проведена медиана к большей стороне. Определите косинус угла, образованного медианой с меньшей стороной треугольника.	г) Две стороны треугольника равны 3 и 4, площадь равна $3\sqrt{3}$. Какой может быть длина третьей стороны такого треугольника?

22.26.

а) В треугольнике с углом 120° длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найдите длины всех сторон треугольника, если наибольшая из них равна 7 см. В ответе укажите разность прогрессии.	б) Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 1. Косинус среднего по величине угла этого треугольника равен $\frac{2}{3}$. Найдите периметр этого треугольника.
в) В треугольнике ABC величины углов A, B, C составляют арифметическую прогрессию. Наименьшая сторона в 4 раза меньше наибольшей. Найдите косинус наименьшего угла.	г) Один из углов треугольника равен 60°, противоположная сторона равна 4; один из отрезков, на которые эта сторона разделена опущенной на нее биссектрисой, равен 1. Найдите длины двух оставшихся сторон треугольника.

22.27.

а) В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB, точка N — на стороне AC. Через точки M, N, B, C проходит окружность радиусом $\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка AM, если $AM : MB = 2 : 1$, $\angle BAC = 30°$, $BC = 3$.	б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{3}$.
в) Дан угол величиной 60° с вершиной в точке O. В плоскости этого угла взята точка A, лежащая внутри угла и отстоящая от его сторон на расстоянии 1 м и 2 м. Найдите длину отрезка AO.	г) Отрезок BM — медиана треугольника ABC, $BM = m$, $\angle ABM = \alpha$, $\angle MBC = \beta$. Найдите длину стороны AB.

22.28.

а) Пусть M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$, N — точка на стороне AD такая, что $AN = 2ND$. В каком отношении отрезок MN делит диагональ AC?	б) В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) основания равны 12 и 27 см, а $\angle BAC = \angle CDA$. Найдите длину диагонали AC.
в) Площадь трапеции равна 3, основания — 1 и 2. Найдите площади четырех треугольников, на которые трапеция разделена диагоналями.	г) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите длину отрезка KC, если $AK = 6$, а $BC = 4$.

22.29.

а) В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Большая диагональ составляет с меньшей боковой стороной угол 60°. Найдите длину средней линии трапеции, если длина меньшей диагонали равна 6.	б) Биссектриса острого угла равнобедренной трапеции делит боковую сторону длиной 13 в отношении 26 : 11, считая от большего основания. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 2.

в) В трапеции $ABCD$ точка N делит боковую сторону CD в отношении $2:3$ ($3CN = 2ND$). Прямая AN пересекает диагональ BD в точке K. Найдите отношение площади треугольника KND к площади трапеции $ABCD$, если $3BC = AD$.	г) В параллелограмме $ABCD$ точка N делит сторону CD в отношении $1:2$ ($2CN = ND$). Прямая AN пересекает диагональ BD в точке K. Найдите отношение площади треугольника KND к площади параллелограмма $ABCD$.

22.30.

а) Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на две равновеликие (равные по площади) части. В каком отношении она делит боковые стороны?	б) Треугольник ABC разбит на три равновеликие части прямыми, параллельными стороне AC. Вычислите, на какие части разбили эти прямые сторону AB, равную $\sqrt{3}$.
в) Сторона треугольника делится высотой на отрезки 36 и 14. Перпендикулярно этой стороне проведена прямая, которая делит треугольник на две части, равные по площади. Найдите длины отрезков, на которые прямая делит эту сторону. В ответе укажите длину большего из них.	г) Высота треугольника равна 4. Она делит основание на две части, относящиеся как 1 к 8. Найдите длину отрезка, параллельного высоте и делящего треугольник на равновеликие части.

22.31.

а) В прямоугольный треугольник с катетами 6 и 5 см вписан квадрат так, что он имеет с треугольником общий прямой угол. Вычислите длину стороны квадрата.	б) В равнобедренный треугольник, основание которого равно 2 м, а высота равна 3 м, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие — на боковых сторонах. Найдите площадь квадрата.
в) Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 см и 40 см. Вычислите длины катетов треугольника и укажите наибольшую из них.	г) В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Найдите длину стороны AC, если $A_1C = 8$, $B_1C = 5$, $BB_1 = 12$.

22.32.

а) Найдите площадь прямоугольного треугольника, один катет которого равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12.	б) В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки длиной 9 и 16. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.
в) На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K. Найдите площадь треугольника BCK, если $BC = a$, $AC = b$.	г) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B проведена высота BP. Найдите косинус угла A, если $AB = PC$.

22.33.

а) В произвольном четырехугольнике $ABCD$ отметили точки K, L, M, N — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA. Отрезки KM и LN пересекаются в точке O. Найдите отношение отрезков KO и OM.	б) Четырехугольник таков, что отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, равны. Найдите градусную меру угла между диагоналями такого четырехугольника.
в) Четырехугольник таков, что отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, перпендикулярны, а одна из диагоналей равна d. Найдите длину его второй диагонали.	г) В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны 1 м и 2 м. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

22.34.

а) Стороны параллелограмма равны a и b. Найдите сумму квадратов его диагоналей.	б) Стороны параллелограмма равны 11 дм и 12 дм, а одна из диагоналей — 13 дм. Найдите длину второй диагонали.
в) Диагонали параллелограмма равны 9 и $\sqrt{23}$, а одна из сторон — 4. Найдите длину другой стороны параллелограмма.	г) В параллелограмме $ABCD$ отношение сторон и отношение диагоналей одинаковы и равны 2. Из вершины тупого угла A опущена высота AE на большую сторону CD. Найдите отношение длины отрезка DE к длине отрезка CE.

22.35.

а) Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Вычислите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 10 см.	б) Биссектриса угла B прямоугольника $ABCD$ делит сторону AD в отношении $2:3$, считая от вершины A. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 10 см.
в) Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K так, что $BK = 4$, $CK = 2$. Найдите площадь параллелограмма, если величина угла A равна $30°$.	г) В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

22.36.

а) На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $BE = CD$. Чему равен угол ABE, если $\angle C = \alpha$?	б) Вычислите длину диагонали и боковой стороны равнобокой трапеции с основаниями 20 см и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции. В ответе укажите их сумму.
в) Найдите площадь равнобокой трапеции, у которой основания равны 12 см и 20 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.	г) В равнобедренной трапеции диагональ составляет угол $30°$ с основанием, а высота равна 2. Найдите длину средней линии трапеции.

22.37.

а) Найдите длину большего основания прямоугольной трапеции, если ее боковые стороны равны 3 см и 5 см, а одна из диагоналей равна одной из боковых сторон.	б) Найдите длину меньшего основания прямоугольной трапеции, если ее большее основание равно 13, меньшая боковая сторона равна 12, а диагонали перпендикулярны.
в) Найдите длину меньшего основания прямоугольной трапеции, если ее меньшая боковая сторона равна 5 см, большая диагональ — 13 см, а площадь трапеции – 50 см^2.	г) Найдите длину большей боковой стороны прямоугольной трапеции, если основания равны 5 дм и 17 дм, а площадь трапеции — 55 дм^2.

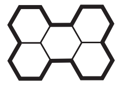
22.38.

а) Острые углы трапеции равны $60°$ и $30°$. Вычислите длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а меньшее основание — 8 см.	б) Длина средней линии трапеции равна 5 см, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3 см. Углы при большем основании трапеции равны $30°$ и $60°$. Найдите площадь трапеции.
в) Сумма острых углов трапеции равна $90°$, высота равна 2 см, а основания равны 14 см и 10 см. Вычислите длины боковых сторон трапеции.	г) Средняя линия трапеции равна 12,5, а разность оснований — 13. Найдите площадь трапеции, если ее боковые стороны равны 15 и 14.

22.39.

а) Найдите сумму длин диагоналей равнобедренной трапеции, у которой основания равны $2\sqrt{2}$ см и $5\sqrt{2}$ см, а диагонали взаимно перпендикулярны.	б) В равнобокой трапеции длина средней линии равна 5 см, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.
в) Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4. Найдите площадь трапеции, если известно, что длина одной из ее диагоналей равна 5.	г) Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 7 см и 8 см, а основания — 3 см и 6 см.

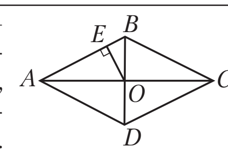
22.40.

а) Пять правильных шестиугольников расположены так, как показано на рисунке. Длина окружности, описанной около одного из шестиугольников, равна 12π см. Чему равна длина выделенной ломаной? 	б) $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, $AC = 22$ см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот шестиугольник.
в) Радиус окружности, описанной вокруг правильного шестиугольника, равен $5\sqrt{3}$. Найдите длину меньшей диагонали.	г) Докажите, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри правильного многоугольника, до всех прямых, содержащих его стороны, есть величина постоянная. Найдите эту величину для правильного пятиугольника со стороной a.

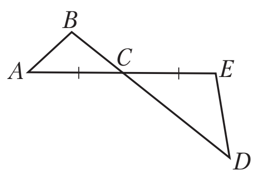
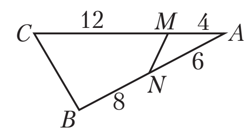
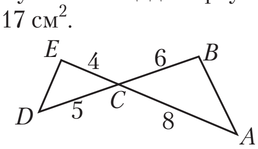
22.41.

а) Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 32. Найдите площадь параллелограмма, если высота BH, проведенная к стороне AD, равна 1, а градусная мера угла A равна 30°.	б) Площадь параллелограмма составляет 32, а высоты равны 4 и 5,(3). Найдите периметр параллелограмма.
в) В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высота BH и отрезок BK, где K — середина стороны AD. Найдите площадь параллелограмма, если $BH=4$, $BK=4\sqrt{5}$, $AB=4\sqrt{2}$.	г) Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены высоты BK и BH к сторонам AD и CD соответственно. Найдите площадь параллелограмма, если $\angle KBH=60°$, $BK:BH=1:2$ и $AD=8$.

22.42.

а) В ромб площадью 1 вписан круг, площадь которого равна 0,5. Определите длину стороны ромба.	б) Найдите площадь ромба, высота которого равна $\sqrt{10}$, а одна его диагональ больше другой в $\frac{5}{4}$ раза.
в) Диагонали ромба относятся как $9:5$, а его высота равна $\sqrt{15}$. Найдите площадь ромба.	г) В ромбе $ABCD$ точка O — точка пересечения диагоналей (см. рис.), $OE\perp AB$, $AC:BD=3:2$, а площадь треугольника AOE равна 27 см^2. Найдите площадь ромба. 

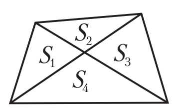
22.43.

а) Треугольники ABC и CDE расположены так, как показано на рисунке. Известно, что $AC=CE$, $CD=2BC$, а площадь треугольника CDE равна 9 м^2. Найдите площадь треугольника ABC. 	б) В изображенном на рисунке треугольнике ABC точка N принадлежит стороне AB, точка M принадлежит стороне AC, длины отрезков на рисунке даны в метрах. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника AMN равна 9 м^2. 
в) Треугольники ABC и CDE расположены так, как показано на рисунке, длины отрезков на рисунке даны в сантиметрах. Найдите площадь треугольника ABC, если сумма площадей треугольников ABC и CDE равна 17 см^2. 	г) В прямоугольном треугольнике ABC имеем: $\angle A=\alpha$, $AB=a$. Из вершины прямого угла B опущена высота BE. В треугольнике BEA проведена медиана ED. Найдите площадь треугольника AED.

22.44.

а) Длины сторон треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Найдите площадь треугольника.	б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AC=14$, медиана $AK=9$, а отрезок $BK=7$.
в) Вычислите площадь параллелограмма, если длина одной из его сторон равна 48, а диагонали равны 58 и 70.	г) Одна из сторон параллелограмма равна диагонали и равна 4. Найдите площадь параллелограмма, если вторая диагональ равна $\sqrt{34}$.

22.45.

а) Диагонали делят произвольный четырехугольник на треугольники площадью S_1, S_2, S_3, S_4 (см. рис.). Известно, что $S_1\cdot S_3=A$. Вычислите произведение $S_2\cdot S_4$. 	б) В трапеции $ABCD$ ($AB\parallel CD$) диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников ABO и CDO равны S_1 и S_2 соответственно. Найдите площадь треугольника BOC.
в) В параллелограмме $ABCD$ точки M и K — середины сторон BC и CD соответственно. Площадь треугольника AMK равна 1. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.	г) Площадь трапеции делится диагональю в отношении $3:7$. В каком отношении она делится средней линией, считая от меньшего основания?

22.46.

а) В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что отношение площади треугольника ABD к площади треугольника CBD равно $\frac{5}{7}$. Найдите отношение $\frac{AD}{DC}$.	б) Длины сторон треугольника относятся как $9:10:9$. Соединив середины его сторон, получили треугольник площадью $90\sqrt{14}$. Найдите периметр исходного треугольника.
в) На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки K, L, M так, что $AK = 2KB$, $2BL = 3LC$, $3CM = 4MA$. Площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площади треугольников AKM, BKL, CLM, KLM.	г) Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите площадь треугольника с вершинами в основаниях биссектрис данного треугольника.

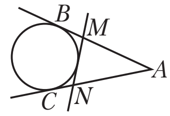
22.47.

а) В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагональ AC является биссектрисой угла A. Известно, что $\angle B = 120°$, $CD = 10$. Найдите площадь трапеции.	б) $ABCD$ — равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 40$ и $BC = 8$; $\angle ABD = 90°$. Найдите площадь трапеции.
в) Найдите площадь равнобокой трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60°.	г) В равнобокой трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) заданы $AC = a$, $\angle CAD = \alpha$. Найдите площадь трапеции.

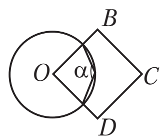
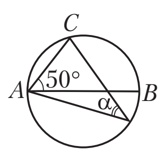
22.48.

а) Найдите площадь трапеции, основания которой равны 1 и 2, а углы, прилежащие к большему основанию, равны 30° и 60°.	б) Сумма длин оснований прямоугольной трапеции 25, а их разность 13. Найдите площадь трапеции, если разность длин ее боковых сторон равна 1.
в) Средняя линия трапеции равна 10 см и делит трапецию на части, площади которых относятся как $3:5$. Вычислите длины оснований этой трапеции и укажите их произведение.	г) Точка пересечения биссектрис острых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию. Найдите площадь трапеции, если ее боковые стороны равны 17 см и 25 см, а высота — 15 см.

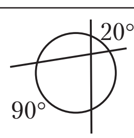
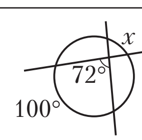
22.49.

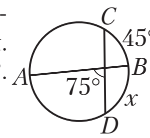
а) В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB, BC и AC соответственно в точках E, M и F. Найдите периметр треугольника ABC, если $AE = 4$ м, $BM = 10$ м, $CF = 6$ м.	б) Прямые AB, AC и MN являются касательными к окружности. Найдите длины отрезков AB и AC, если периметр треугольника AMN равен 48 см. 
в) К окружности радиуса 10 м проведены две взаимно перпендикулярные касательные MA и MB. Третья касательная пересекает отрезки MA и MB соответственно в точках E и F. Найдите периметр треугольника MEF.	г) В треугольник вписана окружность. Касательные к окружности отсекают от его углов три треугольника. Чему равна сумма периметров отсеченных треугольников, если периметр исходного треугольника равен P?

22.50.

а) На рисунке изображены окружность с центром O и квадрат $OBCD$. Чему равна градусная мера угла α? 	б) Отрезок AB — диаметр окружности, изображенной на рисунке, $\angle BAC = 50°$. Чему равна градусная мера угла α? 
в) Вычислите градусную меру угла между касательными, проведенными к окружности из одной точки, если расстояние от этой точки до центра окружности равно двум радиусам.	г) Пусть AB и AC — касательные к окружности радиуса 10 с центром в точке O. Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка OO_1.

22.51.

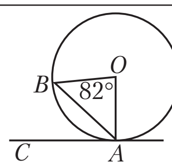
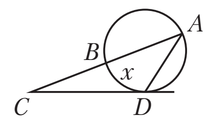
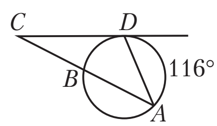
а) Две прямые пересекаются в точке, лежащей внутри окружности (см. рис.). Величины отсекаемых дуг указаны на рисунке. Вычислите градусную меру угла между прямыми. 	б) Две прямые, угол между которыми равен 72°, пересекаются в точке, лежащей внутри окружности (см. рис.). Величина одной из отсекаемых дуг равна 100°. Найдите величину дуги x. 

в) Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются под углом 75° (см. рис.). Величина дуги BC равна 45°. Найдите величину дуги x. 	г) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Найдите градусную меру острого угла между диагоналями AC и BD, если $\angle A = 70°$, $\angle D = 80°$, $\angle ABD = 50°$.

22.52.

а) Вершина угла лежит вне окружности, а стороны пересекают окружность, отсекая дуги величиной 32° и 98°. Вычислите градусную меру угла.	б) Вершина угла величиной 38° лежит вне окружности, а стороны пересекают окружность, высекая дуги, большая из которых имеет величину 126°. Найдите величину меньшей из высекаемых дуг.
в) К окружности проведены две касательные. Угол между радиусами, проведенными в точки касания, равен 140°. Найдите градусную меру угла между касательными.	г) Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке M, а прямые AB и CD пересекаются в точке N. Известно, что $\angle AMD = 108°$, $\angle AND = 24°$. Найдите градусные меры $\angle ABD$ и $\angle BDC$.

22.53.

а) AB — хорда окружности с центром O, AC — касательная к окружности (см. рис.); $\angle AOB = 82°$. Вычислите градусную меру $\angle BAC$. 	б) Прямая касается окружности в точке D, продолжение диаметра AB пересекает касательную в точке C; $\angle ADC = 130°$. Найдите величину дуги x. 
в) Прямая касается окружности в точке D, продолжение диаметра AB пересекает касательную в точке C; величина дуги AD равна 116°. Вычислите градусную меру $\angle CDA$. 	г) Окружность проходит через вершину C прямоугольника $ABCD$ и касается его сторон AB и AD в точках M и N соответственно. Найдите площадь прямоугольника, если расстояние от точки C до прямой MN равно x.

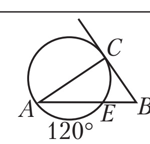
22.54.

а) Хорда окружности пересекает диаметр под углом 30° и делит его на два отрезка 2 и 6. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.	б) Хорда AB окружности, радиус которой 6, имеет длину 6. На прямой AB взята точка N так, что расстояние от нее до центра окружности равно 14. Найдите расстояние от точки N до середины хорды AB.
в) В окружность радиусом 10 см вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Длины диагоналей 12 и $10\sqrt{3}$ см. Найдите длину большей стороны четырехугольника.	г) Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найдите длину хорды, если центры окружностей лежат по одну сторону от хорды, а расстояние между центрами равно $9\left(\sqrt{3}-1\right)$.

22.55.

а) В треугольнике ABC известны стороны $AB = 2$, $BC = 4$, $CA = 3$. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает прямую AC в точке M, а прямую AB — в точке N. Известно, что $AM = 1$, $CM = 4$. Найдите длины отрезков AN и NM.	б) Точка M отстоит от центра окружности на 7 и делит хорду AB на отрезки 9 и 8. Найдите длину радиуса окружности.
в) Пусть M — точка внутри окружности радиуса R, расположенная на расстоянии a от центра окружности, AB — произвольная хорда, проходящая через M. Чему равно произведение $AM \cdot BM$?	г) Около треугольника со сторонами 5, 6 и 7 описана окружность. Найдите длину хорды этой окружности, отличной от стороны треугольника, проходящей через одну его вершину и делящей пополам среднюю по длине сторону треугольника.

22.56.

а) Из точки, расположенной вне окружности, проведены касательная и секущая. Длина отрезка касательной равна 6. Секущая высекает на окружности хорду длиной 5. Найдите длину отрезка секущей, расположенного вне окружности.	б) Из точки B к окружности радиуса $\sqrt{3}$ проведены касательная BC и секущая BA (см. рис.), причем отрезок AC является диаметром окружности. Величина дуги AE равна 120°. Найдите длину отрезка BE. 

в) Продолжение общей хорды AB двух окружностей пересекает их общую касательную MN в точке K. Найдите расстояние MN между точками касания, если $KA=3$, $AB=9$.	г) В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) на стороне AB как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите длину боковой стороны треугольника, если $BN=7$, а $MC=3$.

22.57.

а) В сектор AOB с радиусом R и углом 90° вписана окружность, касающаяся отрезков OA, OB и дуги AB. Найдите радиус окружности.	б) В сектор круга, дуга которого содержит 60°, вписан круг. Найдите отношение площади этого круга к площади сектора.
в) Через концы дуги окружности радиуса R, содержащей 120°, проведены касательные, и в фигуру, ограниченную этими касательными и данной дугой, вписана окружность. Найдите длину этой окружности.	г) Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности. Величина угла OAK равна $\frac{\pi}{3}$. Вычислите длину радиуса окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

22.58.

а) Прямая a — общая внешняя касательная двух окружностей, радиусы которых равны 3 см и 8 см, а расстояние между их центрами — 13 см. Найдите расстояние между точками касания прямой a с данными окружностями.	б) Две окружности с радиусами $R=3$ см и $r=1$ см касаются внешним образом. Найдите расстояние от точки касания окружностей до их общей внешней касательной.
в) Окружность с радиусом 13 касается двух смежных сторон квадрата со стороной 18. Определите длины отрезков, на которые окружность делит каждую из двух других сторон квадрата, и в ответе укажите модуль их разности.	г) Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 м и 23 м. Найдите радиус окружности.

22.59.

а) Найдите радиусы двух окружностей, имеющих общий центр, если диаметр большей окружности делится меньшей окружностью на 3 части, равные 9 м, 12 м, 9 м. В ответе укажите сумму длин найденных радиусов.	б) Вокруг клумбы, имеющей форму круга, проложена дорожка. Вычислите площадь дорожки, если радиус клумбы равен 2,5 м, а ширина дорожки — 0,5 м.
в) В круге радиуса 6 по одну сторону от центра проведены две параллельные хорды, одна из которых стягивает дугу в 120°, а другая — в 60°. Найдите площадь части круга, заключенной между хордами.	г) Дан прямоугольный треугольник с гипотенузой 2 и острым углом 30°. Найдите площадь общей части двух кругов, проходящих через вершину прямого угла с центрами в вершинах острых углов треугольника.

22.60.

а) Вычислите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник, если его стороны равны 2, 3 и 4.	б) В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB=8$, а боковая сторона $BC=5$. Из центра O вписанной в треугольник окружности восстановлен перпендикуляр OK к плоскости ABC. Найдите расстояние от точки K до прямой AB, если $OK=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
в) В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность радиуса 10 см. Найдите площадь четырехугольника, если $AB+DC=48$ см.	г) В четырехугольник, длины трех последовательных сторон которого равны соответственно 2, 3 и 4, вписана окружность с радиусом 1,2. Найдите площадь этого четырехугольника.

22.61.

а) Стороны треугольника равны 5 м, 5 м и 8 м. Найдите длину радиуса описанной окружности.	б) Стороны треугольника равны 2, 3 и 4. Найдите длину радиуса окружности, проходящей через концы большей стороны и середину меньшей стороны.
в) Вокруг равнобедренного треугольника с основанием 48 см описана окружность радиуса 25 см. Найдите длину боковой стороны треугольника.	г) В треугольнике ABC $AB=4$, $AC=5$, а радиус окружности, описанной около треугольника, равен $\sqrt{8}$. Найдите большую возможную площадь треугольника, удовлетворяющего условию задачи.

22.62.

а) В ромбе сторона равна 6 см, а один из углов — 60°. Вычислите длину радиуса окружности, касающейся двух сторон и меньшей диагонали ромба.	б) Как относятся площади вписанного и описанного около равностороннего треугольника кругов?
в) Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна 3. Найдите длину стороны квадрата, вписанного в эту окружность.	г) В окружность, радиус которой 4 м, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Найдите длину радиуса окружности, описанной около квадрата.

22.63.

а) В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а боковая сторона равна 10 см. Вычислите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.	б) В треугольнике ABC точка O — центр вписанной окружности. Найдите длину радиуса окружности, описанной около этого треугольника, если $AO = 6$ см, $BO = 10$ см, $\angle C = 60°$.
в) В треугольнике ABC точка O — центр вписанной окружности. Найдите длину радиуса окружности, описанной около этого треугольника, если $BO = 2\sqrt{3}$ см, $CO = 3$ см, $\angle A = 120°$.	г) В равнобедренный треугольник с углом α при основании вписана окружность радиусом r. Найдите радиус R окружности, описанной около треугольника.

22.64.

а) Около окружности описана равнобокая трапеция с основаниями 5 и 3. Найдите длину радиуса окружности.	б) Около окружности радиуса 1 описана равнобокая трапеция с боковой стороной, равной 3. Найдите площадь трапеции.
в) В равнобокую трапецию, одно из оснований которой равно 4, вписана окружность радиуса 1. Найдите площадь этой трапеции.	г) В равнобокую трапецию вписана окружность с радиусом 49. Верхнее основание трапеции в два раза меньше ее высоты. Вычислите площадь трапеции.

22.65.

а) В трапецию вписана окружность радиуса R. Под каким углом видны из центра этой окружности боковые стороны трапеции? В ответе укажите произведение длин отрезков боковой стороны, на которые она разделена точкой касания с вписанной окружностью.	б) Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию $ABCD$, отстоит от концов боковой стороны CD на 3 см и 4 см. Найдите радиус R этой окружности и укажите в ответе $10R$.
в) Центр окружности, вписанной в равнобокую трапецию $ABCD$, отстоит от концов боковой стороны CD на 12 м и 16 м. Найдите площадь трапеции.	г) Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию $ABCD$, отстоит от концов боковой стороны CD на 6 м и 8 м. Найдите площадь трапеции.

22.66.

а) В ромб со стороной 4 м вписана окружность радиуса 1 м. Вычислите градусную меру острого угла ромба.	б) В ромб с периметром 80 м и диагональю, равной 32 м, вписана окружность. Найдите длину ее радиуса.
в) К окружности радиуса $\sqrt{3}$ проведены 4 касательные, образующие ромб, большая диагональ которого равна $4\sqrt{3}$. Найдите длину второй диагонали и длину стороны ромба. В ответе укажите их сумму.	г) Окружность радиуса 6 вписана в ромб $ABCD$ и касается стороны AD в точке K, причем $AK = 3$. Найдите площадь ромба.

22.67.

а) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность; $\angle A = 53°$, $\angle D = 75°$. Вычислите градусные меры $\angle B$ и $\angle C$.	б) В четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle ADC = 96°$, $\angle BAC = 54°$, $\angle ACB = 42°$. Найдите градусную меру угла BDC.
в) Через вершины B и C треугольника ABC проходит окружность, пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках K и M. Докажите, что треугольники ABC и AMK подобны. Найдите длины отрезков MK и AM, если $AB = 2$, $BC = 4$, $AC = 5$, $AK = 1$.	г) Найдите длину радиуса описанной около трапеции окружности, если основания трапеции равны 12 м и 16 м, а высота — 2 м.

22.68.

а) В правильном тетраэдре высота грани равна 3 см. Найдите площадь его полной поверхности.	б) Найдите расстояние от вершины верхнего основания куба до центра нижнего основания, если диагональ грани куба равна $2\sqrt{2}$.
в) Найдите косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания правильного тетраэдра.	г) Ребро правильного октаэдра равно 6 см. Найдите расстояние между двумя его противоположными вершинами.

22.69.

а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. На ребре A_1B_1 взята точка M так, что $A_1M = 15$, $MB_1 = 9$. На ребре DD_1 взята точка K так, что $DK:KD_1 = 2:1$. Через точку M провели прямую l, которая пересекает прямую, проходящую через точку K и середину ребра AD. Найдите длину отрезка PD, где P — точка пересечения прямой l и прямой CD.	б) $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны 30. Точки P и K — середины ребер AA_1 и B_1C_1 соответственно, $M \in BC$, $MB:BC = 1:3$. Найдите длину отрезка, по которому плоскость, проходящая через точки M, P, K, пересекает грань AA_1B_1B.
в) $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны $18\sqrt{6}$. Точка T лежит на медиане B_1K основания $A_1B_1C_1$ призмы так, что $B_1T:TK = 5:1$, M — середина ребра AB, точка N лежит на продолжении ребра AA_1, $NA_1:NA = 1:3$. Найдите длину отрезка, по которому плоскость, проходящая через точки M, N, T, пересекает грань $A_1B_1C_1$.	г) $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны $24\sqrt{5}$. Точка T — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, M — середина ребра B_1C_1, точка N лежит на продолжении ребра BB_1, $NB_1:NB = 3:2$. Найдите длину отрезка, по которому плоскость, проходящая через точки M, N, T, пересекает грань ABC.

22.70.

а) Основанием правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат со стороной 12. Высота призмы равна 16. Точки M и N лежат на боковых ребрах AA_1 и CC_1 соответственно и делят их в отношении $1:3$, считая от основания $ABCD$. Через точки M, B_1, N проведена плоскость. Найдите площадь S сечения призмы плоскостью MB_1N. В ответ запишите значение выражения $S:\sqrt{3}$.	б) Через середины боковых ребер AA_1, CC_1 и вершину B_1 правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость. Найдите площадь S сечения призмы этой плоскостью, если высота призмы равна 14, а длина ребра основания — 12. В ответ запишите значение выражения $S:\sqrt{2}$.
в) Ребра AB, BC, BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ попарно перпендикулярны и равны по $10\sqrt{2}$. Найдите площадь S сечения призмы плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BB_1 и B_1C_1. В ответ запишите значение выражения $S:\sqrt{3}$.	г) Ребра AB, BC, BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ попарно перпендикулярны и равны по $4\sqrt{2}$. Найдите площадь S сечения призмы плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AA_1 и BC. В ответ запишите значение выражения $S\cdot\sqrt{3}$.

22.71.

а) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 21, синус угла наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\frac{4\sqrt{3}}{7}$. Через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная противолежащему боковому ребру. Найдите площадь образовавшегося сечения.	б) В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна $\sqrt{6}$, а каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом, равным $\arccos\frac{1}{4}$. Через диагональ основания параллельно боковому ребру проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения пирамиды этой плоскостью.
в) В прямой треугольной призме $BCEB_1C_1E_1$ угол BCE равен $90°$. Секущая плоскость проходит через середины ребер BC и CC_1 параллельно высоте CO треугольника BCE. Известно, что $BC = CE = CC_1 = 2$. Найдите значение выражения $4\sqrt{3}\cdot S$, где S — площадь полученного сечения призмы.	г) В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ угол ABC равен $90°$. Секущая плоскость проходит через середины ребер AB и BB_1 параллельно высоте BO треугольника ABC. Известно, что $AB = BC = BB_1 = 6$. Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\cdot S$, где S — площадь полученного сечения призмы.

22.72.

а) Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно 6, тангенс угла при основании треугольника равен 0,75. Найдите объем призмы, если площадь ее боковой поверхности равна сумме площадей ее верхнего и нижнего оснований. В ответ запишите объем четырех таких призм.	б) Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой 14 и острым углом, синус которого равен $\frac{1}{7}$. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\frac{4\sqrt{3}}{7}$. Найдите площадь образовавшегося сечения.
в) Основание прямой призмы — ромб с острым углом α. Площадь диагонального сечения призмы, проходящего через большую диагональ основания, равна S. Найдите площадь боковой поверхности призмы.	г) Основание прямой призмы — ромб с большей диагональю d и острым углом α. Через меньшую диагональ нижнего основания и вершину острого угла верхнего основания проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол γ. Найдите объем призмы.

22.73.

а) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна $8\sqrt{2}$ см, а боковое ребро — 3 см. Через диагональ BD нижнего основания и середину стороны B_1C_1 верхнего основания проведена плоскость. Найдите площадь сечения.	б) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6, боковое ребро — 4. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A, B и середину ребра B_1C_1.
в) Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол, тангенс которого равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Найдите тангенс угла, который диагональ образует с плоскостью основания.	г) Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны a.

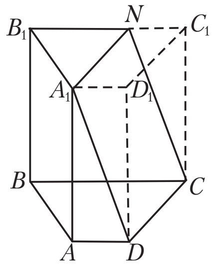
22.74.

а) В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Плоскость грани AA_1C_1C перпендикулярна к плоскости основания. Определите вид четырехугольника CC_1B_1B.	б) В наклонной треугольной призме с боковым ребром, равным 10 см, площади двух граней равны 70 см^2 и 150 см^2, угол между ними — 60°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
в) Перпендикулярное сечение канала — трапеция с основаниями 6 м и 14 м. Участок канала между шлюзами длиной 2 км вмещает 6×10^4 м^3 воды. Определите глубину канала.	г) Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около данной призмы.

22.75.

а) Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной a и углом 60°. Чему равен объем параллелепипеда, если диагональ его боковой грани наклонена к плоскости основания под углом 30°?	б) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площади его диагональных сечений равны 3 и $\sqrt{7}$.
в) Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной a и острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.	г) Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с плоскостью одной боковой грани угол α, а с другой — угол β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

***22.76.**

а) В основании прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, у которой $\angle C = 90°$, BC и AD — основания, $BC = CC_1$. Плоскость, которая проходит через ребро DC и вершину A_1 призмы, образует угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$ с плоскостью основания (см. рис.) и отсекает часть $NC_1CA_1D_1D$ объемом 27. Найдите объем призмы. 	б) $SABCD$ — четырехугольная пирамида, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$. Точки M, N, K, P — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно, а точка T — середина отрезка MN. Плоскостями STP, STK, SKP пирамиду $SABCD$ разрезали на части. Найдите объем пирамиды $SABCD$, если объем пирамиды $STKP$ равен 13.
в) Объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 2160. Точка P лежит на боковом ребре CC_1 так, что $CP : PC_1 = 2 : 1$. Через точку P, вершину D и середину бокового ребра AA_1 проведена секущая плоскость, которая делит прямоугольный параллелепипед на две части. Найдите объем меньшей из частей.	г) Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 9. Через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований проведена плоскость. Найдите значение выражения $5N$, где N — число, показывающее, в каком отношении проведенная плоскость делит объем пирамиды, если известно, что $N > 1$.

***22.77.**

а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, объем которого равен 1240. Точка M лежит на ребре AD так, что $AM : MD = 2 : 1$. Отрезки D_1M и A_1D пересекаются в точке K. Найдите объем пирамиды SA_1KD_1, если $S \in B_1D$ и $B_1S : SD = 2 : 3$.	б) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма, объем которой равен 936. Основанием призмы является параллелограмм $ABCD$. Точки M и N принадлежат ребрам A_1D_1 и C_1D_1 так, что $A_1M : MD_1 = 2 : 1$, $D_1N : NC_1 = 2 : 1$. Отрезки A_1N и B_1M пересекаются в точке K. Найдите объем пирамиды SB_1KNC_1, если $S \in B_1D$ и $B_1S : SD = 3 : 1$.
в) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, площадь основания которого равна 42. Точка N лежит на ребре AD так, что $AN : ND = 1 : 2$. Точка M — середина ребра AB. Отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Найдите объем пирамиды B_1CDNK, если $CC_1 = 12$.	в) Точка M лежит на диагонали AC основания прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что $AM : MC = 3 : 2$, а точка N — на ребре CC_1, $CN : NC_1 = 2 : 1$. Площадь треугольника AKM, где K — точка пересечения отрезков A_1M и AN, равна 45. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AB = 7$, $BC = 24$.

22.78.

а) Найдите площадь полной поверхности и расстояние между противоположными ребрами правильного тетраэдра, ребро которого равно a.	б) Ребро правильного тетраэдра $DABC$ равно a. Найдите площадь его сечения, проходящего через ребро DC и середину ребра AB.
в) Через сторону основания правильной треугольной пирамиды и середину высоты проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол α. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна H.	г) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, синус угла наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная противолежащему боковому ребру. Найдите площадь образовавшегося сечения.

22.79.

а) Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см, а диагональное сечение является прямоугольным треугольником.	б) Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 2. Найдите объем этой пирамиды.
в) Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом α. Отрезок, соединяющий середину высоты пирамиды и середину апофемы, равен a. Найдите объем пирамиды.	г) В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при ребре основания равен α. Найдите объем пирамиды, если ее боковое ребро равно l.

22.80.

а) Две взаимно перпендикулярные грани треугольной пирамиды — равносторонние треугольники со стороной 4. Найдите объем пирамиды.	б) Длина одного ребра треугольной пирамиды равна $\sqrt{2}$, а длина каждого из оставшихся равна $\sqrt{6}$. Найдите величину $2\sqrt{3}V$, где V — объем пирамиды.
в) Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной 6 см. Одна боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 45°. Найдите объем пирамиды.	г) Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α при основании. Боковая грань пирамиды, содержащая основание этого треугольника, перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом β. Найдите объем пирамиды.

22.81.

а) Боковое ребро пирамиды, основанием которой является квадрат со стороной 6, перпендикулярно плоскости основания. Площадь сечения, проходящего через диагональ основания и ребро, перпендикулярное основанию, равна $8\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды.	б) Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 3 и 7 и одной из диагоналей, равной 6. Высота пирамиды равна 4, ее основанием является точка пересечения диагоналей параллелограмма, лежащего в основании. Найдите боковые ребра пирамиды.
в) Основание пирамиды $MABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Боковая грань AMB перпендикулярна плоскости основания, грани AMD и BMC наклонены к плоскости основания под углом α, а грань CMD — под углом β. Найдите объем пирамиды, если $AB = 2a$.	г) Основание пирамиды $MABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Боковая грань CMD перпендикулярна плоскости основания, грани AMD и BMC наклонены к плоскости основания под углом α, а грань AMB — под углом β. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна H.

22.82.

а) Основанием четырехугольной пирамиды является прямоугольник с диагональю $2\sqrt{3}$ и углом 30° между диагоналями. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем пирамиды V. В ответ запишите величину $V\sqrt{3}$.	б) Основание пирамиды — прямоугольник, площадь которого равна $\sqrt{27}$. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы по 45°. Угол между диагоналями основания равен 60°. Найдите объем пирамиды.
в) Основание пирамиды — прямоугольный треугольник. Боковые ребра пирамиды равны. Боковые грани, проходящие через катеты, составляют с плоскостью основания углы 30° и 60°. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 3.	г) Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого основание равно 6, а высота — 9. Найдите высоту пирамиды, если все ее боковые ребра равны 13.

22.83.

а) В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой $c = 5$ и острым углом $\alpha = 60°$. Каждая из боковых граней пирамиды наклонена к плоскости основания под углом $\beta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{8}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.	б) Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами длиной 5, 6 и 5. Боковые грани пирамиды образуют с ее основанием равные двугранные углы по 45°. Найдите объем пирамиды.
в) Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 7, 8. Боковые грани пирамиды образуют с ее основанием равные двугранные углы по 30°. Найдите $\sqrt{3}V$, где V — объем пирамиды.	г) Основание пирамиды — ромб со стороной a и углом α. Все двугранные углы при ребрах основания равны β. Найдите объем пирамиды.

22.84.

а) Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 8 и 2, а высота — 4.	б) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 14 и 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 30°.
в) Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно 5, а площади оснований — 72 и 18. Найдите объем усеченной пирамиды.	г) В пирамиде с площадью основания 72 и высотой 8 проведено сечение плоскостью, параллельной основанию. Площадь меньшего основания образовавшейся усеченной пирамиды равна 18. Найдите объем усеченной пирамиды.

22.85.

а) Пирамида, объем которой равен 200 см^3, пересечена плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды и параллельной основанию. Найдите объем усеченной пирамиды.	б) Площади оснований усеченной пирамиды относятся как 9 : 16. Найдите отношение объемов отсеченной верхней части и усеченной пирамиды.
в) Площади оснований усеченной пирамиды относятся как 9 : 4. Найдите отношение объемов достроенной полной и усеченной пирамид.	г) Найдите объем выпуклого многогранника, вершинами которого являются середины всех ребер треугольной пирамиды объема V.

22.86.

а) Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC, длины которых 15 см и 20 см соответственно. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если проекции наклонных на эту плоскость относятся как 9 : 16.	б) Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC, образующие с плоскостью углы по $30°$. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если $\angle BAC = 90°$, а длина отрезка BC равна 8 см.
в) Из точки F к плоскости прямоугольника $ABCD$ проведен перпендикуляр AF длиной 9. Расстояние от точки F до прямой BC равно 15, $\angle CBD = 60°$. Найдите расстояние от точки F до прямой BD.	г) Из точки A, отстоящей от плоскости на расстоянии $2\sqrt{3}$, проведена наклонная под углом $60°$ к плоскости. В этой же плоскости через основание наклонной проведена прямая l под углом $60°$ к проекции наклонной. Найдите расстояние от точки A до прямой l.

22.87.

а) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь основания равна 16 см^2. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и B_1D.	б) В пирамиде $SABC$ грань SAB перпендикулярна грани ABC, ABC — правильный треугольник со стороной a, SAB — правильный треугольник. Найдите расстояние между прямыми SC и AB.
в) В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 117, а боковое ребро — $2\sqrt{13}$. Найдите расстояние между стороной основания и диагональю призмы, не пересекающейся с ней.	г) Докажите, что объем произвольной треугольной пирамиды $SABC$ равен $\frac{1}{6} \cdot AB \cdot SC \cdot d \cdot \sin\varphi$, где d — расстояние между прямыми AB и SC, а φ — угол между ними.

22.88.

а) Вычислите градусную меру угла между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба.	б) Вычислите градусную меру угла между диагональю куба и непересекающейся с ней диагональю грани куба.
в) Все плоские углы при вершине S правильной треугольной пирамиды $SABC$ прямые. Найдите тангенс угла между прямыми SC и AD, где точка D — середина ребра BC.	г) В правильном тетраэдре $SABC$ прямая DO проходит через точку D — середину ребра SC и точку O — точку пересечения медиан треугольника ABC. Точка F — середина ребра SA. Найдите косинус угла между прямыми DO и BF.

22.89.

а) Через гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол $45°$. Вычислите градусные меры углов, которые образуют катеты треугольника с этой плоскостью.	б) Через сторону правильного треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол $30°$. Найдите синусы углов, которые образуют две другие стороны треугольника с этой плоскостью.
в) Точка M удалена от плоскости треугольника ABC на расстояние, равное 12, и находится на одинаковом расстоянии от его вершин. Найдите тангенс угла между прямой MA и плоскостью ABC, если $AC = CB = 8$, $\angle ACB = 120°$.	г) Точка E принадлежит ребру AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и $AE = 6BE$. Найдите значение выражения $4\sqrt{22} \cdot \sin\alpha$, где α — угол между прямой C_1E и плоскостью AA_1C_1C.

22.90.

а) Через сторону правильного треугольника проведена плоскость, образующая с двумя другими сторонами треугольника углы по $45°$. Вычислите синус угла между плоскостью треугольника и проведенной плоскостью.	б) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой $AB = 2$ см, $AA_1 = 1$ см. Найдите градусную меру угла между плоскостями AB_1C и ABC.

в) Все ребра правильной треугольной призмы равны между собой. Найдите градусную меру угла между плоскостью основания этой призмы и плоскостью, проходящей через противоположные вершины боковой грани и середину противолежащего этой грани бокового ребра.	г) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Найдите косинус угла между плоскостями AB_1D_1 и A_1C_1D.

***22.91.**

а) В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник со сторонами 1 и 5. Боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания пирамиды и равно $2\sqrt{6}$. Найдите значение выражения $\frac{2}{\cos\alpha}$, где α — линейный угол двугранного угла при боковом ребре SD.	б) Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12, а ребро основания — 20. Точки M и K принадлежат ребрам AB и AC так, что $AM:MB=2:3$, $AK:KC=3:1$. Найдите значение выражения $5\sqrt{3}\cdot tg\alpha$, где α — линейный угол двугранного угла C_1KMB.
в) $SABC$ — пирамида, в которой $SA=SB=SC=6$, $AB=2$, $BC=3$, $AC=4$. Найдите значение выражения $12\sqrt{30}\cdot\cos\alpha$, где α — линейный угол двугранного угла при боковом ребре SC.	г) $SABC$ — пирамида, в которой $SA=SC$, $SB=2\cdot AC$, $AB=BC=\frac{3}{2}\cdot AC$. Через ребро AC и середину D ребра SB проведена плоскость. Площадь полной поверхности пирамиды $SACD$ больше площади полной поверхности пирамиды $ABCD$ на величину, равную площади треугольника ABC. Найдите значение выражения $12\cos\alpha$, где α — угол между плоскостями SAC и ABC.

22.92.

а) Площадь осевого сечения цилиндра относится к площади его основания как $3:\pi$. Во сколько раз площадь полной поверхности цилиндра больше площади его основания?	б) Диагональ прямоугольника равна d и образует с его большей стороной угол α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, образованного вращением данного прямоугольника вокруг его меньшей стороны.
в) Хорда нижнего основания цилиндра видна из центра этого основания под углом α. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой данной хорды, наклонен к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания равен R.	г) В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которую видно из центра этого основания под углом 120°, а из центра верхнего основания — под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если длина хорды составляет 6 см.

22.93.

а) Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°, образующая равна 9. Найдите площадь боковой поверхности конуса.	б) Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, дуга которого равна 60°, а радиус равен b. Определите площадь боковой поверхности конуса.
в) Образующая конуса 6 дм, а угол развертки его боковой поверхности равен 120°. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.	г) Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение, образующее с плоскостью основания конуса угол β. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если его высота равна H.

22.94.

а) Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами a и b вокруг его гипотенузы.	б) Найдите объем конуса, разверткой боковой поверхности которого является полукруг радиусом R.
в) Высота конуса равна 20 см, а расстояние от центра его основания до образующей — 12 см. Найдите объем конуса.	г) Площадь осевого сечения конуса равна 28, а площадь его основания — $\frac{49}{\pi}$. Найдите объем конуса.

22.95.

а) Прямоугольная трапеция с основаниями 1 и 3 и площадью 24 вращается вокруг своей меньшей боковой стороны. Найдите объем полученного при вращении тела.	б) Найдите длину радиуса основания цилиндра, объем которого равен объему усеченного конуса той же высоты с радиусами оснований 2 и 11.

в) Конус и усеченный конус имеют равные высоты и равные объемы. Найдите длину радиуса основания конуса, если радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 5.	г) Конус и усеченный конус имеют равные высоты и равные объемы. Радиус основания конуса равен 21, а радиус большего основания усеченного конуса равен 15. Найдите длину радиуса меньшего основания усеченного конуса.

22.96.

а) Объем шара равен 686. Найдите объем другого шара, у которого площадь поверхности в 49 раз меньше, чем у данного шара.	б) Через конец радиуса шара проведено сечение, образующее с этим радиусом угол 30°. Найдите площадь поверхности шара, если площадь сечения равна 36π см^2.
в) Длина линии пересечения сферы и плоскости, удаленной от ее центра на 12 см, равна 10π см. Найдите площадь сферы.	г) Найдите радиус шара, объем которого равен объему тела, образованного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы, длина которой равна $2a$.

22.97.

а) Радиусы оснований цилиндра и конуса равны, высота цилиндра равна 8 см, а конуса — 6 см. Найдите отношение объема цилиндра к объему конуса.	б) В конус вписан цилиндр — основание цилиндра лежит на основании конуса, а другое основание цилиндра совпадает с сечением конуса плоскостью. Радиус основания цилиндра в два раза меньше радиуса основания конуса. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.
в) Свинцовый конус, высота которого равна h, переплавлен в цилиндр с тем же основанием. Какую часть высоты конуса составляет высота получившегося цилиндра?	г) Осевым сечением цилиндра является квадрат, а осевым сечением конуса — правильный треугольник, равновеликий квадрату. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.

***22.98.**

а) В конус вписан шар. Площадь поверхности шара относится к площади основания конуса как $4:3$. Определите градусную меру угла при вершине осевого сечения конуса.	б) Центр сферы совпадает с центром основания конуса, а ее радиус равен радиусу основания конуса. Найдите длину радиуса окружности, по которой сфера пересекает коническую поверхность, если высота конуса равна $10\sqrt{3}$, а угол при вершине осевого сечения — 60°.
в) Найдите объем шара, вписанного в усеченный конус, образующая которого равна 10 см и образует угол величиной 45° с плоскостью основания.	г) Найдите объем шара, описанного около усеченного конуса, у которого радиус меньшего основания в 5 раз меньше радиуса большего основания, образующая равна $2\sqrt{5}$ и составляет с основанием угол $\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$.

***22.99.**

а) В цилиндрический сосуд, радиус основания которого $R = 4$ см, помещен шар радиуса 3 см. В сосуд наливается вода так, что свободная поверхность ее касается поверхности шара и шар при этом не всплывает. Определите высоту того слоя воды, который получится, если шар из сосуда вынуть.	б) В шар вписан цилиндр, осевое сечение которого — квадрат. В каком отношении делят поверхность шара основания цилиндра?
в) В шар радиуса R вписан цилиндр радиуса r. Найдите объем цилиндра.	г) Найдите отношение объемов цилиндра и конуса, вписанных в один и тот же шар, если высота и цилиндра, и конуса равна радиусу шара.

***22.100.**

а) В основании правильной треугольной призмы лежит правильный треугольник со стороной 6. Найдите объем этой призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.	б) В прямой параллелепипед вписана сфера, площадь поверхности которой равна 16π. Найдите объем параллелепипеда, если одна из сторон основания равна 5.

в) В полушар радиуса $R=\sqrt{\frac{3}{2}}$ вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на сферической поверхности. Найдите объем куба.	г) Внутри куба с ребром a расположены два равных касающихся между собой шара. При этом один шар касается трех граней куба, имеющих общую вершину, а другой касается трех оставшихся граней куба. Найдите длины радиусов этих шаров.

***22.101.**

а) В конус вписана пирамида $SABCD$, основанием которой служит трапеция $ABCD$. Угол BAD равен $45°$, основание $BC=a$, высота трапеции равна a, высота пирамиды SO равна $a\sqrt{10}$. Найдите длину образующей конуса, если $a=3\sqrt{2}$.	б) В конус вписана пирамида $SABCD$, основанием которой служит трапеция $ABCD$. Угол BAD равен $30°$, основания $BC=a$, $AD=4a$, образующая конуса равна $4a$. Найдите длину высоты пирамиды, если $a=7$.
в) В конус вписана пирамида $SABCD$, основанием которой служит трапеция $ABCD$. Угол BAD равен $60°$, основания $BC=3a$, $AD=8a$, высота пирамиды SO равна $\frac{a}{7}$. Найдите объем конуса, если $a=\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$.	г) В треугольную пирамиду вписан конус, площадь основания которого равна π. Найдите объем пирамиды, если площадь боковой поверхности пирамиды равна $7\sqrt{10}$, а периметр основания равен 14.

***22.102.**

а) Около правильного тетраэдра описан шар и в него вписан шар. Чему равны радиусы этих шаров, если известно, что ребро тетраэдра равно a?	б) Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 2. Найдите длины радиусов вписанного шара и описанного шара.
в) В правильную четырехугольную пирамиду с высотой 3 и стороной основания $2\sqrt{3}$ вписан шар. Параллельно основанию пирамиды проведена плоскость, касающаяся шара. В образовавшуюся пирамиду вписан другой шар. Найдите его радиус r и запишите в ответ $6r$.	г) В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник. Одна из боковых граней представляет собой такой же треугольник, при этом она перпендикулярна плоскости основания. Найдите длину радиуса описанного около пирамиды шара, если высота пирамиды равна $30\sqrt{5}$.

****22.103.**

а) Две правильные четырехугольные пирамиды, все ребра которых равны $2\left(\sqrt{2}+1\right)$, соединены основаниями так, что получился правильный восьмигранник. В этот восьмигранник вписали куб, все вершины которого находятся на ребрах восьмигранника. Найдите площадь поверхности куба.	б) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{3}$, тангенс угла наклона бокового ребра к плоскости основания равен 1,5. В пирамиду вписан куб так, что грань куба лежит в плоскости основания пирамиды. На одной боковой грани пирамиды лежат две вершины куба, на двух других боковых гранях — по одной. Найдите длину ребра куба a. В ответ запишите $a\left(12+3\sqrt{3}\right)$.
в) В треугольную пирамиду вписан шар, через центр которого проведена плоскость, параллельная основанию пирамиды и отсекающая от нее пирамиду, длины всех ребер которой равны $9\sqrt{6}$. Найдите радиус шара.	г) Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб со стороной $2\sqrt{3}$ и углом BAD, равным $\arccos\frac{3}{4}$. Ребро SD перпендикулярно основанию, а ребро SB образует с основанием угол $60°$. Найдите радиус R сферы, проходящей через точки A, B, C и середину ребра SB. В ответ запишите R^2.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 1

Часть А

Задания	Варианты ответов
А1. Сумма чисел a и b, отличных от нуля, равна их произведению. Чему равно значение выражения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$?	1) $a+b$; 2) 0; 3) 1; 4) ab; 5) $\frac{1}{ab}$. А1 1 2 3 4 5
А2. Известно, что $x=18{,}9\pm0{,}6$. Как этот факт можно записать в виде двойного неравенства?	1) $18{,}2<x<19{,}6$; 2) $18{,}2\le x\le 19{,}6$; 3) $18{,}3<x<19{,}5$; 4) $18{,}3\le x\le 19{,}5$; 5) $18{,}3<x\le 19{,}5$. А2 1 2 3 4 5
А3. Две параллельные прямые пересечены третьей. Известно, что сумма двух внутренних накрест лежащих углов равна 150°. Найдите, чему равны эти углы и остальные шесть углов, образованных при пересечении прямых, и укажите разность между наибольшим из них и наименьшим.	1) 20°; 2) 35°; 3) 15°; 4) 25°; 5) 30°. А3 1 2 3 4 5
А4. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_{20}=\frac{4}{9}$, а $b_{21}=-\frac{1}{3}$.	1) $\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $-\frac{4}{3}$; 5) $-\frac{7}{9}$. А4 1 2 3 4 5
А5. Решениями какого из данных неравенств являются все действительные числа?	1) $0x>3$; 2) $0x>0$; 3) $0x>-3$; 4) $3x>0$; 5) $3x>3$. А5 1 2 3 4 5
А6. Какие из данных функций не являются степенными? 1) $y=2^x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^{\sin 1}$; 4) $y=\frac{1}{x}$; 5) $y=\sqrt{x}$.	1) 1; 2) 2; 3) 1, 3; 4) 1, 3, 5; 5) 1, 4, 5. А6 1 2 3 4 5
А7. Решением неравенства $\frac{1-x}{x+4}\ge 0$ является множество	1) $(-\infty;-1{,}5]$; 2) $[-1{,}5;+\infty)$; 3) $[0;+\infty)$; 4) $(-4;1]$; 5) $(-\infty;-4)\cup[1;+\infty)$. А7 1 2 3 4 5
А8. Разложите на множители $(a-1)(a+1)+b^2-2ab$ и вычислите значение получившегося выражения при $a=123$ и $b=-876$.	1) 1 000 000; 2) 999 000; 3) 998 000; 4) 99 800; 5) 999 990. А8 1 2 3 4 5
А9. В прямоугольной трапеции большая боковая сторона равна 13, большая диагональ — 18, один из углов трапеции равен 30°. Найдите синус угла между большей диагональю и большим основанием.	1) $\frac{5}{12}$; 2) $\frac{13}{27}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{13}{18}$; 5) $\frac{13}{36}$. А9 1 2 3 4 5

Задания	Варианты ответов
A10. Вычислите $2^{\log_4(1-\sqrt{3})^2}+\log_{1+\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)$.	1) $\sqrt{3}-2$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $2-\sqrt{3}$; 5) $1+\sqrt{3}$. A10 1 2 3 4 5
A11. Найдите сумму всех различных корней уравнения $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x+2}+3=0$.	1) $-\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{2}{3}$. A11 1 2 3 4 5
A12. Если $(x_0;y_0)$ — решение системы $\begin{cases}x(y^2-1)=9,\\ xy-xy^3=-18,\end{cases}$ то чему равно значение $\lvert x_0-y_0\rvert$?	1) 0; 2) 1; 3) 1,5; 4) 2; 5) 5. A12 1 2 3 4 5
A13. Для приготовления маринада необходим 2%-ный раствор уксуса. Сколько нужно добавить воды в 100 г 9%-ного раствора уксуса, чтобы получить раствор для маринада?	1) 450; 2) 400; 3) 375; 4) 350; 5) 300. A13 1 2 3 4 5
A14. Найдите сумму корней (корень, если он один) уравнения $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$.	1) -1; 2) 1; 3) 2; 4) 42; 5) 44. A14 1 2 3 4 5
A15. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB=12$ проведены медиана CF и высота CE, при этом $EF=3\sqrt{3}$. Найдите синус меньшего угла треугольника ABC.	1) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{6}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 5) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$. A15 1 2 3 4 5
A16. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{8}{17}\right)\right)$.	1) $\frac{15}{8}$; 2) $-\frac{15}{8}$; 3) $-\frac{15}{17}$; 4) $\frac{15}{17}$; 5) $-\frac{8}{15}$. A16 1 2 3 4 5
A17. В основании конуса проведена хорда длиной 12 см, которую видно из центра основания под углом 120°. Найдите объем конуса, если его образующая равна 8 см.	1) 64 см^3; 2) 72π см^3; 3) 64π см^3; 4) 32π см^3; 5) 56 см^3. A17 1 2 3 4 5
A18. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол γ. Найдите объем пирамиды.	1) $\frac{c^3\cos2\alpha\operatorname{tg}\gamma}{24}$; 2) $\frac{c^3\sin\alpha\operatorname{tg}\gamma}{24}$; 3) $\frac{c^3\sin2\alpha\operatorname{tg}\gamma}{24}$; 4) $\frac{c^3\sin2\alpha\operatorname{ctg}\gamma}{24}$; 5) $\frac{c^3\sin2\alpha\operatorname{tg}\gamma}{12}$. A18 1 2 3 4 5

Часть В

В1. Основание прямой призмы — ромб с острым углом 30°. Диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем призмы, если ее высота равна 6.

В1 □□□□□□□□□□□□□□□

В2. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки длиной 15 и 12. Найдите основания трапеции и запишите в ответе их произведение.

В2 □□□□□□□□□□□□□□□

В3. Прямая a — общая внешняя касательная двух окружностей, радиусы которых равны 3 и 8, а расстояние между их центрами — 13. Найдите расстояние между точками касания прямой a с данными окружностями.

В3 □□□□□□□□□□□□□□□

В4. Найдите сумму всех четных натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не кратных пяти.

В4 □□□□□□□□□□□□□□□

В5. Расстояние между двумя пунктами автомобиль должен был проехать за 4 ч. Первые 2 ч он ехал с намеченной скоростью, а затем снизил ее на 10 км/ч, поэтому в конечный пункт приехал на 20 мин позже, чем предполагал. Найдите первоначальную скорость автомобиля.

В5 □□□□□□□□□□□□□□□

В6. Найдите количество корней уравнения $\operatorname{tg} x \cos x = \sin x + \cos 3x$, принадлежащих промежутку $[-\pi;\pi]$.

В6 □□□□□□□□□□□□□□□

В7. Укажите сумму всех целых решений неравенства $4^{x^2-x}+2^{2x+4} \le 5\cdot 2^{x^2+1}$, принадлежащих промежутку $[-100;100]$.

В7 □□□□□□□□□□□□□□□

В8. В саду растет больше 80, но меньше 100 деревьев. Третья часть из них — яблони, и восьмая часть — груши. Сколько деревьев растет в саду?

В8 □□□□□□□□□□□□□□□

В9. Укажите сумму всех решений неравенства $\left|x^2+7x+10\right|+\left|\lg\left(x^2+3x\right)\right| \le \left|\left|x^2+7x+10\right|-\left|\lg\left(x^2+3x\right)\right|\right|$.

В9 □□□□□□□□□□□□□□□

В10. Найдите S — среднее арифметическое всех различных решений уравнения $x^2+\dfrac{18}{x}=6+6x-\dfrac{9}{x^2}$ и укажите в ответе $6S$.

В10 □□□□□□□□□□□□□□□

В11. Решите уравнение $2^{3-|x|}=\dfrac{|x+3|+|x-3|}{3}$ и укажите произведение всех его различных корней.

В11 □□□□□□□□□□□□□□□

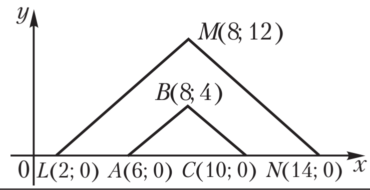
В12. Для каждой пары целых чисел $(x;\, y)$, удовлетворяющих уравнению $2x^2+y^2+3xy=6$, вычислите сумму $2x+5y$ и укажите наименьшую из этих сумм.

В12 □□□□□□□□□□□□□□□

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 2

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Оцените периметр P правильного треугольника со стороной x, если $1{,}8 < x < 2{,}5$.	1) $3{,}6 < P < 5$; 2) $5{,}4 < P < 7{,}5$; 3) $7{,}2 < P < 10$; 4) $9 < P < 12{,}5$; 5) $5{,}4 < P < 7$.
А2. Если натуральное число a — четное, а число b — нечетное, то значение какого из следующих выражений не будет нечетным?	1) $a^2 + ab + b^2$; 2) $a + b$; 3) $b(a + b)$; 4) $a(a + b)$; 5) $a^2 + b^2 + 2$.
А3. Две параллельные прямые пересечены третьей. Известно, что разность двух внутренних односторонних углов равна 30°. Найдите эти углы и укажите больший (в градусах).	1) 110°; 2) 115°; 3) 120°; 4) 105°; 5) 100°.
А4. Вычислите $\sqrt[3]{(-5)^3 \cdot 2^9}$.	1) −80; 2) −40; 3) −20; 4) 40; 5) 80.
А5. График функции $y = 3^x$ перенесли параллельно на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс. График какой из данных функций в результате этого получился?	1) $y = 3^x - 2$; 2) $y = 3^x + 2$; 3) $y = 3^{x+2}$; 4) $y = 3^{x-2}$; 5) $y = 2 \cdot 3^x$.
А6. Из точки M к окружности проведены две касательные MA и MB. Оказалось, что окружность разделила пополам отрезок между точкой M и центром окружности. Найдите величину $\angle AMB$.	1) 30°; 2) 75°; 3) 45°; 4) 50°; 5) 60°.
А7. В коробке лежат 20 карандашей — красных, синих и зеленых. Красных карандашей в 9 раз больше, чем синих. Сколько в коробке зеленых карандашей?	1) 8; 2) 10; 3) 9; 4) 11; 5) 2.
А8. Вычислите $\lg \dfrac{\log_3 2}{\log_3 1024}$.	1) −1; 2) 0; 3) 0,1; 4) 1; 5) 10.
А9. Среднее арифметическое четырех чисел равно 2,1, а среднее арифметическое трех других чисел равно 3,5. Найдите среднее арифметическое этих семи чисел.	1) 2,7; 2) 2,8; 3) 2,76; 4) 5,6; 5) 0,8.
А10. Вычислите $\sqrt{a-1} - \sqrt{a}$, если $\sqrt{4a} + 2\sqrt{a-1} = 3$.	1) $\dfrac{2}{3}$; 2) $-\dfrac{2}{3}$; 3) −1; 4) 1; 5) $\dfrac{13}{8}$.

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
A11. Координаты вершин треугольников в прямоугольной системе координат xOy указаны на рисунке. Во сколько раз площадь ΔABC меньше, чем площадь ΔLMN? 	1) 3; 2) 5; 3) 9; 4) 8; 5) 12. A11 1 2 3 4 5
A12. Найдите произведение всех различных корней уравнения $(x-2)(3x^2+7x+1)=x^2-4$.	1) -1; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) 1; 5) 2. A12 1 2 3 4 5
A13. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отметили точку M. Найдите площадь четырехугольника $AMCD$, если $AM = 13$ см, $AB = 12$ см, $BD = 20$ см.	1) 150 см^2; 2) 160 см^2; 3) 158 см^2; 4) 162 см^2; 5) 156 см^2. A13 1 2 3 4 5
A14. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1 : 2, а другой содержит те же металлы в отношении 3 : 2. В каком отношении надо взять части первого и второго сплавов, чтобы получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 2 : 3?	1) 2 : 3; 2) 8 : 5; 3) 3 : 2; 4) 3 : 1; 5) 12 : 5. A14 1 2 3 4 5
A15. Найдите нули функции $y=\frac{\lvert x-3\rvert}{3-x}-1$.	1) $(-\infty;3)$; 2) $\{3\}$; 3) $\{-3;3\}$; 4) $\{0\}$; 5) $(3;+\infty)$. A15 1 2 3 4 5
A16. Найдите пару $(x_0;y_0)$ — решение системы $\begin{cases}2x-xy+y=3,\\ x+2xy-2y=4\end{cases}$ и укажите в ответе величину x_0+3y_0.	1) 1; 2) 3; 3) 5; 4) 6; 5) 7. A16 1 2 3 4 5
A17. Найдите среднее арифметическое различных корней уравнения $6\operatorname{tg} x+\cos^2 x+3\sin 2x=1$, принадлежащих множеству $[-2\pi;\pi]$.	1) $-\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $-\frac{2\pi}{3}$. A17 1 2 3 4 5
A18. Радиус основания конуса равен $2\sqrt{5}$, а расстояние от центра его основания до образующей — 4. Найдите площадь боковой поверхности конуса.	1) $18\pi\sqrt{15}$; 2) $10\pi\sqrt{5}$; 3) $20\sqrt{5}$; 4) $20\pi\sqrt{5}$; 5) $20\pi\sqrt{10}$. A18 1 2 3 4 5

Часть B

B1. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми равно 5 км, одновременно в одном направлении выехали велосипедист и легковой автомобиль. Легковой автомобиль все время был впереди велосипедиста, и через 40 мин расстояние между ними стало 35 км. Найдите скорость велосипедиста (в км/ч), если она в 4 раза меньше скорости легкового автомобиля.

B1

B2. Найдите количество целых решений неравенства $x^2(4-x^2)\le 0$, удовлетворяющих условию $\lvert x-1\rvert\le 4$.

B2

B3. Вычислите $26\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}\right)$.

B3

B4. Один из углов прямоугольной трапеции равен 150°, меньшая диагональ перпендикулярна боковой стороне, а меньшее основание равно 4. Найдите длину средней линии трапеции.

B4

B5. Вычислите значение выражения $(c-1)(c-2)(c+2)(c+3)$ при $c=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

B5

B6. Через катет прямоугольного равнобедренного треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол 60°. Найдите синус угла α, который образует гипотенуза треугольника с этой плоскостью. В ответ запишите величину $8\sin^2\alpha$.

B6

B7. Между числами 3 и 96 вставьте четыре таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовывали геометрическую прогрессию. В ответе укажите наибольшее из найденных чисел.

B7

B8. Найдите меньший корень уравнения $4^x-10\cdot 2^x+20=x^2-\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2$.

B8

B9. В параллелограмме $ABCD$ $AB=6$, а высота, проведенная к основанию AD, равна 3. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $MC=4$. Отрезки AM и BD пересекаются в точке N. Найдите площадь S треугольника BNM. В ответе запишите величину $8S$.

B9

B10. Найдите сумму тех значений x, при которых функция $y=x(x+4)+\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}+4\right)$ принимает значение, равное 10.

B10

B11. Найдите корень уравнения (сумму корней, если их несколько) $\sqrt{3x^2+6x-2}-\sqrt{3x^2+8x+4}=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x-10}$.

B11

B12. Найдите произведение всех различных корней уравнения $\dfrac{\log_3\left(x^2-x+4\right)}{x^2-x+4}=\dfrac{2}{9}$.

B12

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 3

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Сравните числа $-a$ и b, если числа a и b — положительные.	1) $-a > b$; 2) $-a < b$; 3) $-a \geq b$; 4) $-a = b$; 5) невозможно определить. А1: 1 2 3 4 5
А2. На сколько удлинился бы земной экватор, если бы радиус земного шара увеличился на 1 см?	1) на 2π см; 2) на 20 км; 3) на 2π км; 4) на 2π м; 5) на 2 км. А2: 1 2 3 4 5
А3. Вычислите $\dfrac{\left(2011\dfrac{7}{30}-2009\dfrac{5}{18}\right):2\dfrac{2}{3}}{2\dfrac{1}{5}}$.	1) -1; 2) $\dfrac{1}{5}$; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) $\dfrac{2}{3}$; 5) 1. А3: 1 2 3 4 5
А4. Областью определения какой из данных функций является промежуток $(-\infty;2)$?	1) $y=\sqrt{x-2}$; 2) $y=\sqrt{x+2}$; 3) $y=\lg(x-2)$; 4) $y=\ln(2-x)$; 5) $y=\lvert x-2\rvert$. А4: 1 2 3 4 5
А5. Значение каких из данных выражений является отрицательным числом? 1) $2^{-\log_{11}122\cdot\sin 333°}$; 2) $\log_{11}\sin 111°$; 3) $\log_5 2$; 4) $\lg 1$; 5) $\log_{0,2} 0,5$.	1) 2, 5; 2) 1, 3; 3) 3, 4; 4) 2, 4; 5) 2. А5: 1 2 3 4 5
А6. У Оли есть некоторая сумма денег, за которую она может купить 12 платочков, стоимость которых одинакова. Сколько платочков она сможет купить за ту же сумму денег, если они станут дешевле в 1,5 раза?	1) 8; 2) 6; 3) 15; 4) 20; 5) 18. А6: 1 2 3 4 5
А7. Найдите среднее арифметическое всех целых решений неравенства $\dfrac{\left(x^2-4\right)^2}{x^2-2x-15}<0$.	1) 1; 2) 1,75; 3) 1,4; 4) 4,5; 5) 1,5. А7: 1 2 3 4 5
А8. Найдите все пары $(x;y)$ — решения системы $\begin{cases}2x^2+y=0,\\2y^2+x=0\end{cases}$ и укажите наименьшее из найденных x, умноженное на количество решений.	1) 0; 2) 0,5; 3) $-0,5$; 4) -1; 5) -2. А8: 1 2 3 4 5
А9. Найдите диаметр окружности, вписанной в равнобокую трапецию, если угол при основании трапеции равен 60°, а средняя линия равна 20 м.	1) $10\sqrt{6}$; 2) $10\sqrt{3}$; 3) $10\sqrt{2}$; 4) $20\sqrt{3}$; 5) $5\sqrt{3}$. А9: 1 2 3 4 5
А10. Вычислите $\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\cos(-120°)}{2}}}$.	1) 0,5; 2) 0,25; 3) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; 5) $\sqrt{2}$. А10: 1 2 3 4 5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
A11. Биссектриса угла прямоугольника делит его диагональ в отношении 1 : 4. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 36 см^2.	1) 34 см; 2) 29 см; 3) 32 см; 4) 28 см; 5) 30 см. **A11** 1 2 3 4 5
A12. Решите уравнение $\left\|\|x-1\|-1\right\|=2$ и укажите в ответе произведение его корней (корень, если он один).	1) −4; 2) −16; 3) 0; 4) −8; 5) 4. **A12** 1 2 3 4 5
A13. Разложите на множители $a^2+2ab+b^2+a+b-2$.	1) $(a+b+1)(a+b-2)$; 2) $(a-b-1)(a+b+2)$; 3) $(a+b)(a+b-2)$; 4) $(a-b-1)(a-b+2)$; 5) $(a+b-1)(a+b+2)$. **A13** 1 2 3 4 5
A14. Точки A, B и C таковы, что $AB=1$, $BC=2$, $AC=3$. Сколько существует плоскостей, содержащих одновременно точки A, B и C?	1) ни одной; 2) одна; 3) две; 4) три; 5) бесконечно много. **A14** 1 2 3 4 5
A15. Для размножения водорослей вода в аквариуме должна содержать 2 % морской соли. Сколько литров пресной воды нужно добавить к 80 л морской воды с 5%-ным содержанием соли, чтобы получить воду, пригодную для заполнения аквариума?	1) 120; 2) 100; 3) 115; 4) 110; 5) 117. **A15** 1 2 3 4 5
A16. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии $-5{,}2;\ -4{,}8;\ -4{,}4;\ \ldots$.	1) −33,8; 2) −36,4; 3) −36,8; 4) −36; 5) −36,2. **A16** 1 2 3 4 5
A17. Решите уравнение $\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)^2+2\sin 2x+3\cos^2 x=0$ и укажите значение выражения $x_1\cdot\operatorname{tg}x_2$, где x_1 — больший, а x_2 — меньший корни уравнения на промежутке $\left(-\frac{\pi}{4};\pi\right)$.	1) $-\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $-\frac{9\pi}{4}$. **A17** 1 2 3 4 5
A18. Площадь полной поверхности конуса равна 90π, а его образующая больше радиуса основания на 8. Найдите объем конуса.	1) 100π; 2) 50π; 3) 100; 4) 75π; 5) 200π. **A18** 1 2 3 4 5

Часть В

B1. Основание пирамиды — квадрат со стороной 12, а две смежные боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее высота равна 5.

B1															

B2. В окружности с диаметром AB проведена хорда под углом 30° к диаметру, пересекающая его в точке M, причем $AM = 12$ см, $MB = 4$ см. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

B2															

B3. Из двух аэропортов, расстояние между которыми равно 1300 км, вылетели одновременно навстречу друг другу два самолета — один с поршневым, другой с реактивным двигателем. Через 30 мин им оставалось пролететь до встречи 800 км. Найдите скорость самолета (в км/ч) с реактивным двигателем, если она в 3 раза больше скорости самолета с поршневым двигателем.

B3															

B4. Вычислите $\dfrac{\log_4 12}{\log_{12} 4} - \log_4 48 \cdot \log_4 3$.

B4															

B5. Найдите наименьший корень уравнения $4 - \dfrac{1-\sqrt{x}}{2} = \dfrac{x-1}{1+\sqrt{x}}$.

B5															

B6. Найдите сумму различных целых решений системы неравенств $\begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+5} \le \dfrac{|x+1|}{3x+1}, \\ x^2 \le 49. \end{cases}$

B6															

B7. Вычислите площадь S боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, диагональ которой равна $8\sqrt{2}$ и наклонена к плоскости основания под углом 45°. В ответе запишите величину $\dfrac{S}{4\sqrt{2}}$.

B7															

B8. Решите уравнение $\log_{4x-1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$ и укажите в ответе меньший корень, увеличенный в 12 раз.

B8															

B9. Найдите произведение всех различных корней уравнения $8x^2 + 2^{x+1} = 2^x x^2 + 16$.

B9															

B10. Найдите x_0 — наименьший корень уравнения $343\left(x^2+3\right) = 19(x+3)^3$ и укажите $4x_0$.

B10															

B11. Если S — произведение всех различных корней уравнения $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 = \sqrt{3}$, то чему равно значение выражения $2S + \sqrt{12}$?

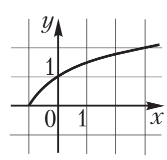
B11															

B12. Найдите сумму всех целых решений неравенства $\sin\left(\dfrac{\pi x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) \ge 4^{\log_4 x - 1}$ на промежутке $[-10;10]$.

B12															

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 4

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Сколько корней имеет уравнение $\cos(2009x)=\frac{\pi}{3}$?	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 2009; 5) бесконечное число. А1 1 2 3 4 5
А2. Известно, что $1<x<3$. Какое из данных утверждений является правильным?	1) $3\le 3x-1\le 7$; 2) $2\le 3x-1\le 6$; 3) $1<3x-1<7$; 4) $2<3x-1<8$; 5) $1<3x-1<8$. А2 1 2 3 4 5
А3. Положительные числа a и b такие, что число a на 200 % больше, чем число b. Какое из данных равенств верное?	1) $a=2b$; 2) $b=2a$; 3) $a=4b$; 4) $b=4a$; 5) $a=3b$. А3 1 2 3 4 5
А4. Представьте в виде степени выражение $a^{\frac{1}{4}}:a^{\frac{1}{6}}:a^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{a}$.	1) a^6; 2) $a^{\frac{1}{12}}$; 3) $a^{\frac{13}{12}}$; 4) a^{-2}; 5) $a^{\frac{5}{12}}$. А4 1 2 3 4 5
А5. Меньшая сторона параллелограмма равна 10, а длины его высот относятся как $5:7$. Найти длину другой стороны параллелограмма.	1) 14,5; 2) 14,2; 3) 14; 4) 14,8; 5) 15. А5 1 2 3 4 5
А6. График какой из указанных функций изображен на рисунке? 	1) $y=\lvert x\rvert^2$; 2) $y=2^x$; 3) $y=\log_2 x$; 4) $y=\sqrt{x}$; 5) $y=-x^2$. А6 1 2 3 4 5
А7. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найдите радиус второй окружности, если длина отрезка AB равна 4.	1) 8,2; 2) 8; 3) 9; 4) 7; 5) 9,5. А7 1 2 3 4 5
А8. Найдите, при каких x не имеет смысла выражение $\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+3}}$.	1) $(-\infty;-3]\cup(-1;5)$; 2) $[-3;-1)$; 3) $(3;1]$; 4) $(-\infty;-3]$; 5) $(-1;5)$. А8 1 2 3 4 5
А9. Решите неравенство $\lvert 2x-4\rvert<x+1$ и укажите сумму его целых решений, принадлежащих промежутку $[-6;6]$.	1) −9; 2) 3; 3) 4; 4) 9; 5) −15. А9 1 2 3 4 5
А10. Какое из следующих высказываний верно, если $\log_a\frac{5}{12}>\log_a\frac{3}{8}$?	1) $a=1$; 2) $a>1$; 3) $0<a<1$; 4) $a<0$; 5) $a<-1$. А10 1 2 3 4 5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А11. Для всех пар $(x_0; y_0)$ — решений системы $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$ вычислите сумму x_0+2y_0 и укажите в ответе наименьшую из этих сумм.	1) 2; 2) 5; 3) 7; 4) 8; 5) 10. А11 □ □ □ □ □ 1 2 3 4 5
А12. Путешественник в первый день прошел 20 % всего пути и еще 2 км, во второй — прошел 50 % остатка и еще 1 км, в третий день — 25 % оставшегося пути и еще 3 км. Остальные 18 км пути он прошел в четвертый день. Какова длина пути, пройденного путешественником?	1) 74; 2) 75; 3) 73; 4) 80; 5) 70. А12 □ □ □ □ □ 1 2 3 4 5
А13. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ делит его сторону BC на отрезки BM и MC длиной 10 и 14 соответственно. На отрезки какой длины эта биссектриса делит диагональ прямоугольника? В ответе укажите длину меньшего из найденных отрезков.	1) $\frac{130}{17}$; 2) $\frac{120}{17}$; 3) 7; 4) 8; 5) $\frac{312}{17}$. А13 □ □ □ □ □ 1 2 3 4 5
А14. Какое из множеств является решением неравенства $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$?	1) $\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}; \frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; 1\right)$; 3) $\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}; 1\right]$; 4) $\left(-\frac{161}{64}; 1\right]$; 5) $\left(-\frac{161}{64}; 2\right]$. А14 □ □ □ □ □ 1 2 3 4 5
А15. Известно, что для трех действительных чисел a, b, c выполняются неравенства $a+b+c<0$ и $b^2-4ac<0$. Какой знак у чисел a и c?	1) $a>0$, $c>0$; 2) $a>0$, $c<0$; 3) $a<0$, $c<0$; 4) $a<0$, $c>0$; 5) определить невозможно. А15 □ □ □ □ □ 1 2 3 4 5
А16. Найдите первый член геометрической прогрессии, состоящей из шести членов, если сумма трех ее членов с нечетными номерами равна 546, а сумма трех остальных членов равна 182.	1) 273; 2) 91; 3) 500; 4) 452; 5) 486. А16 □ □ □ □ □ 1 2 3 4 5
А17. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен 6. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если его высота равна диаметру основания.	1) 24π; 2) $\frac{136}{5}\pi$; 3) $\frac{72}{5}\pi$; 4) $\frac{144}{5}\pi$; 5) 29π. А17 □ □ □ □ □ 1 2 3 4 5
А18. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна a. Эта хорда стягивает дугу, градусная мера которой равна 90°. Угол между образующими в сечении равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности конуса.	1) $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{\pi a^2}{3\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\pi a^2}{2}$; 5) $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$. А18 □ □ □ □ □ 1 2 3 4 5

Часть В

B1. Основанием пирамиды $MABC$ является треугольник ABC, $\angle ACB=90°$, $\angle BAC=60°$, $AC=4\sqrt{3}$. Боковая грань BMC перпендикулярна плоскости основания, а две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите длину ребра MC, в ответе запишите величину $\sqrt{3}MC$.

B1

B2. Катер, собственная скорость которого равна 21 км/ч, прошел вниз по реке от города A до города B 72 км и вернулся обратно. За это же время пустая канистра, упавшая с борта катера при отправлении из города A, проплыла 21 км. Сколько часов понадобится канистре, чтобы доплыть от города A до города B?

B2

B3. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность. $AB:BC:CD=2:6:7$, а периметр четырехугольника равен 54 дм. Найдите длины сторон четырехугольника и запишите в ответе наибольшую из них.

B3

B4. Найдите сумму всех различных корней уравнения $\dfrac{3-x}{2-x}=3+\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{2-x}{x-1}$.

B4

B5. Найдите значение выражения $S\cdot n$, где S — сумма, а n — количество целых решений неравенства $\left(x^2+x\right)^2+(x-1)(x+2)\le 4$.

B5

B6. Вычислите $15\,\mathrm{tg}\left(\arccos\dfrac{3}{\sqrt{34}}\right)$.

B6

B7. Окружность, центр которой принадлежит стороне AB треугольника ABC, проходит через точку B, касается стороны AC в точке C и пересекает сторону AB в точке D. Найдите градусную меру большего угла треугольника ABC, если $AD:DB=1:2$.

B7

B8. Найдите x_0 — меньший корень уравнения $\sqrt{25+4x^2-12x}+\cos^2\dfrac{5x\pi}{3}=4$ и укажите в ответе $4x_0$.

B8

B9. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

B9

B10. Найдите произведение большего корня уравнения $\dfrac{x^4+1}{x\left(x^2+1\right)}=\dfrac{41}{15}$ на количество корней.

B10

B11. Решите уравнение $\sin(\pi x)+\sqrt{2-\sin^2(\pi x)}+\sin(\pi x)\sqrt{2-\sin^2(\pi x)}=3$ и укажите сумму всех его корней на промежутке $(-2;5)$.

B11

B12. Решите неравенство $\log_2\dfrac{x-1}{11-x}\ge \mathrm{ctg}\dfrac{\pi x}{12}$ и укажите сумму всех его натуральных решений.

B12

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 5

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Укажите номера всех неверных утверждений среди следующих: 1) $(a+b)^2=a^2+b^2$; 2) $(a-b)^2=a^2-b^2$; 3) $(a-b)(b+a)=a^2-b^2$; 4) $(a-b)(b+a)=b^2-a^2$.	1) 2, 4; 2) 1, 3; 3) 1, 2; 4) 2, 3, 4; 5) 1, 2, 4. А1 1 2 3 4 5
А2. Отрицательные числа a и b таковы, что $a^2>b^2$. Какое из данных утверждений верно?	1) $a>b$; 2) $a=b$; 3) $a<b$; 4) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$; 5) верного утверждения среди перечисленных нет. А2 1 2 3 4 5
А3. Какую цифру надо поставить вместо звездочки, чтобы число $334*5$ стало кратным 45?	1) 1; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 9. А3 1 2 3 4 5
А4. Какое из данных чисел удовлетворяет двойному неравенству $\frac{3}{7}<x<\frac{4}{7}$?	1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{17}{28}$; 3) $\frac{11}{21}$; 4) $\frac{13}{21}$; 5) 3,7. А4 1 2 3 4 5
А5. Во сколько раз минутная стрелка часов движется быстрее часовой?	1) в 4 раза; 2) в 6 раз; 3) в 3 раза; 4) в 12 раз; 5) в 24 раза. А5 1 2 3 4 5
А6. В прямоугольнике $ABCD$ $AB=4$, $BC=6$. Отрезок BE — перпендикуляр к AC. Точка F принадлежит стороне CD, причем $EF \parallel AD$. Найдите длину отрезка EF.	1) $\frac{54}{13}$; 2) $\frac{56}{13}$; 3) $\frac{48}{13}$; 4) $\frac{51}{13}$; 5) 4. А6 1 2 3 4 5
А7. При каких значениях a и b равенство $\sqrt{-ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-b}$ является тождеством?	1) $a>0,\ b>0$; 2) $a\le 0,\ b>0$; 3) $a<0,\ b<0$; 4) $a\ge 0,\ b\le 0$; 5) $a=0,\ b>0$. А7 1 2 3 4 5
А8. В окружности радиуса $\sqrt{2}$ проведена хорда AB, равная 2. Пусть M — точка на меньшей дуге AB. Чему равен угол AMB?	1) 150°; 2) 135°; 3) 145°; 4) 120°; 5) 155°. А8 1 2 3 4 5
А9. Вычислите $\sqrt[6]{\left(\sqrt[12]{26}-\sqrt[4]{3}\right)^6}-\left(\sqrt[6]{\sqrt[4]{3}+\sqrt[12]{26}}\right)^6$.	1) $2\sqrt[12]{26}$; 2) $-2\sqrt[12]{26}$; 3) $2\sqrt[4]{3}$; 4) $-2\sqrt[4]{3}$; 5) 0. А9 1 2 3 4 5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А10. Вычислите $2^{3^2}-2^{2^3}+\left(-2^2\right)^3-\left(-2^3\right)^2$.	1) 0; 2) –126; 3) 128; 4) 256; 5) 384. **А10** 1 2 3 4 5
А11. Сергей может выполнить a тестов за $\frac{1}{n}$ часа. Сколько тестов он решит за n часов при такой скорости?	1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{an}$; 3) $\frac{n}{a}$; 4) an^2; 5) an. **А11** 1 2 3 4 5
А12. При любом натуральном n сумма n первых членов последовательности вычисляется по формуле $S_n=4n^4-3n$. Найдите третий член этой последовательности.	1) 315; 2) 257; 3) 1; 4) 58; 5) 256. **А12** 1 2 3 4 5
А13. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность. Найдите радиус окружности, если $AB+DC=20$ м, а площадь четырехугольника равна 24 м^2.	1) 1,2 м; 2) 1,3 м; 3) 1 м; 4) 2 м; 5) 1,5 м. **А13** 1 2 3 4 5
А14. От трех библиотек университета поступили заявки на приобретение книг. Стоимость книг в заявке второй библиотеки составляет 50 % от заявки первой, а стоимость книг в заявке первой библиотеки — 60 % от заявки третьей. Стоимость книг в заявке третьей библиотеки превышает заявку второй на 392 тыс. руб. Какова общая стоимость книг (в тыс. руб.) в заявках трех библиотек?	1) 1016; 2) 1064; 3) 1120; 4) 1150; 5) 1102. **А14** 1 2 3 4 5
А15. Высота конуса равна 6, а угол при вершине осевого сечения — 120°. Найдите площадь боковой поверхности конуса.	1) $72\pi\sqrt{6}$; 2) $72\sqrt{3}$; 3) $24\pi\sqrt{3}$; 4) $72\pi\sqrt{3}$; 5) $36\pi\sqrt{3}$. **А15** 1 2 3 4 5
А16. Вычислите сумму $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{15}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{27}+\sqrt{31}}$.	1) $\frac{\sqrt{31}-\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{28}}{4}$; 3) 2,5; 4) 3; 5) $\frac{\sqrt{31}+\sqrt{3}}{4}$. **А16** 1 2 3 4 5
А17. Найдите произведение корней (корень, если он один) уравнения $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x=6$.	1) –2; 2) –1; 3) 1; 4) 2; 5) –4. **А17** 1 2 3 4 5
А18. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом α. Боковое ребро, проходящее через вершину другого острого угла основания, перпендикулярно плоскости основания и равно h, а боковая грань, содержащая катет, прилежащий к данному углу α, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.	1) $\frac{h^3}{6}\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\frac{h^3}{3}\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{ctg}\alpha$; 3) $\frac{h^3}{6}\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{ctg}\alpha$; 4) $\frac{h^3}{3}\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{tg}\alpha$; 5) $\frac{h^3}{12}\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{ctg}\alpha$. **А18** 1 2 3 4 5

Часть В

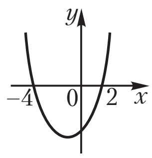
В1. В равнобедренный треугольник вписана окружность, радиус которой равен 10, а точка касания делит боковую сторону на отрезки, длины которых относятся как 8 : 5, считая от вершины равнобедренного треугольника. Найдите площадь этого треугольника.

В1

B2. Друзья отправились на пикник на лодке, а вечером вернулись обратно. Они проплыли в общей сложности 48 км, затратив на это 2 ч 48 мин. При этом на каждые 3 км против течения им приходилось тратить столько же времени, сколько на 4 км по течению. Найдите x — собственную скорость лодки (в км/ч) и укажите в ответе $4x$.

B2

B3. Найдите абсциссу вершины параболы, изображенной на рисунке.



B3

B4. Найдите сумму корней (в градусах) уравнения $\sin x - \operatorname{ctg} x \cdot \sin x = \sin 2x - 0{,}5$ на промежутке $[-\pi; 2\pi]$.

B4

B5. Точка A находится на расстоянии 9 от плоскости α. Наклонные AB и AC образуют с плоскостью α углы 45° и 60° соответственно, а угол между проекциями наклонных на плоскость α равен 150°. Найдите расстояние между точками B и C. В ответе запишите квадрат найденного расстояния.

B5

B6. Найдите, при каких значениях x функция $f(x) = \left(x^2 + 5x\right)^2 - 2\left(x^2 + 5x\right)$ принимает значение, равное 24, и укажите в ответе сумму найденных x, умноженную на их количество.

B6

B7. Найдите произведение целочисленных корней (корень, если он один) неравенства $\left(x^2 - x + 1\right)\sqrt{x^2 - 6x + 9} \ge \sqrt{(x-3)^2}\left(x^2 - x + 20\right)$.

B7

B8. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) - 2\log_{x-1}\frac{1}{3} > \left|\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\right|$ и укажите в ответе длину интервала, являющегося множеством решений.

B8

B9. Найдите все пары $(x_0; y_0)$, являющиеся решением системы уравнений $\begin{cases} y^2 + 1 = xy, \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0, \end{cases}$ для каждой из них вычислите произведение $x_0(y_0 + 3)$ и укажите в ответе максимальное из найденных значений.

B9

B10. Решите уравнение $\sin\dfrac{\pi}{x^2 + 6x + 13} = \dfrac{\log_3|x| + \log_{|x|}3}{2\sqrt{2}}$ и укажите в ответе произведение всех его корней (корень, если он единственный).

B10

B11. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найдите величину (в градусах) меньшего из углов, образованных прямыми AB и CD.

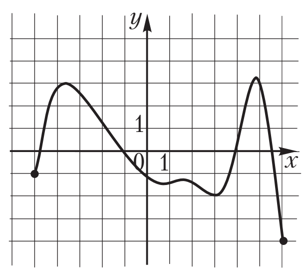
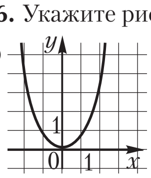
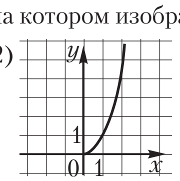
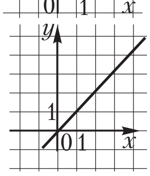
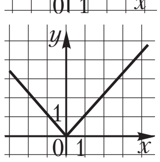
B11

B12. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $2x^2 + 5y^2 + 6xy - 13 = 0$.

