电动力学习题及解析

贾梓杏 and 李佳威

2025

目录

1 Introduction

本习题解析为中山大学物理与天文学院本科二年级课程《电动力学》对应的习题解析。题目主要来自于（各个班级的）课程作业和精心选择了一部分教材章节习题。考虑到《电动力学》这门课程即注重推导又注重应用的特点，故本解析重点在于 以及 ，在笔者认为关键的部分特意做了 **总结**。并且还有两大特色：

- 精美的思维导图

- 本习题解析末尾的超长备考题型

在此处表示对于本学期教授这门课程的 老师以及非常认真仔细负责回答问题的助教学长的由衷感谢！

2 电磁现象的普遍规律

2.1 矢量分析复习

2.1.1 部分常用结论证明

Q 2.1.1:

根据算符 ∇ 的微分性与矢量性，推导下列公式：

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

Q 2.1.2: 设 u 是空间坐标 xyz 的函数（标量函数），证明：

$\nabla\cdot\vec{A}(u) = \dfrac{d\vec{A}}{du}\cdot\nabla u$

2.1.2 散、旋、梯度与 Levi-Civita 符号

当我们看到可爱的 ∇ 算符时，低效的方式是展开各种 x, y, z 的分量式或者写出 3×3 的行列式大算叉乘 **(PS: 少数情况下是更快捷的)**，正确的打开方式是利用 **Levi-Civita** 符号以及**取分量的技巧**去表示各种梯度、散度和旋度的组合或者二阶梯度、散度和旋度的组合。

ϵ_{ijk} 即 Levi-Civita 符号，其定义非常简单：请大家想象一个个等边三角形，三个顶点（从最上面的点开始）依次顺时针排列着 1，2，3。如果 ijk 的取值是顺时针沿着三角形转一圈（例如 1，2，3；2，1，3；3，1，2），则 $\epsilon_{ijk} = 1$。若为逆时针转，则 $\epsilon_{ijk} = -1$。

首先，我们从基本的点乘和叉乘开始复习：

1. 点乘（向量内积）：$\vec{A}\cdot\vec{B}=\delta_{ij}A^iB^j$。

2. 叉乘：$e_j\times e_j={\epsilon^k}_{ij}$,$\vec{e}$ 为基向量。对于一般的矢量有：

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A^je_j)\times(B^ke_k)={\epsilon^k}_{ij}e_iA^jB^k \tag{2.1.1}$$

如果只取某一个分量的话，则有（没有了 e_i，就变成了标量）：

$$(\vec{A}\times\vec{B})^i={\epsilon^k}_{ij}A^jB^k$$

3. 梯度：$\nabla\phi$，其中 ϕ 是一个标量场

接下来，我们开始介绍比较容易混淆的梯度、散度和旋度。之所以说容易混淆，是因为包括笔者（菜一点的那个）在内，都常常忘记梯、散或是旋度作用的对象是矢量还是标量。

1. 梯度：梯度的简单表示是 $\nabla\phi$，其中 ϕ 是**标量场**，但得到的 $\nabla\phi$ 是一个矢量——不妨看看梯度在三维**直角**坐标系下的表示：

$$\nabla\phi=(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}) \tag{2.1.2}$$

在许多运算和证明中，我们自然是不愿意使用上面的表达式的，因为太过于麻烦。所以我们需要用到 Levi-Civita 符号的**指标形式**来表示：

$$\nabla\phi=\partial_i\phi\vec{e}_i \tag{2.1.3}$$

2. 散度：散度的简单表示是 $\nabla\cdot\vec{A}$，其中 $\vec{A}$ 是个很显然的矢量，而 $\nabla\cdot\vec{A}$ 则是标量，三维坐标系下的散度表示为：

$$\nabla\cdot\vec{f}=\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z} \tag{2.1.4}$$

如果我们用 Levi-Civita 符号的**指标形式**来表示，则为

$$\nabla\cdot\vec{f}=\delta_{ij}\partial_if_j=\partial_if_i \tag{2.1.5}$$

有些~~将高显老师的理论力学忘得一干二净的~~同学可能会问，这个 ∂_if_i 如果代入具体的 x,y,z 也不过是 ∂_xf_x 或是 ∂_yf_y，怎么能够是 (2.4) 式的三者相加呢？

这实际上就涉及到了与 L-C 符号相关的另一个知识：**指标相同，默认求和**，这就是**爱因斯坦求和约定**。例如式 (2.5) 中的 ∂,f 的指标都是 i, 那么就会把 ∂_xf_x 和 ∂_yf_y 等等的都

加起来。

3. 梯度：梯度的简单表示是 $\nabla \times \vec{f}$，其中 $\vec{f}$ 是个很显然的矢量，而 $\nabla \cdot \vec{f}$ 依然是矢量（这就不同于前两者被 ∇ 作用一下就标量变矢量或者矢量变标量了）。在三维直角坐标系下的梯度表示为：
$$\nabla \times \vec{f} = (\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}) \tag{2.1.6}$$
这个式子乍一看很难记，但多观察一下大家其实就能发现规律（~~在此处就不点破子~~）。如果采用 L-C 符号的指标形式，那么梯度的表达如下：
$$\nabla \times \vec{f} = \epsilon_{ijk}\vec{e}_i\partial_j f_k \tag{2.1.7}$$
大家可以发现，其实该式和 (2.1) 式几乎没有任何区别，$A \to \partial, B \to f$，仅此而已。

4. 总结而言，大家如果在证明等式或是计算中看到了 ∇ 算符，那么在 L-C 符号的表示下，完全可以有下列替换：
$$\nabla \Rightarrow \partial \tag{2.1.8}$$

2.1.3 题目解析

1. 左式有：

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \partial_j(\delta_{mn}A_mB_n) = \partial_j(A_mB_m)\vec{e}_j = B_m\partial_jA_m\vec{e}_j + A_m\partial_jB_m\vec{e}_j \tag{2.1.9}$$

第二个等号用到了链式法则。观察目标右式，我们可以发现，A 和 B 具有对称性，右式的四项中，前两项的 A、B 位置和后两项的 A、B 位置是轮换对称的。所以我们不妨取右式前两项进行分析：

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} = \epsilon_{ijk}\vec{e}_iB_j(\epsilon_{kmn}\partial_mA_n) + (\delta_{ij}B_i\partial_j)A_k\vec{e}_k \tag{2.1.10}$$

利用双 L-C 符号的结论，我们进一步化简：

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} = (\delta^i_m\delta^j_n - \delta^i_n\delta^j_m)(B_j\partial_mA_n)\vec{e}_i + B_i\partial_iA_k\vec{e}_k \tag{2.1.11}$$

消去 δ 符号：

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} = B_j\partial_iA_j\vec{e}_i - B_j\partial_jA_i\vec{e}_i + B_i\partial_iA_k\vec{e}_k \tag{2.1.12}$$

(2.12) 右式中的 2、3 项之和正好为 0，因为具体是什么样的下标 (i或者k) 并不重要，**指标只是用于区分同一项中的不同分量的，和其它项无关**。那么我们现在就得到了目标式的一半：

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} = B_j \partial_i A_j \vec{e}_i \tag{2.1.13}$$

因为目标右式刚好还有两项我们没有用到，所以根据轮换对称性，式中的 A、B 交换了位置：

$$\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} = A_j \partial_i B_j \vec{e}_i \tag{2.1.14}$$

两式一加和，就等于 (2.9) 式，从而证毕。

对于不甚熟练的同学而言，该题值得注意的有：

- (2.9) 式中的向量 $\vec{e}_j$ 的下标：

  我们要理解这个矢量从何而来：$\vec{A} \cdot \vec{B}$ 得到了一个标量，那么对标量作用 ∇ 得到一个矢量，那么矢量的分量 $\vec{e}_j$ 的方向应该和求梯度分量的方向 ∂_j 一致。

- 对 $(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$ 的理解：

  该处存在一定的理解难度。在最初笔者做这道题时，根据记忆中的“点乘是具有交换性的”就将 B 和 ∇ 的位置进行了交换。但是结果却错了。同样的道理，当笔者尝试写做 $\vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$ 时，也发现不对劲。

  事实上，我们应该记住，虽然点乘是具有交换性的，但是有 ∇ 存在时，且不可随意交换，因为这会**影响其作用的对象**。原题目 $(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$ 的意思写作指标更容易理解，即 $B_i \partial_i A_k \vec{e}_k$。

  如果大家还没有理解，那么我们可以与 $\vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$ 写作指标后的结果 $B_i(\partial_j A_j)\vec{e}_i$ 进行对比。这时我们发现，最大的差别在于，向量的方向是由 A 还是 B 决定的。

- 轮换对称性：

  相比于更为核心和基本的前两者，这一点只是一个方便解题的小技巧而已。

2.（1）对左式有：

$$\nabla \cdot \vec{A}(u) = \partial_i A(u)_i = \frac{\partial A(u)_i}{\partial u} \partial_i u \tag{2.1.15}$$

$$\text{以 x 分量为例：} \nabla \cdot \vec{A}(u) = \frac{\partial A(u)_x}{\partial x} = \frac{\partial A(u)_x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.1.16}$$

2.2 常用运算规则复习

2.2.1 高斯与斯托克斯公式

高斯公式： $\psi(x,y,z) = P\vec{e}_x + Q\vec{e}_y + R\vec{e}_z$，$\vec{n}$ 为面 S 的法向量，有下列结论：

$$\iiint_V \nabla \cdot \psi = \oiint_{\partial V} \vec{\psi} \cdot d\vec{\sigma} \qquad \vec{\sigma} = dS \cdot \vec{n} \tag{2.2.1}$$

P.S: 请同学们自行推导展开后的公式，这非常重要。

斯托克斯公式： $\psi(x,y,z) = P\vec{e}_x + Q\vec{e}_y + R\vec{e}_z$，$\vec{n}$ 为面 S 的法向量，有下列结论：

$$\iint (\nabla \times \psi) \cdot d\vec{\sigma} = \oint \vec{\psi} \cdot d\vec{l} \qquad \vec{\sigma} = dS \cdot \vec{n} \tag{2.2.2}$$

2.2.2 柱和球坐标系下的梯、散和旋度

在柱坐标系中，对于标量函数 $u(r,\theta,z)$ 和矢量函数 $\mathbf{v}(r,\theta,z)$，其梯度、散度、旋度和拉普拉斯算符的公式如下：

- 梯度算符

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.2.3}$$

- 散度算符

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{2.2.4}$$

- 旋度算符

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r}\left[(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial r v_\theta}{z})\hat{\mathbf{r}} + (\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r})r\hat{\boldsymbol{\theta}} + (\frac{\partial r v_\theta}{r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta})\hat{\boldsymbol{z}}\right] \tag{2.2.5}$$

