数学物理方法习题及解析

贾梓杏 and 李佳威

December 2024

目录

1 前言 **4**

2 Part.I：复变函数与积分变换 **4**

2.1 复数与复变函数 4
2.2 解析函数 6
2.2.1 C-R 条件与 Laplace 方程 6
2.2.2 初等及多值函数 8
2.3 复变积分 9
2.4 Taylor and Laurent 级数及展开 11
2.4.1 Taylor and Laurent 级数 11
2.4.2 奇点问题 14
2.5 留数定理 15
2.5.1 求留数以及在积分中的应用 15
2.5.2 解析延拓 16
2.6 Γ 函数及其它特殊基本函数 17
2.6.1 Γ 函数家族 17
2.6.2 δ 函数 18
2.7 积分变换 19
2.7.1 Fourier 19
2.7.2 Laplace 21

3 Part.II：数学物理方程 **23**

3.1 正交曲面坐标系 23
3.2 数学物理方程与定解条件 23
3.3 行波法与分离变量法 25
3.3.1 行波法 25
3.3.2 分离变量法 (基础) 26
3.4 正交曲面坐标系中的分离变量法 28
3.4.1 圆形区域及非齐次方程的处理 28
3.4.2 二阶微分方程极点判断 29
3.5 球函数 (Legendre 的应用) 30
3.5.1 Legendre 方程及多项式性质 30

3.5.2 Legendre 的具体应用 32
3.5.3 球谐函数 33
3.6 柱函数（Bessel）. 35
3.6.1 Bessel 函数的性质 35
3.6.2 Bessel 的应用 37
3.7 补充：半球延拓问题 42

1 前言

本习题解析主要题源**张建东**老师（中山大学物理与天文学院）的“数学物理方法”课程的课后作业，以及包括但不限于中山大学物理学院的数学物理方法期末真题。鉴于笔记是基于张建东老师授课顺序整理，故习题及解析也是依据相同的顺序。征求了张建东老师本人意见后，计划只展示笔记中提到的部分习题以及详细解析，在该解析中，题号还是保留张建东老师所布置的课后作业题号。

本习题及解析力求不跳步，确保大家都能理解。

2 Part.I：复变函数与积分变换

2.1 复数与复变函数

题目：

作业 01

1. 写出以下复数的实部、虚部、模、辐角。

(1)$\dfrac{1-2i}{3+4i}+\dfrac{2-i}{5i}$, (2)$\sqrt[i]{2i}$, (3)$e^{ie^{i}}$

3. 计算并求和:

$$\cos\phi+\cos 3\phi+\cdots+\cos(2n-1)\phi$$

4. 画出下列式子表达的区域

(1) $|z|+\mathrm{Re}(z)<1$, (2) $0<\arg\left(\dfrac{z-i}{z-2}\right)<\dfrac{\pi}{3}$

解析

1.

(1) $\dfrac{1-2i}{3+4i}+\dfrac{2-i}{5}=\dfrac{(1-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}+\dfrac{2-i}{5}=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{5}i$

实部: $\dfrac{2}{5}$ 虚部: $\dfrac{4}{5}$ 模: $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 辐角: $\arctan\left(\dfrac{4}{2}\right)+\pi+2n\pi$（其中 n 为正整数）

(2) $\sqrt[i]{2i}=\left[e^{\ln 2+i\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi}\right]^{\frac{1}{i}}=e^{\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi-i\ln 2}=e^{\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi}(\cos\ln 2-i\sin\ln 2)$

实部: $e^{\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi}\cos\ln 2$, 虚部: $-e^{\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi}\sin\ln 2$, 模:$e^{-\sin 1}$, 幅角: $\cos 1+2n\pi$（n 为正整数）此题为多值函数，可以根据 n 的不同改变其值

$(3)e^{ie^i}=e^{i(\cos 1+i\sin 1)}=e^{-\sin 1+i\cos 1}=e^{-\sin 1}e^{i\cos 1}=e^{-\sin 1}(\cos\cos 1+i\sin\cos 1)$

实部: $e^{-\sin 1}\cos\cos 1$, 虚部: $e^{-\sin 1}\sin\cos 1$, 模: e^{-sin1}, 辐角: $-\ln 2+2m\pi$

(n, m 均为正整数)

这 3 题都是复数的基本性质，难度不大，但应记得辐角会有 $2n\pi$ 的多值性，在书写时应体现出其多值性

3. 欧拉公式与等比级数的妙用 原式 $=\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{n}e^{(2n-1)i\phi}$

$\sum_{i=1}^{n}e^{(2n-1)i\phi}=\frac{e^{i\phi}(1-e^{2ni\phi})}{1-e^{29\phi}}=\frac{e^{i\phi}e^{ni\phi}(e^{-ni\phi}-e^{ni\phi})}{e^{i\phi}(e^{-i\phi}-e^{i\phi})}=e^{ni\phi}\frac{\sin n\phi}{\sin\phi}$

$\operatorname{Re}e^{ni\phi}\frac{\sin n\phi}{\sin\phi}=\cos n\phi\frac{\sin n\phi}{\sin\phi}=\frac{\sin 2n\phi}{2\sin\phi}$

这种方法显然也可以计算 $\sin\phi+\sin 3\phi+\cdots+\sin(2n-1)\phi$ 只需要取原来式子的虚部即可，不难得到该式为

$\sin n\phi\cdot\frac{\sin n\phi}{\sin\phi}=\frac{\sin^2 n\phi}{\sin\phi}$

4. 关于此题，我们需要记住 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}, Rez=x$ 那么 (1) 式为 $x^2+y^2<(1-x)^2x<\frac{1}{2}(1-y^2)$,(2) 题是关于幅角问题，一般有两种方法，代数法：设 $z=x+iy$，则

$$\frac{z-i}{z-2}=\frac{x+i(y-1)}{x-2+iy}=\frac{x^2+y^2-2x-y+i(2-x-2y)}{(x-2)^2+y^2}$$