B12

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 6

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Укажите число, обратное наименьшему однозначному числу.	1) -1; 2) -9; 3) 1; 4) $\frac{1}{9}$; 5) $-\frac{1}{9}$. А1 1 2 3 4 5
А2. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. $AM=9$, $MB=3$, $MC=2$. Найдите длину отрезка DM.	1) 13; 2) 13,5; 3) 12,5; 4) 13,6; 5) 14. А2 1 2 3 4 5
А3. Числа a и b таковы, что $a>0$, $b<0$. Какое из данных выражений может принимать отрицательные значения?	1) $a-b$; 2) $\lvert a+b\rvert$; 3) a^3b^2; 4) $a+b$; 5) $a\lvert b\rvert$. А3 1 2 3 4 5
А4. Какую из данных обыкновенных дробей нельзя преобразовать в конечную десятичную дробь?	1) $\frac{11}{16}$; 2) $\frac{24}{600}$; 3) $\frac{3}{12}$; 4) $\frac{18}{125}$; 5) $\frac{5}{12}$. А4 1 2 3 4 5
А5. Функция, определенная на промежутке $[-5;6]$, задана графиком, который изображен на рисунке. Какова максимальная длина промежутка, где функция сохраняет свой знак? 	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5. А5 1 2 3 4 5
А6. Укажите рисунок, на котором изображен график функции $y=\left(\sqrt{x}\right)^4$. 1)  2)  3)  4)  5) 	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5. А6 1 2 3 4 5
А7. Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_5+a_8=32$ и $a_4+a_{12}=44$.	1) -6; 2) -8; 3) 0; 4) 2; 5) -2. А7 1 2 3 4 5
А8. Вычислите $\dfrac{x^2+y^2+2xy-1}{x+y-1}$ при $x=1234$, $y=4321$.	1) 5554; 2) 5555; 3) 5556; 4) 1; 5) 0. А8 1 2 3 4 5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А9. Известно, что $\log_{0,1} a < -\lg b$. Укажите верное утверждение из данных.	1) $a < b$; 2) $a > b$; 3) $a \le b$; 4) $a = b$; 5) $a = 1$. **А9** 1 2 3 4 5
А10. Радиус основания конуса равен R, а его осевое сечение — прямоугольный треугольник. Найдите объем конуса.	1) $\frac{4\pi R^3}{3}$; 2) $\frac{\pi R^3}{6}$; 3) πR^3; 4) $\frac{4R^3}{3}$; 5) $\frac{\pi R^3}{3}$. **А10** 1 2 3 4 5
А11. Вычислите значение выражения $\sin 16° \sin 374° + \sin^2 1°$.	1) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1; 5) $2\cos 2°$. **А11** 1 2 3 4 5
А12. Вычислите $5^{\frac{\log_{11} 36}{\log_{11} 6}} - 3^{2-4\log_9 0,5} + \left(4^{\log_5 6}\right)^{\log_6 25}$.	1) 15 636; 2) 15 628; 3) 77; 4) 21; 5) 5. **А12** 1 2 3 4 5
А13. К окружности с центром O и радиусом 14 проведена касательная. На касательной взяты точки A и B так, что $OA = OB = 20$. Отрезки OA и OB пересекают окружность в точках C и D соответственно. Найдите длину отрезка CD.	1) 19; 2) 20; 3) $\frac{12\sqrt{51}}{5}$; 4) $\frac{14\sqrt{47}}{5}$; 5) $\frac{14\sqrt{51}}{5}$. **А13** 1 2 3 4 5
А14. Найдите сумму корней (корень, если он один) уравнения $\left\lvert \lvert 2x+3\rvert - 2 \right\rvert = 3$.	1) –4; 2) –3; 3) –1; 4) 1; 5) 4. **А14** 1 2 3 4 5
А15. Вычислите $\cos x + \sqrt{3}\sin x - 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ при $x = \frac{1000\pi}{2009}$.	1) –1; 2) 0; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sqrt{3}$; 5) 1. **А15** 1 2 3 4 5
А16. Найдите значение выражения nx_0, где n — количество корней уравнения $5^{x-4} - 5^{x-5} = 2\cdot 5^{x-6} + 2\cdot 3^{x-4}$, а x_0 — меньший его корень.	1) –1; 2) –4; 3) 3; 4) 6; 5) 12. **А16** 1 2 3 4 5
А17. Биссектриса острого угла равнобедренной трапеции делит боковую сторону на части 30 и 20, считая от большего основания. Найдите площадь этой трапеции, если меньшее основание равно 6.	1) 720; 2) 1170; 3) 1440; 4) 1560; 5) 2880. **А17** 1 2 3 4 5
А18. Вычислите угол $\arcsin(\sin 2)$ в радианах.	1) 1; 2) 2; 3) $\pi - 2$; 4) $2 - \pi$; 5) $2\pi - 2$. **А18** 1 2 3 4 5

Часть B

B1. Через точку A на поверхности шара проведена секущая плоскость под углом 45° к радиусу шара, проведенному в точку A. Площадь полученного сечения равна 7. Найдите площадь поверхности шара.

B1

B2. Два мальчика пробежали, держась за руки, 240 м. Шаг одного из мальчиков на 20 см длиннее шага другого, поэтому он сделал на 100 шагов меньше другого. Найдите длину шага другого мальчика (в см).

B2

B3. Найдите сумму всех целых решений неравенства $\frac{|x+2|}{x^2-x} > \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x^2-x-20}$.

B3

B4. Одна из сторон треугольника равна 35, а две другие относятся как $3:8$ и образуют угол 60°. Найдите бóльшую сторону треугольника.

B4

B5. Два транспортера в аэропорту, работая одновременно, доставляли багаж пассажирам за 40 мин. После реконструкции скорость доставки груза первым транспортером увеличилась в 2 раза, а вторым — на 50 %. Теперь они доставляют такой же багаж за 24 мин, если работают одновременно. Сколько часов занимала доставка багажа первым транспортером до реконструкции, если второй находился в ремонте?

B5

B6. Найдите все пары $(x;y)$, являющиеся решением системы уравнений $\begin{cases} \frac{y}{x} - 2\frac{x}{y} = 1, \\ 2x^2 + y^2 = 6, \end{cases}$ и укажите в ответе $n \cdot (y_1 + 3)$, где n — количество решений системы, y_1 — наибольшее из найденных y.

B6

B7. Найдите x_0 — меньший корень уравнения $8\sqrt{12+16x-16x^2} + x(4-4x) = 33$ и укажите в ответе $36x_0$.

B7

B8. Пусть $ABCD$ — квадрат, а точка O лежит внутри квадрата. Известно, что $OC = OD = \sqrt{13}$, а $OB = \sqrt{5}$. Найдите площадь квадрата.

B8

B9. Найдите x_0 — больший корень уравнения $x^2 - x + 1 = 2 \cdot 2^{x-1} - 4^{x-1}$.

B9

B10. Основанием пирамиды является правильный треугольник. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 60°. Найдите объем V пирамиды, если ее высота равна 12. В ответе запишите величину $\frac{V}{\sqrt{3}}$.

B10

B11. Сколько решений имеет уравнение $\sin 2x + \cos y = 2$, если $x \in [-\pi; 0]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

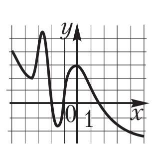
B11

B12. Известно, что множеством значений квадратичной функции является промежуток $(-\infty; -1]$, коэффициент при x совпадает со свободным членом, а коэффициент при x^2 на единицу больше, чем свободный член. Найдите свободный член этой квадратичной функции.

B12

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 7

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Один угол треугольника равен 55°, второй угол на 43° меньше третьего. Найдите третий угол.	1) 84°; 2) 55°; 3) 49°; 4) 41°; 5) 98°. А1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
А2. Число 9 составляет $\frac{1}{3}$ % от какого из следующих чисел?	1) 0,03; 2) 0,27; 3) 18; 4) 300; 5) 2700. А2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
А3. Сравните числа a и b, если $(a+b)^2=4ab$.	1) $a<b$; 2) $a=b$; 3) $a>b$; 4) сравнить невозможно; 5) таких чисел не существует. А3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
А4. Сумма 1000 натуральных чисел равна 1001. Чему равно их произведение?	1) 1000; 2) 10; 3) 1; 4) 2; 5) невозможно определить. А4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
А5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC=BC$, $\cos\angle B=\frac{1}{3}$) проведены высоты AN и CM. Найдите отношение $\frac{AN}{CM}$.	1) $\frac{3}{1}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{1}{3}$. А5 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
А6. В классе 20 учащихся, 20 % из них — мальчики. Сколько мальчиков должно еще прийти в этот класс, чтобы они составили 50 % учащихся класса?	1) 10; 2) 11; 3) 12; 4) 16; 5) 50. А6 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
А7. Известно, что $a^2+b^2=200$, $a+b=16$. Чему при этом равно значение выражения ab?	1) 28; 2) 60; 3) 63; 4) 15; 5) 39. А7 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
А8. Решите уравнение $(x-1)(x+2)(x-2)=x^3$ и укажите сумму его корней.	1) $-2+2\sqrt{2}$; 2) $4\sqrt{2}$; 3) $-4\sqrt{2}$; 4) -4; 5) 4. А8 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
А9. Из точки к прямой проведены две наклонные, проекции которых на прямую равны 9 см и 16 см. Найдите расстояние от данной точки до прямой, если одна из наклонных на 5 см больше другой.	1) 11 см; 2) 11,5 см; 3) 12,5 см; 4) 13 см; 5) 12 см. А9 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
А10. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x)=\lg x$? 	1) ни одного; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4. А10 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А11. Вычислите значение выражения $\frac{3a+b}{a-2b}\cdot\frac{4b-2a}{9a^2+6ab+b^2}$ при $a=111$, $b=-233$.	1) 1; 2) 0,02; 3) $-0{,}02$; 4) 10; 5) 100. А11 1 2 3 4 5
А12. В шахматном турнире участвовало 10 игроков, каждый из которых сыграл одну партию с каждым из остальных игроков. Сколько всего партий было сыграно?	1) 100; 2) 90; 3) 50; 4) 45; 5) 10. А12 1 2 3 4 5
А13. Упростите $\frac{\sqrt{ab}+b\sqrt{a:b}}{\sqrt{-a}}$.	1) -1; 2) 0; 3) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$; 4) $2\sqrt{-b}$; 5) $\sqrt{ab}$. А13 1 2 3 4 5
А14. Вычислите $\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-5\sqrt{3}$.	1) -8; 2) -7; 3) $-2\sqrt{3}$; 4) $-3\sqrt{3}$; 5) 8. А14 1 2 3 4 5
А15. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, которое является квадратом со стороной 6 см и отсекает от окружности основания дугу, градусная мера которой равна 90°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.	1) 36π см^2; 2) $36\sqrt{2}$ см^2; 3) $18\pi\sqrt{2}$ см^2; 4) $36\pi\sqrt{2}$ см^2; 5) $30\pi\sqrt{2}$ см^2. А15 1 2 3 4 5
А16. Найдите сумму корней (корень, если он один) уравнения $\log_2\left(4^x-32\right)=x+2$.	1) 4; 2) 271; 3) $\log_4 33$; 4) 3,5; 5) 3. А16 1 2 3 4 5
А17. Муха вылетает из Минска в Париж (1840 км) со скоростью 1 м/с. Она удваивает скорость после каждого метра пути. Оцените время полета мухи.	1) около 10 лет; 2) около 2 лет; 3) около 3 месяцев; 4) около суток; 5) менее 2 секунд. А17 1 2 3 4 5
А18. Через две образующие конуса, угол между которыми равен φ, проведено сечение. Найдите площадь этого сечения, если высота конуса равна h, а угол между высотой и образующей конуса равен α.	1) $\frac{h^2\cos\varphi}{2\cos^2\alpha}$; 2) $\frac{h^2\sin\varphi}{4\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{h^2\sin\varphi}{2\cos^2\alpha}$; 4) $\frac{h^2\sin\varphi}{2\sin^2\alpha}$; 5) $\frac{h^2\sin\alpha}{2\cos^2\varphi}$. А18 1 2 3 4 5

Часть B

B1. Основанием пирамиды $KMNF$ является треугольник MNF, $\angle MNF = 90°$, $\angle FMN = 30°$, $MN = 2(\sqrt{3}+1)$. Боковая грань MKF перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 45°. Найдите длину ребра KN. В ответе запишите квадрат найденной длины.

B1

B2. Для наполнения плавательного бассейна водой имеются три насоса. Первому насосу для наполнения бассейна требуется времени в три раза меньше, чем второму, и на 2 ч больше, чем третьему. Три насоса, работая вместе, наполнили бы бассейн за 3 ч, но по условиям эксплуатации одновременно должны работать только два насоса. Определите минимальную стоимость (в тыс. руб.) наполнения бассейна, если 1 ч работы любого из насосов стоит 14 000 руб.

B2

B3. Сумма третьего и сорок седьмого членов арифметической прогрессии равна 11, а разность девятнадцатого и двадцать пятого членов равна 12. Найдите число членов прогрессии, не превосходящих по абсолютной величине 70.

B3

B4. Найдите сумму всех целых решений неравенства $\dfrac{x^2-10x+25}{-x^2+3x} \ge 0$.

B4

B5. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB, BC и AC соответственно в точках E, M и F. Найдите длину отрезка CF, если $AB = 24$, $BC = 10$, $AC = 20$.

B5

B6. Найдите среднее арифметическое всех целых решений неравенства $|2x+3| - |x+2| < 2$ на промежутке $[-100;100]$.

B6

B7. Найдите сумму всех целых решений неравенства $(x-5)\sqrt{10-x} \ge 10-2x$.

B7

B8. Решите уравнение $(x^2+x-2)(x^2+x-3) = 12$ и укажите в ответе сумму меньшего и большего из найденных корней.

B8

B9. Диагональ равнобокой трапеции делит высоту, проведенную из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 и 12, считая от меньшего основания, а боковая сторона трапеции равна ее меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

B9

B10. Найдите сумму всех целых решений неравенства $\log_{\log_9 8} \log_2 \dfrac{x}{x+1} \ge 0$ на промежутке $[-10;10]$.

B10

B11. Найдите корень уравнения $\operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi x}{8} + \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{2009\pi}{2} + \dfrac{\pi x}{8}\right) = \log_2\left(4x - x^2\right)$.

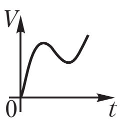
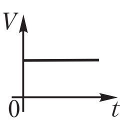
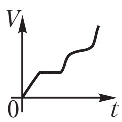
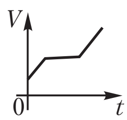
B11

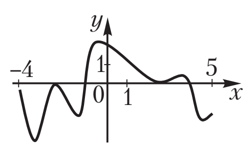
B12. Найдите сумму всех целых решений неравенства $\sqrt{3+\sqrt{\dfrac{x}{5}}} \le \log_{\frac{1}{2}}(x+3)+5$.

B12

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 8

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Чему равна разность 25 мин 18 с – 15 мин 36 с?	1) 10 мин 18 с; 2) 9 мин 18 с; 3) 10 мин 42 с; 4) 9 мин 42 с; 5) 9 мин 52 с. А1 1 2 3 4 5
А2. Число a — положительное, а число b — отрицательное. Значение какого из данных выражений наибольшее?	1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) $-\frac{a}{b^2}$; 3) $\frac{a^2}{b}$; 4) $\frac{b}{a}$; 5) определить невозможно. А2 1 2 3 4 5
А3. Пустой бассейн наполняют водой. Какой из данных графиков может соответствовать зависимости объема V воды в бассейне от времени t его наполнения? 1)  2)  3)  4) 	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 3 и 4. А3 1 2 3 4 5
А4. Какое число из данных является периодом функции $y=\sin(2\pi x)$?	1) 1; 2) 1,5; 3) π; 4) 2π; 5) 2,5. А4 1 2 3 4 5
А5. Найдите значение выражения $x^3+x^2-6x+9+\sqrt[3]{-x^9}$, если $x=3+\sqrt[4]{3}$.	1) $\sqrt[4]{3}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) 3; 4) 1; 5) $19\sqrt{3}+54+54\sqrt[4]{3}+2\sqrt[4]{27}$. А5 1 2 3 4 5
А6. Найдите сумму корней (корень, если он один) уравнения $\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}-8=0$.	1) 4; 2) 16; 3) -2; 4) $\left(\frac{\sqrt{65}-1}{4}\right)^2$; 5) 0. А6 1 2 3 4 5
А7. Функция $f(x)$ — четная, а $g(x)$ — нечетная. Вычислите значение выражения $\frac{g(-x_0)}{f(x_0)}-2\frac{f(-x_0)}{g(x_0)}$, если $f(x_0)=-g(x_0)$.	1) -3; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) 3. А7 1 2 3 4 5
А8. Упростите $\frac{2x^2+3xy-2y^2}{2x+4y}$.	1) $x-0{,}5y$; 2) $x+3xy-0{,}5y$; 3) $2x-y$; 4) $x+3-0{,}5y$; 5) $3xy$. А8 1 2 3 4 5
А9. Упростите $\sqrt{\sqrt{2a}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{a}{\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[4]{2}$.	1) $\frac{\sqrt{a}}{2}+1$; 2) $\sqrt{\frac{a}{2}}+1$; 3) $\sqrt{a}+1$; 4) $a+\sqrt[4]{2}$; 5) $\sqrt[4]{2a}$. А9 1 2 3 4 5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
A10. Найдите площадь ромба, если его высота равна 12 см, а одна из диагоналей — 15 см.	1) 180 см^2; 2) 225 см^2; 3) 144 см^2; 4) 156 см^2; 5) 150 см^2. **A10** 1 2 3 4 5
A11. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, длины сторон которого равны 14, 18 и 24.	1) $6\sqrt{5}$; 2) $4\sqrt{7}$; 3) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{27\sqrt{5}}{5}$; 5) 11. **A11** 1 2 3 4 5
A12. Найдите выражение для $\log_6 30$, если $\lg 3 = a$, $\lg 5 = b$.	1) $2-a-b$; 2) $\frac{1+a}{1-a-b:2}$; 3) $\frac{2a+b}{2+a}$; 4) $\frac{1+a}{a-b+1}$; 5) $\frac{1+a}{a-b-1}$. **A12** 1 2 3 4 5
A13. Найдите сумму целых решений неравенства $\left\|\frac{x-3}{2x+2}\right\| \geq 1$, умноженную на их количество.	1) –90; 2) –75; 3) –70; 4) –56; 5) найти невозможно. **A13** 1 2 3 4 5
A14. Найдите сумму корней уравнения (корень, если он один) $\frac{2x-4}{x^2-3x} = \frac{x^2-x-2}{x-3}$, умноженную на их количество.	1) –2; 2) 0; 3) 1; 4) 3; 5) 2. **A14** 1 2 3 4 5
A15. Высота равнобедренной трапеции равна 4 м, а диагональ образует с основанием угол 45°. Найдите длину средней линии трапеции.	1) 4,2 м; 2) 4,4 м; 3) 4 м; 4) 4,6 м; 5) 5 м. **A15** 1 2 3 4 5
A16. На рисунке изображен график функции, определенной на интервале (–4; 5). Сколько корней имеет уравнение $\lg f(x) = 0$? 	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 5. **A16** 1 2 3 4 5
A17. Найдите сумму решений уравнения $\operatorname{tg} 2x \cdot \cos 2x = \sin 2x + \sin 4x$, принадлежащих множеству $[-\pi; 2\pi]$.	1) π; 2) 1,5π; 3) 2π; 4) 3,5π; 5) 6,5π. **A17** 1 2 3 4 5
A18. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, катет которого равен b, а противолежащий острый угол — β. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите боковую поверхность конуса, описанного около данной пирамиды.	1) $\frac{\pi b^2}{4\sin^2\beta\sin\alpha}$; 2) $\frac{\pi b^2}{4\cos^2\beta\cos\alpha}$; 3) $\frac{\pi b^2}{2\sin^2\beta\cos\alpha}$; 4) $\frac{\pi b^2}{3\sin^2\beta\cos\alpha}$; 5) $\frac{\pi b^2}{4\sin^2\beta\cos\alpha}$. **A18** 1 2 3 4 5

Часть В

В1. В нижнем основании цилиндра проведена хорда длиной 8, находящаяся на расстоянии 3 от центра этого основания. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если его высота равна 6.

В1

В2. Через сторону квадрата проведена плоскость, образующая с его диагональю угол 30°. Найдите градусную меру угла между плоскостью квадрата и проведенной плоскостью.

В2

В3. Периметр треугольника ABC, описанного около окружности, равен 36. Точка касания окружности со стороной BC делит ее в отношении $2:5$, считая от точки B, а точка касания со стороной AC удалена от точки A на 4. Найдите длину стороны AB.

В3

В4. Вследствие повышения квалификации рабочего его производительность труда повышалась дважды в течение года на одно и то же число процентов. На сколько процентов возрастала каждый раз производительность труда, если за одно и то же время рабочий раньше вырабатывал изделий на 75 000 руб., а теперь на 84 270 руб., причем расценки за это время не менялись?

В4

В5. Найдите сумму целых решений неравенства $\sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}}<\frac{1}{8}$, принадлежащих множеству $(-12;12)$.

В5

В6. Вычислите в градусах $\arccos(-\sin 2009°)$.

В6

В7. Чему равно значение выражения $3\sqrt{a-1}-3\sqrt{a}$, если $\sqrt{4a}+2\sqrt{a-1}=3$?

В7

В8. В арифметической прогрессии 10 членов. Сумма членов с четными номерами равна 25, а сумма членов с нечетными номерами равна 10. Найдите седьмой член прогрессии.

В8

В9. К окружности радиуса 20 проведена касательная, касающаяся окружности в точке K. ME — диаметр окружности, и луч ME пересекает касательную в точке N. Через точку E проведена хорда EL, параллельная касательной. Расстояние от центра окружности до хорды равно 8. Найдите длину отрезка MN.

В9

В10. Найдите сумму всех целых решений неравенства $\log_{\frac{x}{5}+1}\left(\log_2\frac{13-x}{15+x}\right)\le 1$.

В10

В11. Найдите сумму различных решений уравнения $x=(\sqrt{x+4}+x^2+x-4)(2+\sqrt{x+4})$.

В11

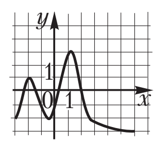
В12. Найдите значение коэффициента при x в приведенном квадратном уравнении со свободным членом, равным 12, если его корни положительные и удовлетворяют условию $x_1-x_2=1$.

В12

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 9

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
A1. Точка C делит отрезок AB в отношении $2:7$, считая от точки A. Найдите длину отрезка CB, если длина отрезка AB равна 18.	1) 4; 2) 14; 3) $5\frac{1}{7}$; 4) $12\frac{6}{7}$; 5) 12. **A1** 1 2 3 4 5
A2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Найдите градусную меру угла между прямыми AB и CD, если $\angle A = 60°$, $\angle ABD = 50°$, $\angle CBD = 40°$.	1) 35; 2) 45; 3) 25; 4) 60; 5) 30. **A2** 1 2 3 4 5
A3. Если a, b и c — последовательные натуральные нечетные числа и $a < b < c$, то чему может быть равно значение выражения $c - b - a$?	1) 3; 2) –2; 3) –8; 4) –9; 5) –10. **A3** 1 2 3 4 5
A4. Если $a = 1$, $b = -2$, то чему равно выражение $\left(2a^2+b\right)\left(x+y\right)+\left(a+b\right)\left(x-y\right)$?	1) 0; 2) $2x$; 3) $x - y$; 4) $x + y$; 5) $y - x$. **A4** 1 2 3 4 5
A5. Какое из данных чисел ближайшее к числу $\dfrac{9999}{100+\dfrac{1}{8888}}$?	1) 1000; 2) 100; 3) 10; 4) 1; 5) 0,1. **A5** 1 2 3 4 5
A6. График какой из данных функций не пересекается с графиком функции $y = 2 - \dfrac{x}{2}$?	1) $y = 3 - x$; 2) $y = 3 - \dfrac{x}{3}$; 3) $y = 2 + 2009x$; 4) $y = -1 - \dfrac{x}{2}$; 5) $y = 2009x + 2010$. **A6** 1 2 3 4 5
A7. Вычислите $2\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}2$.	1) 4,988; 2) 4,98; 3) 5,08; 4) 4,88; 5) 5,12. **A7** 1 2 3 4 5
A8. Разложите на множители $(x-2y)^2 - 16(-x)^2$.	1) $(2y-5x)(3x+2y)$; 2) $(5x+2y)(-3x-2y)$; 3) $(2y-5x)(-3x+2y)$; 4) $(2y-5x)(-3x-2y)$; 5) $(2y-9x)(7x+2y)$. **A8** 1 2 3 4 5
A9. Вычислите $\dfrac{2011\cdot 2009 - 2010\cdot 2012}{4021}$.	1) –2009; 2) –1; 3) 0; 4) 1; 5) 2009. **A9** 1 2 3 4 5
A10. Новый владелец магазина снизил цены на одну треть, однако через некоторое время вынужден был вернуться к старым ценам. На сколько процентов он при этом увеличил цены?	1) $66\frac{2}{3}$; 2) $33\frac{1}{3}$; 3) 48; 4) 150; 5) 50. **A10** 1 2 3 4 5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А11. Найдите сумму целых решений неравенства $27 \geq \left(0{,}(3)\right)^{3-x}$, принадлежащих промежутку $[-7;7]$.	1) –7; 2) –28; 3) 28; 4) 0; 5) 13. **А11** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А12. Найдите площадь трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), если диагональ AC оказалась биссектрисой угла BAD, $\angle ACB = 30°$, а радиус описанной окружности равен 8.	1) $48\sqrt{2}$; 2) $40\sqrt{6}$; 3) 83; 4) $48\sqrt{3}$; 5) 92. **А12** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А13. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 17$, отрезок BD — высота, $BD = 15$. Прямая, параллельная основанию треугольника, пересекает стороны AB и BC в точках M и K соответственно и разбивает данный треугольник на две равновеликие части. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника MBK.	1) $\frac{289\sqrt{2}}{20}$; 2) $\frac{289\sqrt{3}}{30}$; 3) $\frac{289\sqrt{2}}{30}$; 4) $\frac{289\sqrt{2}}{60}$; 5) $\frac{289\sqrt{3}}{60}$. **А13** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А14. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3;\ 6)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = \lg 81$? 	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 4; 5) 5. **А14** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А15. В основании конуса проведена хорда длиной $8\sqrt{2}$ на расстоянии 4 от центра основания. Найдите объем конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°.	1) 192π; 2) 196π; 3) $192\pi^2$; 4) 200π; 5) 192. **А15** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А16. Найдите сумму целых значений, которые может принимать выражение $2+3\left\|\sin 7x + \cos 7x\right\|$.	1) 14; 2) 18; 3) 20; 4) 27; 5) 35. **А16** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А17. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 и углом 30°. Объем призмы равен $48\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.	1) $\left(72+24\sqrt{3}\right)$; 2) $\left(36+12\sqrt{3}\right)$; 3) $36\left(\sqrt{3}+1\right)$; 4) $\left(72+24\sqrt{2}\right)$; 5) $\left(24+8\sqrt{3}\right)$. **А17** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А18. Найдите количество решений уравнения $2\sin 2x + \left\|\sin x - \cos x\right\| = 1$ на промежутке $[-\pi;\pi]$.	1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7. **А18** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Часть В

В1. Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC, образующие с плоскостью углы по 30°. Найдите расстояние между точками B и C, если $\angle BAC = 90°$, а расстояние от точки A до плоскости α равно 3. В ответе запишите квадрат найденного расстояния.   **В1** ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
В2. По дороге в одном и том же направлении идут два мальчика. Вначале расстояние между ними было 2 км, но так как скорость идущего впереди мальчика 4 км/ч, а скорость второго 5 км/ч, то второй нагоняет первого. С начала движения до того, как второй мальчик догонит первого, между ними бегает собака со средней скоростью 8 км/ч, от идущего позади мальчика она бежит к идущему впереди, добежав, возвращается обратно и так бегает до тех пор, пока мальчики не окажутся рядом. Какое расстояние (км) пробежит за все это время собака?   **В2** ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

B3. Если S — сумма четных чисел от 40 до 60 включительно, а n — число нечетных чисел от 40 до 60, то чему равно $S + n$?

B3 □□□□□□□□□□□□□□□

B4. В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 24 см и 12 см. Найдите радиус каждого круга.

B4 □□□□□□□□□□□□□□□

B5. Если d — длина интервала, являющегося решением неравенства $\sqrt{\log_3 \frac{2x-3}{1-x}} \le 1$, то чему равно $105 \cdot d$?

B5 □□□□□□□□□□□□□□□

B6. Найдите сумму всех целых решений неравенства $\sqrt{x+5}\left(x^2-5x+4\right) \le 0$.

B6 □□□□□□□□□□□□□□□

B7. Вычислите значение выражения $x+y+z$, если известно, что $x^2+y^2+z^2=2$, $xy+yz+xz=1$, $z>0$, $x>0$, $y>0$.

B7 □□□□□□□□□□□□□□□

B8. Найдите сумму всех целых решений неравенства $\left|\frac{1}{x-2}\right| + |2x+7| > \left|\frac{2x^2+3x-13}{x-2}\right|$.

B8 □□□□□□□□□□□□□□□

B9. Найдите сумму корней уравнения $2\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)^2 - 7\frac{1}{(x-1)^2} = 13\left(x^3-1\right)^{-1}$.

B9 □□□□□□□□□□□□□□□

B10. Чему равно значение выражения nB, где n — количество решений $(x_0;y_0)$ системы уравнений $\begin{cases} x^2 = 5x + y, \\ y^2 = x + 5y, \end{cases}$ а B — наибольшее из найденных x_0?

B10 □□□□□□□□□□□□□□□

B11. Найдите, при каких значениях x пересекаются графики функций $y = 12 + 2x\sqrt{x - \frac{12}{x}}$ и $y = x^2 + x$, и укажите в ответе произведение найденных x.

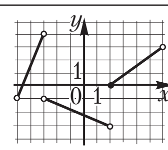
B11 □□□□□□□□□□□□□□□

B12. Найдите больший корень уравнения $\cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \log_6\left(x^2+9\right) - \log_6 x = 0$.

B12 □□□□□□□□□□□□□□□

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 10

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Натуральное число a — четное, а натуральное число b — нечетное. Какое из следующих равенств возможно?	1) $\frac{a-1}{b+1}=1$; 2) $ab=35$; 3) $\frac{a}{b}=9$; 4) $\frac{a}{b}=4$; 5) ни одно из предложенных. А1 1 2 3 4 5
А2. Известно, что $2<x<4$ и $3<y<5$. Оцените значение выражения xy.	1) $5<xy<9$; 2) $10<xy<12$; 3) $6<xy<20$; 4) $10<xy<18$; 5) $12<xy<20$. А2 1 2 3 4 5
А3. Сумма первой и второй сторон треугольника равна 22 см, первой и третьей — 26 см, второй и третьей — 28 см. Чему равен периметр треугольника?	1) 38 см; 2) 40 см; 3) 52 см; 4) 76 см; 5) 25,(3) см. А3 1 2 3 4 5
А4. Среднее арифметическое трех чисел равно a. Чему равно среднее арифметическое этих чисел и числа $2a$?	1) $1{,}25a$; 2) $1{,}5a$; 3) $2a$; 4) $3a$; 5) a. А4 1 2 3 4 5
А5. Треугольник ABC — равнобедренный, $AB=BC=16$ м; расстояние от центра описанной окружности до боковой стороны равно 6 м. Найдите радиус описанной окружности.	1) 13 м; 2) 12 м; 3) 11 м; 4) 9 м; 5) 10 м. А5 1 2 3 4 5
А6. Каково множество значений функции, заданной графически? 	1) $[-5;6]$; 2) $(-5;6)$; 3) $[-3;4]$; 4) $(-3;4)$; 5) $(-3;-1)\cup(-1;4)$. А6 1 2 3 4 5
А7. Найдите x_0 — наименьший корень уравнения $5^{0,5^{\frac{1}{x}}}-625=0$ и укажите в ответе значение выражения $x_0(x_0+2)$.	1) 2; 2) $-0{,}75$; 3) 8; 4) 24; 5) -1. А7 1 2 3 4 5
А8. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 4, а гипотенуза равна 24. Найдите площадь треугольника.	1) 111; 2) 124; 3) 112; 4) 144; 5) 136. А8 1 2 3 4 5
А9. Какое из данных равенств неверное?	1) $\lvert\sin 2\rvert=\sin 2$; 2) $\lvert\cos 2\rvert=-\cos 2$; 3) $\lvert\sin 3\rvert=\sin 3$; 4) $\lvert\cos 3\rvert=-\cos 3$; 5) $\lvert\sin 4\rvert=\sin 4$. А9 1 2 3 4 5
А10. Найдите полусумму трех чисел, если первое относится ко второму как $4{,}5:3{,}75$ и составляет 40 % третьего, а сумма второго и третьего равна 400.	1) 280; 2) 160; 3) 240; 4) 273,333; 5) 260. А10 1 2 3 4 5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А11. Найдите длину интервала (или сумму длин, если их несколько), являющегося решением неравенства $\frac{5x+4}{3+x}-\frac{2+x}{1-x}\le 0$.	1) 1; 2) 2,25; 3) 4; 4) 3,25; 5) длина — бесконечная. A11 1 2 3 4 5
А12. Нечетная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Вычислите $g(2)+g(6)+g(7)+g(11)$, если $g(x)=\frac{f(2x-13)+1}{2}$.	1) -1; 2) 0; 3) 0,5; 4) 1; 5) 2. A12 1 2 3 4 5
А13. Внесите множители под знак корня $x\sqrt[4]{-x}-(x-1)\sqrt{1-x}$.	1) $\sqrt[4]{-x^5}+\sqrt{(1-x)^3}$; 2) $\sqrt[4]{-x^5}-\sqrt{(1-x)^3}$; 3) $-\sqrt{-x^5}+\sqrt{(1-x)^3}$; 4) $-\sqrt[4]{-x^5}-\sqrt{(1-x)^3}$; 5) $-\sqrt[4]{-x^5}+\sqrt{(1-x)^3}$. A13 1 2 3 4 5
А14. На сторонах NP и PQ квадрата $MNPQ$ взяты соответственно точки A и B так, что $NA=AP$, $QB=\frac{1}{3}QP$. Найдите величину $\angle AMB$.	1) 60°; 2) 50°; 3) 30°; 4) 35°; 5) 45°. A14 1 2 3 4 5
А15. Известно, что $a^2+\frac{1}{a^2}=14$, $a>0$. Вычислите значение выражения $\frac{a^2+1}{a}$.	1) 4; 2) -4; 3) $\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{14}$; 5) 196. A15 1 2 3 4 5
А16. Упростите $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+0{,}75\sin^2 2\alpha$ при $\alpha=100°$.	1) -1; 2) 0; 3) 1; 4) $\cos 10°$; 5) $\sin 10°$. A16 1 2 3 4 5
А17. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если его высота равна диаметру основания.	1) 48π; 2) 72π; 3) 36π; 4) $72\pi^2$; 5) 72. A17 1 2 3 4 5
А18. В основании конуса проведена хорда, которую видно из центра основания под углом α, а из вершины конуса — под углом β. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания равен R.	1) $\frac{\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta}$; 2) $\frac{\pi R^2\sin\alpha}{\sin\frac{\beta}{2}}$; 3) $\frac{\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$; 4) $\frac{\pi R^2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$; 5) $\frac{\pi R^2\sin\alpha}{\sin\beta}$. A18 1 2 3 4 5

Часть B

B1. Имеются два слитка сплава олова с медью. Первый слиток содержит 230 г олова и 20 г меди, а второй слиток — 240 г олова и 60 г меди. От каждого слитка отрубили по куску, сплавили их и получили 300 г сплава. Сколько граммов отрубили от первого слитка, если в полученном сплаве было 84 % олова?

B1

B2. Число единиц двузначного числа на 4 меньше числа его десятков. Если это двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 11. Найдите это число.

B2

B3. Четыре числа расположены в порядке возрастания. Разность между каждыми двумя соседними числами равна 3, а сумма всех четырех чисел равна 118. Чему равно наибольшее число?

B3

B4. Основание прямой призмы — ромб с диагоналями 16 и 30. Большая диагональ призмы равна 50. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

B4

B5. Если пара $(x_0;y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 3x-2y+8=0, \\ y+3=\sqrt{x^2+6x+9}, \end{cases}$ то чему равно значение выражения $5x_0-7y_0$?

B5

B6. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Площадь треугольника ABC равна 18, а площадь треугольника $A_1B_1C_1$ — 32. Найдите периметры треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если их сумма равна 91. В ответе укажите больший из найденных периметров.

B6

B7. Вычислите $65\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{12}{13}\right)$.

B7

B8. Отрезок AB является диаметром окружности, а точка C лежит вне этой окружности. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найдите косинус угла ACB, если площади треугольников DCM и ACB относятся как $1:4$. В ответе запишите величину $10\cos\angle ACB$.

B8

B9. Найдите, при каких значениях x график функции $y=\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}$ пересекается с прямой $y=-\frac{3}{2}$, и укажите в ответе сумму найденных x.

B9

B10. Найдите, при каких целых значениях x функция $f(x)=\frac{\left(2^{-10}\cdot 0{,}25-2^{-x}\right)\log_x\left(\frac{x}{4}-1\right)}{15x-x^2-50}$ принимает значения не меньшие, чем 0, и укажите в ответе сумму найденных x.

B10

B11. Найдите S — сумму корней уравнения $\sin x+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}+\sqrt{2-\sin^2 x}=3$ на промежутке $\left[-2\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ и укажите в ответе $S\cdot\pi^{-1}$.

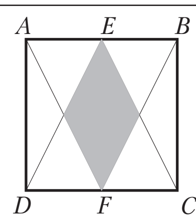
B11

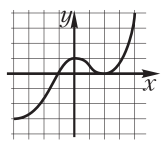
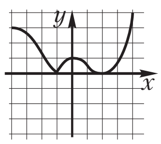
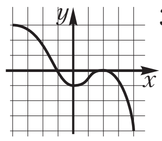
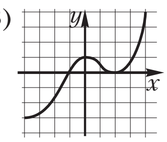
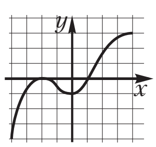
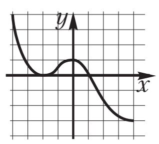
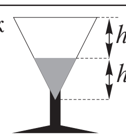
B12. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1-16x^2}}+1=-x+2\sqrt{1+4x}+\sqrt{1-4x}$.

B12

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 11

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Вычислите $\frac{x}{y}$, если $x=12$, $y=0{,}12$.	1) 0,01; 2) 0,1; 3) 1; 4) 10; 5) 100. **А1** 1 2 3 4 5
А2. Если $y(x-1)=z-1$, то	1) $x=z-y$; 2) $x=z-y-2$; 3) $x=\frac{z}{y}$; 4) $x=\frac{y}{z-1}+1$; 5) $x=\frac{z+y-1}{y}$. **А2** 1 2 3 4 5
А3. Вычислите $\log_2\left(1^{2a}+1^{4a}\right)$.	1) 0; 2) 1; 3) $8a$; 4) $6a$; 5) $\log_2(6a)$. **А3** 1 2 3 4 5
А4. Какое значение из данных может принять выражение $2x^3+2008x-2010$, если x — натуральное число?	1) 1; 2) 6151; 3) 20 021; 4) 22 113; 5) 112 230. **А4** 1 2 3 4 5
А5. Вычислите $\frac{2}{3}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0{,}25\right)$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{128}{3}$; 4) $\frac{1}{192}$; 5) другой ответ. **А5** 1 2 3 4 5
А6. Вычислите $\sin 5^\circ \cos 25^\circ + \sin 85^\circ \sin 25^\circ$.	1) 0,25; 2) 0,5; 3) 1; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **А6** 1 2 3 4 5
А7. В квадрате $ABCD$ точки E и F — середины сторон AB и CD (см. рис.). Найдите площадь закрашенной части, если площадь $ABCD$ равна 24. 	1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) $2\sqrt{6}$; 5) 10. **А7** 1 2 3 4 5
А8. Упростите $2^{2+\log_2^2 2}$.	1) 1; 2) 4; 3) 6; 4) 8; 5) 16. **А8** 1 2 3 4 5
А9. Сократите дробь $\frac{t+2\sqrt{t}}{4-t}$.	1) $\frac{t}{2-t}$; 2) $\frac{\sqrt{t}}{2-t}$; 3) $\frac{-\sqrt{t}}{\sqrt{t}+2}$; 4) $\frac{-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-2}$; 5) $\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-2}$. **А9** 1 2 3 4 5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А10. Сечением куба плоскостью не может являться	1) правильный шестиугольник; 2) правильный треугольник; 3) трапеция; 4) ромб; 5) правильный пятиугольник. **А10** 1 2 3 4 5
А11. Средняя заработная плата работников фирмы в 2008 г. составляла 500 у. е. в месяц. Какой была среднемесячная заработная плата работников фирмы в 2009 г., если половине работников ее повысили в 2 раза?	1) 500; 2) 625; 3) 750; 4) 1000; 5) невозможно определить. **А11** 1 2 3 4 5
А12. Если график функции $y = f(x)$ приведен на рисунке, то графиком функции $y = f(-x)$ будет являться:  1)  2)  3)  4)  5) 	**А12** 1 2 3 4 5
А13. Укажите, какое из данных уравнений имеет решения. 1) $10^x + 100 = 0$; 2) $\lvert x\rvert = \log_{0,2} 3$; 3) $\sin(2010x) = 2010$; 4) $\mathrm{tg}(x^2) = -\sqrt{10}$; 5) ни одно из данных.	**А13** 1 2 3 4 5
А14. Решением неравенства $3^{x+1} > \dfrac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}$ является промежуток, длина которого равна	1) 1,5; 2) 1,125; 3) $\dfrac{\sqrt{61}}{6}$; 4) $\dfrac{\sqrt{41}}{4}$; 5) 0,125. **А14** 1 2 3 4 5
А15. В фужер, который имеет форму конуса, налит сок так, как показано на рисунке. Какую часть объема фужера занимает сок? 	1) 1/2; 2) 1/3; 3) 1/4; 4) 1/8; 5) 1/16. **А15** 1 2 3 4 5
А16. Решите уравнение $\sqrt{x^2+2x+1} = 3 + \sqrt{x^2-4x+4}$ и укажите в ответе сумму его целых решений из промежутка $[-5;5]$.	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 14; 5) 15. **А16** 1 2 3 4 5
А17. Из пункта A по прямолинейной дороге выехал автомобиль, а через некоторое время следом за ним — мотоциклист. Догнав автомобиль, мотоциклист повернул обратно и прибыл в пункт A в момент, когда автомобиль находился на расстоянии, в три раза большем от A, нежели в момент выезда мотоциклиста. Во сколько раз скорость мотоциклиста больше, чем скорость автомобиля?	1) 1,5; 2) $\dfrac{4}{3}$; 3) 2; 4) 2,25; 5) 1,75. **А17** 1 2 3 4 5
А18. Две боковые грани прямой треугольной призмы взаимно перпендикулярны и их площади равны S и Q. Найдите площадь сечения, проведенного через общее ребро этих граней перпендикулярно плоскости третьей боковой грани.	1) $\sqrt{SQ}$; 2) $S+Q$; 3) $\dfrac{SQ}{\sqrt{S^2+Q^2}}$; 4) $\dfrac{S+Q}{2\sqrt{3}}$; 5) другой ответ. **А18** 1 2 3 4 5

Часть B

B1. Три друга купили пирожные. Мирон и Иван съели одно пирожное на двоих, а Тимофей съел два пирожных. На сколько процентов Мирон съел пирожных меньше, чем Тимофей?

B1

B2. Отрезок CD — общая хорда двух окружностей. Хорда BD первой окружности лежит на касательной ко второй окружности, а хорда AC второй окружности лежит на касательной к первой окружности. Найдите длину хорды DC, если $BC=8$, $AD=18$.

B2

B3. Какое максимальное число суббот может быть в году?

B3

B4. Вычислите $\dfrac{2\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$.

B4

B5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC точки K, L, N принадлежат, соответственно, сторонам AB, BC, AD, причем $AK:AB=3:4$. Четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм, стороны которого параллельны диагоналям трапеции. Найдите площадь параллелограмма $KLMN$, если площадь трапеции $ABCD$ равна 24.

B5

B6. Найдите все пары $(x_0;y_0)$ — решения системы уравнений $\begin{cases} x^2-2y^2-xy+2x-y+1=0, \\ 2x^2-y^2+xy+3x-5=0 \end{cases}$ и укажите в ответе утроенное количество его решений, умноженное на наименьшее найденное значение x_0.

B6

B7. Полная поверхность октаэдра равна $36\sqrt{3}$. Чему равен объем этого октаэдра?

B7

B8. Сколько корней у уравнения $\sqrt[4]{4+|x|}=\dfrac{4}{x^4}$?

B8

B9. Решите уравнение $\log_7(3x+5)+\sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)}=0$. В ответе запишите удвоенный корень (удвоенное произведение корней, если их несколько).

B9

B10. Высота правильной треугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60°. Найдите расстояние от вершины основания до плоскости противолежащей ему боковой грани.

B10

B11. Найдите среднее арифметическое корней (в градусах) уравнения $\left|\sqrt{\pi^2-x^2}-10\right|+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{\pi^2-x^2}=11-\sin x\cos x$.

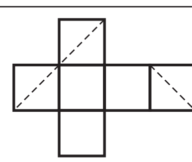
B11

B12. Нечетная функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[-5;5]$. Для всякого неотрицательного значения переменной из этого промежутка значение $f(x)$ совпадает со значением функции $g(x)=x(x+3)(x-4)(x-7)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x)=0$?

B12

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 12

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Чему равно $0{,}123\cdot10^4$?	1) 0,0000123; 2) 12,3; 3) 123; 4) 1230; 5) 12 300. **А1** 1 2 3 4 5
А2. Два угла в треугольнике равны 30° и 35°. Каким является этот треугольник?	1) остроугольным; 2) прямоугольным; 3) тупоугольным; 4) равнобедренным; 5) правильным. **А2** 1 2 3 4 5
А3. Найдите приближенное значение $\sqrt{\frac{7}{2}}$, если известно, что $\sqrt{14}\approx3{,}74$.	1) 1,32; 2) 1,86; 3) 1,87; 4) 1,88; 5) 1,92. **А3** 1 2 3 4 5
А4. Вычислите $g(f(1))$, если $f(x)=\frac{2}{x}$, $g(x)=x^2$.	1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{4}$. **А4** 1 2 3 4 5
А5. Вычислите $\left(\sqrt{12}-4\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)$.	1) $-2\sqrt{12}$; 2) $4\sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{12}$; 4) -4; 5) 8. **А5** 1 2 3 4 5
А6. Известно, что $\sin\alpha<0$, $\operatorname{ctg}\alpha>0$. В какой координатной четверти не может лежать угол α?	1) только в I; 2) в I или во II; 3) в I, или II, или IV; 4) только в III; 5) в IV или во II. **А6** 1 2 3 4 5
А7. Вместимость ведра 10 л. Сколько надо таких ведер, чтобы заполнить бочку объемом 1 м^3?	1) 10; 2) 20; 3) 100; 4) 1000; 5) 10 000. **А7** 1 2 3 4 5
А8. В коробке лежат белые и черные шарики, причем белых в 3 раза больше, чем черных. Сколько может быть шариков в коробке?	1) 22 222; 2) 33 333; 3) 44 444; 4) 55 555; 5) 66 666. **А8** 1 2 3 4 5
А9. На развертке куба пунктиром обозначено сечение куба плоскостью. Найдите площадь этого сечения, если объем куба равен 8. 	1) 2; 2) $2\sqrt{3}$; 3) 4; 4) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; 5) $4\sqrt{3}$. **А9** 1 2 3 4 5
А10. В фирме 1/4 часть сотрудников — менеджеры. В связи с кризисом половину менеджеров уволили. Какой процент сотрудников этой фирмы теперь составляют менеджеры?	1) 20; 2) 12,5; 3) 10; 4) $\frac{100}{7}$; 5) 14. **А10** 1 2 3 4 5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
A11. Упростите $3^{1+\log_3^2 5}-3\cdot 5^{(\log_5 3)^{-1}}$.	1) 0; 2) 3; 3) $6\cdot 5^{\log_3 5}$; 4) 76; 5) 74.
A12. Вычислите значение выражения $\cos 15^\circ(\cos 50^\circ \sin 65^\circ-\cos 65^\circ \sin 50^\circ)$.	1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos 25^\circ \sin 15^\circ$.
A13. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы составляет с боковым ребром призмы угол 45°. Найдите косинус угла между пересекающимися диагоналями смежных боковых граней призмы.	1) 0; 2) 0,5; 3) 0,75; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
A14. Расположите по возрастанию числа $a=\sin 2$, $b=\sin^4 2$, $c=\lg 11$.	1) $a<b<c$; 2) $a<c<b$; 3) $b<c<a$; 4) $b<a<c$; 5) $c<a<b$.
A15. Решением неравенства $\left\|\|x\|-2\right\|<\|x-2\|$ является множество	1) $(-\infty;0)$; 2) $(-\infty;-2)$; 3) $(0;2)$; 4) $(-2;0)$; 5) $(-2;2)$.
A16. Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{360}{2^{x^2+2}+1}$.	1) 36; 2) 72; 3) 120; 4) 180; 5) 360.
A17. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Точки K, L, N принадлежат, соответственно, сторонам AB, BC, AC, причем прямая KL параллельна AA_1, прямая KN параллельна BB_1 и $AK:AB=1:4$. Найдите площадь треугольника KLN, если площадь треугольника ABC равна 64.	1) $\sqrt{82}$; 2) 8,5; 3) 8,75; 4) 9; 5) 9,5.
A18. Решите уравнение $\frac{1}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2}=\frac{1}{4}\sin 3x$. В ответе запишите сумму корней, принадлежащих промежутку $(-\pi;2\pi]$.	1) $-\frac{5\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{5\pi}{3}$; 5) 2π.

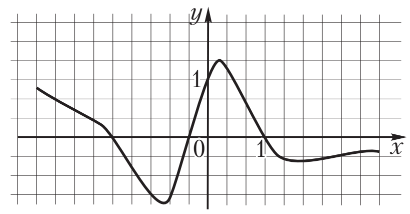
Часть B

B1. Найдите сумму корней (корень, если он один) уравнения $\sqrt{x-3}+\sqrt{6\cos(6\pi)-2x}=\sqrt[3]{x^2-x-6}$.
B2. По одной из методик изучения иностранных языков в первый день необходимо выучить значения 10 новых слов, а в каждый последующий — на два больше, чем в предыдущий. Какой словарный запас должен быть у человека, применяющего этот метод, через 15 дней?

B3. Краски хватает, чтобы покрасить поверхность шара, диаметр которого 24 см. Какое количество шаров с радиусом 10 мм можно покрасить этим же количеством краски?

B3

B4. На рисунке изображен график функции на отрезке $[-3;3]$. Сколько корней имеет уравнение $|f(x)|=1$ на этом отрезке?



B4

B5. Найдите радиус R шара, описанного около треугольной пирамиды, каждое из трех ребер которой, выходящих из одной ее вершины, равно 1, а объем треугольной пирамиды — максимально возможный при этих условиях. В ответе запишите величину $4R\sqrt{3}$.

B5

B6. На координатной плоскости заданы точки $A(0;-3)$ и $B(0;1)$. Вершина C лежит на окружности $(x-1)^2+y^2=4$. Найдите наибольшее из возможных значений площади треугольника ABC.

B6

B7. Чему равно значение выражения $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin\alpha-2\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha+\cos\alpha-2\cos 2\alpha}\operatorname{ctg}2\alpha$ при $\alpha=10°$?

B7

B8. Найдите все пары $(x_0;y_0)$ — решения системы уравнений $\begin{cases} x^2y+xy^2=20, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4} \end{cases}$ и укажите в ответе произведение их количества на наибольшее из найденных y_0.

B8

B9. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите косинус угла между скрещивающимися диагоналями смежных боковых граней призмы и укажите в ответе это значение, увеличенное в 16 раз.

B9

B10. Решите уравнение $7^{(2x)^2}+49^{6-x}=2\cdot 7^{2x^2-x+6}$ и укажите в ответе произведение его корней (корень, если он один).

B10

B11. В основании первой пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle C=45°$, $BC=18$, $AC=6\sqrt{2}$. Боковое ребро SB пирамиды перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Сечение пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через середину ребра AS параллельно прямым AC и SB, является основанием второй пирамиды. Ее вершина T — основание высоты AT треугольника ABC. Во сколько раз объем первой пирамиды больше объема второй пирамиды?

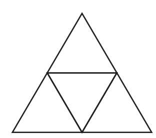
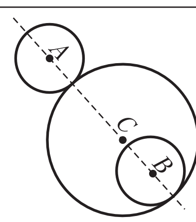
B11

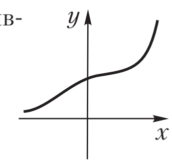
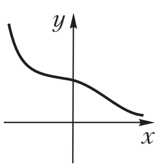
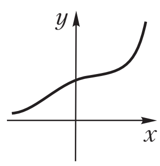
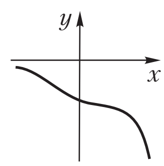
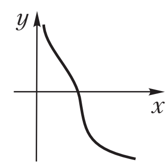
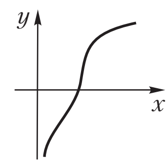
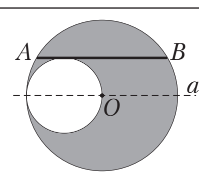
B12. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x+y$, если x и y удовлетворяют уравнению
$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=\sqrt{13}$.

B12

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 13

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Какому промежутку принадлежит число $\sqrt[3]{9}$?	1) (0,5;1); 2) (1;1,5); 3) (1,5;2); 4) (2;2,5); 5) (2,5;3). А1 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А2. Вычислите $\sqrt{3}\sqrt{27}-\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$.	1) –16; 2) –1; 3) 5; 4) 4; 5) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$. А2 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А3. Какое из следующих чисел является наибольшим: $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{7}{48}$; $\frac{5}{24}$; 12,5 %?	1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{3}{16}$; 3) $\frac{7}{48}$; 4) $\frac{5}{24}$; 5) 12,5 %. А3 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А4. На рисунке изображена развертка многогранника. Определите количество его вершин. 	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 9. А4 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А5. Известно, что $\cos(x+\alpha)=-\sin\alpha$. Какому из приведенных значений может быть равен угол x?	1) 180°; 2) –45°; 3) –90°; 4) –270°; 5) –180°. А5 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А6. Найдите отношение z к x, если $2x=3y$ и $2y=5z$.	1) 2 : 5; 2) 1 : 15; 3) 3 : 5; 4) 5 : 3; 5) 4 : 15. А6 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А7. Две одинаковых окружности с центрами в точках A и B касаются внутренним и внешним образом окружности радиуса 5 с центром в точке C (см. рис.). Найдите расстояние между точками A и B, если A, B и C лежат на одной прямой. 	1) 5; 2) 9; 3) 10; 4) 12; 5) 15. А7 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А8. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+7x=1$, то чему равно значение выражения $\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$?	1) –7; 2) –1; 3) 7; 4) $-\frac{1}{7}$; 5) $\frac{1}{7}$. А8 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А9. Вычислите $\frac{\lg 27}{\lg 9}+\frac{\log_3 125}{\log_9 5}$.	1) 4,5; 2) 7,5; 3) 15,5; 4) 26; 5) 28. А9 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
А10. Известно, что вершины треугольника ABC находятся в точках с координатами $A(-1;2)$, $B(-1;5)$, $C(-4;0)$. Определите, каким является треугольник ABC.	1) остроугольным; 2) тупоугольным; 3) прямоугольным; 4) равнобедренным; 5) равносторонним. А10 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
A11. Разложите на множители $3\cdot 2^{2x}+2\cdot 3^{2x}+6^{x+1}+6^{x}$.	1) $\left(3\cdot 2^{x}-3^{x}\right)\left(2^{x}-2\cdot 3^{x}\right)$; 2) $\left(3\cdot 2^{x}+3^{x}\right)\left(2^{x}+2\cdot 3^{x}\right)$; 3) $\left(2\cdot 2^{x}+3^{x}\right)\left(2^{x}+3\cdot 3^{x}\right)$; 4) $\left(2\cdot 2^{x}-3^{x}\right)\left(2^{x}-3\cdot 3^{x}\right)$; 5) иной ответ. A11 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
A12. Если график функции $y=f(x)$ изображен на рисунке, то какой из приведенных графиков может являться графиком функции, обратной данной?  1)  2)  3)  4)  5) 	A12 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
A13. Какая функция из данных удовлетворяет условию $f(x)<2$ при всех $x\in(1;+\infty)$?	1) $f(x)=\operatorname{ctg}(x-1)$; 2) $f(x)=2(x^{2}-1)$; 3) $f(x)=\log_{0,5}x$; 4) $f(x)=(0,5)^{-x}$; 5) $f(x)=2\sin x$. A13 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
A14. Упростите выражение $\sin^{6}\frac{x}{2}-\cos^{6}\frac{x}{2}-\left(\frac{\sin^{2}x}{4}-1\right)\cos x$.	1) 0; 2) 1; 3) $\sin x$; 4) $\operatorname{tg}x$; 5) $\sin x+\cos x$. A14 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
A15. Найдите периметр равнобедренного треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 3, а высота, проведенная к основанию, равна 8.	1) 24; 2) 27; 3) 28; 4) 32; 5) $16\sqrt{3}$. A15 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
A16. Решением неравенства $\lvert x-1\rvert>\operatorname{ctg}2$ является	1) $(-\infty;-\operatorname{ctg}2)\cup(\operatorname{ctg}2;+\infty)$; 2) $(-\infty;1-\operatorname{ctg}2)\cup(1+\operatorname{ctg}2;+\infty)$; 3) $(1-\operatorname{ctg}2;1+\operatorname{ctg}2)$; 4) $(-\infty;+\infty)$; 5) $\varnothing$. A16 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
A17. Отрезок AB касается меньшей окружности, параллелен прямой a, на которой лежат диаметры кругов (см. рис.). Найдите длину хорды AB, если площадь закрашенной области равна 64π. 	1) $\frac{16}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{8}{\sqrt{3}}$; 3) 8; 4) $8\sqrt{3}$; 5) 16. A17 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5
A18. Сколько корней имеет уравнение $\sin(\pi x)+\cos(\pi x)=0$ на отрезке $\left[-\frac{1}{3};5,6\right]$?	1) 12; 2) 10; 3) 7; 4) 6; 5) 4. A18 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ 1 2 3 4 5

Часть B

B1. Вычислите значение выражения $4\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}5$, $\operatorname{tg}\beta=0{,}25$.

B1

B2. Вычислите площадь фигуры, которая на координатной плоскости задается системой неравенств $\begin{cases} y\le 0, \\ x-y\ge 0, \\ x-3y\le 8. \end{cases}$

B2

B3. Найдите наибольшее натуральное значение, которое может принимать функция $y=3^{\operatorname{tg}x\cdot(\cos x+\operatorname{ctg}x)}$.

B3

B4. Абитуриент запомнил, что за то время, пока он выполнял тест, часовая стрелка совершила поворот на 78°. Сколько минут продолжалось это тестирование?

B4

B5. В параллелограмме *ABCD* точка *K* делит сторону *BC* пополам. Отрезки *AK* и *AC* пересекают диагональ *BD* в точках *P* и *Q* соответственно. Найдите отношение площадей треугольников *ABD* и *APQ*.

B5

B6. Решите неравенство $\log_2^2(-x)^2\le 4$ и укажите в ответе сумму длин отрезков, являющихся его решением.

B6

B7. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Лучи *BA* и *CD* пересекаются в точке *L*, а лучи *BC* и *AD* — в точке *K*. Найдите величину угла *BAD* (в градусах), если $\angle CKD-\angle ALD=60°$.

B7

B8. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[3]{\left(x^2-6x+10\right)^2}=33-3|x-3|$.

B8

B9. В правильную треугольную призму можно вписать шар таким образом, что он будет касаться всех боковых граней и оснований призмы. Найдите градусную меру угла наклона диагонали боковой грани призмы к плоскости основания.

B9

B10. Боковая грань правильной треугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 30° и имеет площадь, равную 96. Найдите высоту пирамиды.

B10

B11. Найдите четырехзначное натуральное число, в котором цифра тысяч, цифра сотен и двузначное число, составленное из его двух последних цифр, образуют геометрическую прогрессию, а произведение цифр искомого числа принимает максимально возможное значение при этих условиях.

B11

B12. Нечетная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x)=x(x+1)(x+3)(x-7)$. Найдите значение функции $h(x)=\dfrac{14f(x)+14g(x)}{f(x)-g(x)}$ при $x=-2$.

B12

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 14

Часть А

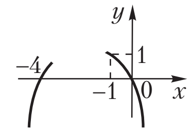
ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Какие из данных пар чисел не являются решениями уравнения $2y^2+x=1$?	1) $(-1;1)$; 2) $(-7;-2)$; 3) $(-1;-1)$; 4) $(0;1)$; 5) $(-7;2)$. А1: 1 2 3 4 5
А2. Сколько простых чисел находится в промежутке $[0;10]$?	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 10. А2: 1 2 3 4 5
А3. Вычислите $3{,}14\cdot 2{,}4+1{,}57\cdot 15{,}2-\frac{2}{5}$.	1) 3,1; 2) 15; 3) 30,96; 4) 31; 5) 31,4. А3: 1 2 3 4 5
А4. Упростите $\frac{(-a)^2-(-a)^3}{a^2}$.	1) $1-a$; 2) $1-a^3$; 3) $1+a^3$; 4) $1+a$; 5) 0. А4: 1 2 3 4 5
А5. Вычислите x^5, если $5^x=\frac{1}{5}$.	1) -1; 2) $-0{,}5$; 3) 1; 4) 0,2; 5) $(0{,}2)^5$. А5: 1 2 3 4 5
А6. Натуральные числа a, b, c делятся на число 12 с остатками 7, 9, 11 соответственно. Найдите остаток от деления числа $a+b+c$ на 12.	1) 3; 2) 5; 3) 8; 4) 10; 5) 27. А6: 1 2 3 4 5
А7. Точка E — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Чему равна площадь $ABCD$, если площадь треугольника AED равна 4?	1) 10; 2) 12; 3) 14; 4) 16; 5) 17. А7: 1 2 3 4 5
А8. Какое тело или группа тел получится в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы?	1) один цилиндр; 2) два цилиндра; 3) один конус; 4) два конуса с общей вершиной; 5) два конуса с общим основанием. А8: 1 2 3 4 5
А9. Среди данных чисел выберите наибольшее.	1) $\sin 1$; 2) $\sin 5$; 3) $\cos 1$; 4) $\operatorname{tg} 3$; 5) $\operatorname{ctg} 5$. А9: 1 2 3 4 5
А10. Найдите разность арифметической прогрессии, если 2009-й ее член равен $\log_3 12$, а 2010-й член равен $\log_3 4$.	1) -1; 2) $\log_3 4$; 3) $\log_3 8$; 4) 1; 5) $-\log_3 8$. А10: 1 2 3 4 5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
A11. Укажите множество значений функции $y=(x-2)(1-x)$.	1) $(-\infty;+\infty)$; 2) $(-\infty;2]$; 3) $(-\infty;0{,}25]$; 4) $[0{,}25;+\infty)$; 5) $(-\infty;-0{,}25]$. **A11** 1 2 3 4 5
A12. Найдите сумму всех натуральных чисел n, для которых выполняется равенство НОД $(18,n)=\dfrac{n}{2}$.	1) 16; 2) 36; 3) 39; 4) 52; 5) 53. **A12** 1 2 3 4 5
A13. В пожарном ведре, имеющем коническую форму, находится вода. Если объем воды составляет $\dfrac{1}{27}$ часть объема всего ведра, то какую часть высоты ведра (H) составляет уровень воды (h)?	1) $\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{27}}$; 3) $\dfrac{1}{9}$; 4) $\dfrac{1}{12}$; 5) $\dfrac{1}{27}$. **A13** 1 2 3 4 5
A14. Вычислите $\dfrac{\sin x+\sin(-y)}{\sin x+\sin y}$, если $x+y=\dfrac{\pi}{3}$, $x-y=\dfrac{2\pi}{3}$.	1) 1; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) 3; 4) -1; 5) -3. **A14** 1 2 3 4 5
A15. Определите, в каких координатных четвертях лежат точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $4x+xy+2y=-8$, и укажите в ответе сумму номеров этих четвертей.	1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 7; 5) 9. **A15** 1 2 3 4 5
A16. Вычислите $\log_{\sqrt{3\sqrt[3]{9}}}\left(\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{27}}{9}}\,5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{3}}\right)$.	1) 1; 2) 0,25; 3) $\dfrac{19}{20}$; 4) $\dfrac{13}{20}$; 5) 2,3. **A16** 1 2 3 4 5
A17. Найдите значение выражения $\sqrt{x-2-2\sqrt{x-3}}-\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}$ при $x=3{,}81$.	1) 3,81; 2) 1,8; 3) -2; 4) $-1{,}8$; 5) $-3{,}81$. **A17** 1 2 3 4 5
A18. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Лучи BA и CD пересекаются в точке L, а лучи BC и AD — в точке K. Найдите градусную меру угла ABC, если $\angle CKD=27°$, $\angle ALD=33°$.	1) 30; 2) 60; 3) 57; 4) 63; 5) 120. **A18** 1 2 3 4 5

Часть B

B1. Кусок первого сплава меди и олова весом 2 кг содержит 30 % меди. При сплавлении этого куска с некоторым количеством второго сплава меди и олова, содержащего 40 % олова, получился сплав, в котором содержание меди и олова относилось как 2 : 3. Сколько килограммов второго сплава было добавлено? **B1**
B2. Найдите площадь треугольника ABC, если точки D и E — середины сторон AB и BC соответственно, F — точка пересечения диагоналей трапеции $ADEC$, а площадь треугольника DEF равна 2. **B2**

B3. На рисунке изображен фрагмент параболы. Найдите y_0 — ординату ее вершины и укажите в ответе $12y_0$.



B3

B4. Найдите, при каком наименьшем (в градусах) $x \in [-180°;180°)$ функция $y = \sqrt[3]{\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x - 7}$ принимает наименьшее значение.

B4

B5. Найдите все пары $(x_0;y_0)$ — решения системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 15, \\ x^2 + 3xy - 8y^2 = 20 \end{cases}$ и укажите в ответе количество его решений, умноженное на наименьшее найденное x_0.

B5

B6. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(1;-3)$, $B(2;5)$, $C(-3;1)$. Найдите сумму координат вершины D.

B6

B7. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\frac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$.

B7

B8. Сколько различных корней имеет уравнение $\cos^{10} x = \sin \frac{\pi}{10}$ на промежутке $[-150°;90°]$?

B8

B9. Равнобедренные треугольники ADB и ACB имеют общее основание AB. Найдите градусную меру угла между плоскостями этих треугольников, если $BC = 34$, $AB = 60$, $BD = 20\sqrt{3}$, $DC = 2\sqrt{19}$.

B9

B10. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите величину угла (в градусах) между двумя апофемами пирамиды.

B10

B11. Решите уравнение $3\log_2^2(\sin x) + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$ и укажите в ответе сумму его корней (в градусах), принадлежащих промежутку $(0°;180°)$.

B11

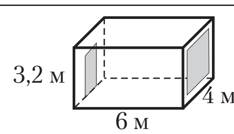
B12. Чему равно максимально возможное значение величины $4x + 3y$, если x и y удовлетворяют уравнению $\sqrt{x^2 + (y-10)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = 10$?

B12

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 15

Часть А

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Какая из данных дробей меньше, чем $\frac{2}{3}$?	1) $\frac{7}{8}$; 2) $\frac{8}{9}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{3}{5}$; 5) $\frac{5}{7}$. А1 1 2 3 4 5
А2. Футбольная команда выиграла 24 игры и проиграла 32. Каково отношение проигранных игр к числу сыгранных матчей?	1) $32:24$; 2) $4:3$; 3) $3:4$; 4) $3:7$; 5) $4:7$. А2 1 2 3 4 5
А3. Представьте в виде степени выражение $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{3}}$.	1) $25^{\frac{8}{9}}$; 2) $5^{\frac{8}{9}}$; 3) 25^2; 4) 5^2; 5) 9^2. А3 1 2 3 4 5
А4. Углы $\angle A$ и $\angle B$ треугольника ABC увеличили вдвое, в результате чего угол $\angle C$ уменьшился вдвое. Чему был равен изначально угол $\angle C$?	1) 60°; 2) 90°; 3) 100°; 4) 120°; 5) 135°. А4 1 2 3 4 5
А5. Какое значение может принять угол α, если $2\sin\alpha = 1$?	1) 45°; 2) 60°; 3) 120°; 4) 150°; 5) 210°. А5 1 2 3 4 5
А6. Если $\lg\frac{a}{b} = n$, то чему равно значение $\lg\frac{10b}{a}$?	1) $10n$; 2) $\frac{1}{10n}$; 3) $\frac{10}{n}$; 4) $1+\frac{1}{n}$; 5) $1-n$. А6 1 2 3 4 5
А7. Упростите выражение $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^4}}$ при $a < 0$.	1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{a^2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{a}$; 5) $-\frac{1}{a^2}$. А7 1 2 3 4 5
А8. Среди приведенных графиков укажите график уравнения $4 - x^2 = 0$. 	А8 1 2 3 4 5

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
A9. Вычислите наибольшее значение функции $y=\left(\sqrt{3}\right)^{2-x^2+4x}$.	1) $\sqrt{3}$; 2) $3\sqrt{3}$; 3) 27; 4) 9; 5) $9\sqrt{3}$. A9 □ □ □ □ □ (1 2 3 4 5)
A10. Решением неравенства $\log_{\lvert x\rvert} x \le 1$ является множество	1) $\varnothing$; 2) $(0;1)$; 3) $(1;+\infty)$; 4) $(0;1)\cup(1;+\infty)$; 5) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. A10 □ □ □ □ □ (1 2 3 4 5)
A11. Известно, что $2\operatorname{ctg}^2\beta+5\operatorname{ctg}\beta-3=0$, причем $\pi<\beta<1{,}5\pi$. Найдите $\sin 2\beta$.	1) 0,6; 2) 0,75; 3) 0,8; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) −0,75. A11 □ □ □ □ □ (1 2 3 4 5)
A12. В какой из приведенных моментов времени угол между часовой и минутной стрелками часов равен 120°?	1) 12^{20}; 2) 11^{15}; 3) 10^{10}; 4) 6^{50}; 5) 16^{00}. A12 □ □ □ □ □ (1 2 3 4 5)
A13. Укажите периодическую функцию из данных.	1) $y=x+2\pi$; 2) $y=2\pi x$; 3) $y=x+\cos x$; 4) $y=2\pi$; 5) $y=x\cdot\sin x$. A13 □ □ □ □ □ (1 2 3 4 5)
A14. Найдите площадь треугольника ABC, если его вершины находятся в точках с координатами $A(-1;11)$, $B(7;11)$, а вершина C лежит на прямой $y=5$.	1) 12; 2) 16; 3) 18; 4) 24; 5) 48. A14 □ □ □ □ □ (1 2 3 4 5)
A15. Определите минимальное количество рулонов обоев, которое необходимо для полной оклейки стен комнаты (см. рис.). Ширина обоев в рулоне — 50 см, а длина — 9 м. В комнате имеется окно размером 2 м на 3 м и дверь шириной 0,75 м и высотой 2000 мм. 	1) 11; 2) 12; 3) 13; 4) 14; 5) 15. A15 □ □ □ □ □ (1 2 3 4 5)
A16. Решите уравнение $(0,2)^{x+1}=\sqrt{35+5x}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.	1) 5; 2) 1; 3) 2; 4) −2; 5) −1. A16 □ □ □ □ □ (1 2 3 4 5)
A17. Сколько корней имеет уравнение $\log_x(2x-1)=2$?	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) ни одного. A17 □ □ □ □ □ (1 2 3 4 5)
A18. Периодическая функция $y=f(x)$ с периодом, равным 3, определена на множестве всех действительных чисел. Известно, что $f(1)=-1$. Найдите значение выражения $2f(28)-f(-8)$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) −1; 5) −2. A18 □ □ □ □ □ (1 2 3 4 5)

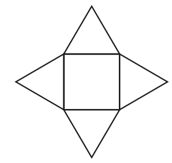
Часть В

B1. Решите уравнение $5^{\log_5\lvert x\rvert}+\lvert x\rvert^{\frac{1}{\log_5\lvert x\rvert}}=15$ и укажите наименьший из корней, умноженный на количество решений (либо корень, если он один). B1 □□□□□□□□□□□□□□□

B2. В начале года хор посещало 20 детей, из которых 60 % — девочки. Потом в хор записались еще 2 мальчика и 3 девочки. Сколько процентов от числа детей в хоре составили девочки в конце года?

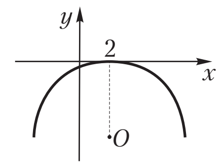
B2

B3. На рисунке изображена развертка многогранника, которая состоит из квадрата и четырех правильных треугольников. Найдите объем этого многогранника, если периметр квадрата равен $24\sqrt{2}$.



B3

B4. Графиком некоторой функции $y = f(x)$ является полуокружность с центром в точке $O(2;-5)$, изображенная на рисунке. Найдите значение $f(6)$.



B4

B5. Найдите все пары $(x_0;y_0)$ — решения системы уравнений $\begin{cases} xy = 40, \\ \lg x \cdot \lg y = \lg 4 \end{cases}$ и укажите в ответе сумму количества решений и наименьшего из найденных x_0.

B5

B6. Пусть S_n обозначает сумму первых n членов арифметической прогрессии. Чему равно S_{2010}, если $S_{1010} = S_{1000} = 1010$?

B6

B7. Найдите, в точке с какой абсциссой график функции $y = \lg^2\left(x^2 - 3x - 9\right) + \sqrt{x^3 - 8x - 8}$ пересекает ось Ox.

B7

B8. Найдите четырехзначное натуральное число, в котором цифра тысяч, цифра сотен и двузначное число, составленное из его двух последних цифр, образуют геометрическую прогрессию, а его три последние цифры — арифметическую прогрессию.

B8

B9. Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит квадрат, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 60°. Отрезок D_1A перпендикулярен плоскости основания. Найдите длину этого отрезка, если площадь боковой поверхности призмы равна $6\left(\sqrt{3} + 2\right)$.

B9

B10. Найдите сумму корней (в градусах) уравнения $4^{\sin x - \frac{1}{4}} = 1 + \dfrac{2^{\sin x}}{2 + \sqrt{2}}$ на промежутке $[-\pi; 2\pi]$.

B10

B11. Найдите радиус R шара, вписанного в треугольную пирамиду, три ребра которой, выходящие из одной вершины, равны 1, 2 и 3, а объем треугольной пирамиды — максимально возможный при этих условиях. В ответе запишите величину $6R$.

B11

B12. Решите уравнение $f\left(g(x)\right) + g\left(f(x) + 4\right) = 2010$, если известно, что $f(x) = 4x^2 + 3x + 5$ и $g(x) = \begin{cases} 2^{\log_2 2005}, & x \geq 8; \\ \dfrac{5}{x-8} - 2^x, & x < 8. \end{cases}$

B12

1.1. Так как $45=5\cdot 9$, то искомые числа делятся нацело и на 5, и на 9. Значит, у них последняя цифра либо 5, либо 0. Кроме того, сумма цифр у этих чисел кратна 9.

Если $y=0$, то сумма цифр равна $7+1+x+0=9+x$, и она кратна 9 при $x=0$ и $x=9$.

Если $y=5$, то сумма цифр равна $7+1+x+1+5=14+x$, и она делится на 9 без остатка при $x=4$.

1.2. Произведение двух цифр равно 28 только в случае $4\cdot 7$. Значит, искомые числа — это 47 и 74.

1.3. $165=3\cdot 5\cdot 11$; $150=2\cdot 3\cdot 5\cdot 5$; $330=2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$; $162=2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$. Следовательно, НОК$(165;\ 150)=3\cdot 5\cdot 11\cdot 2\cdot 5=1650$; НОД$(330;\ 162)=2\cdot 3=6$.

1.4. По условию число $2n$ является кратным числу 20. Значит, $2n=20k$, $k\in\mathbf{N}\Leftrightarrow n=10k$. Но при четных значениях k, т. е. $k=2p$, $n=20p$, получим НОК$(n{,}20)=$ НОК$(20p{,}20)=20p$, а по условию надо $40p$. Противоречие. При нечетных значениях k, т. е. $k=2p+1$, $n=20p+10$, получим НОК$(n{,}20)=$ НОК$(20p+10{,}20)=$ НОК$(2\cdot 5\cdot(2p+1),\ 2\cdot 2\cdot 5)=2\cdot 5\cdot(2p+1)\cdot 2=2\cdot(20p+10)=2n$, истинное равенство.

1.5. $2019+\frac{1}{3}-\left(3017+\frac{2}{3}\right)+\frac{6}{10}\cdot\left(1+\frac{2}{3}\right)=$

$=2019-3017+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=-998-\frac{1}{3}+1=-997\frac{1}{3}.$

1.6. $\left(3{,}8-\left(3+\frac{4}{5}\right)\cdot 0{,}8\right):1{,}9+\frac{10}{0{,}1}=(3{,}8-3{,}8\cdot 0{,}8):1{,}9+100=$

$=3{,}8(1-0{,}8):1{,}9+100=2\cdot 0{,}2+100=100{,}4.$

1.7. Так как $\frac{11}{3}:\left(3+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{11}{10}$;

$11{,}2-\left(9+\frac{2}{3}\right)=\left(11+\frac{1}{5}\right)-9-\frac{2}{3}=2+\frac{3-10}{15}=2-\frac{7}{15}=\frac{23}{15},$

то $\frac{11:10}{x}=\frac{2{,}3}{23:15}\Leftrightarrow\frac{11}{10x}=\frac{15}{10}\Leftrightarrow x=\frac{11}{15}.$

1.8. $-1{,}3\cdot\frac{7}{3}+1{,}3\cdot 3-2\cdot 1{,}3\cdot\frac{1}{3}=1{,}3\left(-\frac{7}{3}+3-\frac{2}{3}\right)=1{,}3\cdot\left(3-\frac{9}{3}\right)=0.$

1.9. $\frac{11^2-21^2+32\cdot 5}{17^2-15^2}=\frac{(11-21)(11+21)+32\cdot 5}{(17-15)(17+15)}=$

$=\frac{-10\cdot 32+32\cdot 5}{2\cdot 32}=\frac{-32\cdot 5}{32\cdot 2}=-2{,}5.$

1.10. Исходное выражение перепишем:

$\left(\frac{1103}{1119}-\frac{1119}{1103}\right):\frac{16\cdot 1111}{64-1111^2}$. Обозначим $1111=a$,

тогда $\left(\frac{a-8}{a+8}-\frac{a+8}{a-8}\right):\frac{16a}{64-a^2}=\frac{(a-8)^2-(a+8)^2}{(a+8)\cdot(a-8)}\cdot\frac{64-a^2}{16a}=$

$=\frac{-32a}{a^2-64}\cdot\frac{64-a^2}{16a}=2.$

1.11. Представив каждую дробь в виде разности двух дробей, получаем $\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)\right)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{50}{101}.$

1.12. $(-2)^2\cdot\left(2^2\right)^3\cdot(2\cdot 3)^{-2}\cdot 3^2\cdot\left(2^{3\cdot(-2)}\cdot 3^{\frac{1}{2}\cdot 6}\right)^3=$

$=2^2\cdot 2^6\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^2\cdot 2^{-6\cdot 3}\cdot 3^{3\cdot 3}=2^{2+6-2-18}\cdot 3^{-2+2+9}=2^{-12}\cdot 3^9.$

1.13. При данном в условии значении x выражение, стоящее под знаком первого модуля, меньше нуля. Поэтому $|x|=-x$. Так как по условию $x=-1234567890$, то выражение, стоящее под знаком второго модуля, положительное. Значит, $|5-x|=5-x$. Итак, $|x|-|5-x|=-x-(5-x)=5$.

1.14. $\sqrt{21^2}=21$; $\sqrt{(-21)^2}=|-21|=21$; $\sqrt{(-11)^4}=11^2=121$. Значит, $21-21+121=121$.

1.15. $\sqrt{50}-6\sqrt{2}-\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt{25\cdot 2}-6\sqrt{2}-\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}}=$

$=5\sqrt{2}-6\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot(5-6-1)=-2\sqrt{2}.$

1.16. $\sqrt[3]{\frac{38\cdot 4}{-19}}+5\sqrt[3]{\frac{17}{136}}=-\sqrt[3]{2\cdot 4}+5\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=-2+\frac{5}{2}=0{,}5.$

1.17. Так как $\sqrt[6]{a^6}=|a|$, $\left(\sqrt[6]{c}\right)^6=c$, то получаем

$\left|\sqrt[4]{24}-\sqrt{5}\right|-\left(\sqrt[4]{24}+\sqrt{5}\right)$. Поскольку $\sqrt[4]{24}<\sqrt{5}=\sqrt[4]{25}$, то

$\left|\sqrt[4]{24}-\sqrt{5}\right|-\sqrt[4]{24}-\sqrt{5}=\sqrt{5}-\sqrt[4]{24}-\sqrt[4]{24}-\sqrt{5}=-2\sqrt[4]{24}.$

1.18. $\left(\left(\sqrt[4]{3}\right)^2-\left(\sqrt[4]{2}\right)^2\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=$

$=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=3-2=1.$

1.19. Выделим в подкоренных выражениях полные квадраты: $5+2\sqrt{6}=2+3+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$;

$6-2\sqrt{5}=1+5-2\cdot 1\cdot\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$. Поэтому

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{5}-1\right|=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-1.$

1.20. Представить подкоренное выражение в виде полного квадрата удается, если в нем умножить числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$: $\frac{6\cdot 2-8\sqrt{2}}{3\cdot 2+4\sqrt{2}}=\frac{6-4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})^2}$. Поэтому ответ: $\frac{\left|2-\sqrt{2}\right|}{\left|1+\sqrt{2}\right|}=\frac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

1.21. Пусть $\sqrt[3]{2}=a$, тогда исходное выражение принимает вид: $(1-a)\left(1+a+a^2\right)=1^3-a^3=1-a^3$. Значит, ответ: $1-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=1-2=-1$.

1.22. $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}=-\sqrt{2}-\sqrt{3}.$

1.23. Обозначим искомое выражение A. Тогда

$A^2=\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)-2\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}}=$

$=4-2\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=4-2\sqrt{4-3}=4-2=2.$

Значит, $A=\sqrt{2}$ либо $A=-\sqrt{2}$. Поскольку искомое выражение отрицательное (из меньшего числа вычитается большее), то ответ $A=-\sqrt{2}$.

1.24. Выделим целую часть из дроби:
$m=\frac{3}{2}+\frac{3{,}5}{2n+1}\Leftrightarrow 2m=3+\frac{7}{2n+1}$.

Число $2m$ будет целым, только если $2n+1=\pm1$ либо $2n+1=\pm7$, то есть при $n=-4$, $n=-1$, $n=0$ и $n=3$. Осталось непосредственной подстановкой проверить, будет ли число m целым при этих n.

1.25. $(x-y)\cdot(x+y)=11$. Рассмотрим все возможные разложения числа 11 на два целых множителя:

$\begin{cases}x-y=1,\\x+y=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6,\\y=5.\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=11,\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6,\\y=-5.\end{cases}$

$\begin{cases}x-y=-1,\\x+y=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6,\\y=-5.\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=-11,\\x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6,\\y=5.\end{cases}$

2.1. 5 руб. 5 коп. = 505 коп., a руб. = $100a$ коп. Искомое выражение: $100a-505$.

2.2. От квадрата площадью $3\cdot3$ «отрезали» прямоугольный треугольник с катетами $3-x$ и $3-x$. Его площадь $\frac{(3-x)(3-x)}{2}$. Значит, искомая площадь
$9-\frac{(3-x)^2}{2}=\frac{18-9-x^2+6x}{2}=\frac{9-x^2+6x}{2}$.

2.3. $2a\cdot3x-2a\cdot2a-3x\cdot2a+3x=6ax-4a^2-6ax+3x=$
$=3x-4a^2$.

2.4. $3y^2(2y-1)+3y^3+3y^2-y+y^2-y^3-y^2+y=8y^3$.

2.5. $2x^3-4x^2-2x+3x^2-6x-3+2x^2+6x=2x^3+x^2-2x-3$. Коэффициент при x^2 равен 1. Отметим, что при раскрытии скобок можно было находить только коэффициенты при слагаемых, содержащих x^2, так как только коэффициент при x^2 требуется указать в ответе.

2.6. $\left(x^2+x+1\right)(x+A)=x^3+x^2+x+Ax^2+Ax+A=$
$=x^3+(1+A)x^2+(1+A)x+A$. Так как по условию коэффициент $1+A=-1$, то $A=-2$.

2.7. $a(x+b)-y(b+x)=a(x+b)-y(x+b)=(x+b)(a-y)$.

2.8. $\frac{y(x+1)}{y}=x+1$.

2.9. $\frac{2a^2+a^3}{a^3}=\frac{a^2(2+a)}{a^3}=\frac{2+a}{a}=\frac{2}{a}+1$.

2.10. $15a^3x^5y^{-2}-9a^2x^3y^{-4}-12a^4x^4y^{-1}z=$
$=3a^2x^3y^{-1}\left(5ax^2y^{-1}-3y^{-3}-4a^2xz\right)$.

2.11. $2^x\left(2^x\cdot2-8\cdot2^x\cdot2^{-1}\right)=2^x\cdot2^x\cdot2\cdot\left(1-4\cdot2^{-1}\right)=$
$=2^{x+x+1}(1-2)=-2^{2x+1}$.

2.12. $22(a-b)=66(3a+1)\Leftrightarrow(a-b)=3(3a+1)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a-b=9a+3b\Leftrightarrow-4b=8a\Leftrightarrow a=-\frac{b}{2}$.

2.13. $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow\frac{1}{a}=\frac{c+b}{b\cdot c}$, откуда $a=\frac{bc}{b+c}$.

2.14. $\frac{3a}{a-3}-\frac{5+a}{2(a-3)}\cdot\frac{54}{a(a+5)}=\frac{3a}{a-3}-\frac{27}{a(a-3)}=$
$=\frac{3a^2-27}{a(a-3)}=\frac{3(a^2-9)}{a(a-3)}=\frac{3(a+3)(a-3)}{a(a-3)}=\frac{3a+9}{a}$.

2.15. $\dfrac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{b+a}{ab}}=\frac{(a-b)(a+b)}{ab}\cdot\frac{ab}{b+a}=a-b$.

2.16. $x^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+6}+\left(b^{0{,}2-3{,}2+4}\right)^{\frac{1}{2}}=x^{-\frac{4+1}{6}}+a^{\frac{1+2}{6}+6}+b^{\frac{1}{2}}=$
$=x^{-\frac{5}{6}}+a^{6{,}5}+b^{0{,}5}$.

2.17. $5^{x-y}=5^2\Leftrightarrow x-y=2\Leftrightarrow y-x=-2$.

2.18. $\sqrt{3^{-3}\sqrt{3\cdot\sqrt{3^{-1}}}}=\sqrt{3^{-3}\sqrt{3\cdot3^{-\frac{1}{2}}}}=\sqrt{3^{-3}\sqrt{3^{1-\frac{1}{2}}}}=$
$=\sqrt{3^{-3}\sqrt{3^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt{3^{-3}\sqrt{3\cdot3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}}=\sqrt{3^{-3+\frac{1}{4}}}=\sqrt{3^{-\frac{11}{4}}}=3^{-\frac{11}{8}}$;
$3^{-\frac{11}{8}}=3^{-n}\Leftrightarrow n=\frac{11}{8}$.

2.19. $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{2}{24}}\cdot b^{\frac{2}{3}}:b^{\frac{2}{3}+(-1)\cdot(-2)}=a^{\frac{6-4+3}{12}+\frac{1}{12}}\cdot b^{\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}+2\right)}=$
$=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{-2}$.

2.20. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)}{x^{\frac{1}{3}}-1}=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$.

2.21. $((x+y)-3a)((x+y)+3a)=(x+y-3a)(x+y+3a)$.

2.22. $(a-b)^2-c^2=((a-b)-c)((a-b)+c)$.

2.23. Разложим числитель на множители:
$D=1^2-4\cdot2\cdot(-1)=9$, $x_1=-1$; $x_2=\frac{1}{2}$. Значит,
$2x^2+x-1=2\cdot(x+1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x+1)(2x-1)$.

Аналогично для знаменателя:
$D=3^2-4\cdot(-2)\cdot(-1)=9-8=1$, $x_1=1$; $x_2=\frac{1}{2}$.

Поэтому $-2x^2+3x-1=-2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(1-x)(2x-1)$.

Значит, $\frac{2x^2+x-1}{-2x^2+3x-1}=\frac{(x+1)(2x-1)}{(1-x)(2x-1)}=\frac{1+x}{1-x}$.

2.24. $(a+b)^2+3(a+b)+2=t^2+3t+2$, где $t=a+b$. Разложим теперь трехчлен t^2+3t+2 на множители. Вычислим дискриминант: $D=3^2-4\cdot1\cdot2=1$, $t_1=-1$, $t_2=-2$. Значит,
$t^2+3t+2=(t+1)(t+2)$, т. е. $(a+b)^2+3(a+b)+2=$
$=((a+b)+1)((a+b)+2)$.

2.25. $\frac{5}{x+3}-\frac{3x+5}{(x+3)(x-3)}+\frac{1}{x-3}=$
$=\frac{5(x-3)-(3x+5)+(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{3x-17}{x^2-9}$.

2.26. Так как $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$,
то $\frac{2}{(x-3)}-\frac{3x+1}{(x-3)(x+4)}-\frac{3}{x+4}=$
$=\frac{2(x+4)-(3x+1)-3(x-3)}{(x-3)(x+4)}=\frac{-4x+16}{(x-3)(x+4)}=\frac{4(4-x)}{(x-3)(x+4)}$.

2.27. 1) $\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}=\frac{1-x-1-x}{(1+x)(1-x)}=\frac{-2x}{1-x^2}$;

2) $\frac{-2x}{1-x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=-2x\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)=-2x\frac{2}{1-x^4}=-\frac{4x}{1-x^4}$.

2.28. Рассмотрим это выражение как квадратное относительно x. Вычислим $D=y^2-4\cdot1\left(-2y^2\right)=y^2+8y^2=9y^2$. Значит, $x_{1,2}=\frac{-y\pm\sqrt{D}}{2}=\frac{-y\pm3y}{2}$. Поэтому $x=y$ либо $x=-2y$.

Значит, можем разложить на множители квадратный трехчлен $x^2+xy-2y^2=(x-x_1)(x-x_2)=(x-y)(x+2y)$.

2.29. $(2x-1)^2+2(2x-1)(2x+1)+(2x+1)^2=$
$=\left((2x-1)+(2x+1)\right)^2=(4x)^2$; $\left(2x^2+1\right)^2-\left(2x^2-1\right)^2=$
$=\left(\left(2x^2+1\right)-\left(2x^2-1\right)\right)\left(\left(2x^2+1\right)+\left(2x^2-1\right)\right)=2\cdot 4x^2$.

Исходное выражение принимает вид $\dfrac{16x^2}{8x^2}=2$.

2.30. $\dfrac{(x-1)(x+1)+y(x+1)}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x-1+y)}{x+1}=x+y-1$.

2.31. Разложим многочлен, стоящий в левой части уравнения, на множители: $2x^3+7x^2+7x+2=2(x^3+1)+7(x^2+x)=$
$=2(x+1)(x^2-x+1)+7x(x+1)=$
$=(x+1)\left(2x^2-2x+2+7x\right)=(x+1)\left(2x^2+5x+2\right)$. Значит,
$(x+1)(2x^2+5x+2)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0,\\ 2x^2+5x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;\\ x=-2;\ x=-0,5.\end{array}\right.$

2.32. Так как $-8y^3+12y^2-6y+1=$
$=(-2y)^3+3\cdot(2y)^2\cdot 1-3\cdot(2y)\cdot 1^2+1^3=(-2y+1)^3$,
а $4y^2-4y+1=(2y-1)^2=(1-2y)^2$, то исходная дробь равна $1-2y$.