在球坐标系中，对于标量函数 $u(r,\theta,\phi)$ 和矢量函数 $\mathbf{v}(r,\theta,\phi)$，$r$ 是径向距离，θ 是极角（注意！不同于极坐标的 θ），ϕ 是方位角。其梯度、散度、旋度和拉普拉斯算符的公式如下：

- 梯度算符

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{2.2.6}$$

- 散度算符

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \tag{2.2.7}$$

- 旋度算符

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{v} = & \frac{1}{r \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}v_\theta\right]\hat{\mathbf{r}} \\
& + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
& + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}
\end{aligned}
\tag{2.2.8}
$$

总是会有同学说，~~主播主播~~!梯度和散度的公式我都记得住，可是旋度的公式真的太长了！在此时，势必复习一下我们的**行列式表示：**

$$
\nabla \times \overrightarrow{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathrm{e}_x} & \overrightarrow{\mathrm{e}_y} & \overrightarrow{\mathrm{e}_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}
\tag{2.2.9}
$$

直角坐标系的表示简洁美观，到了柱坐标系，只需要进行如下替换 (注意在行列式前还需要乘以一个系数 $\frac{1}{r}$)：

$$
\begin{cases}
\text{第一列：} x \Rightarrow r, f_x \Rightarrow f_r \\
\text{第二列：} y \Rightarrow \theta, \vec{e_y} \Rightarrow r\vec{e_\theta}, f_y \Rightarrow r f_\theta \\
\text{第三列：} None
\end{cases}
\tag{2.2.10}
$$

而对于球坐标系，只需要进行如下替换 (注意在行列式前还需要乘以一个系数 $\frac{1}{r^2 \sin\theta}$)：

$$
\begin{cases}
\text{第一列：} x \Rightarrow r, f_x \Rightarrow f_r \\
\text{第二列：} y \Rightarrow \theta, \vec{e_y} \Rightarrow r\vec{e_\theta}, f_y \Rightarrow r f_\theta \\
\text{第三列：} z \Rightarrow \phi, \vec{e_z} \Rightarrow r\sin\theta\vec{e_\phi}, f_z \Rightarrow r\sin\theta f_\phi
\end{cases}
\tag{2.2.11}
$$

2.2.3 小试牛刀

Q 2.2.1： Stokes 定理考察：如图1

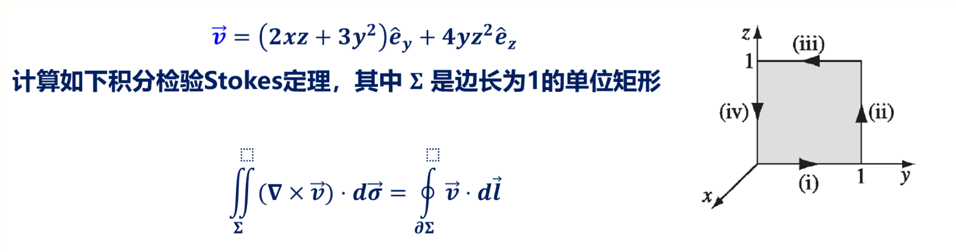


图 1: Stokes

2.3 题目解析

Q 2.2.1 我们可以先算 v 的旋度, 可知

$$\nabla \times \vec{v} = (4z^2 - 2x)\vec{e_x} + 2z\vec{e_z} \tag{2.3.1}$$

注意到 $d\sigma$ 是指向 x 方向的因此只取 $\nabla \times \vec{v}$ 的 x 方向做积分可得

$$\iint_S \nabla \times \vec{v} = \int_0^1 (4z^2 - 2x)dz \int_0^1 dy = \frac{4}{3} \tag{2.3.2}$$

然后是对四个回路的积分，结果如下

$$\begin{cases} \textbf{I:} \quad \int_0^1 (2xz + 3y^2)dy_{|z=0} = 1 \\ \textbf{II:} \int_0^1 4yz^2 dz_{|y=1} = \dfrac{4}{3} \\ \textbf{III:} \int_1^0 (2xz + 3y^2)dy_{|z=1} = -1 \\ \textbf{IV:} \int_1^0 4yz^2 dz_{|y=0} = 0 \end{cases} \tag{2.3.3}$$

验证发现相同，即可证明。但是！有些同学可能会对 **III** 存在一些异议：$\vec{v} \cdot d\vec{l}$ 的定义，这条边的 $\vec{e}_y \cdot d\vec{l} = 1$，所以式子还应该再乘以一个负号。

事实上，这样的想法并不是错误的，但是只对了一半。如果要按照这个思路的话，那么积分上下限就应该变成 $[0,1]$。因为，在**本质上**:$d\vec{l}$ 就是用于标识积分方向的。

2.4 介质的电磁性质

2.4.1 题目

Q 2.4.1:
考虑半径为 R 的电介质球，极化强度为 $\vec{P} = K\frac{\vec{r}}{r^2}$，电容率为 ε。

1. 计算束缚电荷的体密度和面密度；
2. 计算自由电荷体密度；
3. 计算球外和球内的电势；
4. 求出该带电介质球产生的静电场总能量。

Q 2.4.2: 内外半径分别为 r_1 和 r_2 的无穷长中空导体圆柱，沿轴向有恒定均匀自由电流 J_f. 导体的磁导率为 μ，求磁感应强度和磁化电流。

Q 2.4.3: 内外半径分别为 a 和 b 的无限长圆柱形电容器，单位长度电荷为 λ_f 板间填充电导率为 σ 的非磁性物质

1. 证明在介质内位移电流与传导电流严格抵消
2. 求 λ_f 随时间的衰减规律
3. 求与轴相距为 r 的地方的能量耗散功率密度
4. 求长度为 l 的一段介质总的能量耗散功率，并证明等于这段静电能的减少率

2.4.2 解析

P.S.: 请对于概念不熟悉的同学务必先看看该节总结。

Q 2.5.3:

1. 题目要求我们证明“介质内位移电流与传导电流严格抵消”，首先我们得明白**位移电流**和**传导电流**是什么。回忆一下 Maxwell 方程组，什么可以将两者联系起来：

$$\text{磁场强度旋度为两种电流密度：} \nabla \times H = J_f + J_D = J_f + \frac{\partial D}{\partial t} \tag{2.4.1}$$

如式2.4.1所示，显然我们有两种思路，要么是直接证明 $\nabla \times H = 0$，要么分别算出 J_f, J_D，证明其和为 0。仔细观察题目，我们能够发现，前者的难度较大，毕竟我们想要搞出 H 得先有 B, μ，想要有 B 就得求 E 的旋度（而 $J_f = \sigma E$ 难道不香吗?），而 μ 题目更是没提到过。

为求 J_f, J_D，我们首先应该求得 E。而对于圆柱形电容器，求 E 的常见方法是取一个环形高斯面，最终求得 $E = \dfrac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon_0 r}$,$J_f, D$ 则呼之欲出：

$$J_f = \sigma E = \frac{\sigma\lambda_f}{2\pi\varepsilon_0 r}, D = \frac{\lambda_f}{2\pi r} \Rightarrow J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial \lambda_f(t)}{\partial t} \tag{2.4.2}$$

于是接下来的问题在于求解 $\dfrac{\partial \lambda_f(t)}{\partial t}$，这事实上也是第二问。我们重新思考一下该题的物理图景~~而非只是套公式~~，尝试一下能否找到电量/电流变化的情况。

求得 J_f 后再求 I 很容易：假定我们取长度为 h 的一段，有：

$$J_f \cdot \Delta S = I = \frac{\sigma h \lambda_f}{\varepsilon_0}, \Delta S = 2\pi r h \tag{2.4.3}$$

而 $h\lambda_f$ 事实上就是那一小段的总电量，我们不妨令其为 Q，得到如下的微分方程 (并光速求解)：

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q = Q_0 exp(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t) \Rightarrow \lambda_f(t) = \lambda_f exp(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t) \tag{2.4.4}$$

但是仔细观察我们得到的式子，我们能够发现一个很明显的谬误——$\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} > 0$，这就意味着电量在上升！但是大体的思路似乎并没有问题，更像是在某处少了一个负号，那么问题出在什么地方呢？从式2.4.4开始逐个式子排查，仔细思考式2.4.3——$I = \dfrac{dQ}{dt}$ 似乎是高中就熟知的式子，但真的对吗?

根据电流连续性定理有：

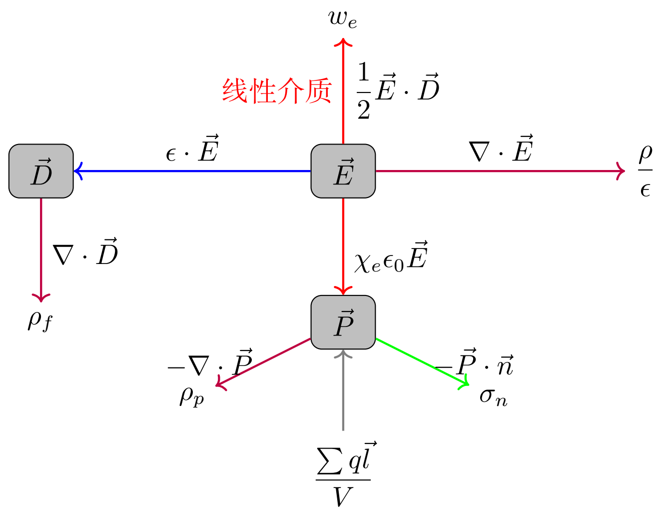
$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{2.4.5}$$

即：**通过界面流出的总电流等于区域内电荷减小率!**，换言之：

$$I = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow \lambda_f(t) = \lambda_f exp(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t) \tag{2.4.6}$$

