

基础天文学习题解析及知识概要

贾梓杏 and 李佳威

2025



目录

1	Introduction	3
2	星系之内——恒星	3
2.1	开普勒三定律	3
2.2	恒星的辐射	5
2.2.1	知识点提要	5
2.2.2	题目与解析	7
2.3	恒星的测距、颜色与质量-光度关系	8
2.3.1	知识点提要:	8
2.4	赫罗图上的恒星演化与核合成	11
2.4.1	知识点提要与 few 例题	11
2.5	致密星	17
2.6	双星系统	20
2.6.1	题目与解析	24
3	从银河系到全宇宙	26
4	Appendix	26

1 Introduction

本习题解析及知识概要是基于中山大学物理与天文学院本科生课程《基础天文学》进行编写，主要参考李程远（中山大学物理与天文学院 教授）老师的课程内容以及 PPT。

一般而言，笔者的写作重心是习题解析，但考虑到本门课程更类似于通识课，概念较多较杂，故笔者在撰写本 TeX 文档时在尊重原始授课顺序的基础上，努力尝试将相对零碎的知识点串联起来。故重点也在知识点梳理上。因此，在知识梳理过程中出现的一些公式，为了避免影响连贯性，会放在附录中进行解析。

虽然我们敬爱的佳威哥没有实际上参与本文的撰写，但是出于对佳威哥的尊重以及对我在学业上的指导，仍然保留佳威哥的作者身份。

2 星系之内——恒星

2.1 开普勒三定律

事实上，我们在高中就已经学过开普勒三大定律，我们在此简要重述一下：

1. 行星的轨道是一个以太阳为焦点之一的椭圆
2. 行星与太阳的连线在单位时间内扫过的面积相等。（角动量守恒）
3. 行星轨道周期的平方与其轨道半长轴的立方成正比。

Q 2.1.1: 证明见附录

证明对于开普勒行星运动三定律，对于太阳系而言，行星轨道半长轴的三次方和它们公转轨道周期平方之比的常数是：

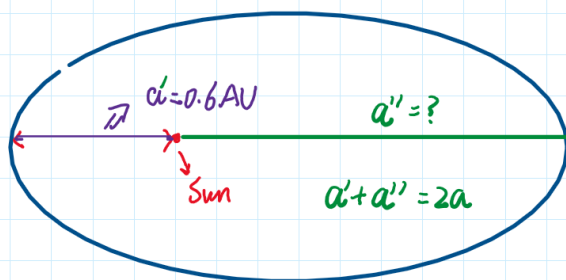
$$\frac{a^3}{T^2} = K = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (2.1.1)$$

Q 2.1.2: 哈雷彗星的近日点为 0.6 AU，轨道周期为 76 年，那么它距离太阳最远时有多远？根据椭圆轨道定义，哈雷彗星轨道的偏心率是多少？

解析： 考虑到题目不难，仅有两点需要注意：

1. 单位换算问题
2. 计算地球绕日周期，常用的是 $T = 365.25\text{day}$ ，这是考虑了四年一闰的情况。

只要注意了这两点，继续都是简单的计算，故直接给出手写版解析：



$$\begin{aligned} \text{开普勒第三定律: } \frac{GM(M+m)}{4\pi^2} &= \frac{a^3}{T^2} \approx \frac{GM}{4\pi^2} \\ \Rightarrow a^3 &= \frac{GM}{4\pi^2} \cdot T^2 \end{aligned}$$

$G = 6.674 \times 10^{-11} \cdot \text{m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
 $M_0 = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$
 $T^2 = [76 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60]^2 \text{ s}$
 $= 5.744 \times 10^{18} \text{ s}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^3 &= \frac{6.674 \times 1.989}{4 \times (3.14)^2} \cdot 5.744 \times 10^{[-11+30+18]} \\ &= 1.9334 \times 10^{37} \text{ m}^3 \\ \Rightarrow a &= 4.397 \times 10^{12} \text{ m} \\ \Rightarrow a &= \frac{4.397 \times 10^{12} \text{ m}}{1.496 \times 10^{11}} \approx 29.4 \text{ AU} \\ \Rightarrow 2a &= 59.2 \text{ AU} = a' + a'' \\ \Rightarrow a'' &= 58.6 \text{ AU} \end{aligned}$$

Q 2.1.3: 如果某双星系统包含两颗质量是 $1M_{\odot}$ 的白矮星，其公转周期是 0.1 s，这样一个双星系统的半长轴是多少？

解析： 众所周知，对于双星系统，我们依然可以使用开普勒第三定律。但是，我们要首先明白定义：

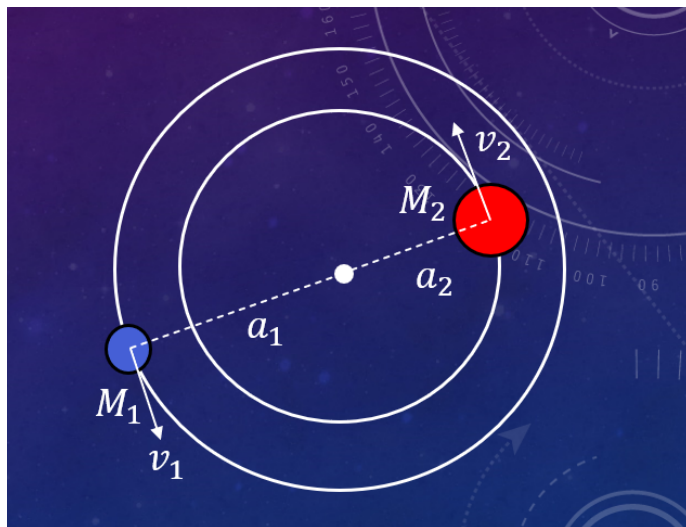


图 1: 双星系统示意图

我们可能会凭借朴素的直觉认为, $a_1 + a_2 = 2a$ 。但是事实上这是不对的, 在双星系统中, $a_1 + a_2 \equiv a$ 。一旦我们清楚了这一点, 便可以开始直接计算:

$$\frac{a^3}{T^2} = G \frac{M_{\odot} + M_{\odot}}{4\pi^2} \quad (2.1.2)$$

我们当然可以直接代入 M_{\odot}, T, G 进行计算, 但事实上还有一个更简单的方法——利用已知数替换:

$$\text{日地公转: } \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{GM_{\odot}}{4\pi^2}, \quad a_1 = 1\text{AU}, T_1 = 365.25 \times 24 \times 3600 = 3.1558 \times 10^7\text{s} \quad (2.1.3)$$

我们将两式做比:

$$\frac{a^3}{a_1^3} = 2 \frac{T^2}{T_1^2} \Rightarrow a = a_1 \times 2^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{0.1}{3.1558 \times 10^7} \right)^{\frac{2}{3}} = 2.7181 \times 10^{-6}\text{AU} = 4.0662 \times 10^5\text{m} \quad (2.1.4)$$