2.33. Разделим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{a+2b}{2a-b}$ на $b\neq 0$, а искомой дроби $\dfrac{2a^2+ab+b^2}{b^2-2a^2}$ на $b^2\neq 0$ (поскольку там находятся однородные многочлены).

Имеем $\dfrac{\frac{a}{b}+2}{2\frac{a}{b}-1}=-7$. Обозначим $\dfrac{a}{b}=t$. Значит,

$\dfrac{t+2}{2t-1}=-7\Leftrightarrow\begin{cases}t+2=-14t+7,\\ 2t-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow 15t=5\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

Поэтому $\dfrac{2\frac{a^2}{b^2}+\frac{ab}{b^2}+1}{1-2\frac{a^2}{b^2}}=\dfrac{2t^2+t+1}{1-2t^2}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1}{1-\frac{2}{9}}=$

$=\dfrac{2+3+9}{9}:\left(\dfrac{9-2}{9}\right)=\dfrac{14}{9}\cdot\dfrac{9}{7}=2$.

Если же $b=0$, то исходное равенство принимает вид $\dfrac{1}{2}=-7$. Последнее равенство является неверным.

2.34. $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=3^2\Leftrightarrow a^2+\dfrac{1}{a^2}+2a\cdot\dfrac{1}{a}=9$. Поэтому
$a^2+\dfrac{1}{a^2}=9-2=7$.

2.35. Так как среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше, чем их среднее геометрическое, то $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2$.

2.36. Возведем в квадрат каждое из данных равенств:
$x^2+y^2-2xy=111$; $x^2+y^2+2xy=37$. Теперь вычтем из первого равенства второе: $(x^2+y^2-2xy)-(x^2+y^2+2xy)=$
$=111-37\Leftrightarrow -4xy=74\Leftrightarrow xy=-18,5$.

2.37. $x-y=4$. Значит, $x^2+y^2-2xy=16\Leftrightarrow x^2+y^2=16+2\cdot 3=$
$=22$. Следовательно, $xy(x^2+y^2)=3\cdot 22=66$.

2.38. $\dfrac{3+\sqrt5}{2}\cdot\dfrac{3+\sqrt5-2}{2}\cdot\dfrac{3+\sqrt5-4}{2}\cdot\dfrac{3+\sqrt5-6}{2}=$
$=\dfrac{3+\sqrt5}{2}\cdot\dfrac{1+\sqrt5}{2}\cdot\dfrac{\sqrt5-1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt5-3}{2}=$
$=\dfrac{(\sqrt5)^2-3^2}{4}\cdot\dfrac{(\sqrt5)^2-1^2}{4}=\dfrac{-4}{4}\cdot\dfrac{4}{4}=-1$.

2.39. $\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{a(x+2)+b(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x(a+b)+(2a-2b)}{(x-2)(x+2)}$.
По условию числитель тождественно равен 1. Значит,
$\begin{cases}a+b=0,\\ 2a-2b=1\end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{4},\ b=-\dfrac{1}{4}$.

2.40. $\dfrac{2x-5}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-3}{x-1}=2-\dfrac{3}{x-1}$.

2.41.
$$\begin{array}{r|l}
-\ x^3+x^2+x+1 & x-2\\
\underline{x^3-2x^2} & \overline{x^2+3x+7}\\
-\ 3x^2+x+1 & \\
\underline{3x^2-6x} & \\
-\ 7x+1 & \\
\underline{7x-14} & \\
15 &
\end{array}$$

2.42. Рассмотрим формулу квадрата двучлена:
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Преобразуем трехчлен:
$4x^4+4x^2-1=(2x^2)^2+2\cdot(2x^2)-1$. Итак, первое слагаемое a — это $2x^2$, удвоенное произведение $2ab$ — это $2\cdot 2x^2\cdot 1$. Значит, второе слагаемое b — это 1. Но в исходном многочлене нет квадрата второго слагаемого, т. е. 1^2. Следовательно, к исходному выражению надо прибавить число 2, чтобы получить $(2x^2)^2+2\cdot 2x^2\cdot 1+1=(2x^2+1)^2$.

2.43. $x^2-4xy+4y^2+y^2=(x-2y)^2+y^2$.

2.44. $2a^2+2b^2=a^2+b^2+a^2+b^2=(a^2+2ab+b^2)+$
$+(a^2-2ab+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$.

2.45. Так как $x^2\geq 0$, то $x^2+100\geq 100$ и, значит,
$\left|x^2+100\right|=x^2+100$. Так как $x^2-x+2>0$ для любого x
$\left(D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 2<0\right)$, то $\left|x^2-x+2\right|=x^2-x+2$. Так как
$-2x^2\leq 0$, то $\left|-2x^2\right|=2x^2$.

2.46. Так как $x>2000$, то $|x|=x$; $|x-1010|=x-1010$.
Поэтому $|x|-|x-1010|=x-(x-1010)=1010$.

2.47. $\sqrt{36x^6y^4}=\left|6x^3y^2\right|=6y^2\left|x^3\right|=-6y^2x^3$, так как $x<0$.

2.48. $\sqrt{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{1-x^2}-1\right|=1-\sqrt{1-x^2}$, так как очевидно, что при любом x значение выражения $\sqrt{1-x^2}$ не больше, чем 1.

2.49. Выделим полные квадраты в подкоренных выражениях: $\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(a-6)^2}=|a-3|+|a-6|$. Так как $a>3$, то $|a-3|=a-3$, а так как $a<6$, то $|a-6|=-a+6$. Поэтому исходное выражение равно $a-3-a+6=3$.

2.50. $\sqrt{(5^a)^2+5^a\cdot 2\cdot 2^b+(2^b)^2}=\sqrt{(5^a+2^b)^2}=$
$=\left|5^a+2^b\right|=5^a+2^b$.

2.51. Так как $\sqrt[4]{a^2+2\sqrt2a+2}=\sqrt[4]{(a+\sqrt2)^2}=\sqrt{\left|a+\sqrt2\right|}=$
$=\sqrt{a+\sqrt2}$, то $\sqrt{a+\sqrt2}\,\sqrt{a-\sqrt2}=\sqrt{a^2-2}$. При $a=\sqrt3$ получим $\sqrt{3-2}=\sqrt1=1$.

2.52. $x^{\frac{3}{6}}+x^{\frac{6}{3}}+(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}\cdot(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}}+x^2+x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=$

$=x^{\frac{1}{2}}+x^2+x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}=x^2+x^{\frac{1}{3}}.$

2.53. Так как $x\ge 0$, $y\ge 0$, то

$x-y=\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$. Исходная дробь сокращается на $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

2.54. Так как исходное выражение имеет смысл при $x\ge 0$, $y\ge 0$, то $\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}=\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{y}\right)^3$. Поэтому $\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}=$

$=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right).$

2.55. Пусть $\sqrt{a}=x$, $\sqrt{b}=y$. Тогда $\left(\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x-y}{x}\right)\cdot\dfrac{x}{y}=$

$=\dfrac{x^2-(x-y)(x+y)}{x(x+y)}\cdot\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2-\left(x^2-y^2\right)}{(x+y)y}=\dfrac{y}{x+y}.$

2.56. Выражение имеет смысл при $-16a^3\ge 0$, т. е. при $a\le 0$. Значит, $\sqrt{-16a^3}=\sqrt{(4a)^2(-a)}=|4a|\sqrt{-a}=-4a\sqrt{-a}$.

2.57. Выражение имеет смысл при $-x\ge 0$, т. е. при $x\le 0$. Значит, $x\sqrt{-x}=-\sqrt{-x^3}$; $x\sqrt[3]{-x}=\sqrt[3]{x^3\cdot(-x)}=\sqrt[3]{-x^4}=-\sqrt[3]{x^4}$.

2.58. Выражение имеет смысл при $b<0$. Значит, $b=-\sqrt{b^2}=-\sqrt{-b}\sqrt{-b}$. Поэтому исходная дробь сокращается на $\sqrt{-b}$ и принимает вид $b:\sqrt{-b}=-\sqrt{-b}$.

2.59. Аналогично 1.23 обозначим искомое выражение B. Тогда, перемножив данные в условиях выражения, получим: $\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)=B\cdot 2\Leftrightarrow(\sqrt{a+1})^2-(\sqrt{a})^2=2B\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a+1-a=2B\Leftrightarrow B=0{,}5$.

2.60. 1) $\dfrac{2}{a+b}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{2}{a+b}\cdot\dfrac{b+a}{ab}=\dfrac{2}{ab}$;

2) $ab\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}\right)=ab\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2=ab\dfrac{(b+a)^2}{(ab)^2}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}$;

3) $\dfrac{(a+b)^2}{ab}\cdot\dfrac{ab}{(a+b)^2}=1.$

2.61. 1) $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2-y^2}{xy}=\dfrac{(x-y)(x+y)}{xy}$;

2) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2=\dfrac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\dfrac{(x-y)^2}{xy}$;

3) $\dfrac{x+y}{x}\cdot\dfrac{x}{x-y}=\dfrac{x+y}{x-y}$; 4) $\dfrac{(x-y)(x+y)}{xy}\cdot\dfrac{xy}{(x-y)^2}\cdot\dfrac{x-y}{x+y}=1.$

2.62. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-2}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}}{a-a+2}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}}{2}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+2}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a+2}}{a-a-2}=\dfrac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a}}{2}$;

3) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}+\sqrt{a+2}-\sqrt{a}}{2}=\dfrac{\sqrt{a-2}+\sqrt{a+2}}{2}$;

4) $\dfrac{\sqrt{a-2}+\sqrt{a+2}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}=\dfrac{1}{2}.$

2.63. Пусть $\sqrt{a}=x$, $\sqrt{b}=y$. Тогда

1) $\dfrac{(x-y)^3+2x^3+y^3}{x^3+y^3}=\dfrac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+2x^3+y^3}{x^3+y^3}=$

$=\dfrac{3x^3-3x^2y+3xy^2}{x^3+y^3}=\dfrac{3x\left(x^2-xy+y^2\right)}{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}=\dfrac{3x}{x+y}$;

2) $\dfrac{3x}{x+y}+3\dfrac{xy-y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{3x}{x+y}+3y\dfrac{(x-y)}{(x-y)(x+y)}=$

$=\dfrac{3x}{x+y}+\dfrac{3y}{x+y}=3.$

3.1. $2x+5=7x-2x-6+2\Leftrightarrow 5+6-2=7x-2x-2x\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 9=3x\Leftrightarrow x=3$.

3.2. $2x^2-x+2x-2x^2+1-x=2x-2\Leftrightarrow 1+2=2x\Leftrightarrow 3=2x\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=1{,}5$.

3.3. График $y=f(x)$ пересекает ось Ox в точке с ординатой, равной 0. Значит, $y=0\Leftrightarrow\dfrac{7x-2}{\sqrt{\sqrt{5}-3}}=0\Leftrightarrow 7x=2\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{7}$.

3.4. 1) $7{,}605:7{,}5+3{,}086=1{,}014+3{,}086=4{,}1$;

2) $\dfrac{6\cdot 9+8}{9}:\dfrac{2\cdot 12+7}{12}-\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{4\cdot 35+4}{35}=\dfrac{62}{9}\cdot\dfrac{12}{31}-\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{144}{35}=$

$=\dfrac{2\cdot 4}{3}-\dfrac{12}{7}=4\cdot\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{7}\right)=4\cdot\dfrac{14-9}{21}=\dfrac{20}{21}$;

3) $3{,}3+0{,}84\cdot\dfrac{20}{21}=3{,}3+\dfrac{21}{25}\cdot\dfrac{20}{21}=3{,}3+0{,}8=4{,}1$;

4) $x\cdot 4{,}1=4{,}1$, откуда $x=1$.

3.5. Аналогично 3.3 имеем $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2}{x-3}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x-4=x-3\Leftrightarrow x=1$.

3.6. Прямую $y=2-x$ строим по двум точкам. Пусть $x=0$, тогда $y=2-0=2$; если $x=2$, то $y=2-2=0$.

3.7. Будем искать уравнение прямой в виде $y=ax+b$. Так как точка $A(2;\,1)$ лежит на данной прямой, то $1=a\cdot 2+b\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b=1-2a$. Так как точка $B(-1;\,-1)$ принадлежит данной прямой, то $-1=a\cdot(-1)+b$. Решив систему $\begin{cases}b=1-2a,\\-1=-a+b,\end{cases}$ находим, что $a=\dfrac{2}{3}$, $b=-\dfrac{1}{3}$.

3.8. $\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{3x+5}{(x+3)(x-3)}+\dfrac{1}{x-3}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{5\cdot(x-3)-3x-5+(x+3)}{(x+3)(x-3)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5x-15-3x-5+x+3=0,\\x\ne\pm 3\end{cases}\Leftrightarrow 3x=17\Leftrightarrow x=\dfrac{17}{3}.$

3.9. По условию $c-b=2$, значит, имеем систему уравнений $\begin{cases}5x-7=3y+b,\\5y-7=3x+b+2.\end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получим $5x-5y=3y-3x-2\Leftrightarrow 8x-8y=-2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x-y=-0{,}25$.

3.10. Половина исходного числа — это $0{,}5A$. Значит, составляем уравнение $0{,}5A+30=2A\Leftrightarrow 30=1{,}5A\Leftrightarrow A=20$.

3.11. Так как $f(2x+1)=3\cdot(2x+1)+2$ и $f(3x-1)=3\cdot(3x-1)+2$, то $f(2x+1)=f(3x-1)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3\cdot(2x+1)+2=3\cdot(3x-1)+2\Leftrightarrow 2x+1=3x-1\Leftrightarrow x=2$.

3.12. Из второго уравнения выразим $y=4-3x$ и подставим в первое уравнение системы: $3x+2\cdot(4-3x)=5\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x+8-6x=5\Leftrightarrow 3x=3\Leftrightarrow x=1$. Подставляя найденное значение x в выражение для y, получаем $y=4-3\cdot 1=1$. Ответом является найденная пара чисел $(1;1)$.

3.13. Необходимо решить систему уравнений $\begin{cases}y=x-11,\\x=4y+2.\end{cases}$ Имеем $x=4\cdot(x-11)+2\Leftrightarrow x=4x-44+2\Leftrightarrow 3x=42\Leftrightarrow x=14$. Тогда $y=14-11=3$.

3.14. Из первого уравнения $y=2x\neq 0$. Тогда второе уравнение примет вид $\frac{x-1}{2x+2}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-6=2x+2,\\ x\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow 4x=8\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=2$. Значит, $y=2\cdot 2=4$.

3.15. Из первого уравнения $y=2-x$. Тогда $4x=1-4\cdot(2-x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4x=1-8+4x\Leftrightarrow 0\cdot x=-7$. Это уравнение не имеет решений, а значит, и исходная система также не имеет решений.

3.16. Из первого уравнения $y=\frac{2-2x}{5}$. Тогда

$4x=4-10\cdot\frac{2-2x}{5}\Leftrightarrow 4x=4-2\cdot(2-2x)\Leftrightarrow 4x=4-4+4x\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0\cdot x=0$. Это уравнение обращается в верное числовое равенство при любом x. Значит, его решение — это $x\in(-\infty;+\infty)$, а соответствующие каждому их них значения y находим по формуле $y=\frac{2-2x}{5}$.

3.17. Упростим первое уравнение:

$x^2+x+2y+1=x^2+2-x-y\Leftrightarrow 2x+3y=1$. Тогда $y=\frac{1-2x}{3}$ и второе уравнение примет вид $4x=2-6y\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x=1-3\cdot\frac{1-2x}{3}\Leftrightarrow 2x=1-1+2x\Leftrightarrow 0\cdot x=0$. Значит, $x\in(-\infty;+\infty)$, $y=\frac{1-2x}{3}$.

3.18. Обозначим $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$. Тогда $\begin{cases}3a-5b=1,\\ 2a+0{,}5b=4{,}5\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1+5b}{3},\\ 2\cdot\frac{1+5b}{3}+\frac{b}{2}=\frac{9}{2}.\end{cases}$ Из второго уравнения имеем

$\frac{4+20b+3b}{6}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2(4+23b)=9\cdot 6\Leftrightarrow 46b=46\Leftrightarrow b=1\Rightarrow$ $\Rightarrow a=\frac{1+5\cdot 1}{3}=2$. Итак, $\frac{1}{x}=2$, $\frac{1}{y}=1$, откуда $x=0{,}5$, $y=1$.

3.19. Так как точка $A(-1;\,-7)$ лежит на данной прямой, то $-7=2a\cdot(-1)-a^2+1\Leftrightarrow a=2$ либо $a=-4$.

3.20. Данная прямая должна быть параллельна оси Ox, т. е. коэффициент при x должен быть равен нулю. Уравнение данной прямой запишем так: $y=(a^2-4)\cdot x+(a+2)$. Значит, $a^2-4=0\Leftrightarrow a=\pm 2$. Осталось проверить, выше или ниже оси Ox при этих значениях a лежит данная прямая:

если $a=2$, то $y=0\cdot x+4$, т. е. $y=4$. Эта прямая лежит выше Ox;

если $a=-2$, то $y=0\cdot x+0$, т. е. $y=0$. Эта прямая совпадает с осью Ox, т. е. лежит не выше ее.

3.21. Из первого уравнения $x=1-a\cdot y$. Тогда

$a\cdot(1-ay)-3ay=2a+4\Leftrightarrow -a^2y-3ay=2a+4-a\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y(a^2+3a)=-a-4$. Это линейное уравнение относительно y не имеет решений, если $\begin{cases}a^2+3a=0,\\ -a-4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow a=0;\ a=-3$.

3.22. $(2x-1)\cdot 3\geq 2\cdot 5\cdot 3+(2x-2)\cdot 5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x-3\geq 30+10x-10\Leftrightarrow -23\geq 4x\Leftrightarrow x\leq -\frac{23}{4}$.

3.23. $x^3+x^2-x^2-x-x-1>x^3+2x-4\Leftrightarrow 4-1>2x+2x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x<3\Leftrightarrow x<\frac{3}{4}$.

3.24. Так как $4<\sqrt{17}$, то $4-\sqrt{17}<0$. Значит, $3x-9>0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x>3$.

3.25. Так как $\sin 1000°-1<0$, $1-\sin 10000°>0$ и, кроме того, $\sin 1000°=\sin 10000°$ (поскольку $10000°=25\cdot 360°+1000°$), то $x\geq\frac{1-\sin 10000°}{\sin 1000°-1}\Leftrightarrow x\geq -1$.

3.26. 1) $\left(11185+\frac{7}{30}-11183-\frac{5}{18}\right):\frac{8}{3}=\left(2+\frac{7\cdot 3-5\cdot 5}{90}\right)\cdot\frac{3}{8}=$ $=\left(2-\frac{2}{45}\right)\cdot\frac{3}{8}=\frac{88}{45}\cdot\frac{3}{8}=\frac{11}{15}$;

2) $\frac{11}{15}:2\frac{1}{5}\cdot x\leq 1\Leftrightarrow\frac{11}{15}:\frac{11}{5}\cdot x\leq 1\Leftrightarrow\frac{x}{3}\leq 1\Leftrightarrow x\leq 3$.

3.27. $\begin{cases}x-1>2x+2,\\ x\geq -5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3>x,\\ x\geq -5\end{cases}\Leftrightarrow -5\leq x<-3$.

3.28. $-3\leq 7-2x<15\Leftrightarrow -3-7\leq -2x<15-7\Leftrightarrow$

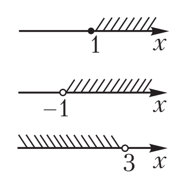
$\Leftrightarrow\frac{-10}{-2}\geq x>\frac{8}{-2}\Leftrightarrow 5\geq x>-4$.

3.29. Решаем систему неравенств $\begin{cases}x-1\geq 0,\\ 5-x\geq 0,\\ x-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1,\\ x\leq 5,\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[1;2)\cup(2;5]$.

3.30. $\begin{cases}3x-x\geq 15-13,\\ 10-11<3x-2x,\\ 7+2>-2x+5x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\geq 2,\\ -1<x,\\ 9>3x\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1,\\ x>-1,\\ x<3.\end{cases}$



Ответ (см. рис.): $x\in[1;3)$.

4.1. $D=(-11)^2-4\cdot 5\cdot 2=121-40=81$, $x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{81}}{2\cdot 5}$.

То есть $x_1=\frac{11+9}{10}=2$; $x_2=\frac{11-9}{10}=0{,}2$.

4.2. Необходимо решить уравнение $2x+3-x^2=-x+5\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$. $D=9-4\cdot 2=1$, $x_1=1$, $x_2=2$ и, соответственно, $y_1=-x_1+5=-1+5=4$, $y_2=-x_2+5=-2+5=3$.

4.3. Пусть длина средней по величине стороны — это x. Тогда длина меньшего катета равна $x-1$, а гипотенузы — $x+1$. По теореме Пифагора $x^2+(x-1)^2=(x+1)^2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+x^2+1-2x=x^2+1+2x\Leftrightarrow x^2-4x=0$, откуда $x=0$ либо $x=4$. Первое значение не подходит по смыслу задачи.

4.4. Так как число два — корень уравнения, то при подстановке 2 вместо x получаем верное равенство $2^2-b\cdot 2-6=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2-2b=0\Leftrightarrow b=-1$. Значит, исходное уравнение имеет вид $x^2+x-6=0$, а его корни $x_1=2$, $x_2=-3$.

4.5. $x(x-2009)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2009.\end{array}\right.$

4.6. $2x^2=5\Leftrightarrow x^2=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

4.7. $x^3-2x^2-x-1=x^3+x-x^2-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x^2+x^2-x-x-1+1=0\Leftrightarrow -x^2-2x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x+2)=0$, откуда $x=0$ либо $x=-2$.

4.8. $\frac{x^2+1-2x}{3}-\frac{x+2}{11}-\frac{2-5x}{4}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{44x^2+44-88x-(12x+24)-(66-165x)}{3\cdot 11\cdot 4}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 44x^2+65x-46=0$.

$D=65^2+4\cdot 44\cdot 46=4225+8096=12\,321$. Вычислить $\sqrt{D}$ можно, исходя из следующих рассуждений: если D — квадрат целого числа (т. е. $D=a^2$), то число a должно быть немного больше, чем 110 (так как $110^2=121\cdot 100=12\,100$), и оканчиваться либо на цифру 1, либо на 9 (только в этом случае a^2 оканчивается на 1). Осталось проверить числа 119 и 111 и выяснить, что $111^2=12\,321$. Значит, $x_1=\dfrac{-65-111}{88}=-2$, $x_2=\dfrac{-65+111}{88}=\dfrac{23}{44}$.

4.9. ОДЗ переменной — это $(-2;+\infty)$. На этом множестве $x^2-2x-8=0$, $D/4=1+8=9$, $x_1=-2$, $x_2=4$. Первое значение — посторонний корень, так как не входит в ОДЗ переменной.

4.10. *Способ 1.* Легко угадывается один корень уравнения $x=-1$ (так как $-2010\cdot 1+2011-1=0$). По теореме Виета $x_1\cdot x_2=\dfrac{-1}{-2010}$, значит, $x_2=-\dfrac{1}{2010}$.

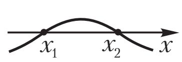
Способ 2. Вычислим $D=2011^2-4\cdot 2010$. Аналогично 1.10 обозначим $a=2010$. Тогда
$D=(a+1)^2-4a=a^2+1+2a-4a=a^2+1-2a=(a-1)^2$,
т. е. $D=2009^2$. Тогда $x_{1,2}=\dfrac{2011\pm 2009}{2\cdot(-2010)}$.

4.11. Пусть $x^2=t$. Тогда $t^2+3t+1=0$, $D=3^2-4\cdot 1\cdot 1=5$, $t_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. Возвращаясь к переменной x, имеем два квадратных уравнения: $x^2=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ и $x^2=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, которые не имеют решений, поскольку числа в правой части этих уравнений отрицательные (так как $\sqrt{5}\approx 2{,}2<3$).

4.12. $x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-3x-2}{2x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-3x-2=0,\\ 2x\neq 0,\end{cases}$
откуда $x=2$ и $x=-0{,}5$.

4.13. Пусть $x^2+x=t$. Тогда $t^2+t=6 \Leftrightarrow t^2+t-6=0$, $D=1+4\cdot 6=25$, $t_1=2$, $t_2=-3$. Возвращаясь к переменной x, имеем $x^2+x=2$ и $x^2+x=-3$. Решая эти уравнения, находим $x_1=1$, $x_2=-2$.

4.14. Вычисляем $D=1+4\cdot 2\cdot 3=25$, $x_1=-\dfrac{2}{3}$, $x_2=1$. Применяя метод интервалов (см. рис.), находим, что $x\in[x_1;x_2]$.



4.15. $x^2-15\le 0$. Вычисляем $D=0^2-4\cdot 1\cdot(-15)=60$, $x_{1,2}=\dfrac{0\pm\sqrt{60}}{2}=\pm\sqrt{15}$. Применяя метод интервалов (см. рис.), находим, что $x\in[x_1;x_2]$.

4.16. $x(6x-5)>0$. Корни квадратного трехчлена — это $x_1=0$, $x_2=\dfrac{5}{6}$. Применяя метод интервалов (см. рис.), находим, что
$x\in(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{5}{6};+\infty\right)$.

4.17. $6-2x+3x-x^2\ge 4 \Leftrightarrow 0\ge 4-6-x+x^2 \Leftrightarrow x^2-x-2\le 0$. Вычисляем $D=1-4\cdot(-2)\cdot 1=9$, $x_1=-1$, $x_2=2$. Применяя метод интервалов (см. рис.), находим, что $x\in[-1;2]$.

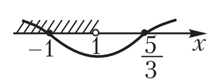
4.18. $\dfrac{3(x^2-1)-(x^2+2)+2(x-1)+0{,}5\cdot 6}{6}>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+2x-4}{6}>0 \Leftrightarrow x^2+x-2>0$. Вычисляем $D=9$, $x_1=-2$; $x_2=1$. Применяя метод интервалов (см. рис.), находим, что
$x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

4.19. $(2x-5)^2-(5x+1)^2\ge 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \big((2x-5)-(5x+1)\big)\cdot\big((2x-5)+(5x+1)\big)\ge 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (-3x-6)(7x-4)\ge 0$. Корни соответствующего уравнения — это $x_1=2$, $x_2=\dfrac{4}{7}$. Применяя метод интервалов (см. рис.), находим, что $x\in\left[-2;\dfrac{4}{7}\right]$.

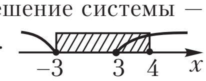
4.20. Необходимо решить неравенство $2x^2+2\sqrt{2}+1\ge 0$. Вычислим $D/4=(\sqrt{2})^2-2\cdot 1=0$. Значит, исходное неравенство можно записать так: $\left(\sqrt{2}x+1\right)^2\ge 0$, откуда $x\in(-\infty;+\infty)$.

4.21. Пусть $x^2=t$, тогда $t^2+2t<3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t^2+2t-3<0$, $t_1=-3$, $t_2=1$. Применяя метод интервалов (см. рис.), находим, что $t\in(-3;1)$, т. е. $-3<t<1$. Возвращаясь к переменной x, имеем двойное неравенство $-3<x^2<1$, т. е. систему $\begin{cases}x^2>-3,\\ x^2<1.\end{cases}$ Первое из неравенств системы верно при $x\in(-\infty;+\infty)$, а решение второго — это $x\in(-1;1)$. Значит, решением данной системы является пересечение этих двух множеств, т. е. $x\in(-1;1)$.

4.22. Решение первого неравенства — это $x\in(-\infty;1)$. Для второго неравенства вычислим $D/4=1+3\cdot 15=16$, $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{5}{3}$. Значит, его решение — $x\in\left[-1;\dfrac{5}{3}\right]$. Решение исходной системы — пересечение этих двух множеств: $x\in[-1;1)$ (см. рис.).

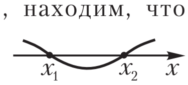


4.23. Решение первого неравенства — $x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$, а второго неравенства — $x\in[-3;4]$. Решение системы — пересечение этих двух множеств, т. е. $x\in\{3\}\cup[-3;4]$ (см. рис.).



4.24. Дробь меньше либо равна 0, если числитель и знаменатель разных знаков либо числитель равен нулю, а знаменатель не равен 0. В данном примере знаменатель всегда положительный. Поэтому на ОДЗ переменной (при $x\in(2;+\infty)$) имеем $x^2-3x+2\le 0$, откуда $x\in[1;2]$. Но найденные x не входят в ОДЗ, поэтому решений у неравенства нет.

4.25. Произведение двух множителей больше либо равно 0, если они одного знака либо один из них равен 0, а другой при этом имеет смысл. В данном примере $\sqrt{2+x}\ge 0$ при всех допустимых значениях x. Значит, решаем неравенство $x^2+4x-5\ge 0$. Вычислим $D/4=9-5=4$, $x_1=-5$, $x_2=1$. Применяя метод интервалов (см. рис.), находим, что $x\in(-\infty;-5]\cup[1;+\infty]$. Но не все эти значения входят в ОДЗ переменной (множество $[-2;+\infty)$), поэтому $x\in[1;+\infty)$.



Осталось рассмотреть случай $\sqrt{2+x}=0 \Leftrightarrow x=-2$ — тоже решение исходного неравенства.

5.1. $D/4 = 1-(-4)\cdot 2 = 9$, $x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$, $x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = -1$, поэтому $2x^2+2x-4 = 2(x+2)(x-1)$.

5.2. $x^2+2x+1-2 = (x+1)^2-2$.

5.3. Абсцисса вершины параболы $x_{\text{вершины}}$ может быть найдена одним из трех способов:

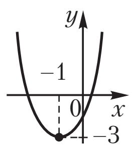
1) для $y = ax^2+bx+c$, $x_B = -\dfrac{b}{2a}$;

2) для $y = a(x-x_1)(x-x_2)$, $x_B = \dfrac{x_1+x_2}{2}$;

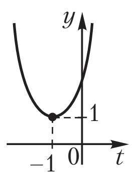
3) для $y = a(x-x_0)^2+c$, $x_B = x_0$.

В данном случае $x_B = \dfrac{3}{2}$, $y_B = 3\cdot\left(2\dfrac{3}{2}-3\right)^2-1 = 3\cdot 0-1 = -1$.

5.4. Множество значений любой функции можно найти, построив ее график. Графиком функции $y = x^2+2x-2$ является парабола с вершиной в $x_B = -\dfrac{2}{2\cdot 1} = -1$, $y_B = (-1)^2+2\cdot(-1)-2 = -3$ и ветвями, направленными вверх (см. рис.). Значит, $y\in[-3;+\infty)$ и это — множество значений функции.



5.5. Аналогично 2.24 получаем $(a+2b)^2+2(a+2b)+2$. Пусть $t = a+2b$, $t\in(-\infty;+\infty)$. Тогда имеем t^2+2t+2 и множество значений полученного многочлена находится аналогично 5.4 (см. рис.). Искомое минимальное значение — это 1.



5.6. Данное задание приведено в форме теста закрытого типа. В нем не требуется составлять уравнение параболы, приведенной на рисунке. Надо только указать верный ответ. Поэтому проще отсеять те из предложенных вариантов ответов, которые противоречат рисунку в условии.

У параболы, заданной первой формулой, ветви направлены вниз, что противоречит рисунку.

Вторая парабола ($y = x^2+4x-3$) проходит через точку $(0;-3)$. Значит, она не совпадает с приведенной в условии.

Абсцисса вершины третьей параболы отрицательна, значит, формула 3) тоже не может быть искомой. Значит, верный ответ — это $y = x^2-4x+3$.

5.7. Ищем уравнение параболы в виде $y = -x^2+bx+c$. Так как точка $(0;3)$ лежит на параболе, то аналогично 4.4 получаем $3 = -0^2+b\cdot 0+c \Leftrightarrow c = 3$. Так как точка $(3;0)$ принадлежит параболе, то $0 = -3^2+b\cdot(3)+3 \Leftrightarrow b = 2$.

5.8. Ищем уравнение параболы в виде (см. 5.3, п. 3) $y = a\cdot(x-x_0)^2+c$. Так как вершина по условию находится в $(-2;4)$, то $x_0 = -2$; $c = 4$, то есть $y = a\cdot(x+2)^2+4$. Так как парабола проходит через точку $(0;0)$, то аналогично 4.4 получаем $0 = a\cdot(0+2)^2+4 \Leftrightarrow a = -1$.

5.9. Данное задание приведено в форме теста закрытого типа. В отличие от предыдущих двух задач в нем не требуется составлять уравнение параболы. Достаточно использовать некоторые ее свойства и отсеять неверные ответы.

Ветви параболы $y = 2x^2+17x-3$ направлены вверх. Значит, рисунки 1) и 3) противоречат заданному уравнению $y = 2x^2+17x-3$. Далее, так как $y(0) = 2\cdot 0+17\cdot 0-3 = -3$ — отрицательное число, то рисунки 2) и 4) также не подходят.

5.10. Вычислим $y(0) = a\cdot 0^2+b\cdot 0+c = c$. На рисунке парабола пересекает ось Oy в точке с положительной координатой y. Значит, $c>0$.

Так как ветви параболы направлены вниз, то $a<0$. Поскольку абсцисса вершины параболы $x_B = -\dfrac{b}{2a}$ — отрицательная, то числа a и b — одного знака.

5.11. Уравнение составляем в виде $(x-x_1)(x-x_2) = 0$, где $x_{1,2}$ — его корни. То есть $(x-1)\left(x-\sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-\sqrt{2}x-x+\sqrt{2} = 0$.

5.12. Так как $D = 17^2-4\cdot 2\cdot 6>0$, то уравнение имеет действительные корни и по теореме Виета $x_1+x_2 = 17/2$, $x_1\cdot x_2 = 6/2 = 3$. Площадь треугольника равна $\dfrac{1}{2}x_1x_2 = \dfrac{1}{2}\cdot 3 = 1{,}5$. Радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, т. е.

$$\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2} = \frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}}{2} = \frac{\sqrt{289/4-6}}{2} = \frac{\sqrt{265}}{4}.$$

5.13. Вычисляем $D = 8^2-4\cdot 3\cdot(-1)>0$. Значит, действительные корни $x_{1,2}$ существуют, и по теореме Виета $x_1+x_2 = -\dfrac{8}{3}$, $x_1x_2 = -\dfrac{1}{3}$. Вычислим $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-$ $-2x_1x_2 = \left(-\dfrac{8}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{64}{9}+\dfrac{2}{3} = \dfrac{64+6}{9} = \dfrac{70}{9}$.

5.14. Обозначим возраст брата (так как именно относительно него надо составить уравнение) x. Тогда возраст сестры — $x+2$. По условию произведение их возрастов $x(x+2) = 120 \Leftrightarrow x^2+2x-120 = 0$.

5.15. Выберем второй корень сопряженным к данному в условии: $x_2 = 5+\sqrt{3}$. Тогда аналогично 5.11 получим $\left(x-5+\sqrt{3}\right)\left(x-5-\sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-5x-\sqrt{3}x-5x+\sqrt{3}x+\left(-5+\sqrt{3}\right)\left(-5-\sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-10x+(25-3) = 0$.

5.16. Обозначим $x+y = t \Leftrightarrow y = t-x$. Тогда
$x^2-2xy+2y^2-5\le 0 \Leftrightarrow x^2-2x(t-x)+2(t-x)^2-5\le 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-2xt+2x^2+2t^2+2x^2-4xt-5\le 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x^2-6xt+2t^2-5\le 0$. Квадратный трехчлен может принимать значения, меньше либо равные 0, только если $D/4 = (-3t)^2-1\cdot 5\cdot\left(2t^2-5\right)\ge 0$ (поскольку коэффициент при x^2 положительный). Осталось решить неравенство $9t^2-10t^2+25\ge 0 \Leftrightarrow t^2\le 25$. Итак, $t\in[-5;5]$. Только при таких $t = x+y$ исходное неравенство будет иметь решения.

5.17. *Случай 1.* Уравнение не является квадратным, т. е. $a-2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Тогда уравнение принимает вид $0\cdot x^2-4x+4-3 = 0 \Leftrightarrow 4x = 1$, и это уравнение имеет одно решение $x = 0{,}25$.

Случай 2. Уравнение квадратное (т. е. $a\ne 2$) и $D = 0$. Тогда $D/4 = (-a)^2-(a-2)(2a-3) = 0 \Leftrightarrow a^2-(2a^2-3a-4a+6) =$ $= 0 \Leftrightarrow -a^2+7a-6 = 0$, откуда $a = 1$ и $a = 6$.

5.18. Парабола $y = (a-1)x^2-4x(a-1)-3$ лежит целиком ниже Ox, если ее ветви направлены вниз (т. е. $(a-1)<0$) и нет точек пересечения с Ox ($D<0$, т. е. $(2(a-1))^2-(a-1)(-3)<0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4a^2-8a+4+3a-3<0 \Leftrightarrow 4a^2-5a+1<0 \Leftrightarrow 0{,}25<a<1$).

Осталось отдельно рассмотреть случай, когда графиком функции является не парабола, а прямая, т. е. случай $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$. Тогда $y=0\cdot x^2-4x\cdot 0=-3 \Leftrightarrow y=-3$. Эта прямая лежит целиком ниже Ox.

5.19. $x_{\text{вершины}}=\dfrac{-24}{2\cdot 1}=-12$, $y_{\text{вершины}}=(-12)^2=24\cdot(-12)+$ $+140+a=a-4$. Вычислим расстояние от точки (0;0) до вершины параболы: $d^2=(0+12)^2+(0-a+4)^2=144+(4-a)^2$. По условию $d^2=13^2=169$, т. е. $144+(4-a)^2=169 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (4-a)^2=25 \Leftrightarrow 4-a=\pm 5$, откуда $a=-1$, $a=9$.

5.20. Корни (т. е. точки пересечения с осью Ox) разных знаков у параболы с ветвями, направленными вверх, будут тогда и только тогда, когда $y(0)<0$. Значит, $y(0)=0^2-(a-2)\cdot 0-2-3a<0 \Leftrightarrow a>-\dfrac{2}{3}$.

5.21. Трехчлен можно представить в виде полного квадрата тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Значит, $D=(-3)^2-4a(a-1)=9-4a^2+4a=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4a^2-4a-9=0$, $a_{1,2}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{10}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{2}$.

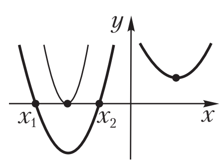
5.22. Воспользуемся теоремой Виета (при $D\ge 0$)

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=-a,\\ x_1+x_2=1,\\ 5x_1-2x_2=19.\end{cases}$$

Из последних двух уравнений находим $x_1=3$, $x_2=-2$, а из первого — $a=6$.

Осталось убедиться, что при этом значении a дискриминант квадратного уравнения неотрицателен.

5.23. Отдельно исследуем случай, когда $a=0$, так как при этом значении параметра неравенство не является квадратным. Если $a=0$, то имеем $0\cdot x^2-4x+3\cdot 0+1>0 \Leftrightarrow 4x<1 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{4}$

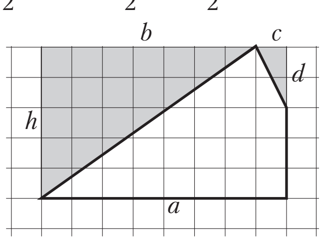


и это неравенство не будет справедливым при <u>всех</u> положительных x. При $a\ne 0$ парабола $y=ax^2-4x+3a+1$ должна лежать только так, как на рисунке, чтобы решениями неравенства $y>0$ были все положительные значения x.

А это выполняется, если $\begin{cases} D<0,\\ a>0,\end{cases}$ либо $\begin{cases} D\ge 0,\\ x_{\text{вершины}}\le 0,\\ f(0)\ge 0,\\ a>0.\end{cases}$ Решая первую систему неравенств, находим $a\in(1;+\infty)$, а вторая система неравенств несовместна (так как $x_{\text{вершины}}=$ $=\dfrac{4}{2a}=\dfrac{2}{a}\le 0$ при $a<0$).

6.1. Дополним данный многоугольник до окаймляющего прямоугольника и вычислим искомую площадь как разность площадей прямоугольника и двух прямоугольных треугольников:

$S=ah-\dfrac{1}{2}bh-\dfrac{1}{2}cd=8\cdot 5-\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 5-\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=21{,}5.$



6.2. В начале текущего года в клубе состоят b человек. Через один год по плану их будет $b+n$ человек, через два года по плану их будет $b+2n$ человек и т. д. Функция $y=b+nx$ моделирует общее количество человек y, которые будут членами клуба через x лет.

6.3. Естественная область определения функции состоит из таких значений переменной x, при которых имеют смысл все выражения, входящие в формулу, задающую эту функцию. В данном случае: $x+3\ne 0$, $x-1\ne 0$, т. е. $x\ne -3$, $x\ne 1$.

6.4. Так как известна $D(f)$, то аргумент функции f должен принадлежать множеству $(-1;2]$. То есть $-1<x-2\le 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1+2<x\le 2+2 \Leftrightarrow 1<x\le 4$, т. е. $x\in(1;4]$.

6.5. $f(2x-1)=\dfrac{2(2x-1)-3}{2}=\dfrac{4x-2-3}{2}=2x-2{,}5.$

6.6. $f(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1;$
$g(x-1)=(x-1)^3+1=x^3-3x^2+3x-1+1;$
$f(x+1)-g(x-1)=-x^3+4x^2-x+1.$

6.7. Так как $f(2x)=x-3$, то, обозначив аргумент $2x=t$, выразим отсюда $x=\dfrac{t}{2}$ и получим $f(t)=\dfrac{t}{2}-3$, т. е. $f(x)=\dfrac{x}{2}-3$.

6.8. Аналогично 6.5 и 6.6 $f(g(x))=g(x)+1$. Так как по условию это выражение равно $2x$, то имеем равенство $g(x)+1=2x$, т. е. $g(x)=2x-1$.

6.9. Проверьте по справочнику определения степенной, показательной, линейной и квадратичной функций.

6.10. Функции $y=\log_{0,5}x$, $y=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}x$, $y=\ln(1-x)$ убывают на своей области определения, в чем можно убедиться, построив, например, их графики. В то же время функция $y=\dfrac{1}{x}$ убывает на каждом из множеств, где она определена (и на множестве$(-\infty;0)$, и на множестве $(0;+\infty)$), но на своей области определения (множестве $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$) она убывающей не является. Так как не для любой пары значений переменной (например, $x_1=-1$, $x_2=1$), взятых из области определения, большему значению переменной будет соответствовать меньшее значение функции.

6.11. Так как область определения функции (множество $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$) не симметрична относительно нуля, то нельзя говорить о четности и нечетности данной функции.

6.12. Во-первых, $D(y)=(-\infty;+\infty)$ симметрична относительно нуля. Во-вторых, $y(-x)=a^{-x}+a^{-(-x)}=a^{-x}+a^{x}=y(x)$. Поэтому заданная функция является четной.

6.13. Область определения каждой из данных в условии функций симметрична относительно нуля.

$$y(-x)=(-x)\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-x\cdot\frac{\frac{1}{a^x}-1}{\frac{1}{a^x}+1}=-x\cdot\frac{1-a^x}{1+a^x}=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}=y(x),$$

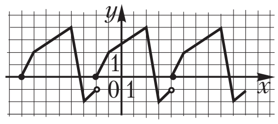
$y(-x)=-x\cdot\operatorname{tg}(-x)=-x\cdot(-\operatorname{tg}x)=x\operatorname{tg}x=y(x).$

Для остальных трех функций равенство $y(-x)=y(x)$ не выполняется.

6.14. $g(6)=2{,}4+f(6-9)=2{,}4+f(-3);$
$g(8)=2{,}4+f(8-9)=2{,}4+f(-1);$
$g(12)=2{,}4+f(12-9)=2{,}4+f(3);$

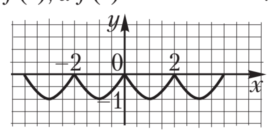
$g(10)=2{,}4+f(10-9)=2{,}4+f(1)$. Так как $f(x)$ нечетная, то $f(-3)=-f(3)$, $f(-1)=-f(1)$ и $g(6)+g(8)+g(10)+g(12)=$
$=2{,}4-f(3)+2{,}4-f(1)+2{,}4+f(1)+2{,}4+f(3)=4\cdot 2{,}4=9{,}6$.

6.15. Эскиз возможного графика $f(x)$ с периодом $T=6$ приведен на рисунке.

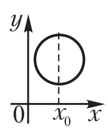


Меньшим, чем 6, значение периода T быть не может, так как, например, не будет выполняться равенство $f(2)=f(2-T)$.

6.16. График $f(x)$ на промежутке $[-4;\ 4]$ схематично изображен на рисунке. Так как период функции равен 2, то $f(3)=f(3\pm T)=f(1)$, а $f(1)=1^2-2\cdot 1=-1$.



6.17. По определению функции каждому значению переменной x должно соответствовать не более одного значения y. А для любой окружности можно указать значение x_0, которому соответствуют два значения y (см. рис.).



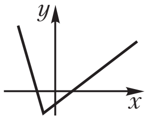
6.18. Если точка принадлежит графику функции, то ее координаты удовлетворяют уравнению, задающему эту функцию. Проверим это: $\cos 1=0$ — неверно, $\cos(\pi-1)=0$ — неверно, $\sin(\pi-1)=0$ — верно; $\ln 1=0$ — верно.

6.19. Только на графике 3) функция на множестве $[-1;2]$ убывает.

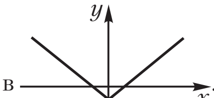
6.20. Преобразование $f(x+a)+b$ переносит график функции $y=f(x)$ вдоль оси Ox на a единиц влево (если $a>0$) или на a единиц вправо (если $a<0$) и на b единиц вверх (при $b>0$) или на b единиц вниз (при $b<0$). Поэтому, чтобы получить график функции $y=\lg(x+1)$, необходимо график функции $y=\lg x$ сместить на одну единицу влево.

6.21. Так как график функции $y=2^x$ перенесли параллельно на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вверх вдоль оси ординат, то, учитывая 6.20, получили график функции $y=2^{x-2}+1$.

6.22. График функции $y=f(|x|)$ можно построить, используя график функции $y=f(x)$ следующим образом: заменяем ту часть графика функции $y=f(x)$, которая расположена левее оси Oy, на часть графика функции $y=f(x)$, расположенную правее оси Oy, симметрично отразив последнюю относительно оси Oy. Остальная часть графика функции $y=f(x)$ остается без изменения. Поэтому график



преобразуется в



.

График функции $y=|f(x)|$ можно построить, используя график функции $y=f(x)$ следующим образом: та часть графика функции $y=f(x)$, которая расположена ниже оси Ox, симметрично отражается относительно этой оси, остальная часть остается без изменения.

Более сложные функции (например, $y=\left|f(|x|)\right|$) строятся последовательным применением описанных выше алгоритмов.

6.23. Область определения функции — $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. При всех $x\in D(y)$ имеем $y=\dfrac{2(x+1)}{x+1}=2$. Значит, график — прямая $y=2$, параллельная оси Ox, без одной точки с координатами $(-1;2)$.

6.24. Функция $y=\sqrt{2-x}$ имеет $D(y)=(-\infty;2]$, а такой график приведен лишь на рис. 1.

6.25. В условии приведен смещенный на 1 единицу влево график функции $y=\sqrt{x}$. Значит, это — функция $y=\sqrt{x+1}$ (см. 6.20).

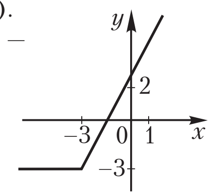
6.26. Учитывая 6.20, сдвигаем синусоиду на одну единицу вправо. Значит, верный ответ приведен на рис. 1.

6.27. График, данный в условии, проходит через точку $(0;1)$. Этому условию удовлетворяют лишь функции 3) и 4). Но график функции, приведенный на рисунке, убывает, а функция $y=2^x$ — возрастает. Значит, приведен график функции $y=(0{,}5)^x$.

6.28. 1) Если $x\ge -3$, то $y=(x+3)+x=2x+3$ — прямая, проходящая через точки $(-3;-3)$ и $(0;3)$.

2) Если $x\le -3$, то $y=-(x+3)+x=-3$ — прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $(-3;3)$.

Получили, что график $y=|x+3|+x$ состоит из двух частей (см. рис.).



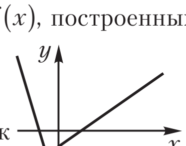
6.29. Так как $D(y)=\mathbf{R}$ и $y(-x)=2^{(-x)^2}=2^{x^2}=y(x)$, то y — четная функция. Поэтому достаточно построить схематично ее график при $x\ge 0$ и затем симметрично отразить его относительно оси Oy. При $x\ge 0$ очевидно, что $2^{x^2}\ge 2^0=1$ и 2^{x^2} — возрастает. Схематично график изображен на рисунке.

6.30. Учитывая 6.19, отображаем график функции $y=\lg x$ симметрично относительно оси Oy и получаем график функции $y=\lg|x|$.

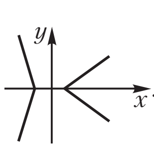
6.31. Учитывая 6.20, смещаем график $y=\sqrt{x}$ на 2 единицы влево и получаем график функции $y=\sqrt{x+2}$.

6.32. Так как $|-y|=|y|$ и $|y|=f(x)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}y=f(x),\\ y=-f(x),\end{array}\right.\\ f(x)\ge 0,\end{array}\right.$ то график уравнения $|y|=f(x)$ состоит из графиков двух функций: $y=f(x)$ и $y=-f(x)$, построенных в области, где $f(x)\ge 0$.

Поэтому график



преобразуется в



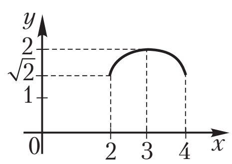
.

Так как $|y| = |f(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = f(x), \\ y = -f(x), \end{array}\right.$ то график уравнения $|y| = |f(x)|$ состоит из графиков двух функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$.

Аналогично строятся и более сложные графики, например $|y| = |f(|x|)|$.

6.33. Множество значений любой функции проще всего узнать, построив ее график. Но в простейших случаях можно обойтись и без графика. Для данной функции $y(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ при $x > 0$ и $y(x) = x + \frac{1}{x} \leq -2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = -2$ при $x < 0$ (воспользовались неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$).

6.34. *Способ 1.* Так как при всех допустимых x значение $y > 0$, то



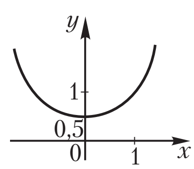
$y = \sqrt{(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})^2}$,

$y = \sqrt{x - 2 + 4 - x + 2\sqrt{x-2}\sqrt{4-x}}$,

$y = \sqrt{2 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{4-x}} \geq \sqrt{2}$, причем равенство достигается при $x = 2$ или $x = 4$. Далее, $y = \sqrt{2 + 2\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}$, $\quad y = \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - (x-3)^2}} \leq \sqrt{2 + 2\sqrt{1-0}} = 2$, причем равенство достигается только при $x = 3$.

Способ 2. Схематично график функции изображен на рисунке. Используя его, находим $E(y) = [\sqrt{2}; 2]$.

6.35. *Способ 1.* Схематично график функции изображен на рисунке. Используя его, находим $E(y) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.



Способ 2. Так как $x^2 \geq 0$, то $x^2 - 1 \geq -1$. Значит, $2^{x^2-1} \geq 2^{-1} = 0,5$.

6.36. Так как $100 - x^2 \leq 100$, то $\lg(100 - x^2) \leq \lg 100 = 2$, причем максимум достигается при $x = 0$.

6.37. 1) Областью определения является множество $(-8; 10]$.

2) Множество значений — множество $[-6; 5]$.

3) Чтобы найти корни $f(x) = -2$, надо найти абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = -2$ (она параллельна оси Ox и проходит через точку с координатами $(0; -2)$). В результате находим $x = -1$, $x = 3$, $x = 10$.

4) Нули функции — корни уравнения $f(x) = 0$. Чтобы найти нули функции, вычисляем абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс. В результате находим $x = -5$, $x = -2$, $x = 4$ и $x = 9$.

5, 6) Промежутки, на которых функция принимает только положительные значения, — это $(-8; -5)$, $(-5; -2)$, $(4; 9)$; промежутки, на которых функция принимает только неотрицательные значения, — это $(-8; -2]$ и $[4; 9]$.

7, 8) Промежутками возрастания являются $(-8; -7]$, $[-5; -3]$, $[1; 5]$, $[6; 8]$; промежутки убывания — это $[-7; -5]$, $[-3; 1]$, $[5; 6]$, $[8; 9]$.

9) Промежутки, где $f'(x) > 0$, — это промежутки, где функция возрастает (исключим точки, в которых график имеет горизонтальную касательную или касательная не существует).

10) Промежутки, где $f'(x) < 0$, — это промежутки, где функция убывает (исключим точки, в которых график имеет горизонтальную касательную).

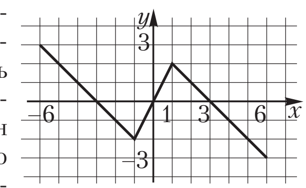
11) $f'(x) = 0$ в тех точках, в которых график функции имеет касательную, параллельную оси Ox.

12) Точки -7, -3, 5 и 8 являются точками максимума, а -5, 1, 6 — точками минимума.

13) Производная меняет свой знак при переходе через точку экстремума.

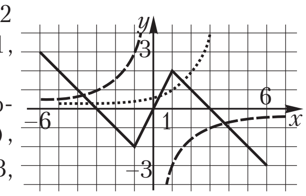
14) См. п. 11).

6.38. в) График функции приведен на рисунке. Аналогично 6.37 теперь легко указать свойства этой функции. График функции НЕ симметричен относительно оси ординат, но симметричен относительно начала координат. Функция убывает на промежутках $[-6; -1]$ и $[1; 6]$ и возрастает при $x \in [-1; 1]$. Максимум функции равен 3 и достигается при $x = -6$. Функция положительна на интервалах $[-6; -3)$ и $(0; 3)$. Нули функции — это 0 и ± 3.

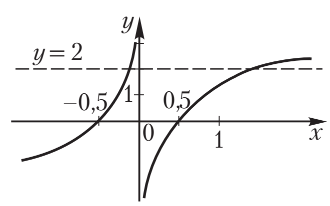


Решением уравнения $f(x) = 2$ являются числа -5 и 1, а $f(5) = -2$, $f(-5) = 2$.

Построив в одной системе координат графики $f(x)$, $g(x) = 2^{x-1}$ и гиперболу $xy = -3$, отметим точки пересечения.



6.39. Схематично график функции $y = f(x)$, заданной в условии, изображен на рисунке. При $x > 0$ решаем уравнение $1 + \log_2 x = 2$ и находим $x = 2$. При $x < 0$ решаем уравнение $-1 - \log_2(-x) = 2 \;\Leftrightarrow\; 1 + \log_2(-x) = -2$ и находим $x = -\frac{1}{8}$.



6.40. $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 100\pi\right)' =$

$= \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + \left(2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)' + (100\pi)' =$

$= \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} + 0 = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$. Особо отметим, что 100π — это число! Поэтому $(100\pi)' = 0$.

6.41. $f'(x) = \left(x^2 - 5x + e^3\right)' = 2x - 5 + 0$. $f'(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$.

Особо отметим, что e^3 — это число! Поэтому $(e^3)' = 0$.

6.42. Сначала упростим исходную функцию, использовав определение модуля. Число -1 принадлежит промежутку $(-\infty; 0)$, на котором $f(x) = 2 - x$. Значит, на этом промежутке $f'(x) = (2 - x)' = -1$ и $f'(-1) = -1$.

6.43. $f'(x) = \left(22\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3} + \sin x - \cos x\right)' = 0 + \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x$. Особо отметим, что $2\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}$ — это число! Поэтому $\left(2\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}\right)' = 0$.

6.44. Так как значения функции не зависят от значения переменной, то заданная функция является константой. Значит, $f'(x)=\left(\sin 2+e^2+\log_2 3\right)'=0$.

6.45. Сначала упростим исходную функцию:
$f(x)=\dfrac{\cos(\pi-x)}{\sin(2\pi-x)}=\dfrac{-\cos x}{-\sin x}=\operatorname{ctg} x$. Теперь найдем
$f'(x)=(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

6.46. $f'(x)=\left(\lg 7+7^x+5\log_7 x\right)'=0+7^x\cdot\ln 7+5\cdot\dfrac{1}{x\ln x}=$
$=7^x\ln 7+\dfrac{5}{x\ln 7}$.

6.47. $f'(x)=(x\cdot\sin x)'=(x)'\cdot\sin x+x\cdot(\sin x)'=\sin x+x\cdot\cos x$.

6.48. $f'(x)=\left(\dfrac{2x-1}{3x+3}\right)'=\dfrac{(2x-1)'\cdot(3x+3)-(2x-1)\cdot(3x+3)'}{(3x+3)^2}=$
$=\dfrac{2\cdot(3x+3)-3\cdot(2x-1)}{(3x+3)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

6.49. По правилу нахождения производной сложной функции имеем: $f'(x)=\left(3\cdot(2x-1)^{-3}+(1+3x)^{-\frac{1}{2}}\right)'=$
$=3\cdot(-3)\cdot(2x-1)^{-3-1}\cdot(2x-1)'+\left(-\dfrac{1}{2}\right)(1+3x)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(1+3x)'=$
$=-\dfrac{9}{(2x-1)^4}-\dfrac{3}{2\cdot\sqrt{(3x+1)^3}}$.

6.50. Вычислим $f'(x)=\left(\dfrac{\sqrt{3x+1}}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}}\cdot 3=$
$=\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}}$. Теперь решим уравнение $\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}=1\Leftrightarrow x=0$.

6.51. $f'(x)=\left(\sin\dfrac{x+\pi}{3}\right)'=\cos\dfrac{x+\pi}{3}\cdot\left(\dfrac{x+\pi}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x+\pi}{3}$.
Следовательно, $f'(\pi)=\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{6}$.

6.52. $f'(x)=\left(e^{3x+1}+\cos 2x\right)'=e^{3x+1}\cdot(3x+1)'+(-\sin 2x)\cdot(2x)'=$
$=3\cdot e^{3x+1}-2\sin 2x$.

6.53. $f'(x)=\left(x^2\sin\dfrac{x}{2}\right)'=2x\sin\dfrac{x}{2}+x^2\cos\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$.
Следовательно, $f'(\pi)=2\pi\sin\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi^2}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}=2\pi$.

6.54. Найдем производные данных пяти функций:
$F'(x)=\left(-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)'=\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$; $F'(x)=\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)'=-\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$;
$F'(x)=\left(-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)'=\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$; $F'(x)=\left(-2\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)'=\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$;
$F'(x)=\left(-2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)'=-\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$.

Заданную в условии производную имеет лишь четвертая функция.

6.55. Так как $f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow f'(x)-g'(x)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(f(x)-g(x)\right)'=0$, то $f(x)-g(x)=C$.

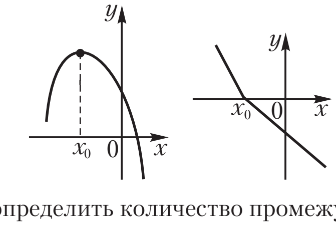
6.56. Функция определена при любом действительном x, и $f'(x)=\left(x^3-27x\right)'=3x^2-27$. Если в каждой точке некоторого промежутка функция имеет положительную производную, то она возрастает на этом промежутке (допускается обращение производной в ноль в конечном числе точек промежутка). Решим неравенство $3x^2-27\geq 0$. Имеем: $x^2\geq 9$, откуда $x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. Значит, функция $f(x)=x^3-27x$ возрастает на промежутке $(-\infty;-3]$, а также возрастает на промежутке $[3;+\infty)$. Поскольку при $x^2\leq 9$ производная — отрицательная, то функция $f(x)=x^3-27x$ убывает на промежутке $[-3;3]$.

6.57. Функция определена при любом действительном x, и $f'(x)=\left(x^3-ax^2+3ax+2\right)'=3x^2-2ax+3a$. Необходимо, чтобы полученная производная (квадратичная функция с положительным старшим коэффициентом) принимала неотрицательные значения на всей числовой прямой. Значит, дискриминант квадратного трехчлена $3x^2-2ax+3a$ должен быть меньше или равен нулю. Решаем неравенство $4a^2-36a\leq 0$, откуда $a\in[0;9]$.

6.58. Функция определена при любом действительном x, и $f'(x)=\left((3x-1)e^{2x}-77\right)'=3\cdot e^{2x}+(3x-1)e^{2x}\cdot(2x)'-0=$
$=e^{2x}\cdot(6x+1)$. Решим неравенство $e^{2x}\cdot(6x+1)\leq 0$. Имеем: $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{6}\right]$. Значит, функция $f(x)=(3x-1)e^{2x}-7$ убывает на промежутке $\left(-\infty;-\dfrac{1}{6}\right]$.

6.59. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_1 имеет острый угол наклона (α) к положительному направлению оси Ox. Поскольку тангенс острого угла положителен и $f'(x_1)=\operatorname{tg}\alpha$, то $f'(x_1)>0$. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_2 имеет тупой угол наклона к положительному направлению оси Ox, тангенс тупого угла отрицателен, а следовательно, $f'(x_2)<0$. Значит, $f'(x_1)>f'(x_2)$.

6.60. Функция, график которой приведен на рисунке, сначала возрастает, а потом убывает. В точке максимума имеем горизонтальную касательную. Значит, производная данной функции должна быть сначала положительной, затем должна обратиться в 0, после чего должна стать отрицательной. Выбираем рис. 4), так как только на нем производная ведет себя именно таким образом. Кроме того, производная обращается в 0 именно в точке x_0, в которой исходная функция имеет горизонтальную касательную.



6.61. Надо определить количество промежутков, на которых производная функции (см. данный в условии график) имеет отрицательный знак. Такой промежуток один — $[-2;2]$.

6.62. Точками, подозрительными на экстремум (критическими точками), называются точки области определения функции, в которых производная функции обращается в 0 или не существует. Надо узнать, есть ли у данных функций в области определения такие точки.

1) Так как $f'(x)=(x)'=1$, то $f(x)=x$ не имеет критических точек. 2) $f'(x)=(x^5+1)'=5x^4$. Производная обращается в 0 только при $x=0$. 3) $f'(x)=(x^5+x)'=5x^4+1$, и потому $f(x)=x^5+x$ не имеет критических точек. 4) $f'(x)=(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Функция $f(x)=\operatorname{tg}x$ не имеет в области определения точек, в которых производная обращается в 0 или не существует.

6.63. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+7x}{x-9}\right)'=\dfrac{x^2-18x-63}{(x-9)^2}$. Производная существует в каждой точке области определения и обращается в 0 при $x^2-18x-63=0$, т. е. при $x_1=-3$ и $x_2=21$. В точке $x_1=-3$ производная меняет знак с «+» на «–». Значит, точка $x_1=-3$ является точкой максимума. В точке $x_2=21$ производная меняет знак с «–» на «+». Значит, точка $x_2=21$ является точкой минимума.

6.64. $y'=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x-2\dfrac{1}{3}\right)'=x^2+x-2$. Решим уравнение $x^2+x-2=0$. Его решения $x_1=-2$ и $x_2=1$. В точке $x_1=-2$ производная функции меняет знак с «+» на «–». Значит, $x_1=-2$ — точка максимума, и $y(-2)=\dfrac{(-2)^3}{3}+\dfrac{(-2)^2}{2}-2\cdot(-2)-2\dfrac{1}{3}=1$. В точке $x_2=1$ производная функции меняет знак с «–» на «+». Значит, $x_2=1$ — точка минимума, и $y(1)=\dfrac{1^3}{3}+\dfrac{1^2}{2}-2\cdot1-2\dfrac{1}{3}=-3{,}5$.

6.65. $f'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}-(a-1)\dfrac{x^2}{2}-2(a-1)x-9\right)'=$ $=x^2-(a-1)x-2(a-1)$. Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого решим уравнение
$x^2-(a-1)x-2(a-1)=0$. $D=a^2+6a-7$.
$x_{1,2}=\dfrac{a-1\pm\sqrt{a^2+6a-7}}{2}$. Пусть x_1 — меньший корень уравнения, а x_2 — больший. Найдем промежутки знакопостоянства $f'(x)$. (Воспользуемся тем, что старший коэффициент у квадратного трехчлена $x^2-(a-1)x-2(a-1)$ положительный.)

	$(-\infty;x_1)$	x_1	$(x_1;x_2)$	x_2	$(x_2;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	возрастает		убывает		возрастает

Точка x_2 является точкой минимума. Значит, должно выполняться $\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+6a-7}}{2}>0$, откуда $a\in(1;+\infty)$.

6.66. Найдем для функции $f(x)=2x^3-3x^2-12x-1$ точки, подозрительные на экстремум и принадлежащие отрезку $[0;3]$. $f'(x)=(2x^3-3x^2-12x-1)'=6x^2-6x-12=$ $=6(x^2-x-2)$. Подозрительными на экстремум являются точки –1 и 2. Из них рассматриваемому отрезку принадлежит только 2. Найдем значения функции $f(x)=2x^3-3x^2-12x-1$ в точке 2 и на концах отрезка $[0;3]$. Имеем: $f(2)=2\cdot2^3-3\cdot2^2-12\cdot2-1=-21$; $f(0)=2\cdot0^3-3\cdot0^2-12\cdot0-1=-1$; $f(2)=2\cdot3^3-3\cdot3^2-12\cdot3-1=-10$. Наибольшее значение функции равно –1, а наименьшее равно –21.

6.67. Рассмотрим вспомогательную функцию
$y_1=x^3+6x^2+9x+1$. Найдем для нее наибольшее и наименьшее значения на промежутке $[-3;1]$. $(y_1)'=$ $=(x^3+6x^2+9x+1)'=3x^2+12x+9$. Решим уравнение $3x^2+12x+9=0$. Подозрительными на экстремум являются точки –1 и –3, и они принадлежат промежутку $[-3;1]$. Найдем значения функции $y_1=x^3+6x^2+9x+1$ в точках –1, –3 и 1. Имеем: $y_1(-1)=(-1)^3+6\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)+1=-3$; $y_1(-3)=$ $=(-3)^3+6\cdot(-3)^2+9\cdot(-3)+1=1$; $y_1(1)=(1)^3+6\cdot(1)^2+9\cdot(1)+$ $+1=17$. Значит, непрерывная функция $y_1=x^3+6x^2+9x+1$ на левом конце промежутка $[-3;1]$ принимает значение 1, далее значения уменьшаются до –3, потом увеличиваются и на правом конце промежутка $[-3;1]$ функция уже принимает значение 17. Напомним геометрическое преобразование графиков функции, а именно $f(x)\to|f(x)|$. При таком преобразовании необходимо фрагменты графика функции $f(x)$, которые расположены ниже оси Ox, отобразить симметрично этой оси. Поэтому наибольшее значение функции будет равно 17, а наименьшее значение функции будет равно 0 (так как на промежутке $[-3;1]$ есть значения x такие, что $y_1(x)=0$).

6.68. Исследуем функцию $y=x^3-x^2+2x-10$ с помощью производной. $y'=(x^3-x^2+2x-10)'=3x^2-2x+2$. Чтобы найти точки, подозрительные на экстремум, надо решить уравнение $3x^2-2x+2=0$. Имеем $D<0$ и получаем, что $3x^2-2x+2$ принимает только положительные значения. То есть функция $y=x^3-x^2+2x-10$ является возрастающей. Она принимает отрицательные значения (например, при $x=0$), а также принимает положительные значения (например, при $x=3$). Значит, есть только одна точка пересечения с осью абсцисс.

6.69. На промежутке $[a;b]$ функция имеет две точки максимума и одну точку минимума, то есть три точки экстремума.

6.70. Только точка $x=-3$ такова, что для нее существует окрестность, что для любого значения x из этой окрестности $f(x)>f(-3)$. Поэтому $x=-3$ — единственная точка минимума. Отметим, что точка $x=9$ не является точкой минимума, так как для нее нельзя указать окрестность, входящую в область определения функции.

6.71. Точка является точкой экстремума, если в ней производная функции меняет знак. По графику производной находим эти точки: –6, –2 и 5.

6.72. 1) Если в каждой точке некоторого промежутка функция имеет положительную производную, то она возрастает на этом промежутке (допускается обращение производной в ноль в конечном числе точек промежутка). Промежутки возрастания: $[-5;-1]$ и $[2;6)$. 2) Если в каждой точке некоторого промежутка функция имеет отрицательную производную, то она убывает на этом промежутке (допускается обращение производной в ноль в конечном числе точек промежутка). Промежутки убывания: $(-6;-5]$ и $[-1;2]$. 3) Точкой минимума на промежутке $[-1;3]$ является точка 2, так как в ней производная поменяла знак с «−» на «+». 4) Точкой максимума на интервале $(-5;2)$ является точка −1, так как в ней производная поменяла знак с «+» на «−». 5) Укажем все точки, в которых производная функции поменяла знак. Это −5; −1; 2. 6) Точки, в которых касательная к графику $y=f(x)$ образует угол 135° с положительным направлением оси абсцисс, имеют производную, равную −1. Таких точек на графике производной две. 7) На отрезке $[-3;2]$ производная функции положительна на $[-3;-1)$ и отрицательна на $(-1;2)$. На промежутке $[-3;-1]$ функция возрастает, а на $[-1;2]$ — убывает. Значит, точка на отрезке $[-3;2]$, в которой функция принимает наибольшее значение, — это −1. 8) На отрезке $[3;5]$ производная функции положительна. Значит, функция возрастает на нем и наименьшее значение принимает на левом конце отрезка, то есть в точке 3.

6.73. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 образует угол α с положительным направлением оси Ox. Поскольку $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, то $f'(x_0)=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$.

6.74. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет угловой коэффициент, равный $k=f'(x_0)$. Поэтому $k=(x^2-3x)'=2x-3$, а в точке с абсциссой $x_0=-1$ этот коэффициент равен $2\cdot(-1)-3=-5$.

6.75. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет угловой коэффициент, равный $k=f'(x_0)$. По графику $y=f'(x)$ находим значение $k=f'(3)=2$.

6.76. Поскольку прямые параллельны, то у них одинаковые угловые коэффициенты. Для прямой $x+3y-6=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow y=\dfrac{x-6}{-3}=-\dfrac{1}{3}x+2$ угловой коэффициент равен $-\dfrac{1}{3}$. Значит, и у касательной угловой коэффициент равен $-\dfrac{1}{3}$. Но касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет угловой коэффициент, равный $k=f'(x_0)$. Следовательно, $k=f'(x_0)=-\dfrac{1}{3}$.

6.77. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет угловой коэффициент, равный $k=f'(x_0)$. Поэтому $k=(4x_0-x_0^2)'=4-2x_0$ и по условию $k=2$. Для нахождения x_0 решаем уравнение $4-2x_0=2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_0=1$.

6.78. Поскольку касательная и $y=6x-7$ параллельны, то у них одинаковые угловые коэффициенты. Значит, угловой коэффициент касательной ($k=f'(x_0)$) равен 6. Поскольку $f'(x_0)=(x_0^2-4x)'=2x_0-4$ и по условию $k=6$, то для нахождения x_0 решаем уравнение $2x_0-4=6 \Leftrightarrow x_0=5$.

6.79. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 образует угол α с положительным направлением оси Ox. Поскольку $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, то $f'(x_0)=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)=2$. Значит, $f'(x_0)=\dfrac{-8}{x_0^3}+1+0=2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_0^3=-8 \Leftrightarrow x_0=-2$. Значение функции в этой точке равно $f(x_0)=\dfrac{4}{(-2)^2}-2+2=\dfrac{4}{4}=1$.

Запишем теперь уравнение касательной: $y=k(x-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow y=2(x+2)+1 \Leftrightarrow y=2x+5$. Эта прямая пересекает ось Ox, если $0=2x+5 \Leftrightarrow x=-2{,}5$.

6.80. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 задается уравнением $y=k(x-x_0)+f(x_0)$, где $k=f'(x_0)$. Так как $f(2)=2^3-5\cdot2=-2$ и $f'(x)=(x^3-5x)'= =3x^2-5$, то $k=f'(2)=3\cdot2^2-5=7$. Тогда уравнение касательной: $y=7(x-2)-2 \Leftrightarrow y=7x-16$.

6.81. Запишем уравнение касательной: $y=k(x-x_0)+y_0$, где $x_0=2$, $y_0=9$, $k=f'(x_0)=\left(\dfrac{18}{x_0}\right)'=-\dfrac{18}{x_0^2}=-\dfrac{18}{2^2}=-\dfrac{9}{2}$. Итак, $y=-\dfrac{9}{2}(x-2)+9 \Leftrightarrow y=-\dfrac{9}{2}x+18$. Эта прямая пересекает оси координат в точках $A(0;18)$ и $B(4;0)$. Интересующий нас треугольник OAB является прямоугольным. Искомый центр окружности является серединой гипотенузы AB и имеет координаты $\left(\dfrac{0+4}{2};\dfrac{18+0}{2}\right)$, т. е. $(2;9)$.

6.82. Так как прямая $y=6x-7$ является касательной к параболе в точке $M(2;5)$, то $x_0=2$, $y_0=5$ и, во-первых, $k=f'(x_0)=6$, то есть $2x_0+b=6$, а во-вторых, $y_0=x_0^2+bx_0+c=5$. Из первого равенства находим $2\cdot2+b=6$, откуда $b=2$, а из второго имеем $2^2+2\cdot2+c=5$, откуда $c=-3$.

6.83. По условию прямая $x+4y=4$, то есть $y=-\dfrac{1}{4}x+1$, является касательной к гиперболе $y=\dfrac{1}{x}$ в некой точке с координатами $(x_0;y_0)$. Значит, во-первых, $k=f'(x_0)=-\dfrac{1}{4}$, то есть $-\dfrac{1}{x_0^2}=-\dfrac{1}{4}$, откуда $x_0=\pm2$, а во-вторых, совпадают $y_0=-\dfrac{1}{4}x_0+1$ и $y_0=\dfrac{1}{x_0}$. Последнее равенство верно при $x_0=2$ и не выполняется при $x_0=-2$.

6.84. Прямые перпендикулярны, если произведение их угловых коэффициентов равно −1. Значит, угловой коэффициент касательной ($k=f'(x_0)$) равен −2. Поскольку $f'(x_0)=(-x_0^2+4)'=-2x_0$ и $k=-2$, то для нахождения x_0 решаем уравнение $-2x_0=-2 \Leftrightarrow x_0=1$. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 задается уравнением $y=k(x-x_0)+f(x_0)$. Поэтому искомое уравнение такое: $y=-2(x-1)+(-1^2+4)$, т. е. $y=-2x+5$.

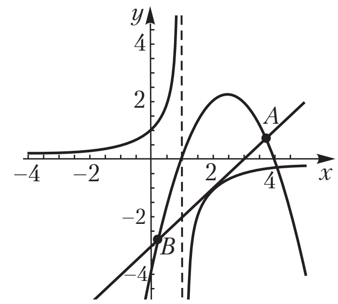
6.85. В условии не дано ни x_0, ни y_0. Записываем уравнение касательной в некоторой точке x_0: $y=k(x-x_0)+f(x_0)$, где $k=f'(x_0)=-\dfrac{1}{x_0^2}$ и $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0}$. Имеем $y=-\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0)+ +\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{x}{x_0^2}+\dfrac{2}{x_0}$. Эта прямая проходит через точку

$M(-1;3)$, и поэтому $3=-\frac{-1}{x_0^2}+\frac{2}{x_0}$, откуда $x_0=1$ либо $x_0=-\frac{1}{3}$. Осталось записать уравнения касательных в точке с абсциссой 1: $y=-\frac{x}{1^2}+\frac{2}{1}=-x+2$ и в точке с абсциссой $-\frac{1}{3}$: $y=-\frac{x}{(-1/3)^2}+\frac{2}{-1/3}=-9x-6$.

6.86. Записываем уравнение касательной в некоторой точке x_0: $y=k(x-x_0)+f(x_0)$, где $k=\left(\frac{x_0+9}{x_0+5}\right)'=\left(1+\frac{4}{x_0+5}\right)'=$ $=\frac{-4}{(x_0+5)^2}$ и $f(x_0)=\frac{x_0+9}{x_0+5}$. Имеем $y=\frac{-4}{(x_0+5)^2}(x-x_0)+$ $+\frac{x_0+9}{x_0+5}$. Эта прямая проходит через точку $O(0;0)$, и поэтому $0=\frac{-4}{(x_0+5)^2}(0-x_0)+\frac{x_0+9}{x_0+5} \Leftrightarrow 0=\frac{4x_0+(x_0+9)(x_0+5)}{(x_0+5)^2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_0^2+18x_0+45=0$, откуда $x_0=-3$ либо $x_0=-15$. Осталось записать уравнения касательных. Поскольку они проходят через начало координат, то можно искать их в виде $y=kx$. При $x_0=-3$ получим $k=\frac{-4}{(-3+5)^2}=-1$, а при $x_0=-15$ имеем $k=\frac{-4}{(-15+5)^2}=-\frac{1}{25}$. Значит, уравнения касательных такие: $y=-x$ и $y=-\frac{1}{25}x$.

6.87. Уравнение касательной к $y=f(x)$ в некоторой точке x_1 имеет вид $y=(2x_1-2)(x-x_1)+f(x_1)$. Уравнение касательной к $y=g(x)$ в некоторой точке x_2 имеет вид $y=(2x_2+2)(x-x_2)+g(x_2)$. Раз эти прямые совпадают, то, во-первых, равны их угловые коэффициенты (то есть $2x_1-2=2x_2+2$), а во-вторых, равны свободные члены (то есть $-x_1(2x_1-2)+f(x_1)=-x_2(2x_2+2)+g(x_2)$). Итак, имеем два равенства: $x_1=x_2+2$ и $-x_1(2x_1-2)+x_1^2-2x_1+5=$ $=-x_2(2x_2+2)+x_2^2+2x_2-11$. Подставляя выражение $x_1=x_2+2$ во второе равенство, имеем $-(x_2+2)(2x_2+4-2)+$ $+(x_2+2)^2-2(x_2+2)+5=-x_2(2x_2+2)+x_2^2+2x_2-11$, откуда $x_2-3=0$ и $x_1=5$. Осталось записать уравнение касательной к $y=f(x)$ в точке $x_1=5$: $y=(2x_1-2)(x-x_1)+x_1^2-$ $-2x_1+5=8(x-5)+25-10+5=8x-20$.

6.88. По условию задана точка касания $x_0=2$. Запишем уравнение касательной: $y=k(x-x_0)+y_0$, где $y_0=\frac{1}{1-2}=-1$, $k=f'(x_0)=\frac{1}{(1-x_0)^2}=\frac{1}{1}=1$. Итак, $y=1(x-2)-1 \Leftrightarrow y=x-3$. Хорда параболы ограничена точками A и B, в которых она пересекается с прямой $y=x-3$. Значит, абсциссы x_A и x_B точек касания находятся из равенства $-k^2x^2-5kx-4=$ $=x-3 \Leftrightarrow k^2x^2+x(5k+1)+1=0$, и по условию середина AB имеет абсциссу, равную 2. То есть $\frac{x_A+x_B}{2}=2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_A+x_B=4$. Но по теореме Виета $x_A+x_B=-\frac{5k+1}{k^2}$ и, значит, $4=-\frac{5k+1}{k^2} \Leftrightarrow 4k^2+5k+1=0$, откуда $k=-1$ либо $k=-\frac{1}{4}$. Но при $k=-\frac{1}{4}$ уравнение $k^2x^2+x(5k+1)+1=0$ не имеет решений. Поэтому окончательный ответ: $k=-1$.



6.89. Обозначим уменьшаемое x. По условию запишем функцию, наибольшее значение которой надо найти: $f(x)=x-2x^2$. Также по условию запишем промежуток изменения переменной x: $x\in(-\infty;+\infty)$. Исследуемая функция является квадратичной. Ее график — парабола с ветвями вниз. Значит, наибольшее значение функция принимает в вершине, то есть при $x=\frac{-1}{2\cdot(-2)}=\frac{1}{4}$.

6.90. Если первый множитель обозначим x, то второй множитель запишем как $\frac{36}{x}$. Запишем функцию, наименьшее значение которой надо найти: $f(x)=x^2+\left(\frac{36}{x}\right)^2$. Также по условию запишем промежуток изменения переменной x: $x\in(0;+\infty)$. Исследуем функцию $f(x)$ с помощью производной. Вычислим $f'(x)=\left(x^2+\left(\frac{36}{x}\right)^2\right)'=2x-2\cdot\frac{36^2}{x^3}$. Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого решим уравнение $2x-2\cdot\frac{36^2}{x^3}=0 \Leftrightarrow \frac{x^4-36^2}{x^3}=0$. На промежутке $(0;+\infty)$ есть только одна точка, в которой $f'(x)$ равна 0. Это $x=6$. На промежутке $(0;6)$ функция $f(x)$ имеет отрицательную производную, а значит, убывает на этом промежутке. На промежутке $(6;+\infty)$ функция $f(x)$ имеет положительную производную, а значит, возрастает на этом промежутке. Значит, при $x=6$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение. Искомое разложение на множители выглядит как $6\cdot 6$.

6.91. Запишем в общем виде уравнение касательной к графику функции $y=-(x-3)^2$ в точке с абсциссой x_0. Поскольку $y'=-2\cdot(x-3)$, то уравнение касательной имеет вид: $y=-2(x_0-3)(x-x_0)-(x_0-3)^2$. Треугольник расположен в четвертой координатной четверти. Прямая $y=-2(x_0-3)(x-x_0)-(x_0-3)^2$ пересекает ось Ox в точке $\left(\frac{x_0^2-9}{2(x_0-3)};0\right)$, ось Oy — в точке $(0;x_0^2-9)$. Заметим, что величина x_0^2-9 — отрицательная. Запишем функцию, выражающую площадь этого треугольника:

$$S(x_0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_0^2-9}{2(x_0-3)}\cdot(9-x_0^2).$$

По условию $x_0 \in \left[0; \frac{5}{2}\right]$. Исследуем функцию $S(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_0^2 - 9}{2(x_0 - 3)} \cdot (9 - x_0^2) = -\frac{1}{4}(x_0^3 + 3x_0^2 - 9x_0 - 27)$ с помощью производной. Имеем

$$S'(x_0) = \left(-\frac{1}{4}(x_0^3 + 3x_0^2 - 9x_0 - 27)\right)' =$$
$$= -\frac{1}{4}(3x_0^2 + 6x_0 - 9) = -\frac{3}{4}(x_0^2 + 2x_0 - 3).$$

На промежутке $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ есть только одна точка, в которой $S'(x_0)$ равна 0. Это $x_0 = 1$. Вычислим значения функции $S(x_0)$ при $x_0 = 1$ и на концах отрезка $\left[0; \frac{5}{2}\right]$. Имеем: $S(1) = 8$; $S(0) = \frac{27}{4}$; $S\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{121}{32}$. Наибольшая возможная площадь равна 8.

6.92. Обозначим катеты данного прямоугольного треугольника x и y. По теореме Пифагора $x^2 + y^2 = c^2$, откуда $y = \sqrt{c^2 - x^2}$.

Выпишем функцию площади: $S(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{c^2 - x^2}$. Также по условию запишем промежуток изменения переменной x: $x \in (0; c)$. Исследуем функцию $S(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{c^2 - x^2}$ с помощью производной.

$S'(x) = \left(\frac{1}{2}x \cdot \sqrt{c^2 - x^2}\right)' = \frac{c^2 - 2x^2}{2\sqrt{c^2 - x^2}}$. Решим уравнение $\frac{c^2 - 2x^2}{2\sqrt{c^2 - x^2}} = 0$. Его корни $x_{1,2} = \pm\frac{c}{\sqrt{2}}$. Промежутку $(0; c)$ принадлежит только $x = \frac{c}{\sqrt{2}}$. На промежутке $\left(0; \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$ функция $S(x)$ имеет положительную производную, а значит, возрастает на этом промежутке. На промежутке $\left(\frac{c}{\sqrt{2}}; c\right)$ функция $S(x)$ имеет отрицательную производную, а значит, убывает на этом промежутке. Значит, при $x = \frac{c}{\sqrt{2}}$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение. То есть катеты треугольника должны быть равны $\frac{c}{\sqrt{2}}$ и $\frac{c}{\sqrt{2}}$.

6.93. Обозначим сторону основания x см. Тогда по условию высота параллелепипеда равна $3 - x$ см, так как боковая грань имеет периметр 6 см. По условию запишем промежуток изменения переменной x: $x \in (0; 3)$. Запишем функцию, наибольшее значение которой надо найти: $V(x) = x^2 \cdot (3 - x)$. Вычислим $V'(x) = (3x^2 - x^3)' = 6x - 3x^2$. Производная равна нулю при $x = 0$ и при $x = 2$. При переходе через точку $x = 2$ производная меняет свой знак с «+» на «–», и поэтому $x = 2$ — точка максимума. Значит, наибольший объем параллелепипеда равен $V(2) = 2^2 \cdot (3 - 2) = 4$.

6.94. Данный шар имеет радиус, равный $R^3 = \frac{3V}{4\pi}$. А у цилиндра $S_{\text{бок.}} = 2\pi rh$ и по теореме Пифагора $R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}$, поэтому $S_{\text{бок.}}(h) = 2\pi h\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$, $h \in (0; 2R)$. Так как $S'(h) = 0$ при $h = \sqrt{2}R$ и это — точка максимума, то искомый объем равен $V = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi\left(R^2 - \frac{2R^2}{4}\right)\sqrt{2}R = \frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$, т. е. $V_{\max} = \frac{\pi\frac{3V}{4\pi}}{\sqrt{2}} = \frac{3V}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}V}{8}$.

6.95. Остановка точки означает, что ее скорость равна 0. Поскольку $s'(t) = v(t)$, то имеем уравнение

$$s'(t) = (3t^2 - 12t + 18)' = 6t - 12.$$

Решим уравнение: $6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

7.1. $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0, \\ 18 - 3x \neq 0. \end{cases}$ Для уравнения системы $D = 49 - 4 \cdot 6 = 25$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$. Учитывая условие $18 - 3x \neq 0$, делаем вывод, что второй корень — посторонний (при этом значении x знаменатель обращается в нуль).

7.2. $\frac{9(5x+1)^2 - 16(x+2)^2}{(x+2) \cdot 9(5x+1)} = 0$. Аналогично 4.19 имеем

$$\frac{(3(5x+1) - 4(x+2))(3(5x+1) + 4(x+2))}{9(x+2)(5x+1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (11x - 5)(19x + 11) = 0, \\ (x+2)(5x+1) \neq 0, \end{cases}$ откуда $x = \frac{5}{11}$ и $x = -\frac{11}{19}$.

7.3. $\begin{cases} 2x^2 + x + 3 = 3(x^2 + x), \\ x^2 + x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 = 0, \\ x(x+1) \neq 0. \end{cases}$ Значит, $x = 1$, $x = -3$.

7.4. $\frac{8(x+1) - 4(x-1) - 3(x^2 - 1)}{4(x-1)(x+1)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 8 - 4x + 4 - 3x^2 + 3 = 0, \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 4x + 15 = 0, \\ x \neq \pm 1, \end{cases}$ откуда $x = 3$, $x = -\frac{5}{3}$.

7.5. $\frac{8}{x(x+4)} - \frac{32}{x(x-4)} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(\frac{8}{x+4} - \frac{32}{x-4} - 1\right) = 0$. Значит, либо $\frac{1}{x} = 0$, либо $\frac{8(x-4) - 32(x+4) - (x^2 - 16)}{(x+4)(x-4)} = 0$. Первое уравнение не имеет корней, а из второго получаем $-x^2 - 24x - 144 = 0$, $D/4 = 12^2 - 144 = 0$, $x = -12$.

7.6. $\frac{1}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3) + (x+2)(x-3) + 2(x+2)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 3x - 7 = 0, \\ x \neq \pm 2;\ x \neq 1;\ x \neq 3, \end{cases}$ откуда $x = -1$; $x = \frac{7}{4}$.

7.7. $\frac{x \cdot 4(2-x)}{(1-x)(1+x)} + \frac{x(4 - x^2)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1+x}\left(\frac{4(2-x)}{1-x} + (2-x)(2+x)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{x(2-x)}{1+x} \cdot \left(\frac{4}{1-x} + 2 + x\right) = 0$. Значит, либо $x = 0$, либо $x = 2$, либо $\frac{4}{1-x} + 2 + x = 0 \Leftrightarrow \frac{4 + (2+x)(1-x)}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{6 - x - x^2}{1-x} = 0$, откуда $x = 2$, $x = -3$.

7.8. Разложим на множители: $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$ и получим $(x+1)(x-1)(x+6)-(x-1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)((x+1)(x+6)-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+7x+5)=0$, откуда $x-1=0$, т. е. $x=1$ и $x^2+7x+5=0$ откуда $x=\frac{-7\pm\sqrt{29}}{2}$.

7.9. $\left(2x^2+2x-4\right)^2-\left(x^2+2x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(2x^2+2x-4-x^2-2x+1\right)\left(2x^2+2x-4+x^2+2x-1\right)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(x^2-3\right)\left(3x^2+4x-5\right)=0$, откуда $x=\pm\sqrt{3}$, $x=\frac{-2\pm\sqrt{19}}{3}$.

7.10. $\left(2x^2+x+1\right)^2-\left(x^2+2x-1\right)^2-\left(x^2-x+2\right)^2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(2x^2+x+1-x^2-2x+1\right)\left(2x^2+x+1+x^2+2x-1\right)-$
$-\left(x^2-x+2\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x+2\right)\left(3x^2+3x\right)-\left(x^2-x+2\right)^2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(x^2-x+2\right)\left(3x^2+3x-(x^2-x+2)\right)=0.$

Значит, либо $x^2-x+2=0$, либо $2x^2+4x-2=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+2x-1=0$. Корней у первого уравнения нет, так как $D=1-8<0$. Второе уравнение имеет два корня — $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$.

7.11. $x-3-\frac{(x-3)(x+5)}{x^2+2x+1}=0 \Leftrightarrow (x-3)\left(1-\frac{x+5}{x^2+2x+1}\right)=0$.
Значит, либо $x=3$, либо $\begin{cases} x^2+2x+1-x-5=0, \\ x^2+2x-1\neq 0, \end{cases}$ откуда $x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

7.12. $\frac{(x+3)(x+5)}{x+3}=7x^2+x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=7x^2+x-2, \\ x\neq -3. \end{cases}$
Значит, $7x^2=7 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

7.13. Упростим уравнение, выделив целые части в дробях (см. 2.40):

$2+\frac{1}{x}+2+\frac{1}{x+1}+2+\frac{1}{x+2}=6 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{x^2+3x+2+x^2+2x+x^2+x}{x(x+1)(x+2)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+6x+2=0, \\ x\neq 0,\ x\neq -1,\ x\neq -2, \end{cases}$
откуда $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$.

7.14. Аналогично 2.39 $\frac{x^2+x+3}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2+2}$,
$\frac{x^2-x-1}{(x+3)(x^2+2)}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x^2+2}$. Поэтому уравнение примет вид $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{4}$, откуда $x=1$, $x=-\frac{7}{3}$.

7.15. Пусть $x^2-2x+2=a$. Тогда $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=\frac{9}{2a+4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{2a^2+6a+4+2a^2+4a-9\left(a^2+a\right)}{2a(a+1)(a+2)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5a^2+a+4=0, \\ a(a+1)(a+2)\neq 0, \end{cases}$
откуда $a=1$, $a=-\frac{4}{5}$. Возвращаясь к переменной x, имеем $x^2-2x+2=1$, откуда $x=1$ либо $x^2-2x+2=-\frac{4}{5}$. В последнем уравнении $D<0$, а значит, корней нет.