2.4.3 总结

电介质： 思维导图

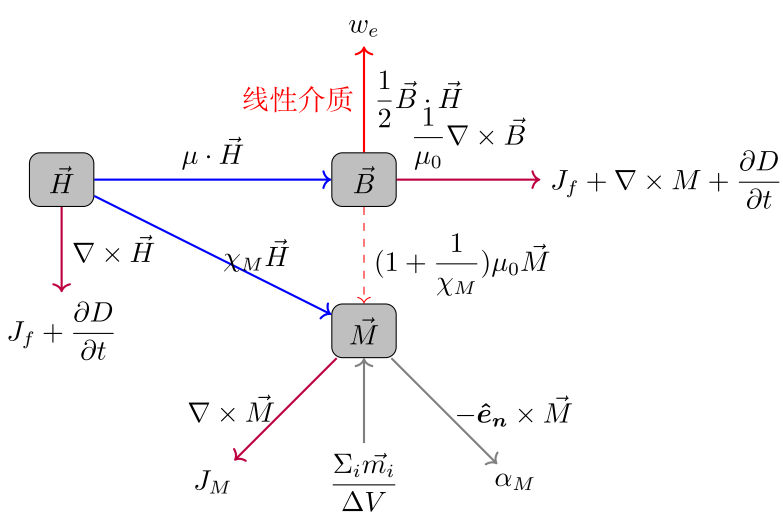


图中，$J_D = \dfrac{\partial D}{\partial t}$ 被称作位移电流密度，实质上反应的是**电场的变化率**。而 J_f 被称作传导电流密度，还有如下的关系：

$$J_f = \sigma E \tag{2.4.7}$$

其中 σ 为电导率。

磁介质： 思维导图



$\boldsymbol{J_M},\boldsymbol{\alpha_M}$ 为磁化电流体密度和磁化电流面密度。

边值关系： 在介质的交界面，令 $\mathbf{e}_n$ 表示从介质 1 指向介质 2 的法向，下标 f 表示自由电荷或自由电流。下列几式的推导存在一定相似性：E, H 切向分量关系推导是通过构造环路，D, H 的法向分量关系推导是通过构造曲面。

$$\mathbf{e}_n \times (E_2 - E_1) = 0 \tag{2.4.8}$$

$$\mathbf{e}_n \times (H_2 - H_1) = \alpha_f \tag{2.4.9}$$

$$\mathbf{e}_n \cdot (D_2 - D_1) = \sigma_f \tag{2.4.10}$$

$$\mathbf{e}_n \cdot (B_2 - B_1) = 0 \tag{2.4.11}$$

还有容易被忽略的极化电荷与磁荷的关系：

$$\mathbf{e}_n \cdot (P_2 - P_1) = -\sigma_P \tag{2.4.12}$$

$$\mathbf{e}_n \cdot (M_2 - M_1) = -\sigma_m \tag{2.4.13}$$

在看过两幅思维导图后，大家势必能够发现，虽然看似电介质和磁介质各有一套自己的理论，但事实上在许多细节上是相联系的（而且简直感觉有些量是相对应的！这一点将在磁标势一节详细讨论）。而统一两者的正是 **Maxwell 方程组**（介质中的形式，真空中显然大伙可以自己推推）：

$$\begin{cases} \text{联系电场与磁场：} \nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \text{磁场强度旋度为两种电流密度：} \nabla \times H = J_f + J_D = J_f + \dfrac{\partial D}{\partial t} \\ \text{电位移矢量散度为自由电荷：} \nabla \cdot D = \rho_f \\ \text{磁场无源：} \nabla \cdot B = 0 \end{cases} \tag{2.4.14}$$

3 静电学

3.1 分离变量法:

3.1.1 题目

Q 3.1.1: 分离变量法：基础

在均匀外电场中置入半径为 R_0 的导体球, 试用分离变数法求下列两种情况的电势:

(1) 导体球上接有电池, 使球与地保持电势差 Φ_0。

(2) 导体球上带总电荷 Q.

Q 3.1.2: 分离变量法：进阶

均匀介质球（电容率为 ϵ_1）的中心置一自由电偶极子 p_f，球外充满了另一种介质 ϵ_2，求空间各点的电势和极化电荷分布.

3.1.2 解析

Q 3.1.1:

(1)

外电场将使导体球面出现感应电荷。以球心为坐标原点，并令外电场 $E_0 = E_0 e_z$，如图所示。问题有 z 轴的对称性。设放入导体球之前原点电势为 φ_0。当导体球对地电势为 Φ_0，球外电势的全部定解条件为

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (R > R_0) \tag{3.1.1}$$

$$R \to \infty, \quad \varphi \to -E_0 R\cos\theta + \varphi_0 \tag{3.1.2}$$

$$R = R_0, \quad \varphi = \Phi_0 \tag{3.1.3}$$

我们已知球坐标系下的拉普拉斯方程通解形式如下：拉普拉斯方程在球坐标中的通解为

$$\varphi(R,\theta,\phi)=\sum_{n,m}\left(a_{nm}R^n+\frac{b_{nm}}{R^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi+\sum_{n,m}\left(c_{nm}R^n+\frac{d_{nm}}{R^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)\sin m\phi \tag{3.1.4}$$

R 为半径，θ 为极角，ϕ 为方位角。式中 n 从 0 到无穷大求和，m 从 0 到 n 求和；a_{nm}、b_{nm}、c_{nm} 和 d_{nm} 为任意常数，在具体问题中由边界条件定出。$P_n^m(\cos\theta)$ 为连带勒让德 (Legendre) 函数。若该问题中具有对称轴，取此轴为极轴，则电势 φ 不依赖于方位角 ϕ，此情形下通解为

$$\varphi=\sum_n\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \tag{3.1.5}$$

$P_n(\cos\theta)$ 为勒让德函数，a_n 和 b_n 是任意常数，由边界条件确定。

关于无穷远处的由 z 轴的对称性及无穷远条件3.1.2，将式3.1.5解写成

$$\varphi=-E_0R\cos\theta+\varphi_0+\sum_n\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta) \tag{3.1.6}$$

显然，我们还有 b_n 需要确定。这时我们就需要利用边界条件3.1.3：

$$-E_0R_0\cos\theta+\varphi_0+\sum_n\frac{b_n}{R_0^{n+1}}P_n(\cos\theta)=\Phi_0 \tag{3.1.7}$$

这时就需要回顾我们数学物理方法知识了——利用 Legendry 多项式的正交归一性：

$$左=\int_{-1}^{1}-E_0R_0P_1(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\mathrm{d}(\cos(\theta))+\int_{-1}^{1}\frac{b_n}{R_0^{n+1}}P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\mathrm{d}(\cos(\theta)) \tag{3.1.8}$$

$$右=\int_{-1}^{1}(\Phi_0-\varphi_0)P_1(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\mathrm{d}(\cos(\theta)) \tag{3.1.9}$$

利用：

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2m+1}\delta_{mn} \tag{3.1.10}$$

我们可以进一步化简：

$$-E_0R_0\frac{2}{2m+1}\delta_{m1}+\frac{b_n}{R_0^{n+1}}\frac{2}{2m+1}\delta_{mn}=(\Phi_0-\varphi_0)\frac{2}{2m+1}\delta_{m0} \tag{3.1.11}$$

我们可以分别讨论 $n=0,1$ 的情况，最后解得：

$$b_0=(\Phi_0-\varphi_0)R_0\quad b_1=E_0R_0^3 \tag{3.1.12}$$

代回原式即解得答案。

（2）类似第一问，我们写出定解条件：

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (R > R_0) \tag{3.1.13}$$

$$R \to \infty, \quad \varphi \to -E_0 R \cos\theta + \varphi_0 \tag{3.1.14}$$

$$R = R_0, \int -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathrm{d}S = \int -\frac{\partial \varphi}{\partial r} R_0^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{3.1.15}$$

看到这里，或许同学们就开始感觉犯难了——φ 很明显是含 θ 的式子，而 $d\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$，这就意味着，我们不能模仿上一问利用无穷远条件写出式3.1.6后，再利用边界条件3.1.15进一步求出答案了。

但是，毕竟是同一个物理模型，即使题目给出了两种不同形式的边界条件，可本质都是一样——第一问的球壳带了电荷量为 q 的电，而第二问的球壳则是等电势的 Φ_0'。按着这样的思路，我们完全可以挪用上一问的解，并代入边界条件3.1.15，找到 Φ_0' 与 Q 的关系。

最后解得：

$$\Phi_0' = \varphi_0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{3.1.16}$$

Q 3.1.2：

3.2 镜像法

3.2.1 题目

Q 3.2.1： 镜像法

接地的空心导体球的内外半径为 R_1 和 R_2，在球内离球心为 a 处置一点电荷为 Q，用镜像法求解电势，导体球上的感应电荷有多少？分布在内表面还是外表面。

若导体球不接地，而是带电荷量为 Q，或有确定电势 ϕ_0，则电势为多少（当电势一致时，Q 与 ϕ_0 的关系是什么?）

3.2.2 解析

3.3 Green 函数与电多极矩

3.3.1 题目

Q 3.3.1: *Green 函数法*
已知上半空间 $(z>0)$ 无自由电荷，其边界 $(z=0)$ 上的电势如下，求上半空间的电势。

1. $\partial_n \phi = c_1 \delta(x-y+1)\delta(x+y+2)$
2. $\phi = c_2 \delta(x-y+1)\delta(x+y+2)$

Q 3.3.2: 电多极矩：
对于均匀带电的长椭球，半长轴 a，半短轴 b，总电荷 Q，计算其电偶极矩和电四极矩。

3.3.2 解析

Q 3.3.1:

提要：

- 什么是 Green 函数：

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')dV' + \varepsilon_0 \oint_S (G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\mathbf{x},\mathbf{x}'))dS' \tag{3.3.1}$$

  在具体题目中，需要我们根据给定的边界条件来找到合适的 Green 函数（主要通过镜像法）。具体而言，第一类边界条件找在边界处 $\varphi = 0$ 的 Green 函数，第二类边界条件找 $\frac{\partial}{\partial n'}G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}$（但考虑到我们基本只能做无限大平面的题目，故实际上找 $\frac{\partial}{\partial n'}G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 0$ 对应的 Green 函数)。

- 具体解题步骤：

  1. 判断边值条件
  2. (利用镜像法）求解 Green 函数
  3. (最容易出现指标混乱的) 代入具体公式进行计算。笔者在此处给出的建议是，一定要明确区分 x, x' 并且注意积分都是对于 x'。

(1) 理论上说，对于第二类边界条件，我们希望的是构造出满足 $\frac{\partial}{\partial n'}G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}$ 的 Green 函数，但是考虑到 S 是无穷大，所以也就变成了 $\frac{\partial}{\partial n'}G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 0$。想要构造出满足这样条件的 Green 函数也非常容易：在关于边界上下对称的位置各放一个正电荷即可。

$$G(\mathbf{x}',\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}} \tag{3.3.2}$$

在确定格林函数的形式后，剩下就是套公式计算：

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')dV' + \varepsilon_0\oint_S (G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\frac{\partial\varphi}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\mathbf{x},\mathbf{x}'))dS' \tag{3.3.3}$$

显然，右式第一项为 0，因为并不存在自由电荷。而右式最后一项又因为我们巧妙选取了格林函数同样为 0。故我们只剩下这样一个积分：

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varepsilon_0\oint_S (G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\frac{\partial\varphi}{\partial z}dx'dy' \tag{3.3.4}$$

现在终于到了代入具体公式计算的环节, 在此处值得注意的点有：

1. 代入 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ 时，$x \to x', y \to y'$，以区分边界和 Green 函数中的 X。
2. 关于 δ 函数的理解：我们可以通过坐标变换 + 雅可比行列式进行计算:

代入边界条件和上半空间第二类格林函数，

$$\varphi(\mathbf{x}) = \epsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dx'dy'\frac{c_1\delta(x'-y'+1)\delta(x'+y'+2)}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}}. \tag{3.3.5}$$

为了求解上述积分，进行坐标变换：$x'-y'=u, x'+y'=v$，根据雅可比行列式与坐标变换的关系，可得

$$dx'dy' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial u} & \frac{\partial x'}{\partial v} \\ \frac{\partial y'}{\partial u} & \frac{\partial y'}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = \frac{1}{2}dudv. \tag{3.3.6}$$

所以得到

$$\varphi(\mathbf{x}) = \epsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}dudv\frac{c_1\delta(u+1)\delta(v+2)}{2\pi\epsilon_0\sqrt{\left(\frac{v+u}{2}-x\right)^2+\left(\frac{v-u}{2}-y\right)^2+z^2}} \tag{3.3.7}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{c_1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dudv\frac{\delta(u+1)\delta(v+2)}{\sqrt{\left(\frac{v+u}{2}-x\right)^2+\left(\frac{v-u}{2}-y\right)^2+z^2}} \tag{3.3.8}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{c_1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2}}. \tag{3.3.9}$$

4 静磁场

4.1 磁矢势的基本定义

4.1.1 题目

Q 4.1.1:
已知非相对论极限下，电子拉格朗日量为:

$$L = \frac{m}{2}v^2 - q(\varphi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}), \tag{4.1.1}$$

其中 m 是电子质量，$\mathbf{v}$ 是速度，q 是电荷，φ 是标势，$\mathbf{A}$ 是矢势。
证明其能给出正确的运动方程:

$$m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}), \tag{4.1.2}$$

其中 $\mathbf{E}$ 是电场强度，$\mathbf{B}$ 是磁场强度。
提示：欧拉-拉格朗日方程为:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \tag{4.1.3}$$

电磁场的定义为:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\mathbf{A}, \tag{4.1.4}$$

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}. \tag{4.1.5}$$

Q 4.1.2:
试用 $\mathbf{A}$ 表示一个沿 z 方向的均匀恒定磁场 $\mathbf{B}_0$，写出 $\mathbf{A}$ 的两种不同表示式，证明二者之差是无旋场.

Q 4.1.3:
均匀无穷长圆柱形螺线管，每单位长度线圈匝数为 n，电流为 I，试用唯一性定理求管内外磁感应强度 $\mathbf{B}$.

Q 4.1.4: 矢势方程的进阶计算
半径为 a 的无限长圆柱导体上有恒定电流 $\mathbf{J}$ 均匀分布于截面上，试解矢势 $\mathbf{A}$ 的微分方程，设导体的磁导率为 μ_0，导体外的磁导率为 μ.

4.1.2 解析

Q 4.1.1:

看到这种混合着矢量运算、∇ 算符等等的**证明题**，我们的第一反应是：Levi-Civita 符号。现在我们再来仔细观察式4.1.3，本质上就是证明对拉氏量求了坐标的偏导的结果与对拉氏量求了速度的偏导后再对时间求导的结果相等。所以我们不妨分开来看：

$$\text{拉氏量写成指标形式：} L = \frac{m}{2}v_i v^i - q(\varphi - v_i A^i), v_i, v^i = \dot{x}_i \tag{4.1.6}$$

于是第一项的偏导部分：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m v_i + q A^i \tag{4.1.7}$$

得到上式也很简单，就是我们只要明确 φ, A 都并非关于 v_i 的函数即可。继续对时间求导：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{v}_i + q\frac{dA_i}{dt} = m\dot{v}_i + q\partial_t A_i + q(\partial_j A_i)v_j \tag{4.1.8}$$

该式是分量式，事实上 $m\dot{v}_i + q\partial_t A_i$ 写成矢量形式就已经是 $m\dot{\mathbf{v}} + q\partial_t \mathbf{A}$ 了，式子4.1.2。对于 $\dfrac{dA_i}{dt}$，不知道如何推出 $\partial_t A_i + (\partial_j A_i)v_j$ 的同学，建议往上翻复习一下**矢量分析部分**，并且着重关注本题解答后的 $P.S.$ 部分。

现在我们继续来看欧拉方程的第二项：

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{m}{2}\partial_i(v_j v^j) - q\vec{e_i}(\partial_i\varphi - \partial_i(v_j A^j)) = -q\nabla\varphi + v_j\partial_i A_j \vec{e_i} \tag{4.1.9}$$

因为速度和位置可以是做独立的广义坐标（至少哈密顿力学如此，如果只愿意在拉格朗日力学框架下讨论，可以自证 $\partial_i v_j = \dfrac{\partial x_j}{\partial x_i \partial t} = 0$），所以显然式中将 ∂_i 作用于 v_j 的项都等于 0. 我们联立式4.1.9和式4.1.8，可以得到：

$$m\dot{\mathbf{v}} + q\partial_t\mathbf{A} + q(\partial_j A_i)v_j\vec{e_i} - (-q\nabla\varphi + v_j\partial_i A_j\vec{e_i}) = 0 \tag{4.1.10}$$

我们按照式4.1.2的方式略作整理：

$$m\dot{\mathbf{v}} = -q(\partial_t\mathbf{A} + \nabla\varphi) + \vec{e_i}(v_j\partial_i A_j - v_j\partial_j A_i) \tag{4.1.11}$$

显然，右式 $\partial_t\mathbf{A}+\nabla\varphi=-E$。那么至此我们只剩下一个目标了，证明：

$$\vec{e_i}(v_j\partial_iA_j-v_j\partial_jA_i)=\mathbf{v}\times\mathbf{B}=\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \tag{4.1.12}$$

这里的证明还是要回到 ∇ 算符与 Levi-Civita 符号的基本定义上去。非常碰巧的是，在矢量分析部分，我们正好推导过该结论，参考式2.1.11，我们就已经证毕。

P.S.: 该题目推导的最难部分事实上在于式*4.1.8*。

第一点是很容易（包括笔者在内）都忘记了是**全微分**而非对 t 的偏导数，因此漏掉了第三项。

第二点则是为何求全微分，用到链式法则时，$\dfrac{\partial A}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}=(\partial_jA_i)v_j\vec{e_i}$，指标和方向是如何确定的？我们需要确定一点：*1.*∂_j 的指标一定和 v_j 相同，要不然就不是链式法则了。于是现在我的的问题在于，$\partial, A, \vec{e}$ 的指标如何确定？ 其实我们不妨反问一下：假如是 $(\partial_iA_i)\vec{e_i}$，会发生什么？很显然，这就变成了对于 A 求梯度了。于是我们可以确定，一定是 ∂_jA_i。我们再来确立一下该式的物理含义：

$$i{=}1\text{ 为例：}\quad \partial_jA_xv_j=\Sigma_{j=1}\partial_jA_xv_j=\frac{\partial A_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial A_x}{\partial y}v_y+\frac{\partial A_x}{\partial z}v_z \tag{4.1.13}$$

而考虑到在同一项中，指标相同的本质含义就是**缩并**，即求和。换言之，如果上式没有 v_j 则不会是一个求和的式子。看到这里，想必读者们就应该明白，在此处需要一个 $\vec{e_i}$ 来对 A_i 进行缩并，否则就会只有 A_x 或是 A_y 或是 A_z 一个孤零零的分量。

Q 4.1.2:

因 $\mathbf{B}$ 沿 z 轴，由 $\nabla\times\mathbf{A}=B\mathbf{e}_z$，在直角坐标系中，有

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=B,\quad \frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=0 \tag{4.1.14}$$

有许多 $\mathbf{A}$ 场可以满足这组方程，其中两个 $\mathbf{A}$ 场可选为

$$\mathbf{A}_1=-By\mathbf{e}_x,\quad \mathbf{A}_2=Bx\mathbf{e}_y, \tag{4.1.15}$$

而且显然有

$$\nabla\times(\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2)=-\frac{\partial}{\partial y}(-By)-\frac{\partial}{\partial x}(Bx)=0. \tag{4.1.16}$$

Q 4.1.3: 设螺线管截面半径为 a，z 轴为其中心轴，在柱坐标系中，螺线管表面电流密度 $\boldsymbol{\alpha}_f=nI\boldsymbol{e}_\phi$. 记螺线管内部磁场为 $\boldsymbol{B}_1$，外部磁场为 $\boldsymbol{B}_2$，全部定解条件为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \quad (r < a, r > a) \tag{1}$$

$$r = 0, \boldsymbol{B}_1 \text{ 有限；} \quad r \to \infty, \boldsymbol{B}_2 \to 0 \tag{2}$$

$$r = a, \quad B_{2r} = B_{1r}, \quad \boldsymbol{e}_r \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = nI\boldsymbol{e}_\phi \tag{3}$$

由于螺线管无穷长，外部磁场应为 $\boldsymbol{B}_2 = \mu_0 \boldsymbol{H}_2 = 0$. 由 (3) 的第二个条件，内部磁场应为

$$\boldsymbol{H}_1 = nI\boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{B}_1 = \mu_0 nI\boldsymbol{e}_z \tag{4}$$

这解满足两区域中的场方程 (1) 和全部边界条件，因此是唯一正确的解.