2.2 恒星的辐射

2.2.1 知识点提要

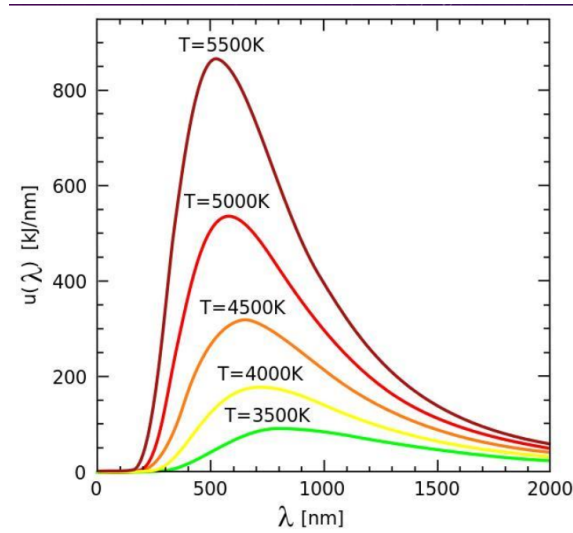
1. 黑体辐射:

- **黑体**: 若物体在任何温度下, 能吸收一切外来的电磁辐射, 则称此物体为黑体. (绝

对黑体)。

- **维恩位移**：发出热辐射（黑体辐射）的物体具有均匀的表面温度，其辐射强度的**峰值**对应的波长满足维恩位移定律：

$$\lambda_m T = b, b = 0.002897[m][k] \quad (2.2.1)$$



纵坐标 kJ/nm 表示在特定波长附近，每纳米波长间隔内黑体辐射的能量（以千焦耳为单位）。

- **斯特藩—玻尔兹曼定律**：发出热辐射（黑体辐射）的物体具有均匀的表面温度，它和物体的表面平均辐射强度满足斯特藩—玻尔兹曼定律。其具体公式如下：

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4, \sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W}/(\text{m}^2 \text{K}^4) \quad (2.2.2)$$

式中的 L 表示恒星的**总辐射功率**，也就是**光度** (Luminosity, 整颗恒星每秒发射出的所有波段辐射的能量)。

- **康普顿散射公式**：辐射（光，电磁波）具有**波粒二象性**，在传播过程中主要表现波的性质，和物质相互作用时则表现粒子的性质。譬如和电子碰撞，其能量损失（也就是波长变化）与散射角的关系为：

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta), \lambda_c \equiv \frac{h}{m_e c} \quad (2.2.3)$$

式中 λ_c 被称为康普顿波长。

2. 基尔霍夫定律：

- 热且致密的固、液、气体：产生连续谱
- 热但稀薄的气体：产生发射谱
- 冷且稀薄的气体：产生吸收谱

产生发射谱的天体是光学薄的，产生吸收谱的天体是光学厚的。此处有两点值得注意：一是谱与线的区别，前者是后者的分布；二是注意此处的厚薄是相对的，譬如在基尔霍夫定律中说到“冷且稀薄的气体产生吸收谱”，此处却说能产生吸收线的天体是光学厚的，两者并不矛盾，因为只要厚到能够有效充分地吸收光，就是光学厚。

AU (Astronomical Unit, 即天文单位)： 1 AU 被定义为地球与太阳之间的平均距离，约为 1.496 亿公里（精确值为 149,597,870.7 公里）。

3. 多普勒谱线位移：

当天体作为辐射源在观测者视线上存在相对运动时，Doppler 效应会导致观测者接收到的电磁辐射波长或频率发生变化。远离（接近）观测者辐射源发出的电磁辐射波长变长（短），称为谱线的红移（蓝移），在非相对论性的条件下，谱线波长的变化与视线方向天体的相对运动速度关系为：

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{c_{\text{光速}}}{V_{\text{相对速度}}} \quad (2.2.4)$$

$V_{\text{相对速度}}$ 的正负表明了远离 or 靠近观测者。

2.2.2 题目与解析

Q 2.2.1： 质量在太阳附近的恒星，其光度与质量的关系可以近似写成：

$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^4 \quad (0.43M_{\odot} < M < 2M_{\odot}) \quad (2.2.5)$$

半径与质量的关系可以近似写成：

$$\frac{R}{R_{\odot}} \approx \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{0.57} \quad (M > M_{\odot}) \quad (2.2.6)$$

根据斯特藩定律，计算质量分别是 $1.1M_{\odot}$ 、 $1.2M_{\odot}$ 、 $1.5M_{\odot}$ 和 $2.0M_{\odot}$ 的类太阳恒星，其表面温度是多少？并将质量在 $1M_{\odot} - 2M_{\odot}$ 之间的恒星，以纵轴为它们的光度，横轴为它们的表面温度，画在一张二维图上（请在上述四个点以外再任意采样若干个不同质

量的恒星)

解析： 我们代入斯特藩-玻尔兹曼公式，可以得到 M 与 T 的关系：

$$\frac{L}{4\pi R^2} = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^4 = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{2.86} = \sigma T^4 \quad (2.2.7)$$

剩下的则是代值计算。

关于绘制 L 与 T 的函数关系，我们可以将两者都表示为 M 的函数，进行绘制：

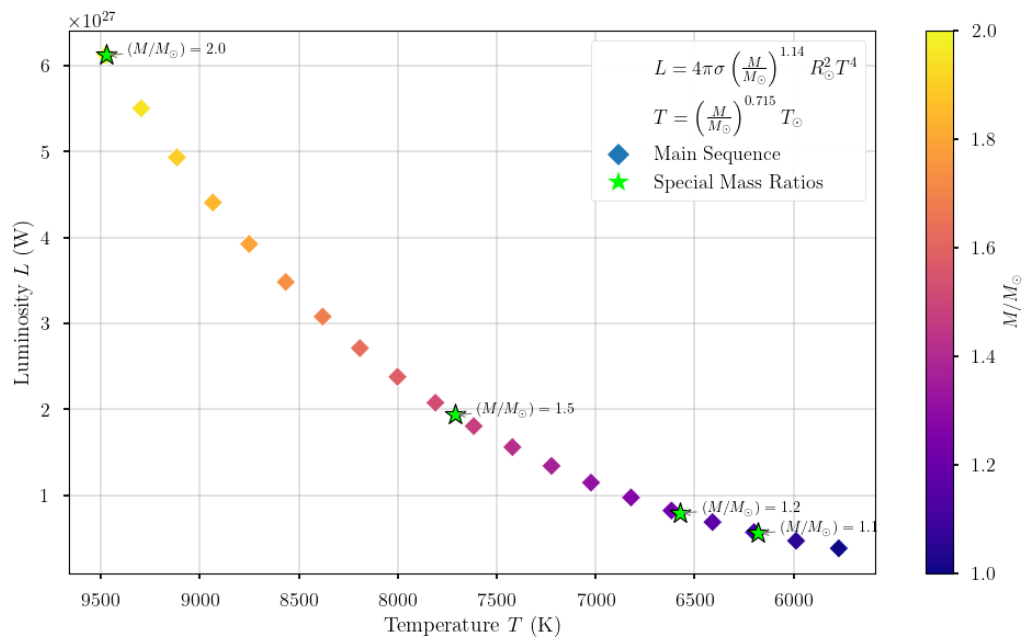


图 2: 质量在 $1M_{\odot} - 2M_{\odot}$ 之间的恒星的“赫罗图”