7.16. Пусть $2x^2+3x=a$, тогда $(a-2)(5-2a)+5(a+2)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2a^2+14a=0$, т. е. $a=0$, $a=7$. Значит, $2x^2+3x=0$, откуда $x=0$; $x=-1{,}5$ либо $2x^2+3x=7$, откуда $x=\frac{-3\pm\sqrt{15}}{4}$.

7.17. Пусть $\frac{x-2}{x+2}=a$, тогда $a-4\frac{1}{a}=0 \Leftrightarrow \frac{a^2-4}{a}=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a=\pm 2$. Значит, $\frac{x-2}{x+2}=2 \Leftrightarrow x=-6$ либо $\frac{x-2}{x+2}=-2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$.

7.18. Пусть $2x^2+1=a$. Тогда $(a-3x)(a+5x)=9x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2+2ax-15x^2-9x^2=0 \Leftrightarrow a^2+2ax-24x^2=0.$

Аналогично 2.28 вычислим
$D/4=x^2-1\cdot\left(-24x^2\right)=25x^2$, $a_{1,2}=-x\pm 5x$.

То есть $2x^2+1=-6x$ либо $2x^2+1=4x$. Из первого уравнения находим $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$, а из второго — $x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

7.19. Разделим числитель и знаменатель дроби на $x^2\neq 0$ и получим $\frac{(x^2-1)^2:x^2}{x-1+\frac{1}{x}}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}{x-1+\frac{1}{x}}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+\frac{1}{x^2}-2}{x+\frac{1}{x}-1}=\frac{3}{2}$. Обозначим $x+\frac{1}{x}=t$.

Тогда $t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$, получаем $\frac{t^2-2-2}{t-1}=\frac{3}{2}$, откуда находим $t=1$ и $t=2{,}5$. Возвращаясь к переменной x, получим ответ.

7.20. Запишем уравнение в виде $x^2+\left(\frac{9x}{9+x}\right)^2=40$ и выделим полный квадрат:
$\left(x^2+\left(\frac{9x}{9+x}\right)^2-2x\frac{9x}{9+x}\right)+2x\frac{9x}{9+x}=40 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{9x}{9+x}\right)^2+\frac{18x^2}{9+x}=40 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2+18\frac{x^2}{9+x}=40$. Пусть $\frac{x^2}{9+x}=a$, тогда $a^2+18a-40=0$, $D/4=81+40=121$, $a=2$, $a=-20$. Возвращаясь к переменной x, имеем $x^2=2(9+x)$ и $x^2=-20(9+x)$. Из первого уравнения находим $x=1\pm\sqrt{19}$, а во втором уравнении корней нет.

7.21. $2\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)^2=0$. Пусть $x^2-1=a$, $x^2+1=b$, тогда $2a^2-ab-b^2=0$. Аналогично 2.28 находим $a=b$ либо $a=-\frac{b}{2}$. В первом случае $x^2-1=x^2+1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in\varnothing$, а во втором $2\left(x^2-1\right)=-x^2-1 \Leftrightarrow 3x^2=1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7.22. $\frac{x^2+1}{x^2-2x+2}-1=\frac{2x^2+x}{2x^2-x+1}-1 \Leftrightarrow \frac{x^2+1-(x^2-2x+2)}{x^2-2x+2}=$
$=\frac{2x^2+x-(2x^2-x+1)}{2x^2-x+1} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x^2-2x+2}-\frac{2x-1}{2x^2-x+1}=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\frac{1}{x^2-2x+2}-\frac{1}{2x^2-x+1}\right)=0$. Значит, $x=0{,}5$ либо
$x^2-2x+2=2x^2-x+1 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$, откуда $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Все найденные значения x входят в ОДЗ переменной и являются решениями.

7.23. Выделим полный куб: $x^3-3x^2+3x-1=8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)^3=8 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3.$

7.24. Сгруппируем: $(x^3-1)+(x-1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ (x-1)(x^2+x+1)+(x-1)=0\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1+1)=0$. Значит, либо $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, либо $x^2+x+2=0$. Корней у последнего уравнения нет, так как $D=1-8<0$.

7.25. Разложим левую часть уравнения на множители, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$x^4+2x^3+2x^2+x-2=\left(x^2+Ax+B\right)\left(x^2+Cx+D\right).$$

Так как после раскрытия скобок мы должны получить выражение, тождественно равное исходному, то $B\cdot D=-2$; $A\cdot D+C\cdot B=1$; $B+D+A\cdot C=2$; $A+C=2$. Попробуем для этих четырех равенств подобрать целые коэффициенты A, B, C и D. Из первого равенства возможно два варианта: $B=1$, $D=-2$ либо $B=-1$, $D=2$. В первом случае получаем: $\begin{cases}-2A+C=1,\\ -1+2+AC=2,\\ A+C=2,\end{cases}$ и решений у этой системы нет.

Во втором случае: $\begin{cases}2A-C=1,\\ -1+2+AC=2,\\ A+C=2,\end{cases}$ откуда $A=1$, $C=1$. Значит, $x^4+2x^3+2x^2+x-2=\left(x^2+x-1\right)\left(x^2+x+2\right)$ и исходное уравнение распадается на 2 уравнения: $x^2+x-1=0$ и $x^2+x+2=0$. Корни первого уравнения — $x=\dfrac{-1\pm\sqrt5}{2}$, а второе не имеет корней, так как $D=1-4\cdot2<0$.

7.26. Аналогично 2.31 обозначим $x-\dfrac{3}{x}=a$. Тогда $x^2+\dfrac{9}{x^2}=a^2+6$ и исходное уравнение принимает вид $a^2+6+a=8 \Leftrightarrow a^2+a-2=0$, откуда $a=1$, $a=-2$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}x-\dfrac{3}{x}=1,\\ x-\dfrac{3}{x}=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2-x-3}{x}=0,\\ \dfrac{x^2+2x-3}{x}=0,\end{array}\right.$ откуда $x-\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x=1$, $x=-3$.

7.27. Пусть $7-x=a$. Тогда уравнение примет вид $(a-1)^4+(a+1)^4=16 \Leftrightarrow \left(a^2+1-2a\right)^2+\left(a^2+1+2a\right)^2=16 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2a^4+2+12a^2=16 \Leftrightarrow a^4+6a^2-7=0 \Leftrightarrow a^2=1$, $a^2=-7$, откуда $a=\pm1$. Значит, $7-x=\pm1$, т. е. $x=6$, $x=8$.

7.28. Оценим левую и правую части уравнения: $x^2+2x+2=\left(x+1\right)^2+1\ge1$ (см. 5.2 и 5.4), $2^{-|x+1|}\le2^0=1$ (см. 6.29, г) и 6.35, б)). Значит, равенство возможно, только если обе части одновременно равны единице. В данном случае только при $x=-1$ их значения совпадают.

7.29. Оценим выражение в каждой скобке: $x^2+2x+2=$ $=(x+1)^2+1\ge1$, $y^2-4y+6=(y-2)^2+2\ge2$. Значит, произведение двух этих множителей равно 2 тогда и только тогда, когда каждый из них принимает свое наименьшее значение, т. е. при $x=-1$, $y=2$.

7.30. *Способ 1.* Оценим левую часть уравнения, записав ее в виде квадратного трехчлена относительно, например, x:

$$x^2(y^2+1)+2x(1-7y)+(y^2-2y+37)=0.$$

Тогда $\dfrac{D}{4}=(1-7y)^2-(y^2+1)(y^2-2y+37)=$ $=-y^4+2y^3+11y^2-12y-36=-(y+2)^2(y-3)^2\le0.$

Решение исходного уравнения имеется только при $y=-2$ или $y=3$. Подставляя эти значения в исходное уравнение, вычисляем, соответственно, $x=3$ и $x=-2$.

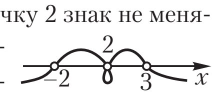
Способ 2. Можно оценить левую часть уравнения, выделив полные квадраты: $\dfrac{(x(1+y^2)+1-7y)^2+(y^2-y-6)^2}{1+y^2}=0$, но в данном случае это гораздо сложнее, чем вычислить дискриминант как в способе 1.

7.31. *Способ 1.* $x^2-6x+y^2-4y+13\le0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2-6x+9)+(y^2-4y+4)\le0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2\le0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-3=0,\\ y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}$

Способ 2. $\dfrac{D}{4}=9-1\cdot(y^2-4y+13)=-y^2+4y-4=$ $=-(y-2)^2\le0$. Решение квадратного неравенства существует только при $y=2$. Подставляя это значение y в исходное неравенство, находим $x=3$.

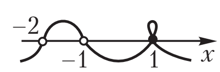
8.1. Область допустимых значений переменной — решение неравенства $x^2-x-2\ge0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$. Произведение двух множителей больше либо равно нулю, если они одного знака либо один из них равен нулю. Так как второй множитель всегда неотрицателен, то либо на ОДЗ переменной $x-1\ge0 \Leftrightarrow x\ge1$, либо $\sqrt{x^2-x-2}=0 \Leftrightarrow x=-1$, $x=2$. Окончательный ответ: $x\in\{-1\}\cup[2;+\infty)$.

8.2. $(x+2)(3-x)(x-2)(x-2)>0$. Применяя метод интервалов (см. рис.), расставляем знаки, начиная с крайнего правого интервала. Там знак «–», так как только во втором множителе исходного неравенства перед старшей степенью стоит знак «–». При переходе через точку 2 знак не меняется, так как множитель $(x-2)$ встретился в данном неравенстве четное число раз.



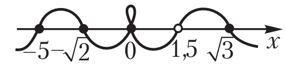
8.3. Корень числителя $x=3$. Корни знаменателя $x=3$ и $x=-1$. Числовые множители: $3\sqrt3-5=\sqrt{27}-5>0$, $\sin2-2<0$, так как $\sin\alpha\le1$ при любом α. Применяя метод интервалов, расставляем знаки на промежутках и получаем ответ.

8.4. Надо решить неравенство $\dfrac{-x^2+2x-1}{x^2+3x+2}\ge0 \Leftrightarrow \dfrac{-(x-1)^2}{(x+1)(x+2)}\ge0$.

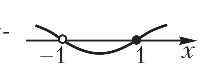


Применяя метод интервалов (см. рис.), получаем ответ.

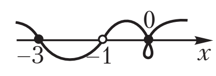
8.5. Применяя метод интервалов (см. рис.), получаем ответ.



8.6. Уравнение $|A|=A$ верно, только когда $A\ge0$. Значит, надо решить неравенство $\dfrac{x-1}{x+1}\ge0$. Применяя метод интервалов (см. рис.), получаем ответ.

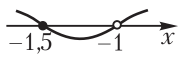


8.7. $x^2+2x-\dfrac{2x}{x+1}\ge0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\left(x+2-\dfrac{2}{x+1}\right)\ge0 \Leftrightarrow \dfrac{x\left(x^2+3x\right)}{x+1}\ge0.$



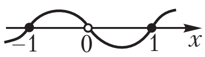
Применяя метод интервалов (см. рис.), получаем ответ.

8.8. $\frac{1}{x+1}+2\le 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1}\le 0$. Применяя метод интервалов (см. рис.), получаем ответ.



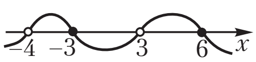
8.9. $x-\frac{1}{x}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x}\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x}\ge 0$. Применяя метод интервалов (см. рис.), получаем ответ.



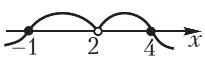
8.10. $\frac{2x+3}{(x-3)(x+4)}-\frac{1}{2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{4x+6-x^2-x+12}{2(x-3)(x+4)}\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-x^2+3x+18}{2(x-3)(x+4)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(6-x)(3+x)}{2(x-3)(x+4)}\le 0$. Применяя метод интервалов (см. рис.), получаем ответ.



8.11. *Способ 1.* $\frac{2x^2-3x-2}{x-2}\ge x^2-x-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(2x+1)}{x-2}+x+3-x^2\ge 0 \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(2x+1)+(x-2)(x+3-x^2)}{x-2}\ge 0 \Leftrightarrow$

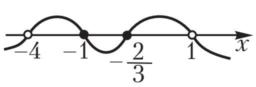
$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(3x+4-x^2)}{x-2}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)(4-x)}{x-2}\ge 0$. Применяя метод интервалов (см. рис.), получаем ответ.

Способ 2. $\frac{(x-2)(2x+1)}{x-2}\ge x^2-x-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+1\ge x^2-x-3,\\ x-2\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x-4\le 0,\\ x\ne 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le x\le 4,\\ x\ne 2.\end{cases}$

8.12. $\frac{2(x+4)+6(-x+1)-3(-x+1)(x+4)}{(-x+1)(x+4)}\ge 0 \Leftrightarrow$

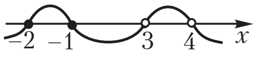
$\Leftrightarrow \frac{3x^2+5x+2}{(1-x)(x+4)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(3x+2)}{(1-x)(x+4)}\ge 0$. Применяя метод интервалов (см. рис.), получаем ответ.



8.13. $\frac{20}{(x-3)(x-4)}+\frac{10}{x-4}+1\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{20+10x-30+x^2-7x+12}{(x-3)(x-4)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+2}{(x-3)(x-4)}\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2)}{(x-3)(x-4)}\le 0$. Применяя метод интервалов (см. рис.), получаем ответ.



8.14. Пусть $x^2=t$, тогда $\Leftrightarrow t^2+t-2<0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)<0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2<t<1$. Возвращаясь к переменной x, решаем двойное неравенство $-2<x^2<1$, т. е. систему $\begin{cases}-2<x^2,\\ x^2<1.\end{cases}$ Первое неравенство верно всегда, а второе решаем методом интервалов $x^2-1<0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)<0 \Leftrightarrow -1<x<1$ (см. рис.).

8.15. Пусть $2x^2+x=t$, тогда $t^2+t<12 \Leftrightarrow (t-3)(t+4)<0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -4<t<3$. Возвращаясь к переменной x, решаем систему неравенств $\begin{cases}-4<2x^2+x,\\ 2x^2+x<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+x+4>0,\\ 2x^2+x-3<0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-\infty;+\infty),\\ x\in(-1{,}5;1)\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-1{,}5;1).$

8.16. Аналогично 7.16, в) сгруппируем скобки попарно: $((x-1)(x-4))((x-2)(x-3))+1\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+1\le 0$. Пусть $x^2-5x+4=t$, тогда $t(t+2)+1\le 0 \Leftrightarrow t^2+2t+1\le 0 \Leftrightarrow (t+1)^2\le 0 \Leftrightarrow t=-1$. Значит, $x^2-5x+4=-1 \Leftrightarrow x^2-5x+5=0$, $D=25-4\cdot 5\cdot 1=5$, $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

8.17. Аналогично 7.26 обозначим $x-\frac{1}{x}=t$, тогда

$t^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}-2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$ и исходное неравенство примет вид $36>6\left(t^2+2\right)+7t \Leftrightarrow 6t^2+7t-24<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{8}{3}<t<\frac{3}{2}$. Возвращаясь к переменной x, решаем систему

неравенств $\begin{cases}-\frac{8}{3}<x-\frac{1}{x},\\ x-\frac{1}{x}<\frac{3}{2}\end{cases}$ и получаем ответ.

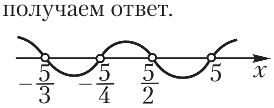
8.18. Пусть $(x+5)^2=a$, $x^2=b$. Тогда имеем

$a^2+36b^2-13ab<0$. Аналогично 2.28 получаем

$(a-4b)(a-9b)<0$, т. е. $\left((x+5)^2-4x^2\right)\left((x+5)^2-9x^2\right)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+5-2x)(x+5+2x)(x+5-3x)(x+5+3x)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5-x)(3x+5)(5-2x)(4x+5)<0$. Применяя метод интервалов (см. рис.), получаем ответ.



8.19. Аналогично 7.18 разделим обе части неравенства на $x^2>0$ (значение $x=0$ проверим непосредственной подстановкой): $\left(2x-3+\frac{1}{x}\right)\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)<-12$. Пусть $2x+\frac{1}{x}=t$, тогда $(t-3)(t+5)+12<0 \Leftrightarrow t^2+2t-3<0 \Leftrightarrow -3<t<1$. Возвращаясь к переменной x, решаем систему неравенств

$\begin{cases}2x+\frac{1}{x}<1,\\ 2x+\frac{1}{x}>-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2x^2-x+1}{x}<0,\\ \frac{2x^2+3x+1}{x}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-\infty;0),\\ x\in(-1;-0{,}5)\cup(0;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(-1;-0{,}5)$.

8.20. Числитель и знаменатель представляют собой суммы геометрических прогрессий с первым членом 1 и знаменателем x^2 и x соответственно, значит, при $x\ne 1$ можно их упростить (а значение $x=1$ проверить непосредственной подстановкой):

$\frac{\frac{x^{10}-1}{x^2-1}}{\frac{x^5-1}{x-1}}\le 1 \Leftrightarrow \frac{(x^5-1)(x^5+1)}{(x^5-1)(x+1)}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x^5+1}{x+1}\le 1,\\ x^5-1\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^5+1-x-1}{x+1} \le 0, \\ x^5 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x\left(x^4-1\right)}{x+1} \le 0, \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{x+1} = 0, \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;1).$$

Осталось проверить значение $x=1$ непосредственной подстановкой в исходное неравенство: $\dfrac{1+1+1+1+1}{1+1+1+1+1} \le 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{5}{5} \le 1$ — верное неравенство.

9.1. Из второго уравнения системы находим, что $x=8-2y$. Подставив $8-2y$ вместо x в первое уравнение, получаем $2(8-2y)y-y=9 \Leftrightarrow -4y^2+15y-9=0$. Вычислим $D=15^2-4\cdot4\cdot9=81$, $y_1=3$, $y_2=0{,}75$. Соответствующие им значения x получим из равенства $x=8-2y$: $x_1=8-2\cdot3=2$, $x_2=8-2\cdot0{,}75=6{,}5$.

9.2. Второе уравнение системы перепишем в виде $2^{x(y+1)}=2^{x+2} \Leftrightarrow x(y+1)=x+2$. Из первого уравнения системы $x=4-2y$. Подставив полученное выражение для x во второе уравнение системы, получаем $(4-2y)(y+1)=$ $4-2y+2 \Leftrightarrow 2y^2-4y+2=0 \Leftrightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow y=1$ и, соответственно, $x=4-2\cdot1=2$.

9.3. Преобразуем второе уравнение, выделяя полный квадрат: $(2x+3y)^2-2\cdot2x\cdot3y=13$. Используя первое уравнение, получим $5^2-2\cdot2x\cdot3y=13 \Leftrightarrow xy=1$. Пришли к системе $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ xy=12, \end{cases}$ решая которую получаем ответ.

9.4. Первое уравнение системы можно разложить на множители и воспользоваться вторым уравнением, но это дольше, чем сразу применить метод подстановки: так как $y=3-x$, то первое уравнение примет вид $x^3+(3-x)^3=9 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^3+27-27x+9x^2-x^3=9 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=2$ и, соответственно, $y_1=3-1=2$, $y_2=3-2=1$.

9.5. Выразив из второго уравнения системы $\dfrac{1}{2a+b}=$ $=\dfrac{2}{a-b}-3$, подставим это выражение в первое уравнение: $2\left(\dfrac{2}{a-b}-3\right)+\dfrac{3}{2(a-b)}=5 \Leftrightarrow \dfrac{4}{a-b}+\dfrac{3}{2(a-b)}=5+6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{8+3}{2(a-b)}=11 \Leftrightarrow a-b=0{,}5$. Подставив найденное значение для $a-b$ во второе уравнение системы, получим $\dfrac{1}{2a+b}-\dfrac{2}{0{,}5}=-3 \Leftrightarrow 2a+b=1$. Из системы линейных уравнений $\begin{cases} a-b=0{,}5, \\ 2a+b=1 \end{cases}$ находим $a=0{,}5$; $b=0$.

9.6. Выразив из первого уравнения системы $x=3-y$, подставим это выражение во второе уравнение и получим $\sqrt{y^2}-(3-y)+1=0 \Leftrightarrow |y|+y-2=0$. Рассмотрим 2 случая:

а) $y \ge 0$. Тогда $y+y-2=0 \Leftrightarrow 2y=2 \Leftrightarrow y=1$ и, соответственно, $x=3-1=2$.

б) $y \le 0$. Тогда $-y+y-2=0 \Leftrightarrow -2=0$ — нет корней.

9.7. Выразив из первого уравнения системы $\sqrt{y}=x^3-1$, подставим это выражение во второе уравнение и получим $5x^6+2\left(x^3-1\right)^2-8x^3\cdot\left(x^3-1\right)=2$. Пусть $x^3=t$, тогда $5t^2+2(t-1)^2-8t(t-1)=2 \Leftrightarrow 5t^2+2t^2-4t+2-8t^2+8t-$ $-2=0 \Leftrightarrow -t^2+4t=0$, откуда $t_1=0$, $t_2=4$, т. е. $x=0$, $x=\sqrt[3]{4}$. Если $x=0$, то $\sqrt{y}=0^3-1 \Leftrightarrow \sqrt{y}=-1 \Leftrightarrow y \in \varnothing$. Если $x=\sqrt[3]{4}$, то $\sqrt{y}=\left(\sqrt[3]{4}\right)^3-1 \Leftrightarrow \sqrt{y}=3 \Leftrightarrow y=9$.

9.8. Преобразуем первое уравнение системы: $(y+3)(x-1)=$ $=0$. Значит, либо $x=1$, либо $y=-3$. Если $y=-3$, то второе уравнение системы примет вид $x^2+2x\cdot(-3)=7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2-6x-7=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=7$. Если же $x=1$, то $1+2y=7 \Leftrightarrow y=3$.

9.9. Избавимся от слагаемого xy, вычитая из первого уравнения второе: $xy+2x+3y-(xy-x+y)=14-5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x+2y=9 \Leftrightarrow y=\dfrac{9-3x}{2}$. Подставим это выражение в любое из исходных уравнений, например во второе: $x\cdot\left(\dfrac{9-3x}{2}\right)-x+\dfrac{9-3x}{2}=5 \Leftrightarrow 9x-3x^2-2x+9-3x=10 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=\dfrac{1}{3}$ и, соответственно, $y_1=\dfrac{9-3\cdot1}{2}=3$, $y_2=\dfrac{9-3\cdot\frac{1}{3}}{2}=4$.

9.10. Если воспользоваться методом подстановки, то придем к уравнению четвертой степени. Лучше избавиться от свободных членов уравнений, вычитая из первого уравнения системы второе: $x^2-y-(y^2-x)=2-2 \Leftrightarrow x^2-y^2-y+x=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-y)(x+y)+x-y=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1)=0$.

Теперь аналогично 9.8 рассмотрим два случая:

а) $x=y$. Тогда $x^2-x=2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=2$ и, соответственно, $y_1=-1$, $y_2=2$.

б) $x+y+1=0 \Leftrightarrow y=-1-x$. Тогда $x^2-(-1-x)=2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+x-1=0$, откуда $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и, соответственно, $y_1=-1+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $y_2=-1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

9.11. Можно, как в 9.10, избавиться от свободных членов, чтобы затем разложить получаемое выражение на множители. Но можно поступить так: сложим уравнения: $x^2+2xy+y^2=9 \Leftrightarrow (x+y)^2=9 \Leftrightarrow x+y=\pm3$. Выражая теперь y через x, найдем решения системы. Если $y=3-x$, то $x^2+x(3-x)=6 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$ и, соответственно, $y=1$. Если $y=-3-x$, то $x^2+x(-3-x)=6 \Leftrightarrow x=-2$ и, соответственно, $y=-1$.

9.12. Пусть $\dfrac{1}{x^2+xy}=a$, $\dfrac{1}{x^2-xy}=b$. Тогда $\begin{cases} a+2b=3, \\ 3a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=3-2b, \\ 3(3-2b)-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-2b, \\ -7b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=1. \end{cases}$ Значит, $\begin{cases} x^2+xy=1, \\ x^2-xy=1. \end{cases}$ Сложив уравнения, найдем $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1$ и, соответственно, $y=0$.

9.13. В первом уравнении системы можно выполнить замену $\dfrac{x}{y}=t$, тогда $t+\dfrac{2}{t}=3 \Leftrightarrow t^2-3t+2=0$, откуда $t_1=1$, $t_2=2$. То есть $\dfrac{x}{y}=1 \Leftrightarrow x=y$ либо $\dfrac{x}{y}=2 \Leftrightarrow x=2y$. В первом случае второе уравнение исходной системы примет вид

$2x+x=10 \Leftrightarrow x=\frac{10}{3}$ и, соответственно, $y=\frac{10}{3}$. Во втором случае получаем $2(2y)+y=10 \Leftrightarrow 5y=10 \Leftrightarrow y=2$ и, соответственно, $x=2\cdot 2=4$.

9.14. Можно воспользоваться методом подстановки, но проще выполнить замену $\sqrt{x^2+2y+1}=t$ в первом уравнении системы, тогда $t^2-1+t=1 \Leftrightarrow t^2+t-2=0$, откуда $t_1=1$, $t_2=-2$. Второе значение постороннее, так как $t \geq 0$. Значит, $\sqrt{x^2+2y+1}=1 \Leftrightarrow x^2+2y+1=1 \Leftrightarrow x^2+2y=0$. Теперь, выражая $y=2-2x$ из второго уравнения исходной системы и подставляя в полученное уравнение, имеем $x^2+2(2-2x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2$, соответственно $y=2-2\cdot 2=-2$.

9.15. Это симметрическая система уравнений, и решается она стандартной заменой $x+y=a$, $x\cdot y=b$. Так как второе уравнение исходной системы преобразуется к виду $xy(x+y)=30$, то получаем $\begin{cases} a+b=11, \\ ab=30, \end{cases}$ откуда $a=5, b=6$ либо $a=6$, $b=5$. Возвращаясь к переменным x и y, получаем $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,\ y=3, \\ x=3,\ y=2 \end{array}\right.$ или $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,\ y=5, \\ x=5,\ y=1. \end{array}\right.$

9.16. Аналогично 9.15 преобразуем систему: $\begin{cases} x-y+xy=13, \\ xy(x-y)=30. \end{cases}$

Введем новые неизвестные $x-y=a$, $xy=b$: $\begin{cases} a+b=13, \\ ab=30 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=10,\ b=3, \\ a=3,\ b=10. \end{array}\right.$ Возвращаясь к переменным x и y, рассматриваем два случая: $\begin{cases} x-y=10, \\ xy=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=10. \end{cases}$ Из первой системы получим две пары решений $(5\pm\sqrt{28};-5\mp\sqrt{28})$ и из второй еще две пары $(5;2)$ и $(-2;-5)$.

9.17. Первое уравнение системы $3x^2-7xy+2y^2=0$ — однородное. Разложим его на множители аналогично 2.28: $D=(7y)^2-4\cdot 3\cdot(2y^2)=25y^2$, $x_{1,2}=\frac{7y\pm 5y}{6}$,

$(3x-y)(x-2y)=0$. Теперь аналогично 9.8 рассмотрим два случая: $\begin{cases} 3x=y, \\ xy+x^2=6 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2y, \\ xy+x^2=6. \end{cases}$ Решая первую систему, находим $x_1=\sqrt{1{,}5}$, $x_2=-\sqrt{1{,}5}$, $y_1=3\sqrt{1{,}5}$, $y_2=-3\sqrt{1{,}5}$, а из второй системы получаем $x_3=2$, $y_3=1$, $x_4=-2$, $y_4=-1$.

9.18. Это — однородная система. Решаем ее делением первого уравнения на второе (случай, когда обе части второго уравнения равны нулю, надо рассмотреть отдельно): $\frac{3x^2+xy}{y^2+3xy}=\frac{5}{10} \Leftrightarrow \frac{x(3x+y)}{y(y+3x)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=2x$. Подставляя это выражение в любое из исходных уравнений, например в первое, получаем $3x^2+x\cdot 2x=5 \Leftrightarrow 5x^2=5 \Leftrightarrow x=\pm 1$, откуда $y=\pm 2$. В данной задаче левая часть второго уравнения равна 10 и, следовательно, нет необходимости рассматривать случай, когда она равна 0.

10.1. Во-первых, $xy=x+y+98$. Во-вторых, $x\cdot 1{,}2=y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 6x=5y$.

10.2. Пусть во втором сарае было x т сена, тогда в первом сарае — $3x$ т сена. По условию $x+20=\frac{5}{7}(3x-20)$, откуда $x=30$.

10.3. Заплатив 43,2 руб. по цене 54 коп. за минуту, Таня проговорила 43,2 : 0,54 = 80 мин. Значит, по тарифу бесплатно предоставляется 580 – 80 = 500 мин. Саша ничего платить не должен.

10.4. По соотношению

75 кг — 100 %

x кг — 9,6 %

составим пропорцию: $\frac{75}{x}=\frac{100}{9{,}6}$, откуда $x=7{,}2$.

10.5. Обозначим площадь закрашенного треугольника S, его основание — a и высоту — h. Тогда площадь всего треугольника равна $6S$, так как его основание в 3 раза больше и высота в 2 раза больше. Площадь закрашенной области S примем за 100 % (так как сравнение требуется с ней). Площадь незакрашенной части $5S$ тогда составляет 500 %, т. е. на 400 % больше, чем площадь закрашенной фигуры.

10.6. 7 % от числа A можно записать как $\frac{A\cdot 7}{100}$, а 107 % от числа B — как $\frac{B\cdot 107}{100}$. По условию $\frac{A\cdot 7}{100}=\frac{B\cdot 107}{100}$, откуда $\frac{A}{B}=\frac{107}{7}$.

10.7. Пусть винограда потребуется x кг. Составим пропорцию: $\frac{x}{2}=\frac{100}{32}$, откуда $x=6{,}25$ кг.

10.8. Пусть d — число девочек в классе. Тогда мальчиков в классе $35-d$, что составляет $\frac{d\cdot 75}{100}$. Из уравнения $35-d=\frac{d\cdot 75}{100}$ находим, что $d=20$, а значит, мальчиков в классе 15.

10.9. Пусть в первом зале было x мест, а во втором — $640-x$. Тогда в первом зале добавили $\frac{x\cdot 20}{100}$ мест, а во втором — $\frac{(640-x)\cdot 15}{100}$. По условию $\frac{x\cdot 20}{100}+\frac{(640-x)\cdot 15}{100}=114$, откуда $x=360$. Значит, в первом зале установили $\frac{360\cdot 20}{100}=72$ (новых кресла).

10.10. Так как яблоки при сушке теряют 85 % массы, то сушеные яблоки составляют 15 % массы свежих. Составим пропорцию $\frac{x}{10{,}5}=\frac{100}{15}$, откуда $x=70$ (кг).

10.11. Пусть до изменений стадион посещало n человек. Тогда выручка D была равна $20n$, т. е. $D=20n$.

Пусть входная плата снизилась на x %. Тогда имеем $D+\frac{D\cdot 12{,}5}{100}=\left(20-\frac{20\cdot x}{100}\right)\cdot\left(n+\frac{n\cdot 25}{100}\right)$. Подставим в это уравнение $D=20n$ и найдем $x=10$. Значит, входной билет стал стоить $20-\frac{20\cdot 10}{100}=18$ (руб.).

10.12. Пусть цена картофеля была A руб. за килограмм. Тогда после повышения цены картофель стал стоить $\left(A+\frac{A\cdot 20}{100}\right)=1{,}2A$, а после снижения цены он стал стоить $\left(1{,}2A-\frac{1{,}2A\cdot 20}{100}\right)=0{,}96A$, т. е. составляет 96 % от A. Значит, после снижения цены картофель стал стоить на 4 % дешевле, чем до повышения цены.

10.13. Пусть ежегодно имеющаяся на счете сумма увеличивается на x %. Тогда через год на счете окажется

$\left(200\,000+\dfrac{200\,000}{100}\cdot x\right)$ руб., то есть $S_1=200\,000\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$ руб. Для расчета процентов за второй год уже за 100 % принимаем сумму, имеющуюся на счете к началу второго года, то есть $S_1=(200\,000+2000x)$ руб. Тогда по прошествии второго года на счете окажется $S_1\cdot\left(1+\dfrac{x}{100}\right)=$ $=200\,000\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^2$ руб., что по условию равно 242 000 руб. После упрощения имеем уравнение $200\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^2=242\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^2=\dfrac{121}{100}\Leftrightarrow\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^2=\left(\dfrac{11}{10}\right)^2$, откуда $x=10$. Итак, ежегодно сумма вклада увеличивается на 10 %.

10.14. Чтобы перевыполнить свой план на 120 %, первая мастерская сделала $\dfrac{6}{5}$ своего плана, а вторая — $\dfrac{5}{4}$ своего, чтобы перевыполнить его на 125 %. Значит, план первой мастерской должен делиться на 5, план второй — на 4, а сумма запланированных моторов равна 18. Перебором найдем, что первая мастерская должна была отремонтировать 10 моторов, вторая — 8. А отремонтировали: первая — 12, вторая — 10 моторов.

10.15. Запишем уравнение согласно закону сохранения вещества. Пусть к 60 кг морской воды надо добавить x кг пресной воды. Тогда $\dfrac{60\cdot 5\,\%}{100\,\%}=\dfrac{(60+x)\cdot 4\,\%}{100\,\%}$, где левая и правая части выражают массу соли до и после доливания воды. Решая уравнение, находим $x=15$ кг.

10.16. В 40 кг бронзы — 12 % олова и цинка, что составляет $\dfrac{40\cdot 12}{100}=4{,}8$ (кг). Если цинка в сплаве x кг, то олова в этом сплаве $(x+2{,}8)$ кг. Значит, $x+(x+2{,}8)=4{,}8$, откуда $x=1$ кг.

10.17. Обозначим процентное содержание олова в получившемся сплаве через x. Тогда $\dfrac{300\cdot 60}{100}+\dfrac{900\cdot 80}{100}=$ $=\dfrac{(300+900)\cdot x}{100}$, где левая и правая части выражают массу олова до и после сплавления, откуда $x=75$.

10.18. То, что спирта в смеси в 4 раза меньше, чем воды, означает, что спирта в смеси пятая часть, то есть 20 %, и, значит, 80 % воды. Пусть изначально было V л смеси. Тогда, приравняв объем спирта до и после добавления воды, получаем уравнение: $\dfrac{V\cdot 20}{100}=\dfrac{(V+20)\cdot 12}{100}$, откуда $V=30$ л. А воды в смеси было $\dfrac{30\cdot 80}{100}=24$ (л).

10.19. Пусть в первый раз отлили x л жидкости, а во второй раз — $2x$ л. После того как в первый раз отлили x л жидкости и дополнили сосуд водой, соляной кислоты в сосуде оказалось $20-x$ л. Процентное содержание соляной кислоты в смеси можем найти из пропорции $\dfrac{20}{20-x}=\dfrac{100}{n}$, откуда $n=5\cdot(20-x)$. Поэтому, когда во второй раз из сосуда вылили $2x$ л смеси, соляной кислоты в ней было $\dfrac{2x\cdot 5\cdot(20-x)}{100}=\dfrac{x(20-x)}{10}$ л. Теперь в сосуде осталось $\left(20-x-\dfrac{x(20-x)}{10}\right)$ л соляной кислоты, что составляет 28 % от 20 л раствора, то есть $\dfrac{20\cdot 28}{100}$ л. Решим уравнение $20-x-\dfrac{x(20-x)}{10}=\dfrac{20\cdot 28}{100}$, откуда $x=6$.

10.20. Пусть расстояние от дома до школы равно S, тогда скорость Маши равна $\dfrac{S}{12}$, а скорость Миши — $\dfrac{2S}{8}=\dfrac{S}{4}$. Откуда скорость Миши в 3 раза больше, чем скорость Маши.

10.21. Первый турист дойдет до города за $\dfrac{24}{4}=6$ (ч). Значит, второй турист должен дойти до города за $6-2=4$ (ч) и его скорость должна быть $\dfrac{24}{4}=6$ (км/ч).

10.22. Время встречи находится по формуле $t=\dfrac{30}{v_1+v_2}$, откуда $v_2=\dfrac{30}{t}-v_1$, а по условию $a=\dfrac{S}{v_1}$, откуда $v_1=\dfrac{S}{a}$. Значит, $v_2=\dfrac{S}{t}-\dfrac{S}{a}$ или $v_2=S\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{a}\right)=S\dfrac{a-t}{at}$.

10.23. Чтобы вычислить среднюю скорость движения, надо пройденное расстояние разделить на затраченное время. Пусть весь путь равен S. Тогда первую половину пути автомобиль проехал за $\dfrac{\frac{S}{2}}{50}$ (ч), а вторую — за $\dfrac{\frac{S}{2}}{30}$ (ч). Общее время в пути равно $\dfrac{\frac{S}{2}}{50}+\dfrac{\frac{S}{2}}{30}=\dfrac{2S}{75}$ (ч). Значит, средняя скорость движения равна $\dfrac{S}{\frac{2S}{75}}=37{,}5$ (км/ч).

10.24. Скорость пешехода равна $\dfrac{1}{10}\cdot 40=4$ (км/ч). Если мотоциклист проезжает расстояние между деревнями за x ч, то пешеход проходит это же расстояние за $(x+4{,}5)$ ч. Значит, $4(x+4{,}5)=40x$, откуда $x=0{,}5$. Следовательно, расстояние между деревнями равно $0{,}5\cdot 40=20$ (км).

10.25. Рейс автобуса в оба конца продолжается 7,5 ч. При этом общее расстояние, которое он проходит с горы, равно расстоянию, которое он проходит в гору. Но в гору он идет в два раза медленнее, чем с горы. Следовательно, на всех подъемах он находится в 2 раза больше времени, чем на всех спусках. Таким образом, из 7,5 ч на спуски он затрачивает 2,5 ч, а на подъем — 5 ч, и расстояние от A до B равно $25\cdot 5=125$ (км), так как расстояние, проходимое автобусом в гору «туда», и расстояние в гору при рейсе «обратно» в сумме составляют расстояние от A до B.

10.26. По плану: затраченное время 2 ч, скорость обозначим x км/ч, расстояние равно $2x$ км. В реальности: скорость $(x+3)$ км/ч, время $1\dfrac{2}{3}$ ч, значит, расстояние равно $\dfrac{5}{3}(x+3)$ км. Поскольку в реальности пройдено именно то расстояние, которое и было запланировано, получаем уравнение $2x=\dfrac{5}{3}(x+3)$, откуда $x=15$. Итак, велосипедист должен был проехать расстояние $2\cdot 15=30$ (км).

10.27. К моменту выхода поезда из B поезд из A прошел $70\cdot\dfrac{5}{3}=\dfrac{350}{3}$ (км), и расстояние между поездами сократилось до $420-\frac{350}{3}=\frac{910}{3}$ (км). Итак, на расстоянии $\frac{910}{3}$ км поезда сближались со скоростью $70+60=130$ (км/ч) и потратили на это $\frac{910}{3}:130=2\frac{1}{3}$ (ч). Тогда поезд из A шел до встречи $1\frac{2}{3}+2\frac{1}{3}=4$ (ч).

10.28. Пусть скорость одного поезда равна v км/ч, второго — $(v+10)$ км/ч. Тогда к моменту встречи они пройдут соответственно 350 км и 420 км. Время движения до встречи равно $\frac{770}{v+v+10}$ (ч). За это время поезд со скоростью v км/ч прошел 350 км. Имеем $\frac{770}{2v+10}\cdot v=350$, откуда $v=50$ км/ч. Скорость второго поезда равна 60 км/ч.

10.29. Пусть S — расстояние между городами, x км/ч — скорость мотоциклиста, y км/ч — скорость велосипедиста $(x>y)$. Время движения до встречи равно $\frac{S}{x+y}$. За это время велосипедист проехал $\frac{S}{x+y}\cdot y$ (км), а мотоциклист проедет это расстояние за 6 ч. Имеем $\frac{S}{x+y}\cdot y=6x$. Аналогично расстояние, которое к моменту встречи проехал мотоциклист, велосипедист проедет за 24 ч. Значит, $\frac{S}{x+y}\cdot x=24y$. Получили два уравнения с тремя неизвестными, но в ответе надо указать величину $\frac{S}{x}$. Разделим почленно второе уравнение на первое и получим $y=\frac{x}{2}$. Подставим полученное выражение для y, например в уравнение $\frac{S}{x+y}\cdot y=6x$, и получим, что $\frac{S}{x}=18$ (ч).

10.30. Находим расстояние между телами через 3 с по теореме Пифагора: $70^2=(60-3v_1)^2+(80-3v_2)^2$. Аналогично $50^2=(60-5v_1)^2+(80-5v_2)^2 \Leftrightarrow 50^2=5^2(12-v_1)^2+$ $+5^2(16-v_2)^2 \Leftrightarrow -300=v_1^2+v_2^2-24v_1-32v_2$. А из первого уравнения: $-5100=9v_1^2+9v_2^2-360v_1-480v_2 \Leftrightarrow -1700=$ $=3v_1^2+3v_2^2-120v_1-160v_2$.

Выражая $v_1^2+v_2^2=24v_1+32v_2-300$ и подставляя в другое уравнение, имеем линейную связь между переменными: $3v_1+4v_2=50$. Теперь легко решается исходная система: $v_1=6$, $v_2=8$.

10.31. Пусть S — расстояние от школы до дома. Тогда $\frac{S}{30}$ — скорость Миши, а $\frac{S}{40}$ — скорость Пети. Если Миша догоняет Петю, то их скорость сближения равна $\frac{S}{30}-\frac{S}{40}=\frac{S}{120}$. За 5 мин Петя прошел расстояние $\frac{S}{8}$. Когда Миша догоняет Петю, это расстояние между ними уменьшается со скоростью $\frac{S}{120}$. Значит, Миша догонит Петю через $\frac{\frac{S}{8}}{\frac{S}{120}}=\frac{120}{8}=15$ (мин).

10.32. Пусть скорости рыболова, охотника и грибника равны соответственно x, y и z км/ч. Тогда время, за которое грибник догонит охотника, равно $\frac{220}{z-y}$. Это время равно времени, за которое рыбак отстанет от охотника на 180 м, то есть $\frac{180}{y-x}$. За это же время расстояние между грибником и рыболовом сократится с 220 м до 0, а после этого увеличится до 180 м, то есть $\frac{400}{z-x}$. Имеем $\frac{220}{z-y}=\frac{180}{y-x}=\frac{400}{z-x}$. Чтобы найти расстояние между охотником и рыболовом в тот момент, когда грибник и рыболов находились в одной точке, нужно из расстояния, на которое успел отойти охотник, вычесть расстояние, которое за то же время прошел рыболов. Время, за которое грибник догнал рыболова, равно $\frac{220}{z-x}$. За это время охотник прошел $\frac{220}{z-x}\cdot y$ (км), а рыболов — $\frac{220}{z-x}\cdot x$ (км). Таким образом, ответ дает выражение $\frac{220}{z-x}\cdot y-\frac{220}{z-x}\cdot x$, т. е. $\frac{220(y-x)}{z-x}$. Из уравнения $\frac{180}{y-x}=\frac{400}{z-x}$ получим, что $\frac{y-x}{z-x}=\frac{9}{20}$. Тогда $\frac{220(y-x)}{z-x}=99$ (м).

10.33. Пусть S — расстояние между пунктами A и B, x км/ч — скорость пешехода, y км/ч — скорость велосипедиста $(x<y)$. В ответе надо указать величину $\frac{S}{x}$. Тогда время до первой встречи равно $\frac{2S}{x+y}=\frac{1}{3}$. За это время пешеход успел отойти от пункта A на $\frac{1}{3}\cdot x$ км, и время между первой и второй встречами равно $\frac{2\cdot\frac{1}{3}x}{y-x}=\frac{1}{6}$. Выразим из этого уравнения y через x и подставим в уравнение $\frac{2S}{x+y}=\frac{1}{3}$, откуда найдем, что $\frac{S}{x}=1$ (ч).

10.34. Необходимое время вычисляется как сумма времени движения по течению и времени движения против течения, то есть $\frac{144}{20+4}+\frac{144}{20-4}=15$ (ч).

10.35. Пусть скорость ветра x км/ч. При движении по направлению ветра самолет со скоростью $(690+x)$ км/ч за 5,5 ч пролетит $5{,}5\cdot(690+x)$ км, а при движении против направления ветра самолет со скоростью $(690-x)$ км/ч за 6 ч пролетит $6\cdot(690-x)$ км. Раз самолет туда и обратно пролетает одно и то же расстояние, то составим уравнение $5{,}5\cdot(690+x)=6\cdot(690-x)$, откуда скорость ветра равна 30 км/ч. Значит, расстояние равно $6\cdot(690-30)=3960$ (км), а туда и обратно самолет пролетит $3960\cdot 2=7920$ (км).

10.36. Обозначим S — расстояние AB, скорость плота — v, тогда время встречи плота и катера равно $\frac{S}{Nv}$, и за это время плот пройдет расстояние $\frac{S}{Nv}\cdot v=\frac{S}{N}$, а катер $S-\frac{S}{N}$. После встречи катер потратит на обратный путь $t=\frac{S-\frac{S}{N}}{Nv+v}=\frac{S}{v}\frac{N-1}{(N+1)N}$, и за это время плот пройдет расстояние, равное $vt=S\frac{N-1}{N(N+1)}$. Итого плот прошел

$\frac{S}{N}+S\frac{N-1}{N(N+1)}=\frac{2S}{N+1}$, а катер $2\left(S-\frac{S}{N}\right)=2S\frac{N-1}{N}$. Осталось решить пропорцию $\frac{2S}{N+1}=100\ \%$, $2S\frac{N-1}{N}=x\ \%$, откуда $x=\left(N-\frac{1}{N}\right)\cdot 100\ \%$. В ответе надо указать, на сколько процентов расстояние больше. То есть ответ:
$\left(N-\frac{1}{N}\right)\cdot 100\ \%-100\ \%$.

10.37. Пусть длина круговой дорожки равна L м. Тогда скорость Вани равна $\frac{L}{6}$ м/мин, а скорость Пети — $\frac{L}{4}$ м/мин. Чтобы Петя догнал Ваню, расстояние между ними должно сократиться с L м до 0. На это потребуется $\frac{L}{\frac{L}{4}-\frac{L}{6}}=12$ (мин).

10.38. Пусть объем тарелки каши равен V. Тогда скорость, с которой Маша ест кашу, равна $\frac{V}{10}$ тарелок в минуту, а скорость Вити — $\frac{V}{15}$ тарелок в минуту. Значит, время, за которое Маша и Витя съедят тарелку каши, если будут есть из одной тарелки, равно $\frac{V}{\frac{V}{10}+\frac{V}{15}}=6$ (мин).

10.39. Если завод должен был выпускать по x машин в день, то заказ составляет $20x$ машин. На самом деле завод выпускал по $(x+2)$ машины в день и за 18 дней выпустил $18\cdot(x+2)$ машин. По условию $20x=18\cdot(x+2)$, откуда $x=18$. Таким образом, завод выпустил $20\cdot 18=360$ (машин).

10.40. Пусть первая труба подает в бассейн 1 м^3 воды за x мин, то есть за $\frac{x}{60}$ ч, тогда вторая труба подает в бассейн 1 м^3 воды за $(x+4)$ мин, то есть за $\frac{x+4}{60}$ ч. Это означает, что за 1 ч первая труба подает в бассейн $\frac{60}{x}$ м^3 воды, а вторая труба подает в бассейн $\frac{60}{x+4}$ м^3 воды. По условию задачи $\frac{60}{x}$ м^3 больше $\frac{60}{x+4}$ м^3 на $\frac{100}{5}$ м^3. Составим уравнение $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+4}=20$, откуда $x=2$. Значит, вторая труба подает в бассейн 1 м^3 воды за 6 мин, за один час она подает в бассейн 10 м^3 воды, а за 5 ч — 50 м^3 воды.

10.41. Пусть заказ составляет S деталей, производительность станка марки A равна x деталей в час, а производительность станка марки B — y деталей в час. Тогда $\frac{S}{x}$ — время выполнения заказа одним станком марки A, а $\frac{S}{y}$ — время выполнения заказа одним станком марки B. Чтобы иметь возможность ответить на вопрос задачи, вычислим, сколько процентов составляет величина $\frac{S}{x}$ от $\frac{S}{y}$, то есть найдем n из пропорции $\frac{S/y}{S/x}=\frac{100}{n}$, откуда $n=\frac{100y}{x}$. По условию имеем: $\frac{S}{55x+36y}=9$ и $\frac{S}{13x+43y}=18$. Эти два уравнения запишем в систему в следующем виде: $55\frac{x}{S}+36\frac{y}{S}=\frac{1}{9}$ и $13\frac{x}{S}+43\frac{y}{S}=\frac{1}{18}$. Имеем
$55\frac{x}{S}+36\frac{y}{S}=26\frac{x}{S}+86\frac{y}{S}$, откуда $29x=50y$. Значит, $n=\frac{100y}{x}=58$, и время выполнения заказа одним станком марки A меньше времени выполнения заказа одним станком марки B на 42 %.

10.42. Только торт купили $57-12=45$ (человек). Только коробку конфет купили $36-12=24$ (человека). А всего покупателей было $45+12+24=81$ (человек).

10.43. Имеем $x-\frac{1}{x}=\frac{5}{6}$. Откуда $x=-\frac{2}{3}$ или $x=\frac{3}{2}$.

10.44. Пусть одно число равно x, тогда другое равно $x-44$. По условию $x=(x-44)\cdot 2+15$, откуда $x=73$, а $x-44=29$.

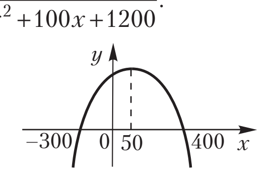
10.45. Пусть большее число равно $\overline{ab}$, а меньшее — $\overline{ba}$. Тогда $10a+b+10b+a+1=3(10b+a)$, или $8a+1=19b$, откуда перебором находим, что $a=7$, а $b=3$. Искомые числа — 73 и 37.

10.46. Пусть данное трехзначное число есть $\overline{abc}$. По условию задачи $a=\frac{1}{23}\cdot\overline{bc}$. Значит, $\overline{bc}$ — двузначное число, которое делится нацело на 23. Таких чисел всего четыре: 23, 46, 69, 92. Итак, условию $a=\frac{1}{23}\cdot\overline{bc}$ удовлетворяют лишь 123, 246, 369 и 492. А сумма цифр равна 12 только у числа 246.

10.47. Примем всю работу за единицу. Тогда первая и вторая бригада совместно выполнили $\frac{1}{3}$ всей работы за время $\frac{1/3}{400+(400-2x)}$, а оставшуюся часть работы (т. е. $\frac{2}{3}$ всей работы) три бригады совместно выполнили за время $\frac{2/3}{400+(400-2x)+(400+6x)}$.

Итак, вся работа выполнена за
$t=\frac{1/3}{400+400-2x}+\frac{2/3}{400+(400-2x)+(400+6x)}$, т. е.
$t=\frac{1/3}{800-2x}+\frac{2/3}{1200+4x}$, $t=\frac{1/3}{2(400-x)}+\frac{2/3}{4(300+x)}$,
$t=\frac{1}{6(400-x)}+\frac{1}{6(300+x)}$, $t=\frac{1}{6}\cdot\frac{700}{-x^2+100x+1200}$.

Знаменатель дроби (там находится квадратный трехчлен) легко оценить (см. рис.), вычислив значение в $x_{\text{вершины}}=\frac{-100}{2\cdot(-1)}=50$:



$-x^2+100x+1200\le-(50)^2+100\cdot(-50)+1200=122\ 500.$
В задаче не просят находить максимальное значение функции $t=\frac{1}{6(400-x)}+\frac{1}{6(300+x)}$, а лишь надо указать значение $x=50$, при котором достигается это максимальное значение.

10.48. Время, через которое автомобиль догонит автобус, равно $t=\frac{0{,}5v}{40-v}$. Очевидно, что на обратный путь автомобилю понадобится это же время. Так как от точки встречи автомобиля и автобуса до города B осталось $(105-40t)$ км, то автобус пройдет это расстояние за время $t_1=\dfrac{105-40t}{v}$ ч. По условию должно выполняться $t_1<t$. Время встречи t автомобиля и автобуса должно быть таким, чтобы встреча состоялась не дальше города B, то есть должно выполняться $40t\le 105$. Итак, $\begin{cases}\dfrac{105-40t}{v}<\dfrac{0{,}5v}{40-v},\\ 40\dfrac{0{,}5v}{40-v}\le 105\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v^2+250v-8500>0,\\ v\le 33{,}6.\end{cases}$

Первое неравенство, учитывая, что $v>0$, имеет решение $v>30$. Итак, 30 км/ч $<v\le 33{,}6$ км/ч.

10.49. Исходно был один пустой ящик. От процедуры вложения восьми ящиков добавляется один заполненный ящик и становится на 7 пустых ящиков больше. Раз в результате наполненных ящиков оказалось 20, то процедура повторялась 20 раз, а пустых ящиков в результате оказалось $1+7\cdot 20=141$. Чтобы найти, сколько процентов составляет количество пустых ящиков от количества наполненных, найдем величину x из пропорции: $\dfrac{20}{141}=\dfrac{100}{x}$, откуда $x=705$.

11.1. $a_1=2\cdot 1^2-1-3=-2$.

11.2. В подъезде $9\cdot 6=54$ (квартиры). Так как $176=3\cdot 54+$ $+14$, то квартира № 176 находится в подъезде № 4.

11.3. Цикл работы светофора: $50+5+20+5=80$ (с). $5\text{ мин}=300\text{ с}=3\cdot 80\text{ с}+60\text{ с}$. За последние 60 с зеленый свет сменится желтым, а желтый — красным.

11.4. По определению арифметической прогрессии $a_{n+1}=a_n+d$. Этому условию удовлетворяет последовательность 0,1; 0,3; 0,5; 0,7, где $a_1=0{,}1$ и $d=0{,}2$.

11.5. Используя формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n=a_1+(n-1)d$, получаем: $a_6=-3+(6-1)\cdot 1=2$.

11.6. Найдем разность прогрессии: $d=12{,}4-11{,}8=0{,}6$. По формуле n-го члена арифметической прогрессии имеем: $20{,}8=11{,}8+(n-1)\cdot 0{,}6$, откуда $n=16$.

11.7. Искомые три числа, являющиеся последовательными членами арифметической прогрессии, обозначим a_2-d, a_2, a_2+d. По условию задачи составим систему уравнений: $\begin{cases}a_2-d+a_2+a_2+d=2,\\ (a_2-d)^2+(a_2)^2+(a_2+d)^2=\dfrac{14}{9}.\end{cases}$ Из первого уравнения получим $a_2=\dfrac{2}{3}$. Подставляя это значение во второе уравнение системы, находим $d=\dfrac{1}{3}$ или $d=-\dfrac{1}{3}$. Значит, искомые три числа — это $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, 1 или 1, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{3}$.

11.8. Формулы n-х членов данных прогрессий: $a_n=1+3(n-1)=3n-2$ и $b_m=1+5(m-1)=5m-4$. Так как $1\le a_n\le 2005\Leftrightarrow 1\le 3n-2\le 2005\Leftrightarrow 1\le n\le 669$. Далее, общие члены этих прогрессий находятся из уравнения $a_n=b_m\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3n-2=5m-4\Leftrightarrow 3(n-1)=5(m-1)$. Отсюда следует, что $(n-1)$ кратно пяти, то есть $n=5k+1$. Возможные значения k находим из условия $1\le n\le 669\Leftrightarrow 1\le 5k+1\le 669\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0\le k\le 133\dfrac{3}{5}$, или, учитывая, что k — целое, $0\le k\le 133$. Таким образом, общие члены данных двух прогрессий — это числа вида a_{5k+1}, где $0\le k\le 133$ — всего 134 числа. Эти числа: a_1, a_6, a_{11}, ..., $a_{666}=1996$ — сами образуют арифметическую прогрессию с разностью $a_6-a_1=a_{11}-a_6=...$, в 5 раз превышающую разность самой прогрессии a_n, то есть с разностью 15. Поэтому сумма общих членов равна $\dfrac{1+1996}{2}\cdot 134=1997\cdot 67=133\,799$.

11.9. Задача сводится к нахождению общих членов трех последовательностей: $N=6n$, $N=9m+6$, $N=7p+3$, $n,m,p\in\mathbf{N}$. Отметим, что эти члены сами, естественно, составляют некую арифметическую прогрессию. Но поступим по-другому: представим, что подарки удалось разложить в коробки. Значит, их количество кратно НОК(6,9,7) = 126. В указанном промежутке лежат лишь $126\cdot 2=252$ и $126\cdot 3=378$. Теперь надо найти подбором число, которое при делении на 6, 9 и на 7 даст нужный остаток. Это число 24. Значит, искомое количество игрушек 252 + 24 = 276, так как 378 + 24 = 402 > 400.

11.10. Три числа a, b и c составляют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b=\dfrac{a+c}{2}$. Значит, $(x+2)=\dfrac{(3x-2)+(x+8)}{2}$, откуда $x=-1$.

11.11. По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_5=a_1+4d=-0{,}8$, $a_{11}=a_1+10d=-5$. Из этих двух равенств находим $a_1=2$, $d=-0{,}7$. По формуле суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_{20}=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=\dfrac{4+19\cdot(-0{,}7)}{2}\cdot 20=-93$.

11.12. Числа мест в рядах являются последовательными членами арифметической прогрессии с первым членом 10 и разностью 4. Используя формулу $S_n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$, получаем $S_n=\dfrac{2\cdot 10+(n-1)4}{2}\cdot n=1050$, откуда $n=21$.

11.13. Пять последовательных натуральных чисел — арифметическая прогрессия с первым членом a_1 и разностью 1. По формуле суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_5=\dfrac{2a_1+(5-1)\cdot 1}{2}\cdot 5=875$, откуда $a_1=173$, а $a_5=177$.

11.14. Пусть в данной прогрессии первый член равен a_1, а разность равна d. Членов с четными и нечетными номерами по 10 штук. Члены с нечетными номерами также представляют собой арифметическую прогрессию, но с первым членом a_1 и разностью $2d$. А члены с четными номерами — арифметическая прогрессия с первым членом a_1+d и разностью $2d$. Используя формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии, составим уравнение $\dfrac{2a_1+(10-1)\cdot 2d}{2}\cdot 10+50=\dfrac{2\cdot(a_1+d)+(10-1)\cdot 2d}{2}\cdot 10$. Решив уравнение, получим $d=5$.

11.15. По определению геометрической прогрессии $a_{n+1}=a_n\cdot q$. Этому условию удовлетворяет последовательность 6; 18; 54; 162, где $a_1=6$ и $q=3$.

11.16. По формуле n-го члена геометрической прогрессии имеем: $a_5\cdot a_7=a_1\cdot q^4\cdot a_1\cdot q^6=\left(a_1q^5\right)^2=25$. По условию члены прогрессии положительны, значит, $a_1q^5=5$. Надо найти $a_2\cdot a_3\cdot a_{13}=a_1q\cdot a_1q^2\cdot a_1q^{12}=\left(a_1q^5\right)^3=5^3=125$.

11.17. Данные по условию уравнения запишем с учетом формулы n-го члена геометрической прогрессии. Имеем
$$\begin{cases} b_1q^3 - b_1 = -9, \\ b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1\left(q^3-1\right) = -9, \\ b_1q\left(1+q+q^2\right) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(q-1)\left(1+q+q^2\right) = -9, \\ b_1q\left(1+q+q^2\right) = -6. \end{cases}$$ Разделим почленно первое уравнение на второе. Получим $q = -2$ и найдем $b_1 = 1$.

11.18. Три числа a, b и c составляют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$. Поэтому $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, то есть $b_4^2 = 3 \cdot 12 = 36$. Так как знаменатель геометрической прогрессии — положительное число, то $b_4 = 6$.

11.19. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ имеем $S_3 = \dfrac{\frac{1}{13}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 1\right)}{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{9}$.

11.20. Пусть первый член геометрической прогрессии равен b_1, а знаменатель равен q. Составим систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{b_1\left(q^3-1\right)}{q-1} = 168, \\ \dfrac{\left(b_1q^3\right)\left(q^3-1\right)}{q-1} = 21. \end{cases}$$ Разделим почленно второе уравнение на первое и получим $q^3 = \dfrac{1}{8}$, или $q = \dfrac{1}{2}$. Подставим это значение в первое уравнение и получим $b_1 = 96$.

11.21. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии имеем $1820 = \dfrac{b_1\left(3^6-1\right)}{3-1}$, откуда $b_1 = 5$, а по формуле n-го члена геометрической прогрессии имеем $b_5 = 5 \cdot 3^4 = 405$.

11.22. По формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ имеем $S = \dfrac{16}{1-\frac{3}{4}} = 64$.

11.23. По формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ имеем $75 = \dfrac{15}{1-q}$, откуда $q = \dfrac{4}{5}$.

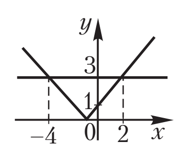
11.24. Слагаемые в левой части уравнения являются последовательными членами арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 6. По формуле n-го члена арифметической прогрессии найдем количество слагаемых в левой части уравнения: $x = 1 + (n-1) \cdot 6$, откуда $n = \dfrac{x+5}{6}$. По формуле суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ имеем $280 = \dfrac{1+x}{2} \cdot \dfrac{x+5}{6}$, откуда $x = 55$.

11.25. Искомые три числа запишем как b_1, b_1q, 12. Аналогично 11.18 имеем $\left(b_1q\right)^2 = 12b_1$. По условию числа b_1, b_1q, 9 образуют арифметическую прогрессию. Значит, аналогично 11.10 имеем $b_1q = \dfrac{b_1+9}{2}$. Решая систему уравнений
$$\begin{cases} \left(b_1q\right)^2 = 12b_1, \\ b_1q = \dfrac{b_1+9}{2}, \end{cases}$$ находим $b_1 = 3$, $q = 2$ или $b_1 = 27$, $q = \dfrac{2}{3}$. Значит, данные числа 3; 6; 12 или 27; 18; 12.

11.26. Обозначим первые три члена геометрической прогрессии b_1, b_1q, b_1q^2. Тогда по формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии имеем $91 = \dfrac{b_1\left(q^3-1\right)}{q-1}$. По условию числа $b_1 + 25$, $b_1q + 27$, $b_1q^2 + 1$ образуют арифметическую прогрессию, поэтому аналогично 11.10 имеем $b_1q + 27 = \dfrac{b_1 + 25 + b_1q^2 + 1}{2}$. Решая систему уравнений
$$\begin{cases} 91 = \dfrac{b_1\left(q^3-1\right)}{q-1}, \\ 2\left(b_1q+27\right) = b_1 + 25 + b_1q^2 + 1, \end{cases}$$ находим $b_1 = 7$, $q = 3$ или $b_1 = 63$, $q = \dfrac{1}{3}$. Тогда седьмой член геометрической прогрессии равен 5103 либо $\dfrac{7}{81}$.

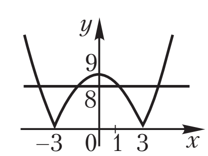
12.1. Так как $\left|f(x)\right| = g \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \pm g, \\ g \geq 0 \end{cases}$, то $|x+1| = 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + 1 = \pm 3 \Leftrightarrow x = -4$ или $x = 2$.

Заметим, что прежде чем решать задачу аналитически, полезно попробовать графический метод решения (построить в одной системе координат графики функций, находящихся в левой и правой частях уравнения, и определить абсциссы точек их пересечения). Даже если не удастся найти точные значения корней, то сможем определить их приблизительные значения и количество.



Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

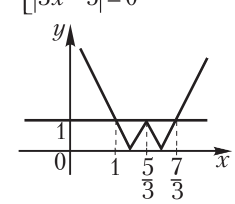
12.2. $\left|9 - x^2\right| = 8 \Leftrightarrow 9 - x^2 = \pm 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1, \\ x^2 = 17 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1, \\ x = \pm\sqrt{17}. \end{array}\right.$



Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

12.3. $\left|\left|3x-5\right| - 1\right| = 1 \Leftrightarrow \left|3x-5\right| - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |3x-5| = 2, \\ |3x-5| = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

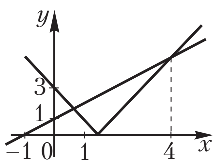
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 5 = \pm 2, \\ 3x - 5 = \pm 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 3, \\ 3x = 7, \\ 3x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{7}{3}, \\ x = \dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$



Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

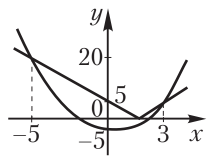
12.4. $|2x-3| = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = x + 1, \\ 2x - 3 = -x - 1, \end{array}\right. \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$ Из первого уравнения находим $x = 4$, а из второго уравнения $x = \dfrac{2}{3}$. Оба значения — корни исходного уравнения, так как удовлетворяют условию $x + 1 \geq 0$.

Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.



12.5. $|3x-5|=x^2-5 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x-5=x^2-5, \\ 3x-5=5-x^2, \end{array}\right. \\ x^2-5\ge 0. \end{cases}$

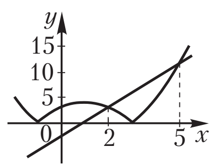
Из первого уравнения находим, что $x=0$ или $x=3$. Но первое из этих значений не удовлетворяет условию $x^2\ge 5$ и не является корнем уравнения. Из второго уравнения находим, что $x=-5$ или $x=2$. Второе значение — посторонний корень, так как не удовлетворяет условию $x^2\ge 5$.



Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

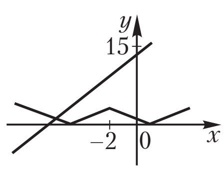
12.6. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-2x-3=3x-3, \\ x^2-2x-3=3-3x, \end{array}\right. \\ 3x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-5x=0, \\ x^2+x-6=0, \end{array}\right. \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=5, \\ x=2, \\ x=-3, \end{array}\right. \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=2. \end{array}\right.$



Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

12.7. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} |x+2|-3=2x+13, \\ |x+2|-3=-2x-13, \end{array}\right. \\ 2x+13\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} |x+2|=2x+16, \\ |x+2|=-2x-10, \end{array}\right. \\ x\ge -6{,}5. \end{cases}$ Решая первое уравнение аналогично 12.4, находим $x=-6$, и это значение удовлетворяет условию $x\ge -6{,}5$. Решая второе уравнение, находим $x=-8$, и это — посторонний корень исходного уравнения, так как это значение x не удовлетворяет условию $x\ge -6{,}5$.



Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

12.8. Поскольку $|f|=|g| \Leftrightarrow f^2=g^2 \Leftrightarrow (f-g)(f+g)=0$, значит, $\left(2x^2-x\right)^2-\left(2x^2+3x-8\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-4x+8)\left(4x^2+2x-8\right)=0$, откуда $x=2$, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$.

12.9. $\left|\dfrac{x-2}{2x+5}\right|=2 \Leftrightarrow \dfrac{|x-2|}{|2x+5|}=2 \Leftrightarrow |x-2|=2\cdot|2x+5|$. Подобные уравнения и неравенства (см. 13.12 и 13.13) лучше всего решать возведением обеих частей уравнения в квадрат: $(x-2)^2=(2\cdot(2x+5))^2 \Leftrightarrow (x-2)^2-(2\cdot(2x+5))^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2-2(2x+5))(x-2+2(2x+5))=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-3x-12)(5x+8)=0 \Leftrightarrow x=-4;\ x=-1{,}6.$

12.10. Воспользуемся методом промежутков. Для этого найдем значения x, при которых модули, встречающиеся в уравнении, обращаются в 0. Этими точками числовая прямая разбивается на промежутки. Решаем уравнение на каждом из этих промежутков, раскрывая модули с соответствующими знаками. В данной задаче рассмотрим три случая.

а) Если $x\le 2$, то $-(x-2)+(6-x)=4 \Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow x=2$. Так как это значение удовлетворяет условию $x\le 2$, то это — корень уравнения.

б) Если $2\le x\le 6$, то $+(x-2)+(6-x)=4 \Leftrightarrow 4=4$. Значит, $x\in(-\infty;+\infty)$. Но рассматриваемому множеству принадлежит лишь часть найденных значений x, а именно $x\in[2;6]$.

в) Если $x\ge 6$, то $+(x-2)-(6-x)=4 \Leftrightarrow 2x=12 \Leftrightarrow x=6$. Это значение — также корень уравнения, так как это значение удовлетворяет условию $x\ge 6$.

12.11. Аналогично 12.10 рассмотрим четыре промежутка.

а) Если $x\le -3$, то $x^2-9-x+2=5 \Leftrightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1=-3;\ x_2=4$. Условию $x\le -3$ удовлетворяет только $x=-3$.

б) Если $-3\le x\le -2$, то $-x^2+9-x+2=5 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1=-3;\ x_2=2$. Условию $-3\le x\le -2$ оба корня удовлетворяют.

в) Если $2\le x\le 3$, то $-x^2+9+x-2=5 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1=-1;\ x_2=2$. Условию $2\le x\le 3$ удовлетворяет только $x=2$.

г) Если $x\ge 3$, то $x^2-9+x-2=5 \Leftrightarrow x^2+x-16=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$. Условию $x\ge 3$ удовлетворяет только $\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}$.

12.12. Аналогично 12.10 рассмотрим четыре промежутка.

а) Если $x\le 0$, то $\dfrac{(x^2-4x)+3}{-(x-5)+x^2}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=x^2-x+5, \\ x^2-x+5\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=-2, \\ x^2-x+5\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$ — корень уравнения, так как он принадлежит рассматриваемому множеству $(-\infty;0]$.

б) Если $0\le x\le 4$, то $\dfrac{-(x^2-4x)+3}{-(x-5)+x^2}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x+3=x^2-x+5, \\ x^2-x+5\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2=0, \\ x^2-x+5\ne 0, \end{cases}$ откуда $x=\dfrac{1}{2}$ или $x=2$. Это — корни уравнения, так как они удовлетворяют условию $0\le x\le 4$.

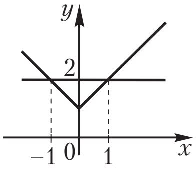
в) Если $4\le x\le 5$, то $\dfrac{(x^2-4x)+3}{-(x-5)+x^2}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=x^2-x+5, \\ x^2-x+5\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$. Найденное значение x не удовлетворяет условию $4\le x\le 5$ и не является корнем исходного уравнения.

г) Если $x\ge 5$, то $\dfrac{(x^2-4x)+3}{(x-5)+x^2}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=x^2+x-5, \\ x^2+x-5\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=8, \\ x^2+x-5\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{5}$ — посторонний корень, так как он не удовлетворяет условию $x\ge 5$.

12.13. Можно поступать аналогично 12.1—12.7, но проще заметить, что выражение, находящееся под знаком внешнего модуля, всегда неотрицательное ($|x|+1>0$ при любом значении x). Поэтому внешний модуль раскрывается однозначно: $(|x|+1)=2 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.



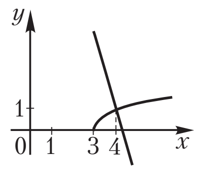
Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

12.14. Аналогично 12.13 заметим, что подмодульное выражение $x^2+2>0$. Поэтому имеем $\left(x^2+2\right)=x+2 \Leftrightarrow x^2-x=0$, $x=0$, $x=1$.

12.15. Уравнение имеет смысл при $x\in(3;+\infty)$. При этих значениях x раскрываем модули следующим образом: $|x+23|=x+23$, $|x|=x$, $|x+2|=x+2$. Значит,

$$\frac{|x+23|-2|x|-3|x+2|}{\sqrt{x-3}}=1 \Leftrightarrow \frac{(x+23)-2(x)-3(x+2)}{\sqrt{x-3}}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{17-4x}{\sqrt{x-3}}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 17-4x=\sqrt{x-3}, \\ x>3. \end{cases}$$ В левой части уравнения находится убывающая функция, а в правой — возрастающая. Значит, уравнение имеет не более одного корня, а этот корень x = 4 легко находится подбором (см. рис.).



12.16. Выделим полный квадрат в числителе:

$\frac{|3x-2|+\left(3|x|-1\right)^2}{x-1}=|11x+7|$. Так как $|11x+7|\ge 0$, $|3x-2|\ge 0$, $\left(3|x|-1\right)^2\ge 0$, то $x-1$ должно быть больше нуля. Итак, $x>1$, значит, модули раскроем следующим образом:

$|11x+7|=11x+7$, $|3x-2|=3x-2$, $|x|=x$ и получим

$$\frac{3x-2+9x^2-6x+1}{x-1}=11x+7 \Leftrightarrow \frac{9x^2-3x-1}{x-1}=11x+7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2-3x-1=11x^2-11x+7x-7, \\ x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-6=0, \\ x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-1{,}5, \end{array}\right. \\ x\ne 1. \end{cases}$$ Значение $x=-1{,}5$ — посторонний корень, так как не удовлетворяет условию $x>1$.

12.17. Пусть $|x|=y$, тогда $y^2-3y=4$, откуда $y=-1$, $y=4$. Значит, имеем совокупность двух уравнений $|x|=-1$ и $|x|=4$. Первое уравнение не имеет корней, а из второго находим $x=\pm 4$.

12.18. Пусть $t=\frac{x+1}{x^2}-1$, тогда $|t|+|t+2|=4$, откуда методом промежутков или используя графики находим $t=-3$ и $t=1$. Возвращаясь к переменной x, получим $\frac{x+1}{x^2}=\pm 2$, откуда $x=-0{,}5$ и $x=1$.

12.19. Уравнение имеет вид $|A|=-A$. Это равенство справедливо, только если $A\le 0$. Поэтому решаем неравенство $2x-3\le 0 \Leftrightarrow x\le 1{,}5$.

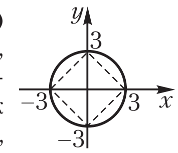
12.20. Уравнение имеет структуру $|A|+|B|=A+B$. Это равенство верно только при $\begin{cases} A\ge 0, \\ B\ge 0. \end{cases}$ Значит, надо решить систему неравенств $\begin{cases} \frac{x-1}{x}\ge 0, \\ x+5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;0)\cup[1;+\infty), \\ x\in[-5;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[-5;0)\cup[1;+\infty)$.

12.21. Решаем систему уравнений методом подстановки. Выразив из первого уравнения $y=6-|x|$, подставим во второе уравнение это выражение: $x=\big|6-|x|\big|-1 \Leftrightarrow$

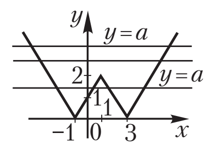
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 6-|x|=x+1, \\ 6-|x|=-x-1, \end{array}\right. \\ x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} |x|=5-x, \\ |x|=7+x, \end{array}\right. \\ x\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2{,}5.$$

12.22. Решим систему уравнений графическим способом. Второе уравнение задает окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом $\sqrt{9}=3$. Первое уравнение задает квадрат с центром в точке (0; 0) и вершинами в точках (0; 3), (3; 0), (0; –3), (–3; 0) (см. рис.). Теперь очевидны решения системы — координаты общих точек этих двух фигур: (0; 3), (3; 0), (0; –3), (–3; 0).

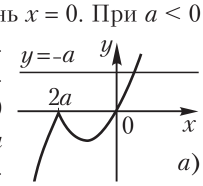


12.23. Изобразим схематически графики функций, находящихся в левой и правой частях уравнения: $y=\big||x-1|-2\big|$ — ломаная (см. рис.) и $y=a$ — семейство прямых, параллельных оси Ox.

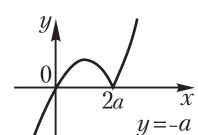
Ровно три общих точки у этих графиков будет только в случае, когда прямая $y=a$ будет проходить через «вершину» ломаной — точку (1;2). Значит, интересующая нас прямая — $y=2$ и искомое $a=2$.



12.24. При $a=0$ исходное уравнение принимает вид $x|x|=0$, и оно имеет только один корень $x=0$. При $a<0$ график функции $y=x\,|x-2a|$, находящейся в левой части уравнения, приведен на рисунке *а*). Видим, что при $a<0$ графики функций $y=x|x-2a|$ и $y=-a$ имеют только одну общую точку. Рассмотрим $a>0$. В этом случае график функции $y=x|x-2a|$ приведен на рисунке *б*). И в этом случае графики имеют только одну общую точку. Значений параметра a таких, чтобы уравнение имело 2 различных корня, нет.



а)



б)

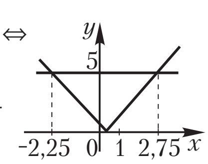
13.1. Если x — это радиус детали, то $2x$ — диаметр, величина которого должна лежать в пределах $10\pm 0{,}2$ см, т. е. $-0{,}2\le 2x-10\le 0{,}2 \Leftrightarrow |2x-10|\le 0{,}2 \Leftrightarrow |x-5|\le 0{,}1$ — это условие годности детали. Значит, деталь бракованная, если это неравенство неверно. То есть $|x-5|>0{,}1$.

13.2. $|f|<g \Leftrightarrow -g<f<g$ без всяких дополнительных условий на f и g. Поэтому имеем $-5<2x-0{,}5<5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5+0{,}5<2x<5+0{,}5 \Leftrightarrow \frac{-4{,}5}{2}<x<\frac{5{,}5}{2} \Leftrightarrow$

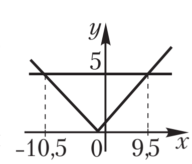
$\Leftrightarrow -2{,}25<x<2{,}75$.

Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.



13.3. $|f|\ge g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\ge g, \\ f\le -g \end{array}\right.$ без всяких дополнительных условий на f и g. Поэтому $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ge 5, \\ \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\le -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 9{,}5, \\ x\le -10{,}5 \end{array}\right.$

Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.



13.4. Как и в предыдущих задачах, $\left|2-\left|3x-x^2\right|\right|<2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2<2-\left|3x-x^2\right|<2 \Leftrightarrow -4<-\left|3x-x^2\right|<0$. Правая часть двойного неравенства верна всегда, кроме $3x-x^2=0$, т. е. $x=0$; 3. Левая часть: $-4<-\left|3x-x^2\right| \Leftrightarrow 4>\left|3x-x^2\right| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4>3x-x^2>-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+4>0,\\ x^2-3x-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbf{R},\\ x\in(-1;4). \end{cases}$$

Окончательно: $x\in(-1;4)\setminus\{0;3\}$.

13.5. Воспользуемся обобщенным методом интервалов, который состоит в следующем.

Отмечаем на числовой прямой ОДЗ переменной и корни соответствующего уравнения (они разобьют ее на несколько интервалов);

определяем, выполняется ли исходное неравенство на каждом из полученных интервалов подстановкой любого числа, принадлежащего этому интервалу, в неравенство;

записываем ответ. Ответом является объединение тех промежутков, где неравенство выполняется. В случае нестрогого неравенства в ответ включают решения соответствующего уравнения.

В данном случае ОДЗ переменной — вся числовая прямая.

Решаем уравнение: $(|x|-2)(|x-1|-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|=2,\\ |x-1|=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2,\\ x=-1,\\ x=3. \end{array}\right.$$

Значит, получили 5 интервалов (см. рис.). Узнаем, на каких промежутках неравенство выполняется.

Пусть $x=-3$. Тогда $(3-2)(4-2)\le 0$, и это неравенство неверное. Значит, $(-\infty;-2)$ не входит в множество решений.

Пусть $x=-1{,}5$. Тогда $(1{,}5-2)(2{,}5-2)\le 0$ — верное неравенство. Значит, $[2;-1]$ — часть ответа.

Пусть $x=0$. Тогда $(0-2)(1-2)\le 0$ — неверное неравенство.

Пусть x = 2,5. Тогда $(2{,}5-2)(1{,}5-2)\le 0$ — верное неравенство. Значит, $[2;3]$ — еще одна часть ответа.

Пусть $x=4$. Тогда $(4-2)(3-2)\le 0$ — неверное неравенство.

Итак, окончательный ответ — объединение: $[-2;-1]\cup[2;3]$.

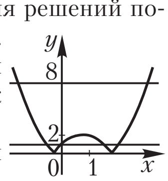
Отметим, что есть и другой способ решения. Надо рассмотреть два случая, когда произведение двух множителей A и B меньше либо равно нулю: $\begin{cases} A\ge 0,\\ B\le 0 \end{cases}$ либо $\begin{cases} A\le 0,\\ B\ge 0. \end{cases}$

13.6. $\begin{cases} \left|2x^2-3x-1\right|\le 8,\\ \left|2x^2-3x-2\right|>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\le 2x^2-3x-1\le 8,\\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x-1>1,\\ 2x^2-3x-1<-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le 2x^2-3x+7,\\ 2x^2-3x-9\le 0,\\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x-2>0,\\ 2x^2-3x<0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;+\infty),\\ x\in[-1{,}5;3],\\ \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;-0{,}5)\cup(2;+\infty),\\ x\in(0;1{,}5) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\in[-1{,}5;-0{,}5)\cup(0;1{,}5)\cup(2;3]$.

Как отмечалось в 12.1, для нахождения решений полезно использовать графический способ. В данной задаче это позволит не потеряться в обилии фигурных и квадратных скобок при получении окончательного ответа.



Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

13.7. *Способ 1.* Аналогично 13.2

$$\begin{cases} \dfrac{2x+5}{x-3}\le 1,\\ \dfrac{2x+5}{x-3}\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+5-x+3}{x-3}\le 0,\\ \dfrac{2x+5+x-3}{x-3}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+8}{x-3}\le 0,\\ \dfrac{3x+2}{x-3}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in[-8;3),\\ x\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup(3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-8;-\dfrac{2}{3}\right].$$

Способ 2. $\dfrac{|2x+5|}{|x-3|}\le 1 \Leftrightarrow |2x+5|\le|x-3|$, $x\ne 3$.

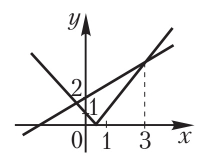
Аналогично 12.8 $(2x+5)^2-(x-3)^2\le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (2x+5-x+3)(2x+5+x-3)\le 0 \Leftrightarrow (x+8)(3x+2)\le 0$,

откуда $x\in\left[-8;-\dfrac{2}{3}\right]$.

13.8. Аналогично 13.2

$$\begin{cases} 2x-1<x+2,\\ 2x-1>-x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3,\\ 3x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

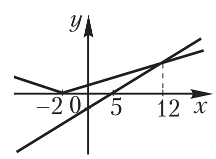
$\Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{1}{3};3\right)$.



Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

13.9. Аналогично 13.3 $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}+1>x-5,\\ \dfrac{x}{2}+1<-x+5 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<12,\\ 3x<8 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;12)$.



Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

13.10. Аналогично 13.2 $\begin{cases} x^3+2x^2-4<x^3+4,\\ x^3+2x^2-4>-x^3-4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2<8,\\ 2x^3+2x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2<4,\\ x^2(x+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-2;2),\\ x\in(-1;0)\cup(0;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(0;2)$.

13.11. Можно поступить как в 13.2, но заметим, что подмодульное выражение принимает только положительные значения (так как $D=1-4\cdot 1\cdot 3<0$). Значит, модуль можно раскрыть так: $\left|x^2+x+3\right|=x^2+x+3$, и исходное неравенство принимает вид $x^2+x+3\le 4x+1 \Leftrightarrow x^2-3x+2\le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in[1;2]$.

13.12. Аналогично 12.8 $\left|x^2-5x+1\right|\le|x-6| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+1\right)^2-(x-6)^2\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+1-x+6\right)\cdot\left(x^2-5x+1+x-6\right)\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-6x+7\right)\cdot\left(x^2-4x-5\right)\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left[-1;3-\sqrt{2}\right]\cup\left[3+\sqrt{2};5\right]$.

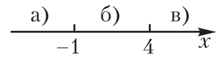
13.13. Аналогично 13.7 $\left|x^2-3x-1\right|<3\cdot\left|x^2+x+1\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2-3x-1\right)^2-\left(3\cdot\left(x^2+x+1\right)\right)^2<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(-2x^2-6x-4\right)\cdot\left(4x^2+2\right)<0 \Leftrightarrow x^2+3x+2>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$.

13.14. Аналогично 12.10 рассмотрим три случая (см. рис.):

а) Если $x \le 1$, то $(1-x)-(x-4)>7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2x>2 \Leftrightarrow x<-1$. Все найденные значения x принадлежат рассматриваемому промежутку и являются частью ответа.



б) Если $1<x<4$, то $-(1-x)-(x-4)>7 \Leftrightarrow 3>7$ — неверное числовое равенство, и, значит, решений исходного неравенства на данном промежутке нет.

в) Если $x \ge 4$, то $-(1-x)+(x-4)>7 \Leftrightarrow 2x>12 \Leftrightarrow x>6$, и все найденные значения x принадлежат рассматриваемому в этом пункте промежутку.

Ответ — это объединение найденных решений: $(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)$.

13.15. Аналогично 12.10 рассмотрим три промежутка.

а) Если $x \le -1$, то $\dfrac{-x+2}{-x-1-3}<1 \Leftrightarrow \dfrac{-x+2+x+4}{-x-4}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{6}{-x-4}<0 \Leftrightarrow x+4>0 \Leftrightarrow x>-4$. Учитывая, что

$x\in(-\infty;-1]$, получаем $x\in(-4;-1]$.

б) Если $-1\le x\le 2$, то $\dfrac{-x+2}{-x-1-3}<1 \Leftrightarrow \dfrac{-x+2-x+2}{x-2}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4-2x}{x-2}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}-2<0,\\ x\ne 2\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. Учитывая, что

$x\in[-1;2]$, получаем $x\in(-1;2]$.

в) Если $x\ge 2$, то $\dfrac{x-2}{x+1-3}<1 \Leftrightarrow \dfrac{x-2-x+2}{x-2}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{0}{x-2}<0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Ответом является объединение найденных решений.

13.16. Неравенство запишем следующим образом: $|3x+2|\ge 3x+2$. Значит, неравенство имеет следующую структуру: $|A|\ge A$, и оно верно для любого A.

13.17. Разложим $|x^2-5x-6|=|x+1||x-6|$. Сгруппируем слагаемые: $(|x-6|-2)(|x+1|+1)<0$. Второй множитель всегда положителен. Значит, $|x-6|<2 \Leftrightarrow -2<x-6<2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4<x<8$.

13.18. ОДЗ переменной — множество $[5;+\infty)$. На этом множестве раскрываем модули следующим образом: $|x-1|=x-1$, $|2x-3|=2x-3$, $|x|=x$ (поскольку все выражения, стоящие под знаком модуля, будут положительными). Значит, $\sqrt{x-5}\,(|x-1|-2|2x-3|-2|x|)\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-5}\cdot((x-1)-2(2x-3)-2(x))\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-5}\cdot(5-5x)\ge 0$.

Аналогично 8.1 рассмотрим два случая: $\sqrt{x-5}=0 \Leftrightarrow x=5$

либо $\begin{cases}5-5x\ge 0,\\ x\ge 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1,\\ x\ge 5\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

13.19. Выражение, стоящее в левой части неравенства, принимает только положительные значения (докажите сами). Тогда и $2x-10$ больше нуля. А раз $2x-10>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x>5$, то все модули раскрываются со знаком «+»: $x-(x-1)+(x-2)-(x-3)+(x-4)\le 2x-10 \Leftrightarrow 8\le x$. Найденные значения x удовлетворяют условию $x>5$ и являются ответом.

13.20. Рассуждая аналогично 13.11, запишем неравенство в виде $x^2+|x|\le 6$. Пусть $|x|=y$, тогда $y^2+y\le 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -3\le y\le 2$, т. е. $-3\le|x|\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases}|x|\ge -3,\\ |x|\le 2.\end{cases}$ Первое неравенство верно для всех $x\in(-\infty;+\infty)$, а второе — при $x\in[-2;2]$. Окончательный ответ: $x\in[-2;2]$.

13.21. Выделив целую часть в дробях, $\dfrac{2x^2-6}{2x+3}=x-\dfrac{3x+6}{2x+3}=x-\left(2-\dfrac{x}{2x+3}\right)$, перепишем неравенство: $|t-1|+|t+1|\le 4$, где $t=x+\dfrac{x}{2x+3}$. Решением является $-2\le t\le 2$, т. е. $-2\le\dfrac{2x^2+4x}{2x+3}\le 2$. Решая эти неравенства методом интервалов, получаем ответ.

13.22. Заметим, что неравенство имеет следующую структуру: $|A|+|B|>A+B$, а это неравенство верно только в двух случаях: если $A+B\le 0$ либо $A\cdot B<0$. Итак, решаем совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l}x^2+x-7\le 0,\\ (x-3)(x^2-4)<0.\end{array}\right.$ Решением первого неравенства является множество $\left[\dfrac{-1-\sqrt{29}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}\right]$, а второго — $(-\infty;-2)\cup(2;3)$. Окончательный ответ: $x\in(-\infty;3)$.

13.23. Неравенство $|f(x)|\le A$ не имеет решений, только если число A меньше, чем минимальное число из множества значений функции $y=|f(x)|$. Так как $E(|x^2-4x+3|)=[0;+\infty)$, то при $a<0$ у неравенства $|x^2-4x+3|\le a$ решений нет.

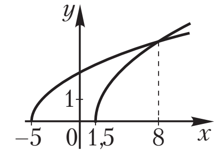
14.1. Найдем ОДЗ переменной: $\begin{cases}-2x+3\ge 0,\\ x-3\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1{,}5,\\ x\ge 3\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\varnothing$. Значит, корней у уравнения нет.

14.2. Оценим значения, которые принимают выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения. На ОДЗ переменной (множестве $x<0$): $-1+\sqrt{-x}>-1$, а $x+\dfrac{1}{x}\le -2$. Значит, $\sqrt[3]{x+\dfrac{1}{x}}\le\sqrt[3]{-2}$, т. е. левая часть уравнения не может быть равна правой, и, следовательно, корней у уравнения нет.

14.3. $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+5} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-3=x+5,\\ x+5\ge 0,\\ 2x-3\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x=8$. Обратим внимание, что любое из неравенств в системе можно опустить, так как $\sqrt{f}=\sqrt{g} \Leftrightarrow f=g\ge 0$, т. е. равносильно одной из систем $\begin{cases}f=g,\\ f\ge 0\end{cases}$ либо $\begin{cases}f=g,\\ g\ge 0.\end{cases}$

Выбирают одну из систем в зависимости от того, какое из неравенств $f\ge 0$ либо $g\ge 0$ решается легче.

Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

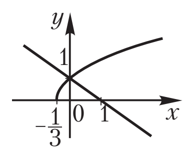


14.4. Так как обе части уравнения принимают только неотрицательные значения, то возведем их в квадрат: $x-4=x^2-10x+14 \Leftrightarrow x^2-11x+10=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=10$. Но первый корень — посторонний, т. к. при этом значении переменной подкоренное выражение радикала $\sqrt{x-4}$ становится отрицательным.

14.5. Так как обе части уравнения принимают только неотрицательные значения, то возведем их в квадрат: $x^2-3x+1=1 \Leftrightarrow x^2-3x=0$, откуда $x=0$, $x=3$.

14.6. Так как обе части уравнения принимают только неотрицательные значения, то возведем их в квадрат: $7-\sqrt[3]{x^2-101}=8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-101}=-1$. Обе части этого уравнения возводим в куб: $x^2-101=-1 \Leftrightarrow x^2=100 \Leftrightarrow x=\pm10$.