Q 4.1.4:

解矢势方程和解标势方程基本思路是一致的。第一步我们还是先列各个区域的方程和边界条件:

$$\text{柱内：} \nabla^2 \boldsymbol{A}_1 = -\mu_0 \boldsymbol{J} \quad \text{柱外：} \nabla^2 \boldsymbol{A}_1 = 0 \tag{4.1.17}$$

在写出边界条件这一步，是本题的第一大难点：无限远区域存在电流，故不能让无限远区域的 $\boldsymbol{A} = 0$。比较简单的做法是选取 $r = a$ 处 $\boldsymbol{A} = 0$：

$$r = 0, \ A_1 \text{ 有限} \tag{4.1.18}$$

$$r = a: \ A_1 = A_2 = 0, \ \boldsymbol{e}_r \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A}_2 - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A}_1 \right) = 0 \tag{4.1.19}$$

对方向的分析和选定是解矢势方程区别于标势方程最大的地方。因导体内的电流总是沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向，从第一个方程4.1.17可知导体内矢势 $\boldsymbol{A}_1$ 只能有 $\boldsymbol{e}_z$ 方向的分量，且由对称性它只是 r 的函数，即 $\boldsymbol{A}_1 = A_1(r)\boldsymbol{e}_z$；又由 $r = a$ 处矢势连续的条件，外部矢势也只能是 $\boldsymbol{A}_2 = A_2(r)\boldsymbol{e}_z$，于是式4.1.17的两方程分别是：

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}r} \right) = -\mu_0 J, \quad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}r} \right) = 0 \tag{4.1.20}$$

边界条件为：

$$r = a \text{ 处，} \quad A_1 = A_2 = 0, \quad \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}r} \tag{4.1.21}$$

对上式的两个方程积分，得：

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}r}=-\frac{\mu_0}{2}Jr+\frac{c_1}{r},\quad A_1=-\frac{\mu_0}{4}Jr^2+c_1\ln r+c_2$$

$$\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}r}=\frac{c_3}{r},\quad A_2=c_3\ln r+c_4$$

各积分常数 c_i 由边界条件和有界条件确定，得：

$$c_1=0,\quad c_2=\frac{\mu_0}{4}Ja^2,\quad c_3=-\frac{\mu}{2}Ja^2,\quad c_4=-c_3\ln a$$

最终得到：

$$\boldsymbol{A}_1=\frac{\mu_0}{4}(a^2-r^2)\boldsymbol{J},\quad \boldsymbol{A}_2=\frac{\mu a^2 J}{2}\ln\frac{a}{r}\boldsymbol{e}_z \tag{4.1.22}$$

可以验证，A_1 和 A_2 均满足库仑规范条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$。

4.2 磁标势与分离变量法

4.2.1 题目

Q 4.2.1：
求磁化矢量为 $\mathbf{M_0}$ 的均匀磁化铁球产生的磁场。

Q 4.2.2：
将磁导率 μ，半径为 R_0 的球体放入均匀磁场 H_0 中，求 $\mathbf{B}$

Q 4.2.3： *边界条件不为 0*
考虑均匀带电的薄导体球壳，半径为 R_0，电荷为 Q。球壳绕轴转动，角速度为 ω，求球内外磁场分布?

4.2.2 解析

提要：在 2.5.3 的总结中，笔者用思维导图展示电介质、磁介质中的关系，并给出了常见的边值条件：

在图中，读者可能就发现了电介质与磁介质存在一定的对应关系（毕竟笔者的图就是刻意按照对应关系来画的）。但是，在 2.5.3 的图中的对应关系，是物理意义上的对应关系，而非在

利用**磁标势**计算磁场问题时的对应关系。在实际利用磁标势进行计算时，对应关系如下：

1. 描述法向边值关系的式2.4.10和式2.4.11中提到的 $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ 相对应。
2. 描述切向边值关系的式2.4.8和式2.4.9中提到的 $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ 相对应。但是在实际计算中，式2.4.8往往并不是我们直接使用的，我们会利用**规范变换**化简：

$$\mathbf{e}_n \times (\nabla\varphi_2 - \nabla\varphi_1) = \alpha_f, \text{if } \alpha_f = 0 \Rightarrow \nabla\varphi_2 - \nabla\varphi_1 = \nabla(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_1 \quad (4.2.1)$$

3. 描述极化的 $\mathbf{P}, \mathbf{M}$ 依然对应。

在使用磁标势进行计算时，还有一点必须要注意：一定要避开有电流或是电流围成的区域！原因也很简单——电势场是正儿八经的标势场，静电场的 $\mathbf{E}$ 无论如何也满足 $\oint \mathrm{E}\mathrm{d}l = 0$。但是很显然，对于有电流的区域，$\oint \mathrm{H}\mathrm{d}l = \int \mathrm{j}\mathrm{d}S$。

Q 4.2.1:

如果我们要考虑使用**分离变量法**，那么我们第一点应该考虑的是判断方程类型——泊松 or 拉普拉斯？在电场中，我们需要计算的是电荷，而在磁场中，我们计算的则是磁荷。

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}_0 = 0 \quad (4.2.2)$$

第二个等号源于 $\mathbf{M}_0$ 为常数。

我们分别用 φ_1, φ_2 来表示球外和球内的磁标势场，可以得到如下的拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\varphi_1 = 0 \quad (4.2.3)$$

$$\nabla^2\varphi_2 = 0 \quad (4.2.4)$$

然后我们进一步确定边界条件：

$$\text{法向：} B_{1R} = B_{2R} \quad (4.2.5)$$

$$\text{切向：} H_{1\theta} = H_{2\theta} \quad (\text{或}\varphi_1 = \varphi_2) \quad (4.2.6)$$

这是一个具有轴对称性质的问题，其对应的解不再赘述，建议参考式3.1.5。对于球外的磁标势场，显然有 $R \to \infty = 0$，则只能有负指数项；对于球内，为放置 $R \to 0$ 发散，则只能有正指数项：

$$\varphi_1 = \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (4.2.7)$$

$$\varphi_2 = \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta) \tag{4.2.8}$$

根据法向条件，我们可以列出：

$$\sum_n \frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos\theta) = -\sum_n n a_n R_0^{n-1} P_n(\cos\theta) + \mu_0 M_0 P_1(\cos\theta) \tag{4.2.9}$$

根据切向条件，我们可以列出：

$$\sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta) \tag{4.2.10}$$

考虑到在 3.1 节，我们已经进行过无数次Lengendre 多项式正交归一的训练，在此处不再赘述，给出结果：

$$a_1 = \frac{1}{3}M_0, \quad b_1 = \frac{1}{3}M_0 R_0^3, \quad a_n = b_n = 0 \quad (n \neq 1) \tag{4.2.11}$$

$$\varphi_1 = \frac{M_0 R_0^3}{3}\frac{\cos\theta}{R^2} = \frac{R_0^3}{3}\frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{R}}{R^3} \tag{4.2.12}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_0}{3} R\cos\theta = \frac{1}{3}\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{R} \tag{4.2.13}$$

而我们希望求得的 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \mathbf{H} = -\nabla\varphi$。在此处很容易犯的一个错误就是：不就是 $-\nabla\varphi$ 嘛？那肯定是 $\varphi_2 = \dfrac{M_0}{3} R\cos\theta$ 直接对 R 求导。这自然是大错特错：这是**梯度！**必须要按照球坐标系下求梯度的方法来，请参考式2.2.6。

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{M_0}{3}(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r + \frac{1}{R} \cdot R \cdot (-\sin\theta)\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta + 0) = -\frac{M_0}{3}\mathbf{e}_z = -\frac{\mathbf{M_0}}{3} \tag{4.2.14}$$

Q 4.2.2:

这问题类似于在均匀电场中放入线性均匀介质球的情形。因球心为坐标原点，令作用外场 $\mathbf{H}_0 = H_0 \hat{\mathbf{e}}_z$，于是就有 z 轴的对称性。球内外均无传导电流分布，可引入磁标势 ϕ，使 $\mathbf{H} = -\nabla\phi$。球内 $\mathbf{B}_1 = \mu\mathbf{H}_1 = \mu(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_1)$。

由边界条件，球外 $\rho_{m2} = 0$，因此球内假想磁荷密度 $\rho_m = 0$，于是磁标势的全部定解条件为

$$\nabla^2\phi_1 = 0 \quad (R < R_0); \quad \nabla^2\phi_2 = 0 \quad (R > R_0) \tag{4.2.15}$$

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 \to -H_0 R\cos\theta \quad 当 R \to \infty; \quad \phi_1 = \phi_2, \mu\frac{\partial\phi_1}{\partial R} = \mu_0\frac{\partial\phi_2}{\partial R} \quad 当 R = R_0. \tag{4.2.16}$$

由无穷远和 $R \to 0$ 两个条件，及轴对称性，两区域内标势方程的通解可写为

$$\varphi_1 = \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta) \tag{4.2.17}$$

$$\varphi_2 = -H_0 R\cos\theta + \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \tag{4.2.18}$$

再由Lengendre 多项式正交归一和边界条件，解出

$$a_1 = \frac{-3\mu_0}{\mu+2\mu_0}H_0, \quad b_1 = \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}H_0R_0^3; \quad a_n = b_n = 0, n \neq 1 \tag{4.2.19}$$

因此，

$$\varphi_1 = \frac{-3\mu_0}{\mu+2\mu_0}\boldsymbol{H_0}\cdot\boldsymbol{R} \tag{4.2.20}$$

$$\varphi_2 = -\boldsymbol{H_0}\cdot\boldsymbol{R} + \frac{(\mu-\mu_0)}{\mu+2\mu_0}\boldsymbol{H_0}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\frac{R_0^3}{R^3} \tag{4.2.21}$$

$$\mathbf{B}_1 = -\mu\nabla\varphi_1 = \frac{3\mu\mu_0}{\mu+2\mu_0}\mathbf{H}_0 = \mu_0\mathbf{H}_0 + \frac{2(\mu-\mu_0)\mu_0}{\mu+2\mu_0}\mathbf{H}_0 \tag{4.2.22}$$

$$\mathbf{B}_2 = -\mu_0\nabla\varphi_2 = \mu_0\mathbf{H}_0 + \frac{(\mu-\mu_0)\mu_0R_0^3}{\mu+2\mu_0}\left[\frac{3(\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{H}_0}{R^3}\right] \tag{4.2.23}$$

Q 4.2.3:

球内外两区域均无传导电流分布，磁标势均满足方程 $\nabla^2\varphi = 0$，边界条件为

$$R = 0, \varphi_1 \text{ 有限；} R \to \infty, \varphi_2 \to 0 \tag{4.2.24}$$

$R = R_0$ 处，

$$B_{2R} = B_{1R}, \quad \mathbf{e}_r \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \alpha_f \tag{4.2.25}$$

关于 α_f 的计算，可以如此考虑：

$$\mathbf{j}\mathrm{d}V = \rho\vec{v}\mathrm{d}V = \alpha_f\mathrm{d}S \Rightarrow \alpha_f = \frac{\rho\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}\vec{v} = \frac{\Delta Q}{\mathrm{d}S}\vec{v} = \sigma\vec{v} \tag{4.2.26}$$

即

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial R} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial R}, \ (-\frac{1}{R_0}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} + \frac{1}{R_0}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta})(\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta) = \frac{q\omega}{4\pi R_0}\sin\theta\vec{e}_\phi \tag{4.2.27}$$

由 z 轴对称性及上述两个条件，磁标势方程的解写为

$$\varphi_1 = \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta) \quad (R < R_0) \tag{4.2.28}$$

$$\varphi_2 = \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (R > R_0) \tag{4.2.29}$$

法向边界条件已经见过多次，不再展示，而对于切向有：

$$-R_0^{n-1} a_n \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} + \frac{b_n}{R_0^{n+2}} \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} = \frac{q\omega}{4\pi R_0}\sin\theta \tag{4.2.30}$$

考虑到右式只有 $\sin\theta$，故 Legendre 多项式最多只有 $n = 1$。

（或许有较真的同学会问，如果刚好所有高阶项都抵消了怎么办？即 $-R_0^{n-1} a_n = \frac{b_n}{R_0^{n+2}}$。那么事实上，就会导致与法向条件相违背）