2.3 恒星的测距、颜色与质量-光度关系

2.3.1 知识点提要：

1. 三角视差法：

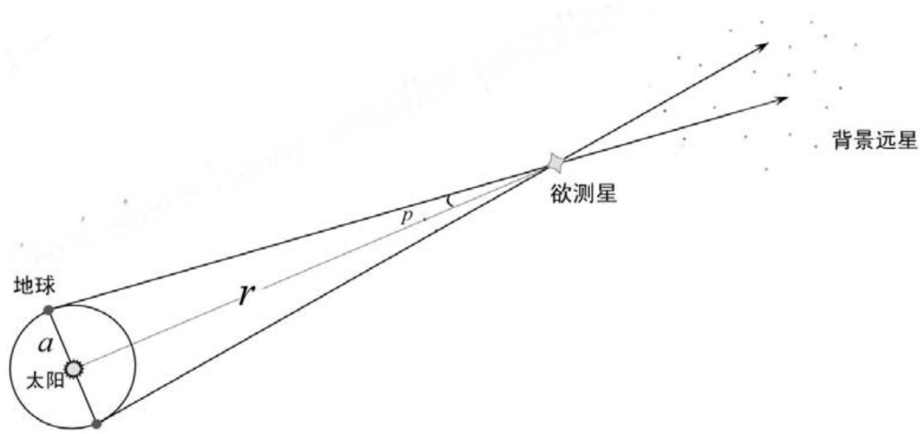


图 3: 三角视差法

三角视差法就是如图3这般简单粗暴，图中的 r 就是我们的目标：

$$r \tan p = a \Rightarrow r \tan p \approx rp = a \Rightarrow r = \frac{a}{p} \quad (2.3.1)$$

但是值得注意的是，能有上面近似的条件是在**弧度制**下的，在天文学中，我们一般都会换算为角度制：

$$1\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \text{转换为分, 再转换为秒} \Rightarrow r = 206205 \frac{a}{p''} [\text{AU}] \quad (2.3.2)$$

假设某颗恒星周年视差为 $1''$ ，其距离则为 206265AU。定义这一距离为 1 秒差距 (parsec, pc)。1pc 约等于 3.26 光年。

三角视差法虽然简单粗暴，但是也存在许多实际问题：由于受到地球大气扰动的影响，周年视差的精确测量也受到限制。地面望远镜的测量精度本领一般不超过 $0.01''$ ，因而三角视差法一般只能用于测量 **500pc** 以内的恒星的距离。

2. 恒星的星等：

- 视星等 (m)：描述天体观测到的视亮度 (f)，

$$f \propto \frac{L}{r^2} \neq 4\pi\sigma T^4, \text{分母为观测距离非恒星半径} \quad (2.3.3)$$

令两颗星的视亮度分别为 f_1 和 f_2 ，规定两颗星的视星等之差为：

$$m_2 - m_1 = -2.5 \lg\left(\frac{f_2}{f_1}\right) \quad (2.3.4)$$

P.S: 不管是 2.5 的系数还是负号都是规定，记住就好。而且还有在定义上反人类的一点，视星等越小，看起来越亮。

根据上式我们可以发现，如果我们能找到一颗恒星 $m_1 = 0$ ，并且相对应的 $f_1 = \text{Constant}$ ，那么视星等的公式就可以大大简化。于是我们规定织女星的视星等为 $m_{\text{vega}} = 0$ ，对于任何恒星，其视星等可以通过与织女星比较得到

$$m - m_{\text{vega}} = -2.5 \lg \frac{f}{f_{\text{vega}}} \quad (2.3.5)$$

- 绝对星等 (M)：天体在 10 pc 处观测到的视星等：

$$m - M = -2.5 \lg\left(\frac{(10\text{pc})^2}{r^2}\right) \quad (2.3.6)$$

$$= -5 + 5 \lg r \quad (2.3.7)$$

$$\Rightarrow r = 10^{(m-M+5)/5} \text{pc} \quad (2.3.8)$$

$m - M$ 仅与天体的距离有关，称之为距离模数。由于指定了距离，绝对星等 M 是光度 L 的另一种表达：

$$\lg \frac{L_1}{L_2} = -0.4(M_1 - M_2) \quad (2.3.9)$$

得到上式是因为 $f \propto \frac{L}{R^2}$ ，而 R 又被消掉。 -0.4 则是 -2.5 的倒数。

- * 推论：恒星的大小：

利用式 2.3.9 的结论，以及 S-B 关系，我们可以得到下列式子：

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (2.3.10)$$

$$\lg(L/L_{\odot}) = 2 \lg(R/R_{\odot}) + 4 \lg(T/T_{\odot}) \quad (2.3.11)$$

$$-0.4(M - M_{\odot}) = 2 \lg(R/R_{\odot}) + 4 \lg(T/T_{\odot}) \quad (2.3.12)$$

$$T_{\odot} = 5772 \text{ K}, M_{\odot} = 4.83 \text{ mag} \quad (2.3.13)$$

$$\lg(R/R_{\odot}) \approx 8.49 - 0.2M - 2 \lg T \quad (2.3.14)$$

而对于最后一式，我们可以使用维恩位移定律进一步改写，以得到恒星的大小与星

等、颜色之间的关系：

$$\lg(R/R_{\odot}) \approx 8.49 - 0.2M - 2\lg \frac{b}{\lambda} \approx 13.57 - 0.2M + \lg \lambda \quad (2.3.15)$$

若颜色相同，恒星越亮（M 越小），则半径越大。

3. 恒星的颜色：

首先，根据维恩位移定律，我们可以通过恒星的**峰值波长**来定义恒星的颜色。但在成像方面，望远镜需要搭配特定波段的滤光片进行观测，望远镜探测到的星等也是在**特定波段**的星等。选定两个波段，定义**短波长波段**探测到的星等减去**长波长波段**探测到的星等，为恒星在这两个波段下的颜色（色指数）。