14.7. $\sqrt{1+3x}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases}1+3x=(1-x)^2,\\ 1-x\ge0\end{cases} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-5x=0,\\ x\le1\end{cases} \Leftrightarrow x=0.$

Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

14.8. ОДЗ переменной — множество $(-\infty;2]$. При этих x преобразуем $\sqrt{x^2-8x+12}=\sqrt{6-x}\sqrt{2-x}$, и уравнение принимает вид $\sqrt{6-x}\sqrt{2-x}-2\sqrt{6-x}+x\sqrt{2-x}-2x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{6-x}\left(\sqrt{2-x}-2\right)+x\left(\sqrt{2-x}-2\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{6-x}+x\right)\left(\sqrt{2-x}-2\right)=0$, откуда $\sqrt{2-x}=2 \Leftrightarrow 2-x=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2$ либо $\sqrt{6-x}=-x \Leftrightarrow \begin{cases}6-x=x^2,\\ -x\ge0\end{cases} \Leftrightarrow x=-3.$

Оба найденных значения x входят в ОДЗ и являются решениями.

14.9. Возведем обе части уравнения в квадрат при условии, что $x+1\ge0$:

$1+x\sqrt{x^2+24}=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+24}=x(x+2)$, откуда $x=0$ либо $\sqrt{x^2+24}=x+2$. Полученное уравнение вновь возводим в квадрат при условии, что $x+2\ge0$: $x^2+24=x^2+4x+4 \Leftrightarrow x=5$. Найденные значения x удовлетворяют условиям $x+1\ge0$ и $x+2\ge0$ и являются корнями исходного уравнения.

14.10. Решаем уравнение $\sqrt{4+x}-\sqrt{x-6}=2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{4+x}=2+\sqrt{x-6}$. Так как обе части уравнения принимают только неотрицательные значения, то возводим их в квадрат: $4+x=4+(x-6)+4\sqrt{x-6} \Leftrightarrow 3=2\sqrt{x-6} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9=4(x-6) \Leftrightarrow x=8{,}25.$

14.11. Так как обе части уравнения на ОДЗ ($x\ge3$) принимают только неотрицательные значения, то $2x+1+x-3+2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3}=4x \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3}=$
$x+2 \Leftrightarrow 4(2x+1)(x-3)=(x+2)^2$ при $x+2\ge0$. Значит, $8x^2-20x-12=(x+2)^2$, откуда $x=4$, $x=-\frac{4}{7}$. Последнее значение — посторонний корень, так как он не удовлетворяет условию $x+2\ge0$.

14.12. Возведем обе части уравнения в куб:
$2x-1+3\sqrt[3]{(2x-1)^2}\sqrt[3]{x-1}+3\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{(x-1)^2}+x-1=1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=3-3x.$

По условию выражение в скобках равно 1. Значит, получаем $\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}=1-x \Leftrightarrow (2x-1)(x-1)=(1-x)^3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)(x^2)=0 \Leftrightarrow x=0, x=1$. Найденные значения x проверим непосредственной подстановкой в исходное уравнение и определим, что $x=0$ — посторонний корень.

14.13. Так как обе части уравнения принимают только неотрицательные значения, то возводим их в квадрат:
$x+3+x+4+2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x+4}=x+2+x+7+2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+7} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x+4}=1+\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+7} \Leftrightarrow (x+3)(x+4)=$
$=1+(x+2)(x+7)+2\sqrt{x+2}\sqrt{x+7} \Leftrightarrow -2x-3=$
$=2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+7} \Leftrightarrow 4x^2+9+12x=4(x+2)(x+7)$
при $-2x-3\ge0$.

Итак, $4x^2+9+12x=4x^2+36x+56$, откуда $x=-\frac{47}{24}$. Это значение удовлетворяет условию $-2x-3\ge0$ и является корнем исходного уравнения.

14.14. Обозначим $t=\sqrt{x^2-5}$, тогда $x^2=t^2+5$ и исходное уравнение примет вид $t^2+5-4t=10$, откуда $t=-1$ и $t=5$. Возвращаемся к переменной x: $5=\sqrt{x^2-5} \Leftrightarrow 25=x^2-5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2=30.$

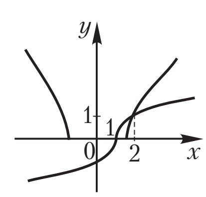
14.15. Пусть $\sqrt[4]{x-1}=t$, тогда $t^2+6t=16$, откуда $t=2$, $t=-8$. Возвращаясь к переменной x, имеем совокупность $\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x-1}=2,\\ \sqrt[4]{x-1}=-8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=16,\\ x\in\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow x=17.$

14.16. Пусть $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}=t$, тогда $t+\frac{3}{t}=4 \Leftrightarrow \frac{t^2-4t+3}{t}=0$, откуда $t=1$ или $t=3$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}=1,\\ \sqrt{\frac{3-x}{2+x}}=3\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3-x}{2+x}=1,\\ \frac{3-x}{2+x}=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3-x-2-x}{2+x}=0,\\ \frac{3-x-18-9x}{2+x}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0{,}5,\\ x=-1{,}5.\end{array}\right.$

14.17. Пусть $x^2-6x+4=t$, тогда $\sqrt{3t+13}+\sqrt{4t+13}=-t$. Поскольку в левой части этого уравнения находится возрастающая функция, а в правой — убывающая, то уравнение имеет не более одного корня, а этот корень $t=-3$ легко находится подбором. Возвращаясь к переменной x, решаем уравнение $x^2-6x+4=-3 \Leftrightarrow x^2-6x+7=0 \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{2}$.

14.18. Пусть $\sqrt[3]{x-1}=a$, $\sqrt{x^2-3}=b$, тогда $x^2+a^2=3+2ab \Leftrightarrow a^2-2ab+$ $+x^2-3=0 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b$, т. е. $\sqrt[3]{x-1}=\sqrt{x^2-3}$. Это уравнение проще всего решить графическим способом (см. рис.) и найти, что $x=2$.



14.19. Пусть $\sqrt{x-1}=a$, $\sqrt{2x-1}=b$, то есть $x-1=a^2$, $2x-1=b^2$. Тогда $(a-1)(b-2)=2x-5$, но $2x-5=b^2+$ $+1-5=b^2-4$. Следовательно, уравнение примет вид $(a-1)(b-2)=b^2-4 \Leftrightarrow (b-2)(a-1-b-2)=0$, откуда $b=2$ либо $b=a-3$.

В первом случае $\sqrt{2x-1}=2 \Leftrightarrow x=2{,}5$, во втором: $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-1}-3 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+3=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x-1+9+6\sqrt{2x-1}=x-1 \Leftrightarrow 6\sqrt{2x-1}=-x-9$. Так как ОДЗ переменной — это множество $[1;+\infty)$, то правая часть

этого уравнения принимает отрицательные значения, и значит, корней у этого уравнения нет.

14.20. Заметим, что $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}=\sqrt{x-4-2\sqrt{x-4}+1}=$ $=\sqrt{\left(\sqrt{x-4}\right)^2-2\sqrt{x-4}+1}$, а $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=$ $=\sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4}=\sqrt{\left(\sqrt{x-4}\right)^2-4\sqrt{x-4}+2^2}$. Преобразуем уравнение: $\sqrt{(1-\sqrt{x-4})^2}=2-\sqrt{(2-\sqrt{x-4})^2}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $|y-1|+|y-2|=2$, где $y=\sqrt{x-4}$. Корнями уравнения $|y-1|+|y-2|=2$ являются $y=0{,}5$ и $y=2{,}5$. Возвращаясь к переменной x, решаем два уравнения: $\sqrt{x-4}=0{,}5$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=4{,}25$ и $\sqrt{x-4}=2{,}5\Leftrightarrow x=10{,}25$.

14.21. Избавляемся от иррациональности, домножив и разделив каждую из частей уравнения на сопряженное выражение:

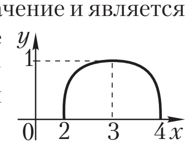
$$\frac{(2x^2-1)-(x^2-3x-2)}{\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-3x-2}}=\frac{(2x^2+2x+3)-(x^2-x+2)}{\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-x+2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-3x-2}}=\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-x+2}}.$$

Значит, либо $x^2+3x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, но эти корни посторонние, так как не входят в ОДЗ переменной, либо $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-3x-2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-x+2}}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-x+2}$. Воспользовавшись (как и в 14.10) исходным уравнением, получим $\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{2x^2+2x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-1=2x^2+2x+3,\\2x^2-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2$.

14.22. Изобразив схематично график функции, находящейся в левой части уравнения $f(x)=\sqrt[4]{(x-2)(4-x)}$ (см. рис.), убеждаемся, что $f(x)\le 1$ для всех $x\in[2;4]$, причем это значение достигается лишь при $x=3$. Это значение и является корнем уравнения, так как выражение правой части уравнения при $x\ne 3$ принимает значения больше единицы, а при $x=3$ — равно единице.

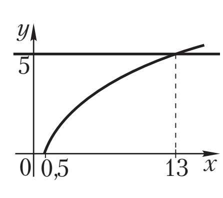


14.23. Пусть $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y}=b$, тогда $\begin{cases}a^2-100+25b^2-10ab=0,\\a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-5b)^2=100,\\a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-5b=\pm 10,\\a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-4b=\pm 10,\\a=2+b\end{cases}\Leftrightarrow$

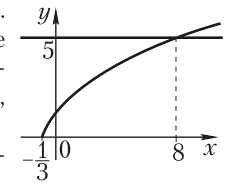
$\Leftrightarrow\begin{cases}1-2b=\pm 5,\\a=2+b.\end{cases}$ Таким образом получаем, что либо $1-2b=5\Leftrightarrow b=-2$, $a=0$ либо $1-2b=-5\Leftrightarrow b=3$, $a=5$. В первом случае имеем $\sqrt{y}=-2\Leftrightarrow y\in\varnothing$, а во втором случае $\sqrt{y}=3\Leftrightarrow y=9$ и $\sqrt{x}=5\Leftrightarrow x=25$.

15.1. $\sqrt{2x-1}-5\le 0\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}\le 5$. Так как обе части последнего неравенства принимают только неотрицательные значения, то возведем их в квадрат: $0\le 2x-1\le 5^2$, где левая часть этого двойного неравенства — учет ОДЗ переменной. Далее $1\le 2x\le 25+1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0{,}5\le x\le 13$.



Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

15.2. $\sqrt{3x+1}-5>0\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}>5$. Так как обе части последнего неравенства принимают только неотрицательные значения, то возведем их в квадрат. Получаем $3x+1>25$, и учет ОДЗ не нужен, так как подкоренное выражение оказалось больше не только нуля, но и 25! Далее $3x>24\Leftrightarrow x>8$.



Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

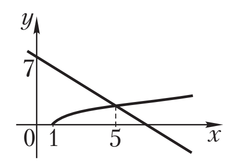
15.3. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}>0\Leftrightarrow\sqrt{x+1}>\sqrt{x-1}$. Так как обе части последнего неравенства принимают только неотрицательные значения, то возведем их в квадрат: $x+1>x-1\ge 0$, где правая часть этого двойного неравенства — учет ОДЗ переменной. Далее $\begin{cases}x+1>x-1,\\x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>-1,\\x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;+\infty),\\x\in[1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[1;+\infty)$.

15.4. Так как $\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}0\le f(x)<g^2(x),\\g(x)\ge 0\end{cases}$ (левая часть двойного неравенства — учет ОДЗ переменной), то $\sqrt{x-1}<7-x\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x-1<(7-x)^2,\\7-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0,\\x-1<49+x^2-14x,\\x\le 7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 7,\\x^2-15x+50>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[1;7],\\x\in(-\infty;5)\cup(10;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1;5)$.



Графическая интерпретация решения приведена на рисунке.

15.5. В отличие от 15.1—15.3, нельзя утверждать, что обе части неравенства принимают только неотрицательные значения. Значит, возводить их в квадрат без дополнительных условий нельзя.

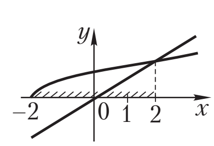
Так как $\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\g(x)<0;\end{cases}\\\begin{cases}f(x)>g^2(x),\\g\ge 0,\end{cases}\end{array}\right.$ то рассмотрим два случая.

1) Если правая часть неравенства отрицательная (т. е. $x<0$), то неравенство при этих значениях переменной верно для любого значения x из ОДЗ переменной. Итак, получаем $\begin{cases}x<0,\\x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-2;0)$.

2) Если $x\ge 0$, то возводим обе части неравенства в квадрат: $\begin{cases}x+2>x^2,\\x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2<0,\\x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<2,\\x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in[0;2)$.

Окончательный ответ — объединение найденных множеств — $x\in[-2;2)$.

Проще эту задачу решить графическим способом. Построим в одной системе координат графики функций $y=\sqrt{x+2}$ и $y=x$ (см. рис.), найдем точку их пересечения $x_0=2$ и обозначим те значения x, при которых график первой функции лежит выше, чем график второй функции.



15.6. Обе части неравенства возводим в куб:

$$8x-4+3\cdot\sqrt[3]{(8x-4)^2}\cdot 2+3\sqrt[3]{8x-4}\cdot 2^2+2^3>8x+4 \Leftrightarrow$$

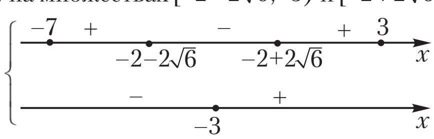
$$\Leftrightarrow\quad 6\cdot\sqrt[3]{(8x-4)^2}+12\sqrt[3]{8x-4}>0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[3]{8x-4}\left(\sqrt[3]{8x-4}+2\right)>0.$$

Обозначим $\sqrt[3]{8x-4}=t$, тогда $t(t+2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-2, \\ t>0. \end{array}\right.$ Далее решаем совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 8x-4<-2^3, \\ 8x-4>0^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-0{,}5, \\ x>0{,}5. \end{array}\right.$

15.7. ОДЗ переменной — решение системы

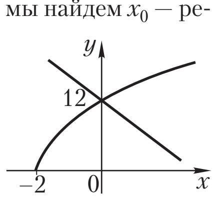
$\begin{cases} -x^2-4x+21\ge 0, \\ x\ne -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[-7;3]. \\ x\ne -3. \end{cases}$ Исходная дробь больше либо равна нулю, если ее числитель и знаменатель одинаковых знаков или числитель обращается в ноль при каком-нибудь x из ОДЗ. Определим промежутки знакопостоянства выражения, стоящего в числителе: $1-\sqrt{21-4x-x^2}\le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{21-4x-x^2}\ge 1 \Leftrightarrow 21-4x-x^2\ge 1 \Leftrightarrow x^2+4x-20\le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\left[-2-2\sqrt{6};-2+2\sqrt{6}\right]$. При остальных значениях x из ОДЗ числитель положительный. Знаменатель отрицательный при $x\in(-\infty;-3)$, а положительный — при $x\in(-3;+\infty)$.

Значит, одинаковые знаки у числителя и знаменателя (см. рис.) на множествах $[-2-2\sqrt{6};-3)$ и $[-2+2\sqrt{6};3]$.



15.8. Так как обе части неравенства принимают только неотрицательные значения, то возводим их в квадрат: $x+9+2(x+2)+2\sqrt{x+9}\sqrt{2(x+2)}>25 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{x+9}\sqrt{2(x+2)}>12-3x.$

На ОДЗ переменной — множестве $[-2;+\infty)$ последнее неравенство несложно решить аналогично 15.5, но проще воспользоваться следующим рассуждением: в левой части неравенства находится возрастающая функция (как произведение двух возрастающих положительных функций), а в правой — убывающая. Значит, если мы найдем x_0 — решение соответствующего уравнения (а в данном случае $x_0=0$ легко находится подбором), то решением неравенства будут все $x>x_0$ из ОДЗ переменной (см. рис.). Значит, окончательный ответ: $x\in(0;+\infty)$.



15.9. Возведем обе части неравенства в квадрат (так как они принимают только неотрицательные значения): $x+3+x-1+2\sqrt{x+3}\sqrt{x-1}>x+4+x-2+2\sqrt{x+4}\sqrt{x-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\sqrt{x-1}>\sqrt{x+4}\sqrt{x-2}$. На ОДЗ переменной (множестве $[2;+\infty)$) возводим обе части последнего неравенства в квадрат: $(x+3)(x-1)>(x+4)(x-2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+2x-3>x^2+2x-8 \Leftrightarrow -3>-8$ — верное неравенство для любых x. Поэтому решение исходного неравенства — все значения x из ОДЗ.

15.10. Найдем ОДЗ переменной: $\begin{cases} x^2-8x+15\ge 0, \\ x^2+2x-15\ge 0, \\ 4x^2-18x+18\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-5)\ge 0, \\ (x-3)(x+5)\ge 0, \\ 2(x-3)(2x-3)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-5]\cup\{3\}\cup[5;\infty).$$

Запишем исходное неравенство, разложив квадратные трехчлены на множители:

$\sqrt{(x-3)(x-5)}+\sqrt{(x-3)(x+5)}-\sqrt{(x-3)(4x-6)}\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{|x-3|}\left(\sqrt{|x-5|}+\sqrt{|x+5|}-\sqrt{|4x-6|}\right)\ge 0$. При $x=3$ это неравенство верно.

С учетом ОДЗ переменной получаем:

$\begin{cases} x\le -5, \\ \sqrt{3-x}\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{-x-5}-\sqrt{6-4x}\right)\ge 0 \end{cases}$ либо

$\begin{cases} x\ge 5, \\ \sqrt{x-3}\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+5}-\sqrt{4x-6}\right)\ge 0. \end{cases}$

Решаем первую систему неравенств: так как $\sqrt{3-x}>0$ при $x\le -5$, то имеем:

$$\begin{cases} x\le -5, \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{-x-5}-\sqrt{6-4x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -5, \\ 5-x-x-5+2\sqrt{x^2-25}\ge 6-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -5, \\ \sqrt{x^2-25}\ge 3-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -5, \\ x^2-25\ge 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -5, \\ x\ge \dfrac{17}{3}. \end{cases}$$

Так как последняя система не имеет решений, то не имеет решений при $x\le -5$ и заданное неравенство.

Решим вторую систему неравенств. Так как $\sqrt{x-3}>0$ при $x\ge 5$, то имеем:

$$\begin{cases} x\ge 5, \\ \sqrt{x-5}+\sqrt{x+5}\ge\sqrt{4x-6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5, \\ x-5+x+5+2\sqrt{x^2-25}\ge 4x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5, \\ \sqrt{x^2-25}\ge x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5, \\ x^2-25\ge 9-6x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5, \\ x\ge \dfrac{17}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[\frac{17}{3};+\infty\right).$$

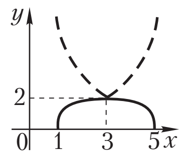
Итак, окончательный ответ: $x\in\{3\}\cup\left[\dfrac{17}{3};+\infty\right).$

15.11. Пусть $\sqrt{x^2+5x+28}=t$, тогда $t^2-24<5t \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t^2-5t-24<0 \Leftrightarrow -3<t<8$. Возвращаясь к переменной x, решаем систему неравенств $\begin{cases} \sqrt{x^2+5x+28}>-3 \\ \sqrt{x^2+5x+28}<8. \end{cases}$ Первое неравенство верно при любом значении x из ОДЗ переменной (при $x\in(-\infty;\infty)$), а решая второе неравенство аналогично 15.1, получаем $x\in(-9;4)$. Окончательный ответ — пересечение найденных множеств: $(-9;4)$.

15.12. Пусть $\sqrt{x+7}=a$, $\sqrt{x^2+1}=b$. Тогда $a^2-ab\;>2b^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2-ab-2b^2>0$. Аналогично 2.28 получаем $(a+b)(a-2b)>0$, т. е. исходное неравенство можно записать в виде $(\sqrt{x+7}+\sqrt{x^2+1})\;(\sqrt{x+7}-2\sqrt{x^2+1})>0$. Первый множитель всегда положителен. Значит, $\sqrt{x+7}>2\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+7>4x^2+4 \Leftrightarrow 4x^2-x-3<0 \Leftrightarrow x\in(-0{,}75;1).$

15.13. Пусть $\sqrt{x-1}=a$, $a\ge 0$. Тогда $\sqrt{a^2+1+2a}+\sqrt{a^2+1-2a}>1{,}5 \Leftrightarrow \sqrt{(1+a)^2}+\sqrt{(1-a)^2}>1{,}5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |1+a|+|1-a|>1{,}5 \Leftrightarrow 1+a+|1-a|>1{,}5 \Leftrightarrow |1-a|>0{,}5-a$, откуда a — любое число, а с учетом того, что $a\ge 0$, получаем, что $a\in[0;+\infty)$, т. е. $\sqrt{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1.$

15.14. Построив графики функций $y=\sqrt{(x-1)(5-x)}$ и $y=2^{1+|x-3|}$, находящихся в левой и правой частях неравенства (см. рис.), находим, что неравенство верно лишь при $x=3$.



15.15. ОДЗ переменной — решение системы $\begin{cases} 9-\dfrac{9}{x}\ge 0, \\ x-\dfrac{9}{x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x}\ge 0, \\ \dfrac{x^2-9}{x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-3;0)\cup[3;+\infty).$

Возведем обе части исходного неравенства в квадрат при условии, что они принимают неотрицательные значения (т. е. если $x-\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}$. При $x\in[-3;0)$ это неравенство не имеет решений. При $x\in[3;+\infty)$ обе части этого неравенства принимают только положительные значения, поэтому $x\ge\sqrt{x-\dfrac{9}{x}} \Leftrightarrow x^2\ge x-\dfrac{9}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x^3-x^2+9}{x}\ge 0$, а это неравенство верно для всех $x\ge 3$, так как при этом $x^3>x^2$): $9-\dfrac{9}{x}<x^2+x-\dfrac{9}{x}-2x\sqrt{x-\dfrac{9}{x}} \Leftrightarrow x^2+x-9-$ $-2x\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}>0$. Так как $x\ge 3$, то разделим обе части неравенства на положительное x: $x+1-\dfrac{9}{x}-2\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}>0$. Пусть $\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}=t$. Тогда $t^2+1-2t>0 \Leftrightarrow (t-1)^2>0 \Leftrightarrow t\ne 1$.

Итак, исходное неравенство верно для всех значений $x\in[3;+\infty)$, кроме тех значений x, где $\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}=1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x-\dfrac{9}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-9=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{2}$.

Ответ: $x\in\left[3;\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{37}}{2};+\infty\right]$.

16.1. $2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}=2^x\cdot 2+2^x\cdot 2^2+2^x\cdot 2^3=$ $=2^x\cdot(2+4+8)=2^x\cdot 14.$

16.2. Воспользуемся основным логарифмическим тождеством и запишем $3=2^{\log_2 3}$. Уравнение перепишем в виде $2^x=2^{\log_2 3} \Leftrightarrow x=\log_2 3$.

16.3. $\log_{2^2}2^{-3}+\log_2\dfrac{1}{2}=\dfrac{-3}{2}\log_2 2-1=-1{,}5-1=-2{,}5.$

16.4. $\log_{3^{1+0,5}}3^3-\left(\log_{2^{1+0,5}}2^3\right)^3=\dfrac{3}{1{,}5}-\left(\dfrac{3}{1{,}5}\right)^3=2-2^3=-6.$

16.5. Так как $\log_b b=1$ и $\log_a a^b=b$, то исходное выражение упрощается: $\log_a 1+\log_b b=0+1=1$.

16.6. $\log_5 25a=\log_5 25+\log_5 a=2+\log_5 a=2+0{,}2=2{,}2.$

16.7. $\log_{2^{1+0,5}}\left(2^2\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)=\log_{2^{1,5}}2^{2+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=\log_{2^{1,5}}2^{\frac{11}{6}}=$ $=\dfrac{11}{6\cdot 1{,}5}\log_2 2=\dfrac{11}{9}.$

16.8. Так как $\sqrt{2}+1=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, то

$\log_{\sqrt{2}-1}\left(\sqrt{2}+1\right)=\log_{\sqrt{2}-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=-1.$

16.9. Перейдем к логарифмам с одинаковыми основаниями: $\dfrac{\lg 8}{\lg\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\lg\sqrt{5^3\sqrt{5}}}{\lg 16}=\dfrac{3\lg 2}{\frac{1}{2}\lg 5}\cdot\dfrac{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)\lg 5}{4\lg 2}=\dfrac{21}{8}.$

16.10. Перейдем к логарифмам с одинаковыми основаниями — двойками и преобразуем разность логарифмов:

$2\log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right)-\log_2\left(7+2\sqrt{6}\right)=$

$=\log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right)^2-\log_2\left(7+2\sqrt{6}\right)=$

$=\log_2\left(\dfrac{1}{2}+3+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)-\log_2\left(7+2\sqrt{6}\right)=$

$=\log_2\dfrac{7+2\sqrt{6}}{2}-\log_2(7+2\sqrt{6})=\log_2\dfrac{7+2\sqrt{6}}{2\cdot(7+2\sqrt{6})}=\log_2\dfrac{1}{2}=-1.$

16.11. $\dfrac{\lg 250-\lg 10}{\lg 2{,}5+\lg 10}=\dfrac{\lg\frac{250}{10}}{\lg(2{,}5\cdot 10)}=\dfrac{\lg 25}{\lg 25}=1.$

16.12. $\log_3 6=a \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_6 3}=a \Leftrightarrow \log_6 3=\dfrac{1}{a}.$

Тогда $\log_6 2=\log_6\dfrac{6}{3}=\log_6 6--\log_6 3=1-\dfrac{1}{a}.$

16.13. Перейдем к десятичным логарифмам:

$\dfrac{\lg 6}{\lg 5}=\dfrac{\lg(2\cdot 3)}{\lg\frac{10}{2}}=\dfrac{\lg 2+\lg 3}{1-\lg 2}=\dfrac{a+b}{1-a}.$

16.14. Перейдем к логарифмам с одинаковыми основаниями: $\log_5 30\cdot\log_5 30-\log_5 150\cdot\log_5 6$ и разложим числа 30 и 150 на множители:

$\left(\log_5(5\cdot 6)\right)^2-\log_5(5\cdot 5\cdot 6)\cdot\log_5 6=(1+\log_5 6)^2-(2+\log_5 6)\log_5 6.$

Обозначим $\log_5 6=t$, тогда

$(1+t)^2-(2+t)t=1+t^2+2t-2t-t^2=1.$

16.15. Разложим числа 6 и 18 на простые множители: $\log_{2\cdot 3}2\cdot\log_{2\cdot 3}(2\cdot 3\cdot 3)+(\log_{2\cdot 3}3)^2$ и перейдем к основанию — простому числу (например, к двойке):

$\dfrac{1}{\log_2(2\cdot 3)}\cdot\dfrac{\log_2(2\cdot 3\cdot 3)}{\log_2(2\cdot 3)}+\left(\dfrac{\log_2 3}{\log_2(2\cdot 3)}\right)^2=\dfrac{1+2\log_2 3}{(1+\log_2 3)^2}+$

$+\dfrac{\log_2^2 3}{(1+\log_2 3)^2}=\dfrac{1+2\log_2 3+\log_2^2 3}{(1+\log_2 3)^2}=\dfrac{(1+\log_2 3)^2}{(1+\log_2 3)^2}=1.$

16.16. Так как $c^{\log_c b}=b$, то

$3^{1+\log_9 5}=3\cdot 3^{\log_{3^2}5}=3\cdot 3^{\frac{1}{2}\log_3 5}=3\cdot 5^{\frac{1}{2}}=3\cdot\sqrt{5}.$

16.17. $2^{\log_2\sqrt{5}}=\sqrt{5}$; $2^{1+\log_2 7}=2\cdot 2^{\log_2 7}=2\cdot 7=14$;

$8^{3\log_8 3}=3^3=27$; $0{,}04^{\log_{0,2}5}=(0{,}2)^{2\log_{0,2}5}=5^2=25.$

16.18. $2^{\log_{2^2}\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=2^{\log_2\left|1-\sqrt{2}\right|}=\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1.$

16.19. Так как $\dfrac{\lg 2}{\lg 4}=\dfrac{\lg 2}{2\lg 2}=\dfrac{1}{2}$, то $9^{\frac{\lg 2}{\lg 4}}=9^{\frac{1}{2}}=3$;

$4^{1-4\log_{4^2}0,2}=\dfrac{4^1}{4^{4\log_{4^2}0,2}}=\dfrac{4}{4^{2\log_4 0,2}}=\dfrac{4}{0{,}2^2}=100;$

так как $\log_2 5\cdot\log_5 8=\frac{1}{\log_5 2}\cdot\log_5 8=\frac{3\log_5 2}{\log_5 2}=3$,

то $\left(3^{\log_2 5}\right)^{\log_5 8}=3^3=27$.

16.20. Так как $\frac{\lg\lg 6}{\lg 5}=\log_5\lg 6$, то $5^{\frac{\lg\lg 6}{\lg 5}}=5^{\log_5\lg 6}=\lg 6$; $\lg 6^{-1}=-\lg 6$. Ответ: $\lg 6-\lg 6=0$.

16.21. Так как $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ и $49^{\log_{36} 5}=7^{\log_6 5}$, то $5^{\log_6 7}-7^{\log_6 5}=0{,}8^{\log_7 6}-6^{\log_7 8}=0$.

16.22. Поскольку $x^{1+\log_x 2}=x\cdot x^{\log_x 2}=x\cdot 2$; $8^{\frac{2}{3}\log_2 x}=$ $=\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}\log_2 x}=2^{2\log_2 x}=x^2$, то имеем $\left(1+3\cdot 2\cdot x+9x^2\right)^{\frac{1}{2}}=$ $=(1+3x)^{2\cdot\frac{1}{2}}=|1+3x|$. Но так как исходное выражение определено при $x>0$, то $|1+3x|=1+3x$.

16.23. Так как $\log_2 6=\log_2(2\cdot 3)=1+\log_2 3$, то $\sqrt{1+\log_2 3+2\sqrt{\log_2 3}}=\sqrt{1+\log_2 3+2\sqrt{\log_2 3}}=$ $=\sqrt{\left(1+\sqrt{\log_2 3}\right)^2}=1+\sqrt{\log_2 3}$.

16.24. Аналогично 2.28 и 2.50 $\sqrt{\left(2^x\right)^2+2\cdot 2^x\cdot 3^y+\left(3^y\right)^2}=$ $=\sqrt{\left(2^x+3^y\right)^2}=2^x+3^y$.

16.25. Так как $\log_7 2=\frac{1}{\log_2 7}$, то $\sqrt{\log_2^2 7+\frac{1}{\log_2^2 7}+2}=$

$=\sqrt{\left(\log_2 7+\frac{1}{\log_2 7}\right)^2}=\log_2 7+\frac{1}{\log_2 7}=\log_2 7+\log_7 2$.

16.26. Так как среди множителей есть $\lg\left(\sqrt{2}\cos 45^\circ\right)=$ $=\lg\left(\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\lg 1=0$, то все произведение равно нулю.

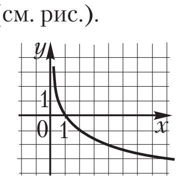
16.27. Перейдем к логарифмам с одинаковыми основаниями (например, двойками):
$\log_2 3\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\cdot\ldots\cdot\frac{\log_2 127}{\log_2 126}\cdot\frac{\log_2 128}{\log_2 127}=\log_2 128=$ $=\log_2 2^7=7$.

16.28. Аналогично 2.33 разделим числитель и знаменатель данной в условии дроби на $3^x\neq 0$: $\frac{2^x:3^x+3}{2^{x-1}:3^x-2\cdot 3}=-\frac{4}{7}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{2^x:3^x+3}{2^{-1}\cdot\left(2^x:3^x\right)-6}=-\frac{4}{7}$. Пусть $2^x:3^x=t$, тогда $\frac{t+3}{\frac{t}{2}-6}=-\frac{4}{7}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 7t+21=-2t+24\Leftrightarrow 9t=3\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$, т. е. $2^x:3^x=\frac{1}{3}$.

16.29. Показательная функция $f(x)=a^x$ возрастает (как на рисунке, приведенном в условии) при $a>1$.

16.30. Преобразуем $y=\log_2\frac{1}{x}=\log_2 x^{-1}=-\log_2 x$. Далее $D(f)=(0;+\infty)$, и чтобы построить график функции $y=-\log_2 x$, надо график функции $y=\log_2 x$ симметрично отобразить относительно оси Ox (см. рис.).

$y=\log_2 x$



$y=-\log_2 x$

17.1. Так как $8^{3\log_8 x}=x^3$; $5^{1+\log_7 7^{-1}}=5^{1-1}=5^0=1$, то имеем уравнение $x^3=1+7\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow\frac{1}{x}>1$.

17.2. Так как $216=6^3$, то имеем уравнение $6^{3-x}=6^3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3-x=3\Leftrightarrow x=0$.

17.3. Перейдем к степеням с одинаковыми основаниями: $\left(2^{-2}\right)^{\frac{4-x^2}{2}}=\left(2^3\right)^x\Leftrightarrow 2^{x^2-4}=2^{3x}\Leftrightarrow x^2-4=3x$, откуда $x=-1$, $x=4$.

17.4. Перейдем к степеням с одинаковыми основаниями: $7^{\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-x+3}{2}}=7^{1+\frac{1}{4}}\Leftrightarrow\frac{x^2-x+3}{4}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow x^2-x=2$, откуда $x=-1$, $x=2$.

17.5. Так как $6=2\cdot 3$, то $2^{2x+4}\cdot 3^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{2^{2x+4}}{2^{x+8}}=\frac{3^{3x}}{3^{2x+4}}\Leftrightarrow 2^{x-4}=3^{x-4}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x-4}=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x-4=0\Leftrightarrow x=4$.

17.6. $3\cdot 15^{2x+1}=27^x\cdot 5^{x+3}\Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x+1}\cdot 5^{2x+1}=3^{3x}\cdot 5^{x+3}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3^{1+(2x+1)-3x}\cdot 5^{2x+1-(x+3)}=1\Leftrightarrow 3^{2-x}\cdot 5^{x-2}=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3^{2-x}:5^{2-x}=1\Leftrightarrow(3/5)^{2-x}=1\Leftrightarrow 2-x=0\Leftrightarrow x=2$.

17.7. Перейдем к степеням с одинаковыми основаниями: $10^x-\frac{5^x}{5}\cdot\frac{2^x}{4}=950\Leftrightarrow 10^x-\frac{10^x}{20}=950\Leftrightarrow 10^x\left(1-\frac{1}{20}\right)=950\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 10^x=\frac{950\cdot 20}{19}\Leftrightarrow 10^x=1000\Leftrightarrow x=3$.

17.8. Пусть $6^x=t$. Тогда $t^2-8t+12=0$, откуда $t=6$, $t=2$, то есть $6^x=6\Leftrightarrow x=1$ или $6^x=2\Leftrightarrow x=\log_6 2$.

17.9. Пусть $2^{\frac{x}{2}}=t$. Тогда $16^x=t^8$, $2^{\frac{3x-3}{2}}=\frac{t^3}{\sqrt{8}}$, $2^{3-x}=\frac{8}{t^2}$

и получим: $t^8-\frac{12}{\sqrt{8}}t^3=\frac{8}{t^2}$, $t^{10}-\frac{12}{2\sqrt{2}}t^5-8=0$. Получили квадратное уравнение $a^2-3\sqrt{2}a-8=0$ относительно $a=t^5$ корни которого $-\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$. Возвращаясь к переменной x, решаем два уравнения $t^5=-\sqrt{2}$, т. е. $2^{\frac{x}{2}}=\sqrt[5]{-\sqrt{2}}\Leftrightarrow x\in\varnothing$ и $t^5=4\sqrt{2}\Leftrightarrow t^5=\sqrt{2^5}$, т. е. $2^{\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=1$.

17.10. Так как $16^{x+\frac{1}{2}}=16^x\cdot 16^{0,5}=4\cdot 16^x$, то, обозначив $4^x=t$, получим $4t^2=15t+4$, откуда $t=4$, $t=-\frac{1}{4}$, то есть $4^x=4\Leftrightarrow x=1$ либо $4^x=-0{,}25\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

17.11. Аналогично 16.8 заметим, что $\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(4-\sqrt{15}\right)=$ $=16-15=1$, т. е. $4-\sqrt{15}=\frac{1}{4+\sqrt{15}}$. Значит, обозначив $\left(4+\sqrt{15}\right)^x=t$, получим $t+\frac{1}{t}=62\Leftrightarrow t^2-62t+1=0$, откуда $t_{1,2}=31\pm 8\sqrt{15}$. Возвращаясь к переменной x, решаем два уравнения: $\left(4+\sqrt{15}\right)^x=31+8\sqrt{15}\Leftrightarrow\left(4+\sqrt{15}\right)^x=\left(4+\sqrt{15}\right)^2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=2$ и $\left(4+\sqrt{15}\right)^x=31-8\sqrt{15}\Leftrightarrow\left(4+\sqrt{15}\right)^x=\left(4-\sqrt{15}\right)^2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=-2$.

17.12. Так как $6^x = 2^x \cdot 3^x$, то $6\cdot\left(2^x\right)^2 - 13\cdot 2^x\cdot 3^x + 6\cdot\left(3^x\right)^2 = 0$ — однородное уравнение относительно выражений $a = 2^x$, $b = 3^x$. Разделив обе части уравнения на $\left(3^x\right)^2 \neq 0$, получим: $6\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13\left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 = 0$. Обозначив $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, имеем $6t^2 - 13t + 6 = 0$, откуда $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = \frac{3}{2}$, т. е. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$ либо $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -1$.

17.13. Сгруппируем слагаемые: $2^x\cdot 3^{x-1} + 16 - 2^2\cdot 2^{x-2} - 9\cdot 16\cdot 3^{x-3} = 0 \Leftrightarrow 2^x\cdot 3^{x-1} - 2^x + 16 - 16\cdot 3^{x-1} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ 2^x\cdot(3^{x-1} - 1) + 16(1 - 3^{x-1}) = 0\ \Leftrightarrow\ (2^x - 16)\cdot(3^{x-1} - 1) = 0$, откуда $x = 4$ или $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

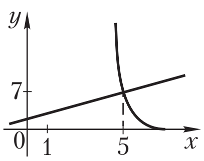
17.14. Сгруппируем слагаемые: $x\cdot 2^x + 2^x - 16x - 16 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2^x(x+1) - 16(x+1) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 16)(x+1) = 0$. Следовательно, $2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$ либо $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

17.15. При $a(x) > 0$ имеем равносильный переход:

$$a(x)^f = a(x)^g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f = g, \\ a(x) = 1. \end{array}\right.$$

Поэтому при $x \neq 2$ либо $|x-2| = 1$, откуда $x = 3$, $x = 1$, либо $1 - 10x^2 = -3x \Leftrightarrow 10x^2 - 3x - 1 = 0$, откуда $x = 0{,}5$, $x = -0{,}2$.

17.16. Построив в одной системе координат графики функций $y = 7^{6-x}$ и $y = x + 2$, которые находятся в левой и правой частях уравнения (см. рис.), находим единственный (так как $y = 7^{6-x}$ убывает, а $y = x + 2$ возрастает) корень уравнения: $x = 5$.



17.17. Аналогично 17.16 используем графический метод решения и находим единственную точку пересечения графиков — $x = 3$.

17.18. Пусть $2^y = a$, тогда $\begin{cases} 2x + a = -2, \\ 10x + 3{,}5\cdot a^2\cdot 2 = 82. \end{cases}$ Выразив $2x = -2 - a$ из первого уравнения и подставив во второе уравнение, получаем $-10 - 5a + 7a^2 = 82 \Leftrightarrow 7a^2 - 5a - 92 = 0$, откуда $a = -\frac{23}{7}$, $a = 4$, т. е. $2^y = -\frac{23}{7} \Leftrightarrow y \in \varnothing$ либо $2^y = 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = 2$ и, соответственно, $x = -3$.

17.19. Запишем второе уравнение системы в виде $3^{y-2} = 3^x \Leftrightarrow x = y - 2$. Подставив выражение $y - 2$ в первое уравнение системы вместо x, получаем $3^{y-2}2^y = 3^{-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3^y3^{-2}2^y = 3^{-2} \Leftrightarrow 3^y2^y = 1 \Leftrightarrow 6^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$. Соответственно, $x = 0 - 2 = -2$.

17.20. Так как $0{,}125 = 2^{-3}$, то $2^{3x} \le 2^7 \Leftrightarrow 3x \le 7 \Leftrightarrow x \le \frac{7}{3}$.

17.21. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x} \le \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{-3(x-2)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2 - 2x \le -3x + 6 \Leftrightarrow 3x - 2x \le 6 - 2 \Leftrightarrow x \le 4$.

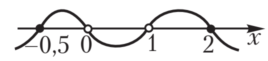
17.22. Аналогично 17.5 $\frac{3^{x+3}}{3^{2x}} \le \frac{7^{2x}}{7^{x+3}} \Leftrightarrow 3^{3-x} \le 7^{x-3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (3\cdot 7)^{3-x} \le 1 \Leftrightarrow 3 - x \le 0 \Leftrightarrow x \ge 3$.

17.23. Аналогично 17.6 $2^x\cdot 2^3 - 2^x - 112 > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2^x\left(2^3 - 1\right) > 112 \Leftrightarrow 2^x > \frac{112}{7} \Leftrightarrow 2^x > 16 \Leftrightarrow x > 4$.

17.24. $2^{4x} - 63\cdot 2^{2x} - 64 > 0$.

Пусть $2^{2x} = t$, $t > 0$. Тогда $t^2 - 63t - 64 > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (t+1)(t-64) > 0$, откуда $t \in (-\infty; -1) \cup (64; +\infty)$. Поскольку $t > 0$, то $t \in (64; +\infty)$. Значит, $2^{2x} > 64 \Leftrightarrow 2^{2x} > 2^6 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x > 3$.

17.25. Пусть $2^x = t$, $t > 0$. Тогда $\frac{\frac{1}{t} - t + 1{,}5}{t - 1} \le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{-t^2 + 1{,}5t + 1}{t(t-1)} \le 0$. Применяя метод интервалов (см. рис.), находим (с учетом ограничения $t > 0$), что $t \in (0; 1) \cup [2; \infty)$, т. е. $\left[\begin{array}{l} 0 < 2^x < 1, \\ 2^x \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x \ge 1. \end{array}\right.$



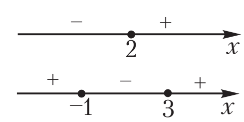
17.26. Аналогично 17.12 обозначим $2^{\frac{1}{x}} = a$, $3^{\frac{1}{x}} = b$, тогда $6^{\frac{1}{x}} = a\cdot b$, и получаем $3a^2 - 2b^2 + a\cdot b < 0 \Leftrightarrow (a+b)(3a - 2b) < 0$, т. е. $\left(2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}\right)\left(3\cdot 2^{\frac{1}{x}} - 2\cdot 3^{\frac{1}{x}}\right) < 0$. Поскольку выражение в первой скобке всегда принимает положительные значения, то $3\cdot 2^{\frac{1}{x}} < 2\cdot 3^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \frac{2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 1$ (знак неравенства изменился, так как основание степеней было меньше 1). Значит, $\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0$, откуда $x \in (0; 1)$.

17.27. Определим промежутки знакопостоянства каждого множителя:

$2^x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow 2^x \ge 4 \Leftrightarrow x \ge 2$. При остальных значениях x первая скобка принимает отрицательные значения.

$x^2 - 2x - 3 \le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \le 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 3]$. При остальных значениях x вторая скобка принимает положительные значения.

Произведение двух множителей больше нуля, если они одного знака. В данной задаче (см. рис.) произведение больше нуля на интервалах $(-1;\ 2)$ и $(3;\ +\infty)$.



17.28. $9^{\frac{x+4}{2x}} - 3 - 2^3\cdot 3^{\frac{2}{x}} \ge 0 \Leftrightarrow 3^{\frac{x+4}{x}} - 3 - 8\cdot 3^{\frac{2}{x}} \ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3^{1+\frac{4}{x}} - 3 - 8\cdot 3^{\frac{2}{x}} \ge 0$. Пусть $t = 3^{\frac{2}{x}}$, тогда $3t^2 - 3 - 8t \ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (3t+1)(t-3) \ge 0$, откуда $t \le -\frac{1}{3}$ либо $t \ge 3$. Первое неравенство не выполняется никогда, а $3^{\frac{2}{x}} \ge 3\ \Leftrightarrow\ \frac{2}{x} \ge 1\ \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{2-x}{x} \ge 0$, откуда $x \in (0; 2]$.

17.29. Оценим левую и правую части неравенства, используя неравенства $a + \frac{1}{a} \le -2$ при $a < 0$ и $a + \frac{1}{a} \ge 2$ при $a > 0$ (см. 2.35): $x\cdot 5^{\sqrt{16-x^2}} + \frac{1}{x\cdot 5^{\sqrt{16-x^2}}} \le -2$ при $x < 0$; $\operatorname{tg}^2\pi x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\pi x} \ge 2$ при любом допустимом x, а значит, $0 < \left(\operatorname{tg}^2\pi x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\pi x}\right)^{-3} \le 2^{-3}$ при любом допустимом x.

Значит, при $x<0$ левая часть исходного неравенства не может оказаться больше, чем правая, и решений у неравенства на этом интервале нет.

Если $x>0$, то $x\cdot 5^{\sqrt{16-x^2}}+\dfrac{1}{x\cdot 5^{\sqrt{16-x^2}}}\ge 2$,

а $0<\left(\operatorname{tg}^2\pi x+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\pi x}\right)^{-3}\le 2^{-3}$. Значит, при любом допустимом положительном x исходное неравенство выполняется. Осталось найти ОДЗ переменной — решить систему неравенств $\begin{cases}16-x^2\ge 0,\\ \pi x\ne\dfrac{\pi}{2}n, n\in\mathbf{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4\le x\le 4,\\ x\ne\dfrac{n}{2}, n\in\mathbf{Z}\end{cases}$ и получить окончательный ответ: все x из промежутка $(0;\,4)$, за исключением значений $\dfrac{1}{2};\ 1;\dfrac{3}{2};\ 2;\dfrac{5}{2};\ 3;\dfrac{7}{2}$.

18.1. Так как $5=2^{\log_2 5}$, то $2^x=5\Leftrightarrow 2^x=2^{\log_2 5}\Leftrightarrow x=\log_2 5$.

18.2. Так как $\log_a f(x)=b\Leftrightarrow f(x)=a^b$ при всех допустимых a, то $x+1=2^3\Leftrightarrow x=8-1\Leftrightarrow x=7$.

18.3. $\log_{7^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)}}x=-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x=\left(7^{-\frac{3+1}{6}}\right)^{-\frac{3}{4}}\Leftrightarrow x=\left(7^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=7^{\frac{1}{2}}$.

18.4. Аналогично 18.2 получаем $x^2-3x+1=(x+1)^1$ при условии, что $x+1>0$, $x+1\ne 1$. Значит, $x^2-4x=0$, откуда $x=4$, $x=0$. Второе значение — посторонний корень, так как при этом значении x основание логарифма равно единице.

18.5. $\lg\big(x(x+9)\big)=-\lg\dfrac{x+9}{x}\Leftrightarrow\lg\big(x(x+9)\big)=\lg\dfrac{x}{x+9}$.

Так как $\log_a f=\log_a g\ \Leftrightarrow\ f=g>0$, то получаем $\begin{cases}x(x+9)=\dfrac{x}{x+9},\\ x(x+9)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x+9-\dfrac{1}{x+9}\right)=0,\\ x(x+9)>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\dfrac{(x+9)^2-1}{x+9}=0,\\ x(x+9)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x(x+8)(x+10)}{x+9}=0,\\ x(x+9)>0,\end{cases}$ откуда $x=-10$.

18.6. На ОДЗ переменной (множестве $(-0{,}5;+\infty)$) имеем $\log_6(x+1)(2x+1)=1\Leftrightarrow(x+1)(2x+1)=6^1\Leftrightarrow 2x^2+3x-5=0$, откуда $x=1$, $x=-2{,}5$. Второе значение — посторонний корень, так как он не принадлежит ОДЗ.

18.7. Перейдем к логарифмам с одинаковыми основаниями: $\log_3 x+\dfrac{1}{2}\log_3 x+\dfrac{1}{3}\log_3 x=5{,}5\ \Leftrightarrow\ \log_3 x\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)=5{,}5\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{11}{6}\log_3 x=5{,}5\Leftrightarrow\log_3 x=3\Leftrightarrow x=3^3\Leftrightarrow x=27$.

18.8. Пусть $\lg(x-1)=t$. Тогда $\dfrac{1+t}{1-t^2}+\dfrac{1}{1-t}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{1}{1-t}=1\Leftrightarrow\dfrac{2}{1-t}=1\Leftrightarrow 1-t=2\Leftrightarrow t=-1$. Найденное значение t не является корнем, так как при $t=-1$ знаменатель первой дроби обращается в нуль. Значит, корней у уравнения нет.

18.9. Так как $\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}$, то, обозначив $\sqrt{\log_2 x}=t$, переходим к уравнению $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}t^2-4t+\sqrt{3}}{\sqrt{3}t}=0$. Вычислив $D/4=4-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=1$, находим $t=\sqrt{3}$, $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Учитывая, что $t=\sqrt{\log_2 x}$, решаем два уравнения: $\sqrt{\log_2 x}=\sqrt{3}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\log_2 x=3\Leftrightarrow x=2^3$ и $\sqrt{\log_2 x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\log_2 x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=2^{\frac{1}{3}}$. Оба найденных значения — корни исходного уравнения, так как проводились только равносильные преобразования.

18.10. Перейдем к логарифмам с одинаковыми основаниями: $\log_x\sqrt{5x}=\dfrac{\log_5\sqrt{5x}}{\log_5 x}=\dfrac{\log_5\sqrt{5}+\log_5\sqrt{x}}{\log_5 x}=\dfrac{1+\log_5 x}{2\log_5 x}$. Обозначим $\log_5 x=t$. Тогда исходное уравнение примет вид $\sqrt{\dfrac{1+t}{2t}}\cdot t=1$. При условии $t>0$ возводим обе части этого уравнения в квадрат: $\dfrac{1+t}{2t}\cdot t^2=1\ \Leftrightarrow\ t^2+t-2=0$, откуда $t=1$, $t=-2$. Второе значение — посторонний корень, так как не удовлетворяет условию $t>0$. Возвращаясь к переменной x, решаем уравнение $\log_5 x=1\Leftrightarrow x=5$.

18.11. Перейдем к основанию степени — тройке: $\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x-4}=3^{-3}\Leftrightarrow\log_3 x(\log_3 x-4)=-3$. Обозначим $\log_3 x=t$. Тогда $t(t-4)=-3\Leftrightarrow t^2-4t+3=0$, откуда $t=1$, $t=3$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\log_3 x=1,\\ \log_3 x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=27.\end{array}\right.$

18.12. Перейдем в степенях к одинаковым основаниям, например к 10:

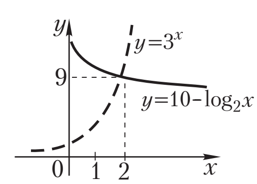
$\left(10^{\lg x}\right)^{\lg 3}+\left(10^{\lg 3}\right)^{\lg x}=54\Leftrightarrow 2\cdot 10^{\lg 3\cdot\lg x}=54\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10^{\lg 3\cdot\lg x}=27\Leftrightarrow 3^{\lg x}=27\Leftrightarrow\lg x=3\Leftrightarrow x=1000$.

18.13. $x^2\lg x-x^2+4-4\lg x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(\lg x-1)-4(\lg x-1)=0\Leftrightarrow\left(x^2-4\right)(\lg x-1)=0$. Значит, либо $x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$, либо $\lg x=1\Leftrightarrow x=10$. Значение $x=-2$ не входит в ОДЗ переменной и является посторонним корнем.

18.14. Используя графический метод (см. рис.), находим единственный корень уравнения $x=2$.



18.15. Система определена при $x>0$, $y>0$. При этих ограничениях перепишем систему: $\begin{cases}\log_4(xy)=2,\\ 2x+y=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=16,\\ 2x+y=33\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x(33-2x)=16,\\ y=33-2x.\end{cases}$ Из первого уравнения системы имеем $2x^2-33x+16=0$, $D=33^2-4\cdot 2\cdot 16=961$. Значение $\sqrt{D}=31$ находим аналогично 4.8 и получаем $x_1=\dfrac{33-31}{4}=0{,}5$, соответственно $y_1=33-2\cdot 0.5=32$ или $x_2=\dfrac{33+31}{4}=16$, откуда $y_2=33-2\cdot 16=1$.

18.16. Обозначим $\lg x=a$, $\log_2 y=b$. Тогда $\begin{cases}a+b=1,\\ \dfrac{1}{2}b+1+a=1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1,\\ b=-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2a=1,\\ b=-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1,\\ b=2.\end{cases}$ Итак, исходная система равносильна следующей: $\begin{cases}\log_2 y=2,\\ \lg x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2^2,\\ x=10^{-2}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=4,\\ x=0{,}1.\end{cases}$

18.17. Так как $\log_a f\ge\log_a g \Leftrightarrow f\ge g>0$ при $a>1$, то $\log_2(x^2-2x)\ge\log_2 2^3 \Leftrightarrow x^2-2x\ge 8 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$.

18.18. Так как $\log_a f\ge\log_a g \Leftrightarrow 0<f\le g$ при $0<a<1$, то $\log_{0,5}(1+2x)\ge\log_{0,5}0{,}5^{-1} \Leftrightarrow 0<1+2x\le 2 \Leftrightarrow -1<2x\le 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -0{,}5<x\le 0{,}5$.

18.19. $22^{\log_2\left(x^2-1\right)}\le 22^0 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right)\le 0 \Leftrightarrow 0<x^2-1\le 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1<x^2\le 2 \Leftrightarrow x\in[-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2}]$.

18.20. Выясним, больше или меньше единицы основание логарифма (т. е. $\sqrt{11}-\sqrt{5}$). Допустим, $\sqrt{11}-\sqrt{5}<1$, тогда $\sqrt{11}<1+\sqrt{5} \Leftrightarrow 11<1+5+2\sqrt{5} \Leftrightarrow 5<2\sqrt{5} \Leftrightarrow 25<4\cdot 5$ — неверное числовое неравенство, а значит, предположение было неверным, т. е. на самом деле $\sqrt{11}-\sqrt{5}>1$. Итак,

$\log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}\left(-x^2+2x+16-2\sqrt{55}\right)>\log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -x^2+2x+16-2\sqrt{55}>11+5-2\sqrt{11}\sqrt{5} \Leftrightarrow -x^2+2x>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in(0;2)$.

18.21. Аналогично 18.18 $\log_{0,5}(x^2+1)\le\log_{0,5}(2x-5) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+1\ge 2x-5>0 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+6\ge 0,\\ 2x>5\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

18.22. *Способ 1.* $\dfrac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2}\le 1 \Leftrightarrow \log_{(7x-1)^2}(5x+1)\le 1$. Поскольку основание логарифма может быть и больше, и меньше единицы, то рассмотрим два случая.

а) Если $(7x-1)^2>1$, тогда $0<5x+1\le(7x-1)^2$.

То есть $\begin{cases}49x^2-19x\ge 0,\\ (7x-1)^2>1,\\ 5x>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(49x-19)\ge 0,\\ 49x^2-14x>0,\\ x>-0{,}2\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(-0{,}2;0)\cup\left[\dfrac{19}{49};+\infty\right)$.

б) Если $(7x-1)^2<1$, тогда $5x+1\ge(7x-1)^2>0$.

То есть $\begin{cases}49x^2-19x\le 0,\\ 49x^2-14x<0\\ 7x-1\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le\dfrac{19}{49},\\ 0<x<\dfrac{14}{49},\\ x\ne\dfrac{1}{7}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(0;\dfrac{1}{7}\right)\cup\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{2}{7}\right)$.

Окончательный ответ — объединение найденных промежутков: $(-0{,}2;0)\cup\left(0;\dfrac{1}{7}\right)\cup\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{2}{7}\right)\cup\left[\dfrac{19}{49};+\infty\right)$.

Способ 2. Воспользуемся равносильным на ОДЗ переменной (множестве $\left(-\dfrac{1}{5};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{7}\right)\cup\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{2}{7}\right)\cup\left(\dfrac{2}{7};+\infty\right)$) переходом $\log_a f\le\log_a g \Leftrightarrow (a-1)(f-g)\le 0$:

$\log_{(7x-1)^2}(5x+1)\le 1 \Leftrightarrow \log_{(7x-1)^2}(5x+1)\le\log_{(7x-1)^2}(7x-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left((7x-1)^2-1\right)\left(5x+1-(7x-1)^2\right)\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(7x)(7x-2)\left(-49x^2+19x\right)\le 0$. Применяя метод интервалов, находим $x\in\left(-\infty;\dfrac{2}{7}\right]\cup\left[\dfrac{19}{49};+\infty\right)$. Это множество надо пересечь с ОДЗ переменной и получить ответ: $(-0{,}2;0)\cup\left(0;\dfrac{1}{7}\right)\cup\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{2}{7}\right)\cup\left[\dfrac{19}{49};+\infty\right)$.

18.23. Воспользуемся равносильным переходом на ОДЗ переменной $\log_a f\le\log_a g \Leftrightarrow (a-1)(f-g)\le 0$:

$\log_{x+1}\left(2x^2-3x+1\right)\le\log_{x+1}(x+1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+1-1)\left(2x^2-3x+1-\left(x^2+1+2x\right)\right)\le 0 \Leftrightarrow x\left(x^2-5x\right)\le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in(-\infty;5]$. Это множество надо пересечь с ОДЗ переменной — решением системы $\begin{cases}x+1>0,\\ x+1\ne 1,\\ 2x^2-3x+1>0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x>-1,\\ x\ne 0,\\ x\in(-\infty;0{,}5)\cup(1;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(0;0{,}5)\cup(1;+\infty)$.

Окончательный ответ: $x\in(-1;0)\cup(0;0{,}5)\cup(1;5]$.

18.24. ОДЗ переменной — решение системы

$\begin{cases}x>0,\\ x\ne 3,\\ \dfrac{x-4}{(x+1)(x-5)}>0\end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;3)\cup(3;4)\cup(5;+\infty)$.

На этом множестве аналогично 18.23 получаем

$\left(\dfrac{3}{x}-1\right)\left(\dfrac{x-4}{(x+1)(x-5)}-\dfrac{3}{x}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{3-x}{x}\times$ $\times\dfrac{x^2-4x-3\left(x^2-4x-5\right)}{x(x+1)(x-5)}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(3-x)\left(-2x^2+8x+15\right)}{x^2(x+1)(x-5)}\ge 0$.

Используя метод интервалов, находим $x\in\left[2-\sqrt{\dfrac{23}{2}};-1\right)\cup[3;5)\cup\left[2+\sqrt{\dfrac{23}{2}};+\infty\right)$. Пересечение этого множества с ОДЗ переменной — окончательный ответ.

18.25. ОДЗ переменной — множество $(0;+\infty)$. На нем $\log_{0,5}(x(x+0{,}5))\ge 1 \Leftrightarrow x(x+0{,}5)\le 0{,}5^1 \Leftrightarrow 2x^2+x-1\le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in[-1;0{,}5]$. Учитывая ОДЗ переменной, получаем $x\in(0;0{,}5]$.

18.26. Аналогично 4.25 либо $\sqrt{x-0{,}5}=0 \Leftrightarrow x=0{,}5$, либо $\log_3 x^2>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Учитывая ОДЗ переменной (множество $[0{,}5;1)\cup(1;+\infty)$), получаем окончательный ответ: $x\in\{0{,}5\}\cup(1;+\infty)$.

18.27. Пусть $\log_2 x=a$, тогда $\dfrac{1}{a-4}\ge\dfrac{1}{a} \Leftrightarrow \dfrac{4}{a(a-4)}>0$, откуда $a\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. Итак, исходное неравенство равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l}\log_2 x<0,\\ \log_2 x>4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1,\\ x>2^4\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1,\\ x>16.\end{array}\right.$

18.28. Переходя к логарифмам с основанием 3, получаем $-\log_3 x\ge\dfrac{1}{\log_3 x}-\dfrac{5}{2}$. Пусть $\log_3 x=a$, тогда $-a\ge\dfrac{1}{a}-\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{2a^2-5a+2}{2a}\le 0 \Leftrightarrow a\in(-\infty;0)\cup[0{,}5;2]$. Итак, исходное неравенство равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l}\log_3 x<0,\\ 0{,}5\le\log_3 x\le 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1,\\ 3^{0,5}\le x\le 3^2.\end{array}\right.$

18.29. Воспользуемся обобщенным методом интервалов (см.13.5). Находим ОДЗ переменной.

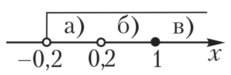
$\begin{cases}\dfrac{5x}{2}+0{,}5>0,\\ \dfrac{5x}{2}+0{,}5\ne 1,\\ x^2+8>0,\\ x^2+8\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-0{,}2,\\ x\ne 0{,}2.\end{cases}$ На ОДЗ решаем уравнение

$\log_{\frac{5x}{2}+\frac{1}{2}}3=\log_{x^2+8}9\Leftrightarrow\log_{\frac{5x+1}{2}}3=\log_{\sqrt{x^2+8}}3\Rightarrow\dfrac{5x+1}{2}=$

$=\sqrt{x^2+8}\ \Rightarrow\ \dfrac{25x^2+1+10x}{4}=x^2+8\ \Leftrightarrow\ 21x^2+10x-31=0,$

откуда $x_1=-\dfrac{31}{21}$ — посторонний корень, $x_2=1$.

Далее обозначаем найденные решения и ОДЗ переменной на числовой оси (см. рис.) и выясняем, на каких из трех полученных промежутков неравенство будет выполняться (см.13.5).



а) Пусть $x=0$. Тогда $\log_{\frac{5\cdot 0}{2}+0,5}3\le\log_{0^2+8}9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \log_{0,5}3\le\log_{\sqrt{8}}3$ — верное неравенство, так как левая часть отрицательная, а правая — положительная.

б) Пусть $x=0{,}5$. Тогда $\log_{1,75}3\le\log_{8,25}9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \log_{1,75}3\le\log_{\sqrt{8,25}}3$ — неверное неравенство, так как $1{,}75<\sqrt{8{,}25}$.

в) Пусть $x=2$. Тогда $\log_{5,5}3\le\log_{12}9\Leftrightarrow\log_{5,5}3\le\log_{\sqrt{12}}3$ — верное неравенство, так как $5{,}5>\sqrt{12}$.

Окончательный ответ: $x\in(-0{,}2;0{,}2)\cup[1;+\infty)$.

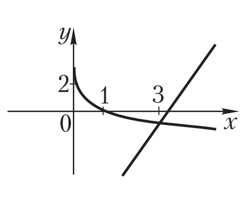
18.30. Так как $a^{\log_a b}=b$, то получаем неравенство $\sqrt{x-1}<(x-6)+3\Leftrightarrow\sqrt{x-1}<x-3\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x-1<(x-3)^2,\\ x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 3,\\ x-1<x^2+9-6x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 3,\\ x^2-7x+10>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 3,\\ x\in(-\infty;-2)\cup(5;+1)\end{cases}\Leftrightarrow x\in(5;+\infty).$

Осталось найденное множество пересечь с ОДЗ переменной ($x>6$) и получить окончательный ответ $x\in(6;+\infty)$.

18.31. Изобразив графики функций $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ и $y=3x-10$, находящихся в левой и правой частях неравенства, в одной системе координат (см. рис.), находим абсциссу точки их пересечения $x_0=3$ и получаем ответ: $x\in(0;3]$.



19.1. Используя соотношение
180° — π радиан;
100° — x радиан,

находим $x=\dfrac{100°\cdot\pi}{180°}=\dfrac{5\pi}{9}$.

19.2. Так как $\sin 30°=\dfrac{1}{2}$; $\cos 90°=0$; $\operatorname{tg}180°=0$; $\operatorname{ctg}45°=1$, то ответ: $\dfrac{1}{2}-0+0-1=-\dfrac{1}{2}$.

19.3. Так как $\sin 330°=\sin(360°-30°)=-\sin 30°=-\dfrac{1}{2}$;

$\cos 390°=\cos(360°+30°)=\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\operatorname{tg}315°=\operatorname{tg}(360°-45°)=-\operatorname{tg}45°=-1$;

$\operatorname{ctg}225°=\operatorname{ctg}(180°+45°)=\operatorname{ctg}45°=1$,

то ответ: $-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\cdot 1=1-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

19.4. $\sin 77°=\sin(90°-13°)=\cos 13°$; $\sin 257°=$ $=\sin(270°-13°)=-\cos 13°$; $\cos 450°=\cos(360°+90°)=$ $=\cos 90°=0$. Поэтому имеем $\dfrac{3\cos 13°+3\cos 13°-0}{\cos 13°}=$ $=\dfrac{6\cos 13°}{\cos 13°}=6$.

19.5. $\sin^2\alpha-3+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-3=1-3=-2$.

19.6. $\dfrac{3-5(1-\sin^2\alpha)}{2-5\sin^2\alpha}=\dfrac{3-5+5\sin^2\alpha}{2-5\sin^2\alpha}=\dfrac{-2+5\sin^2\alpha}{2-5\sin^2\alpha}=-1$.

19.7. $4\cos^4\alpha\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+5(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=$

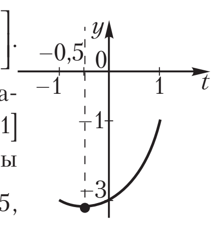
$=4\cos^2\alpha\sin^2\alpha+5\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=24\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

19.8. Так как $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$, то $\sin^2\dfrac{\pi}{8}-\cos^2\dfrac{\pi}{8}=-\cos\left(2\dfrac{\pi}{8}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

19.9. $\operatorname{ctg}7{,}5°=\dfrac{\cos 7{,}5°}{\sin 7{,}5°}=\dfrac{2\cos 7{,}5°\cos 7{,}5°}{2\sin 7{,}5°\cos 7{,}5°}=\dfrac{1+\cos 15°}{\sin 15°}=$ $=\dfrac{1+\cos(45°-30°)}{\sin(45°-30°)}=\dfrac{\sqrt{3}+1+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$. Избавляясь от иррациональности в знаменателе, получим ответ.

19.10. Так как $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$, то $y=\dfrac{3}{4}\sin 2x$. Так как $-1\le\sin 2x\le 1$, то $-\dfrac{3}{4}\le y\le\dfrac{3}{4}$.

19.11. Обозначим $\sin x=t$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Тогда $y=t^2+t-3$. График этой квадратичной функции на промежутке $[-1;1]$ приведен на рисунке. Абсцисса вершины $t_{\text{вершины}}=\dfrac{-1}{2}$; $y_{\text{вершины}}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}-3=-3{,}25$, $y(-1)=-3$, $y(1)=-1$.



Значит, $y\in[-3{,}25;-1]$.

19.12. *Способ 1.* Преобразуем $y=\cos(-x+\pi)=\cos(x-\pi)$. С учетом 6.17 искомый график есть график функции $y=\cos x$, сдвинутый на π единиц вправо. Результат такого преобразования приведен на рисунке 1).

Способ 2. Используя формулы приведения, преобразуем $y=\cos(-x+\pi)==-\cos x$. Значит, искомый график получается отображением графика функции $y=\cos x$ относительно оси Ox.

19.13. Периодами функции $f(ax+b)$ являются числа вида $\dfrac{T}{a}n$, где $n\in\mathbf{Z}$, $n\ne 0$, где T — период функции $f(x)$. Поэтому искомые числа — это $\frac{2\pi}{\pi}n = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$. Из них промежутку $[-5;10]$ принадлежат числа $-4, -2, 2, 4, 6, 8, 10$.

19.14. Так как $\sin\frac{11\pi}{15} = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{15}\right) = \sin\frac{4\pi}{15}$;

$\cos\frac{13\pi}{30} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right) = \sin\frac{\pi}{15}$, то получаем $\cos\frac{\pi}{15}\cdot\sin\frac{4\pi}{15} +$

$+\cos\frac{4\pi}{15}\cdot\sin\frac{\pi}{15} = \sin\left(\frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{15}\right) = \sin\frac{5\pi}{15} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

19.15. $\frac{1 - 4\sin 70^\circ\cos 80^\circ}{2\cos 80^\circ} =$

$= \frac{1 - 2(\sin(70^\circ - 80^\circ) + \sin(70^\circ + 80^\circ))}{2\cos 80^\circ} = \frac{1 + 2\sin 10^\circ - 2\sin 150^\circ}{2\cos(90^\circ - 10^\circ)} =$

$= \frac{1 + 2\sin 10^\circ - 2\sin 30^\circ}{2\sin 10^\circ} = \frac{1 + 2\sin 10^\circ - 2\cdot\frac{1}{2}}{2\sin 10^\circ} = 1.$

19.16. Так как $\sin 27^\circ + \sin 33^\circ =$

$= 2\sin\frac{27^\circ + 33^\circ}{2}\cos\frac{33^\circ - 27^\circ}{2} = 2\sin 30^\circ\cos 3^\circ =$

$= 2\cdot\frac{1}{2}\cos 3^\circ = \cos 3^\circ$, то $\frac{\sin 27^\circ + \sin 33^\circ}{\cos 3^\circ} = \frac{\cos 3^\circ}{\cos 3^\circ} = 1.$

19.17. $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} =$

$= \frac{\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 10^\circ\cos 10^\circ} = \frac{\sin 30^\circ\cos 10^\circ - \cos 30^\circ\sin 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 10^\circ\cos 10^\circ} =$

$= \frac{\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ} = 4.$

19.18. Возведем обе части данного в условии равенства в куб: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^3\alpha + 3\sin^2\alpha\cos\alpha + 3\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^3\alpha = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^3\alpha + \cos^3\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^3\alpha + \cos^3\alpha = \frac{1}{8} - 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) =$

$= \frac{1}{8} - 3\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}.$

Чтобы найти, чему равно значение выражения $\sin\alpha\cos\alpha$, возведем обе части данного в условии равенства в квадрат: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{8}$. Значит,

$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = \frac{1}{8} - 3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{9}{16} = \frac{11}{16}.$

19.19. Искомое выражение — однородное относительно выражений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Аналогично 2.33 разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha \neq 0$ и получим $\frac{\operatorname{tg}\alpha - 2}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$.

Найдем теперь $\operatorname{tg}\alpha$, воспользовавшись данным в условии уравнением.

$\operatorname{tg}^2\alpha - 10\operatorname{tg}\alpha + 25 = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{tg}\alpha - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 5$. Найденное значение $\operatorname{tg}\alpha$ подставим в искомую дробь $\frac{\operatorname{tg}\alpha - 2}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$ и получим $\frac{5 - 2}{1 + 5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

19.20. По формулам приведения имеем

$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 10^\circ$. Преобразуем $\sin 20^\circ\sin 40^\circ =$

$= \frac{1}{2}(\cos(40^\circ - 20^\circ) - \cos(40^\circ + 20^\circ)) = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) =$

$= \frac{1}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ и, значит, $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 10^\circ =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ\left(\frac{1}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 10^\circ\cos 20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}(\cos(10^\circ + 20^\circ) + \cos(20^\circ - 10^\circ)) - \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ =$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}.$

19.21. По формулам универсальной тригонометрической подстановки $\sin 4\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$, $\cos 4\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, где $t = \operatorname{tg}\frac{4\alpha}{2}$. По условию $t = 2$. Значит, $\sin 4\alpha + 5\cos 4\alpha =$

$= \frac{2\cdot 2}{1 + 2^2} + 5\cdot\frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5} - 5\cdot\frac{3}{5} = \frac{4 - 15}{5} = -\frac{11}{5}.$

19.22. По определению

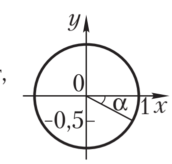
$\arcsin A$ — это угол $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, такой, что $\sin\alpha = A$;

$\arccos B$ — это угол $\alpha \in [0;\pi]$, такой, что $\cos\alpha = B$;

$\operatorname{arctg} C$ — это угол $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, такой, что $\operatorname{tg}\alpha = C$;

$\operatorname{arcctg} D$ — это угол $\alpha \in (0;\pi)$, такой, что $\operatorname{ctg}\alpha = D$.

Значит, $\arcsin(-0{,}5)$ — это угол $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, такой, что $\sin\alpha = -0{,}5$. Значит, $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ (см. рис.).



19.23. Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, то необходимо, зная $\cos x = -\frac{24}{25}$, найти $\sin x$. Используя основное тригонометрическое тождество, имеем: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x =$

$= 1 - \frac{24^2}{25^2} = \frac{25^2 - 24^2}{25^2} = \frac{49}{25^2} \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{7}{25}$. Так как x — угол III четверти, то $\sin x = -\frac{7}{25}$ и искомый

$\sin 2x = 2\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)\left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{336}{625}.$

19.24. Используя тригонометрическое тождество $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, получаем $\sin^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$. Так как $\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$, то $\sin^2\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{9}{10} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$. Так как α — угол III четверти, то $\sin\alpha < 0$, т. е. $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$.

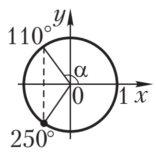
19.25. Учитывая 19.22, имеем $\arccos 1 = 0$, а значит, $\sin\left(\arcsin\frac{1}{4} + 0\right) = \sin\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$. Обозначим $\arcsin\frac{1}{4} = \alpha$. Итак, надо найти $\sin\alpha$, где угол $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, и про него известно, что $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Значит, ответ — это $\frac{1}{4}$.

19.26. Как и в 19.25, надо найти $\sin\alpha$, где дан угол $\alpha \in [0;\pi]$, такой, что $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$.

Аналогичные задачи рассмотрены в 19.23, 19.24. Находим $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$. Так как $\alpha\in[0;\pi]$, то $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

19.27. Аналогично 19.26 ищем $\sin 2\alpha$, где про угол $\alpha\in[0;\pi]$ известно, что $\cos\alpha = \frac{12}{13}$. Поступая как в 19.23, находим $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13} = \frac{120}{169}$.

19.28. Учитывая 19.22, ищем угол $\alpha = \arccos(\cos 250°)$, такой, что $\alpha\in[0;\pi]$ и $\cos\alpha = \cos 250°$. Отметив на единичной окружности угол 250° (см. рис.), находим $\alpha = 110°$.



19.29. Аналогично 19.28 ищем угол $\alpha\in[0;\pi]$, такой, что $\cos\alpha = \sin 1000°$. Отметив на единичной окружности точку, соответствующую углу поворота на 1000° (см. рис.), находим, что $\sin 1000° = \sin(-80°)$. По формулам приведения $\sin(-80°) = \cos(90° - (-80°)) = \cos 170°$.

Значит, $\cos\alpha = \cos 170°$ и $\alpha = 170°$.

19.30. Так как $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta} = \frac{1}{2}$,

то $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{6-1}{2+3} = 1$.

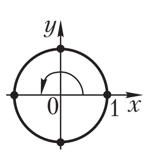
19.31. Как и в 19.30, б), надо вычислить $\sin(\alpha-\beta)$, где про углы $\alpha\in[0;\pi]$ и $\beta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ известно, что $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$. Значит, $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, откуда $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta = 1-\frac{25}{169} = \frac{144}{169}$, откуда $\cos\beta = \frac{12}{13}$ и искомый $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{48-15}{65} = \frac{33}{65}$.

20.1. $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \pi n,\ n\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$.

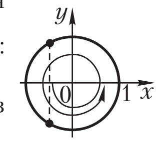
Чтобы из полученных значений x отобрать корни, принадлежащие заданному в условии промежутку, можно поступать двумя способами: либо выписывать условия на n, либо отметить полученные углы на единичной окружности и затем выписать те из них, которые необходимы. Приведем оба способа.

Способ 1. Так как $x\in[0;\pi]$, то $0\le\frac{\pi n}{2}\le\pi \Leftrightarrow 0\le\frac{n}{2}\le 1 \Leftrightarrow 0\le n\le 2$. Значит, искомые корни — это $x_1 = \frac{\pi\cdot 0}{2} = 0$; $x_2 = \frac{\pi\cdot 1}{2} = \frac{\pi}{2}$; $x_3 = \frac{\pi\cdot 2}{2} = \pi$, а их среднее арифметическое — это $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{1}{3}\cdot\left(0+\frac{\pi}{2}+\pi\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Способ 2. Отметив корни $x = \frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$ на единичной окружности (соответствующие точки расположены так, как указано на рисунке), выписываем те из них, которые принадлежат промежутку $[0;\pi]$. На нем расположены следующие корни: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$. Их среднее арифметическое равно $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{\pi}{2}$.



20.2. В правой части уравнения находится число. Оно равно $-\frac{1}{2}$. Решаем уравнение: $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), выписываем те из них, которые принадлежат промежутку $[-\pi;2\pi]$: $x_1 = \frac{-2\pi}{3}$; $x_2 = \frac{2\pi}{3}$; $x_3 = \frac{4\pi}{3}$. Их сумма равна $\frac{4\pi}{3}$.



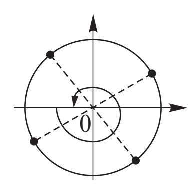
20.3. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-7x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}-7x = \pi n,\ n\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7x = \frac{\pi}{3}-\pi n,\ n\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{21}-\frac{\pi n}{7},\ n\in\mathbf{Z}$. Обозначать все эти корни на единичной окружности нет необходимости, так как в ответе надо указать только их количество. То есть надо найти, при скольких значениях $n\in\mathbf{Z}$ верно неравенство $-\pi\le x\le\pi \Leftrightarrow -\pi\le\frac{\pi}{21}-\frac{\pi n}{7}\le\pi \Leftrightarrow -21\le 1-3n\le 21 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -22\le -3n\le 20 \Leftrightarrow \frac{22}{3}\ge n\ge -\frac{20}{3}$, откуда $n\in\{-6;-5;...6;7\}$ — 14 различных значений (7 положительных, 6 отрицательных и ноль).

20.4. В правой части уравнения находится число. Значение $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\approx 2{,}4$, но для записи ответа это неважно. По формуле приведения $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$, и теперь легко записать решения простейшего тригонометрического уравнения $\operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$: $2x = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$. Обозначив их на единичной окружности, выписываем те, которые принадлежат заданному промежутку:



$\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{16}\right)+\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16}\right)+\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{16}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

20.5. Если $\sin x>0$, то $\frac{\sin x}{\sin x} = x \Leftrightarrow x = 1$. Проверим, что $\sin 1>0$. Так как $1\in[0;\pi]$ (напомним, что число $\pi\approx 3{,}14$), а на этом промежутке $\sin x>0$, то найденный $x = 1$ — корень уравнения.

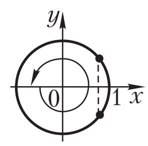
Если $\sin x<0$, то $\frac{\sin x}{-\sin x} = x \Leftrightarrow x = -1$. Так как $-1\in[-\pi;0]$, а при $x\in[-\pi;0]$ верно, что $\sin x<0$, то $x = -1$ — также корень уравнения.

Обратите внимание, что в похожем на уже решенную задачу уравнении $\frac{\cos x}{|\cos x|} = x$ число $x = -1$ не является корнем.

20.6. Вынесем общий множитель за скобки: $\sin 0{,}2x\left(2\sin 0{,}2x-\sqrt{3}\right) = 0$, откуда $\sin 0{,}2x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x = 180°n$, $x = 900°n,\ n\in\mathbf{Z}$ или $\sin 0{,}2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{5}x = 90°\pm 30°+360°m$, $x = 450°\pm 150°+1800°m,\ m\in\mathbf{Z}$. Ни при каком $n\in\mathbf{Z}$ корни не попадут в заданный по условию интервал. При $m = 0$ также корни вне интервала. А при $m = 1$, $x = 450° + 150° - 1800° = -1200°$ и $x = 450° - 150° - 1800° = -1500°$.

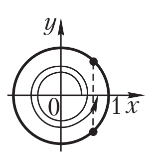
20.7. Уравнение $f(x) = a$ имеет корни, если a принадлежит множеству значений функции $f(x)$. Так как в данной задаче $\sin x \in [-1;1]$, то уравнение имеет корни при $-1 \le \frac{a}{2} \le 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2 \le a \le 2$.

20.8. Аналогично 4.9 либо $\sqrt{\sin x} = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$, либо $\begin{cases} 2\cos x - \sqrt{3} = 0, \\ \sin x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \ge 0. \end{cases}$ Отметим корни уравнения на единичной окружности (см. рис.). Из двух серий корней $\left(x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}\right)$ только первая удовлетворяет ограничению $\sin x \ge 0$, а точки второй не входят в ОДЗ переменной. Промежутку $[-\pi;\pi)$ принадлежат корни: $-\pi$; 0; $\frac{\pi}{6}$. Их сумма равна $-\frac{5\pi}{6}$.

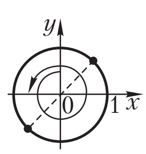


20.9. $\begin{cases} 2\cos x = \sqrt{2}, \\ 2\sin x \ne \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x \ne \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ \sin x \ne \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Решения системы отмечены на единичной окружности (см. рис.), но точки только одной из двух серий, а именно $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi, n \in \mathbf{Z}$, удовлетворяют условию $\sin x \ne \frac{\sqrt{2}}{2}$ и являются корнями. Промежутку $[-2\pi;2\pi]$ принадлежат корни: $-\frac{\pi}{4}$; $2\pi - \frac{\pi}{4}$. Их сумма равна $-\frac{\pi}{4} + 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$.



20.10. Используя формулы приведения, получаем $\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathrm{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), выписываем те из них, которые принадлежат промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$: $-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$. Их среднее арифметическое равно $\left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) : 2 = -\frac{\pi}{4}$.



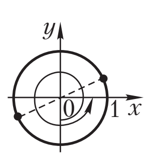
20.11. По формулам сложения

$\cos x \cos\frac{2\pi}{3} - \sin x \sin\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), выписываем те из них, которые принадлежат промежутку $[-\pi;2\pi]$: $-\pi + \frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\pi + \frac{\pi}{6}$. Их сумма равна $\frac{\pi}{2}$.

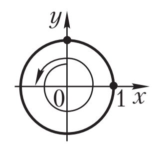


20.12. $\left(\mathrm{tg}\sqrt{x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\sqrt{x} = \pm 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in \mathbf{N_0} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = \left(\frac{\pi + 2\pi n}{4}\right)^2, n \in \mathbf{N_0}$.

20.13. $\sin x + \cos x - 1 - \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin x \cos x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x(1 - \cos x) + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ x = 2\pi m, m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$

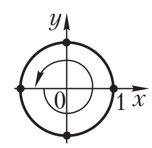
Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), выписываем те из них, которые принадлежат заданному промежутку, и находим их сумму: $-2\pi + \left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 0 + \frac{\pi}{2} = -3\pi$.



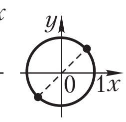
20.14. $\mathrm{tg}\,2x(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\,2x(\sin x \cdot \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,2x = 0, \\ \sin^2 x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

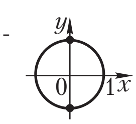
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$. Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), выписываем те из них, которые принадлежат заданному промежутку: $-\pi$; $-\frac{\pi}{2}$; 0; $\frac{\pi}{2}$; π. Количество корней равно пяти.



20.15. Если $\sin x \ge 0$, то $\sin x + \sin x = 2\cos x \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathrm{tg}\,x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Из найденных x только $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ удовлетворяют условию $\sin x \ge 0$ (см. рис.).



Если $\sin x \le 0$, то $-\sin x + \sin x = 2\cos x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 = 2\cos x \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Ограничению $\sin x \le 0$ удовлетворяют лишь $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ (см. рис.).



Отметив корни на единичной окружности, выписываем те из них, которые принадлежат заданному промежутку, и находим их сумму: $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$.

20.16. $(\cos 3x - \cos x)(\cos 3x + \cos x) = \sin^2 2x \Leftrightarrow$

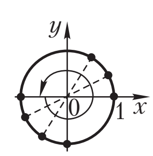
$\Leftrightarrow -2\sin\frac{3x + x}{2}\sin\frac{3x - x}{2} \cdot 2\cos\frac{3x + x}{2}\cos\frac{3x - x}{2} = \sin^2 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4\sin 2x \cdot \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos x - \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 2x(2\sin 2x \cdot \cos 2x + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow$

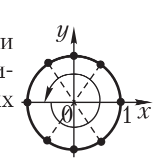
$\Leftrightarrow \sin^2 2x(2\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi n, \\ 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{array}\right. n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$

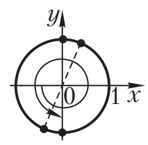


$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{2}, \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \end{array}\right. n \in \mathbf{Z}.$

Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), выписываем те из них, которые принадлежат заданному промежутку, и находим их сумму: $-\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 0 + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} + \pi = 0$.



20.17. $2\sin x\cos x-4\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=4\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-8\cos^2 x=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos x(\sin x-4\cos x)=0\Leftrightarrow$



$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=4\cos x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbf{Z},\\ \operatorname{tg}x=4.\end{array}\right.$$

Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), определяем, что на промежутке $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ их шесть.

20.18. Можно применить формулу универсальной тригонометрической подстановки: $\cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, а можно поступить аналогично 20.17, воспользовавшись методом разложения на множители:

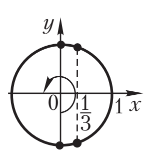
$$1-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\frac{\sqrt{3}\sin x}{2\cos x}\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\frac{\sqrt{3}\sin x}{2\cos x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\frac{4\sin x\cos x-\sqrt{3}}{2\cos x}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ 2\sin 2x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ 2x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}\\ 2x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.\\ x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\end{array}\right.$$

Отметив корни на единичной окружности, выписываем те из них, которые принадлежат заданному промежутку, и находим их сумму: $-\pi+\left(-\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\left(-\pi+\frac{\pi}{3}\right)+0+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\pi=$
$=-2\pi+2\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{3}=-2\pi+\frac{3\pi}{3}=-\pi.$

20.19. $\cos^2 x+5\cos x=2\sin^2 x\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos^2 x+5\cos x=2\left(1-\cos^2 x\right).$

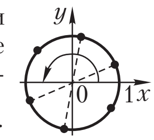


Пусть $\cos x=t$, тогда $t^2+5t=2-2t^2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3t^2+5t-2=0,\ D=25+4\cdot 2\cdot 3=49,$
$t_1=\frac{-5-7}{6}=-2,\ t_2=\frac{-5+7}{6}=\frac{1}{3}$. Возвращаясь к переменной x, решаем два уравнения: $\cos x=-2\Leftrightarrow x\in\varnothing$ и $\cos x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), определяем, что на заданном промежутке их два.

20.20. Используя формулы приведения и формулы понижения степени, имеем $\sin 4x+1=2\cos^2 x\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin 4x+1=1+\cos 2x\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x=\cos 2x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin 2x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0,\\ \sin 2x=0{,}5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ 2x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ 2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\end{array}\right.$$

$$n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\\ x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.\\ x=\frac{5\pi}{12}+\pi n,\end{array}\right.$$



Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), выписываем те из них, которые принадлежат заданному промежутку, и находим их сумму: $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{12}+\frac{3\pi}{4}=\frac{6\pi}{12}+\frac{4\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}.$

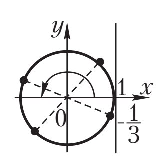
20.21. Пусть $\sin^2\frac{x}{5}=t$, тогда $\cos^4\frac{x}{5}=\left(\cos^2\frac{x}{5}\right)^2=$
$=\left(1-\sin^2\frac{x}{5}\right)^2=(1-t)^2$, и исходное уравнение можно записать следующим образом: $(1-t)^2+t=1\Leftrightarrow 1+t^2-2t+t-1=$
$=0\Leftrightarrow t(t-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0,\\ t=1.\end{array}\right.$ Возвращаясь к переменной x, решаем два уравнения: $\sin^2\frac{x}{5}=0$ и $\sin^2\frac{x}{5}=1$. Из первого уравнения находим $\frac{x}{5}=\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow x=5\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Решая второе уравнение, находим $\sin\frac{x}{5}=\pm 1\Leftrightarrow\frac{x}{5}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{2}+5\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

Из найденных x рассматриваемому промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ принадлежит лишь $x=0$.

20.22. Имеем однородное уравнение 1-го порядка. Решаем его делением обеих частей уравнения на $\cos 3x\neq 0$ (так как значения x, при которых $\cos 3x=0$, не являются корнями исходного уравнения): $2\frac{\sin 3x}{\cos 3x}+3=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}3x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x=\operatorname{arctg}(-1{,}5)+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\operatorname{arctg}(-1{,}5)+\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}.$

Отметив корни на единичной окружности, находим, что заданному промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$ принадлежат 5 корней.

20.23. Дано однородное уравнение 2-го порядка. Оно решается делением обеих частей на $\cos^2 x\neq 0$ (значения x, при которых $\cos^2 x=0$, не являются корнями исходного уравнения): $3\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x-1=0$. Пусть $\operatorname{tg}x=t$, тогда $3t^2-2t-1=0,\ t_1=1,\ t_2=-\frac{1}{3}$, т. е. $\operatorname{tg}x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$ либо $\operatorname{tg}x=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Отметив корни

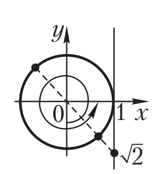


на единичной окружности (см. рис.), находим, что на промежутке $(0;\pi)$ меньший корень $x_1=\frac{\pi}{4}$, а тангенс большего угла x_2 равен $-\frac{1}{3}$. Значит, $A=\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{\pi}{12}.$

20.24. Это уравнение можно рассмотреть как однородное 2-го порядка и решать аналогично 20.23:

$$\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x\sin x+\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}\operatorname{tg}x+1+\operatorname{tg}^2 x=0$. Пусть $\operatorname{tg}x=t$, тогда

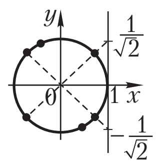


$1+2\sqrt{2}t+1+t^2=0\Leftrightarrow t^2+2\sqrt{2}t+2=0,\ D=0,$
$t=-\sqrt{2}$. Значит, $\operatorname{tg}x=-\sqrt{2}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), определяем, что на заданном промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ расположены 3 корня.

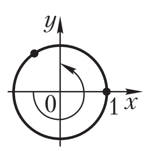
20.25. Это однородное уравнение третьего порядка решается делением обеих частей уравнения на $\cos^3 x \neq 0$ (значения x, при которых $\cos^3 x = 0$, не являются корнями исходного уравнения): $2\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg} x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x + 1) - (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + 1)\left(2\operatorname{tg}^2 x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \pm\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \pi n, \end{array}\right. n \in \mathbf{Z}.$$

Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), определяем, что на заданном промежутке $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$ расположены 4 корня.



20.26. Воспользуемся формулами универсальной тригонометрической подстановки (при $\dfrac{x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, а эти значения проверим непосредственной подстановкой в исходное уравнение и убедимся, что они не являются решениями): $3 \cdot \dfrac{2t}{1+t^2} = 2\left(1 - \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$, где $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Далее $\dfrac{6t}{1+t^2} - 2\dfrac{1+t^2-1+t^2}{1+t^2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{6t-4t^2}{1+t^2} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 1{,}5. \end{array}\right.$ Возвращаясь к переменной x, решаем два уравнения: $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 0$ и $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 1{,}5$. Из первого уравнения находим $\dfrac{x}{2} = \pi n$, $n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, а решая второе — получим $\dfrac{x}{2} = \operatorname{arctg} 1{,}5 = \pi n$, $n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg} 1{,}5 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), определяем, что на заданном промежутке $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$ расположен 1 корень.

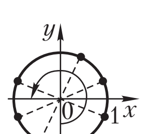


20.27. Подобные уравнения можно решать различными способами: возведением обеих частей уравнения в квадрат, использованием универсальной тригонометрической подстановки, методом вспомогательного аргумента. Воспользуемся последним из перечисленных методов: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{4}\sin x + \sin\dfrac{\pi}{4}\cos x = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$ принадлежит лишь $x = \dfrac{\pi}{4}$.

20.28. Аналогично 20.27 $\cos 3x = \cos\dfrac{\pi}{6}\cos x - \sin\dfrac{\pi}{6}\sin x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \dfrac{\pi}{6} + x + 2\pi n, \\ 3x = -\dfrac{\pi}{6} - x + 2\pi n, \end{array}\right. n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \pi n, \\ x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi n}{2}, \end{array}\right. n \in \mathbf{Z}$. Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), определяем, что на заданном промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$ расположено 4 корня.