由边界条件解出

$$\varphi_1 = -\frac{q\omega}{6\pi R_0} R\cos\theta, \quad \varphi_2 = \frac{q\omega R_0^2}{12\pi R^2}\cos\theta = \frac{m}{4\pi R^2}\cos\theta = \frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{R}}{4\pi R^3} \tag{4.2.31}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0(-\boldsymbol{\nabla}\varphi_1) = \frac{\mu_0 q\omega}{6\pi R_0}\mathbf{e}_z \tag{4.2.32}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0(-\boldsymbol{\nabla}\varphi_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3}\right] \tag{4.2.33}$$

球内为均匀场，球外为磁偶极场，球面电流形成的磁矩为

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\oint_S (R_0\mathbf{e}_r \times \alpha_f)\,\mathrm{d}S = \frac{q\omega R_0^2}{3}\mathbf{e}_z \tag{4.2.34}$$

4.3 磁矩

4.3.1 题目

Q 4.3.1： 求 **Q 4.2.2** 中球体的磁矩 $\mathbf{m}$。

Q 4.3.2： 均匀带电 Q 小球半径为 r_0，自旋速度为 ω_0，求自选磁矩

4.3.2 解析

Q 4.3.1:

我们需要掌握的三种磁矩的计算方法，分别为：

$$\begin{cases} \text{介质磁化定义：} \boldsymbol{m} &= \displaystyle\int_V \boldsymbol{M} \mathrm{d}V \\ \text{磁多极矩定义：} \boldsymbol{m} &= \displaystyle\int_V \boldsymbol{x'} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x'}) \mathrm{d}V \\ \text{磁多极矩推论：} \boldsymbol{m} &= \dfrac{\boldsymbol{I}}{2} \displaystyle\oint \boldsymbol{x'} \times \mathrm{d}l' = \boldsymbol{I} \Delta S \end{cases} \tag{4.3.1}$$

显然，在 **Q 4.2.2** 中，我们已经知道了小球的 $\boldsymbol{H}$，求出 $\boldsymbol{M}$ 只是乘以一件系数的事情。如果考虑从磁多极矩的角度出发，无异是困难的。

于是我们直接根据 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{B}$ 之间的线性关系写出介质球的磁化强度

$$\mathbf{M}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0} - \mathbf{H}_1 = \frac{3(\mu - \mu_0)}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{H}_0 \tag{11}$$

是常矢量，因此它的磁矩为

$$m = \int_V \mathbf{M}_1 \, \mathrm{d}V = \frac{4\pi R_0^3}{3} \mathbf{M}_1 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} 4\pi R_0^3 \mathbf{H}_0 \tag{12}$$

Q 4.3.2: 考虑到球内是有电流存在的，这时 $\oint \mathrm{H} \mathrm{d}l = 0$ 不再成立，磁标势的方法已经不可取。故我们选择老老实实根据磁多极矩的定义计算。

- 小球电荷密度

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \frac{3Q}{4\pi r_0^3} \tag{4.3.2}$$

- 电流密度（角速度为 ω）

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v} = \frac{3Q}{4\pi r_0^3} r \sin\theta \, \omega \, \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \tag{4.3.3}$$

- 磁矩（闭合线圈磁矩 $\vec{\boldsymbol{m}} = m_z\hat{\boldsymbol{e}}_z$，根据对称性，所有非 z 方向相互抵消）

$$\vec{\boldsymbol{m}} = m_z\hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j})_z\,dV \tag{4.3.4}$$

$$m_z = \frac{1}{2}\frac{3Q}{4\pi r_0^3}\int r\sin\theta\,\omega(\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi \tag{4.3.5}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{3Q\omega}{4\pi r_0^3}\left(\int r^4\,dr\int d\varphi\int \sin^3\theta\,d\theta\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{4.3.6}$$

$$\vec{\boldsymbol{m}} = \frac{Qr_0^2}{5}\omega\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{4.3.7}$$

从上式的第二行到第三行看起来思路略微令人费解，但其实是用到了基矢间的一些运算关系，大家稍微画画图便可以理解：

$$(\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z = r(\hat{\boldsymbol{e}}_r\times\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -r\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z = r\sin\theta \tag{4.3.8}$$

5 电磁波的传播

5.1 电磁波的传播问题

5.1.1 题目

Q 5.1.1: 麦克斯韦方程的基本应用：
频率为 ω 的电磁波在各向异性介质中传播时，若 E, D, B, H 仍按 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x-\omega t)}$ 变化，但 D 不再与 E 平行（即 $D=\varepsilon E$ 不成立）。

1. 证明 $k\cdot B = k\cdot D = B\cdot D = B\cdot E = 0$，但一般 $k\cdot E\neq 0$。
2. 证明 $D = \dfrac{1}{\omega^2\mu}\left[k^2E-(k\cdot E)k\right]$。
3. 证明能流 S 与波矢 $\mathbf{k}$ 一般不在同一方向上。

题目中的 k, E, B, D, H 等皆为矢量。

5.1.2 解析

提要：

亥姆霍兹方程的推导：

描述电磁波运动的麦克斯韦方程：

$$\begin{cases} \text{联系电场与磁场：}\nabla\times E=-\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \text{磁场强度旋度为两种电流密度：}\nabla\times H=J_f+J_D=J_f+\dfrac{\partial D}{\partial t} \\ \text{电位移矢量散度为自由电荷：}\nabla\cdot D=\rho_f \\ \text{磁场无源：}\nabla\cdot B=0 \end{cases} \tag{5.1.1}$$

在无特殊交代有传导电流或电荷分布时，$J_f,\rho_f=0$。在实际应用 MAXWELL 方程解决问题时，我们常常是利用式5.1.1在单色波情况下的推论，即

$$\mathbf{E}(\S,t)=\mathbf{E}(\S)e^{-i\omega t},\mathbf{B}(\S,t)=\mathbf{B}(\S)e^{-i\omega t} \tag{5.1.2}$$

在式5.1.2的条件下，我们再联立式5.1.1中的第一条与第二条，并对联立后的结果再求旋度：

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}=i\omega\mu(-i\omega\varepsilon\mathbf{E}) \tag{5.1.3}$$

我们在此处需要加上条件：$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$，于是最终得到：

$$\nabla^2\mathbf{E}+\omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E}=0,k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{5.1.4}$$

对于式5.1.4，我们有一般解：

$$\mathbf{E}(\S,t)=\mathbf{E}_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)},|\mathbf{k}|=\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{5.1.5}$$

$\mathbf{k}$ 为电磁波传播的方向，并且也是电磁波的**波数**，与波长有关系：

$$|\mathbf{k}|=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{5.1.6}$$

$\mathbf{E}_0$ 显然也是描述电场大小与方程的矢量，与 $\mathbf{k}$ 的关系可以通过：$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ 来判断：

$$\text{回顾一下 }\nabla\text{ 算符规则：}\nabla\cdot(\mathbf{f}\phi)=\phi\nabla\cdot\mathbf{f}+\mathbf{f}\cdot\nabla\phi \tag{5.1.7}$$

则：

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)})=0=0+\mathbf{E}_0\cdot\nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}=\mathbf{E}_0\cdot(e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\mathbf{k})=\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0 \tag{5.1.8}$$

常用技巧：

以 $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t))$ 为例，有常用的微分运算：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\to -i\omega, \nabla\to i\mathbf{k} \\ \nabla\cdot\to i\mathbf{k}\cdot, \nabla\times\to i\mathbf{k}\times \\ \nabla^2\to -|\mathbf{k}|^2\end{cases} \tag{5.1.9}$$

Q 5.1.1：

1. 在大部分时候，我们似乎都把 $D=\varepsilon E$，$k\cdot B=k\cdot D=B\cdot D=B\cdot E=0$ 等等的情况想得太显然了，因为我们都处理的是**各向同性的线性情况**。在该题目中，要求我们证明 $k\cdot B=k\cdot D=B\cdot D=B\cdot E=0, k\cdot E\neq 0$，我们应该思考如何构造出这样的形式。

   如果读者有认真看了提要部分关于如何推出亥姆霍兹方程，会发现出现类似 $k\cdot B$ 的步骤实际上是在进行 $\nabla\cdot\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ 的操作的。虽然在推导过程中需要 $D=\varepsilon E$ 的条件我们才能写出 $\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ 的形式，但是题目很明确地告诉了我们" *若 E, D, B, H 仍按 $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ 变化*"，所以我们可以大胆进行散度运算的操作。

   对 $\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ 进行求梯度的操作，我们得到的结果都是 $i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}$，$\mathbf{X}$ 表示 $\mathbf{B},\mathbf{D}$。根据式5.1.1, 显然对 $\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ 求梯度后等于 0，因此 $i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}=0$。

   为了证明 $B\cdot D=B\cdot E=0$，我们应该直接利用式5.1.1的第一条和第二条，因为在这两条式子中直接出现了 E, B 和 B, D 的关系。又考虑到我们事实上已经有了 $\mathbf{E},\mathbf{B},\mathbf{D},\mathbf{H}$ 的表达式，故剩下的工作仅仅是矢量运算。

   $$\text{回顾一下 }\nabla\text{ 算符规则：}\nabla\times(\phi\mathbf{f})=(\nabla\phi)\times\mathbf{f}+\phi(\nabla\times\mathbf{f}) \tag{5.1.10}$$

2.