$$C_{index} = M_1 - M_2 \quad (2.3.16)$$

4. 主序星的质量-光度关系：

位于**主序带**（到了赫罗图一节大家自会明白）上的恒星，满足以下的质量-光度关系：

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\alpha} \quad (2.3.17)$$

2.4 赫罗图上的恒星演化与核合成

2.4.1 知识点提要与few例题

赫罗图： 关于赫罗图的知识点分为两层，第一点是赫罗图的基本知识，第二点是关于赫罗图上恒星演化情况的进阶知识。

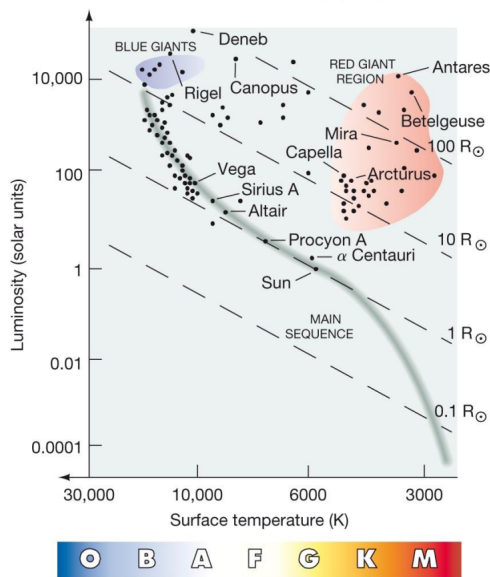


图 4: 第一种赫罗图

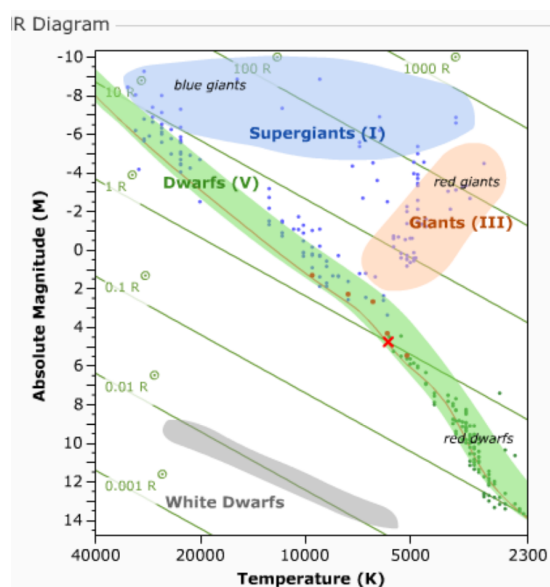


图 5: 第二种赫罗图

关于赫罗图的基本知识点如下:

1. 赫罗图的横纵轴:

赫罗图的横轴通常为温度 (K, 注意是从左到右递增) 或者光谱型 (O, B, A, F, G, K, M); 而纵轴一般是光度 (L), 或者绝对星等 (毕竟绝对星等和光度之间存在转化关系)

2. 赫罗图上各部分对应的恒星类型:

如图5所示, 赫罗图上的不同区域表示处于不同状态的恒星。尤其需要记住的是主序星、红巨星、行星状星云和白矮星的位置。

恒星演化与核合成: 显然, 恒星的演化过程与恒星内部的核反应是密不可分的。恒星的生命阶段大致可以分为三个部分: 成为主序星前 (原恒星)、主序星 (占据了超过恒星生命超过 90% 的时间)、主序后演化阶段 (在赫罗图上可以看见它四处移动)。

接下来将以一道问题引导大家去理解整个过程:

Q 2.4.1:

画一颗类太阳恒星在赫罗图上的轨迹, 并指出不同演化阶段恒星内部不同位置 (核心/壳层) 发生的核合成过程。

解析: 我们严格按照刚才提到的恒星生命三阶段逐步分析, 并附以赫罗图上的位置:

1. **原恒星阶段**：我们首先要回答的问题是：大伙最初都是一些气态分子云，**什么情况下会形成恒星**？

最直观的原因是：当气体云的热压力不足以抵抗引力时，会在引力的作用下发生塌缩，这一现象称之为金斯不稳定性。更数学一些的话，我们有描述自引力系统在平衡状态下不同形式的能量之间的关系式：

$$\text{维里平衡条件: } 2\langle K \rangle + \langle U \rangle = 0 \quad (2.4.1)$$

式中 $\langle K \rangle, \langle U \rangle$ 分别为对时间的平均动能和势能。形成原恒星的条件，即为

$$\text{坍塌系统: } 2\langle K \rangle + \langle U \rangle < 0 \quad (2.4.2)$$

满足引力不稳定判据的云核，发生自吸引坍塌，形成**原恒星**。一般而言，质量小于 $0.08M_{\odot}$ 的天体是无法满足的。

那么，一团气体星云是如何坍塌至一颗恒星的呢？我们可以将模型简化为一个质量分布均匀的球体在自身引力下坍塌，从而算得**自由降落时标** t_{ff} ：

Q 2.4.2: 证明：

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} \quad (2.4.3)$$

证明见附录

这一过程大约持续几十万年。除了自由降落时标外，还有**热时标（开尔文 - 赫姆赫兹时标）** t_{KH} ，用以衡量天体以当前的光度释放掉其包含的所有动能所需的时标。

$$t_{KH} = \frac{U}{L} \sim \frac{GM^2}{RL} \quad (2.4.4)$$

式中 L 为光度。

一定会有读者好奇，热时标有什么真实的物理意义嘛？大约是来源于早期恒星能量来源理论的局限性：在热核聚变反应被发现之前，开尔文 - 赫姆赫兹机制曾被用来解释恒星的能量来源。通过计算太阳的开尔文 - 赫姆赫兹时标，人们发现其结果远小于地球的年龄，这表明仅靠引力收缩释放的能量无法维持太阳长时间的能量输出。这一矛盾促使科学家进一步探索恒星的能量来源，最终发现了热核聚变反应。

如图6,(4-7) 即为气体云由原恒星演化到主序星在赫罗图上的阶段。

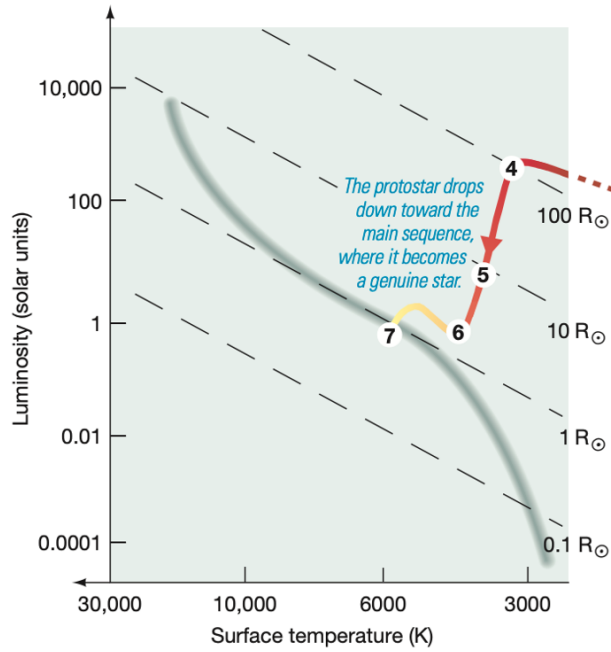
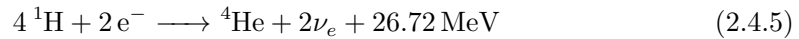


图 6: 原恒星阶段在赫罗图上的位置 (类太阳恒星)

2. **主序星阶段:** 主序星的寿命占了恒星生命的绝大多数时间 (毕竟找到了最为高效的能量获取方法)。在该阶段, 恒星的能量主要来源于**核心氢燃烧**, 即 **pp 链反应**:



很显然, 主序星的寿命, 正比于其所可供燃烧的氢元素, 反比于其燃烧氢元素的速率 (光度), 即 $t \propto \frac{M}{L}$ 。但这样看来还是太过于抽象了, 我们对于式2.2.5事实上可以推广, 即主序星的质量光度关系:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\alpha} \Rightarrow t \propto M^{1-\alpha} \frac{M_{\odot}^{\alpha}}{L_{\odot}} \Rightarrow t \propto M^{1-\alpha} \quad (2.4.6)$$