20.29. Аналогично 19.18 обозначим $\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} = t$. Тогда $t^2 = \sin^2\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{x}{2} - 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 1 - \sin x$. Значит, исходное уравнение можно записать в виде $t = t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 0, \end{array}\right.$ т. е. оно равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} = 1, \\ \sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} = 0. \end{array}\right.$ Аналогично 20.27: $\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \end{array}\right. n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 4\pi n, \\ x = 2\pi + 4\pi n, \end{array}\right. n \in \mathbf{Z}.$$

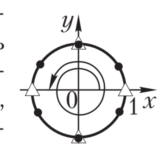
Аналогично 20.22: $\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Промежутку $[0; \pi]$ принадлежат $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $x = \pi$, а искомая сумма равна $\dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{3\pi}{2}$.

20.30. ОДЗ переменной — все $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. При этом ограничении $\sin x = \sin 5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5x + 2\pi n, \\ x = \pi - 5x + 2\pi n, \end{array}\right. n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{2}, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, \end{array}\right. n \in \mathbf{Z}.$$

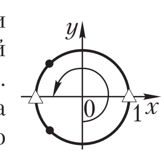
Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), видим, что, во-первых, часть решений первой серии (они отмечены треугольниками) не входит в ОДЗ переменной, а во-вторых, остальные решения первой серии включены во вторую. Поэтому в промежутке $[-2\pi; \pi]$ лежит 9 корней.



20.31. Преобразуем разность синусов:
$\sin x - \sin 3x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow -2\cos 2x \cdot \sin x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\sin x(-\cos 2x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\left(-2\sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{-x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ \dfrac{3x}{2} = \pi m, \\ \dfrac{x}{2} = \pi k, \end{array}\right. n, m, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ x = \dfrac{2\pi m}{3}, \\ x = 2\pi k, \end{array}\right. n, m, k \in \mathbf{Z}.$$

Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), видим, что 3-я серия решений $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ включается и в 1-ю, и во 2-ю. Кроме того, часть решений 1-й серии (она отмечена треугольниками) содержится во 2-й. Поэтому искомая сумма — это $0 + \dfrac{2\pi}{3} + \pi = \dfrac{5\pi}{3}$.



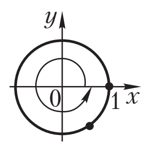
20.32. Преобразуем сумму синусов:

$\sin(x+1) = 2\sin\dfrac{x+1}{2}\cos\dfrac{x-1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x+1}{2}\cos\frac{x+1}{2}=\sin\frac{x+1}{2}\cos\frac{x-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{x+1}{2}=0,\\ \cos\frac{x+1}{2}=\cos\frac{x-1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x+1}{2}=\pi n,\\ \frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{2}+2\pi n,\\ \frac{x+1}{2}=-\frac{x-1}{2}+2\pi n,\end{array}\right. \quad n\in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

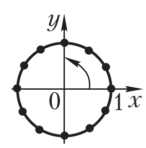
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+2\pi n,\\ x\in\varnothing,\\ x=2\pi n,\end{array}\right. \quad n\in \mathbf{Z}$. Учитывая, что угол в 1 радиан равен $\frac{180°}{\pi}\approx 57°$, отмечаем корни на единичной окружности (см. рис.), выписываем те три из них, которые принадлежат промежутку $[0;2\pi]$: 0; $2\pi-1$; 2π.



20.33. Преобразуем произведение косинусов в сумму:

$$\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 10x)=\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 10x) \Leftrightarrow \cos 8x=\cos 4x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8x=4x+2\pi n,\\ 8x=-4x+2\pi n,\end{array}\right. \quad n\in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi n}{2},\\ x=\frac{\pi n}{6},\end{array}\right. \quad n\in \mathbf{Z}$. Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), выписываем три корня $0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}$, которые принадлежат заданному промежутку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.



20.34. Аналогично 20.33:

$$\cos^2\left(x-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)\Leftrightarrow$$

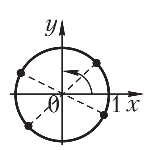
$\Leftrightarrow \cos^2\left(x-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. Используем формулу понижения степени: $\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(2x-\frac{7\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}-\pi\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, \quad n\in \mathbf{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\\ 2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\end{array}\right. \quad n\in \mathbf{Z}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\\ x=-\frac{\pi}{12}+\pi n,\end{array}\right. \quad n\in \mathbf{Z}$. Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), находим, что только $x=\frac{\pi}{4}$ принадлежит заданному промежутку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.



20.35. Вычислим

$$y'(x)=\left(4x-\sin 2x+4\sqrt{2}\cos x\right)'=4-2\cos 2x-4\sqrt{2}\sin x.$$

Решим уравнение $4-2\cos 2x-4\sqrt{2}\sin x=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2-\cos 2x-2\sqrt{2}\sin x=0\Leftrightarrow 2-\left(1-2\sin^2 x\right)-2\sqrt{2}\sin x=0\Leftrightarrow$$

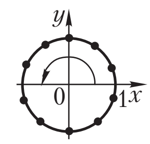
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\sin x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

20.36. Используем формулу понижения степени:

$$\frac{1}{2}(1+\cos 4x)+\frac{1}{2}(1+\cos 6x)=1\Leftrightarrow \cos 4x+\cos 6x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{4x+6x}{2}\cos\frac{4x-6x}{2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 5x=0,\\ \cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

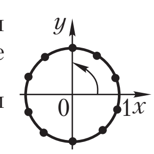
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\end{array}\right. \quad n\in \mathbf{Z}$. Обозначив корни на единичной окружности (см. рис.), определяем, что на заданном промежутке $(0;\pi)$ расположено 5 корней.



20.37. Аналогично 20.35: $\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{3-\cos 6x}{4} \quad\Leftrightarrow\quad 1+\cos^2 2x-2\cos 2x+1+\cos^2 2x+2\cos 2x=3-\cos 6x\Leftrightarrow 2\cos^2 2x=1-\cos 6x$. Можно воспользоваться формулой тройного аргумента и свести уравнение к $2\cos^2 2x=1-(4\cos^3 2x-3\cos 2x)$. Но проще еще раз использовать формулу понижения степени:
$1+\cos 4x=1-\cos 6x\Leftrightarrow \cos 6x+\cos 4x=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\cos 5x\cos x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\end{array}\right. \quad n\in \mathbf{Z}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\end{array}\right. \quad n\in \mathbf{Z}.$$

Отметив корни на единичной окружности (см. рис.), выписываем те из них, которые принадлежат промежутку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, и находим их сумму: $\frac{\pi}{10}+\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}\right)+\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi}{10}$.



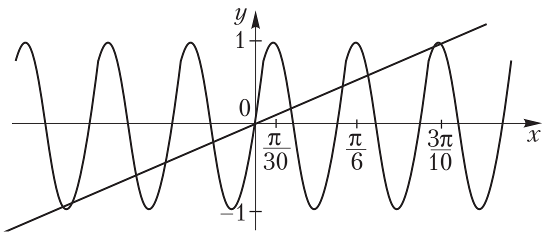
20.38. Преобразуем уравнение и оценим левую и правую его части: $\sin^4 x+\cos^3 x=\sin^2 x+\cos^2 x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(\sin^2 x-1\right)=\cos^2 x\left(1-\cos x\right).$$

Левая часть принимает только неположительные значения, а правая — неотрицательные, так как $\sin x\le 1$, $\cos x\le 1$. Значит, равенство возможно, только если $\begin{cases}\sin^2 x=1\\ \cos^2 x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$, либо $\begin{cases}\sin^2 x=0,\\ \cos x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. Множеству $[-\pi;2\pi]$ принадлежат корни $-\frac{\pi}{2}$; 0; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 2π, а их сумма равна $\frac{7\pi}{2}$.

20.39. Так как $2x(2-x)-3=-2x^2+4x-3$ принимает значения меньше либо равное -1 (см. 5.4, 5.5), а $\cos(\pi x)$ не может быть меньше -1, то равенство возможно, только если одновременно $\cos(\pi x)=-1$, $-2x^2+4x-3=-1$. Из второго уравнения находим $2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=1$. Подставляя это значение x в уравнение $\cos(\pi x)=-1$, убеждаемся, что действительно $x=1$ — корень уравнения.

20.40. Используем графический метод: построим в системе координат графики функций $y = \sin 15x$ и $y = x$ и найдем количество точек пересечения. Обе функции нечетные, пересекаются в точке $(0; 0)$, и их графики симметричны относительно начала координат.



При $15x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\ldots$ синус равен единице. И при $15x = \frac{9\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{10} < \frac{9{,}45}{10} < 1$. При положительных x имеем 5 точек пересечения, столько же при отрицательных (в силу симметрии) и не забываем про 0. Итого, 11 корней.

21.1. Пусть один из углов равен α, тогда второй — 3α. Смежные углы составляют развернутый угол, поэтому $\alpha + 3\alpha = 180°$, откуда $\alpha = 45°$.

21.2. Углы $\angle 1$ и $\angle 3$ — вертикальные. Значит, $\angle 1 = \angle 3$ и $2 \cdot \angle 1 = 50°$, откуда $\angle 1 = 25°$. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Значит, $\angle 2 = \angle 4 = 155°$.

21.3. По признаку параллельности прямых прямые a и c параллельны.

21.4. Из условия задачи следует только то, что $\alpha = \beta$, но их сумму определить невозможно.

21.5. По обобщенной теореме Фалеса $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$, откуда $B_2C_2 = \frac{B_1C_1 \cdot A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{63 \cdot 56}{49} = 72.$

21.6. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, с ним не смежных. Значит, $\alpha + 60° = \alpha + 3\alpha$, откуда $\alpha = 20°$. Внутренний угол треугольника при вершине B — это угол, смежный с углом 80°. Значит, его градусная мера — 100°.

21.7. $\Delta ADB = \Delta CBD$ по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle DCB = \angle BAD = 120°$.

21.8. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, значит, $\angle A = \angle C$. Тогда $2\angle A = 180° - 30° = 150°$, откуда $\angle BAC = \angle BCA = 75°$.

21.9. Пусть $AC = x$ см, тогда $AB = BC = 8x$ см, и $x + 2x + 2x = 20$, откуда $x = 4$. Значит, $AC = 4$ см; $AB = BC = 8$ см.

21.10. Обозначим стороны треугольника $3x$, $7x$ и $8x$, тогда $3x + 7x + 8x = 54$ (см), откуда $x = 3$ см. Наибольшая сторона $8x = 24$ (см).

21.11. В равностороннем треугольнике градусная мера каждого угла равна 60°. Тогда $\alpha = \beta = 120°$, так как углы α и β смежные с углом 60°. Значит, $\alpha + \beta = 240°$.

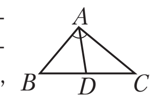
21.12. По свойству средней линии треугольника $MK = \frac{1}{2}AC = 6$. Периметр четырехугольника $AMKC$ равен $12 + 4 + 5 + 6 = 27$ (см).

21.13. По формуле $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ длины медианы имеем: $m = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 4^2 - 4^2} = \sqrt{22}.$

21.14. Пусть $AD = x$ см, тогда $DC = (21 - x)$см. Используя теорему Пифагора для треугольника ADB, получаем $BD^2 = 13^2 - x^2$, а для треугольника CDB имеем $BD^2 = 20^2 - (21 - x)^2$. Значит, $13^2 - x^2 = 20^2 - (21 - x)^2$, откуда $x = 5$.

21.15. В равностороннем треугольнике градусная мера каждого угла 60°. $\angle OBC = 30°$; $\angle OCB = 30°$. Значит, $\angle BOC = 120°$.

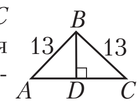
21.16. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Значит, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, откуда $AB = \frac{BD \cdot AC}{DC} = 10{,}8$ (м).



21.17. Острые углы прямоугольного треугольника равны. Значит, равны катеты треугольника. По теореме Пифагора квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов, то есть гипотенуза равна $3\sqrt{2}$ см.

21.18. $BC = \frac{AB}{\cos\angle B} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$ (см). $AC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (см).

21.19. В равнобедренном треугольнике ABC высота BD, проведенная к основанию, является медианой. Значит, $AD = DC = 12$ см. Для треугольника ABD по теореме Пифагора $AB^2 = AD^2 + BD^2$, или $13^2 = 12^2 + BD^2$, откуда $BD = 5$ см.



21.20. Обозначим длины катетов $5x$ см и $12x$ см. По теореме Пифагора $26^2 = (5x)^2 + (12x)^2$, откуда $x = 2$, а длина большего катета треугольника равна $12x = 24$ (см).

21.21. По теореме синусов для треугольника ABC имеем: $\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A}$, откуда $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = \frac{BC}{1/2} \Leftrightarrow BC = 8$ см.

21.22. По теореме косинусов для треугольника ABC имеем: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$, откуда

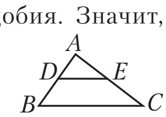
$AC^2 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AC = 1$ см.

21.23. Отношения длин сходственных сторон подобных треугольников равны. Значит, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, откуда $\frac{6}{18} = \frac{8}{B_1C_1} \Leftrightarrow B_1C_1 = 24$ см.

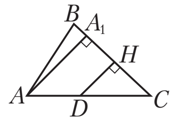
21.24. $\angle ABD$ и $\angle BDE$ являются внутренними, накрест лежащими, образованными при пересечении параллельных прямых AB и DE и секущей BD. Значит, $\angle ABC = \angle CDE$. $\angle BCA = \angle DCE$, так как эти углы — вертикальные. Треугольники ABC и EDC подобны по двум углам. Значит, $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD}$, откуда $\frac{AB}{\frac{1}{3}AB} = \frac{BC}{2} \Leftrightarrow BC = 6$ см.

$BD = BC + CD = 8$ см.

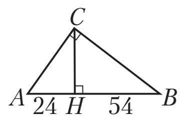
21.25. Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него подобный треугольник. Коэффициент подобия равен $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Значит, $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, откуда $S_{\Delta ABC} = 8$ см^2.



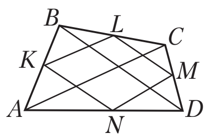
21.26. Пусть AA_1 — высота треугольника ABC. Треугольники AA_1C и DHC подобны (прямоугольные треугольники с общим острым углом). Значит, $\frac{AA_1}{DH}=\frac{AC}{DC}$, откуда $\frac{AA_1}{4}=\frac{6+8}{8} \Leftrightarrow AA_1=7$.



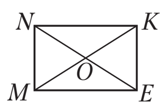
21.27. В прямоугольном треугольнике ABC высота CH, проведенная к гипотенузе, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу, то есть $CH^2=AH\cdot HB$, откуда $CH^2=24\cdot 54 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow CH=36$. Используя теорему Пифагора для треугольников AHC и BHC, получим $AC=12\sqrt{13}$; $BC=18\sqrt{13}$.



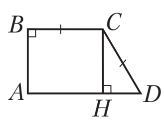
21.28. В треугольнике ABC отрезок KL — средняя линия. Значит, $KL\parallel AC$ и $KL=\frac{1}{2}AC$. Аналогично в треугольнике ADC отрезок MN — средняя линия. Значит, $MN\parallel AC$ и $MN=\frac{1}{2}AC$. Получили: $KL\parallel MN$ и $KL=MN$. Значит, по признаку параллелограмма четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.



21.29. Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам. Значит, $OE=OM=\frac{1}{2}MK=9$ см. Тогда периметр треугольника MOE равен $10+9+9=28$ (см).



21.30. Противолежащие углы параллелограмма равны. Значит, данные по условию углы — прилежащие к одной стороне. Обозначим их 8α и 7α и запишем $8\alpha+7\alpha=180°$, откуда $\alpha=12°$. Тогда больший угол параллелограмма равен $8\alpha=96°$.



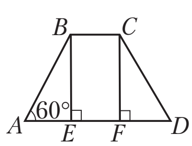
21.31. Так как диагонали ромба делят углы ромба пополам, то $\angle ABC=130°$. Тогда $\angle BAD=180°-130°=50°$.

21.32. Проведем CH — высоту трапеции. $CH=AB=8$, $BC=AH=10$. По теореме Пифагора для треугольника CHD имеем $CD^2=CH^2+HD^2$, т. е. $10^2=8^2+HD^2$, откуда $HD=6$. Периметр трапеции $ABCD$ равен $8+10+10+6+10=44$.

21.33. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Значит, по теореме Виета сумма корней уравнения равна 20, а полусумма равна 10.

21.34. В трапеции сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180°. Значит, $\angle A=65°$. В равнобедренной трапеции углы при основании равны, следовательно, $\angle D=65°$, $\angle C=115°$.

21.35. В трапеции $ABCD$ ($BC<AD$) проведем две высоты — BE и CF. $EF=BC=5$, $AE=FD=\frac{AD-BC}{2}=\frac{21-5}{2}=8$. В прямоугольном треугольнике AEB катет AE лежит против угла в 30°, значит, $AB=16$. Периметр трапеции равен $21+16+5+16=58$.



21.36. В прямоугольной трапеции два угла по 90°, а тупой и острый углы прилежат к боковой стороне, не перпендикулярной основаниям. Обозначим эти углы α и 4α. Тогда $\alpha+4\alpha=180°$, откуда $\alpha=36°$, $4\alpha=144°$.

21.37. Проведем в пятиугольнике две диагонали из одной вершины. Они разобьют пятиугольник на три треугольника. Значит, сумма внутренних углов пятиугольника равна $180°\cdot 3=540°$. Так как пятиугольник правильный, то все его углы равны между собой и равны $\frac{540°}{5}=108°$.

21.38. Садовый участок представляет собой прямоугольник 50×30 без прямоугольника 30×10. Значит, площадь садового участка равна $50\cdot 30-30\cdot 10=1200$ (м²).

21.39. Пусть сторона квадрата равна a. Тогда $4a=24\sqrt{2}$, откуда $a=6\sqrt{2}$. Тогда площадь квадрата равна $a^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2=72$.

21.40. По формуле площади параллелограмма $S=a\cdot h_a=12\cdot 8=96$ (см²).

21.41. По формуле площади ромба $S=\frac{1}{2}d_1d_2$ имеем: $S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 36=180$ (см²).

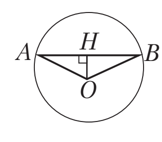
21.42. Высота h параллелограмма $ABCD$, проведенная к стороне AD, равна высоте треугольника AED, проведенной к стороне AD. Тогда $\frac{S_{AED}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot h}{AD\cdot h}=\frac{1}{2}$.

21.43. По формуле площади треугольника $S=\frac{1}{2}ah_a$ имеем: $S=\frac{1}{2}\cdot 22\cdot 15=165$ (м²).

21.44. Второй катет прямоугольного треугольника равен 20 см. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, т. е. $S=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20=150$ (см²).

21.45. Площадь трапеции с основаниями a, b и высотой h может быть вычислена по формуле $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$, где величина $\frac{a+b}{2}$ равна длине средней линии. Тогда $S=12\cdot 6=72$ (см²).

21.46. Пусть точка O — центр окружности, AB — данная хорда, OH — расстояние от центра окружности до данной хорды. Треугольник AOB — равнобедренный ($OA=OB=17$ см), значит, высота OH является медианой, и $AH=HB=15$ см. По теореме Пифагора для треугольника OHA имеем: $17^2=15^2+OH^2$, откуда $OH=8$ см.



21.47. По формуле длины окружности $L=2\pi R$. Если радиус окружности увеличится на 1 м, то длина новой окружности равна $L^*=2\pi(R+1)=2\pi R+2\pi$, то есть длина окружности увеличится на 2π м.

21.48. Сторона квадрата равна 6 см, значит, его площадь равна $6^2=36$ (см²). Площадь круга равна $\pi\cdot r^2=\pi\cdot 3^2=9\pi$ (см²). Площадь закрашенной на рисунке фигуры равна $(36-9\pi)$ см².

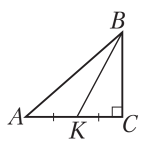
21.49. Уравнение окружности с центром в точке $(x_0;y_0)$ и радиусом r имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. В нашей задаче уравнение окружности имеет вид $(x+3)^2+(y-6)^2=25$.

21.50. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу окружности, проведенному в точку касания. Значит, треугольник AOB — прямоугольный, и по теореме Пифагора имеем: $OA^2=AB^2+BO^2$, или $17^2=15^2+OB^2$, откуда $OB=8$ см.

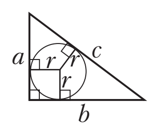
21.51. Величина вписанного в окружность угла равна половине величины дуги, на которую он опирается. Углы α и β — вписанные и опираются на одну дугу. Значит, $\beta=\alpha=50°$.

21.52. Центр описанной около треугольника окружности — это точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Для равностороннего треугольника это точка пересечения высот, биссектрис и медиан, а медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Высота равностороннего треугольника со стороной 15 см равна $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ см, а радиус описанной окружности равен $\frac{2}{3}$ высоты, т. е. $\frac{2}{3}\cdot\frac{15\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ (см).

21.53. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник, катеты $AC=4$ и $BC=3$, точка K — середина катета AC. Радиус окружности, проходящей через вершину прямого угла, середину большего катета и вершину большего острого угла, равен радиусу окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника BCK. Равен он половине гипотенузы BK. По теореме Пифагора для треугольника BCK имеем: $BK^2=CK^2+BC^2$, откуда $BK^2=3^2+2^2$ и $BK=\sqrt{13}$, а искомый радиус — $0{,}5\sqrt{13}$.



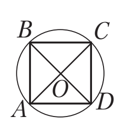
21.54. По теореме Пифагора вычислим длину гипотенузы данного прямоугольного треугольника: $c^2=15^2+8^2=289$, откуда $c=17$. По формуле радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, $r=\frac{a+b-c}{2}$ имеем: $r=\frac{15+8-17}{2}=3$. Расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной окружности — это диагональ квадрата со стороной 3. Она равна $3\sqrt{2}$.



21.55. По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$ имеем: $2R=\frac{10}{\sin 150°}=$ $=\frac{10}{\frac{1}{2}}=20$ (см), откуда $R=10$ см.

21.56. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противолежащих сторон равны. Длина боковой стороны трапеции равна 17 см. Значит, сумма оснований равна 34 см, а средняя линия — 17 см.

21.57. Радиус окружности равен половине диагонали данного квадрата. То есть диагональ равна $2R$. Следовательно, площадь квадрата равна $\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot 2R=2R^2$.



21.58. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны другой плоскости, то такие плоскости параллельны. Значит, плоскость α и плоскость трапеции параллельны.

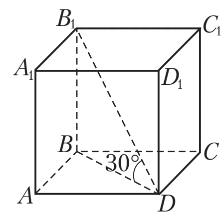
21.59. Диагональ куба с ребром 5 равна $\sqrt{5^2+5^2+5^2}=5\sqrt{3}$. Куб имеет четыре равных диагонали. Значит, сумма длин всех диагоналей куба с ребром 5 равна $20\sqrt{3}$.

21.60. Диагональ куба равна a. Значит, ребро куба равно $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Объем куба равен $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{a^3}{3\sqrt{3}}=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

21.61. Высота прямой призмы равна длине бокового ребра. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания призмы на длину бокового ребра. Искомая площадь равна $(8+22+8+22)\cdot 15=$ $=900$ (см^2).

21.62. В основании данной в условии призмы лежит равносторонний треугольник со стороной a. Его площадь равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Высота прямой призмы равна длине бокового ребра, то есть a. Объем призмы вычисляется по формуле $V=S_{осн.}\cdot H$. Имеем: $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

21.63. В основании правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$. Диагональ B_1D равна $12\sqrt{3}$ см и наклонена к плоскости основания под углом 30°, то есть $\angle B_1DB=30°$. Треугольник B_1DB — прямоугольный, поэтому $BB_1=\frac{1}{2}B_1D=$



$=12\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=6\sqrt{3}$ (см), и $BD=B_1D\cos 30°=12\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=18$ (см).

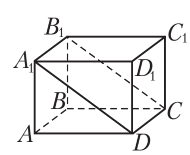
Сторона квадрата $ABCD$ с диагональю 18 см равна $\frac{18}{\sqrt{2}}$ см.

Тогда площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна произведению периметра основания призмы на длину бокового ребра, то есть $S=4\cdot\frac{18}{\sqrt{2}}\cdot 6\sqrt{3}=216\sqrt{6}$ (см^2).

21.64. Объем призмы вычисляется по формуле $V=S_{осн.}\cdot H$. В основании правильной четырехугольной призмы лежит квадрат. Имеем: $V=6^2\cdot 7=252$ (см^2).

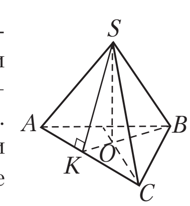
21.65. Медиана треугольника делит его на два треугольника, равных по площади. Плоскость, проходящая через боковое ребро треугольной призмы и медиану основания, делит эту призму на две призмы с равными площадями основания и равными высотами. Объемы этих призм равны, и отношение их объемов равно 1:1.

21.66. Площадь прямоугольника A_1B_1CD равна $CD\cdot DA_1=5\sqrt{24^2+10^2}=130$ см^2.



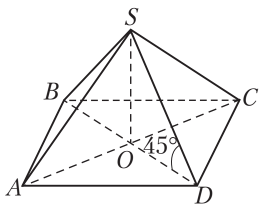
21.67. Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b и c вычисляется по формуле $V=abc$. В нашей задаче $V=15\cdot 50\cdot 36=27\ 000$ (м^3). Длину ребра a куба такого же объема найдем из уравнения $a^3=27\ 000$, откуда $a=30$ м.

21.68. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду $SABC$. Все боковые грани правильной треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники. Значит, площадь боковой поверхности пирамиды равна $3\cdot S_{\Delta ASC}$. Основание высоты пирамиды есть центр треугольника ABC — точка O. BK — медиана треугольника ABC, $OK=\frac{1}{3}BK=\frac{1}{3}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ (см). По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника SOK имеем: $SK^2=\left(\sqrt{22}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=25$, т. е. $SK=5$ см. Значит, площадь боковой поверхности пирамиды равна $3\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=45$ (см^2).



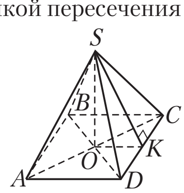
21.69. В основании правильной треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник. Объем пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H$. В данной задаче $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 9 = 27\sqrt{3}$ (см^3).

21.70. Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$. Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а основание высоты SO пирамиды совпадает с точкой пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, являющегося основанием. Значит, $OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{6}$. Тогда

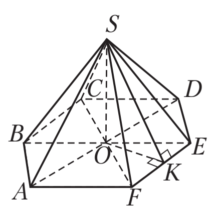


объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3}\left(6\sqrt{3}\right)^2 \cdot 3\sqrt{6} = 108\sqrt{6}$.

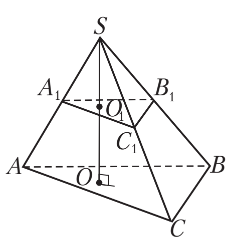
21.71. Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$. Все боковые грани правильной четырехугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники. Значит, площадь боковой поверхности пирамиды равна $4 \cdot S_{\Delta DSC}$. Апофема — это высота боковой грани правильной пирамиды. Пусть SK — высота треугольника CSD. Основание высоты SO пирамиды совпадает с точкой пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, являющегося основанием. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника SOK имеем: $SK^2 = SO^2 + OK^2$, т. е. $15^2 = 12^2 + OK^2$, откуда $OK = 9$ (см). Треугольник OKD — равнобедренный прямоугольный. Значит, $KD = OK = 9$ см и $CD = 18$ см. Площадь боковой поверхности пирамиды равна $4 \cdot S_{\Delta DSC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot CD \cdot SK = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 15 = 540$ (см^2).



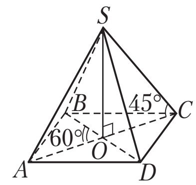
21.72. Рассмотрим правильную шестиугольную пирамиду $SABCDEF$. Все боковые грани правильной шестиугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники. Значит, площадь боковой поверхности пирамиды равна $6 \cdot S_{\Delta FSE} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 288$ (см^2).



21.73. Рассмотрим треугольную пирамиду $SABC$. Пусть точка O — основание высоты пирамиды, а секущая плоскость пересекает высоту в точке O_1, и $\frac{SO_1}{SO} = \frac{1}{3}$. Так как секущая плоскость проходит параллельно плоскости основания, то в сечении получается треугольник, подобный треугольнику, лежащему в основании пирамиды (коэффициент подобия $\frac{1}{3}$). Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, то есть площадь сечения равна $\frac{1}{9}$ площади основания. Площадь основания вычислим по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ (см^2). Площадь сечения равна $\frac{1}{9} \cdot 84 = \frac{28}{3}$ (см^2).



21.74. Рассмотрим четырехугольную пирамиду $SABCD$. Пусть основание высоты — точка O. Тогда треугольники SOA, SOB, SOC, SOD равны по катету и острому углу. Значит, $OA = OB = OC = OD$, то есть точка O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Площадь прямоугольника $ABCD$ можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot d_1^2 \cdot \sin 60°$, откуда $d_1 = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$. Тогда $OC = \frac{1}{2}d_1 = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$.

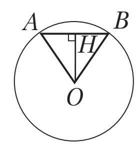


Треугольник SOC — равнобедренный прямоугольный. Значит, высота $SO = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{S}\sqrt[4]{27}}{3}$.

21.75. По формуле объема пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot H$ имеем: $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 10 \cdot 15 = 300$ (см^3).

21.76. Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники. По условию стороны прямоугольника, лежащего в основании, относятся как 27:15, то есть как 9:5. Значит, $2 \cdot (9x + 5x) = 56$, откуда $x = 2$ (см). Тогда стороны другого основания равны 18 см и 10 см.

21.77. Сечением цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, является прямоугольник, одна из сторон которого равна высоте цилиндра. Чтобы найти вторую сторону рассмотрим основание цилиндра. Пусть хорда AB — отрезок пересечения секущей плоскости и основания цилиндра. Тогда расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости есть отрезок перпендикуляра, проведенного из центра окружности к хорде, то есть $OH = 4$ см. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника OHA имеем: $OA^2 = OH^2 + AH^2$, т. е. $5^2 = 4^2 + AH^2$, откуда $AH = 3$ см, а $AB = 6$ см. Значит, площадь сечения равна $6 \cdot 8 = 48$ (см^2).



21.78. Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле $S_{\text{бок.}} = 2\pi R \cdot H$. В нашей задаче $S_{\text{бок.}} = 2\pi \cdot 4 \cdot 14 = 112\pi$ (см^2).

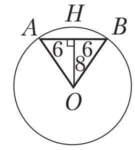
21.79. Объем цилиндра вычисляется по формуле $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$. В нашей задаче $V = \pi \cdot 7^2 \cdot 5 = 245\pi$ см^3.

21.80. В сечении конуса плоскостью, параллельной основанию и проходящей через середину высоты конуса, получается круг радиуса $\frac{R}{2}$, где R — радиус основания конуса. В нашей задаче сечение конуса — круг радиуса 7. Значит, площадь сечения равна 49π.

21.81. По формуле площади боковой поверхности конуса $S_{\text{бок.}} = \pi R l$, где R — радиус основания конуса, l — образующая. В нашей задаче $S_{\text{бок.}} = \pi R \cdot 3R = \pi \cdot 3 \cdot 9 = 27\pi$ (см^2).

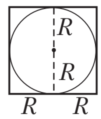
21.82. По формуле вычисления объема конуса имеем: $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H$, откуда $6\pi = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot 9 \Leftrightarrow S_{\text{осн.}} = 2\pi$ см^2.

21.83. Рассмотрим плоскость, проходящую через центр шара точку O и центр сечения точку H. Диаметр сечения — это хорда AB, расстояние от центра шара до плоскости сечения — отрезок OH, OA — радиус шара. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AHO имеем: $OA^2 = OH^2 + HA^2$, откуда $OA^2 = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow OA = 10$ см.



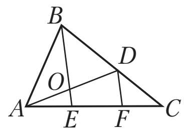
21.84. Пусть радиус первого шара равен R, а радиус второго — 1. Тогда $\frac{4}{3}\pi R^3 = 27 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3$. Откуда $R = 3$ (см).

21.85. Высота цилиндра равна диаметру шара, а радиус основания цилиндра — радиусу шара. По формуле объема шара $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ имеем: $30=\frac{4}{3}\pi R^3$, откуда $R^3=\frac{90}{4\pi}$. По формуле объема цилиндра $V=S_{\text{осн.}}\cdot H$ имеем: $V=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3=2\pi\cdot\frac{90}{4\pi}=45$.

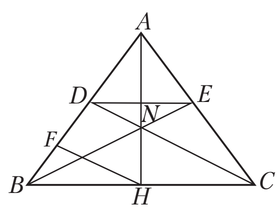


22.1. Обозначим данные углы 4α и 5α. Так как углы смежные, то $4\alpha+5\alpha=180°$, откуда $\alpha = 120°$. Значит, данные углы — это 80° и 100°, а модуль их разности равен 20°.

22.2. Через точку D проведем прямую, параллельную прямой BE, до пересечения со стороной AC в точке F. Рассмотрим угол BCE. Его стороны пересечены параллельными прямыми. Значит, $\frac{EF}{FC}=\frac{BD}{DC}$, откуда $\frac{EF}{FC}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow EF=\frac{4EC}{7}$. Рассмотрим угол DAF. Его стороны пересечены параллельными прямыми. Значит, $\frac{AO}{OD}=\frac{AE}{EF}=\frac{AE}{\frac{4EC}{7}}=\frac{2\cdot 7}{4\cdot 3}=\frac{7}{6}$.



22.3. Пусть AH — высота треугольника ABC. Через точку H проведем прямую, параллельную прямой CD, до пересечения со стороной AB в точке F. Рассмотрим угол DBC. Его стороны пересечены параллельными прямыми. Значит, $\frac{BH}{HC}=\frac{BF}{FD}$, откуда $\frac{1}{1}=\frac{BF}{FD}\Leftrightarrow BD=2DF$. Рассмотрим угол FAH. Его стороны пересечены параллельными прямыми. Значит, $\frac{AD}{DF}=\frac{AN}{NH}=\frac{3}{1}$, откуда $AD=3DF$. Значит, $\frac{AD}{DB}=\frac{3DF}{2DF}=\frac{3}{2}$. Треугольники DAE и BAC подобны с коэффициентом подобия $\frac{3}{5}$. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, то есть $\frac{S_{\Delta DAE}}{S_{\Delta BAC}}=\frac{S_{\Delta BAC}-64}{S_{\Delta BAC}}=\frac{9}{25}$, откуда $S_{\Delta ABC}=100$.

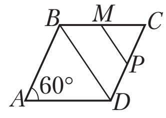


22.4. $\angle BCD=45°$; $\angle CBD=\frac{4}{5}\cdot 90°=72°$. Значит, $\alpha=63°$.

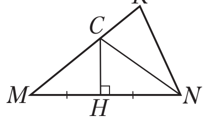
22.5. Внутренний угол при основании такого треугольника равен 80°. Значит, угол при вершине равен $180°-80°-80°=20°$.

22.6. Обозначим углы α, 2α и 3α. Имеем: $\alpha+2\alpha+3\alpha=180°$, откуда $\alpha = 30°$. Значит, углы нашего треугольника равны 30°, 60° и 90°, то есть AB — гипотенуза, BC — катет, лежащий против угла в 30°. Тогда $AB+\frac{1}{2}AB=72$, откуда $AB=48$ см, $BC=24$ см, $AC=24\sqrt{3}$ см. Периметр треугольника ABC равен $24\left(3+\sqrt{3}\right)$ см.

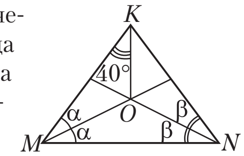
22.7. Треугольник ABD — равносторонний, значит, $BD=24$. Отрезок MP — средняя линия треугольника BCD, значит, $MP=\frac{1}{2}BD=12$.



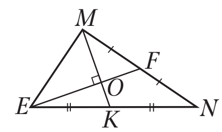
22.8. Так как точка C лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN, то она равноудалена от его концов. Значит, $MC=CN=10$ см. Тогда $CK = MK - MC = 17 - 10 = 7$ (см).



22.9. Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, значит, O — точка пересечения биссектрис и $\angle OKN = 40°$. Тогда $2\alpha + 2\beta = 180° - 80° = 100°$, откуда $\alpha+\beta=50°$. Значит, $\angle MON=180°-$ $-(\alpha+\beta)= 180° - 50° = 130°$.



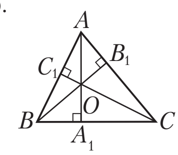
22.10. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и этой точкой делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Тогда $EO=\frac{2}{3}EF=8$ см, $MO=\frac{2}{3}MK=$ $=6$ см. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника EOM имеем $EM^2=8^2+6^2$, откуда $EM=10$ см.



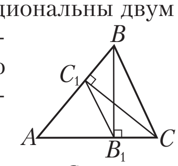
22.11. Три медианы делят треугольник на 6 равновеликих треугольников. Тогда площадь каждого треугольника в нашей задаче равна 2. Произведение площадей шести треугольников равно $2^6 = 60$.

22.12. По формуле $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ длины медианы имеем: $m=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 11^2+2\cdot 12^2-13^2}=9{,}5$ (см).

22.13. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке, значит, прямая CO перпендикулярна прямой AB. Тогда $\angle BCO=90°-66°=24°$.

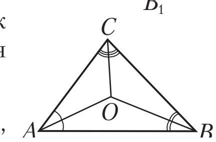


22.14. Пусть BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Так как треугольник AB_1B — прямоугольный, то $\frac{AB_1}{AB}=\cos\angle A$; аналогично так как треугольник AC_1C — прямоугольный, то $\frac{AC_1}{AC}=\cos\angle A$. Значит, $\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC}$, то есть две стороны треугольника B_1AC_1 пропорциональны двум сторонам треугольника BAC, а $\angle A$ — общий, что по признаку подобия означает, что треугольники B_1AC_1 и BAC подобны, причем с коэффициентом подобия $\cos\angle A$.



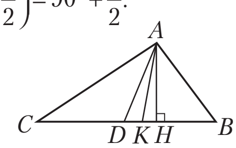
22.15. Центр вписанной в треугольник окружности — это точка пересечения биссектрис треугольника:

$\angle CAO=\angle OAB=\frac{\alpha}{2}$, $\angle ABO=\angle OBC=\frac{\beta}{2}$,



$\angle ACO=\angle OCB=\frac{\gamma}{2}$. $\angle AOB=180°-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$. Имеем $\alpha+\beta+\gamma=180°$, откуда $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2}$. Тогда $\angle AOB=180°-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=180°-\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)=90°+\frac{\gamma}{2}$.

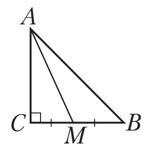
22.16. $\angle CAK = \angle KAB = 45°$. Пусть $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle CAD = \gamma$ и $\angle BAH = \gamma$. Значит, $\angle DAK = \angle HAK =$ $= 45° - \gamma$, то есть отрезок AK есть биссектриса треугольника DAH. Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть $\frac{DA}{AH}=\frac{DK}{KH}=\frac{4}{3}$. Обозначим $DA=4x$, $AH=3x$. Для треугольника DAH по теореме Пифагора: $(4x)^2=(3x)^2+7^2$, откуда $x=\sqrt{7}$. Значит, $AD=4\sqrt{7}$, $BC=8\sqrt{7}$, $AH=3\sqrt{7}$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{7}=84$.



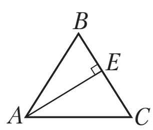
22.17. Второй катет треугольника равен $\frac{1}{\operatorname{ctg}30^\circ}=\sqrt{3}$. По формуле длины биссектрисы $l_c=\dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$ имеем:

$$l_c=\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\cos45^\circ}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}:2}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}.$$

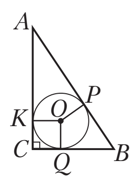
22.18. Пусть в треугольнике ABC $\angle C=90^\circ$, $BC=6$ см, AM — медиана и $AM=5$ см. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ACM имеем: $AM^2=AC^2+CM^2$, откуда $5^2=AC^2+3^2 \Leftrightarrow AC=4$ см. Тогда по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ACB имеем: $AB^2=AC^2+CB^2$, откуда $AB^2=4^2+6^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow AB=2\sqrt{13}$ см.



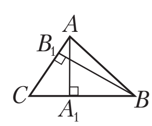
22.19. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AEC имеем: $AC^2=AE^2+CE^2$, откуда $15^2=12^2+EC^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow EC=9$. Обозначим $AB=BC=x$, тогда $BE=x-9$. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AEB имеем: $AB^2=AE^2+BE^2$, откуда $x^2=12^2+(x-9)^2 \Leftrightarrow x=12{,}5$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}\cdot12{,}5\cdot12=75$.



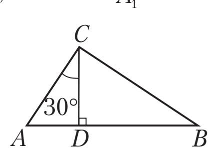
22.20. Пусть точки P, K, Q — точки касания вписанной в треугольник окружности со сторонами треугольника, $AP=12$, $BP=5$. Отрезки касательных, проведенные из одной точки к одной окружности, равны. Значит, $AK=AP=12$, $QB=BP=5$, $KC=CQ=r$. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABC имеем: $AB^2=AC^2+BC^2$, откуда $17^2=(12+r)^2+(5+r)^2 \Leftrightarrow r=3$. Сумма катетов треугольника ABC равна 23.



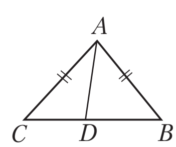
22.21. Из формулы площади треугольника следует, что $ah_a=bh_b$, то есть $AC\cdot BB_1=$ $=BC\cdot AA_1$, откуда $AC\cdot5=6\cdot4 \Leftrightarrow AC=4{,}8$.



22.22. В треугольнике ACD $\angle CAB=$ $=60^\circ$. Тогда в треугольнике ABC $AB=\frac{AC}{\cos60^\circ}=\frac{3}{0{,}5}=6$ (см).



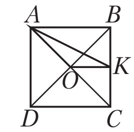
22.23. Так как $AB=AC$, то $\angle ACB=\angle ABC$. По теореме синусов для треугольника ABD имеем: $\frac{AD}{\sin\angle ABD}=2R$. По теореме синусов для треугольника ACD имеем: $\frac{AD}{\sin\angle ACD}=2R_1$. Но $\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{AD}{\sin\angle ABD}$. Значит, радиус окружности, описанной около треугольника ACD, также равен R.



22.24. Рассмотрим квадрат $ABCD$. Нужно найти радиус окружности, проходящей через точки A, O и K, то есть радиус окружности, описанной вокруг треугольника AOK, в котором $\angle AOK=135^\circ$. По теореме Пифагора для треугольника ABK имеем: $AK^2=AB^2+BK^2$, откуда $AK^2=1^2+\frac{1}{2}^2 \Leftrightarrow AK=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Тогда по теореме синусов для треугольника AOK имеем:

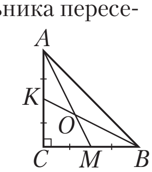
$$2R=\frac{AK}{\sin\angle AOK}=\frac{AK}{\sin135^\circ}=\frac{\sqrt{5}:2}{\sqrt{2}:2}=\frac{\sqrt{10}}{2},$$

откуда $R=\frac{\sqrt{10}}{4}$.



22.25. Так как треугольник равнобедренный ($AC=CB=a$), то $AM=BK=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Пусть медианы треугольника пересекаются в точке O. Надо найти $\cos\angle BOM$. По свойству медиан имеем:

$$OB=\frac{2}{3}BK=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{3} \text{ и } OM=\frac{1}{3}AM=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{6}.$$

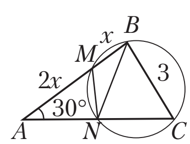


Запишем теорему косинусов для треугольника MOB: $MB^2=OB^2+OM^2-2OB\cdot OM\cos\angle BOM$, откуда

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{5}}{3}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{5}}{6}\right)^2-2\frac{a\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{6}\cos\angle BOM \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\angle BOM=\frac{4}{5}.$$

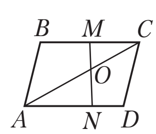
22.26. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, значит, сторона длиной 7 см противолежит углу 120°. Две другие стороны обозначим $7-d$ и $7-2d$. По теореме косинусов имеем: $7^2=(7-2d)^2+(7-d)^2-$ $-2(7-2d)(7-d)\cos120^\circ$, откуда $d=2$.

22.27. Обозначим $AM=2x$, $MB=x$. По теореме синусов для треугольника BNC имеем: $\frac{BC}{\sin\angle BNC}=2R$, откуда $\frac{3}{\sin\angle BNC}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\angle BNC=\frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $\angle BNC=60^\circ$ (убедитесь самостоятельно, что возможное значение $\angle BNC=120^\circ$ приводит к противоречию с условием задачи). Значит, $\angle ANB=120^\circ$ и $\angle ABN=30^\circ$. Треугольник ABN — равнобедренный, и в нем $BN=x\sqrt{3}$. Так как треугольник MNB вписан в окружность радиуса $\sqrt{3}$, то по теореме синусов для этого треугольника имеем: $\frac{MN}{\sin30^\circ}=2\sqrt{3}$, откуда $MN=\sqrt{3}$. По теореме косинусов для треугольника MNB имеем: $MN^2=MB^2+BN^2-$ $-2MB\cdot BN\cdot\cos\angle MBN$, откуда $\left(\sqrt{3}\right)^2=x^2+\left(x\sqrt{3}\right)^2-$ $-2x\cdot x\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$. Значит, $AM=2\sqrt{3}$.

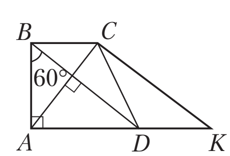


22.28. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и MN. Треугольники AON и COM подобны по двум углам. Значит,

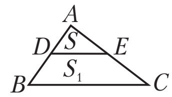
$$\frac{AO}{OC}=\frac{AN}{MC}=\frac{\frac{2}{3}AD}{\frac{1}{2}BC}=\frac{4}{3}.$$



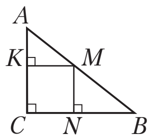
22.29. Проведем через вершину C прямую, параллельную BD, до пересечения с прямой AD в точке K. Тогда $\angle ACK=90^\circ$, и так как $\angle ADB=30^\circ$, то и $\angle AKC=30^\circ$. В прямоугольном треугольнике ACK $AC=AK\sin30^\circ$, откуда $6=AK\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow AK=12$. Но длина AK равна сумме оснований трапеции, а значит, средняя линия трапеции равна 6.



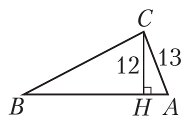
22.30. Треугольники ADE и ABC подобны. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия. То есть $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S}{2S} = \frac{1}{2}$, значит, коэффициент подобия равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.



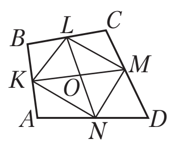
22.31. Пусть $AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $KMNC$ — вписанный квадрат. Пусть x см — сторона вписанного квадрата. Тогда так как треугольники AKM и ACB подобны, то $\frac{AK}{AC} = \frac{KM}{BC}$, откуда $\frac{5-x}{5} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow x = \frac{30}{11}$.



22.32. По теореме Пифагора для треугольника AHC имеем: $AC^2 = CH^2 + HA^2$, откуда $13^2 = 12^2 + HA^2 \Leftrightarrow HA = 5$. Катет в прямоугольном треугольнике есть среднее геометрическое гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу. Значит, $AC^2 = HA \cdot AB$, откуда $13^2 = 5 \cdot AB \Leftrightarrow AB = \frac{169}{5}$. Тогда площадь треугольника равна $\frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot \frac{169}{5} \cdot 12 = 202{,}8$.

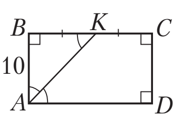


22.33. Четырехугольник $KLMN$ есть параллелограмм (см. 21.28). Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, значит, $\frac{KO}{OM} = \frac{1}{1}$.

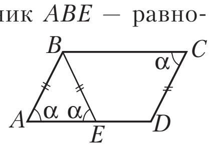


22.34. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Значит, $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.

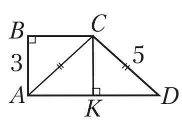
22.35. $\angle BKA = \angle KAD$ как внутренние, накрест лежащие, образованные при пересечении параллельных прямых AD и BC и секущей AK. Треугольник ABK — равнобедренный. Значит, $BK = AB = 10$ см, а $BC = 20$ см. Периметр прямоугольника равен 60 см.



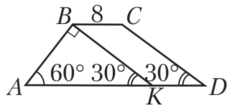
22.36. Противолежащие стороны параллелограмма равны. Значит, $BE = CD = AB$. Треугольник ABE — равнобедренный, поэтому $\angle BEA = \angle EAB = \angle BCD = \alpha$ (противолежащие углы параллелограмма равны). Значит, $\angle ABE = 180° - 2\alpha$.



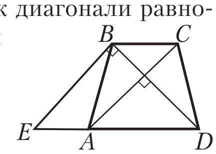
22.37. В прямоугольной трапеции боковая сторона, перпендикулярная основанию, короче любой диагонали. Тогда $AC = CD = 5$ см. В равнобедренном треугольнике высота является медианой, значит, $DK = KA = BC$. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABC имеем: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, откуда $5^2 = 3^2 + BC^2 \Leftrightarrow BC = 4$ см и $AD = 8$ см.



22.38. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Имеем: $10 = \frac{8 + AD}{2}$, откуда $AD = 12$ см. Проведем через вершину B прямую, параллельную CD, до пересечения с AD в точке K. Тогда $\angle ABK = 90°$, а $AK = 4$ см. Катет AB, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, то есть $AB = 2$ см.

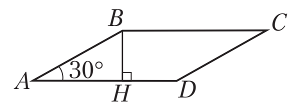


22.39. Проведем через вершину B прямую, параллельную CA, до пересечения с прямой AD в точке E. Тогда $\angle EBD = 90°$, $ED = 7\sqrt{2}$ см. Треугольник EBD — прямоугольный и равнобедренный, так как диагонали равнобедренной трапеции равны. Имеем: $DB = BE = ED \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7$ (см), а сумма длин диагоналей равна 14 см.



22.40. Длина окружности вычисляется по формуле $l = 2\pi R$, значит, радиус окружности, описанной около одного из шестиугольников, равен 6 см. Радиус окружности, описанной вокруг правильного шестиугольника, равен стороне шестиугольника. Выделенная ломаная состоит из 18 звеньев, каждое из которых равно стороне шестиугольника, то есть $18 \cdot 6 = 108$ (см).

22.41. В прямоугольном треугольнике AHB $AB = 2BH = 2$. Так как периметр параллелограмма $ABCD$ равен 32, то $AD = 32 : 2 - AB = 16 - 2 = 14$.
Площадь параллелограмма вычисляется по формуле $S = ah_a$. Тогда $S = AD \cdot BH = 14 \cdot 1 = 14$.

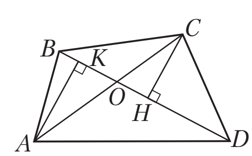


22.42. Площадь многоугольника, в который можно вписать окружность, равна произведению полупериметра многоугольника на радиус вписанной окружности. У ромба все стороны равны, значит, его полупериметр равен $2a$, где a — сторона ромба. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, значит, $0{,}5 = \pi R^2$, откуда $R = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$. Площадь ромба равна $2a \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$, что по условию равно 1. Тогда $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

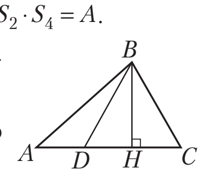
22.43. Площадь треугольника можно вычислять по формуле $S = 0{,}5ab\sin\alpha$. Тогда $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CDE}} = \frac{\frac{1}{2} CA \cdot CB \sin\angle ACB}{\frac{1}{2} CE \cdot CD \sin\angle ECD} = \frac{CB}{CD} = \frac{1}{2}$, откуда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{\Delta CDE} = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4{,}5$ (м^2).

22.44. Воспользуемся формулой Герона для вычисления площади треугольника: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c — стороны треугольника, а p — его полупериметр. Имеем: $S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84$ (см^2).

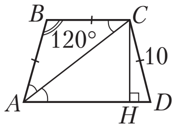
22.45. Проведем высоты в треугольниках AOB и COD. Тогда $S_1 \cdot S_3 = \frac{1}{2} OB \cdot AK \cdot \frac{1}{2} OD \cdot CH = A$. При этом $S_2 \cdot S_4 = \frac{1}{2} OB \cdot CH \cdot \frac{1}{2} OD \cdot AK$, что равно тому же значению A. Имеем: $S_2 \cdot S_4 = A$.



22.46. Проведем перпендикуляр из точки B к AC. $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta CBD}} = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot BH}{\frac{1}{2} DC \cdot BH} = \frac{AD}{DC}$. Но $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta CBD}} = \frac{5}{7}$, значит, $\frac{AD}{DC} = \frac{5}{7}$.

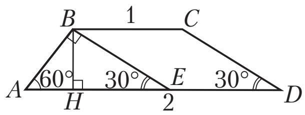


22.47. $\angle BCA = \angle CAD$ как внутренние, накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых BC и AD и секущей AC. Треугольник ABC — равнобедренный. Значит, $BC = AB = 10$. Проведем высоту CH трапеции. $\angle BAD = \angle CDA = 60°$. Тогда в прямоугольном треугольнике CHD $HC = CD\sin\angle CDH = 10\sin 60° = 5\sqrt{3}$, $HD = CD\cos\angle CDH = 10\cos 60° = 5$. Тогда

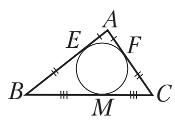


$AD = 10+5+5 = 20$. Площадь трапеции равна $\dfrac{AD+BC}{2}\cdot CH =$
$= \dfrac{20+10}{2}\cdot 5\sqrt{3} = 75\sqrt{3}$.

22.48. Проведем через вершину B прямую, параллельную CD, до пересечения со стороной AD в точке E. Тогда $BC = ED = AE = 1$, а треугольник ABE — прямоугольный с острыми углами 30° и 60°. Катет $AB = \dfrac{1}{2}AE = \dfrac{1}{2}$. Тогда высота $BH = AB\sin 60° = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Площадь трапеции равна $\dfrac{1+2}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

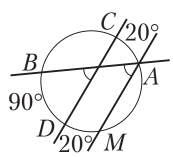


22.49. Отрезки касательных, проведенные из одной точки к одной окружности, равны. Значит, $AF = AE = 4$ м, $BE = BM = 10$ м, $CM = CF = 6$ м. Тогда периметр треугольника ABC равен $10+10+6+6+4+4 = 40$ (м).

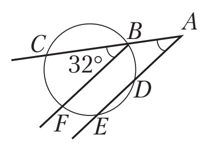


22.50. Центральный угол BOD, равный 90°, опирается на дугу, равную 90°. Значит, вписанный угол α опирается на дугу $360° - 90° = 270°$ и равен ее половине, то есть 135°.

22.51. Через точку A проведем прямую, параллельную CD, M — точка ее пересечения с окружностью. Искомый угол равен углу BAM. Параллельные прямые отсекают на окружности равные дуги, то есть дуга DM равна 20°. $\angle BAM$ — вписанный и опирается на дугу, равную 110°, значит, его величина равна 55°. То есть угол между заданными прямыми равен 55°.

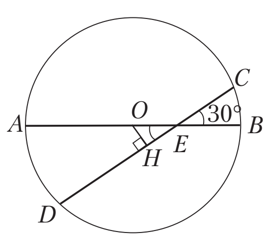


22.52. Через точку B проведем прямую, параллельную AD, F — точка ее пересечения с окружностью. Искомый угол равен углу CBF. Параллельные прямые отсекают на окружности равные дуги, то есть дуга FE равна 32°. $\angle CBF$ — вписанный и опирается на дугу 66°, значит, его градусная мера равна 33°. То есть искомый угол равен 33°.

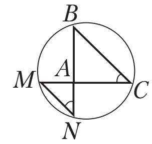


22.53. Треугольник BOA — равнобедренный. Значит, $\angle BAO = 49°$, а угол BAC дополняет его до 90°, так как касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Тогда $\angle BAC = 41°$. Заметим, что угол между касательной и хордой равен половине дуги, которую стягивает хорда.

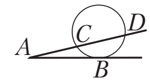
22.54. Обозначим диаметр AB, хорду — CD, точку их пересечения — E, центр окружности — O. Тогда $OB = \dfrac{6+2}{2} = 4$. Откуда получим, что $OE = 2$. Расстояние от центра окружности до хорды — это отрезок перпендикуляра OH. Тогда в прямоугольном треугольнике OHE имеем: $OH = OE\sin\angle OEH =$ $= 2\sin 30° = 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1$.



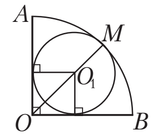
22.55. Треугольники MNA и BCA подобны по двум углам ($\angle MNB = \angle MCB$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу; $\angle MAN = \angle CAB$ как вертикальные). Значит, $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$, откуда $\dfrac{MN}{4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow MN = 2$ и, кроме того, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, откуда $\dfrac{1}{2} = \dfrac{AN}{3} \Leftrightarrow AN = 1{,}5$.



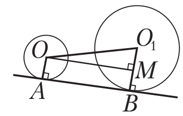
22.56. Пусть $AC = x$. По теореме о касательной и секущей имеем: $AB^2 = AC\cdot AD$, откуда $6^2 = x\cdot(x+5) \Leftrightarrow x = 4$.



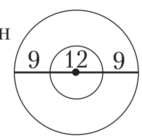
22.57. Обозначим центр вписанной окружности O_1, а точку касания окружностей — M. Центры касающихся окружностей и их точка касания лежат на одной прямой. Значит, $R = OM = OO_1 + O_1M = r\sqrt{2} + r = r\left(\sqrt{2}+1\right)$, откуда $r = R\left(\sqrt{2}-1\right)$.



22.58. Пусть O и O_1 — центры окружностей, а A и B — соответственно их точки касания с общей касательной. Проведем радиусы OA и O_1B и рассмотрим прямоугольную трапецию AOO_1B. Проведем высоту трапеции OM, при этом $OM = AB$. Тогда по теореме Пифагора для треугольника OMO_1 имеем: $OO_1^2 = OM^2 + MO_1^2$, откуда $13^2 = OM^2 + (8-3)^2 \Leftrightarrow OM = AB = 12$ см.



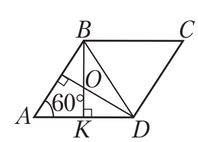
22.59. Радиус меньшей окружности равен $\dfrac{12}{2} = 6$ (м). Радиус большей окружности равен $6+9 = 15$ (м). Сумма радиусов равна 21 м.



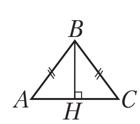
22.60. По формуле $S = pr$ найдем радиус вписанной окружности. $p = \dfrac{2+3+4}{2} = 4{,}5$. По формуле Герона найдем площадь треугольника: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$
$= \sqrt{4{,}5\cdot 2{,}5\cdot 1{,}5\cdot 0{,}5} = \dfrac{\sqrt{5^5 3^3}}{100} = \dfrac{75\sqrt{15}}{100} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.
Тогда $\dfrac{3\sqrt{15}}{4} = \dfrac{9}{2}r$, откуда $r = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$.

22.61. Воспользуемся формулой $R = \dfrac{abc}{4S}$. Чтобы найти площадь треугольника, воспользуемся тем, что он равнобедренный. Высота такого треугольника, проведенная к основанию, равна 3. Значит, $S = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 3 = 12$ (м²). Тогда $R = \dfrac{5\cdot 5\cdot 8}{4\cdot 12} = \dfrac{25}{6}$ (м).

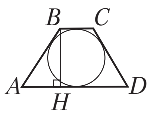
22.62. Пусть в ромбе $ABCD$ $\angle A = 60°$. Тогда BD — меньшая диагональ. Вычислим длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABD, который является правильным. Значит, радиус равен третьей части высоты треугольника ABD. Итак, $BK = AB\cdot\sin 60° = 6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (см). Значит, радиус вписанной окружности равен $\dfrac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (см).



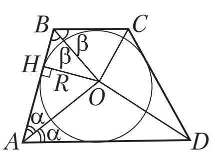
22.63. Центры вписанной и описанной окружностей по свойствам равнобедренного треугольника лежат на высоте BH. По формулам $S = pr$ и $R = \dfrac{abc}{4S}$ найдем радиусы. По теореме



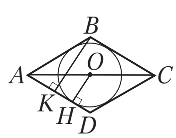
Пифагора для треугольника ABH найдем, что $BH = 6$ см. Тогда площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 6 = 48$ (см^2). Значит, $r = \frac{8}{3}$ см, и центр вписанной окружности находится на расстоянии $6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$ (см) от вершины B, а $R = \frac{10\cdot 10\cdot 16}{4\cdot 48} = \frac{25}{3}$ (см), и центр описанной окружности находится на расстоянии $\frac{25}{3}$ см от вершины B. Значит, расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей равно $\frac{25}{3} - \frac{10}{3} = 5$ (см).



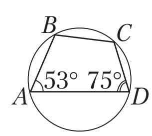
22.64. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противолежащих сторон равны. Рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$. Значит, $AB = CD = \frac{BC + AD}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$. Проведем высоту BH. При этом $AH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$. Воспользовавшись теоремой Пифагора для прямоугольного треугольника ABH, найдем, что $BH = \sqrt{15}$. Значит, радиус вписанной в трапецию окружности равен $\frac{BH}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$.



22.65. Рассмотрим трапецию $ABCD$ и вписанную в нее окружность. Угол, под которым видна из центра окружности, например, боковая сторона AB — это угол AOB, где O — центр вписанной окружности. Равные углы OAH и OAD обозначим α, а равные углы HBO и OBC обозначим β. По свойству трапеции $2\alpha + 2\beta = 180°$, значит, $\alpha + \beta = 90°$. Тогда в треугольнике AOB $\angle AOB = 90°$. В прямоугольном треугольнике AOB высота, проведенная к гипотенузе, равна R и является средним геометрическим проекций катетов на гипотенузу. Значит, $AH \cdot HB = R^2$.



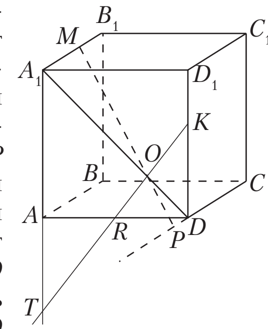
22.66. Рассмотрим ромб $ABCD$ и вписанную в него окружность. Так как радиус вписанной окружности $OH = 1$, то высота ромба $BK = 2$. В прямоугольном треугольнике AKB $BK = \frac{1}{2}AB$. Значит, $\angle BAD = 30°$.



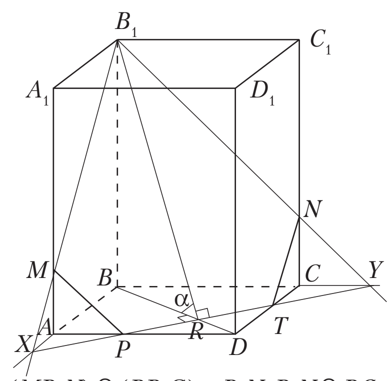
22.67. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противолежащих углов равны $180°$. Значит, $\angle A + \angle C = 180°$, откуда $53° + \angle C = 180° \Leftrightarrow \angle C = 127°$. И $\angle B + \angle D = 180°$, откуда $\angle B + 75° = 180° \Leftrightarrow \angle B = 105°$.

22.68. В правильном тетраэдре все четыре грани — равные правильные треугольники. Сторона правильного треугольника с высотой 3 см равна $2\sqrt{3}$ см, а его площадь — $3\sqrt{3}$ см^2. Значит, площадь полной поверхности правильного тетраэдра равна $4\cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ (см^2).

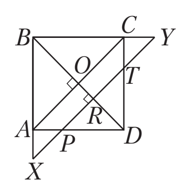
22.69. Длина ребра куба равна $15 + 9 = 24$. Тогда $KD = 16$. Пусть точка R — середина ребра AD. Прямая KR принадлежит плоскости AA_1D_1D. По условию через точку M провели прямую l, которая пересекает прямую KR, а также прямую CD в точке P. Значит, прямая l пересекает плоскость AA_1D_1D, а точка P лежит на продолжении ребра CD. Определим точку пересечения прямой l и плоскости AA_1D_1D. Прямые A_1B_1 и CD параллельны, следовательно, лежат в одной плоскости. Значит, прямые A_1D и MP также лежат в одной плоскости. $A_1D \cap MP = O$. Точка O — общая точка прямой MP и плоскости AA_1D_1D. Но общая точка прямой MP и плоскости AA_1D_1D по условию принадлежит прямой KR. Значит, точка O принадлежит прямой KR. То есть $O = A_1D \cap KR$. Треугольники MA_1O и PDO подобны, и $MA_1 : PD = A_1O : DO$. Продлим прямую KR до пересечения с прямой AA_1 в точке T. Треугольники A_1OT и DOK подобны, и $A_1O : DO = A_1T : DK$. Треугольники DKR и ATR равны, и $AT = DK = 16$. Тогда $A_1T = 16 + 24 = 40$ и $A_1T : DK = 5 : 2 = MA_1 : PD$. Так как $A_1M = 15$, то $PD = 6$.



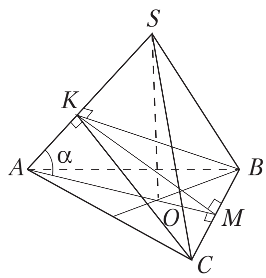
22.70. Если две различные плоскости имеют две общие точки, то они пересекаются по той единственной прямой, которая через эти две точки проходит. $(MB_1N) \cap (ABB_1) = B_1M$, $B_1M \cap AB = X$.



А также $(MB_1N) \cap (BB_1C) = B_1N$, $B_1N \cap BC = Y$. Точки X и Y — общие точки секущей плоскости MB_1N и плоскости ABC. Значит, $(MB_1N) \cap (ABC) = XY$, $XY \cap AD = P$, $XY \cap BC = T$. Проведем отрезки MP и NT. Пятиугольник MB_1NTP — искомое сечение. Определим положение точек X, Y, P и T. Из условия $A_1M = 12$, $MA = 4$. Треугольники B_1A_1M и XAM подобны, и $A_1M : MA = A_1B_1 : AX$, откуда $AX = 4$, $XB = 16$. Аналогично $CY = 4$, $BY = 16$. Сделаем выносной чертеж. Треугольники XAP и XBY подобны, и $XA : XB = AP : BY$, откуда $AP = 4$, $PD = 8$. Аналогично $CT = 4$, $TD = 8$. Можно найти площадь сечения как сумму площадей треугольника MB_1N и трапеции $MNTP$. Или воспользуемся формулой площади перпендикулярной проекции: $S_{\text{проекц.}} = S_{\text{фиг.}}\cos\alpha$, где α — угол между плоскостью фигуры и плоскостью проекции. Так как прямые AC и XY параллельны, а $AC \perp BD$, то $XY \perp BD$, $XY \cap BD = R$. По теореме о трех перпендикулярах $XY \perp B_1R$, и $\angle B_1RB$ есть угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC. Так как $BR = BD - RD = 12\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, $BB_1 = 16$, то по теореме Пифагора $B_1R = 8\sqrt{6}$. Тогда $\cos\angle B_1RB = \frac{BR}{B_1R} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Проекция сечения на плоскость основания ABC есть пятиугольник $ABCTP$. Его площадь найдем как разность площади квадрата $ABCD$ и площади треугольника TDP, то есть $12^2 - \frac{1}{2}\cdot 8^2 = 112$. Тогда площадь сечения равна $S = 112\cdot\sqrt{3}$. В ответе запишем $S : \sqrt{3}$, то есть 112.

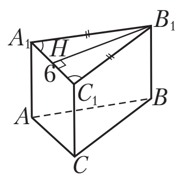


22.71. Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ есть отрезок, соединяющий вершину пирамиды и центр основания O. По условию $\sin\angle SAO = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$. Через сторону BC проведем плоскость, перпендикулярную боковому ребру SA. В равнобедренном треугольнике SAC проведем высоту CK. Так как треугольники SAC и SAB равны, то высота треугольника SAB из вершины B также опускается в точку K. Боковое ребро SA перпендикулярно двум пересекающимся прямым CK и BK, значит, $SA \perp (BCK)$. Треугольник BCK есть искомое сечение. Так как $SA \perp (BCK)$, то треугольник AKM является прямоугольным



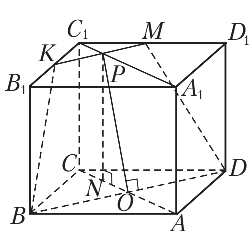
и $KM = AM \cdot \sin\angle SAO = \frac{21\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = 18$. Тогда площадь сечения равна $\frac{1}{2} BC \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 18 = 189$.

22.72. Проведем в равнобедренном треугольнике $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = C_1B_1$) высоту к основанию. Тогда $\operatorname{tg}\angle B_1A_1C_1 = \frac{B_1H}{A_1H}$, откуда $0{,}75 = \frac{B_1H}{3} \Leftrightarrow B_1H = \frac{9}{4}$. Площадь



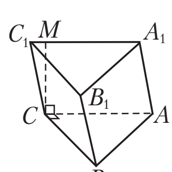
верхнего основания призмы равна $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$, а сумма площадей верхнего и нижнего оснований равна $\frac{27}{2}$. Вычислим площадь боковой поверхности призмы. Она равна $P_{\Delta ABC} \cdot AA_1$. По теореме Пифагора для треугольника A_1B_1H $A_1B_1^2 = A_1H^2 + B_1H^2$, откуда $A_1B_1^2 = 3^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 \Leftrightarrow A_1B_1 = \frac{15}{4}$. По условию $\frac{27}{2} = (6 + \frac{15}{4} + \frac{15}{4}) \cdot AA_1$, откуда $AA_1 = 1$. Объем призмы равен $S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{27}{4}$. Объем четырех таких призм равен 27.

22.73. Верхнее основание пересекается секущей плоскостью по прямой, параллельной BD, а значит, параллельной B_1D_1. Сечением является равнобедренная трапеция с основаниями BD = 16 см и KM = 8 см. Высоту трапеции PO найдем из треугольника PNO, где



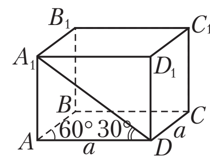
$PN = CC_1 = 3$ (см), $NO = \frac{1}{4} AC = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$ (см). По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника PNO имеем: $PO^2 = PN^2 + NO^2$, откуда $PO^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow PO = 5$ см. Вычислим площадь сечения: $S_{\text{сеч.}} = \frac{16+8}{2} \cdot 5 = 60$ (см^2).

22.74. По определению призмы все ее боковые грани являются параллелограммами. Уточним теперь вид параллелограмма. В плоскости грани AA_1C_1C через точку C проведем перпендикуляр CM к прямой AC. Значит, $\angle MCB$ есть линейный угол двугранного угла между плоскостью AA_1C_1C



и плоскостью основания. По условию он равен 90°. Прямая BC перпендикулярна к двум пересекающимся прямым плоскости AA_1C_1C, значит, она перпендикулярна всей плоскости. Тогда она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости, в том числе и к прямой CC_1. То есть $\angle BCC_1 = 90°$. Раз у параллелограмма есть прямой угол, то он — прямоугольник. Для установления, является ли этот прямоугольник квадратом, информация в тексте задачи отсутствует.

22.75. Объем параллелепипеда вычисляется по формуле $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$. $S_{\text{осн.}} = a^2 \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; $H = a \operatorname{tg} 30° = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Тогда $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{2}$.

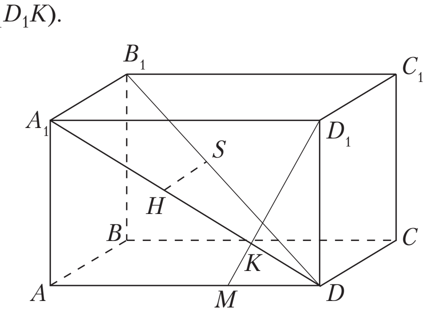


22.76. Часть $NC_1CA_1D_1D$ есть прямая призма с основанием NC_1C. Ее объем равен $\frac{1}{2} \cdot C_1N \cdot C_1C \cdot CD = 27$, и $C_1N \cdot C_1C \cdot CD = 54$. Объем призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $\frac{AD+BC}{2} \cdot CD \cdot CC_1$. Прямая NC — наклонная к плоскости ABC, BC — ее проекция. По теореме о трех перпендикулярах $NC \perp CD$ и $\angle NCB = \operatorname{arctg}\frac{5}{3} = \angle CNC_1$. Тогда $AD = C_1N = \frac{C_1C}{\operatorname{tg}\angle CNC_1} = \frac{3}{5} C_1C$, и так как по условию $BC = CC_1$, то $BC = \frac{5}{3} C_1N$. Тогда объем призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен

$$\frac{AD+BC}{2} \cdot CD \cdot CC_1 = \frac{C_1N + \frac{5}{3} C_1N}{2} \cdot CD \cdot CC_1 =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot C_1N \cdot C_1C \cdot CD = \frac{4}{3} \cdot 54 = 72.$$

22.77. Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, то его объем равен $AB \cdot AD \cdot AA_1 = 1240$. В прямоугольном треугольнике B_1A_1D из точки S опустим перпендикуляр SH на A_1D. Тогда SH и B_1A_1 параллельны. Так как если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и вторая ей перпендикулярна, имеем $SH \perp (A_1D_1K)$.

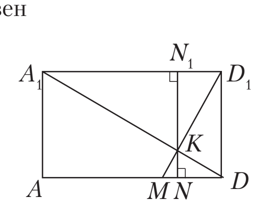


То есть отрезок SH есть высота пирамиды SA_1KD_1, проведенная к основанию A_1KD_1, и $SH = \frac{3}{5} A_1B_1 = \frac{3}{5} AB$. Найдем площадь основания A_1KD_1. Треугольники A_1KD_1 и DKM подобны, и $N_1K : NK = A_1D_1 : DM = 3 : 1$, откуда $N_1K = \frac{3}{4} AA_1$. Тогда объем пирамиды SA_1KD_1 равен

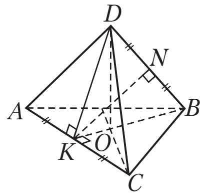
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} A_1D_1 \cdot KN_1 \cdot SH =$$

$$= \frac{1}{6} AD \cdot \frac{3}{4} AA_1 \cdot \frac{3}{5} AB =$$

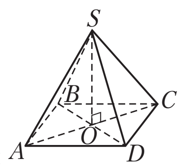
$$= \frac{3}{40} AB \cdot AD \cdot AA_1 = 93.$$



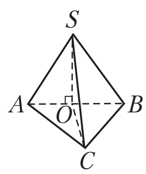
22.78. Все четыре грани правильного тетраэдра — равные правильные треугольники. Площадь каждого из них $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Тогда площадь полной поверхности тетраэдра равна $a^2\sqrt{3}$. Расстояние между противоположными ребрами правильного тетраэдра — это отрезок, перпендикулярный к обоим из них. Это отрезок KN, где точка K — середина AC, а точка N — середина BD. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника BNK имеем: $KB^2 = KN^2 + BN^2$, откуда $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = KN^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow KN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



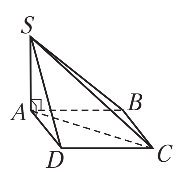
22.79. Диагональным сечением является любой из треугольников ASC или BSD. Диагональное сечение ASC — равнобедренный треугольник, значит, $\angle ASC = 90°$. Тогда $SO = AO = CO = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$. Объем пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H$. Тогда $V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$ (см^3).



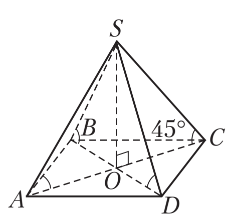
22.80. Высотой пирамиды $SABC$ является высота SO треугольника ASB. Тогда объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H =$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = 8$.



22.81. Пусть ребро SA перпендикулярно плоскости основания $ABCD$. Значит, сечение, проходящее через диагональ основания и ребро, перпендикулярное основанию, есть треугольник SAC. Его площадь вычисляется как $\frac{1}{2}AC \cdot SA$. Отрезок AC, как диагональ квадрата со стороной 6, равен $6\sqrt{2}$. Тогда $\frac{1}{2}SA \cdot 6\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, откуда $SA = \frac{8}{3}$. Тогда объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot \frac{8}{3} = 32$.

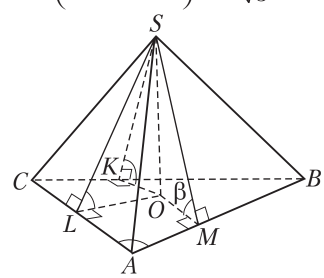


22.82. Рассмотрим четырехугольную пирамиду $SABCD$. Пусть основание высоты — точка O. Тогда треугольники SOA, SOB, SOC, SOD равны по общему катету и острому углу. Значит, $OA = OB = OC = OD$, то есть точка O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Площадь прямоугольника $ABCD$ можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Высота пирамиды $SO = OC = \sqrt{3}$, так как треугольник SOC — равнобедренный. Тогда $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$. В ответе запишем величину $V\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

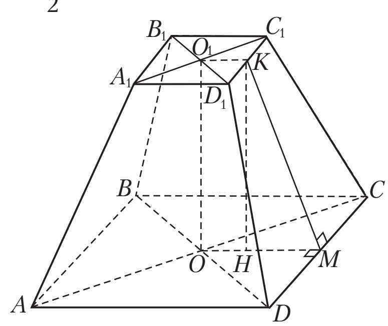


22.83. Пусть основание высоты пирамиды — точка O. Построим углы наклона боковых граней к плоскости основания. Это углы SKO, SMO и SLO. Тогда треугольники SKO, SMO и SLO равны по общему катету и острому углу. Значит, $OK = OM = OL$, то есть точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. В треугольнике ABC находим $AC = \frac{c}{2}$, $BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c^2\sqrt{3}}{8}$,

$OM = r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c\sqrt{3}}{2} - c}{2} = \frac{c\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$. В прямоугольном треугольнике SMO $SM \cdot \cos\beta = OM$, откуда $SM \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{c\left(\sqrt{3}-1\right)}{4} \Leftrightarrow SM = \frac{2c\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}}$. Площадь боковой поверхности пирамиды можно в данном случае вычислить как $\frac{1}{2}P_{\Delta ABC} \cdot SM = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2} + \frac{c\sqrt{3}}{2} + c\right) \cdot \frac{2c\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}} = c^2 = 25$.

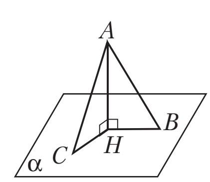


22.84. Рассмотрим усеченную пирамиду $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки O и O_1 — центры ее оснований. Высоту боковой грани вычислим как гипотенузу прямоугольного треугольника KHM. В нем $KH = OO_1 = 4$, $HM = OM - OH = 4 - 1 = 3$. По теореме Пифагора для этого треугольника имеем: $KM^2 = KH^2 + HM^2$, откуда $KM^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow KM = 5$. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной усеченной пирамиды найдем как
$4 \cdot S_{DD_1C_1C} = 4 \cdot \frac{8+2}{2} \cdot 5 = 100$.



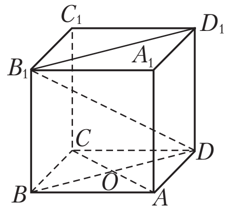
22.85. Отношение объемов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия. Так как секущая плоскость проходит через середину высоты пирамиды и параллельна основанию, то она отсекает подобную пирамиду с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Значит, объем отсеченной пирамиды равен $\frac{1}{8} \cdot 200 = 25$ (см^3), а объем усеченной пирамиды равен $200 - 25 = 175$ (см^3).

22.86. Пусть AH — перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости α. Проекции наклонных AB и AC к плоскости α — соответственно HB и HC. Пусть AB = 15 см, AC = 20 см, тогда $BH = 9x$ см, $CH = 16x$ см. Тогда по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABH $AB^2 = AH^2 + HB^2$, а для треугольника ACH имеем $AC^2 = AH^2 + HC^2$. Значит, $AB^2 - HB^2 = AC^2 - HC^2$, откуда $15^2 - (9x)^2 = 20^2 - (16x)^2 \Leftrightarrow x = 1$. Используя равенство



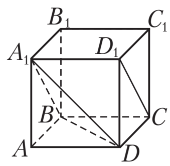
$AB^2 = AH^2 + HB^2$, вычислим AH: $15^2 = AH^2 + 9^2$, откуда $AH = 12$ см.

22.87. Расстояние между скрещивающимися прямыми можно вычислить как расстояние от любой точки одной прямой до параллельной ей плоскости, содержащей вторую прямую. Прямая AA_1 параллельна плоскости BB_1D_1D. Проведем перпендикуляр из точки A к этой плоскости.

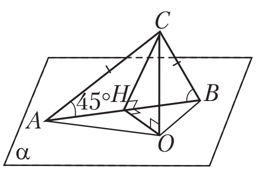


Это отрезок AO, так как диагонали квадрата перпендикулярны, а также прямая BB_1 перпендикулярна AO. Длина AO равна половине диагонали квадрата со стороной 4, то есть $AO = 2\sqrt{2}$ см.

22.88. Угол между скрещивающимися прямыми равен углу между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными скрещивающимся. Чтобы найти угол между диагоналями A_1D и D_1C, можно найти угол между A_1D и A_1B. Этот угол равен 60°, так как треугольник A_1DB — равносторонний.



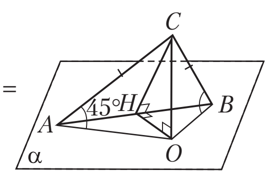
22.89. Через гипотенузу AB прямоугольного равнобедренного треугольника проведена плоскость α; CO — перпендикуляр, опущенный из точки C на плоскость α. Тогда $\angle CHO = 45°$. Угол между прямой CA (CB) и плоскостью α есть $\angle CAO$ ($\angle CBO$). Пусть $AC = b$. Тогда $CH = \frac{b}{\sqrt{2}}$, $CO = \frac{b}{2}$. Значит, $\sin\angle CAO = \frac{CO}{AC} = \frac{1}{2}$, откуда $\angle CAO = 30°$.



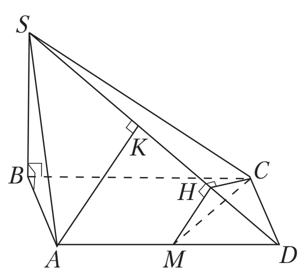
22.90. Через сторону AB правильного треугольника ABC проведена плоскость α; CO — перпендикуляр, опущенный из точки C на плоскость α. Тогда $\angle CAO = \angle CBO = 45°$. Угол между плоскостью ABC и плоскостью α есть $\angle CHO$. Пусть $AC = a$. Тогда $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$AO = CO = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Значит, $\sin\angle CHO =$

$= \frac{CO}{CH} = \frac{a : \sqrt{2}}{a\sqrt{3} : 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



22.91. Пусть $AB = 1$, $BC = 5$. Так как SB — перпендикуляр к плоскости ABC, SA — наклонная, AB — проекция наклонной и $AD \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах $SA \perp AD$. Аналогично $SC \perp CD$. В прямоугольном треугольнике SAD проведем высоту AK на гипотенузу.



Имеем: $SA = 5$, $SD = 5\sqrt{2}$, $AK = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $KD = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. В прямоугольном треугольнике SCD проведем высоту CH на гипотенузу. Имеем: $SC = 7$, $SD = 5\sqrt{2}$, $CH = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $HD = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

Так как $KD > HD$, то проведем HM параллельно AK. Тогда $\angle CHM = \alpha$ есть линейный угол двугранного угла при боковом ребре SD. Найдем длины сторон треугольника CHM. Треугольники DHM и DKA подобны, и $HM : KA = DH : DK =$ $= DM : DA$, откуда $HM = \frac{DH \cdot KA}{DK} = \frac{\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 2}{10 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$,

$DM = \frac{DH \cdot DA}{DK} = \frac{\sqrt{2} \cdot 5 \cdot 2}{10 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{5}$. Тогда $MC = \frac{\sqrt{26}}{5}$. Найдем $\cos\alpha$ по теореме косинусов из треугольника CHM:

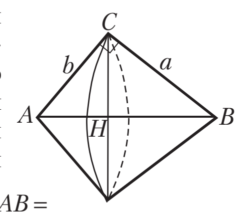
$\frac{26}{25} = \frac{2}{100} + \frac{98}{100} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} \cdot \cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = -\frac{1}{7}$. Значение выражения $\frac{2}{\cos\alpha}$ равно -14.

22.92. Осевое сечение цилиндра — прямоугольник, одна из сторон которого равна диаметру основания, а другая — образующей. Его площадь равна $2R \cdot H$. По условию $\frac{2RH}{\pi R^2} = \frac{3}{\pi}$, откуда $H = \frac{3}{2}R$. Рассмотрим отношение площади полной поверхности цилиндра к площади его основания:

$$\frac{2\pi RH + 2\pi R^2}{\pi R^2} = \frac{2\pi R \cdot \frac{3}{2}R + 2\pi R^2}{\pi R^2} = 5.$$

22.93. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник, значит, радиус основания равен половине образующей. Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле: $S = \pi Rl$. В нашей задаче $S = \pi \cdot 9 \cdot \frac{9}{2} = \frac{81\pi}{2}$.

22.94. Полученное при вращении прямоугольного треугольника с катетами a и b вокруг его гипотенузы тело составлено из двух конусов с общим основанием радиуса CH и высотами AH и BH. Тогда объем тела равен $\frac{1}{3}\pi CH^2 \cdot AH + \frac{1}{3}\pi CH^2 \cdot BH = \frac{1}{3}\pi CH^2 \cdot AB =$



$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

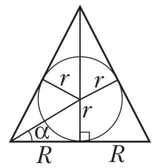
22.95. Полученное при вращении тело — усеченный конус с радиусами оснований 1 и 3. Высота усеченного конуса равна высоте трапеции, которую найдем из условия, что $24 = \frac{1+3}{2} \cdot h$, откуда $h = 12$. Объем усеченного конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$. Имеем $V = \frac{1}{3}\pi 12\left(3^2 + 3 \cdot 1 + 1^2\right) = 52\pi$.

22.96. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, а площадь поверхности — $S = 4\pi R^2$. В нашей задаче $S_1 = \frac{4\pi R^2}{49} = 4\pi\left(\frac{R}{7}\right)^2$, то есть радиус другого шара в 7 раз меньше. Тогда его объем равен $V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{7}\right)^3 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{343} =$ $= \frac{686}{343} = 2$, так как по условию $\frac{4}{3}\pi R^3 = 686$.

22.97. Отношение объема цилиндра к объему конуса равно $\frac{\pi R^2 \cdot 8}{\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 6} = \frac{4}{1}$.

22.98. Рассмотрим равнобедренный треугольник — осевое сечение конуса. Тогда $\frac{4\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{4}{3}$, значит, $R = \sqrt{3}r$, откуда

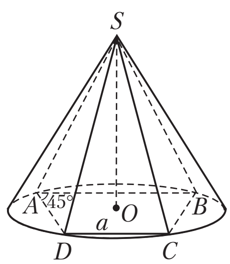
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $\alpha = 30°$. Угол при основании осевого сечения равен $2\alpha = 60°$, и угол при вершине конуса также равен 60°.

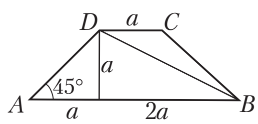


22.99. Вычислим объем воды в сосуде: $\pi R^2 \cdot 2r - \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \pi 4^2 \cdot 6 - \dfrac{4}{3}\pi 3^3 = 60\pi$ (см³).
Если шар из сосуда вынуть, то высота слоя воды равна $\dfrac{60\pi}{\pi R^2} = \dfrac{60\pi}{16\pi} = 3{,}75$ (см).

22.100. Радиус вписанного шара равен радиусу окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной 6, а высота призмы равна диаметру этого шара. Значит, радиус шара равен $\sqrt{3}$, высота призмы — $2\sqrt{3}$. Объем призмы вычисляется по формуле $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$. Имеем $V = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3} = 54$.

22.101. Образующая конуса равна, например, гипотенузе прямоугольного треугольника SOA, где OA — радиус окружности, описанной вокруг трапеции $ABCD$. Рассмотрим трапецию. Радиус окружности, описанной вокруг трапеции $ABCD$, равен радиусу окружности, описанной вокруг треугольника ABD. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника DHB имеем: $DB^2 = DH^2 + BH^2$, откуда $DB^2 = a^2 + (2a)^2 \Leftrightarrow DB = a\sqrt{5}$.

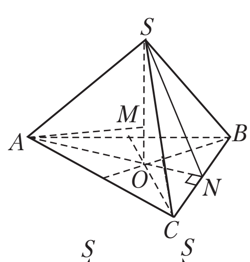


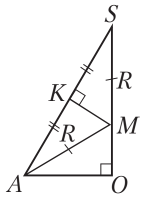


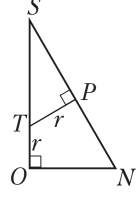
По теореме синусов для треугольника DAB имеем: $\dfrac{DB}{\sin 45°} = 2R$, откуда $R = OA = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. Тогда по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника SOA имеем: $SA^2 = SO^2 + OA^2$, откуда $SA^2 = \left(a\sqrt{10}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{10}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow SA = \dfrac{5a}{\sqrt{2}} = \dfrac{5 \cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 15.$

22.102. Центры вписанного и описанного шаров лежат на высоте SO правильного тетраэдра $SABC$. Пусть точка M — центр описанного шара, а точка T — центр вписанного шара. Для нахождения радиуса описанного шара рассмотрим треугольник SOA. В этом треугольнике $AS = a$, $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Так как треугольники SKM и SOA подобны,



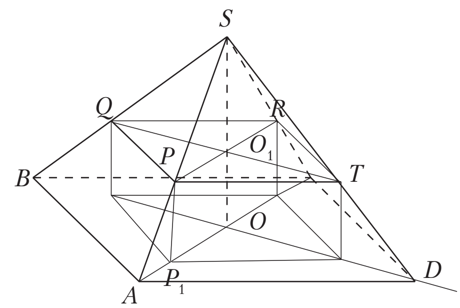




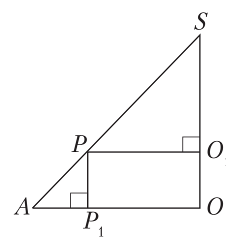
то $\dfrac{SM}{SK} = \dfrac{SA}{SO}$, откуда $\dfrac{R}{a:2} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}:\sqrt{3}} \Leftrightarrow R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Для нахождения радиуса вписанного шара рассмотрим треугольник SON. В этом треугольнике $SN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $ON = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Так как треугольники SPT и SON подобны, то

$\dfrac{ST}{SN} = \dfrac{TP}{NO}$, откуда $\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - r}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{r}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Leftrightarrow r = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

22.103. Можно рассмотреть одну правильную четырехугольную пирамиду и вписанную в нее половину куба.



Сделаем выносной чертеж треугольника SOA.



Пусть длина ребра куба равна x, а длина ребра правильной четырехугольной пирамиды — a (выражение $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ слишком громоздко).

Имеем:

$AO = OS = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $PO_1 = P_1O = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, $OO_1 = P_1P = \dfrac{x}{2}$.

Треугольник AP_1P — равнобедренный прямоугольный, и $AP_1 = P_1P$, то есть $AO - P_1O = P_1P$, или $\dfrac{a\sqrt{2}}{2} - \dfrac{x\sqrt{2}}{2} = \dfrac{x}{2}$, откуда $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 2\sqrt{2}$. Тогда площадь поверхности куба равна $6 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 48$.