5.2 波导与谐振腔（有界空间中的电磁波）

5.2.1 题目

Q 5.2.1： 波导与截止频率
频率为 $30\times 10^9\,\mathrm{Hz}$ 的微波，在 $0.7\,\mathrm{cm}\times 0.4\,\mathrm{cm}$ 的矩形波导管中能以什么波模传播？在 $0.7\,\mathrm{cm}\times 0.6\,\mathrm{cm}$ 的矩形波导管中能以什么波模传播？

Q 5.2.2: 非典型谐振腔

无限长的矩形波导管, 在 z=0 处被一块垂直地插入的理想导体平板完全封闭, 求在 $z=\infty$ 到 z=0 这段管内可能存在的波模。

Q 5.2.3: 非典型一维波导

垂直于 y 轴放置一对无限大的平行理想导体板，分别位于 y=0 和 y=b。电磁波沿平行于板面的 x 方向传播，设波在 z 方向是均匀的, 求可能传播的波模和每种波模的截止频率

5.2.2 解析

Q 5.2.1

因一端被理想导体封闭，波在此处将被完全反射，因此这波导管内电场不具有 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$ 形式。现令 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ 是方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0,\quad k=\omega/c \tag{5.2.1}$$

满足条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\quad 和\quad \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{E}\big|_S=0 \tag{5.2.2}$$

的解，界面 S 是管壁。$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ 的三个直角分量均满足方程:

$$\nabla^2E_i+k^2E_i=0,\quad i=x,y,z \tag{5.2.3}$$

其中

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=\omega^2/c^2 \tag{5.2.4}$$

令 $E_x=X(x)Y(y)Z(z)$，可以得到三个一维亥姆霍兹方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2X=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2Y=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2Z=0 \tag{5.2.5}$$

它们都有形如 $C_i\cos k_ix_i+D_i\sin k_ix_i$ 的通解，因此

$$E_x=(C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx)(C_2\cos k_yy+D_2\sin k_yy)(C_3\cos k_zz+D_3\sin k_zz) \tag{5.2.6}$$

设波导管 x 方向的宽度为 a，y 方向的宽度为 b。由条件 (2)，有

$$x=0\text{ 处，}\quad \frac{\partial E_x}{\partial x}=0;\quad y=0\text{ 及}z=0\text{ 处，}\quad E_x=0$$

由此得 $D_1=C_2=C_3=0$，于是

$$E_x=A_1\cos k_x x\sin k_y y\sin k_z z \tag{5.2.7}$$

常数 A_1 是 E_x 的振幅. 同理可得

$$E_y=A_2\sin k_x x\cos k_y y\sin k_z z \tag{8}$$

$$E_z=A_3\sin k_x x\sin k_y y\cos k_z z \tag{9}$$

再由条件 (2)，有

$$x=a\text{ 处，}\quad \frac{\partial E_x}{\partial x}=0,\quad E_y=E_z=0$$
$$y=b\text{ 处，}\quad \frac{\partial E_y}{\partial y}=0,\quad E_x=E_z=0$$

将 (7),(8),(9) 三式代入上述条件，解得

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\quad k_y=\frac{n\pi}{b}\quad (m,n=0,1,2,\cdots) \tag{5.2.8}$$

$$k_z=\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{5.2.9}$$

管内电场还应满足 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0$，将 (7),(8),(9) 三式代入这条件，得

$$A_1k_x+A_2k_y+A_3k_z=0 \tag{5.2.10}$$

可见 A_1,A_2,A_3 中只有两个是独立的，即 (7),(8),(9) 表示的解中，对每一组 m,n 值，管内有两种独立的波模.

Q 5.2.2

本质上，对于有界空间中的电磁波传播问题，无非就是亥姆霍兹方程 + 边界条件。而本

节中讨论的边界皆为理想导体，那么在理想导体边界，有：

$$\begin{cases}\mathbf{e}_n \times \mathbf{E} = 0, \dfrac{\partial E}{\partial n} = 0 \\ \mathbf{e}_n \times \mathbf{H} = \alpha, \dfrac{\partial H}{\partial n} = 0\end{cases} \tag{5.2.11}$$

而对于波导，还有一个特点：固定传播方向 z 后，可有如下化简 (下式先忽略时间项)：

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}(x,y)e^{(i(\mathbf{k}_z \cdot \mathbf{z}))} \tag{5.2.12}$$

接下来就是对 $\mathbf{E}(x,y)$ 一通熟悉的操作（不再具体展示，仅梳理流程）：

1. 分离变量法，并确立常数关系 (k_x, k_y, k_z 之间的关系)

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \tag{5.2.13}$$

2. 写出 $\mathbf{E}(x,y)$ 的通解，并利用边界条件化简系数，得到 $E_i, i = x,y,z$ 和 k_x, k_y, k_z 所满足的周期性条件

3. 此时得到的 $E_i, i = x,y,z$ 还存在待定常数，利用 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 解出几个待定常数 A_1, A_2, A_3 之间的关系：

$$A_x k_x + A_y k_y - ik_z A_z = 0 \tag{5.2.14}$$

但是对于波导的问题，并非解出几个方程就完事了，我们还有更关心的问题：波导的谐振频率、截止频率以及波模。谐振频率的计算相当简单：

$$\omega = kv = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \tag{5.2.15}$$

当 $k < \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ 时，k_z 就会变成虚数，那么传播因子就会变成衰减因子。则截止频率即为

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{5.2.16}$$

回到题目。该题主要是两大特点：

- x 方向均匀——x 方向的自由度被消除
- 沿 z 方向传播——z 方向可直接写成传播形式。

其通解为

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_i}{\mathrm{d}y^2} + k_y^2 E_i = 0 \tag{5.2.17}$$

$$E_i = A_i \cos k_y y + B_i \sin k_y y \quad (i = x, y, z) \tag{5.2.18}$$

A_i 和 B_i 为待定系数. 由条件 $\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E}\big|_S = 0, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$，即有 $y = 0$ 和 b 处，$E_x = E_z = 0$，$\quad \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 0$

由此得

$$E_x = A_1 \sin k_y y, \quad E_y = A_2 \cos k_y y, \quad E_z = A_3 \sin k_y y \tag{5.2.19}$$

$$k_y = \frac{m\pi}{b} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{5.2.20}$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \tag{5.2.21}$$

再由条件 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$，得

$$A_2 k_y = \mathrm{i} A_3 k_z \quad (A_1 \text{ 独立}) \tag{5.2.22}$$

即对每一个 m 值，有两种独立的波模. 截止频率为 $\omega_{c,m} = \dfrac{m\pi c}{b}$.

6 电磁波的辐射

6.1 两大规范条件

6.1.1 题目

Q 6.1.1: 设真空中矢势 $A(x,t)$ 可用复数傅里叶展开为

$$A(x,t) = \sum_k \left[a_k(t) e^{ik\cdot x} + a_k^*(t) e^{-ik\cdot x}\right] \tag{6.1.1}$$

其中 a_k^* 是 a_k 的复共轭。

(1) 证明 a_k 满足谐振子方程：

$$\frac{d^2 a_k(t)}{dt^2} + k^2 c^2 a_k(t) = 0. \tag{6.1.2}$$

(2) 当选取规范 $\nabla \cdot A = 0, \varphi = 0$ 时，证明 $k \cdot a_k = 0$.

(3) 把 E 和 B 用 a_k 和 a_k^* 表示出来.

Q 6.1.2: 设 A 和 φ 是满足洛伦兹规范的矢势和标势.
(1) 引入一矢量函数 $Z(x,t)$（赫兹矢量），若令 $\varphi = -\nabla \cdot Z$，证明：

$$A = \frac{1}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t}. \tag{6.1.3}$$

(2) 若令 $\rho = -\nabla \cdot P$，证明 Z 满足方程：

$$\nabla^2 Z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = -c^2\mu_0 P, \tag{6.1.4}$$

写出在真空中的推迟解.
(3) 证明 E 和 B 可通过 Z 用下列公式表示：

$$E = \nabla \times (\nabla \times Z) - c^2\mu_0 P, \quad B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times Z. \tag{6.1.5}$$

6.1.2 解析

Q 6.1.1

(1) 证明：取洛伦茨规范，真空中 $\vec{A}$ 满足齐次波动方程：

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{6.1.6}$$

将

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k}} \left[\vec{a}_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}^*_{\vec{k}}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \tag{6.1.7}$$

代入，得到 (此处涉及到的计算技巧需要参考式 (5.1.9))

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\sum_{\vec{k}}\left[k^2\vec{a}_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+k^2\vec{a}^*_{\vec{k}}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \tag{6.1.8}$$

$$-\sum_{\vec{k}}\left[\frac{1}{c^2}\frac{d^2\vec{a}_{\vec{k}}(t)}{dt^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\frac{1}{c^2}\frac{d^2\vec{a}^*_{\vec{k}}(t)}{dt^2}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \tag{6.1.9}$$

$$=-\frac{1}{c^2}\sum_{\vec{k}}\left[\frac{d^2\vec{a}_{\vec{k}}(t)}{dt^2}+k^2c^2\vec{a}_{\vec{k}}(t)\right]e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{6.1.10}$$

$$-\frac{1}{c^2}\sum_{\vec{k}}\left[\frac{d^2\vec{a}^*_{\vec{k}}(t)}{dt^2}+k^2c^2\vec{a}^*_{\vec{k}}(t)\right]e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}=0. \tag{6.1.11}$$

由于上述对任意 $\vec{x}$ 都成立，所以有

$$\frac{d^2\vec{a}_{\vec{k}}(t)}{dt^2}+k^2c^2\vec{a}_{\vec{k}}(t)=0. \tag{6.1.12}$$

(2) 证明：取 $\nabla\cdot\vec{A}=0$，有

$$\nabla\cdot\vec{A}=\sum_{\vec{k}}\left[i\vec{k}\cdot\vec{a}_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}-i\vec{k}\cdot\vec{a}^*_{\vec{k}}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]. \tag{6.1.13}$$

由 $\vec{x}$ 的任意性，可得

$$\vec{k}\cdot\vec{a}_{\vec{k}}(t)=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{a}^*_{\vec{k}}(t)=0. \tag{6.1.14}$$

(3) 解：根据定义以及 $\phi=0$，有

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\sum_{\vec{k}}i\vec{k}\times\left[\vec{a}_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}-\vec{a}^*_{\vec{k}}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right], \tag{6.1.15}$$

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\sum_{\vec{k}}\left[\frac{d\vec{a}_{\vec{k}}(t)}{dt}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\frac{d\vec{a}^*_{\vec{k}}(t)}{dt}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]. \tag{6.1.16}$$

注：本小问如果尝试用 $\nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ 去解也是可以的。看起来得到的形式与上式不同（会含有 k^2），实际上经过代换是相同的。 **Q 6.1.2**

(1) 证明：在洛伦兹规范中，有

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0. \tag{6.1.17}$$

令 $\phi=-\nabla\cdot\vec{Z}$，得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}&=\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial(-\nabla\cdot\vec{Z})}{\partial t}\\&=\nabla\cdot\vec{A}-\nabla\cdot\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}\right)\\&=\nabla\cdot\left(\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}\right)=0.\end{aligned}\tag{6.1.18}$$

得

$$\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}.\tag{6.1.19}$$

(2) 证明：由高斯定律，

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{E}&=\nabla\cdot\left(-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\\&=-\nabla^2\phi-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A})\\&=\nabla^2(\nabla\cdot\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\cdot\vec{Z})\\&=\nabla\cdot\left(\nabla^2\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}\right)\\&=\frac{\rho}{\epsilon_0}=-\mu_0c^2\nabla\cdot\vec{P}.\end{aligned}\tag{6.1.20}$$

其中 $\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})=\nabla^2(\nabla\cdot\vec{Z})$。从而

$$\nabla^2\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=-c^2\mu_0\vec{P}.\tag{6.1.21}$$

类比 $\vec{A}$ 的达朗贝尔方程和解：

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J},\tag{6.1.22}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}dV',\tag{6.1.23}$$

可得 $\vec{Z}$ 的推迟解为

$$\vec{Z}(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\vec{P}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}dV'.\tag{6.1.24}$$

(3) 由 $\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}$ 得

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{Z}), \tag{6.1.25}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}&=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\\&=\nabla(\nabla\cdot\vec{Z})-\nabla^2\vec{Z}-c^2\mu_0\vec{P}\\&=\nabla\times(\nabla\times\vec{Z})-c^2\mu_0\vec{P}.\end{aligned} \tag{6.1.26}$$

6.2 辐射场与辐射能流

6.2.1 题目

Q 6.2.1:
带电粒子 e 作半径为 a 的非相对论性圆周运动，回旋频率为 ω. 求远处的辐射电磁场和辐射能流.