3. **主序后阶段:**

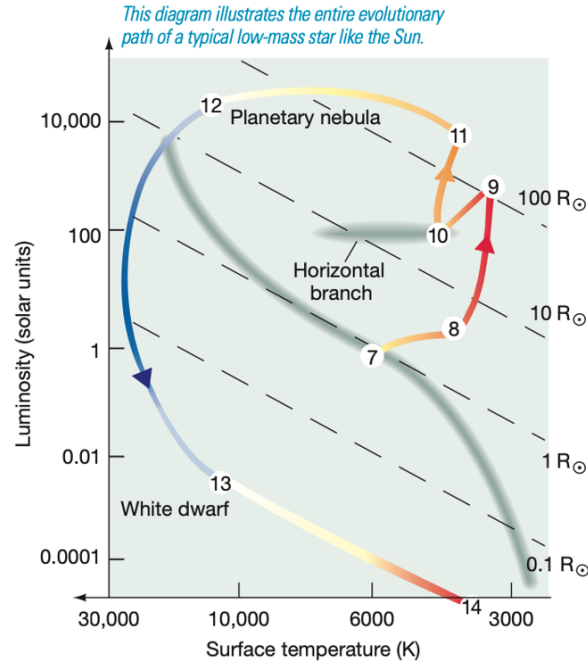
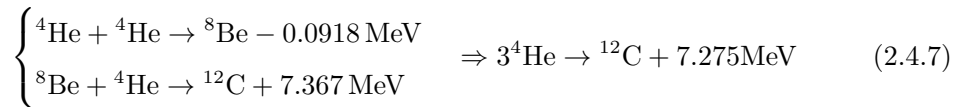


图 7: 主序后阶段在赫罗图上的位置 (类太阳恒星)

- (a) (7-8:) 恒星进入**亚巨星**阶段, 在赫罗图上向右 (上) 移动。此阶段核心氢元素燃烧殆尽, 氦元素占比增加, 氦核收缩。但是别急, 此阶段氦核还没有开始燃烧, 而是在燃烧**壳层氢**。
- (b) (8-9:) 恒星进入**红巨星**阶段, 表面温度几乎维持不变, 因而几乎是直接向赫罗图上方爬升。此阶段仍然燃烧**壳层氢**, 但氢燃烧壳层不断外移。
- (c) (9-10:) 恒星发生**氦闪**, 从 9 迅速跌落到 10。但显然如图7, 阶段 10 存在一条水平分支线, 这说明了两件事情:
- 发生氦闪后的恒星光度几乎相同。
 - 具体落在水平分支线的哪个位置则取决于恒星在发生氦闪后的**剩余质量**。

该过程是由**核心氦燃烧**所主导的, 具体反应式如下:



- (d) (10-11) 恒星进入**渐进巨星支**阶段: 类似于 (7-8) 阶段, 都是核心的氢或者氦燃烧殆

尽后，开始燃烧壳层的氢或者氦，同时体积和光度都有膨胀。值得一提的是，对于该阶段，并非是说氢已经完全燃烧完了，而是在与壳层的氦一同燃烧。

- (e) (11-12) 恒星进入行星状星云阶段：核心熄灭，氢氦壳层燃烧，恒星包层不断膨胀并冷却。恒星剩下极小的内核，和极大的扩张包层（尘埃和冷却气体云）。炙热核心释放紫外光子，将包层气体电离，形成行星状星云。
- (f) (12-13) 恒星进入白矮星阶段：小质量恒星演化的最终阶段，行星状星云消散后，裸露出恒星熄灭的核心。依赖其储存的热量，白矮星继续发光并逐渐冷却，在赫罗图的主序左侧朝右下方移动。至此，Q 2.4.1 解析完毕。

虽然 Q 2.4.1 解析完毕了，但是关于恒星核合成与演化的知识并没有结束，毕竟我们只讨论了类太阳恒星。一个小学二年级就广为人知的热知识是，太阳在宇宙中算质量较小的恒星。我们还需要了解一下 $2M_{\odot} - 8M_{\odot}$ 的中等质量恒星以及大于 $8M_{\odot}$ 的大质量恒星的演化过程：

- $2M_{\odot} - 8M_{\odot}$: 直到红巨星阶段之前，中等质量恒星的演化和类太阳恒星十分相似（请大家回忆一下是赫罗图上的哪些阶段）。若恒星质量达到太阳的 2.5 倍以上，氦燃烧开始时内核不简并，不会发生氦闪，恒星平稳过渡到氦燃烧阶段。恒星在赫罗图顶部来回平稳运动，最终成为红超巨星、行星状星云、白矮星。

值得一提的是，虽然大伙都是主要靠燃烧氢氦来维持生命，但是中等质量恒星的氢燃烧方式与太阳并不相同。后者是产能效率较低的式 2.4.5pp 链反应，前者则是产能效率较高的 CNO 循环。同样是四个氢核合成一个氦核后放出两个电子中微子加上 26.72MeV 的能量，但是有了 CNO 做催化剂后效率大大提升。而太阳之所以不主要依靠 CNO 循环产能是因为中心温度不够高 ($< 1.7 \times 10^7 K$)。

- 大于 $8M_{\odot}$: 演化速度极快，刚离开主序不久便启动氦燃烧，内核收缩升温，轻易点燃更重元素的核聚变，在赫罗图的超巨星区域不断往复。最终以超新星爆发的形式在赫罗图上消失，成为中子星或黑洞。

2.5 致密星

表 1: 恒星初始质量与演化结局的关系

恒星初始质量 (M_{\odot})	演化结局
$0.08 < M < 0.25$	He 白矮星
$0.25 < M < 8$	CO 白矮星
$8 < M < 12$ (?)	O Ne Mg 白矮星
$12 < M < 25$ (?)	超新星 \rightarrow 中子星
$M > 25$ (?)	超新星 \rightarrow 黑洞

(?): 取决于恒星演化后期的质量丢失情况, 目前人们对它知之甚少。而几种不同类型的白矮星的产生原因则是取决于其内部的核合成反应 α 粒子俘获过程。

1. 白矮星:

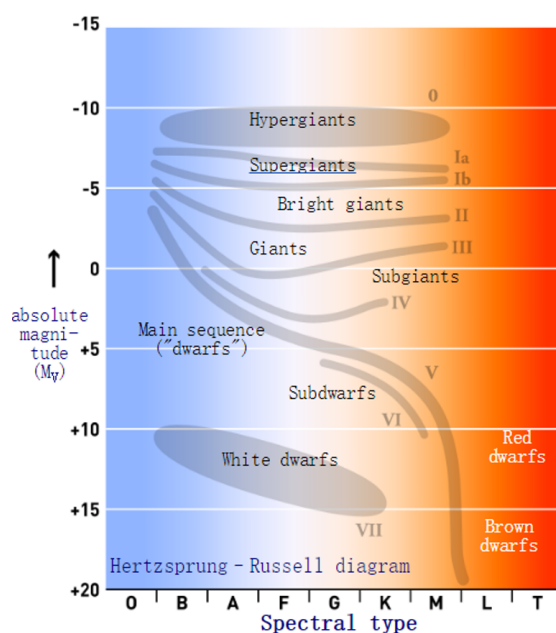


图 8: 赫罗图上的白矮星

白矮星是中低质量恒星演化的产物, 在赫罗图上可见。显然这时白矮星内部也不会有核燃烧的反应了, 因而抵抗万有引力的来源是电子简并压。

电子简并压：根据泡利不相容原理，费米子组成的系统中不能有两个粒子处于完全相同的状态。电子占据相同的位置是被泡利不相容原理禁止的，而因此引起的压力则称为泡利压力（电子简并压）。