ОТВЕТЫ К ТЕМАТИЧЕСКИМ ЗАДАНИЯМ

0.1. 0,2. **0.2.** –5. **0.3.** 0. **0.4.** Нет. **0.5.** 1. **0.6.** 99. **0.7.** –9. **0.8.** 2. **0.9.** 3,4. **0.10.** 3,4,7. **0.11.** 2. **0.12.** 2 и 35; 2 и 27; 6 и 35; 35 и 27; 35 и 22; 27 и 22. **0.13.** $2\cdot3\cdot5\cdot11\cdot13$. **0.14.** Для любых. **0.15.** Для любых. **0.16.** 2, 5, 6, 7. **0.17.** 3 и 40, 5 и 24, 8 и 15. **0.18.** 1, 3, 6. **0.19.** 1, 2, 3. **0.20.** 1. **0.21.** 4. **0.22.** 156. **0.23.** 3,4. **0.24.** 1,25. **0.25.** В 5 раз. **0.26.** 9 мин 40 с. **0.27.** 4. **0.28.** 9,12. **0.29.** 9,125. **0.30.** 0,22. **0.31.** 7. **0.32.** $1{,}3\cdot10^{-4}$. **0.33.** 1. **0.34.** в 300 раз. **0.35.** $20\,000 + 2000 + 70 = 22\,070 = 2{,}207\cdot10^4$. **0.36.** 20 107 кг ≈ 20,11 т. **0.37.** $\frac{5}{7}>\frac{2}{3}$. **0.38.** $\frac{3}{7}<0,(4)=\frac{4}{9}<\sin30°=\frac{1}{2}<\sqrt{0{,}99}<1<\log_3 6<2<2^{\sqrt2}$. **0.39.** $125^{80}=25^{120}<26^{120}<9^{180}=27^{120}$. **0.40.** y; z; t. **0.41.** $\frac{4}{9}$. **0.42.** $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, a, $\frac{1}{b}$. **0.43.** $\frac{1}{a}>\sqrt{a}>|a|$. **0.44.** Они равны. **0.45.** $2<3\sqrt3-2\sqrt2$. **0.46.** Да. **0.47.** 9. **0.48.** а) $|x+2|\le3$; б) $|x+2|\ge3$; в) $|x+2|>3$; г) $|x+2|<3$. **0.49.** a^2. **0.50.** a^4. **0.51.** Нет. **0.52.** Нет. **0.53.** $\frac{6}{5}$. **0.54.** 0,025. **0.55.** 3, 5, 6, 7. **0.56.** $\frac{41}{3}$. **0.57.** 4, 5. **0.58.** 1, 2, 5. **0.59.** $\frac{1}{6}$. **0.60.** $\frac{25}{3}$. **0.61.** 3, 5, 6, 7. **0.62.** 3. **0.63.** 2, 3. **0.64.** 2, 3, 7, 8, 9. **0.65.** 1, 4, 7. **0.66.** 3. **0.67.** 2. **0.68.** 5 (уравнения 1, 3, 4 сводятся к квадратным). **0.69.** 3, 4. **0.70.** 2, 3, 4. **0.71.** 3, 5. **0.72.** 2, 5. **0.73.** 1, 2. **0.74.** 1, 3, 4. **0.75.** 119. **0.76.** Да. **0.77.** Да. **0.78.** 3, 5. **0.79.** 2, 6, 7. **0.80.** Ни одного, одно, бесконечно много. **0.81.** Ни одного, одно, два. **0.82.** 8,4. **0.83.** 0,52. **0.84.** 20 %. **0.85.** 1. **0.86.** а) 5; б) 5; в) 10π; г) (3;4), (7;2). **0.87.** $2\sqrt{17}\pi$. **0.88.** $x<0, y>0$. **0.89.** 3,6. **0.90.** 4 и 7. **0.91.** 115°. **0.92.** 75°. **0.93.** 100°. **0.94.** 50°. **0.95.** 90°. **0.96.** 48°. **0.97.** 26°. **0.98.** 180°. **0.99.** $\angle B<\angle C<\angle A$. **0.100.** 20°. **0.101.** 12. **0.102.** А). **0.103.** От 1 см до 7 см. **0.104.** а4б1в2г1д1е3. **0.105.** 24. **0.106.** 14. **0.107.** 5. **0.108.** 48 см². **0.109.** 13. **0.110.** $9\sqrt3$. **0.111.** 2. **0.112.** 60°. **0.113.** $\frac{25\sqrt3}{4}$. **0.114.** 7 см². **0.115.** 5. **0.116.** 3. **0.117.** Круг. **0.118.** Равнобедренный треугольник. **0.119.** Равнобедренный треугольник. **0.120.** Круг. **0.121.** Прямоугольник. **0.122.** 39°. **0.123.** 49π. **0.124.** 5 см. **0.125.** 288π см³. **0.126.** 3 см. **0.127.** $5\sqrt3$. **0.128.** 432 см. **0.129.** 5 см. **0.130.** 74°. **0.131.** 16π. **0.132.** Окружность с центром O, радиуса R. **0.133.** Серединный перпендикуляр к отрезку AB. **0.134.** Биссектриса этого угла. **0.135.** Прямая, параллельная данным и лежащая на равном расстоянии между ними.

1.1. а) 71010; 71910; 71415; б) 56232; 56736; в) 121, 122, ..., 131; г) 9. **1.2.** а) 47; 74; б) 79; 88; 97; в) 12; 24; 36; 48; г) 36. **1.3.** а) 1644; б) 1; 2; 4; 5; 10; 20; в) 216; г) 510 мин. **1.4.** а) $10k$, k = 1, 3, 5, 7,... т. е. $k\in\mathbf{N}$ и нечетное; б) 1, 2, 4, 5, 10, 20, т. е. все делители числа 20; в) $22k$, k = 1, 2, 4, 5, 7, 8, ..., т. е. $k\in\mathbf{N}$ и не кратно 3; г) 25 и 52. **1.5.** а) $-997\frac{1}{3}$; б) $5556\frac{19}{30}$; в) –2,5; г) $\frac{1}{12}$. **1.6.** а) 100,4; б) 5; в) 7,77; г) $\frac{52}{7}$. **1.7.** а) $\frac{11}{15}$; б) –6,5; в) –1; г) 10. **1.8.** а) 0; б) 12; в) –7,35; г) 11. **1.9.** а) –2,5; б) 0,01; в) 4; г) –10. **1.10.** а) 2; б) 0,5; в) $\frac{2}{3}$; г) 1. **1.11.** а) $\frac{50}{101}$; б) $\frac{49}{200}$; в) $\frac{341}{63\cdot65}$; г) $98\cdot33\cdot100-2=323\,398$. Указание: каждое из слагаемых представьте так: $2\cdot3=(1\cdot2\cdot3-2\cdot3\cdot4):(-3)$, $3\cdot4=(2\cdot3\cdot4-3\cdot4\cdot5):(-3)$ и т. д. **1.12.** а) $2^{-12}\cdot3^9$; б) 1; в) 8,7; г) $\frac{1}{5}$. **1.13.** а) –5; б) 6; в) $2\sqrt2$; г) $2\cdot3^{20}$. **1.14.** а) 121; б) 18; в) 21; г) 0. **1.15.** а) $-2\sqrt2$; б) $-9\sqrt2$; в) $3-\sqrt3$; г) 5. **1.16.** а) 0,5; б) –2; в) 4,4; г) –0,5. **1.17.** а) $-2\sqrt[4]{24}$; б) –10; в) –9; г) –5. **1.18.** а) 1; б) –3; в) –47; г) 12. **1.19.** а) $\sqrt2+\sqrt3+\sqrt5-1$; б) $1+\sqrt3+\sqrt5-\sqrt2$; в) $\sqrt5-\sqrt3+\sqrt2-1$; г) $\frac{2-\sqrt2}{2-\sqrt3}-\sqrt[6]{12}$. **1.20.** а) $\frac{2-\sqrt2}{1+\sqrt2}$; б) $\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2+\sqrt3}$; в) $\frac{\sqrt2+\sqrt3}{\sqrt[4]{2}}$; г) $1-\sqrt2$. **1.21.** а) –1; б) 9; в) –14; г) 0,75. **1.22.** а) $-\sqrt2-\sqrt3$; б) $7\sqrt2-8$; в) 0; г) 2. **1.23.** а) $-\sqrt2$; б) $\sqrt2$; в) $-\sqrt6$; г) $\sqrt5$. Указание: обозначив искомое выражение x, возведите обе части в куб и воспользуйтесь исходным выражением. Затем решите полученное кубическое уравнение относительно x. **1.24.** а) –4; –1; 0; 3; б) –8; –4; –2; 2; в) (–7;14), (–1;–4), (1;6), (7;–12). Указание: выразите y через x; г) (0;–2), (2;–2). Указание: выразите y через x. **1.25.** а) (–6;5), (6;5), (–6;–5), (6;–5); б) (3;1), (–3;–1), (–3;1), (3;–1); в) (1;1), (–1;–1), (2;–1), (–2;1), (1;–3), (–1;3), (2;–3), (–2;3). Указание: выделите полные квадраты; г) (1;1), (1;–3), (0;3), (0;–3), (–5;7), (–5; 3), (–4;7), (–4;1). Указание: выделите полные квадраты.

2.1. а) $100a-505$; б) $2{,}07a+1{,}32b$; в) $\frac{200}{a}$; г) $\frac{a-17}{17}\cdot100$. **2.2.** а) $\frac{9+6x-x^2}{2}$; б) $16-3(2-x)^2$; в) $16x$; г) $15-3x$. **2.3.** а) $3x-4a^2$; б) $3a^2b-4ab^2$; в) $1-7y-2x$; г) $6pq-2p^2-2q^2-p+q-1$. **2.4.** а) $8y^3$; б) a; в) $3x^2$; г) $3-3x$. **2.5.** а) 1; б) 8; в) –14; г) –6. **2.6.** а) –2; б) 2; в) –1; г) 6,8. **2.7.** а) $(x+b)(a-y)$; б) $(x-c)(y-d)$; в) cx; г) zy. **2.8.** а) $x+1$; б) x; в) $\frac{-1}{x+y}$; г) $\frac{y}{x}+2+\frac{x}{y-1}$. **2.9.** а) $\frac{2}{a}+1$; б) a^2; в) $\frac{-a^2}{a+1}$; г) a. **2.10.** а) $3a^2x^3y^{-1}\left(5ax^2y^{-1}-3y^{-3}-4a^2xz\right)$; б) $2ab^x\left(3ab-5a^2+2b^{x+1}\right)$; в) $37ab^2c^3(2bc+3ac-4ab)$; г) $6^xa^{2x+2}b^{-2x}$. **2.11.** а) -2^{2x+1}; б) $9\cdot2^{2x^2}$; в) $-\frac{43}{3}$; г) 5. **2.12.** а) $a=-\frac{b}{2}$; б) $a=\frac{b^2+3b}{b-3}$; в) $a=\frac{2}{3}-\frac{1}{3b}-\frac{b}{3}$; г) $a=\frac{2}{5}-\frac{b}{10c}$. **2.13.** а) $a=\frac{bc}{b+c}$; б) $b=\frac{ac}{c-a}$; в) $b=\frac{c}{a-2}$; г) $a=\frac{b+c}{bc-1}$. **2.14.** а) $\frac{3a+9}{a}$; б) $8\frac{a}{b}$; в) 1; г) –0,5. **2.15.** а) $a-b$; б) a; в) $\frac{1}{b-a}$; г) $\frac{1}{-a-b}$. **2.16.** а) $x^{-\frac{5}{6}}+a^{6,5}+b^{\frac{1}{2}}$; б) $a^{\frac{5}{8}}+b^{4,5}+c^{\frac{1}{8}}$; в) a^2; г) $-2x^{11}y^7$. **2.17.** а) –2; б) –0,5; в) –8; г) 4. **2.18.** а) $\frac{11}{8}$; б) 1; в) 2; г) 29. **2.19.** а) $a^{\frac{1}{2}}b^{-2}$; б) $a^{-11}b^{-3}$; в) $x^{-5}y^{-5}$; г) $a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$. **2.20.** а) $\sqrt[3]{x}$; б) $x^{-\frac{1}{6}}$; в) $\sqrt[6]{x}$; г) b^{-2x}. **2.21.** а) $(x+y+3a)(x+y-3a)$; б) $\left(2x-y-2z^2\right)\left(2x-y+2z^2\right)$; в) $\left(x-y-z-\sqrt2z\right)\left(x-y-z+\sqrt2z\right)$; г) x^2+3-y^2. **2.22.** а) $(a-b-c)(a-b+c)$; б) $(a^2+2b-2c)(a^2+2b+2c)$; в) $(a+b+1)(a+b-1)$; г) $(24^2x-10)(24^2x+10)$. **2.23.** а) $\frac{1+x}{1-x}$; б) $\frac{2x+1}{1-3x}$; в) $\frac{1-3^x}{1+3^x}$; г) $\frac{3\sin x+1}{3\sin x-1}$. **2.24.** а) $(a+b+1)(a+b+2)$; б) $(a-b+1)(a-b-2)$; в) $(2a-b-1)(2a-b-2)$; г) $\left(x^2+x-1\right)\left(x^2+x+4\right)$. **2.25.** а) $\frac{3x-17}{x^2-9}$; б) 0; в) $\frac{7-3x}{x^2-4}$; г) $1+x$. **2.26.** а) $\frac{4(4-x)}{(x-3)(x+4)}$; б) 0; в) $3x+6$; г) $\frac{1}{4x}$. **2.27.** а) $\frac{-4x}{1-x^4}$; б) $\frac{8x^7}{1-x^8}$; в) $\frac{16}{1-x^{16}}$; г) $\frac{2x+1}{3x+2}$. **2.28.** а) $(x-y)(x+2y)$; б) $(x+y)(3x-4y)$; в) $(x-y)(x^2+y^2-xy)$; г) $\left(2^x-3^x\right)\left(2^x+3\cdot3^x\right)$. **2.29.** а) 2; б) $-\frac{3x+6}{9x+2}$; в) x^2-x+2; г) x^2+2. **2.30.** а) $x+y-1$; б) $5x-3y$; в) $x+y$; г) $x+y+2$. **2.31.** а) –1; –2; –0,5; б) 0,5; в) $\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{3}$. **2.32.** а) $1-2y$; б) $1+a$; в) $1-a$; г) $a-1$. **2.33.** а) 2; б) –3; в) $-\frac{5}{6}$; г) 0 либо $-\frac{14}{13}$. **2.34.** а) 7; б) 20; в) –6; г) –1. **2.35.** а) 2; б) $2\sqrt2$; в) –2; г) $-2\sqrt3$. **2.36.** а) –18,5; б) 17; в) 3; г) $\frac{\sqrt{37}}{2}$. **2.37.** а) 66; б) 15; в) –12; г) –0,5. **2.38.** а) –1; б) 35; в) 0; г) 7. **2.39.** а) $a=0{,}25$, $b=-0{,}25$; б) $a=-1$, $b=2$; в) $a=b=1$, $c=-1$; г) $a=3$, $b=-7$, $c=4$.
2.40. а) $\frac{2x-5}{x-1}=2+\frac{-3}{x-1}$; б) $\frac{5x+3}{2x+1}=2{,}5+\frac{0{,}5}{2x+1}$; в) $\frac{x^2+x+1}{x+1}=x+\frac{1}{x+1}$; г) $\frac{x^2-x+2}{x+1}=x-2+\frac{4}{x+1}$.
2.41. а) $\frac{x^3+x^2+x+1}{x-2}=x^2+3x+7+\frac{15}{x-2}$;

б) $\dfrac{x^4-3x^3-x^2+4x-2}{x^2-1}=x^2-3x+\dfrac{x-2}{x^2-1}$; в) $\dfrac{2x^3-x^2+x-1}{x+1}=2x^2-3x+4-\dfrac{5}{x+1}$; г) $p=-3$, $q=-1$. Указание: разделив «в столбик» многочлен на многочлен, получим в остатке $x(p-2q+1)+(1+q)$. Этот остаток должен быть тождественно равен нулю, т. е. $1+q=0$ и $p-2q+1=0$. **2.42.** а) 2; б) 12; в) 3; г) $\frac{1}{16}$. **2.43.** а) $(x-2y)^2+y^2$; б) $(x+y+1)^2-2$; в) 4; г) 1. **2.44.** а) $(a+b)^2+(a-b)^2$; б) $(a+1)^2+(a-1)^2+a^2$; в) $(n+1)^2-n^2$; г) $(a^2-a)^2+(a^2+a)^2+(a^2-1)^2$. **2.45.** а) $102-x$; б) 1; в) $\pi+e-5$; г) $\sin x-2^{x^2}$. **2.46.** а) 1010; б) 100; в) $x^2-12x+38$; г) 0. **2.47.** а) $-6x^3y^2$; б) $-2x+3x-4x^2$; в) $\sqrt{5}x-2x$; г) $a\le 0$. **2.48.** а) $1-\sqrt{1-x^2}$; б) $1+x^2$; в) $-\log_{\lg 11}(1-x^2)$; г) если $x<0$, то $-0{,}5$; если $x>0$, то $+0{,}5$. **2.49.** а) 3; б) $4-2x$; в) $|a+1|+|a+\sqrt{2}|$; г) 2. **2.50.** а) 5^a+2^b; б) $1+\log_2 x$; в) $|\sin x+\cos x|$; г) $1+x$. **2.48.** а) 1; б) 2; в) 2; г) 4. **2.52.** а) $x^2+\sqrt[3]{x}$; б) 0; в) $\sqrt{x}+x$; г) $a-\sqrt[3]{a}$. **2.53.** а) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-9}$; г) $\sqrt[4]{x}+2$. **2.54.** а) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$; в) $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$; г) $1+a^{-\frac{1}{3}}$. **2.55.** а) $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$; в) $\sqrt{a}$; г) $\sqrt{a}$. **2.56.** а) $-4a\sqrt{-a}$; б) $2(x-1)^2\cdot\sqrt{-2(x-1)}$; в) $-2y\cdot\sqrt[4]{-2y}$; г) $-y\sqrt[4]{-y^3}+y^2\sqrt[3]{y}$. **2.57.** а) $-\sqrt{-x^3}+\sqrt[3]{x^4}$ или, в другом виде, $-\sqrt{-x^3}-\sqrt[3]{-x^4}$; б) $\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^4}$; в) $-\sqrt{2(x-2)^3}$; г) $-\sqrt{-x^3-3x}-\sqrt{(x+1)^2(-x-4)}$. **2.58.** а) $-\sqrt{-b}$; б) $\sqrt{-b}-\sqrt{-a}$; в) $\sqrt{-a}$; г) $\sqrt{-a}+1$. **2.59.** а) 0,5; б) 2; в) $2\sqrt{3}$; г) $-\frac{7}{12}$. **2.60.** а) 1; б) $ab+1$; в) $b-a$; г) b. **2.61.** а) 1; б) $b-a$; в) $-\frac{1}{a}$; г) 1. **2.62.** а) 0,5; б) 2; в) $-2\sqrt{a}$; г) $\sqrt{x}$. **2.63.** а) 3; б) 2; в) 1; г) 4.

3.1. а) 3; б) 11; в) –10; г) 7,5. **3.2.** а) 1,5; б) 0; в) 1; г) 3. **3.3.** а) $\left(\frac{2}{7};0\right)$; б) (0;5); в) $\left(-\frac{2}{3};0\right)$; г) (0; –1). **3.4.** а) 1; б) $27\sqrt[6]{15}$; в) 0; г) 1. **3.5.** а) 1; б) 0,6; в) 0,2; г) $\frac{57}{26}$. **3.6.** а) 4; б) 2; в) 3; г) 4, 5. **3.7.** а) $y=\dfrac{2x-1}{3}$; б) $y=-x+2$; в) $y=-x+3$; г) $y=-2x+9$. **3.8.** а) $\frac{17}{3}$; б) $\frac{7}{3}$; в) $-\frac{81}{28}$; г) 4. **3.9.** а) –0,25; б) 3; в) $c=4$, $b=14$; г) –2. **3.10.** а) 20; б) $\frac{5}{3}$; в) 30; г) 240. **3.11.** а) 2; б) –4; в) 5; г) ни при каком. **3.12.** а) (1;1); б) (–1;1); в) (2; 0); г) (–1;1). **3.13.** а) 17; б) 2; в) 20; г) 7,5. **3.14.** а) (2;4); б) (1;1); в) (26,5;–5,5); г) (0;–2). **3.15.** а) Нет решений; б) нет решений; в) нет решений; г) нет решений. **3.16.** а) $\left(x;\dfrac{2-2x}{5}\right), x\in\mathbf{R}$; б) $\left(x;\dfrac{5x+1}{2}\right), x\in\mathbf{R}$; в) $\left(x;\dfrac{3x-1}{2}\right), x\in\mathbf{R}$; г) $\left(\dfrac{2y-3}{5};y\right), y\in(0;+\infty)$. **3.17.** а) $\left(x;\dfrac{1-2x}{3}\right), x\in\mathbf{R}$; б) нет решений; в) (2;0); г) нет решений. **3.18.** а) (0,5;1); б) (2;2); в) (2;1), (–2;1), (2;–1), (–2;–1); г) (1;10), (–1;10). **3.19.** а) –4; 2; б) –2,5; 1; в) –4; 1; г) $a=3$, $b=1$. **3.20.** а) 2; б) 1,5; в) 0;–1; г) 1. **3.21.** а) 0; –3; б) $a\ne 6$; в) 1; г) $a\ne 0$, $b\ne 2$. **3.22.** а) $\left(-\infty;-\frac{23}{4}\right]$; б) $(-\infty;-4)$; в) $(3;+\infty)$; г) ни при каких. **3.23.** а) $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)$; б) $(-\infty;2]$; в) $(-\infty;-2)$; г) $[-2{,}8;+\infty)$. **3.24.** а) $(3;+\infty)$; б) $(-\infty;3]$; в) $(-\infty;1{,}5)$; г) $(-\infty;-1{,}5]$. **3.25.** а) $[-1;+\infty)$; б) $(-\infty;1)$; в) $(-\infty;1]$; г) $(-\infty;1)$. **3.26.** а) $(-\infty;3]$; б) $(40;+\infty)$; в) $(-\infty;0)$; г) $(-\infty;1)$. **3.27.** а) $[-5;-3)$; б) $(-\infty;-5]$; в) $\varnothing$; г) $[3;+\infty)$. **3.28.** а) $(-4;5]$; б) $\left(-3;-\frac{7}{3}\right]$; в) $\left(\frac{74}{21};\frac{94}{21}\right]$; г) $\left(0;\frac{2}{3}\right)$. **3.29.** а) $[1;2)\cup(2;5]$; б) $[-3;-1)\cup(-1;1]$; в) $\left(\frac{8}{7};2\right)\cup(2;+\infty)$; г) $(2{,}5;3)$. **3.30.** а) $[1;3)$; б) $\left(\frac{1}{3};\frac{25}{6}\right]$; в) $\left(\frac{1}{2};4\right)$; г) $[2{,}6;2{,}75)$.

4.1. а) 2; 0,2; б) $-\frac{3}{2};\frac{5}{3}$; в) $-\frac{3}{2};\frac{2}{3}$; г) $1;-\frac{1}{7}$. **4.2.** а) (1;4) и (2;3); б) (–1;0) и (2;3); в) ось Oy в точке (0;–2), ось Ox в точках $\left(\frac{2}{3};0\right)$ и (1;0); г) $-\frac{4}{3}$; 1. **4.3.** а) 5; б) 6; в) $3\sqrt{10}$; г) $5+\sqrt{6}$ либо $5-\sqrt{6}$. **4.4.** а) $b=-1$, $x=-3$; б) $a=-1$, $x=-1$; в) $a=-4$, $b=4$; г) $a=2$, $a=0$. **4.5.** а) 0, 2009; б) 0, 1111; в) 0, $\frac{2}{303}$; г) 0, $\frac{111}{67}$. **4.6.** а) $\pm\sqrt{2{,}5}$; б) нет решений; в) нет решений; г) $\pm 0{,}02$. **4.7.** а) 0; –2; б) 6; –7; в) 5; г) –2,5; 4. **4.8.** а) –2; $\frac{23}{44}$; б) –6; 2; в) –1; $-\frac{9}{19}$; г) 2; 11,8. **4.9.** а) 4; б) –2; 1; в) 0,5; 1; г) $-\frac{1}{3}$; 0. **4.10.** а) $-1;\frac{-1}{2010}$; б) 1; –7. Указание: корни этого квадратного уравнения надо найти подбором; в) 1; –2011; г) $\sqrt{3};1-\sqrt{3}$. **4.11.** а) Нет решений; б) $\pm 2;\pm\sqrt{3}$; в) 1; $\frac{1}{16}$; г) ±1. **4.12.** а) –0,5; 2; б) 1;3; в) $-\frac{2}{9}$; 1; г) –1;3. **4.13.** а) –2;1; б) 0,5; 0; –1; 1,5; в) –1,5;1; г) –3;1. **4.14.** а) $\left[-\frac{2}{3};1\right]$; б) $(-\infty;-9]\cup[2;+\infty)$; в) $(-4;1)$; г) $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. **4.15.** а) $\left[-\sqrt{15};\sqrt{15}\right]$; б) $(-\infty;-19)\cup(19;+\infty)$; в) $(-\infty;+\infty)$; г) $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

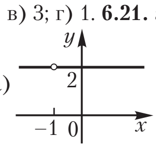
4.16. а) $(-\infty;0)\cup\left(\frac{5}{6};+\infty\right)$; б) $\left(-\frac{3}{2};0\right)$; в) $(-1;0)$; г) $(0;1)$. **4.17.** а) $[-1;2]$; б) $[-6;3]$; в) $(-10;-2]\cup[3;10)$; г) $\left(-\frac{17}{6};1\right)$. **4.18.** а) $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$; б) $[-4;-1]$; в) $\left(-\frac{13}{3};1\right)$; г) $\left(-\frac{27}{8};1\right)$. **4.19.** а) $\left[-2;\frac{4}{7}\right]$; б) $\left(-\frac{1}{3};3\right)$; в) $(-1;0)$; г) $[-1;1]$. **4.20.** а) $(-\infty;+\infty)$; б) $\left(-\infty;\sqrt{1{,}5}\right)\cup\left(\sqrt{1{,}5};+\infty\right)$; в) $\left(-\infty;\sqrt{2}\right]\cup\left[2;+\infty\right)$; г) $(3;+\infty)$. **4.21.** а) $(-1;1)$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $(-\infty;-2]\cup\{0\}\cup[2;+\infty)$; г) $(-\infty;+\infty)$. **4.22.** а) $[-1;1)$; б) $[2;2{,}5)$; в) $(-1;0)\cup(0;2)$; г) $(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(4;+\infty)$. **4.23.** а) $\{-3\}\cup[3;4]$; б) $\{-2\}\cup[1;2]$; в) $\{-2\}$; г) $\{3\}$. **4.24.** а) Нет решений; б) нет решений; в) $(1;5)\cup(5;7)$; г) $(2;4)\cup(4;8)$. **4.25.** а) $\{-2\}\cup[1;+\infty)$; б) $\{3\}$; в) $\{-1;2\}$; г) $\left\{0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

5.1. а) $2(x-1)(x+2)$; б) $2(x+1)(x-2)$; в) $(2x+1)(x-1)$; г) $(2x+1)(2x+1)$. **5.2.** а) $(x+1)^2-2$; б) $2-(x-1)^2$; в) $1-(x-1)^2$; г) $(x+0{,}5)^2+1{,}75$. **5.3.** а) (1,5;–1); б) (1;3); в) (4;25); г) (2;–8). **5.4.** а) $[-3;+\infty)$; б) $(-\infty;1]$; в) $(-\infty;2]$; г) $[1;+\infty)$. **5.5.** а) 1; б) 2; в) –0,25; г) 1. **5.6.** а) 4; б) 3; в) 3; г) 3. **5.7.** а) $y=-x^2+2x+3$; б) $y=x^2-3x$; в) 1; г) 1005. **5.8.** а) $y=-x^2-4x$; б) $y=-3(x-2)^2+1$; в) $y=-\dfrac{x^2}{4}-x$; г) $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}$. **5.9.** а) 5; б) 1; в) 2; г) 3. **5.10.** а) $a<0, b<0, c>0$; б) $a<0, b>0, c<0$; в) $a>0, b<0, c<0$; г) $a>0, b>0, c>0$. **5.11.** а) $x^2-x(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}=0$; б) $x^2-\dfrac{3}{\sqrt{2}}x+1=0$; в) $x^2-x(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}=0$; г) –2. **5.12.** а) 1,5 и $\dfrac{\sqrt{265}}{4}$; б) такого треугольника не существует; в) 2,25; г) 3 и $\sqrt{238}$. **5.13.** а) $\frac{70}{9}$; б) найти нельзя; в) найти нельзя; г) –36. **5.14.** а) $x^2+2x-120=0$; б) $h(h-4)=48$; в) $0{,}5a(a-3)=60$; г) $x(x-30)=351$. **5.15.** а) $x^2-10x+22=0$; б) $4x^2-6x+1=0$; в) $2x^2+11x+5=0$; г) $a^2x^2+(ab-ac)x-bc=0$. **5.16.** а) –5;5; б) $-\dfrac{5\sqrt{11}}{11};\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$; в) $-\dfrac{8\sqrt{23}}{23};\dfrac{8\sqrt{23}}{23}$; г) $\dfrac{57+30\sqrt{2}}{7}$;. $\dfrac{57-30\sqrt{2}}{7}$. **5.17.** а) 1; 2; 6; б) –1; в) 0; 1; г) 0; 1; $-\frac{1}{7}$. **5.18.** а) $\left(\frac{1}{4};1\right]$; б) $[-3;0]$; в) $[1;+\infty)$; г) $(-4;4)$. **5.19.** а) –1; 9; б) ±2; в) $\frac{1}{3}$; г) $[-2;0]$. **5.20.** а) $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$; б) $(-\infty;-5]$; в) $(0{,}5;1)$; г) $(-2;0)$. **5.21.** а) $\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{2}$; б) $6\pm\sqrt{60}$; в) 4; $\frac{16}{9}$; г) 1; $-\frac{25}{3}$. **5.22.** а) 6; б) 1; 1,8; в) $\pm 3\sqrt{5}$; г) –1. **5.23.** а) $(1;+\infty)$; б) $(-\infty;4]$; в) $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$; г) $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

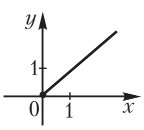
6.1. а) 21,5; б) $8(\pi+9)$; в) 80; г) $74 - 2\pi$. **6.2.** а) 5; б) 2; в) 4; г) 5. **6.3.** а) $(-\infty;-3)\cup(-3;1)\cup(1;+\infty)$; б) [3;4]; в) [0;2]; г) $[-5;-1)\cup(-1;2]$. **6.4.** а) (1;4]; б) (–0,5;1]; в) (–8;–2]; г) $[-\sqrt{3};0)\cup(0;\sqrt{3}]$.

6.5. а) $2x-2{,}5$; б) $x-5$; в) $3x-1+\frac{1}{x}$; г) $13x-17$.

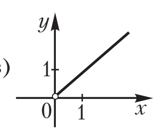
6.6. а) $-x^3+4x^2-x+1$; б) x^4+8x^3+1; в) x^6+2x^3+1; г) x^6+x^2-2x+2. **6.7.** а) $f(x)=\frac{x}{2}-3$; б) $f(x)=\frac{1}{x}+1$; в) $f(x)=\frac{1}{1-x}$. Указание: обозначив $\frac{x-1}{x}=t$, находим $x=\frac{1}{1-t}$, и значит, $f(t)=x \Leftrightarrow f(t)=\frac{1}{1-t}$; г) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. **6.8.** а) $g(x)=2x-1$; б) $g(x)=\frac{3x+1}{2}$; в) $g(x)=x$; г) $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$. **6.9.** а) 5, 6, 7, 8, 10; б) 1, 2; в) 4, 9; г) 3. **6.10.** а) 1, 2, 5; б) 2, 4, 5; в) 1, 2; г) 2, 4, 5. **6.11.** а) Не является ни четной, ни нечетной; б) не является ни четной, ни нечетной; в) не является ни четной, ни нечетной; г) нечетная. **6.12.** а) Четная; б) нечетная; в) нечетная; г) нечетная. **6.13.** а) 1, 2; б) 1, 2, 5; в) 2, 3, 4, 5; г) 3, 5. **6.14.** а) 9,6; б) 4,2; в) 54; г) $\frac{12}{13}$. **6.15.** а) 6; б) 6; в) 8; г) 8. **6.16.** а) –1; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{4}$. **6.17.** а) 3; б) 1, 2, 3; в) 4; г) 4. **6.18.** а) 3, 4; б) 2, 4; в) 2; г) 1, 3, 4. **6.19.** а) 3; б) 1; в) 2, 5; г) 1, 5. **6.20.** а) 2; б) 4; в) 3; г) 1. **6.21.** а) 4; б) 4; в) 3; г) 5. **6.22.** а) 5; б) 1; в) 4; г) 4. **6.23.** а)



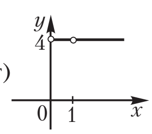
б)



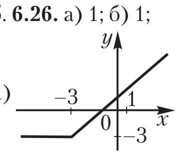
в)



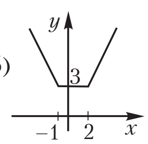
г)



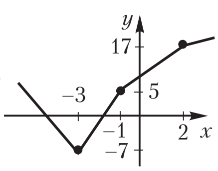
6.24. а) 1; б) 4; в) 1; г) 5. **6.25.** а) 2; б) 3; в) 4; г) 5. **6.26.** а) 1; б) 1; в) 1; г) 1. **6.27.** а) 4; б) 3; в) 2; г) 3. **6.28.** а)



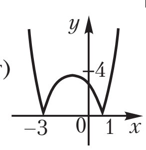
б)



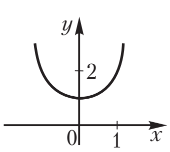
в)



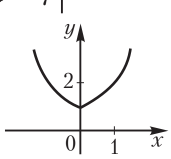
г)



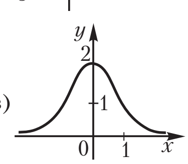
6.29. а)



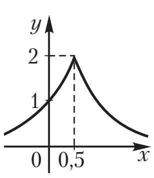
б)



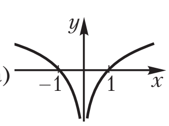
в)



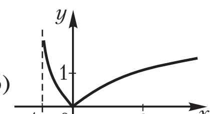
г)



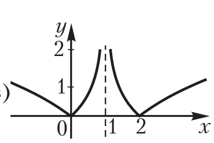
6.30. а)



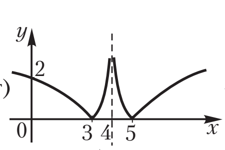
б)



в)

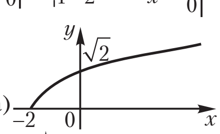


г)

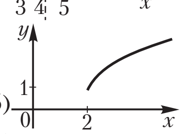


{1;2;3;5} — 4 числа.

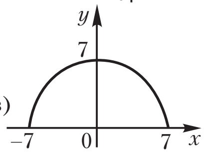
6.31. а)



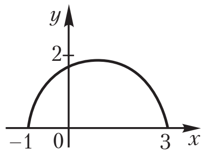
б)



в)



г)



6.32. а) 2; б) 3; в) 5; г) 4. **6.33.** а) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$; б) [–1;1); в) [–1;1); г) $[2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}]$. Указание: найдите, при каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2+2x+3}{x^2-2x+3}=a$ имеет корни. **6.34.** а) $\left[\sqrt{2};2\right]$; б) [0;1]; в) [0;5]; г) [0;3]. **6.35.** а) [0,5;+∞); б) (0;9]; в) (10;+∞); г) $(-1;0]\cup(3;+\infty)$. **6.36.** а) [1;2]; б) [–2;–1]; в) (–∞;0]; г) [1;+∞). **6.37.** а) 1) (–8;10]; 2) [–6;5]; 3) –1; 3; 10; 4) –5; –2; 4; 9; 5) (–8;–5), (–5;–2), (4;9); 6) (–8;–2], [4;9]; 7) (–8;–7], [–5;–3], [1;5], [6;8]; 8) [–7;–5], [–3;1], [5;6], [8;10]; 9) (–8;–7), (–5;–3), (1;5), (6;8); 10) (–7;–5), (–3;1), (5;6), (8;10); 11, 12, 13, 14) –7; –5; –3; 1; 5; 6; 8. б) 1) [–7;10]; 2) 10; 3) –6; –2; 5; 4) 7; 5) 3; 5; 6) (–7;–5); (–5;–3); (3;5); 7) (–3;3); (5;10); 8) 3; 5. в) 1) (–6;9]; 2) [–6;5); 3) –5; –1; 7; 9; 4) $(-6;1]\cup[4;9]$; 5) $\{-3\}\cup[1;4]$; 6) [–3;–1]; [3;8]; 7) (–6;–3]; [–1;3]; [8;9); 8) –3; –1; 3; 8. г) 1) [–8;10]; 2) [–5;5]; 3) 5; 4) 3; 5) 10; 6) 8; 7) 5. **6.38.** а) 1 346 789, б) –2; $\frac{11}{3}$; в) $-3-\sqrt{14}$; 1; 5; г) –4. **6.39.** а) 2; –0,125; б) –4; $4\pm\sqrt{2}$; в) 0,5; –2 ; г) –2,2; 2,4. **6.40.** а) $f'(x)=x^2-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; б) $f'(x)=\frac{-10}{x^6}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; в) $f'(x)=10x^4+7$; г) $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$. **6.41.** а) 1; б) 2; в) 28; г) –4,5.

6.42. а) –1; б) 2; в) –17; г) 0,25. Указание: надо вычислить $y'\left(\frac{1}{2}\right)$.

6.43. а) $f'(x)=\cos x+\sin x$; б) $f'(x)=\frac{3}{\cos^2 x}-2\sin x$; в) $f'(x)=2\cos x-2\sin x$; г) $f'(x)=\frac{3}{\cos^2 x}+\frac{2}{\sin^2 x}$. **6.44.** а) $f'(x)=0$; б) $f'(x)=\log_2 7$; в) $f'(x)=0$; г) $f'(x)=5x^4$. **6.45.** а) $f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$; б) $f'(x)=-\cos x$; в) $f'(x)=-\sin x$; г) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Указание: сократите исходную дробь. **6.46.** а) $f'(x)=7^x\ln 7+\frac{5}{x\ln 7}$; б) $f'(x)=6^x\ln 6+6x^5$; в) $f'(x)=2e^x-\frac{5}{x}$; г) $f'(x)=e^x+\frac{3}{x}$.

6.47. а) $f'(x)=\sin x+x\cos x$; б) $f'(x)=1+\ln x$; в) $f'(x)=3x^2e^x+x^3e^x$; г) $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$.

6.48. а) $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$; б) $f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x^2+3)^2}$; в) $f'(x)=-\frac{x^2-2x+2}{(x^2-2)^2}$; г) $f'(x)=\frac{-x^4+15x^2+6x}{(x^3+3)^2}$.

6.49. а) $f'(x)=-\frac{18}{(2x-1)^4}-\frac{3}{2\cdot\sqrt{(3x+1)^3}}$; б) $f(x)=9(3x-1)^2+\frac{4}{(2x+5)^2}$; в) $f'(x)=-2(1-x)-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$; г) $f'(x)=10(2x+1)^4+\frac{2}{\sqrt{4x-3}}$. **6.50.** а) 0; б) 2; в) 1,5; г) 0 и 5. Указание: надо решить уравнение $y'=y$, т. е. $5x^4=x^5$. **6.51.** а) $-\frac{1}{6}$; б) 8; в) 1,25; г) $\frac{3}{e}$. **6.52.** а) $f'(x)=3\cdot e^{3x+1}-2\sin 2x$; б) $f'(x)=2\cos 2x-3\sin(3x-1)$; в) $f'(x)=\frac{5}{\cos^2 5x}-\frac{1}{(3-x)\ln 2}$; г) $f'(x)=3e^{3x}+\frac{3}{\sqrt{6x+1}}-\frac{2}{1-2x}$. **6.53.** а) 2π; б) $3e^2$; в) –2; г) –0,5. **6.54.** а) 4); б) 5) и 6); в) 5); г) 4) и 6). **6.55.** а) 3); б) –2. Указание: фактически надо определить, в точке с какой абсциссой расположена вершина параболы — графика этой квадратичной функции; в) $y = 5$. Указание: функция имеет горизонтальную касательную только в точке экстремума. Для параболы уравнение такой касательной имеет вид $y = y_0$, где y_0 — ордината вершины; г) –10. **6.56.** а) Возрастает на (–∞;–3] и на [3;+∞); убывает на [–3;3]; б) возрастает на [–0,25;0] и на [1;+∞); убывает на (–∞;–0,25] и на [0;1]; в) убывает на (–∞;–2), на (–2;2) и на (2;+∞); г) 6. **6.57.** а) [0;9]; б) [–6;0]; в) [4;8]; г) [12;14]. **6.58.** а) Возрастает на $\left[-\frac{1}{6};+\infty\right)$; убывает на $\left(-\infty;-\frac{1}{6}\right]$; б) возрастает на $\left[\frac{1}{6};+\infty\right)$; убывает на $\left[\frac{1}{6};+\infty\right)$; в) 2; г) 1. **6.59.** а) 1); б) 2); в) 3; г) $f(a) < f(b)$. **6.60.** а) 4); б) 3); в) 3); г) 2), 3), 5). **6.61.** а) 1; б) 2; в) [–8;–6] и [–1;3]; г) [–6;–1]; [3;5] и [7;9].

6.62. а) 2); б) 3); в) 1,92; г) 5. **6.63.** а) $x = -3$ — точка максимума, $x = 21$ — точка минимума; б) 1,5 — точка минимума. Указание: $x = 1$ и $x = 2$ не являются точками экстремума, хотя $f'(1) = 0$, $f'(2) = 0$; в) а) и д); г) –5. **6.64.** а) 1; –3,5 ; б) –22,8; в) 7; г) 2. **6.65.** а) $(1;+\infty)$; б) $a \in [0;+\infty)$; в) при $a \geq 2$ функция имеет на $[-a;a]$ две точки, подозрительные на экстремум; при $1 \leq a < 2$ — одну точку, подозрительную на экстремум; при $0 < a < 1$ — ни одной; г) при $a < 1$ $x_{\min} = 1$; при $a > 1$ $x_{\min} = a$; при $a = 0$ функция не имеет экстремумов. **6.66.** а) Наибольшее –1, наименьшее –21; б) наибольшее — 6, наименьшее — 2; в) наибольшее — 6, наименьшее 4; г) наибольшее –1,5, наименьшее –2,5. **6.67.** а) $\max\limits_{[-3;1]} f(x) = f(1) = 17$; $\min\limits_{[-3;1]} f(x) = 0$; б) $\max\limits_{[-1;0]} f(x) = f(-1) = 2$; $\min\limits_{[-1;0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; в) $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(1) = 5$; $\min\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = -52$; г) 3. **6.68.** а) 1; б) 3; в) 1; г) $\frac{4}{27}$. **6.69.** а) 3; б) 3; в) –4; –2; 1; г) –4; –2; 2; 4. **6.70.** а) –3; б) 1; 6; в) 1) и 3); г) 1) и 3). **6.71.** а) –6; –2; 5; б) 2; в) две точки экстремума. Касательные в точках $x = -4$, $x = 2{,}5$, $x = 4$; г) –3. **6.72.** а) 1) $[-5;-1]$, $[2;6)$; 2) $(-6;-5]$, $[-1;2]$; 3) 2; 4) –1; 5) –5; –1; 2; 6) 2; 7) –1; 8) 3. б) 1) $(-4;7]$; 2) $[7;8)$; 3) нет; 4) 7; 5) 7; 6) 4; 7) 3; 8) –3. в) 1) $[-5;6)$; 2) $(-6;-5]$; 3) –5; 4) нет; 5) –5; –2; 6) 5; 7) 5; 8) –5. г) 1) $(-8;-6]$, $[-1;3]$; 2) $[-6;-1]$, $[3;9)$; 3) –1; 4) –6 и 3; 5) 3; 6) –2; 7)–1; 8) –3. **6.73.** а) $\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **6.74.** а) –5; б) 1; в) –4; г) –7. **6.75.** а) 2; б) 1; в) –3; г) 4. **6.76.** а) $-\frac{1}{3}$; б) 2; в) –1; г) 135°. **6.77.** а) 1; б) 4; в) –1 или 3; г) 1 или $-\frac{1}{3}$. **6.78.** а) 5; б) $y = 7x - 19$; в) $\frac{\pi n}{4}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. Указание: сначала найдите угловой коэффициент касательной в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$; г) πn; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. **6.79.** а) –2,5; б) $A(-3;11)$. Указание: угловой коэффициент касательной равен –1; в) $\frac{7}{2}\sqrt{5}$, или $\frac{\sqrt{5}}{2}$, или 0. Указание: угловой коэффициент касательной равен либо 2, либо –2; г) (3;–11) — точка касания; 10,5 и 21 — длины отсекаемых отрезков. **6.80.** а) $y = 7x - 16$; б) $y = 0$; в) $y = -6x + 5$; г) $y = 6x - 7$ и $y = -6x - 19$. **6.81.** а) 11; б) 2; в) (–7;4); г) 5. **6.82.** а) $y = x^2 + 2x - 3$; б) $y = x^2 + 2x + 3$; в) $y = x^2 - 2x + 3$; г) $y = x^2 - 4x + 3$. **6.83.** а) $\left(2;\frac{1}{2}\right)$; б) –35 и 29; в) $y = 4x - 4$; г) –4; 0. **6.84.** а) $y = -2x + 5$; б) $x_0 = 0{,}5$; $y = -x - 2{,}75$; в) $\left(-1;\frac{76}{15}\right)$ и (3;–8); г) $\left(-\frac{5}{4};-\frac{63}{16}\right)$ — точка касания; $y = 2x - 3$ и $y = -\frac{1}{2}x - \frac{73}{16}$ — уравнения касательных. **6.85.** а) $y = -x + 2$; $y = -9x - 6$; б) $y = -2x - 1$; $y = 6x - 9$; в) $y = 4x$; $y = -4x$; г) $y = \sqrt{3}x + 2$; $y = -\sqrt{3}x + 2$. **6.86.** а) $y = -x$ и $y = -\frac{1}{25}x$; б) $y = 12x - 8$ и $y = -12x - 8$; в) 0,4; г) $\frac{25}{16}$. **6.87.** а) $y = 8x - 20$; б) $y = 8x + 4$; в) $y = 4x + 3$ и $y = 8x + 3$; г) $y = 1$ и $y = -12x + 13$. **6.88.** а) –1; б) –23,25; в) $y = 2x$; г) $y = 2x$; $y = 2x - \frac{32}{3}$. **6.89.** а) 0,25; б) 0,5; в) 1; г) 2. **6.90.** а) $6 \cdot 6$; б) 4 + 4; в) 40 + 60 + 60; г) $\frac{5}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$. **6.91.** а) 8; б) $\frac{32\sqrt{3}}{9}$; в) 0,8; г) 0,6. **6.92.** а) $\frac{c}{\sqrt{2}}$ и $\frac{c}{\sqrt{2}}$; б) 80 м; 40 м; в) $2\sqrt{2S}$; г) $\sqrt{\frac{b}{a}S}$; $\sqrt{\frac{a}{b}S}$. **6.93.** а) 4 см^3; б) 12 см; в) $\frac{d}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{12V}$, $\sqrt[3]{12V}$, $\frac{1}{4}\sqrt[3]{12V}$. **6.94.** а) $\frac{3\sqrt{2}V}{8}$; б) $\frac{2R}{\sqrt{3}}$; в) $2S$; г) $4R$. **6.95.** а) 2 с; б) 10 м/с; в) 3 с; г) 1,5 с.

7.1. а) 1; б) 3; в) –3; г) ∅. **7.2.** а) $-\frac{11}{19}$; $\frac{5}{11}$; б) 1; –2; в) 1; –5; г) 1; –2. **7.3.** а) –3;1; б) 1; в) $\frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$; г) –2;1. **7.4.** а) $-\frac{5}{3}$; 3; б) $-\frac{4}{3}$; 5; в) –1; $\frac{93}{56}$; г) –1; $-\frac{7}{4}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{5}{2}$. **7.5.** а) –12; б) 1; в) 7; г) 2. **7.6.** а) –1; $\frac{7}{4}$; б) $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$; в) –2; $\frac{7}{9}$; г) –4; $-\frac{5}{2}$. **7.7.** а) 0;2;–3; б) –3;–1;1; в) $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; 3; г) 2; $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. **7.8.** а) 1; $\frac{-7 \pm \sqrt{29}}{2}$; б) –4; 3; 12; в) 1; 2; $\pm\sqrt{2}$; г) 1; 13. **7.9.** а) $\pm\sqrt{3}$; $\frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}$; б) 0; ±1; в) –1,5; $\pm\sqrt{1{,}5}$; г) 2; $\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$. **7.10.** а) $-1 \pm \sqrt{2}$; б) –2; $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; в) –1; 2; г) –1; 10. **7.11.** а) 3; $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$; б) –2; $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; в) 0,5; 1; 2; г) –3; 1; 3. **7.12.** а) –1;1; б) 1; $-\frac{6}{5}$; в) –2; г) 1; $-\frac{1}{3}$. **7.13.** а) $\frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$; б) ±3; в) –2,5; 0; г) –5. **7.14.** а) 1; $-\frac{7}{3}$; б) –5; 1; в) –0,5; 1; г) –3. **7.15.** а) 1; б) –3; 1; в) –5; 2; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; г) $\frac{7 \pm \sqrt{57}}{12}$. **7.16.** а) $-\frac{3}{2}$; 0; $\frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4}$; б) –3; $-3 \pm \sqrt{7}$; в) $-3 \pm \sqrt{6}$. Указание: сгруппируйте скобки по парам; г) $\frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2}$. Указание: сгруппируйте дроби по парам. **7.17.** а) –6; $-\frac{2}{3}$; б) 0,5; 2; в) –1,5; –0,5; 0; 1; г) –3; –1; $-2 \pm \sqrt{6}$. **7.18.** а) $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$; б) –1; 9; $\frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$; в) –6; –4; $\frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$; г) $5 \pm \sqrt{10}$; $10 \pm \sqrt{85}$. **7.19.** а) 2; $\frac{1}{2}$; б) $-1 \pm \sqrt{2}$; в) 7; $\frac{1}{7}$; г) 3; $\frac{1}{3}$. **7.20.** а) $1 \pm \sqrt{19}$; б) 2; $-1 \pm \sqrt{3}$; в) ±3; $\pm\sqrt{\frac{5}{13}}$; г) –1; 2. **7.21.** а) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) –3; $\frac{-3 \pm 2\sqrt{11}}{5}$; в) $1 \pm \sqrt{2}$; г) –4; 0,5. **7.22.** а) $\frac{1}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; в) –1; $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; г) –3; $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **7.23.** а) 3; б) 1; в) 2; г) $\sqrt[3]{3} + 1$. Указание: выделите полный куб: $y = (x-1)^3 - 3$. **7.24.** а) 1; б) –1; в) $-\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{3}$. **7.25.** а) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; в) $\pm\sqrt{2}$; г) $-1 \pm \sqrt{6\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}$. **7.26.** а) –3; 1; $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$; б) ±1; $\pm\frac{\sqrt{97} - 1}{12}$; в) 1; 2; $\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$; г) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$. **7.27.** а) 6; 8; б) 2; 4; в) 2; 4; г) 2; 3. **7.28.** а) –1; б) $\sqrt{5}$; в) –0,5. Указание: найдите минимальное значение, которое может принимать каждая скобка; г) $-2 \pm \sqrt{2}$; $-1 \pm \sqrt{3}$. Указание: уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$, поэтому часть корней можно найти, решив уравнение $f(x) = x$. **7.29.** а) (–1;2); б) (2;–3); в) (–0,5;1); г) (–1;1). **7.30.** а) (2;3), (–3;–2); б) (2; –1). Указание: выделите полные квадраты $(x+2y)^2 + (y+1)^2 = 0$; в) (1;–1). Указание: выделите полные квадраты $(2x+2y)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$; г) (–3; 2) Указание: выделите полные квадраты $\left(x + \frac{3y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 = 0$. **7.31.** а) (3; 2); б) (–4; –2); в) (1;–1); г) (1;2).

8.1. а) $\{-1\} \cup [2;+\infty)$; б) $(-\infty;-2] \cup \{3\}$; в) $[-1;2)$; г) $(-5;-2]$. **8.2.** а) $(-2;2) \cup (2;3)$; б) $(-\infty;-2] \cup \{1\} \cup [2;+\infty)$; в) $(-1;1) \cup (1;+\infty)$; г) $[-3;3)$. **8.3.** а) $(-1;3) \cup (3;+\infty)$; б) $\{-6;0\} \cup [3;+\infty)$; в) $(-\sqrt{30};\sqrt{30}) \cup \{7\}$; г) $\{-7\} \cup [-3;1]$. **8.4.** а) $(-2;-1) \cup \{1\}$; б) $(-4;1) \cup (2;+\infty)$; в) $(0;1)$; г) $(-\infty;-1] \cup [3;+\infty)$. **8.5.** а) $[-5;-\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup (1{,}5;\sqrt{3}]$; б) $(-\infty;1] \cup (3;+\infty)$; в) $(-\infty;-1) \cup \{1;2\} \cup (6;+\infty)$; г) $[1;2)$. **8.6.** а) $(-\infty;-1) \cup [1;+\infty)$; б) $(-\infty;-2) \cup [-1;1]$; в) $[-2;1) \cup [2;+\infty)$; г) $(-\infty;-2) \cup (0;1)$. **8.7.** а) $(-\infty;-3] \cup (-1;+\infty)$; б) $[-5;-1)$; в) $(-1;1) \cup (1;2)$; г) $(-\infty;-2) \cup [-1;3) \cup \{4\}$. **8.8.** а) $[-1{,}5;-1)$; б) $(-1;1]$; в) $(-\infty;0{,}5) \cup [1;+\infty)$; г) $(-1;1]$. **8.9.** а) $[-1;0) \cup [1;+\infty)$; б) $(-\infty;-2) \cup (0;2)$; в) $(-\infty;-1)$; г) $(1;+\infty)$. **8.10.** а) $(-\infty;-4) \cup [-3;3) \cup [6;+\infty)$; б) $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$; в) $(-9;1) \cup (1;3]$; г) $\left(-2;\ -\frac{6}{5}\right] \cup [1;\ 2)$. **8.11.** а) $[-1;2) \cup (2;4]$; б) $(-1;1]$; в) $\left(-2;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};2\right) \cup (3;+\infty)$; г) $\left(-1;-\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3};0\right] \cup [1;+\infty)$. **8.12.** а) $(-4;-1] \cup \left[-\frac{2}{3};1\right)$; б) $(-1;1] \cup (3;4]$; в) $\left[-1;-\frac{1}{8}\right] \cup (0;1)$; г) $(-3;-2) \cup (-1;1)$. **8.13.** а) $[-2;-1] \cup (3;4)$; б) $(-1;0{,}8] \cup [1;2)$;

в) $(-\infty;-9)\cup\left(\frac{2}{3};1\right)\cup\left[\frac{11}{2};+\infty\right)$; г) $(-\infty;-1)\cup(-1;2]$. **8.14.** а) $(-1;1)$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $\varnothing$; г) $[-1;-0,5]\cup[0,5;1]$. **8.15.** а) $(-1,5;1)$; б) $(-\infty;1-\sqrt{3}]\cup\{1\}\cup[1+\sqrt{3};+\infty)$; в) $(-3;0)$; г) $(-10;-1)\cup(-1;0)$. **8.16.** а) $\left\{\frac{5-\sqrt{5}}{2};\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$; б) $\left[-\frac{1}{12};\frac{1}{2}\right]$; в) $(-1,25;-0,5)$; г) $[-1;1)\cup(2;2,5]$. **8.17.** а) $\left(-3;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{3};2\right)$; б) $[-2;-1]\cup\left[\frac{1}{2};1\right]$; в) $[2;6]$; г) $\left[-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right]\cup\{1\}$. **8.18.** а) $\left(-\frac{5}{3};-\frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{2};5\right)$; б) $(-1;-0,5)\cup(2;4)$; в) $(-\infty;-2)\cup(-2;0]$; г) $(-4;0)\cup(0,5;1)\cup(1;+\infty)$. **8.19.** а) $(-1;-0,5)$; б) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; в) $(1;7)$; г) $(-\infty;0)\cup\left[\frac{1}{3};3\right]$. **8.20.** а) $[0;1]$; б) $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$; в) $\varnothing$; г) $(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(1;+\infty)$.

9.1. а) $(2;3)$, $\left(\frac{13}{2};\frac{3}{4}\right)$; б) $(3;1)$, $(-1;-3)$; в) $(2;1)$; г) $(1;2)$, $\left(\frac{5}{11};\frac{25}{11}\right)$. **9.2.** а) $(2;1)$; б) $\left(\frac{1}{3};1\right)$; в) $(1;3)$, $\left(9;\frac{1}{3}\right)$; г) $(2,5;1)$, $(0,5;5)$. **9.3.** а) $(1;1)$, $\left(\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right)$; б) $(4;-1)$; в) $(-0,5;-2)$; г) $(28;17)$. Указание: второе уравнение приведите к виду $(2x-3y)(x+y)=225$. **9.4.** а) $(1;2)$, $(2;1)$; б) $(2;1)$, $(-1;-2)$; в) $(0,5;1,5)$; г) $(0;1)$. **9.5.** а) $(0,5;0)$; б) $(4;3)$, $(-4;3)$, $(4;-3)$, $(-4;-3)$; в) $(3;2)$; г) $(9;4)$, $(4;9)$. **9.6.** а) $(2;1)$; б) $(1;-1)$; $\left(-\frac{11}{19};\frac{23}{19}\right)$; в) $(0,5;1,5)$, $(1,5;1,5)$; г) $(0;-3)$, $(2;1)$, $(-6;9)$. **9.7.** а) $\left(\sqrt[3]{4};9\right)$; б) $(1;10)$; в) $(0;1)$; г) $(3;1)$, $(-3;-1)$. **9.8.** а) $(1;3)$, $(-1;-3)$, $(7;-3)$; б) $(2;2)$, $(-1;2)$; в) $\left(1;\sqrt{10}\right)$, $\left(1;-\sqrt{10}\right)$, $(2;-2)$, $(-2;2)$; г) $(2;1)$. Указание: второе уравнение можно разложить на множители (см. 2.27). **9.9.** а) $(1;3)$, $\left(\frac{1}{3};4\right)$; б) $(1;3)$, $(-1;-3)$; в) $(-0,5;2,25)$, $(2;\ y)$, $y\in\mathbf{R}$; г) $(0;1)$, $(1;1)$. **9.10.** а) $(-1;-1)$, $(2;2)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$; б) $(1;1)$, $(-2;-2)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; в) $(3;1)$, $(3;2)$; г) $(1;1)$, $(-1,5;-1,5)$, $\left(\frac{1+\sqrt{21}}{4};\frac{1-\sqrt{21}}{4}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{21}}{4};\frac{1+\sqrt{21}}{4}\right)$. **9.11.** а) $(2;1)$, $(-2;-1)$; б) $(1;2)$, $(-1;-2)$, $(3,5;-0,5)$, $(-3,5;0,5)$; в) $(0;3)$, $(2;1)$, $(-4;-5)$; г) $(2;3)$. **9.12.** а) $(1;0)$, $(-1;0)$; б) $(0,5;0)$; в) $(8;2)$, $(-2;-8)$; г) $(2;1)$, $(-2;-1)$, $\left(\sqrt{\frac{7}{3}};\sqrt{21}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}};-\sqrt{21}\right)$. **9.13.** а) $(4;2)$, $\left(\frac{10}{3};\frac{10}{3}\right)$; б) $(1;1)$, $(-1;-1)$, $\left(3\sqrt{\frac{3}{22}};\sqrt{\frac{6}{11}}\right)$, $\left(-3\sqrt{\frac{3}{22}};-\sqrt{\frac{6}{11}}\right)$; в) $(0,5;0)$, $\left(\frac{1}{11};-\frac{3}{11}\right)$; г) $(5;7)$. **9.14.** а) $(2;-2)$; б) $(2;1)$, $\left(-\frac{19}{8};-\frac{13}{8}\right)$; в) $\left(3;\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};3\right)$; г) $(1;2)$. **9.15.** а) $(1;5)$, $(5;1)$, $(2;3)$, $(3;2)$; б) $(1;5)$, $(5;1)$; в) $(1;1)$, $(-1;-1)$; г) $(0;-3)$, $(-3;0)$, $(1;-2)$, $(-2;1)$, $(1;2)$, $(2;1)$. **9.16.** а) $(5;2)$, $(-2;-5)$, $\left(5+\sqrt{28};-5+\sqrt{28}\right)$, $\left(5-\sqrt{28};-5-\sqrt{28}\right)$; б) $(-2;-3)$, $(3;2)$; в) $(2;3)$, $(-3;-2)$; г) $(0,0)$; $(4,2)$; $(-2,-4)$. **9.17.** а) $(2;1)$, $(-2;-1)$, $\left(\sqrt{1,5};3\sqrt{1,5}\right)$, $\left(-\sqrt{1,5};-3\sqrt{1,5}\right)$; б) $(-1;2)$, $(1;-2)$; в) $(-2;2)$, $(6;2)$, $(1,5;-1,5)$, $(-1,5;-0,5)$; г) $(1;0)$, $(-1;0)$. **9.18.** а) $(1;2)$, $(-1;-2)$; б) $(1;1)$, $(-1;-1)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{4};-\frac{5}{2\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{5}{2\sqrt{3}}\right)$; в) $(0;0)$, $(2;-1)$; г) $(0;0)$, $(1;2)$, $(2;2)$.

10.1. а) $\begin{cases} xy-x-y=120, \\ 6x=5y; \end{cases}$ б) $2x_1=x_2-12$; в) $x=10(a-3)$; г) $x=\frac{a+5}{3}$. **10.2.** а) 30; б) 920; в) 14; г) 48 и 64. **10.3.** а) 0; б) 328; в) 720; г) 315. **10.4.** а) 7,2; б) 14; в) 25; г) $\frac{a+1}{b+1}\cdot100$ %. **10.5.** а) 400 %; б) 1100 %; в) 200 %; г) 1800 %. **10.6.** а) $\frac{107}{7}$; б) 63; в) на $33\frac{1}{3}$ %; г) на 40 %. **10.7.** а) 6,25; б) 2; в) 60; г) 54°. **10.8.** а) 15; б) 45; в) 24 и 32; г) 4. **10.9.** а) 72; б) 300; в) 25; г) 900 000. **10.10.** а) 70; б) 43,75; в) 10; г) 50. **10.11.** а) 18 руб.; б) 20; в) 5; г) 40. **10.12.** а) После снижения картофель стал стоить на 4 % дешевле, чем до повышения цены; б) 60; в) 27,75; г) 2020. **10.13.** а) 10; б) 10; в) 59,049 %; г) 2012. **10.14.** а) 12 и 10; б) 25; в) 72; г) 119. **10.15.** а) 15 кг; б) 13 %; в) 200 кг; г) 350 г. **10.16.** а) 1 кг; б) 3:1; в) 53 %; г) $2\frac{1}{7}$ л. **10.17.** а) 75; б) 68; в) 33 %; г) 12 %; 24 %; 48 %. **10.18.** а) 24; б) 1,5; в) 525; г) 3,24. **10.19.** а) 6; б) 120; в) 24; г) 8. **10.20.** а) В 3 раза; б) 2250 м; в) 19; г) 20. **10.21.** а) 6; б) 70; в) 11; г) 900. **10.22.** а) $\frac{S}{t}-\frac{S}{a}$; б) $\frac{10a}{a+b}$; в) $\frac{600v}{t}-v$; г) $3(4+v)=3,2(4-v)$. **10.23.** а) 37,5; б) 7; в) 48; г) $\frac{4v}{3}$ км/ч. **10.24.** а) 20 км; б) 9; в) 57,6; г) 60. **10.25.** а) 125; б) 40; в) 24; г) 4. **10.26.** а) 30; б) 90; в) 6; г) 60. **10.27.** а) 4; б) 80; в) 90; г) 30. **10.28.** а) 50 и 60; б) 480; в) в 2,5 раза; г) 43. **10.29.** а) 18; б) 8; в) 150; г) 13 ч 06 мин. **10.30.** а) 6 и 8; б) 2; в) 2 ч 40 мин; г) 3,5 и 7. **10.31.** а) 15; б) 12 ч; в) 7,5 ч; г) 72. **10.32.** а) 99; б) 33; в) 40; г) 20. **10.33.** а) 1; б) 20; в) 180; г) 75. **10.34.** а) 15; б) 9; в) 48; г) 3. **10.35.** а) 7920; б) 6; в) 5; г) 90. **10.36.** а) $\left(N-1-\frac{1}{N}\right)\cdot100$ %; б) 8; в) 4; г) 6, 7, 8, 9. **10.37.** а) 12; б) 7 м/с, 9 м/с; в) 7,2 мин и 9 мин; г) 4 с и 6 с. **10.38.** а) 6; б) 12; в) 6; г) 36. **10.39.** а) 360; б) 400; в) 6; г) 14. **10.40.** а) 50; б) 48; в) 16; г) 5. **10.41.** а) 42; б) 10 и 15; в) 25, 20 и 30; г) 60. **10.42.** а) 81; б) 8; в) 862; г) 40 %. **10.43.** а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$; $-\frac{2}{3}$ и $-\frac{3}{2}$; б) $\frac{3}{5}$; в) 30; г) 40. **10.44.** а) 73 и 29; б) 11; в) 6; г) 11. **10.45.** а) 37 и 73; б) 24; в) 29; г) 45. **10.46.** а) 246; б) 2463; в) 46; г) 47. **10.47.** а) 50; б) $\frac{23}{410}$; в) –0,5; г) –9. Указание: так как $a = 2b - c$, то $2a^2 - 4b^2 - c^2 + 6a + 4bc = a^2 + 6a$. Минимум достигается при $a = -3$. Для этого значения надо подобрать b, c, чтобы получилась заданная геометрическая прогрессия. **10.48.** а) $[30;33,6]$; б) $(0;50]$; в) $(4;12)$; г) 80 кг. **10.49.** а) 705; б) 6 лет; в) $1+\frac{3}{N}$; г) 12.

11.1. а) –2; б) 4; в) –54; г) 63. **11.2.** а) № 4; б) воскр.; в) 6,3 км; г) 17. **11.3.** а) Красный; б) 19:00, 31 декабря; в) 3100 руб.; г) 78. **11.4.** а) В); б) 0,9; в) –1; г) –10. **11.5.** а) 2; б) 28; в) $\frac{31}{22}$; г) $\frac{14}{25}$. **11.6.** а) 16; б) 12; в) –0,4; г) $a_1=3$, $d=4$. **11.7.** а) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1 или 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$; б) 7, 11, 15; в) $-\frac{1}{4}$; г) –8. **11.8.** а) 134 общих члена; их сумма 133 799; б) 43 725; в) 6; г) 116. **11.9.** а) 276; б) 282; в) 22; г) 14 075. **11.10.** а) –1; б) 2; в) –18; г) 63. **11.11.** а) –93; б) 12; в) 20; г) 16. **11.12.** а) 21; б) 8; в) 12; г) –5. **11.13.** а) 177; б) 8775; в) 2706; г) 867. **11.14.** а) 5; б) $a_1=0,5$, $d=0,5$; в) $\frac{S+S_1}{S-S_1}$; г) 20. **11.15.** а) А); б) –48; в) 4; г) 0,5. **11.16.** а) 125; б) 16; в) 3;6;12; г) 20; 80; 320. **11.17.** а) $b_1=1$; $q=-2$; б) 2; 8; 32; в) 81; г) $-\frac{1}{2}$. **11.18.** а) 6; б) 1 или –24; в) 1; г) 1800 руб. **11.19.** а) $\frac{1}{9}$; б) 121; в) 242; г) 32. **11.20.** а) 96; б) –6; в) 6; г) 12. **11.21.** а) $b_1=5$, $b_5=405$; б) –51 или 510; в) 2; г) 10. **11.22.** а) 64; б) 25; в) 2; г) $\frac{41}{99}$. **11.23.** а) $\frac{4}{5}$; б) $b_4=\frac{3}{16}$, $q=\frac{1}{4}$; в) 6; $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{3}{5}$. **11.24.** а) 55; б) 3; в) –40; г) –1. **11.25.** а) 3; 6; 12 или 27; 18; 12; б) 12; 24; 36; 54 или $\frac{105}{2}$; $\frac{75}{2}$; $\frac{45}{2}$; $\frac{27}{2}$; в) 4; 8;16 или $\frac{4}{25}$; $-\frac{16}{25}$; $\frac{64}{25}$; г) 27. **11.26.** а) 5103 или $\frac{7}{81}$; б) 4, 12, 36; в) 40 950; г) 18.

12.1. а) –4; 2; б) 6; 0; в) 1; 2; г) 0. **12.2.** а) $\pm1;\pm\sqrt{17}$; б) 1; –0,5; в) –3; 0; 1; 4; г) $\varnothing$. **12.3.** а) 1; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{3}$; б) –6; 0; 6; в) 1; 1,5; г) $-\frac{3}{20};-\frac{1}{20};\frac{1}{20}$. **12.4.** а) 4; $\frac{2}{3}$; б) $-\frac{9}{5}$; в) 5; г) $-\frac{4}{5}$. **12.5.** а) –5; 3; б) 3; 4; в) –1; 0,5; г) $\pm\sqrt{17}$; 4. **12.6.** а) 2; 5; б) 2; 3; в) –5; –1; 0; 2; г) 2; 3; 10. **12.7.** а) –6; б) $[1;3]$; в) 0; –1; ±3; г) 1; $\frac{1}{3}$. **12.8.** а) 2; $\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$; б) ±1; $-\frac{1}{3}$; в) 0; $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$; г) $(0;2)$, $(-2;0)$. **12.9.** а) –4; –1,6; б) $\pm\frac{1}{3}$; в) –2; 0; $1\pm\sqrt{5}$; г) –1; $-\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1. **12.10.** а) $[2;6]$; б) –10; 9; в) –2; г) ±1; $\frac{2}{3}$; 2.

12.11. а) -3; 2; $\frac{-1+\sqrt{65}}{2}$; б) 2; $\frac{5}{2}$; $\frac{9+\sqrt{17}}{4}$; в) 1; 2; г) -4. **12.12.** а) $-\frac{2}{3}$; 2; 0,5; б) $-\frac{1}{3}$; 1; в) 1; г) -1; 3; 4; 14. **12.13.** а) ±1; б) -1; в) ни при каких; г) 0; 2. **12.14.** а) 0; 1; б) 1; 2; в) 1; г) 2; 0; -1; -5. **12.15.** а) 4; б) 2; в) 3; 7; г) 3; 4. **12.16.** а) 2; б) 3; в) 55; г) 3; $\frac{9-\sqrt{17}}{2}$. **12.17.** а) ±4; б) ±1; в) $\pm(1+\sqrt{14})$; ±4; г) $\pm2\sqrt3$; $\pm\sqrt2$. **12.18.** а) $-0,5$; 1; б) -1; $-1\pm\sqrt2$; в) $[5;10]$; г) 1,6; 3. Указание: если $t=\frac{x}{x-2}$, тогда $\frac{2x-2}{x-2}=t+1$. **12.19.** а) $\left(-\infty;\frac32\right]$; б) $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$; в) $[-2;3]\cup\{5\}$; г) $[3;4)\cup[7;8)$. **12.20.** а) $[-5;0)\cup[1;+\infty)$; б) $[-5;-1]\cup(0;1]$; в) $(-\infty;1]\cup[2;13]$; г) $[-7;-4,5]\cup[1;3]$. **12.21.** а) (2,5; 3,5); б) (5;2), (−4;1); в) (0;1), (±4;3); г) $(x;1-x), x\in[0;1]$ и $(x;-1+x), x\in[0;1]$. **12.22.** а) (0;3), (3;0), (0;−3), (−3;0); б) (0;0); в) (5;5), (5;−5), (−5;5), (−5;−5); г) 8. **12.23.** а) $a=2$; б) $a=3$; в) $a\in(0;3)$; г) $a\in\{0\}\cup(1;+\infty)$. **12.24.** а) $\varnothing$; б) $(4;+\infty)$; в) 2; г) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

13.1. а) 5; б) 3; в) 5; г) 3. **13.2.** а) $\left(-\frac94;\frac{11}{4}\right)$; б) (2;3); в) $\left[-\frac19;\frac79\right]$; г) [0,2;1]. **13.3.** а) $(-\infty;-10,5]\cup[9,5;+\infty)$; б) $(-\infty;-1)\cup\left(\frac1{11};+\infty\right)$; в) $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$; г) $(0;5]\cup[25;30)$. **13.4.** а) $(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;4)$; б) $(-\infty;-2]\cup\{0;4\}\cup[6;+\infty)$; в) $(-1;1)\cup(1;3)$; г) $(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$.
13.5. а) $[-2;-1]\cup[2;3]$; б) $[-3;-2]\cup[1;2]$; в) $(2;4)\cup(4;+\infty)$; г) $[-7;-5]\cup\{5\}$. **13.6.** а) $[-1,5;-0,5)\cup(0;1,5)\cup(2;3]$; б) $(-2-\sqrt2;-2)\cup(-2;-2+\sqrt2)\cup(2-\sqrt2;2)\cup(2;2+\sqrt2)$; в) $(-1-4\sqrt2;-1)\cup(-1;-1+4\sqrt2)$; г) $[2;4]\cup[3+\sqrt7;+\infty)$.
13.7. а) $\left[-8;-\frac23\right]$; б) $\left[\frac23;\frac32\right)\cup\left(\frac32;4\right]$; в) (−7;1); г) $\left(-4;-\frac23\right]\cup\left[0;\frac27\right)$.
13.8. а) $\left(-\frac13;3\right)$; б) $\left(\frac53;3\right)$; в) (0;6); г) $[0,6;+\infty)$. **13.9.** а) $(-\infty;12)$; б) $(-\infty;0,5]$; в) $(-\infty;-0,4)\cup(2;+\infty)$; г) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.
13.10. а) $(-1;0)\cup(0;2)$; б) (2;3); в) [1;3]; г) $\left[\frac{-1-\sqrt5}{2};\frac{-1+\sqrt5}{2}\right]\cup\{1\}$.
13.11. а) [1;2]; б) [−3;3]; в) $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; г) (−1;3).
13.12. а) $[-1;3-\sqrt2]\cup[3+\sqrt2;5]$; б) $(-5;-2)\cup(-2;-1)$; в) $(-\infty;-2]\cup[-1;3]$; г) $\left[-2;-\frac23\right]\cup[0;2]$. **13.13.** а) $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$; б) $[0;1,6]\cup[2,5;+\infty]$; в) [1;3]; г) $(-0,5;1)\cup(2;3,5)$.
13.14. а) $(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)$; б) $[-4;-2]\cup\{4\}$; в) $(-7;-1)\cup(-1;9)$; г) [−4,75;3,25]. **13.15.** а) (−4;2); б) (−1; −0,5); в) $[-7;-1]\cup(2;6)$; г) $\left[-\frac23;\frac12\right]\cup[2;+\infty)$. Указание: поскольку знаменатель всегда неотрицательный, то можно умножить на него обе части неравенства с сохранением знака неравенства. **13.16.** а) $(-\infty;+\infty)$; б) $(-\infty;-0,25)$; в) $(3;+\infty)$; г) ни при каких. **13.17.** а) [4;8]; б) [0;6]; в) $(-4;0)\cup(0;2)$; г) [−1;3]. **13.18.** а) {5}; б) (−4;6]; в) $[-6;-3)\cup(-3;-2)$; г) (−0,5;0).
13.19. а) $[8;+\infty)$; б) $(2-\sqrt3;1)\cup\{4\}$; в) (0;1); г) $(-10;0)\cup(0;1)\cup(1;3)\cup(3;10)$. **13.20.** а) [−2;2]; б) $(11;12]\cup[13;15]\cup[16;17)$; в) $\left[\frac{-1-\sqrt{97}}{2};\frac{5+\sqrt{57}}{2}\right]$; г) [−2; 2].
13.21. а) $[-3;-\sqrt3]\cup[-1;\sqrt3]$; б) $[-2\sqrt3;2]\cup[2\sqrt3;6]$; в) $[-\sqrt5;1]\cup[\sqrt5;3]$; г) $\left(-\frac{9+\sqrt{29}}{2};-7\right)\cup\left(-4;-\frac{9-\sqrt{29}}{2}\right)\cup\left(\frac{9-\sqrt{29}}{2};4\right)\cup\left(7;\frac{9+\sqrt{29}}{2}\right)$.
13.22. а) $(-\infty;3)$; б) $[-\sqrt5;\sqrt5]$; в) $\{-1\}\cup[1;+\infty)$; г) $\{-1;0\}\cup[1;+\infty)$.
13.23. а) $(-\infty;0)$; б) [−1;3]; в) {0}; г) (−5;1).

14.1. а) ∅; б) ∅; в) ∅; г) ∅. **14.2.** а) ∅; б) ∅; в) ∅; г) ∅. **14.3.** а) 8; б) 11; в) 2; г) 1; 7. **14.4.** а) 10; б) 3; в) 2; г) 2. **14.5.** а) 0; 3; б) 3; в) 5; г) 1. **14.6.** а) ±10; б) 2; в) −4, 1; г) 0, ±1. **14.7.** а) 0; б) 0; 1; в) $\frac{\sqrt{65}-3}{2}$; г) 3. **14.8.** а) −3; −2; б) 6; в) ∅; г) 0; 2; $\frac{16}{9}$. **14.9.** а) 0; 5; б) 2; в) −37; 6; г) 8. **14.10.** а) $\frac{33}{4}$; б) 6; в) 5; г) 21. **14.11.** а) 4; б) 5; в) 2; г) $-\sqrt{2+\sqrt5}$. **14.12.** а) 1; б) ±0,5; в) $\pm\frac{35\sqrt{37}}{27}$; г) 6; −2; −10. **14.13.** а) $-\frac{47}{24}$; б) 2; в) 0,5; г) −1; $-\frac16$. **14.14.** а) $\pm\sqrt{30}$; б) 4; в) 4; г) $\pm\sqrt{21}$. **14.15.** а) 17; б) 1; в) −3; 6; г) 9. **14.16.** а) 0,5; −1,5; б) 2,5; в) 64; −27; г) $-1\pm\sqrt{23}$. **14.17.** а) $3\pm\sqrt2$; б) $\frac{-3\pm3\sqrt{17}}{4}$; в) 0; −1; г) 1. **14.18.** а) 2; б) 4; $\frac{1-\sqrt{193}}{8}$; в) 1; г) 3; $\frac{4-2\sqrt{31}}{9}$. **14.19.** а) 2,5; б) 5; 5,5; в) 2; 6; г) $\frac{\sqrt2}{2}$. **14.20.** а) $\frac{17}{4}$; $\frac{41}{4}$; б) 5; в) 0,75; г) [−1;1]. **14.21.** а) −2; б) $2\sqrt3$; в) −2; 2; г) 7. **14.22.** а) 3; б) 4; 548; в) 5; г) 1. **14.23.** а) (25;9); б) (−10;7,25), (10;7,25); в) (−1,5;51), (22,5;3); г) (−4;0), $\left(-\frac{40}{41};-\frac{32}{41}\right)$.

15.1. а) [0,5;13]; б) $\left[-\frac54;\frac{11}{4}\right]$; в) $(-\infty;0,5]\cup[0,68;+\infty)$; г) $\left[1;\frac{46}{19}\right)$.
15.2. а) $(8;+\infty)$; б) $[-3;+\infty)$; в) [2,6; 4); г) (1;2]. **15.3.** а) $[1;+\infty)$; б) $[0;+\infty)$; в) $\left(\frac{-3-\sqrt5}{2};1\right]$; г) $(-\infty;-2)\cup\left(-\frac54;-1\right)\cup(1;5)$. **15.4.** а) [1;5); б) $\left(\frac{\sqrt5-1}{2};+\infty\right)$; в) $(-\infty;-2]\cup\left[5;\frac{74}{13}\right)$; г) $[2,5;3)\cup(3;+\infty)$.
15.5. а) [−2;2); б) $(-\infty;0]\cup\left(\frac92;+\infty\right)$; в) $[-6;-4+\sqrt2)$; г) $(-\infty;-2]\cup(0;+\infty)$.
15.6. а) $(-\infty;-0,5)\cup(0,5;+\infty)$; б) (−49;49); в) $(-\infty;+\infty)$; г) $[-3;1]\cup[4;+\infty)$.
15.7. а) $[-2-2\sqrt6;-3)\cup[-2+2\sqrt6;3]$; б) $[-0,5;0)\cup(0;0,5]$; в) [−1,5;0); г) $[-2;-1)\cup[0;1]$. **15.8.** а) $(0;+\infty)$; б) [−0,5;12); в) $\left(\frac{-9-\sqrt{61}}{8};\frac13\right]$; г) $(-\infty;-2]\cup\left[-1;\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right]$. **15.9.** а) $[2;+\infty)$; б) $(1;+\infty)$; в) $[1;1,5)\cup(2;4]$; г) $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3};+\infty\right)$. **15.10.** а) $\{3\}\cup\left[\frac{17}{3};+\infty\right)$; б) $\left[\frac{-4-\sqrt{13}}{2};-3\right]\cup\{1\}$; в) $\left[-\frac5{12};-\frac13\right)\cup\left(\frac13;\frac23\right]$; г) [−7;−6). **15.11.** а) (−9;4); б) [−1;4]; в) $(-2;-1]\cup\left[-\frac23;\frac13\right)$; г) (1;9). **15.12.** а) (−0,75;1); б) $\left\{\frac{\sqrt3}{2}\right\}$; в) $\left\{\frac{27+5\sqrt{33}}{16}\right\}$; г) $(-\infty;-5)$. **15.13.** а) $[1;+\infty)$; б) $\left(-\frac{21}{8};-2\right)$; в) (0,5;20,5]; г) [0;1). **15.14.** а) {3}; б) {1}; в) $\left(\frac{15}{16};1\right]$; г) [2;6].
15.15. а) $\left[3;\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2};+\infty\right)$; б) $\left(1;\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt5}{2};+\infty\right)$; в) $\left(\frac{\sqrt[3]{10}}{2};+\infty\right)$; г) $[-2;0)\cup(0;2]$.

16.1. а) $14\cdot2^x$; б) $29\cdot5^x$; в) 108; г) 3. **16.2.** а) $\log_2 3$; б) 19; в) 1;6; г) 5. **16.3.** а) −2,5; б) 0; в) 1; г) 6. **16.4.** а) −6; б) −4; в) 7,5; г) 2. **16.5.** а) 1; б) 1; в) 2; г) 0,5. **16.6.** а) 2,2; б) 8; в) 6,6; г) $-2+1,5\sqrt3$. **16.7.** а) $\frac{11}{9}$; б) $-\frac13$; в) $-\frac79$; г) $\frac{19}{20}$. **16.8.** а) −1; б) 2; в) 23; г) 3. **16.9.** а) $\frac{21}{8}$; б) 4; в) 6; г) $\frac{21}{8}$. **16.10.** а) −1; б) 2; в) 3; г) 2. **16.11.** а) 1; б) 1,5; в) 1; г) 1. **16.12.** а) $1-\frac1a$; б) $1-a$; в) $\frac1{1-a}$; г) $\frac2{a+1}$. **16.13.** а) $\frac{a+b}{1-a}$; б) $\frac{2\sqrt5-1}{\sqrt5+1}$; в) $\frac{ab+a+1}{ab+a+2}$; г) $\frac{10\sqrt{11}+4}{6-3\sqrt{11}}$. **16.14.** а) 1; б) 1; в) 1; г) 1. **16.15.** а) 1; б) 4; в) 1; г) 2. **16.16.** а) $3\sqrt5$; б) 25; в) $9\sqrt[3]{16}$; г) $\frac23$. **16.17.** а) $\sqrt5+16$; б) $6-8-5+45=38$; в) $5+27\cdot4+3+4=120$; г) $4\cdot3+2+25+9=48$. **16.18.** а) $\sqrt2-1$; б) $4-\sqrt3$; в) 0,2; г) 10. **16.19.** а) $3+100+27=130$; б) $8-4+4=8$; в) $121-9-2=110$; г) $\frac{760}{3}$. **16.20.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 22. **16.21.** а) 0; б) 1; в) 1; г) 6. **16.22.** а) $3x+1$; б) $2x+1$; в) $2x+1$; г) $3x+1$. **16.23.** а) $1+\sqrt{\log_2 3}$;

б) $\sqrt{\log_2 3}-1$; в) $1-\sqrt{\lg 2}$; г) 9. **16.24.** а) 2^x+3^y; б) 4^x+5^y; в) -243; г) 3^{200}. **16.25.** а) $\log_2 7+\log_7 2$; б) $2^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{-x}{2}}$; в) $\lg 3-\lg 2$; г) $\left|\lg x+\frac{2}{\lg x}\right|$. **16.26.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0. **16.27.** а) 7; б) 6; в) 0,5; г) 0,125. **16.28.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{9}{8}$; в) −6; г) $\frac{9}{7}$. **16.29.** а) 1; б) 2; в) 1; г) 4. **16.30.** а) 3; б) 3; в) 4; г) 5.

17.1. а) 2; б) 7; в) $\sqrt[3]{5}$; г) 16. **17.2.** а) 0; б) 2; в) −1; 5; г) −0,25; 1. **17.3.** а) −1; 4; б) −1; в) 0,5; 3; г) $\frac{-2}{3}$;6. **17.4.** а) −1; 2; б) −1,5; 4; в) 10; г) 81. **17.5.** а) 4; б) $\pm\sqrt{5}$; в) 2; г) −1; 3. **17.6.** а) 2; б) 2; в) 2; г) 2. **17.7.** а) 3; б) 9; в) −1; г) 3. **17.8.** а) 1; $\log_6 2$; б) 2; 0,8. Указание: $\frac{3x}{2x-1}=\frac{x+1}{2x-1}+1$; в) 3; 11; г) 2. **17.9.** а) 1; б) $\frac{1}{3}$; в) 0, 2; г) 1, 4. **17.10.** а) 1; б) −2; в) 0; г) $-\frac{4}{3}$. **17.11.** а) −2; 2; б) 1; в) −2; 2; г) $1\pm\sqrt{3}$. **17.12.** а) 1; −1; б) 0; в) ±0,5; г) $\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **17.13.** а) 1; 4; б) $\frac{2}{3}$; в) 3; г) 0, 4. **17.14.** а) −1; 4; б) −2; 3; в) 0; г) 9. **17.15.** а) 3; 1; $\frac{1}{2};-\frac{1}{5}$; б) 0,1; 2; 1000; в) 1; 4; г) 2; $-\log_5 10$. **17.16.** а) 5; б) 1; в) 1,5; 12; г) 3 корня: 2; 3 и приблизительно 3,7. **17.17.** а) 3; б) 6. Указание: корни иррациональные, но имеют вид $3\pm d$, так как графики $y=3\cdot 2^{|x-3|}$ и $y=-x^2+6x+22$ симметричны относительно прямой $x=3$; в) {2}; г) {1}. **17.18.** а) (−3;2); б) (3; −9); в) (1; 0); г) (1;1). **17.19.** а) (−2;0); б) (2;2); в) (−2;4), (1,5;0,5); г) (2;4), (−2;0,25). **17.20.** а) $\left(-\infty;\frac{7}{3}\right]$; б) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$; в) $(-\infty;0)\cup(1;2)$; г) $\left(1;\frac{5}{3}\right]\cup\left(\frac{7}{3};+\infty\right)$. **17.21.** а) $(-\infty;4]$; б) $(-\infty;1)$; в) $(-\infty;-1)\cup[2;3]$; г) (8;44]. **17.22.** а) $[3;+\infty)$; б) $(4;+\infty)$; в) $[1;+\infty)$; г) $(-\infty;3]$. **17.23.** а) $(4;+\infty)$; б) $(-\infty;2)$; в) $[4;+\infty)$; г) $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$. **17.24.** а) $(3;+\infty)$; б) $(-\infty;3]$; в) $(-\infty;-4]$; г) [0;1]. **17.25.** а) $(-\infty;0)\cup[1;+\infty)$; б) $(2;+\infty)$; в) $(2;+\infty)$; г) $(-\log_2 3;\ 2)$. **17.26.** а) (0;1); б) $(2;+\infty)$; в) [0;4]; г) $\left(\log_2\left(\sqrt{5}-2\right);\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$. **17.27.** а) $(-1;2)\cup(3;+\infty)$; б) $\{-1\}\cup[0;+\infty)$; в) (−5;5); г) $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **17.28.** а) (0;2]; б) $[-2;0)\cup(0;2]$; в) $[-1;0)\cup(0;1]$; г) [−3;2]. **17.29.** (0;4), исключая точки $\left\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};2;\frac{5}{2};3;\frac{7}{2}\right\}$; б) [10;20); в) (−10; −9]∪(2;4)∪$\left(4;\frac{-7+7\sqrt{5}}{2}\right)$; г) [3;7).

18.1. а) $\log_2 5$; б) $\log_3 5$; в) $x=\log_2 22\in(4;5)$; г) $x=\log_3 10\in(2;3)$. **18.2.** а) 7; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{1}{6}$; г) 25. **18.3.** а) $\sqrt{7}$; б) −2; $\frac{9}{2}$; в) 4; 36; г) 3. **18.4.** а) 4; б) $\frac{1}{3}$; в) 17; г) 0. **18.5.** а) −10; б) 3; $3+\sqrt{2}$; в) 2; 3; г) 5. **18.6.** а) 1; б) 3; в) 5; г) 3; 5. **18.7.** а) 27; б) 3; в) 16; г) 27. **18.8.** а) Нет решений; б) $-\frac{1}{2}$; в) 20; 500; г) $\sqrt[9]{10}$; 10. **18.9.** а) $\sqrt[3]{2}$; 8; б) $\frac{1}{\sqrt{7}}$; 49; в) 3; 81; г) $\frac{1}{9}$;1;3. **18.10.** а) 5; б) 10; 100; в) 3; г) 9; $\frac{1}{9}$. **18.11.** а) 3; 27; б) $\frac{1}{16}$; 4; в) 7; 14; г) 0,1; $10^{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$. **18.12.** а) 1000; б) 2; в) 10; 0,1; г) 100. **18.13.** а) 2; 10; б) 3; $\frac{1}{81}$; в) 1; 3; г) $\frac{1}{4}$;2. **18.14.** а) 2; б) 3; в) 1,5; г) 4. Указание: $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\ge 2\Rightarrow 2\log_2\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)^7\ge 2\cdot 7=14$, а правая часть неравенства принимает значения меньшие либо равные 14. **18.15.** а) (16;1); (0,5;32); б) (1;27); (9;3); в) (9;7), (7;9); г) (4;2); (1;1). **18.16.** а) (0,1; 4); б) (8;1); в) (16;1), $\left(2^{\frac{9}{2}};\frac{5}{6}\right)$; г) (5;5). **18.17.** а) $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$; б) $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{5}{8};+\infty\right)$; в) [−2;−1); г) $\left[-1;\frac{5}{4}\right)$. **18.18.** а) (−0,5;0,5]; б) [−1;0); в) $(-\infty;0]\cup[\log_6 5;1)$; г) $[5;+\infty)$.