6.2.2 解析

Q 6.2.2 设粒子在 xy 平面运动，其电偶极矩振幅为 $p_0=ea$，将电矩矢量

$$\boldsymbol{p}=ea\boldsymbol{e}_r=ea\left(\cos\omega t\,\boldsymbol{e}_x+\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_y\right) \tag{6.2.1}$$

写成复数形式，有

$$\boldsymbol{p}=ea\left(\boldsymbol{e}_x+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{6.2.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{p},\quad \ddot{\boldsymbol{p}}=-\omega^2\boldsymbol{p} \tag{6.2.3}$$

将 $\boldsymbol{e}_x$ 和 $\boldsymbol{e}_y$ 变换到球坐标基矢（教材课后习题部分给出了变换矩阵），得电偶极辐射场及其平均辐射能流密度：

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}_R=\frac{\mu_0\omega^2ea}{4\pi R}\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{e}_\theta+\cos\theta\,\boldsymbol{e}_\phi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t+\phi)} \tag{6.2.4}$$

$$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R=\frac{\mu_0\omega^2ea}{4\pi R}\left(\cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_\phi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t+\phi)} \tag{6.2.5}$$

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{c}{2\mu_0}\left(\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{e}_R=\frac{\mu_0\omega^4e^2a^2}{32\pi^2cR^2}\left(1+\cos^2\theta\right)\boldsymbol{e}_R \tag{6.2.6}$$

提要：该题最大的难点事实上在于写出式6.2.2。为什么我们需要写成 $e^{-i\omega t}$ 的复数形式？最主要的原因还是在于 $\dot{\boldsymbol{p}} = -i\omega \boldsymbol{p}$ 这样的导数变换关系的存在。

7 那些你必须掌握的公式

7.1 矢量分析与基本数学定理

第一节：矢量分析部分

1. **L-C 符号在点乘、叉乘中的基本表示及定义：**见第一节，不再赘述。
2. **L-C 符号的基本运算结论：**
$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta^i_m\delta^j_n - \delta^i_n\delta^j_m \tag{7.1.1}$$
3. **δ 符号的基本结论**
$$\delta_{lj}\delta_{lj} = 3 \tag{7.1.2}$$
4. **双叉乘运算的基本结论：**
$$(a\times b)\times c = (a\cdot c)b - (b\cdot c)a \tag{7.1.3}$$
5. **∇ 算符多种结论**
$$\begin{cases} \nabla\times(f\times g) & = (g\cdot\nabla)f + (\nabla\cdot g)f - (f\cdot\nabla)g - (\nabla\cdot f)g \\ \nabla\cdot(f\times g) & = (\nabla\times f)\cdot g - (\nabla\times g)\cdot f \\ \nabla\times(\nabla\times f) & = \nabla(\nabla\cdot f) - \nabla^2 f \end{cases} \tag{7.1.4}$$
事实上，这些结论都需要掌握，但并不需要**死记硬背**。只要掌握了第二点和第三点，以及记住 ∂_i 对于双变量求导时的链式法则（参考第一节），就能够快速推导。
6. ∇ 算符作用于形如 $\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ 式的结论：参考式5.1.9
7. **二阶张量运算必背结论：**
$$a_{ij}a_{il} = \delta_{jl} \tag{7.1.5}$$

第二节：基本数学定理

1. **高斯定理与斯托克斯公式**：
$$\int_V (\nabla\cdot\mathbf{J})dV = \oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \quad \int_S (\nabla\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} \tag{7.1.6}$$

这两个式子还正好一个是电流连续性方程，一个是安培环路定理。

2. **柱坐标**:

注意：下列写法请大家自行区分矢量和标量函数了

- 梯度:
$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{7.1.7}$$
- ∇^2:
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0 \tag{7.1.8}$$
- 散度
- 旋度: 建议参考式2.2.10的替换方法，比较好记。
- Laplace 方程的通解形式

3. **球坐标**:

- 梯度:
$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi \tag{7.1.9}$$
  记忆提要：如果保持从 $(x,y,z)\to(r,\phi,z)\to(r,\theta,\phi)$ 的记忆顺序，那么柱坐标梯度刚好是在第二项添加了 $\frac{1}{r}$ 的系数，而球坐标梯度刚好是在第二项添加 $\frac{1}{r}$ 的系数的基础之上在第三项添加了 $\frac{1}{r\sin\theta}$
- ∇^2:
- 散度。
- 旋度：建议参考式2.2.11的替换方法，比较好记。
  记忆提要：如果保持从 $(x,y,z)\to(r,\phi,z)\to(r,\theta,\phi)$ 的记忆顺序，那么我们甚至可以得到和梯度变换的类似结论
- Laplace 方程的通解形式

7.2 电动力学部分

、

表 1: 课程核心-Maxwell Equation 和对应边界条件

Maxwell Equation	对应边界条件
$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$
$\nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_f$	$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \alpha_f$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$	$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$

Chapter One: 除了第一章之外，教材的几乎所有章节都是在表1上缝缝补补四处推广。第一章主要补充了：

1. **自由电流密度 J：**。
   - 表达 1：$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$
   - 表达 2：$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v}$. 类似的表达也可以推广到面电流。
   - 电流连续性方程：
   $$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{7.2.1}$$
2. **极化强度与磁化强度：**
   - 极化强度与极化面/体电荷的关系：
   - 磁化强度于磁化体电荷/体电流/面电流的关系
   - 极化强度/磁化强度与 $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ 的关系。

   建议参考电磁介质一节的思维导图
3. **电磁场能量和能流密度：**
   (a) 能流密度的本质定义：
   $$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{7.2.2}$$
   (b) 线性介质中的能量密度表达式：
   $$w = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2) \tag{7.2.3}$$

Chapter Two:

1. Green 函数。

2. 电偶极矩本质定义:

$$p = \int \rho(x')x'dV' \tag{7.2.4}$$

3. 电偶极矩的电势场:

$$\varphi = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \tag{7.2.5}$$

4. 电四极矩本质定义:

$$\mathscr{D} = \int (3x_i{}'x_j' - r'^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{x'})dV' \tag{7.2.6}$$

以及该定义下的推论:

- 关于对角线对称
- $\mathscr{D}_{11} + \mathscr{D}_{22} + \mathscr{D}_{33} = 0$

Chapter Three:

1. 矢势 A 的微分方程及其特解（加洛伦兹规范）:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')dV'}{r}, r = |x - x'| \tag{7.2.7}$$

记忆提要：该方程难记吗？显然是和电势的泊松方程类比得到的！

2. 由上者特解导出的 B 的表达（毕萨定理）:

3. 磁偶极矩的三种定义+ 与磁化强度的关系

Chapter Four:

1. $k, v, \omega, c, \mu, \varepsilon, n$ 之间知二求三的关系，比如:

$$k = \frac{\omega}{v} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{7.2.8}$$

2. 平面电磁波的电场磁场比值为常数:

3. 平均能流密度

$$\bar{S} = \frac{1}{2}Re(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}) \tag{7.2.9}$$

4. 相速度和群速度的定义。

5. 折射定律及推导:

$$k_x = k\sin\theta = k'\sin\theta' = k''\sin\theta'' \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = n_{21} \tag{7.2.10}$$

6. 如何推导**菲涅尔公式**以及布儒斯特角(针对于电场平行于入射面情况) 的定义。

7. 全反射情况下的穿透深度定义。

8. **导体内的电磁波:**

   (a) 复电容率定义

   (b) 导体内电磁波表示式

   (c) 求解 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的方法

   (d) 良导体的定义

   (e) 穿透深度的定义

Chapter Five: 到了这一章，基本就是在表格1的基础上进行一些推广的工作了:

1. 电场标势负梯度的新定义;

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \tag{7.2.11}$$

2. 如何利用上式7.2.11推出达朗贝尔方程?

3. **达朗贝尔方程**:

   - 结合库伦规范的形式 (对应静电场情形):

$$\begin{cases} \nabla^2\boldsymbol{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial(\nabla\varphi)}{\partial t} = -\mu_0\boldsymbol{J} \\ \nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \tag{7.2.12}$$

   库伦规范为:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \tag{7.2.13}$$

- 结合洛伦兹规范的形式

$$\begin{cases}\nabla^2 \boldsymbol{A}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0 \boldsymbol{J} \\ \nabla^2 \boldsymbol{\varphi}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\end{cases} \tag{7.2.14}$$

而库伦规范条件为:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0 \tag{7.2.15}$$

4. (推迟势下) 矢势（远场展开得到的）电偶极和磁偶极辐射:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu e^{ikR}}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x'})dV'}{R-\boldsymbol{e}_R\cdot \boldsymbol{x}'}=\frac{\mu e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\boldsymbol{p}} \tag{7.2.16}$$

对磁偶极辐射有:

$$\dot{\boldsymbol{p}}\to \nabla \times \boldsymbol{m}=ik\boldsymbol{e}_R\times \boldsymbol{m} \tag{7.2.17}$$

Chapter Six:

1. 洛伦兹 (逆) 变换
2. 速度变换公式
3. 链式法则推导偏导数变换关系 (重点会推):

$$\frac{\partial}{\partial x'}=\gamma\frac{\partial}{\partial x}+\gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} \tag{7.2.18}$$

4. 利用第三点推电磁场的洛伦兹变换（至少记住结论）:

$$\begin{cases}E_x'=E_x, \\ E_y'=\gamma\left(E_y-vB_z\right), \\ E_z'=\gamma\left(E_z+vB_y\right)\end{cases} \qquad \begin{cases}B_x'=B_x, \\ B_y'=\gamma\left(B_y+\dfrac{v}{c^2}E_z\right), \\ B_z'=\gamma\left(B_z-\dfrac{v}{c^2}E_y\right)\end{cases} \tag{7.2.19}$$

5. 沿 x 方向的洛伦兹变换:

$$a=\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix} \quad \beta=\frac{v}{c} \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{7.2.20}$$

6. 四维电磁场张量:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3 \\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.2.21}$$

希望大家能有所受益，也欢迎分享和提出改进意见！