电子简并压是一种比较特殊的相互作用：只与电子气的密度相关，与温度无关。借此，我们通过推导天体压力与引力的关系，最终能够得到 $R \propto M^{-\frac{1}{3}}$ ——**白矮星的半径越大，质量越小**。

很显然，电子简并压在对抗引力这一点上，也是有上限的——否则全宇宙所有大质量天体都会变成白矮星。基于海森堡不确定性原理：

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2\pi} \quad (2.5.1)$$

当天体质量进一步增大时，电子被压得愈紧密，导致动量发生变化接近光速，最终达到能够提供的电子简并压的上限——**钱德拉塞卡极限**。即，对于**无自转**的恒星，以电子简并压维持平衡的质量上限为 $1.44M_{\odot}$ (He 白矮星)。

那么，当中小质量的恒星走到了白矮星这一步，就停止演化了吗？并非如此。因为白矮星内部不再有核聚变，所以会将自己的残余动能以辐射的形式释放掉，温度逐渐下降。所以图8中关于白矮星的部分又被称作“白矮星冷却序列”。说到动能以辐射的形式释放掉，这一点其实我们是熟悉的，在式2.4.4中所定义的**热时标**正是描述此事的。

2. 中子星：

当电子简并压无法对抗引力时，就会被压入核内，发生电子俘获（质子与电子结合），达到临界密度后中子从原子核中**滴出**，变成自由中子，形成**中子简并压**，以对抗引力。

滴出：相当于中子轨道填满了，再来一个中子就只能变成自由中子。

中子星的质量范围约为 $1.1 - 3M_{\odot}$ （钱德拉塞卡极限-奥本海默极限）。具有 $\approx 10^6\text{K}$ 的高温（所以赫罗图上不可见，可以回忆一下赫罗图上最左端的温度大约是多少），以及 $10^8 \sim 10^{16}\text{Gs}$ 的超强磁场。

有一种**高速自转**的中子星，被称之为**脉冲星**，因为它确实能发出脉冲。其自转周期极短，几毫秒至几秒不等。

3. 黑洞：

显然，当中子星的质量超过 $3M_{\odot}$ 时，中子简并压也不再能够对抗引力，于是这时便会形成连光也无法逃逸的**黑洞**。对于一个质量为 M 的天体，当其半径小于**施瓦西半径**时，其逃逸速度等于光速：

$$R_c = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.5.2)$$

4. 激变变星：

有一些恒星，其亮度会突然增大（爆发），然后变暗，这就是**变星**。新星是变星中的一个子类（爆发变星）。而根据新星变暗的速度又分为**快**新星和**慢**新星。

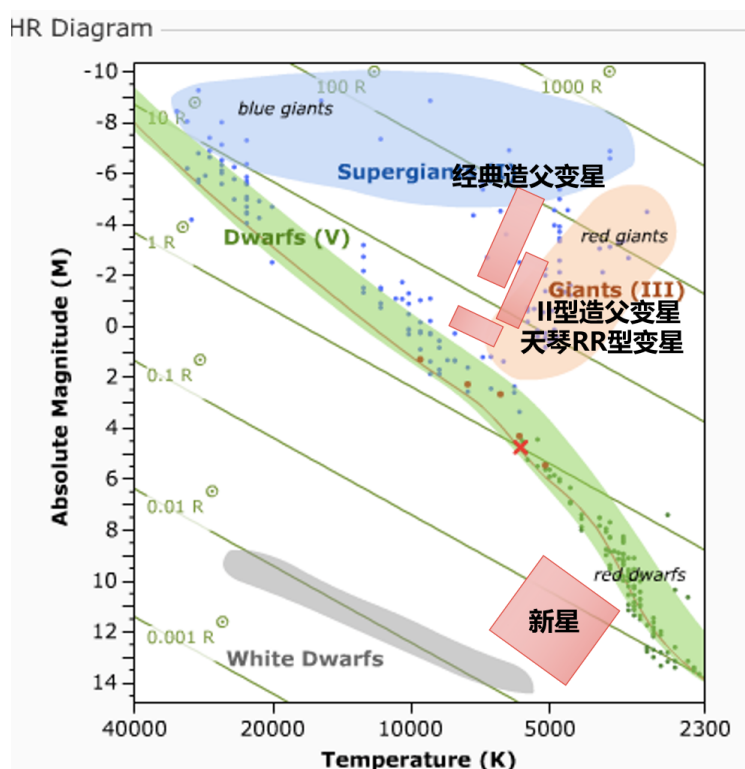


图 9: 变星与新星在赫罗图中的位置

根据恒星演化理论，单颗恒星不可能演化到介于白矮星带和主序带之间的位置，为什么新星能够出现在赫罗图上的这一区域？这事实上就涉及到光学知识（瑞利判据）了：新星处于望远镜不可分辨的恒星系统（双星）中，两颗恒星的颜色与光度叠加，使得望远镜探测到的源偏离了单星所处的恒星带。

双星不只是变星出现在赫罗图上特殊位置的原因，更是其**光变机制**。新星一般为主星（体积小，密度大，如白矮星），伴星（温度低，较冷的巨星或主序星）。伴星的物质被白矮星吸积，引力势能转化为热能，促使其表面发生热核反应，导致外层爆发，形成新星。

在上述过程中，主星的质量显然是会增加的。那么如果出现一个非常巧妙的情况：假如主星白矮星的质量在钱德拉塞卡极限附近，这样难道能够慢慢地越过钱德拉塞卡极限吗？答案是，**不能**！一旦越过钱德拉塞卡极限，恒星就会发生一次猛烈的爆发——Ia 型超新

星爆发。

2.6 双星系统

双星的种类较多，有**目视双星**（能够通过光学望远镜分辨），**测光双星**（不能通过望远镜分辨），**分光双星**（能够测量到两颗子星视向速度）**天测双星**（只能通过观察主星的摄动分辨，无法观察到伴星）以及**食双星**（可以通过观察系统的光变曲线分辨）等等。

在本节，主要研究一下三个问题：

1. 轨道参数：

对于双星系统，我们依然有开普勒第三定律：

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} a^3 \quad (2.6.1)$$

若测得**目视双星**轨道的角距离 a'' 以及视差 ξ'' ，那么根据恒星测距一节的知识，有：

$$a = \frac{a''}{\xi''} \Rightarrow P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} \left(\frac{a''}{\xi''}\right)^3 \quad (2.6.2)$$

一旦计算出了 $M_1 + M_2$ ，就能够得到各星到质心距离、速度等关系了。如果能通过其它独立的方法求得 $M_1 + M_2$ ，那么我们就反向解得 ξ'' ，其专有名词为**力学视差**。