18.19. а) $\left[-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right]$; б) (−2; −1]; в) (0,7;1); г) $\left(-1;-\frac{1}{2}\right]\cup(1;2]$. **18.20.** а) (0;2); б) $\left(-\frac{19}{4};-3\right)\cup\left(4;\frac{23}{4}\right)$; в) $\left(-\infty;-\frac{8}{3}\right)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right)$; г) $[0;2)\cup(2;4]$. **18.21.** а) $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$; б) $\left(\frac{1}{5};\frac{5}{2}\right)$; в) $(-3;-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3};2)$; г) $(-\infty;-14]\cup[2;10)$. **18.22.** а) $(-0,2;0)\cup\left(0;\frac{1}{7}\right)\cup\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right)\cup\left[\frac{19}{49};+\infty\right)$; б) $(0;0,25]\cup(0,5;+\infty)$; в) $(0;1)\cup\left(\sqrt{6}-1;\frac{5}{2}\right)$; г) (4;6).

18.23. а) $(-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(1;5]$; б) (0;1]; в) $\left(0;\frac{3}{16}\right)\cup\left(\frac{3}{16};1\right)\cup\cup\left(1;\frac{19}{16}\right]$; г) $\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)\cup(2;3)$. **18.24.** а) $(3;4)\cup\left[2+\sqrt{11,5};+\infty\right)$; б) $(3;+\infty)$; в) $(-20;-1)\cup(0;2)$; г) $(3;6)\cup(11;12)$. **18.25.** а) (0;0,5]; б) $(1;2]\cup[3;4)$; в) (3;4,5); г) (−2; 2). **18.26.** а) $\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup(1;+\infty)$; б) $\left[-\frac{9}{8};-1\right)\cup\{-2;2\}$; в) $\left[\frac{1}{2};\frac{4}{5}\right]\cup\{4\}$; г) $\left(\frac{8}{3};10\right)$. **18.27.** а) $(0;1)\cup(16;+\infty)$; б) $\left[\sqrt{3};9\right)\cup(81;+\infty)$; в) $(-\infty;-2]\cup\{-1\}\cup[0;+\infty)$; г) $\left[\log_3\frac{28}{27};\log_3 4\right]$. **18.28.** а) $(0;1)\cup[\sqrt{3};9]$; б) $\left[\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)\cup[1;3]$; в) $\left(2^{\frac{-4}{3}};\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$; г) $(2;+\infty)$. **18.29.** а) $(-0,2;0,2)\cup[1;+\infty)$; б) (0;50); в) $(-5;-3)\cup(-1;0)\cup\{4\}\cup(4n+3;4n+5),\ n\in\mathbf{N}$; г) (8;16). **18.30.** а) $(6;+\infty)$; б) (1;1000); в) $\left(0;\frac{1}{\sqrt{10}}\right]\cup(10;+\infty)$; г) $(0;3)\cup(7;+\infty)$. **18.31.** а) (0;3]; б) (0;5]; в) (10;18]; г) $[-2;0)\cup(0;2]$.

19.1. а) $\frac{5\pi}{9}$; б) 15°; в) 300°; г) $\frac{50\pi}{3}$. **19.2.** а) −0,5; б) −1; в) −1; г) 1. **19.3.** а) $1-\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) 0; в) 1; г) 1. **19.4.** а) 6; б) 5; в) 0; г) $-\mathrm{ctg}^2\alpha$. **19.5.** а) −2; б) 1; в) 1; г) −1. **19.6.** а) −1; б) 1; в) 0,5; г) 0,5. **19.7.** а) $24\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; б) $9\sin^2\alpha$; в) 1; г) $0,5\,\mathrm{ctg}^2\alpha$. **19.8.** а) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$; в) $2\sqrt{3}$; г) 1. **19.9.** а) $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$; б) $2-\sqrt{3}$; в) −2; г) 2. **19.10.** а) $\left[-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right]$; б) [0;3]; в) [0,6;1]; г) [−2;2]. Указание: воспользуйтесь методом вспомогательного аргумента и преобразуйте $y=2\sin\left(x+1+\frac{\pi}{3}\right)$. **19.11.** а) [−3,25;−1]; б) [0;1]; в) [1;5,05]; г) $(-\infty;0]$. **19.12.** а) 1; б) 2; в) 1; г) 4. **19.13.** а) −4; −2; 2; 4; 6; 8; 10; б) −4; 4; 8; в) 6; г) ±5;10. **19.14.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **19.15.** а) 1; б) −2; в) $\sqrt{3}$; г) $\sin 3\alpha$. **19.16.** а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) −1; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **19.17.** а) 4; б) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; в) 0; г) 0. **19.18.** а) $\frac{11}{16}$; б) $-\frac{3}{4}$; в) 18; г) 3. **19.19.** а) 0,5; б) 8; в) $-\frac{3}{7}$; г) 2 либо 1,5. **19.20.** а) $\frac{3}{16}$; б) $\frac{3}{32}$; в) $\frac{1}{8}$. Указание: домножьте и разделите выражение на $8\sin 20°$; г) $-\frac{1}{2}$. Указание: домножьте и разделите выражение на $\sin\frac{\pi}{7}$. **19.21.** а) $-\frac{11}{5}$; б) −10; в) $\frac{7}{25}$; г) 2 или 0. Указание: воспользовавшись фомулами универсальной тригонометрической подстановки, составьте рациональное уравнение относительно $y=\mathrm{tg}\,\alpha$. Можно также рассмотреть данное равенство как однородное выражение. **19.22.** а) $-\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{6}$. **19.23.** а) $\frac{336}{625}$; б) $\frac{32}{15}$; в) $\frac{7}{8}$; г) $-\frac{12}{13}$. **19.24.** а) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$; б) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; г) $\frac{5-12\sqrt{3}}{26}$. **19.25.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) −3. **19.26.** а) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; б) $\frac{15}{17}$; в) −0,5; г) $-\frac{7}{24}$. **19.27.** а) $\frac{120}{169}$; б) $-\frac{161}{289}$; в) $-\frac{3}{4}$; г) $\frac{7}{25}$. **19.28.** а) 110°; б) −80°; в) $-\frac{\pi}{12}$; г) 160°. **19.29.** а) 170°; б) −10°; в) −20°;

г) 110°. **19.30.** а) 1; б) 0,8; в) 45°; г) 0°. **19.31.** а) $\frac{33}{65}$; б) $-\frac{6}{7}$; в) $-\frac{2}{9}$; г) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

В ответах двадцатого параграфа, если не указано иное, параметры *n*, *m*, *k* принимают все целочисленные значения, т. е. $n\in\mathbf{Z}$, $m\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$.

20.1. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{3\pi}{2}-2$. **20.2.** а) $\frac{4\pi}{3}$; б) 2π; в) 2π; г) $\frac{5\pi}{2}$. **20.3.** а) 14; б) 9; в) 1; г) 0. **20.4.** а) $\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}$, сумма равна $-\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi n}{3}$, сумма равна $-\pi$; в) $\pm 2+10n$, сумма: $-2+2=0$; г) $\pm\frac{7\pi}{24}+\pi n$, сумма равна $\frac{\pi}{6}$. **20.5.** а) ± 1, 2 корня; б) $\frac{\pi}{12}+\pi n$; $\frac{5\pi}{12}+\pi m$, 8 корней; в) нет решений, так как $\sqrt{3}>1$; г) нет решений, так как $\pi>3 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}>1$. **20.6.** а) $900°n$, $600°+1800°m$, $300°+1800°m$; $-1200°$; б) $900°n$, $-600°+1800°m$, $-300°+1800°m$, $-600°$; в) $585°$; г) 4 корня. **20.7.** а) $[-2;2]$; б) $[-\pi;\pi]$; в) $(-\infty;+\infty)$; г) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. **20.8.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, πm, сумма равна $\frac{-5\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi m$, сумма равна $-\frac{\pi}{3}$; в) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi m$, сумма равна $-\frac{3\pi}{4}$; г) $\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n$; $\pm\arccos\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+2\pi n$, 3 корня. **20.9.** а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, сумма равна $\frac{3\pi}{2}$; б) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, сумма равна $\frac{\pi}{2}$; в) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, сумма равна $\frac{\pi}{3}$; г) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, сумма равна $\frac{4\pi}{3}$. **20.10.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, среднее арифметическое равно $-\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, среднее арифметическое равно $-\frac{\pi}{2}$; в) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, среднее арифметическое равно $-\frac{4\pi}{15}$; г) $(-1)^n\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, среднее арифметическое равно $\frac{13\pi}{48}$.

20.11. а) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, сумма равна $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, сумма равна $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, сумма равна π; г) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, сумма равна $\frac{\pi}{2}$. **20.12.** а) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)^2$, $n\in\mathbf{N_0}$; б) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; г) $\pm\sqrt{-\frac{3\pi}{2}+2\pi n}$, $n\in\mathbf{N}$. **20.13.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $2\pi m$, сумма равна -3π; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; πn, сумма равна -3π; в) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{3}+\pi m$, сумма равна $-\frac{7\pi}{2}$; г) $\frac{\pi n}{2}$, сумма равна $-\frac{7\pi}{2}$. **20.14.** а) $\frac{\pi n}{2}$, 5 корней; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+\pi m$, 4 корня; в) $\frac{\pi n}{8}$, 17 корней; г) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, 3 корня. **20.15.** а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, сумма равна $-\frac{\pi}{4}$; б) $\pi+2\pi n$; $-\frac{\pi}{4}+\pi m$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, сумма равна π; в) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, сумма равна $\frac{\pi}{2}$; г) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, сумма равна π. **20.16.** а) $\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, сумма равна 0; б) $\pi+2\pi n$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, сумма равна π; в) $2\pi n$, сумма равна 0; г) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, сумма равна $\frac{\pi}{3}$. **20.17.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\operatorname{arctg}4+\pi n$, 6 корней; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $-\frac{\pi}{4}+\pi m$, 5 корней; в) πn; $\frac{\pi}{4}+\pi n$;, 6 корней; г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, 11 корней. **20.18.** а) πk; $\frac{\pi}{6}+\pi n$; $\frac{\pi}{3}+\pi m$, сумма равна $-\pi$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\pi n$, сумма равна $\frac{\pi}{2}$; в) $2\pi n$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, сумма равна 0; г) $2\pi n$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, сумма равна 0.

20.19. а) $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, 2 корня; б) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, 1 корень; в) $\pi+2\pi n$; $\pm\arccos\frac{7}{9}+2\pi n$, 3 корня; г) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, 3 корня.

20.20. а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $(-1)^m\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{2}$, сумма равна $\frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi m$, сумма равна 2π; в) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; πm, сумма равна 2π; г) $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, сумма равна 3π. **20.21.** а) $5\pi n$; $\frac{5\pi}{2}+5\pi n$, 1 корень; б) $\pi+2\pi n$; $\pm 2\arccos\frac{1}{3}+4\pi m$, 2 корня; в) $\frac{\pi}{6}+\pi n$; $\frac{\pi}{2}+\pi m$, 3 корня; г) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, 2 корня. **20.22.** а) 5; б) 2; в) 1; г) 2. **20.23.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi m$, $A=-\frac{\pi}{12}$; б) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $x=\operatorname{arctg}\frac{5}{11}+\pi m$, $A=\frac{15\pi}{44}$; в) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $x=\operatorname{arctg}9+\pi m$, $A=\frac{45\pi}{4}$; г) $2\operatorname{arctg}2+3\pi n$; $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+3\pi m$, $A=\frac{2}{3}$. **20.24.** а) $-\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, 3 корня; б) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arctg}2+\pi m$, 4 корня; в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, 2 корня; г) $\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi m}{3}$, 8 корней. **20.25.** а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi n$, 4 корня; б) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, 4 корня; в) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $(-1)^m\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{2}$, 6 корней. Указание: домножьте правую часть уравнения на $(\sin^2 x+\cos^2 x)$; г) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, 4 корня. **20.26.** а) $2\pi n$; $x=2\operatorname{arctg}1{,}5+2\pi n$, 1 корень; б) $\pi+2\pi n$; $\frac{\pi}{4}+2\pi m$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, 2 корня; в) πn; $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, 5 корней; г) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$; $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, 4 корня. **20.27.** а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, сумма равна $\frac{\pi}{4}$; б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\pi n$, сумма равна $-\frac{\pi}{3}$; в) $(-1)^n\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, сумма равна $\frac{3\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, сумма равна $\frac{\pi}{3}$. **20.28.** а) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{12}+\pi n$, 4 корня; б) $\frac{\pi}{12}+\pi n$; $\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$, 4 корня; в) $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$; $-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}$, 8 корней; г) $-\frac{5\pi}{12}+\pi n$, 2 корня. **20.29.** а) $\pi+4\pi n$; $\frac{\pi}{2}+2\pi m$; $2\pi+4\pi k$, сумма равна $\frac{3\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, сумма равна $\frac{3\pi}{4}$; в) $2\pi n$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, сумма равна $\frac{\pi}{4}$; г) $(-1)^n\frac{\pi}{30}-\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, сумма равна $\frac{163\pi}{60}$. **20.30.** а) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, 9 корней; б) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, 6 корней; в) $\frac{\pi n}{4}$; $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi m}{8}$, 37 корней; г) $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n$; 10 корней. **20.31.** а) $\pi+2\pi n$; $\frac{2\pi m}{3}$, сумма равна $\frac{5\pi}{3}$; б) $\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, сумма равна $\frac{5\pi}{3}$; в) $\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, сумма равна π; г) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, сумма равна 0. **20.32.** а) $2\pi n$; $-1+2\pi n$, 3 корня; б) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, 10 корней; в) $\frac{2\pi n}{5}$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pi+2\pi n$, 9 корней; г) $\frac{\pi n}{2}$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{21}+\frac{\pi n}{7}$, 19 корней. **20.33.** а) $\frac{\pi n}{6}$, 3 корня; б) πn; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi m}{3}$, 2 корня; в) $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{28}+\frac{\pi m}{14}$, 8 корней; г) $\frac{1}{24}+\frac{n}{12}$, 19 корней. **20.34.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\frac{\pi}{12}+\pi n$, сумма равна $\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, сумма равна $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi n}{5}$; $\pm\frac{3\pi}{8}+\pi m$, сумма равна $\frac{39\pi}{40}$; г) πn; $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi m}{3}$, сумма равна $\frac{\pi}{9}$. **20.35.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$; πn, $n\in\mathbf{Z}$; в) $\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$; сумма равна $-\frac{3\pi}{4}$; г) любое значение x, кроме $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

20.36. а) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, 5 корней; б) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi m}{7}$, 8 корней; в) $\frac{\pi n}{5}$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$, 5 корней; г) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, 6 корней. **20.37.** а) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, сумма равна $\frac{9\pi}{10}$; б) $\frac{\pi}{6}$, сумма равна $\frac{\pi}{6}$; в) πn; $-\frac{\pi}{4}+\pi m$, 1 корень; г) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{8}$; $\frac{\pi}{4}-2+\pi n$; $\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}+\frac{\pi n}{3}$, сумма равна $\pi+\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}$.

20.38. а) $2\pi n$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$, сумма равна $\frac{7\pi}{2}$; б) $-\pi+2\pi n$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$, сумма равна $\frac{3\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, сумма равна $\frac{\pi}{2}$; г) нет решений. **20.39.** а) 1; б) нет решений; в) 1; г) $2\pi+8\pi n$. **20.40.** а) 11; б) 7; в) 26; г) 29.

21.1. а) 45°; б) 105,5°; в) 36°; г) да, если их величины 54° и 126°. **21.2.** а) 155°, 155°; б) 30°, 150°; в) 36°; г) 140°. **21.3.** а) 4); б) $AB \parallel CD$; в) $a \parallel b$; г) 46°. **21.4.** а) Невозможно определить; б) 180°; в) 60°; г) $\frac{\alpha}{2}$. **21.5.** а) 72; б) 9,5 и 11,5; в) 6; г) нет. **21.6.** а) 100°; б) 90°; в) 75°; г) 105°. **21.7.** а) 120°; б) 40°; в) 3,3; г) 3,1. **21.8.** а) $\angle BAC = \angle BCA = 75°$; б) 140°; в) 50°; г) 5 м. **21.9.** а) AC = 4 см, $AB = BC$ = 8 см; б) $RT = TS$ = 12 дм, RS = 21 дм; в) 10; г) 4 см. **21.10.** а) 24 см; б) 6 м, 1,2 м^2; в) 20; г) 12 см. **21.11.** а) 240°; б) $8\sqrt{3}$ см^2; в) $27\sqrt{3}$ см^2; г) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **21.12.** а) 27 см; б) 8 см; в) 10; г) 1:4. **21.13.** а) $\sqrt{22}$; б) $\sqrt{10}$ см; в) 6 см; г) 26 см. **21.14.** а) 5; б) 25,2; в) 2,4; г) 170. **21.15.** а) 120°; б) 70°; в) 45°; г) 72. **21.16.** а) 10,8 м; б) 18; в) 7 и 4; г) 48 м, 54 м. **21.17.** а) $3\sqrt{2}$ см; б) 26 м; в) 2,5; г) 20 и 25. **21.18.** а) $4\sqrt{3}$ см, $2\sqrt{3}$ см; б) 8 см, $8\sqrt{3}$ см; в) 18 см; г) 30°. **21.19.** а) 5 см; б) 9 см^2; в) 8; г) $5\sqrt{10}$. **21.20.** а) 24; б) 5; в) 1,25; г) 4 м. **21.21.** а) 8 см; б) $2(\sqrt{3}-1)$ и $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$; в) $8(\sqrt{3}-1)$; г) $\frac{3}{4}$. **21.22.** а) 1 см; б) $\frac{5}{9}$; в) 20; г) $3+\sqrt{22}$. **21.23.** а) 24 см; б) 18; в) 42 см; г) 75 см^2. **21.24.** а) 8 см; б) 3,4; в) AE = 2 см, EB = 5 см; г) 4 см. **21.25.** а) 8 см^2; б) 50 см^2; в) 102; г) $24\sqrt{10}$. **21.26.** а) 7; б) 72; в) $48\sqrt{3}$; г) 25 м. **21.27.** а) $12\sqrt{13}$, $18\sqrt{13}$; б) 18, $12\sqrt{2}$; в) 6,25; г) $\frac{60}{13}$. **21.28.** а) Параллелограмм; б) $EF = NM = 24$; в) 360°; г) $a(2+\sqrt{2})$. **21.29.** а) 28 см; б) 12 см; в) 18; г) 120 м. **21.30.** а) 96°; б) 8 см; в) 13 см; г) 28 см. **21.31.** а) 50°; б) 25°; в) 60 см; г) 4. **21.32.** а) 44; б) 62; в) 38 см; г) 12 см. **21.33.** а) 10; б) 6 см; в) 9 см; г) 22 см. **21.34.** а) $\angle A = \angle D = 65°$, $\angle C = 115°$; б) 160°; в) $\angle A = \angle D = 55°$, $\angle B = \angle C = 125°$; г) $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$. **21.35.** а) 58; б) 10; в) 8 см; г) 50. **21.36.** а) 36°, 144°; б) $\angle D = 55°$, $\angle C = 125°$; в) 120°; г) 135°. **21.37.** а) 108°; б) 18; в) 5 м; г) 3 дм. **21.38.** а) 1200 м^2; б) 14 см^2; в) 47 см^2; г) 143. **21.39.** а) 72; б) 2:1; в) 40; г) $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$. **21.40.** а) 96 см^2; б) 35 см^2; в) 16 см^2; г) 3 см^2. **21.41.** а) 180 см^2; б) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; в) 80; г) $42\sqrt{6}$. **21.42.** а) 1:2; б) $\frac{3}{8}$; в) 2; г) $\frac{15}{7}$, $\frac{20}{7}$. **21.43.** а) 165 м^2; б) 10 см^2; в) 64 см^2; г) 20 см.

21.44. а) 150 см^2; б) 169 см^2; в) 12; г) $8\sqrt{3}$. **21.45.** а) 72 см^2; б) 54 м; в) $20\sqrt{3}$; г) 144. **21.46.** а) 8 см; б) 2; в) 8; г) 1:1. **21.47.** а) Увеличится на 2π м; б) 3,5; в) $4\pi R$; г) $\pi : 4$. **21.48.** а) $(36-9\pi)$ см^2; б) $\frac{3\pi}{2}$ см^2; в) 36π см^2; г) $\frac{a^2}{4\pi}$. **21.49.** а) $(x+3)^2+(y-6)^2=25$; б) $(x-2)^2+(y+5)^2=64$; в) (5; 6); г) 44. **21.50.** а) 8 см; б) 61 см; в) 77; г) 10. **21.51.** а) 50°; б) $R\sqrt{3}$; в) 60°; г) 50°. **21.52.** а) $5\sqrt{3}$ см; б) $2\sqrt{3}$ см; в) $3\sqrt{30}$; г) 2. **21.53.** а) $0{,}5\sqrt{13}$; б) 6,5; в) 30°; г) 50,5. **21.54.** а) $3\sqrt{2}$; б) 28; в) 7; г) $\sqrt{3}$. **21.55.** а) 10 см; б) 1; в) $5\sqrt{2}$; г) 2π. **21.56.** а) 17; б) 15; в) $\frac{1}{14}$; г) 10. **21.57.** а) $2R^2$; б) 1:1; в) 2,5; г) 1920. **21.58.** а) Параллельны; б) скрещивающиеся; в) C_1D; г) бесконечно много. **21.59.** а) $20\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{2}$ см^2; в) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; г) $\frac{1}{3}$. **21.60.** а) $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$; б) в 27 раз; в) 8; г) $10\sqrt{2}$. **21.61.** а) 900 см^2; б) 136 см^2; в) 1248 см^2; г) 60 см^2. **21.62.** а) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{a^3 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{2\sin\alpha}$; в) $a^3 \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta$; г) $36(2+\sqrt{2})$ см^2. **21.63.** а) $216\sqrt{6}$ см^2; б) 2; в) $\sqrt{2}$; г) 24 см^2. **21.64.** а) 252 см^3; б) 24 см^3; в) $24\sqrt{3}$ см^3; г) 384 см^3. **21.65.** а) 1:1; б) 1:3; в) 3:4; г) 1:5. **21.66.** а) 130 см^2; б) $6\sqrt{41}$; в) $\sqrt{d^2-m^2}$; г) $\frac{\sqrt{70}}{14}$. **21.67.** а) 30 м; б) 64; в) $\sqrt{S_1S_2S_3}$; г) $\sqrt{\frac{(x^2+y^2-z^2)(x^2-y^2+z^2)(-x^2+y^2+z^2)}{8}}$. **21.68.** а) 45 см^2; б) $16(\sqrt{3}+2)$; в) $408\sqrt{3}$ см^2; г) 1008. **21.69.** а) $27\sqrt{3}$ см^3; б) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; в) $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$; г) $\frac{1}{8}$. **21.70.** а) $108\sqrt{6}$; б) $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$; в) $\frac{2S\sqrt{S}}{3}$; г) $\frac{4\sqrt{2}a^3 \operatorname{tg}\alpha}{3(2\operatorname{tg}^2\alpha+1)\sqrt{2\operatorname{tg}^2\alpha+1}}$. **21.71.** а) 540 см^2; б) $32\sqrt{7}$ см^2; в) $4\sqrt{6}$; г) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$. **21.72.** а) 288 см^2; б) 30°; в) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$; г) $4\sqrt{3}$ см^3. **21.73.** а) $\frac{28}{3}$ см^2; б) $\frac{15}{4}$ см^2; в) $6\sqrt{3}$ см; г) 44. Указание: поставим пирамиду на любую из боковых граней, которую теперь будем считать основанием. **21.74.** а) $\frac{\sqrt{S}\,\sqrt[4]{27}}{3}$; б) 243 см^2; в) $4Q$; г) Q. **21.75.** а) 300 см^3; б) 450 см^3; в) 60 см^3; г) $\frac{1}{2}$. **21.76.** а) 18 см и 10 см; б) $9\sqrt{2}$ см^2; в) 45°; г) 15. **21.77.** а) 48 см^2; б) 12; в) $64\sqrt{3}$ см^2; г) 3. **21.78.** а) 112π см^2; б) 64π см^2; в) 19; г) 10. **21.79.** а) 245π см^3; б) 6 см; в) 48 см^3; г) 98π. **21.80.** а) 49π; б) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; в) $8\sqrt{3}$ см; г) 60°. **21.81.** а) 27π см^2; б) $36\sqrt{5}\pi$; в) $2\pi\sqrt{13}$; г) 3π. **21.82.** а) 2π см^2; б) 320π см^3; в) 72; г) $\frac{\pi}{3}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. **21.83.** а) 10 см; б) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; в) 1:4; г) 832π см^2. **21.84.** а) 3 см; б) 8 см^3; в) 288; г) 64. **21.85.** а) 45; б) 3; в) $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^3$; г) $\frac{1}{3}$.

22.1. а) 20°; б) 54°; в) 180; г) 90. **22.2.** а) $\frac{7}{6}$; б) $\frac{10}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{k(n+m)}{ml}$. **22.3.** а) 100; б) 36; в) 2,4; г) 3. **22.4.** а) 63°; б) 72°, 72°, 36°; в) 1440°; г) 120°. **22.5.** а) 20°; б) 50; в) 3; г) $2\operatorname{arcctg}(3\sqrt{3})$.

22.6. а) $24(3+\sqrt{3})$ см; б) 112; в) 4,8; 9,6; 6,4; г) 10; 7,5; 12,5. **22.7.** а) 12; б) 64; в) 2:1; г) 19. **22.8.** а) 7 см; б) 10; в) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ м; г) $64\sqrt{3}$. **22.9.** а) 130°; б) 38°; в) 80 см^2; г) 4 м. **22.10.** а) 10 см; б) 6 и 12; в) 8:1; г) $2\sqrt{61}$.

22.11. а) 64; б) 72 м^2; в) $\frac{1}{12}$; г) 288. **22.12.** а) 9,5 см; б) $\frac{\sqrt{58}}{3}$; в) 6; г) 20.

22.13. а) 24°; б) 70°; в) $\frac{11}{3}$; г) $\frac{24}{5}$. **22.14.** б) 45°; в) 4,5; г) 4,8.

22.15. а) $90°+\frac{\gamma}{2}$; б) 24°, 72°, 84°; в) 2; г) $3\sqrt{5}$. **22.16.** а) 84; б) $\sqrt{2}$; в) 11:7; г) $\frac{b+c}{a}$. **22.17.** а) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}$; б) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$; в) 1; г) $8\sqrt{10}$ см.

22.18. а) $2\sqrt{13}$ см; б) 1,2 м^2; в) 5 см; г) 15 см. **22.19.** а) 75; б) 25 см^2; в) 7,25; г) 240. **22.20.** а) 23; б) 48; в) 7,5; г) $\frac{3}{5}$. **22.21.** а) 4,8; б) 75; в) $4\sqrt{3}$; г) 15. **22.22.** а) 6 см; б) $8{,}8(3+\sqrt{3})$; в) $\frac{8}{\sqrt{3}}$; г) $4\sqrt{3}$. **22.23.** а) R; б) 6; в) 8 м; г) 30° или 150°. **22.24.** а) $\frac{\sqrt{10}}{4}$; б) $\frac{5\sqrt{13}}{6}$; в) 128 м^2; г) 216 м^2. **22.25.** а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$; в) $\frac{\sqrt{14}}{12}$; г) $\sqrt{13}$ или $\sqrt{37}$. **22.26.** а) 2; б) $3\sqrt{10}$; в) $\frac{7\sqrt{13}}{26}$; г) $\frac{4}{\sqrt{7}}$, $\frac{12}{\sqrt{7}}$. **22.27.** а) $2\sqrt{3}$; б) $\sqrt{7}$; в) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$; г) $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **22.28.** а) 4:3; б) 18 см; в) $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$; г) 2. Указание: треугольники ABC и BKC подобны. **22.29.** а) 6; б) 70; в) $\frac{3}{40}$; г) $\frac{2}{15}$.

22.30. а) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; б) 1, $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; в) 30; г) 3. **22.31.** а) $\frac{30}{11}$ см; б) 1,44 м^2; в) 56; г) 20,8. **22.32.** а) 202,8; б) 5; в) $\frac{a^3b}{2(a^2+b^2)}$; г) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

22.33. а) 1:1; б) 90°; в) d; г) 1. **22.34.** а) $2a^2+2b^2$; б) 19 дм; в) 6; г) 3:5. **22.35.** а) 60 см; б) 70 см; в) 12; г) $\frac{(a-b)^2}{2}\sin\alpha$.

22.36. а) $180°-2\alpha$; б) $12\sqrt{5}$; в) 256; г) $2\sqrt{3}$. **22.37.** а) 8 см; б) $\frac{144}{13}$;

в) 8 см; г) 13 дм. **22.38.** а) 2; б) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$; в) $2\sqrt{2}$; г) $\frac{2100}{13}$. **22.39.** а) 14; б) 25 см^2; в) $\frac{50}{3}$; г) $12\sqrt{5}$. **22.40.** а) 108 см; б) 11; в) 15; г) $\frac{5a}{2}\operatorname{tg}54°$. **22.41.** а) 14; б) 28; в) 96; г) $16\sqrt{3}$. **22.42.** а) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; б) 10,25; в) $\frac{53}{3}$; г) 156 см^2. **22.43.** а) 4,5 м^2; б) 84 м^2; в) 12 см^2; г) $a^2\frac{\sin 2\alpha}{8}$. **22.44.** а) 84 см^2; б) $24\sqrt{5}$; в) 2016; г) $\frac{3\sqrt{55}}{2}$. **22.45.** а) $S_2 \cdot S_4 = A$; б) $\sqrt{S_1S_2}$; в) $\frac{8}{3}$; г) 2:3. **22.46.** а) $\frac{5}{7}$; б) 168; в) $\frac{2}{7}, \frac{1}{5}, \frac{8}{35}, \frac{2}{7}$; г) $\frac{210\sqrt{6}}{143}$. **22.47.** а) $75\sqrt{3}$; б) $192\sqrt{6}$; в) $h^2\sqrt{3}$; г) $\frac{a^2\sin 2\alpha}{2}$. **22.48.** а) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$; б) 1050; в) 75; г) 840 см^2. **22.49.** а) 40 м; б) $AB = AC = 24$ см; в) 20 м; г) P. **22.50.** а) 135°; б) 40°; в) 60°; г) 10. **22.51.** а) 55°; б) 44°; в) 75°; г) 70. **22.52.** а) 33°; б) 50°; в) 40°; г) 66°, 42°. **22.53.** а) 41°; б) 60°; в) 122°; г) x^2. **22.54.** а) 1; б) 13; в) $\sqrt{240}+\sqrt{20}$; г) 18. **22.55.** а) 1,5 и 2; б) 11; в) R^2-a^2; г) $\frac{37}{2\sqrt{7}}$. **22.56.** а) 4; б) 1; в) 12; г) 9 см. Указание: отрезок BM — высота и медиана треугольника ABC. **22.57.** а) $R(\sqrt{2}-1)$; б) 2:3; в) $\frac{2}{3}\pi R$; г) $2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **22.58.** а) 12 см; б) 1,5 см; в) 16; г) 17 м. **22.59.** а) 21 м; б) 2,75π м^2; в) 6π; г) $\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$. **22.60.** а) $\frac{\sqrt{15}}{6}$; б) $2\frac{2}{3}$; в) 480 см^2; г) 7,2. **22.61.** а) $\frac{25}{6}$ м; б) $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{46}{15}}$; в) 30 или 40 см; г) $\frac{5(5+\sqrt{7})}{4}$. **22.62.** а) $\sqrt{3}$ см; б) 1:4; в) $\sqrt{6}$; г) $2\sqrt{6}$. **22.63.** а) 5 см; б) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$; в) $\sqrt{13}$; г) $\frac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$. **22.64.** а) $\frac{\sqrt{15}}{2}$; б) 6; в) 5; г) 12 005. **22.65.** а) 90°; R^2; б) 24; в) 384 м^2; г) 94,08 м^2. **22.66.** а) 30°; б) 9,6 м; в) 8; г) 180. **22.67.** а) 105° и 127°; б) 54°; в) 0,8 и 0,4; г) 10 м. **22.68.** а) $12\sqrt{3}$ см^2; б) $\sqrt{6}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $6\sqrt{2}$ см. **22.69.** а) 6; б) $3\sqrt{29}$; в) $15\sqrt{6}$; г) $16\sqrt{5}$. **22.70.** а) 112; б) 132; в) 75; г) 36. **22.71.** а) 189; б) 6; в) 18; г) 81. **22.72.** а) 27; б) 14; в) $\frac{2S}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; г) $\frac{1}{4}d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\gamma$.

22.73. а) 60 см^2; б) $\frac{9\sqrt{91}}{4}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **22.74.** а) Прямоугольник; б) 350 см^2; в) 3 м; г) $\frac{\pi a^2\operatorname{tg}\beta}{\sin^2\alpha}$. **22.75.** а) $\frac{a^3}{2}$; б) 8; в) $8a^2\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$; г) $2d^2(\sin\alpha+\sin\beta)\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. **22.76.** а) 72; б) 52; в) 905; г) 21. **22.77.** а) 93; б) 102; в) 104; г) 3528. **22.78.** а) $a^2\sqrt{3}$ и $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{3}H^3\operatorname{ctg}^2\alpha}{4}$; г) 9. **22.79.** а) $36\sqrt{2}$ см^3; б) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; в) $\frac{32a^3\operatorname{tg}\alpha}{3}$; г) $\frac{4l^3\operatorname{tg}\alpha}{3(\operatorname{tg}^2\alpha+2)\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+2}}$. **22.80.** а) 8; б) 4; в) 13,5 см^3; г) $\frac{a^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{12}$. **22.81.** а) 32; б) 5, 5, 6, 6; в) $\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}\beta$; г) $\frac{2}{3}H^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. **22.82.** а) 3; б) 3; в) 18; г) 12. **22.83.** а) 25; б) 6; в) 10; г) $\frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **22.84.** а) 100; б) 90; в) 168; г) 168. **22.85.** а) 175 см^3; б) $\frac{27}{37}$; в) $\frac{27}{19}$; г) $\frac{V}{2}$. **22.86.** а) 12 см; б) $2\sqrt{2}$ см; в) $3\sqrt{13}$; г) $\sqrt{15}$. **22.87.** а) $2\sqrt{2}$ см; б) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; в) 6. **22.88.** а) 60°; б) 90°; в) $\sqrt{5}$; г) $\frac{5\sqrt{3}}{18}$. **22.89.** а) 30°; б) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{3}{2}$; г) 8. **22.90.** а) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) 30°; в) 45°; г) $\frac{1}{3}$. **22.91.** а) −14; б) 39; в) 51; г) 9. **22.92.** а) 5; б) $\pi d^2\sin 2\alpha$; в) $2\pi R^2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$; г) $24\pi\sqrt{2}$ см^2. **22.93.** а) $\frac{81\pi}{2}$; б) $\frac{\pi b^2}{6}$; в) 12π дм^2; г) $\frac{\pi H^2}{\sin^2\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1-\sin^2\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **22.94.** а) $\frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$; б) $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{24}$; в) 1500π см^3; г) $65\frac{1}{3}$. **22.95.** а) 52π; б) 7; в) 7; г) 9. **22.96.** а) 2; б) 192π см^2; в) 676π см^2; г) $\frac{a\sqrt[3]{4}}{2}$. **22.97.** а) 4:1; б) $\frac{3}{8}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{3\sqrt[4]{3}}{4}$. **22.98.** а) 60°; б) 5; в) $\frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$; г) $\frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$. **22.99.** а) 3,75 см; б) $(\sqrt{2}-1):2:(\sqrt{2}-1)$; в) $2\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$; г) $\frac{9}{4}$. **22.100.** а) 54; б) 80; в) 1; г) $\frac{3-\sqrt{3}}{4}a$. **22.101.** а) 15; б) 21; в) 21; г) 7. **22.102.** а) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ и $\frac{a\sqrt{6}}{12}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ и $\sqrt{2}$; в) 2; г) 50. **22.103.** а) 48; б) 18; в) 6; г) 26.

ОТВЕТЫ К МОДЕЛЬНЫМ ВАРИАНТАМ ТЕСТОВ

Тест 1

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	3	4	5	2	3	1	4	3	5	1	4	2	4	3	5	2	3	3

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	36	720	12	200000	70	4	2	96	–8	9	–4	–45

Тест 2

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	2	4	4	2	4	5	2	1	1	2	3	3	4	4	1	3	1	4

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	15	7	24	10	5	3	48	3	27	–5	–3	–5

Тест 3

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	2	1	3	4	5	5	3	4	2	1	5	4	5	5	1	2	5	1

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	216	2	750	1	81	–11	32	4	–6	16	6	6

Тест 4

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	1	4	5	3	3	4	2	1	4	2	3	2	1	3	3	5	4	5

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	8	24	21	2	–8	25	120	6	13	6	6	40

Тест 5

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	5	3	2	3	4	1	4	2	2	3	4	2	1	2	4	1	5	1

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	540	70	–1	660	189	–40	3	2	–4	–3	90	8

Тест 6

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	5	2	4	5	5	2	1	3	2	5	2	5	5	2	2	4	3	3

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	56	60	5	40	2	20	18	16	1	256	1	–2

Тест 7

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	1	5	2	4	4	3	1	4	5	2	3	4	2	2	4	5	5	3

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	12	96	62	8	3	–1	45	–1	2187	–54	2	15

Тест 8

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	4	1	3	1	2	2	5	1	3	5	4	4	3	4	3	3	4	5

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	60	45	8	6	63	61	–2	8	70	–7	–1	–7

Тест 9

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	2	5	4	5	2	4	4	1	2	5	1	4	4	3	1	3	1	3

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	24	16	560	15	14	0	2	–5	–3	24	–12	3

Тест 10

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	4	3	1	1	5	5	2	3	5	5	3	5	5	5	1	3	2	3

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	100	95	34	2720	–6	52	56	5	–5	44	–1	0

Тест 11

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	5	5	2	5	1	2	3	4	4	5	5	5	4	2	4	4	3	3

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	75	12	53	18	9	–14	36	2	–3	6	45	3

Тест 12

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	4	3	3	3	4	3	3	3	2	4	1	1	3	4	1	2	4	2

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	3	360	144	4	6	6	1	16	10	–3	12	7

Тест 13

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	4	4	4	2	4	5	3	5	2	2	2	5	3	1	4	4	5	4

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	18	16	8	156	6	3	60	3927	30	4	4	11

Тест 14

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	4	2	4	4	1	1	4	5	1	1	3	4	1	3	5	4	4	2

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	1	24	16	–150	–16	–11	12	2	30	60	180	30

Тест 15

Задание	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
Ответ	4	5	4	4	4	5	4	4	3	4	3	5	4	4	3	4	5	4

Задание	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
Ответ	–20	60	144	–2	6	0	–2	1864	3	180	2	–2

Признаки делимости	
На 2	Последняя цифра числа делится на 2
На 3	Сумма цифр числа делится на 3
На 4	Число, записанное двумя последними цифрами числа, делится на 4
На 5	Последняя цифра числа делится на 5
На 9	Сумма цифр числа делится на 9
На 10	Последняя цифра числа 0
На 25	Число, записанное двумя последними цифрами числа, делится на 25

НОД (a, b, c)	Наибольший из общих делителей натуральных чисел a, b и c	
НОК (a, b, c)	Наименьшее положительное из общих кратных натуральных чисел a, b и c	
НОД $(a, b) \le a$; НОД $(a, b) \le b$	НОК $(a, b) \ge a$; НОК $(a, b) \ge b$	НОД $(a, b) \cdot$ НОК $(a, b) = a \cdot b$

Единицы измерения		
Длина	**Масса**	**Площадь**
1 километр (км) = 1000 м = 100 000 см	1 тонна (т) = 1000 кг	1 квадратный километр = 100 га = 10^6 м^2
1 метр (м) = 100 см = 1000 мм = 10^{-3} км	1 центнер (ц) = 100 кг = 10^{-1} т	1 гектар = 10 000 м^2 = 0,01 км^2
1 дециметр (дм) = 10 см = 10^{-1} м	1 килограмм (кг) = 1000 г = 10^{-3} т	1 ар = 1 сотка = 100 м^2 = 0,01 га^2
1 сантиметр (см) = 10 мм = 10^{-2} м	1 грамм (г) = 10^{-3} кг	1 квадратный метр = 10^{-4} га = 10^4 см^2
1 миллиметр (мм) = 10^{-1} см = 10^{-3} м	1 миллиграмм (мг) = 10^{-3} г = 10^{-6} кг	1 квадратный метр = 10^{-4} га = 10^4 см^2
		1 квадратный сантиметр = 10^{-4} м^2

АЛГЕБРА

Числовые множества

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество ***натуральных*** чисел.

$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — множество ***целых*** чисел.

$\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\right\}$ — множество ***рациональных*** чисел (состоит из конечных десятичных дробей и бесконечных периодических десятичных дробей).

Иррациональные числа — множество бесконечных непериодических десятичных дробей.

R — множество ***действительных*** чисел есть объединение множеств рациональных и иррациональных чисел.

Модуль действительного числа		
Определение	**Основные свойства модуля**	
$\|a\| = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0; \\ -a, \text{ если } a \le 0. \end{cases}$	$\|a\| \ge 0$; $\|a\| = \|-a\|$; $\|a\| \ge a$; $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$;	$\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}$, $b \ne 0$; $\|a+b\| \le \|a\| + \|b\|$; $\|a\|^2 = a^2 = \|a^2\|$.

Некоторые типы уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля	
При $a \geq 0$ $\lvert f(x)\rvert = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$ При $a<0$ $\lvert f(x)\rvert = a$ корней не имеет.	$\lvert f(x)\rvert < a \Leftrightarrow -a<f(x)<a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<a, \\ f(x)>-a. \end{cases}$ $\lvert f(x)\rvert > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>a, \\ f(x)<-a. \end{array}\right.$
$\lvert f(x)\rvert = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$ — 1-й способ; $\lvert f(x)\rvert = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ f(x)=g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\leq 0, \\ -f(x)=g(x) \end{cases} \end{array}\right.$ — 2-й способ.	$\lvert f(x)\rvert > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x), \\ f(x)<-g(x). \end{array}\right.$ $\lvert f(x)\rvert < g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>-g(x). \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$	$\lvert f(x)\rvert > \lvert g(x)\rvert \Leftrightarrow (f(x))^2 > (g(x))^2 \Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))>0.$

Степени и корни	
$a^1 = a,\ a \in \mathbf{R};$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{раз}},\ n \in \mathbf{N},\ a \in \mathbf{R};$ $a^0 = 1,\ a \neq 0,\ a \in \mathbf{R};$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ n \in \mathbf{N},\ a \neq 0,\ a \in \mathbf{R};$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N},\ n \neq 1,$ если $m \leq 0$, то $a>0,\ a \in \mathbf{R};$ если $m>0$, то $a \geq 0,\ a \in \mathbf{R}.$

Свойства степеней (при допустимых значениях переменных)	
$a^p \cdot a^r = a^{p+r};$ $a^p : a^r = a^{p-r};$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\frac{b}{a}\right)^r;$	$a^r \cdot b^r = (ab)^r;$ $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r;$ $(a^p)^r = a^{pr}.$

Арифметический квадратный корень: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0$ и $b^2 = a$ $(a \geq 0)$		
Тождества	**Основные свойства**	
$(\sqrt{a})^2 = a,\ a \geq 0,\ a \in \mathbf{R};$ $\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert,\ a \in \mathbf{R}.$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b};$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}};$ $(\sqrt{a})^p = \sqrt{a^p};$	$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{\lvert a\rvert} \cdot \sqrt{\lvert b\rvert};$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{\lvert a\rvert}}{\sqrt{\lvert b\rvert}};$ $\sqrt{a^p} = \left(\sqrt{\lvert a\rvert}\right)^p.$

Вынесение множителя из-под знака корня	Внесение множителя под знак корня
$\sqrt{a^2 b} = \lvert a\rvert \cdot \sqrt{b}$	$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, \text{ если } a \geq 0, \\ -\sqrt{a^2 b}, \text{ если } a \leq 0. \end{cases}$

Корни n-й степени: $\sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 1$	
Корни четной степени	**Корни нечетной степени**
$\left.\begin{array}{l}\sqrt[2n]{a}=b\\ n\in\mathbf{N},\, a\geq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow b\geq 0,\, b^{2n}=a.$ Корень четной степени из отрицательного числа не определен. $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n}=a$, при $a\geq 0$. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=\lvert a\rvert,\, a\in\mathbf{R}.$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt[2n+1]{a}=b\\ n\in\mathbf{N},\, a\in\mathbf{R}\end{array}\right\} \Leftrightarrow b^{2n+1}=a.$ $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$ при $a\in\mathbf{R}$. $\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1}=a$ при $a\in\mathbf{R}$. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a$ при $a\in\mathbf{R}$.

Некоторые типы иррациональных уравнений и неравенств	
При $a\geq 0$ $\sqrt{f(x)}=a \Leftrightarrow f(x)=a^2$. При $a<0$ $\sqrt{f(x)}=a$ корней не имеет.	$\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0,\\ g(x)\geq 0,\\ f(x)<(g(x))^2.\end{cases}$
$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0,\\ f(x)=(g(x))^2.\end{cases}$	$\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(x)<0,\\ f(x)\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases} g(x)\geq 0,\\ f(x)>(g(x))^2.\end{cases}\end{array}\right.$
$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0\ (\text{или } f(x)\geq 0),\\ f(x)=g(x).\end{cases}$	$\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow 0\leq f(x)<g(x).$

Формулы сокращенного умножения	
$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b);$ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b).$

Решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$

1) *Вычислим дискриминант* $D=b^2-4ac$;

2) *если* $D>0$, *то* $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; *если* $D=0$, *то* $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$; *если* $D<0$, *то корней нет.*

Теоремы о квадратных уравнениях

Если коэффициент при *x* ***в квадратном уравнении четный****, то есть уравнение имеет вид* $ax^2+2px+c=0$ ***, то можно находить корни по формуле*** $x_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{D/4}}{a}$ ***при*** $D/4=p^2-ac\geq 0$.

Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ **имеет корни** x_1 и x_2, **то** $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни x_1 и x_2, то $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$; $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

Обратная теорема Виета. Если числа t_1 и t_2 таковы, что $t_1+t_2=-\dfrac{b}{a}$ и $t_1\cdot t_2=\dfrac{c}{a}$, то они являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Прогрессии			
	Арифметическая прогрессия $a_{n+1}=a_n+d$, d — разность прогрессии	Геометрическая прогрессия $b_{n+1}=b_n\cdot q$, q — знаменатель прогрессии	Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия
Допустимые значения	a_1 и d любые	$b_1\neq 0,\ q\neq 0$	$b_1\neq 0,\ 0<\lvert q\rvert<1$
Формула n-го члена	$a_n=a_1+(n-1)d$	$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$	
Свойства	$a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$; $a_n=\dfrac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$	$b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$; $b_n^2=b_{n-k}\cdot b_{n+k}$	
Формула суммы n первых членов	$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$; $S_n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$	Если $q\neq 1$, то $S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Если $q=1$, то $S_n=n\cdot b_1$	Сумма всех членов $S=\dfrac{b_1}{1-q}$

Важные неравенства
$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$; ($a\geq 0$, $b\geq 0$) Среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического; равенство выполняется только при $a=b$.
$Ax+\dfrac{B}{x}\geq 2\sqrt{AB}$ при $A\geq 0,\ B\geq 0,\ x>0$
$\left\lvert a+\dfrac{1}{a}\right\rvert\geq 2$; $(a\neq 0)$ $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ при $a>0$; равенство выполняется при $a=1$. $a+\dfrac{1}{a}\leq -2$ при $a<0$; равенство выполняется при $a=-1$.
$a^2+b^2\geq 2ab$; (a и b — любые). Равенство выполняется при $a=b$.

Логарифмы
Определение: $\log_a b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$ — показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.
$a^{\log_a b}=b$ — ***основное логарифмическое тождество.***
Десятичные логарифмы — логарифмы по основанию 10: $\lg b=\log_{10} b$.
Натуральные логарифмы — логарифмы по основанию e: $\ln b=\log_e b$, где $e=2{,}718281828459045\ldots$ — иррациональное число.

Свойства логарифмов $a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ y>0,\ m\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{R},\ n\neq 0,\ c>0,\ c\neq 1$			
$\log_a 1=0$	$\log_{a^n} x^m=\dfrac{m}{n}\log_a x$	$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$	$\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\log_c a}$
$\log_a a=1$	$\log_a x^m=m\log_a x$; $\log_{a^n} x=\dfrac{1}{n}\log_a x$	$\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$	$\log_a c=\dfrac{1}{\log_c a}$
$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$		$a^{\sqrt{\log_a b}}=b^{\sqrt{\log_b a}}$	
$\log_a b>0$, если $a>1$ и $b>1$ или $0<a<1$ и $0<b<1$		$\log_a b<0$, если $a>1$ и $0<b<1$ или $b>1$ и $0<a<1$	

Простейшие логарифмические уравнения и неравенства	
$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ x > 0 \text{ (или } y > 0) \end{cases}$	Если $\log_a x < \log_a y$ и $a > 1$, то $0 < x < y$.
	Если $\log_a x < \log_a y$ и $0 < a < 1$, то $x > y > 0$.
$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - g(x)) < 0$ при всех допустимых значениях переменной и $a > 0$, $a \neq 1$	

Простейшие показательные уравнения и неравенства	
Если $a^x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$, то $x = y$.	Если $a^x < a^y$ и $a > 0$, то $x < y$.
	Если $a^x < a^y$ и $0 < a < 1$, то $x > y$.
$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - g(x)) < 0$, если $a > 0$, $a \neq 1$	

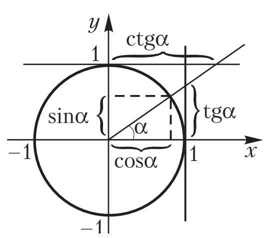
ТРИГОНОМЕТРИЯ

Соотношения между градусной и радианной мерами углов

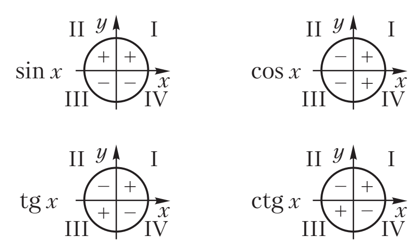
2π рад $= 360°$; $1° = \dfrac{\pi}{180}$ рад $\approx 0{,}017$ рад; 1 рад $= \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°$

$n° = \dfrac{\pi \cdot n}{180}$ рад; n рад $= \dfrac{180° \cdot n}{\pi}$

Тригонометрические функции



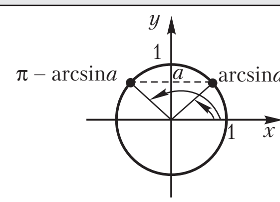
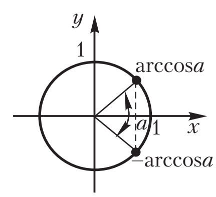
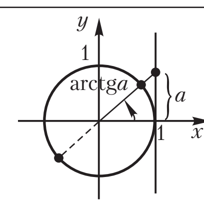
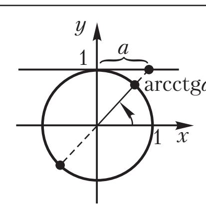
Знаки тригонометрических функций
по координатным четвертям



Значения тригонометрических функций для некоторых углов														
радианы	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
градусы	$-180°$	$-90°$	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Формулы приведения									
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi n-\alpha$, где $n\in\mathbf{Z}$	$2\pi n+\alpha$, где $n\in\mathbf{Z}$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Частные случаи простейших тригонометрических уравнений	
$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\cos x=1 \Leftrightarrow x=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$
$\sin x=0 \Leftrightarrow x=\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$
$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$

<table>
<tr><th colspan="3">Простейшие тригонометрические уравнения</th></tr>
<tr><td>$\sin x=a$</td><td>Если $a\in(-1;0)\cup(0;1)$, то $x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.
Если $|a|>1$, то корней нет.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\cos x=a$</td><td>Если $a\in(-1;0)\cup(0;1)$, то $x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.
Если $|a|>1$, то корней нет.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{tg}x=a$</td><td>$x=\operatorname{arctg}a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{ctg}x=a$</td><td>$x=\operatorname{arcctg}a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.</td><td>
</td></tr>
</table>

Некоторые типы тригонометрических уравнений	
$\sin x=\sin y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+2\pi n, \\ x=\pi-y+2\pi n, \end{array}\right.\ n\in\mathbf{Z}$	$\cos x=\cos y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+2\pi n, \\ x=-y+2\pi n, \end{array}\right.\ n\in\mathbf{Z}$
$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y \Leftrightarrow x=y+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}y \Leftrightarrow x=y+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$

Основные тригонометрические равенства и схема их взаимосвязей (⊕ — означает «сложить»; ⊖ — «вычесть».)

$3\alpha = 2\alpha + \alpha$

$4\alpha = 2\alpha + 2\alpha$

...

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,3\alpha = \dfrac{3\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha}$

$\mathrm{ctg}\,3\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\,\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}$

$+\beta = -(-\beta) \qquad -\beta = +(-\beta)$

$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ ⊕

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ ⊖

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ ⊕

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

$\left.\begin{array}{l}\alpha - \beta = x\\ \alpha + \beta = y\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{x+y}{2}\\ \beta = \dfrac{y-x}{2}\end{array}\right.$

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

$\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$

$\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$

$y \to (-y)$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin\alpha \pm \sqrt{3}\cos\alpha = 2\sin\left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\sqrt{3}\sin\alpha \pm \cos\alpha = 2\sin\left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{6}\right)$

$2\alpha = \alpha + \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$

$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}$

$1 = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ ⊖

$\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ ⊕

$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha$

$\left.\begin{array}{l}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}\\ \sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}\end{array}\right\} \longrightarrow \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Знак перед корнем выбирается по знаку левой части

$\sin\alpha = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$

Универсальная тригонометрическая подставка

$\sin\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

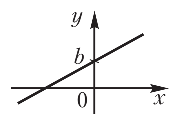
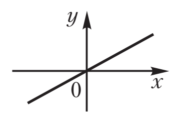
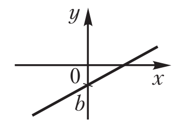
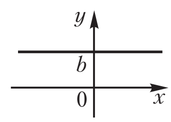
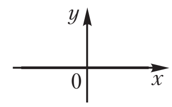
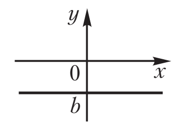
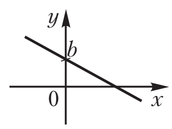
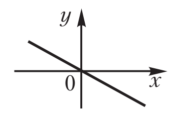
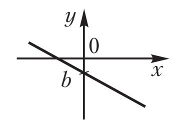
$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

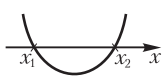
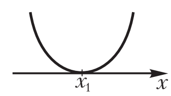
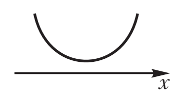
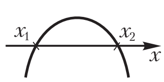
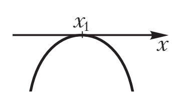
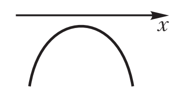
$D(y)$ — область определения функции; $E(y)$ — область значений функции

Линейная функция: $y = kx + b$ $(D(y) = \mathbf{R})$

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$k > 0$			
$k = 0$			
$k < 0$			

Квадратичная функция: $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

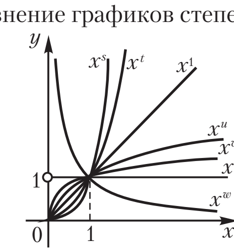
($D(y) = \mathbf{R}$; дискриминант $D = b^2 - 4ac$; $\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ — координаты вершины параболы)

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Степенная функция: $y = x^r$

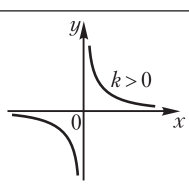
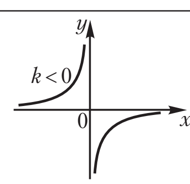
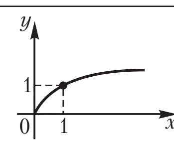
1. Если $r \in \mathbf{N}$, то $D(y) = \mathbf{R}$.
2. Если $r \in \mathbf{Z}$, $r \leq 0$, то $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
3. Если r — не целое, $r > 0$, то $D(y) = [0; +\infty)$.
4. Если r — не целое, $r < 0$, то $D(y) = (0; +\infty)$.

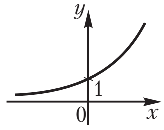
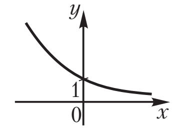
Сравнение графиков степенных функций (для $x \in (0; +\infty)$)

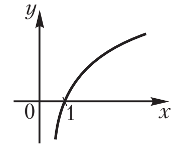
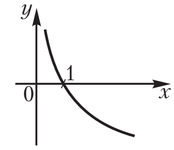


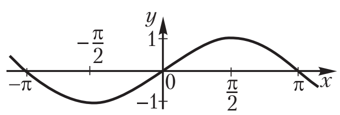
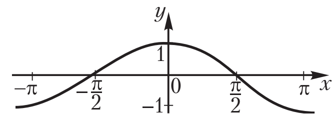
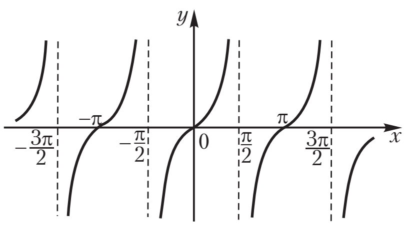
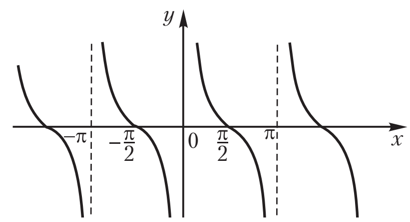
$w < 0 < v < u < 1 < t < s$

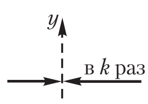
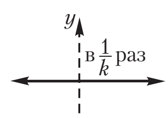
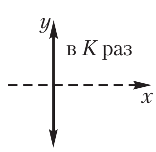
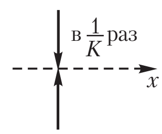
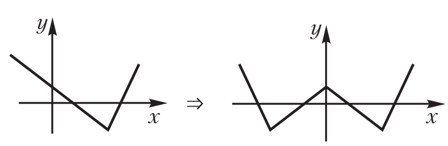
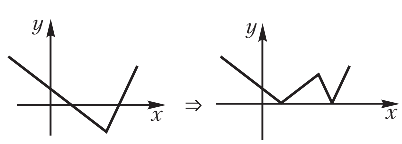
Частные случаи степенной функции

Обратная пропорциональность: $y = \dfrac{k}{x},\ k \neq 0$ $(D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty))$		**Функция** $y = \sqrt{x}$ $(D(y) = [0; +\infty))$
 $k > 0$	 $k < 0$	

Показательная функция: $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$ $(D(y) = \mathbf{R})$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

Логарифмическая функция: $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$ $(D(y) = (0; +\infty))$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

Тригонометрические функции	
$y=\sin x$ $(D(y)=\mathbf{R},\ E(y)=[-1;1])$	$y=\cos x$ $(D(y)=\mathbf{R},\ E(y)=[-1;1])$
	
$y=\operatorname{tg} x$ $\left(D(y)=\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in\mathbf{Z}\right\},\ E(y)=\mathbf{R}\right)$	$y=\operatorname{ctg} x$ $(D(y)=\mathbf{R}\setminus\{\pi n \mid n\in\mathbf{Z}\},\ E(y)=\mathbf{R})$
	

Геометрические преобразования графиков функций			
$f(x)$		*График функции* $f(x)$	
1	$f(-x)$	*Симметрия относительно оси* Oy	
2	$-f(x)$	*Симметрия относительно оси* Ox	
3	$f(x+b)$	$\xleftarrow{\text{на } b}$ Сдвиг влево на b, если $b>0$.	$\xrightarrow{\text{на } \lvert b\rvert}$ Сдвиг вправо на $\lvert b\rvert$, если $b<0$.
4	$f(x)+B$	$\uparrow$ на B Сдвиг вверх на B, если $B>0$.	$\downarrow$ на $\lvert B\rvert$ Сдвиг вниз на $\lvert B\rvert$, если $B<0$.
5	$f(kx)$	 Сжатие в k раз вдоль оси Ox к оси Oy, если $k>1$.	 Растяжение в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Ox от оси Oy, если $0<k<1$.
6	$Kf(x)$	 Растяжение в K раз вдоль оси Oy от оси Ox, если $K>1$.	 Сжатие в $\frac{1}{K}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox, если $0<K<1$.
7	$f(\lvert x\rvert)$		
8	$\lvert f(x)\rvert$		

Правила построения графика функции $f(kx+b)=f\left(k\left(x+\frac{b}{k}\right)\right)$:

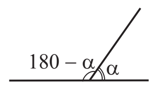
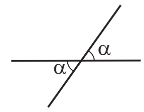
1-й способ. $f(x)\ \to$ (преобраз. 5) $\to\ f(kx)\ \to$ (преобраз. 3) $\to f\left(k\left(x+\frac{b}{k}\right)\right)=f(kx+b)$.

2-й способ. $f(x)\ \to$ (преобраз. 3) $\to f(x+b)\to$ (преобраз. 5) $\to f(kx+b)$.

Уравнение окружности. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ — уравнение окружности с центром в точке $(x_0;\ y_0)$ и радиусом R.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Углы

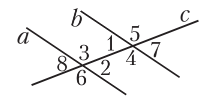
Смежные углы	Вертикальные углы
 Сумма смежных углов равна 180°	 Вертикальные углы равны

Параллельные прямые

Накрест лежащие углы равны ($\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; $\angle 5 = \angle 6$; $\angle 7 = \angle 8$).
Соответственные углы равны ($\angle 1 = \angle 8$; $\angle 2 = \angle 7$; $\angle 3 = \angle 5$; $\angle 4 = \angle 6$).
Сумма односторонних углов равна 180°
($\angle 1 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 8 = \angle 2 + \angle 4 = \angle 6 + \angle 7 = 180°$).

$\Leftrightarrow$

Прямые a и b параллельны, прямая c — секущая

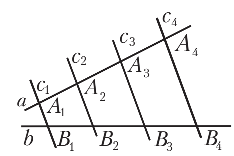


Обобщенная теорема Фалеса

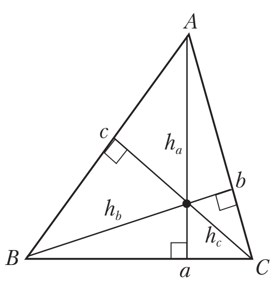
Если на одной из двух прямых отложены несколько отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то $\Rightarrow$ на второй прямой высекутся отрезки, пропорциональные данным.

$$c_1 \parallel c_2 \parallel c_3 \parallel c_4$$

$$A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_2B_3 : B_3B_4$$



Площадь треугольника

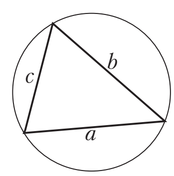


$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c;$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C = \frac{1}{2}bc\sin\angle A = \frac{1}{2}ac\sin\angle B;$$

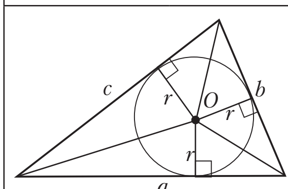
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.



$$S = \frac{abc}{4R},$$

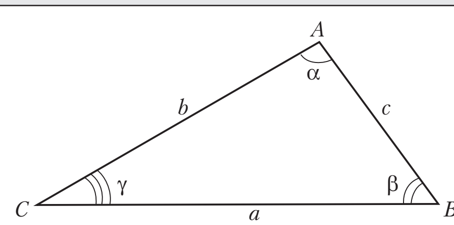
где R — радиус описанной окружности.



$$S = pr,$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, а r — радиус вписанной окружности.

Метрические соотношения для треугольников



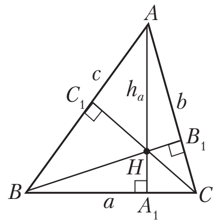
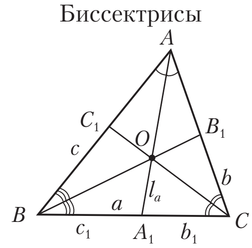
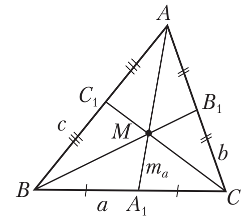
Сумма внутренних углов: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

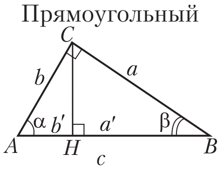
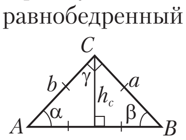
Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$;
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$;
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

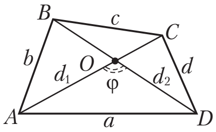
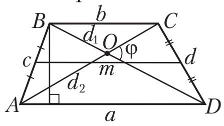
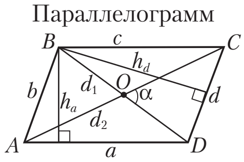
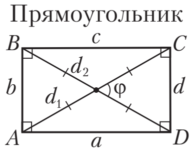
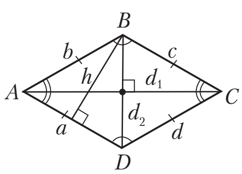
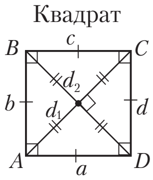
Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, где R — радиус описанной окружности.

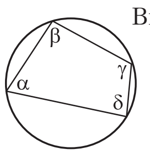
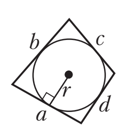
Неравенство треугольника: $a - b < c < a + b$; $b - c < a < b + c$; $a - c < b < a + c$.

Обозначения, используемые в таблицах:
a, b, c – стороны треугольника ABC; α, β, γ — соответственно противолежащие этим сторонам углы;
h_a, m_a, l_a – высота, медиана, биссектриса, проведенные к стороне a;
a' – проекция катета a на гипотенузу c; b' – проекция катета b на гипотенузу c;
r – радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности; S — площадь треугольника.

Высоты, биссектрисы, медианы треугольника			
	Высоты 	Биссектрисы 	Медианы 
Точка пересечения	H — ортоцентр $BH\cdot HB_1=CH\cdot HC_1=AH\cdot HA_1$	O — центр вписанной окружности $\dfrac{AO}{OA_1}=\dfrac{b+c}{a};\ \dfrac{BO}{OB_1}=\dfrac{a+c}{b};$ $\dfrac{CO}{OC_1}=\dfrac{a+b}{c}$	M — центр масс $\dfrac{AM}{MA_1}=\dfrac{BM}{MB_1}=\dfrac{CM}{MC_1}=\dfrac{2}{1}$
Длина	$h_a=b\sin C=c\sin B;$ $h_a=\dfrac{2S}{a}$	$l_a=\dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c};\ l_a=\dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c};$ $l_a^2=bc-b_1c_1;\ l_a^2=bc-\dfrac{bca^2}{(b+c)^2}$	$m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$
Свойства	$\Delta AB_1C_1\sim\Delta ABC$ с $k=\cos A.$ $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r};\ h_a:h_b:h_c=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$	$\dfrac{c_1}{b_1}=\dfrac{c}{b};\ b_1=\dfrac{ab}{b+c};\ c_1=\dfrac{ac}{b+c};$ $\dfrac{S_{\Delta AA_1B}}{S_{\Delta AA_1C}}=\dfrac{AB}{AC}$	$S_{\Delta ABA_1}=S_{\Delta ACA_1};$ $S_{\Delta BMA_1}=\dfrac{1}{6}S_{\Delta ABC}$

Частные случаи треугольников	
Вид треугольника	Основные свойства и соотношения между элементами
Равнобедренный 	$a=b;\ \alpha=\beta;$ $h_a=h_b=\dfrac{2S}{a};\ h_c=m_c=l_c=\dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2-c^2};$ $r=\dfrac{c}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2};\ R=\dfrac{a}{2\sin\alpha}=\dfrac{c}{2\sin\gamma}$
Равносторонний 	$a=b=c;\ \alpha=\beta=\gamma=60°;$ $h_a=h_b=h_c=m_a=m_b=m_c=l_a=l_b=l_c=\dfrac{a\sqrt{3}}{2};$ $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\ R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3};\ R=2r;\ S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Прямоугольный  Пифагоровы тройки 3:4:5 5:12:13 8:15:17 7:24:25	$\angle C=\alpha+\beta=90°;$ **Теорема Пифагора:** $c^2=a^2+b^2;\ \Delta CBH\sim\Delta ACH\sim\Delta ABC;\ a^2=ca';\ b^2=cb';\ h_c^2=a'b';$ $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}=\cos\beta;\ \cos\alpha=\dfrac{b}{c}=\sin\beta;\ \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a}{b}=\operatorname{ctg}\beta;\ \operatorname{tg}\beta=\dfrac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha;$ $m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2};\ m_b=\dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2};\ m_c=\dfrac{1}{2}c=R;\ h_a=b;\ h_b=a;\ h_c=\dfrac{ab}{c}=\sqrt{a'b'};\ l_c=\dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b};$ $r=\dfrac{a+b-c}{2};\ R=\dfrac{c}{2};\ R+r=\dfrac{a+b}{2};\ S=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}ch_c$
Прямоугольный равнобедренный 	$\gamma=90°;\ \alpha=\beta=45°;\ a=b;\ c=a\sqrt{2};$ $m_a=m_b=\dfrac{a\sqrt{5}}{2};\ m_c=h_c=l_c=\dfrac{c}{2};\ S=\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{1}{4}c^2$

Четырехугольники		
Вид четырехугольника	Основные соотношения	Площадь
Произвольный выпуклый 	$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$; $S_{\Delta AOB}\cdot S_{\Delta COD}=S_{\Delta BOC}\cdot S_{\Delta AOD}$	$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
Трапеция 	$a\parallel b;\ m\parallel a;\ m\parallel b$; m — средняя линия; $m=\frac{a+b}{2}$; $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D=180°$; $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ACD};\ S_{\Delta ABO}=S_{\Delta CDO};\ S_{\Delta AOD}:S_{\Delta COB}=a^2:b^2$	$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$; $S=m\cdot h$; $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
Параллелограмм 	$a\parallel c;\ b\parallel d;\ a=c;\ b=d;\ \angle A=\angle C;\ \angle B=\angle D$; $\angle A+\angle B=\angle B+\angle C=\angle C+\angle D=\angle D+\angle A=180°$; $AO=OC;\ BO=OD;\ d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right)$; $\Delta ABC=\Delta CDA;\ \Delta ABD=\Delta CDB$; $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta BOC}=S_{\Delta COD}=S_{\Delta DOA}$	$S=ah_a=dh_d$; $S=ab\sin\alpha$; $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
Прямоугольник 	$a\parallel c;\ b\parallel d;\ a=c;\ b=d;\ a\perp b$; $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°;\ d_1=d_2;\ d_1^2=a^2+b^2;\ R=\frac{d_1}{2}$; для произвольной точки E верно равенство $AE^2+EC^2=BE^2+ED^2$	$S=ab$; $S=\frac{1}{2}d_1^2\sin\varphi$
Ромб 	$a\parallel c;\ b\parallel d;\ a=b=c=d$; $\angle A=\angle C;\ \angle B=\angle D;\ d_1\perp d_2$; диагонали ромба являются биссектрисами углов ромба; $r=\frac{h}{2}$	$S=ah$; $S=a^2\sin\alpha$; $S=\frac{1}{2}d_1d_2$
Квадрат 	$a\parallel c;\ b\parallel d;\ a=b=c=d$; $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$; $d_1=d_2;\ d_1\perp d_2;\ d_1=a\sqrt{2}$; $r=\frac{a}{2},\ R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$S=a^2$; $S=\frac{1}{2}d_1^2$

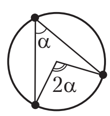
Вписанные и описанные четырехугольники	
 Вписанный четырехугольник $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°\Leftrightarrow$ четырехугольник вписан в окружность	 Описанный четырехугольник $a+c=b+d\Leftrightarrow$ четырехугольник описан около окружности; $S=pr$, где $p=\frac{a+b+c+d}{2}$, r — радиус

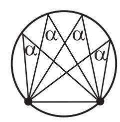
Правильные многоугольники	
Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны между собой и все углы равны между собой.	
Обозначения: a_n — сторона, r_n — радиус вписанной окружности, R_n — радиус описанной окружности, P_n — периметр, S_n — площадь, α_n — угол между смежными сторонами.	$\alpha_n=\frac{180°(n-2)}{n}$; $r_n=\frac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}=R_n\cos\frac{180°}{n}$; $R_n=\frac{r_n}{\cos\frac{180°}{n}}=\frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$; $S_n=\frac{n}{2}R_n^2\sin\frac{360°}{n}=\frac{n}{4}a_n^2\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}=\frac{1}{2}r_n\cdot P_n$

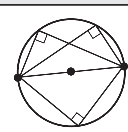
Формулы для правильных многоугольников с числом сторон 3, 4, 6, 8					
n	α	r	R	S	Соотношение между r и R
3	60°	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R=2r$
4	90°	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a^2	$R=r\sqrt{2}$
6	120°	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R\sqrt{3}=2r$
8	135°	$\frac{a\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$	$\frac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$	$2a^2\left(1+\sqrt{2}\right)$	$\frac{r}{R}=\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

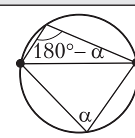
Элементы	Правильный n-угольник,	
	вписанный в окружность радиуса R	описанный около окружности радиуса r
Сторона	$a=2R\sin\frac{\pi}{n}$	$a=2r\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$
Периметр	$P=2nR\sin\frac{\pi}{n}$	$P=2nr\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$
Площадь	$S=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}$	$S=nr^2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$

Центральные и вписанные углы

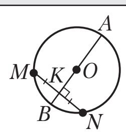




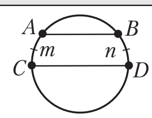




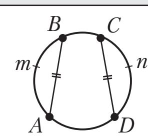
Свойства дуг и хорд



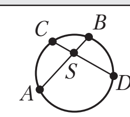
$(AB\perp MN)\Leftrightarrow(MK=KN)$



$(AB\parallel CD)\Leftrightarrow\left(\overset{\smile}{AmC}=\overset{\smile}{BnD}\right)$



$\left(\overset{\smile}{AmB}=\overset{\smile}{CnD}\right)\Leftrightarrow(AB=CD)$

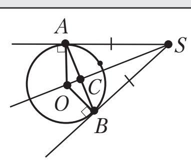


$AS\cdot SB=CS\cdot SD$

ΔASC и ΔDSB подобны;

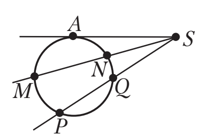
ΔASD и ΔBSC подобны

Свойства касательных и секущих



SA, SB — касательные,

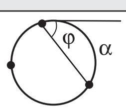
$AS=SB$; $\angle ASO=\angle BSO=\angle OAB=\angle OBA$



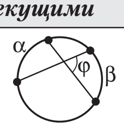
SM, SP — секущие, SA — касательная, $SM\cdot SN=SP\cdot SQ$;

$SM\cdot SN=SA^2$; $\Delta SAN\sim\Delta SMA$; $\Delta SNQ\sim\Delta SPM$

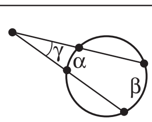
Углы между хордами, касательными и секущими



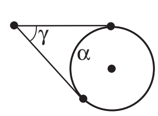
$\varphi=\frac{\alpha}{2}$



$\varphi=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

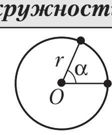


$\gamma=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$



$\gamma=180°-\alpha$

Длина дуги (l) и окружности (L)

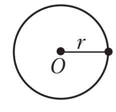


$l=\frac{\pi r\alpha°}{180°}$ — длина дуги величины α градусов и радиуса r.

$L=2\pi r$ – длина окружности радиуса r

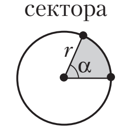
Площадь

круга



$S=\pi r^2$ — площадь круга радиуса r

сектора



$S=\frac{\pi r^2\alpha°}{360°}$ — площадь сектора с углом α градусов и радиуса r

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Многогранники

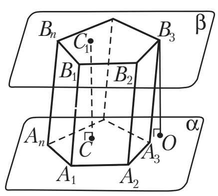
Многогранник представляет собой геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников, любые два из которых, имеющие общую сторону, не лежат в одной плоскости; сами многоугольники называются *гранями*, их стороны — *ребрами многогранника*, а их вершины — *вершинами многогранника*.

Фигура, образованная всеми гранями многогранника, называется его *поверхностью* (*полной поверхностью*), а сумма площадей **всех** его граней — площадью (*полной*) *поверхности*.

Многогранник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Если это условие не выполняется, то многогранник называется *невыпуклым*.

Правильным многогранником называется выпуклый многогранник, все грани которого — равные между собой правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер. Существует всего пять правильных многогранников: тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, куб, додекаэдр.

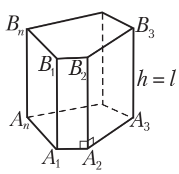
Призма



***Призма* (*n-угольная*)** — это многогранник, у которого две грани — равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы. Равные n-угольники называются основаниями, а параллелограммы — *боковыми гранями* призмы. Сумма площадей боковых граней называется *площадью боковой поверхности* призмы, а сумма площадей **всех** ее граней — площадью (*полной*) *поверхности*. Основания призмы лежат в параллельных плоскостях.

- Основания призмы — равные многоугольники $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$;
- основания призмы расположены в параллельных плоскостях α и β;
- боковые грани призмы: $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_nB_nB_1A_1$ — параллелограммы;
- A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., A_nB_n — боковые ребра;
- боковые ребра призмы равны и лежат на параллельных прямых;
- высота призмы h (например, CC_1 или B_3O) — отрезок перпендикуляра между параллельными плоскостями α и β;
- $S_{\text{бок.}} = S_{A_1A_2B_2B_1} + S_{A_2A_3B_3B_2} + ... + S_{A_1A_nB_nB_1}$ — площадь боковой поверхности;
- $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$ — площадь полной поверхности;
- $V = S_{\text{осн.}} \cdot h$ — объем призмы.

Прямая призма
Правильная призма



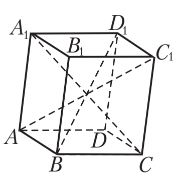
Прямая призма — это такая призма, у которой *боковые грани* — прямоугольники. Боковые ребра и боковые грани прямой призмы перпендикулярны плоскостям, в которых лежат ее основания.

- Боковые ребра прямой призмы перпендикулярны основаниям;
- боковые грани прямой призмы — прямоугольники;
- высота прямой призмы равна боковому ребру.

Правильная n-угольная призма — это призма, у которой выполнены *два условия*: 1) все *боковые грани* — прямоугольники; 2) основания призмы — *правильные* n-угольники.

Правильная призма — частный случай прямой призмы.

Параллелепипед



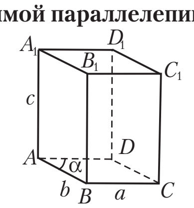
Параллелепипед — это многогранник, у которого *шесть граней* и *каждая* из них — *параллелограмм*. Иногда какие-нибудь две противолежащие грани параллелепипеда выделяются и называются *основаниями*, тогда остальные грани — *боковыми* гранями, а их стороны, соединяющие вершины оснований параллелепипеда, — его *боковыми* ребрами. Сумма площадей боковых граней называется *площадью боковой поверхности*.

Две вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной грани, называются *противолежащими*. Отрезок, соединяющий противолежащие вершины параллелепипеда, называется *диагональю параллелепипеда*. Параллелепипед имеет *четыре диагонали*, которые пересекаются в *одной точке* и делятся этой точкой *пополам*. Противолежащие грани параллелепипеда равны и лежат в параллельных плоскостях.

Параллелепипед — призма, основания которой — параллелограммы.

- Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам;
- противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.

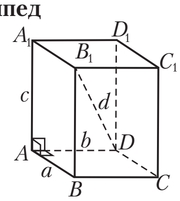
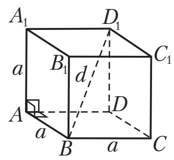
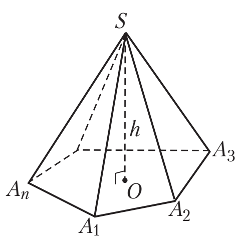
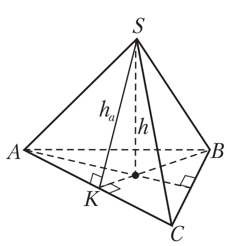
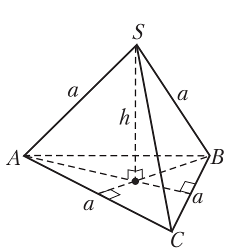
Прямой параллелепипед

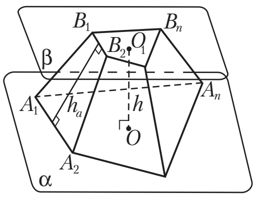
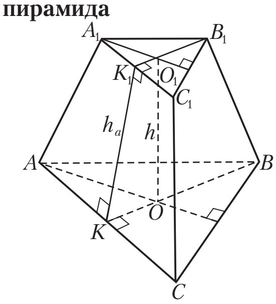


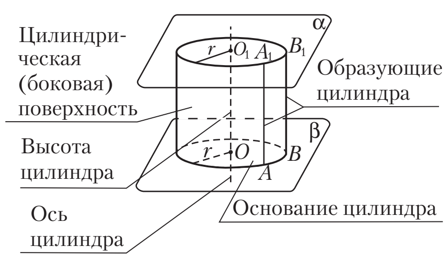
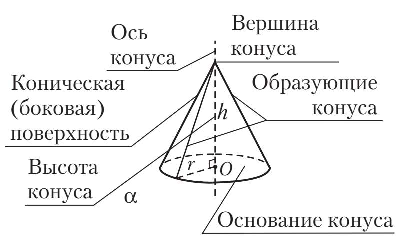
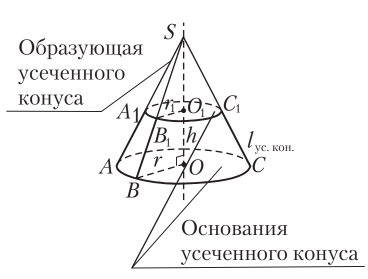
Прямой параллелепипед — это такой параллелепипед, у которого *боковые грани* — прямоугольники. Боковые ребра и боковые грани прямого параллелепипеда перпендикулярны плоскостям, в которых лежат его основания.

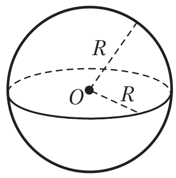
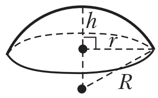
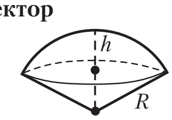
Прямой параллелепипед — прямая призма, основания которой — параллелограммы.

- Боковые ребра прямого параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания ($ABCD$ — параллелограмм);
- боковые грани прямого параллелепипеда — прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед 	***Прямоугольный параллелепипед*** — это такой параллелепипед, у которого *все грани* — прямоугольники. Диагонали прямоугольного параллелепипеда *равны*. ***Прямоугольный параллелепипед*** — прямой параллелепипед, основания которого — прямоугольники. • Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками; • все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны и $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; • $S = 2(ab + ac + bc)$ — площадь полной поверхности; • $V = abc$ — объем прямоугольного параллелепипеда.
Куб 	***Куб*** — это многогранник, имеющий *шесть граней*, которые являются *равными квадратами*. ***Куб*** — прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны между собой. • Все грани куба — равные квадраты; • $d = a\sqrt{3}$ — диагональ куба с ребром a; • $S = 6a^2$ — площадь полной поверхности куба с ребром a; • $V = a^3$ — объем куба.
Пирамида 	***Пирамида*** **(*n-угольная*)** — это многогранник, у которого одна грань — произвольный n-угольник, а остальные n граней — треугольники с общей вершиной, n-угольник называется *основанием* пирамиды; треугольники, имеющие общую вершину, называются *боковыми гранями*, а их общая вершина называется *вершиной* пирамиды. Сумма площадей боковых граней называется *площадью боковой поверхности* пирамиды, а сумма площадей **всех** ее граней — площадью (*полной*) *поверхности*. Стороны граней пирамиды называются ее *ребрами*, а ребра, сходящиеся в вершине, называются *боковыми*. • Основание пирамиды — многоугольник $A_1A_2...A_n$; • боковые грани пирамиды: A_1SA_2, A_2SA_3, ..., A_nSA_1 — треугольники; • A_1S, A_2S, A_3S, ..., A_nS — боковые ребра; • точка S — вершина пирамиды; • высота пирамиды h (SO) — отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость основания; • $S_{\text{бок.}} = S_{\Delta A_1SA_2} + S_{\Delta A_2SA_3} + ... + S_{\Delta A_nSA_1}$ — площадь боковой поверхности; • $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}$ — площадь полной поверхности; • $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h$ — объем пирамиды.
Правильная пирамида 	***Правильная n-угольная пирамида*** — это пирамида, у которой выполнены *два условия*: 1) все *боковые ребра равны*; 2) основание пирамиды — *правильный* n-угольник. У правильной пирамиды боковые грани — *равные между собой равнобедренные треугольники*; отрезок, соединяющий вершину правильной пирамиды с центром ее основания, является *высотой* пирамиды. • Основание — правильный многоугольник; • отрезок, соединяющий центр основания с вершиной пирамиды, является ее высотой; • все боковые ребра равны; • все боковые грани — равные равнобедренные треугольники; • все двугранные углы при ребрах основания равны; • все плоские углы при вершине равны; • все двугранные углы при боковых ребрах равны; • апофема h_a — высота боковой грани (например, SK), проведенная к основанию; все апофемы равны; • $S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн.}} \cdot h_a$ — площадь боковой поверхности.
Тетраэдр 	***Тетраэдр*** — треугольная пирамида, все четыре грани которой — *равные правильные треугольники*. Тетраэдр — частный случай правильной треугольной пирамиды. ***Тетраэдр*** **(*правильный тетраэдр*)** — треугольная пирамида, все грани которой — правильные треугольники. • $h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ — высота; • $R = \frac{3h}{4}$ — радиус описанной сферы; • $r = \frac{h}{4}$ — радиус вписанной сферы; • $S_{\text{полн.}} = a^2\sqrt{3}$ — площадь полной поверхности; • $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ — объем тетраэдра.

Усеченная пирамида 	***Усеченной пирамидой*** называется часть полной пирамиды, заключенная между основанием и параллельным ему сечением. • Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$; • основания усеченной пирамиды расположены в параллельных плоскостях α и β; • боковые грани усеченной пирамиды: $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_nB_nB_1A_1$ — трапеции; • A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., A_nB_n — боковые ребра; • высота усеченной пирамиды h (OO_1) — отрезок перпендикуляра между параллельными плоскостями α и β; • h_a — высота боковой грани $A_1B_1B_2A_2$; • $V_{\text{ус. пир.}} = \frac{h}{3}\cdot\left(S_{\text{верх.}} + S_{\text{нижн.}} + \sqrt{S_{\text{верх.}}\cdot S_{\text{нижн.}}}\right)$ — объем усеченной пирамиды.
Правильная усеченная пирамида 	***Правильной усеченной пирамидой*** называется часть правильной пирамиды, заключенная между основанием и параллельным ему сечением. • Основания правильной усеченной пирамиды — правильные подобные многоугольники; • все боковые ребра равны; • все боковые грани — равные равнобедренные трапеции; • отрезок, соединяющий центры оснований (OO_1), является высотой h правильной усеченной пирамиды; • апофема h_a — высота боковой грани (например, KK_1); все апофемы равны.

Тела вращения	
Цилиндр 	• r — радиус окружностей оснований цилиндра; • отрезок, соединяющий центры оснований (OO_1), является высотой h цилиндра; • прямая OO_1 называется осью цилиндра; сечение цилиндра плоскостью, содержащей ось цилиндра, называется *осевым сечением*; • длина высоты цилиндра равна длине образующей цилиндра; • $S = 2\pi rh$ — площадь боковой поверхности; • $S = 2\pi r(r+h)$ — площадь полной поверхности; • $V = \pi r^2 h$ — объем цилиндра.
Конус 	• r — радиус окружности основания конуса; • отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания, является образующей l конуса; • отрезок, соединяющий вершину конуса с центром основания, является высотой h конуса; • прямая, содержащая высоту конуса, называется *осью конуса*; сечение конуса плоскостью, содержащей ось конуса, называется *осевым сечением*; • $S = \pi rl$ — площадь боковой поверхности; • $S = \pi r(r+l)$ — площадь полной поверхности, где l — образующая конуса; • $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ — объем конуса.
Усеченный конус 	• r и r_1 — радиусы соответственно большего и меньшего оснований усеченного конуса; • отрезок, соединяющий центры оснований (OO_1), является высотой h усеченного конуса; • l — образующая усеченного конуса (например, BB_1 или CC_1); • $S = \pi(r+r_1)l$ — площадь боковой поверхности усеченного конуса; • $S = \pi(r+r_1)l + \pi r^2 + \pi r_1^2$ — площадь полной поверхности усеченного конуса; • $V = \frac{1}{3}\pi h\left(r^2 + r_1^2 + r\cdot r_1\right)$ — объем усеченного конуса.

Шар 	• R — радиус шара; • $S = 4\pi R^2$ — площадь поверхности (площадь сферы); • $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — объем шара.
Шаровой сегмент 	• r — радиус основания шарового сегмента; • R — радиус шара; • h — высота шарового сегмента; • $S = 2\pi Rh$ — площадь сферической части поверхности шарового сегмента; • $V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$ — объем шарового сегмента.
Шаровой сектор 	• R — радиус шара; • h — высота шарового сегмента; • $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ — объем шарового сектора.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Таблица производных

$(C)' = 0$, где C — константа $(kx+b)' = k$	$(\sin x)' = \cos x$	$(e^x)' = e^x$
$(x^n)' = nx^{n-1}$ В частности: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\cos x)' = -\sin x$ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Правила нахождения производных

$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$	$\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x)$, где C — константа
$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$\left(f(g(x))\right)' = f'(g) \cdot g'(x)$	

Прямая, проходящая через две заданные точки

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ — угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.	$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ — уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной данной

$-\frac{1}{k}$ — угловой коэффициент прямой, перпендикулярной прямой $y = kx + b$.

Касательная к графику функции $f(x)$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ — уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0.	$f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Содержание

Предисловие ... 3
Мой личный план подготовки к ЦТ ... 4
Стратегия подготовки к ЦТ и советы абитуриенту ... 6

Тематические задания

0. Основные определения и формулы ... 9
1. Вычисления ... 17
2. Преобразования ... 21
3. Линейные и приводящиеся к ним уравнения, неравенства ... 30
4. Квадратные уравнения и неравенства ... 36
5. Квадратный трехчлен, квадратичная функция ... 40
6. Функции, графики ... 44
7. Рациональные уравнения ... 67
8. Рациональные неравенства ... 72
9. Системы уравнений ... 75
10. Текстовые задачи ... 78
11. Последовательности, прогрессии ... 91
12. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля ... 97
13. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля ... 101
14. Иррациональные уравнения ... 105
15. Иррациональные неравенства ... 108
16. Показательные, логарифмические выражения ... 110
17. Показательные уравнения, неравенства, системы ... 114
18. Логарифмические уравнения, неравенства, системы ... 118
19. Тригонометрические выражения ... 122
20. Тригонометрические уравнения ... 127
21—22. Геометрия ... 134

Модельные варианты тестов

Тренировочный вариант 1 ... 173
Тренировочный вариант 2 ... 176
Тренировочный вариант 3 ... 179
Тренировочный вариант 4 ... 182
Тренировочный вариант 5 ... 185
Тренировочный вариант 6 ... 188
Тренировочный вариант 7 ... 191
Тренировочный вариант 8 ... 194
Тренировочный вариант 9 ... 197
Тренировочный вариант 10 ... 200
Тренировочный вариант 11 ... 203
Тренировочный вариант 12 ... 206
Тренировочный вариант 13 ... 209
Тренировочный вариант 14 ... 212
Тренировочный вариант 15 ... 215

Решения и указания ... 218

Ответы к тематическим заданиям ... 275

Ответы к модельным вариантам тестов ... 285

Справочные материалы ... 287