显然，对于式2.6.2的适用范围是有限。对于双谱分光双星，可以定出 $m_1 \sin^3 i$ 和 $m_2 \sin^3 i$ ，其中 i 是双星轨道平面相对观测者的倾角。如果同时还是食双星，则可以确定轨道倾角 i ，解出两颗子星的质量。（见题目）

对于单谱分光双星，只能解出 $m_1 \sin^3 i$ 和 $m_2 \sin^3 i$ 以及它们的质量函数

$$f(m_1, m_2, i) = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{P}{2\pi G} v_{1r}^3 \quad (2.6.3)$$

若对于包含大量双星的系统，且可以假设它们的轨道倾角随机分布，上述表达式依然具有统计上的科学意义。**质量函数是描述恒星或双星系统质量分布特性的关键工具，具有重要的观测和理论意义。**

2. 尺寸与温度：

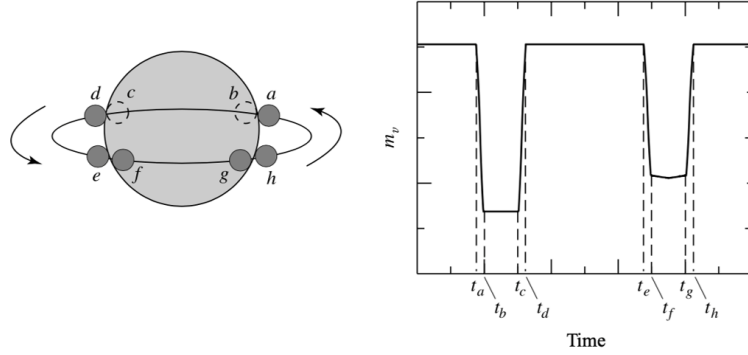


图 10: 光变曲线示意——掩食与温度尺寸的测定

如果双星之间能够发生完全掩食（一颗星遮住另外一颗），可以通过光变曲线不同特征时刻的值确定恒星的尺寸。使用该模型有两个假定：

- (a) 圆轨道
- (b) 倾角 $i \approx 90^\circ$

根据图10, 我们即使不用左侧的模型图也能分析得到哪一段的星等变化是大食小哪一段是小食大（请自行分析）。根据图10的光变曲线, 我们能够得到：

$$\begin{cases} r_{small} = \frac{1}{2}v(t_a - t_b) \\ r_{big} = \frac{1}{2}v(t_c - t_a) = \frac{1}{2}v(t_c - t_b) + r_{small} \end{cases} \quad (2.6.4)$$

式中 v 显然为两者相对速度。

同样的道理, 我们还能得到两者的温度比: 假定单位面积的辐射能力为 $F = \sigma T^4$, 以下标 s, b 分别代表大小恒星, “-” 号表示遮挡情况。

$$B_{s+b} = \pi r_b^2 F_b + \pi r_s^2 F_s \quad (2.6.5)$$

$$B_{b-s} = \pi r_b^2 F_b \quad (2.6.6)$$

$$B_{s-b} = \pi r_b^2 F_b - \pi r_s^2 F_b + \pi r_s^2 F_s \quad (2.6.7)$$

$$(2.6.8)$$

考虑到温度比值即为 F 比值，故我们应该尽量消元，构造出 F 比值形式：

$$\frac{B_{s+b} - B_{b-s}}{B_{s+b} - B_{s-b}} = \left(\frac{T_s}{T_b} \right)^4 \quad (2.6.9)$$

3. 密近双星：

(a) 基本性质：

一般而言，双星之间的间距比较大（如大于 1000 倍恒星的半径），每一颗恒星将独自演化，不受伴星的影响。但**密近双星**两子星距离很近，因引力相互作用使得子星发生畸变甚至物质转移的双星系统。密近双星的恒星演化并不独立，每一颗恒星的演化都强烈依赖于伴星的相对位置和相对演化阶段。

注意与上一节的致密双星区分，后者指至少其中一颗成员星是致密天体（白矮星、中子星或黑洞）的系统。

事实上的双星系统相当复杂，洛溪对模型进行了相当程度的简化后，得到了下列的五个拉格朗日点（引力为 0 的点）。

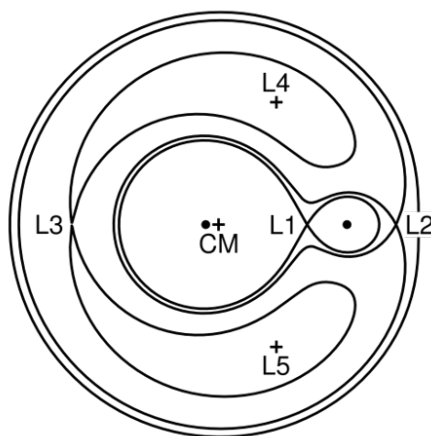


图 11: 洛溪瓣

而我们关注较多的，则是由 L1 连接起来的“八字形区域”——**洛溪瓣**。前文提到过，密近双星的最大特点就是有**物质转移**，而（一颗还是两颗）子星是否充满**洛溪瓣**，正是判断密近双星类型的关键——不接双星、半接双星，以及邻接双星。

(b) 吸积过程：

既然会发生物质转移，那么肯定有一颗星会**抛射**（恒星以星风或者爆发等方式流失

物质的过程) 物质, 另外一颗则会**吸积** (恒星俘获物质) 物质。对于后者, 主要有两种方式:

- **洛溪瓣溢流**

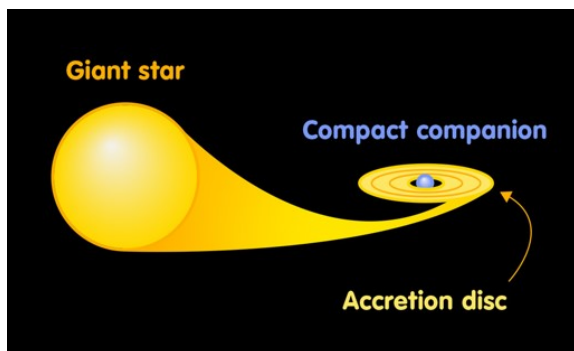


图 12: 洛溪瓣溢流

如图12所示, 子星在演化过程中体积膨胀**充满洛希瓣**, 一部分物质经过拉格朗日点转移到另一子星周围被吸积。被吸积的物质会围绕着受体星形成**吸积盘**, 并逐渐因为**粘滞**作用落入受体星。

- **星风吸积**

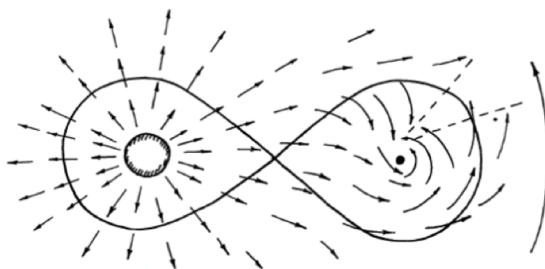


图 13: 星风吸积

子星均未充满洛希瓣时, 由于恒星活动产生的星风, 其中**相对速度小于子星逃逸速度**的部分能够被子星吸积。

4. X 射线双星

在讲到洛溪瓣溢流这样的吸积作用时, 我们提到会有**吸积盘**的产生。根据致密星一节的知识, 我们知道这些物质落入受体星的过程中引力势能会转化为辐射释放出来。当受体星是致密天体时, 就会释放出 X 射线。

X 射线双星有按供体星质量进行分类的方式（大、中、小质量 X 射线双星），也有按照发出的 X 射线波长进行分类的方式（硬 X 射线 $< 0.1nm$ ，软 X 射线 $> 0.1nm$ ）。

2.6.1 题目与解析

Q 2.6.1: 两颗完全一样的恒星，半径为 r ，相距为 a ，发生掩食时星等增加 ΔM ，怎么求它的倾角？

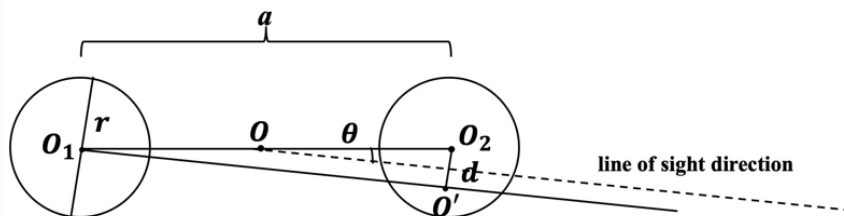


图 14

解析：本质上，该题目是一道几何题。从图14中我们能够看出，两个恒星相互遮挡的面积与倾角 i 相关（图中写的 θ ，为了不重复用 i ），而相互遮挡面积又会影响 ΔM 。我们不妨先假定遮挡面积为 ΔS ，首先找到 ΔS 与 ΔM 的关系。

根据式2.3.9，我们可以得到：

$$\lg \frac{L_2}{L_1} = -0.4\Delta M \Rightarrow \lg \frac{2\pi r^2 - \Delta S}{2\pi r^2} = -0.4\Delta M \Rightarrow \Delta S = 2\pi r^2(1 - 10^{-0.4\Delta M}) \quad (2.6.10)$$

接下来我们则应该去寻找 ΔS 与 i 的关系，从图14可知 $d = \sin i$ ，进一步的分析参考图15：

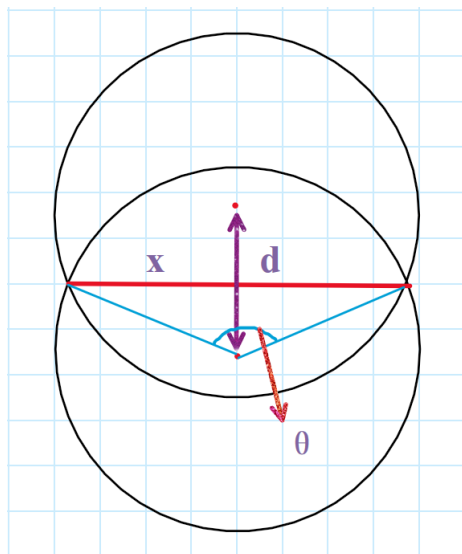


图 15

我们可以计算出，图中蓝线和红线构成的三角形面积 S_1 ：

$$S_1 = \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}} \frac{d}{2} \quad (2.6.11)$$

而张角为 θ 的扇形面积为：

$$S_2 = r\theta, \theta = \arccos\left(\frac{2r^2 - (4r^2 - d^2)}{2r^2}\right) = \arccos\left(\frac{d^2}{2r^2} - 1\right) \quad (2.6.12)$$

显然，两倍的（扇形面积-三角形面积），即为我们的 ΔS ：

$$\Delta S = 2\left(r \arccos\left(\frac{d^2}{2r^2} - 1\right) - \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}} \frac{d}{2}\right), d = a \sin i \approx ai \quad (2.6.13)$$

联立式2.6.13和，即可得到最终答案。

3 从银河系到全宇宙

4 Appendix

Q 4.0.1:

证明对于开普勒行星运动三定律，对于太阳系而言，行星轨道半长轴的三次方和它们公转轨道周期平方之比的常数是：

$$\frac{a^3}{T^2} = K = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (4.0.1)$$

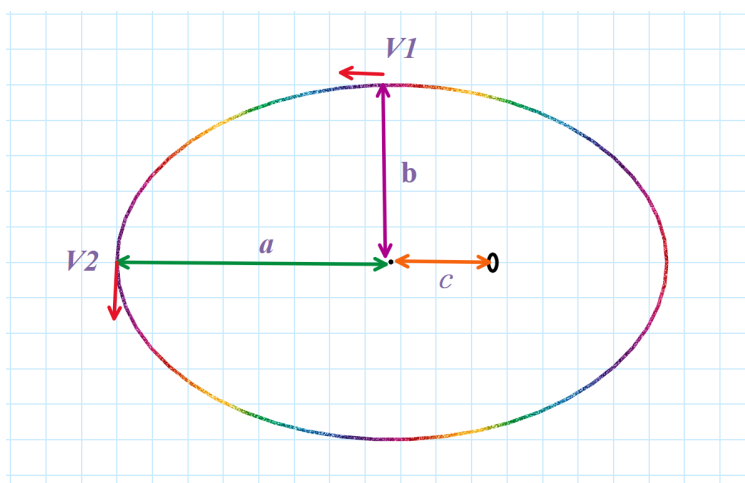


图 16

如图16所示，该题主要分为三个步骤：

1. 选定两个特殊点 (V_1, V_2)。这两点的特征为，总能量与角动量的表达形式方便。
2. 建立能量守恒式与动量守恒式，以已知常数表出角动量 L 。

$$L = mb\sqrt{\frac{GM}{a}} \quad (4.0.2)$$

3. 利用角动量的微分表达式，积分得到椭圆面积：

$$L = mr^2 \frac{d\phi}{dt}, S = \int r^2 d\phi \quad (4.0.3)$$

并利用已知椭圆面积为 πab ，得证。

Q 4.0.2: 证明:

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} \quad (4.0.4)$$

我们先看最重要的守恒定律能不能排上用场，考虑质量为 m 的气体，开始时并没有速度，根据能量守恒：

$$\frac{1}{2}mv^2 = GMm \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} v^2 = 2GM \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \quad (4.0.5)$$

我们要求时标需要有 t ，怎么办？不要忘了 $v = \frac{dr}{dt}$ 我们可以积分把 t 搞出来。先

$$v = \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} dt = -\frac{dr}{\sqrt{2GM \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} \quad (4.0.6)$$

注意此时 r 随 t 变小，因此是负号。接下来就是定积分区间 r 到最后肯定会变为 0，因为它在坍缩，初始可以设成为 r_0 ，然后进行积分，这是个技术活，令 $r = r_0 \sin^2 u$ ，当 $r = r_0$ ， $u = \pi/2$ ， $r = 0$ 时， $u = 0$ ， $dr = 2r_0 \sin u \cos u du$

对上述式子进行积分得到

$$t = -\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left[\frac{1}{\sin^2 u} - 1 \right]^{-1/2} 2 \sin u \cos u du \quad (4.0.7)$$

通过对上式的积分，即可得到自由下落时标。

希望大家能有所受益，也欢迎分享和提出改进意见！