原式则等价于 $0<\frac{2-x-2y}{x^2+y^2-2x-y}<\tan\frac{\pi}{3}$，因幅角值在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以该式分子分母同为正。化简可得：

$$\begin{cases} y<1-\frac{x}{2} \\ \left[x-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right]^2+\left[y-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]^2>\frac{5}{3} \end{cases}$$

另一种是几何法：此题实际上为 $arg(z-i)-arg(z-2)$ 的范围，我们可以以 i 与 2 两点之间距离为弦长做圆，利用弦所对圆周角相等，分别做出圆周角为 0 度（即直线）和 60 度如图所示的圆的一部分，挖去这个部分，所得即为区域。

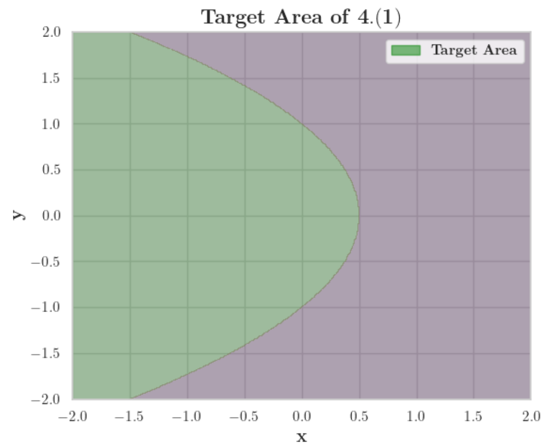


图 1: 作业 01.(4) 第一问

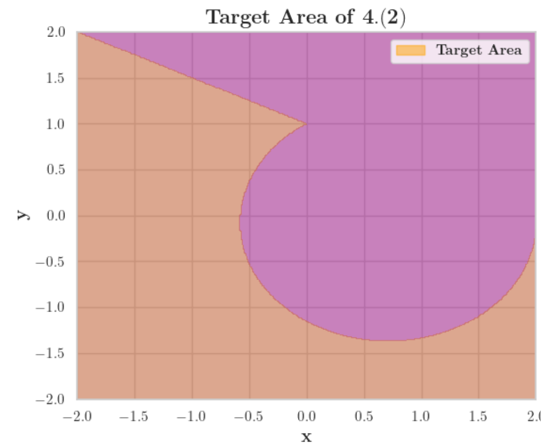


图 2: 作业 01.(4) 第二问

2.2 解析函数

2.2.1 C-R 条件与 Laplace 方程

题目

11 年 a 卷选择题

1. 已知一解析函数的实部为 $u(x,y)=e^{-x}\cos y$，则其虚部可能是

- (A)$e^{x}\sin y$
- (B)$-e^{x}\sin y$
- (C)$e^{-x}\sin y+1$
- (D)$-e^{-x}\sin y+2$

作业 02

2. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)$ 或虚部 $v(x,y)$,求该解析函数。(1)$u(x,y)=\cos x\cosh y$, (2)$v(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$

解析

1. 本题主要考察对 C-R 条件的运用 $u=e^{-x}\sin y$

利用 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$

可得到 $-e^{-x}\sin y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

$e^{-x}\cos y = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

我们可以利用两式的任意一式，对其积分便可得 v，例如

$v = \int \dfrac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \int \dfrac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y = \int -e^{-x}\cos y\,\mathrm{d}y = -e^{-x}\sin y + C$

当然也可以求直接观察得出此处的复函数正是 e^{-z}, 利用欧拉公式不难得出虚部的形式

2. 这题与上题思路完全一致，以下为参考答案

首先计算偏导数

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\cosh x \sin x$

与

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos x \sinh x$。利用柯西-黎曼条件得到，

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\cos x \sinh x$

与

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\cosh y \sin x$。利用 v 的偏导数求原函数，

$dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy$。这里有三种积分方法：

一、凑全微分法，

$dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy = -\cos x \sinh x - \cosh y \sin x$

$= -d(\sin x)\sinh x - d(\sinh y)\sin x = d(-\sin x \sinh x)$

二、积分因子法，首先计算 $f(x, y) = \int \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + C(y)$,

然后通过另一个偏导数确定 $C(y)$,

$\dfrac{d}{dy}(\int \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + C(y)) = \dfrac{\partial v}{\partial y}$,

三、路径无关积分法，可以选择路径计算

$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} \dfrac{\partial v}{\partial y}dy$。

注意选择的路径需要避开奇点。结果，$v = -\sin x \sinh y + c$。

$f(z) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y + ic = \sin z + ic$

现在我们可以介绍一种更加依靠直觉的方法，它的基本思想在于解析函数 f（z）不应该包含 z^*

我们应该记住 $cos(ix) = \cosh(x) \quad i\sin(ix) = \sinh(x)$

那么$\cos x \cosh y = \cos x \cosh iy$

有没有想到一个三角公式 $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

可以类比该式，我们不难猜出此函数应为 $\cos z + c$
通过这样理解，虚部就已经得到了，不需要之后的运算。
以下是（2）的解答，几乎同理
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$
$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$。积分得到 $u = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C = \ln\sqrt{x^2+y^2} + C = \ln|z| + C$，
$f(z) = \ln|z| + C + i\arg z$

2.2.2 初等及多值函数

题目

作业 01

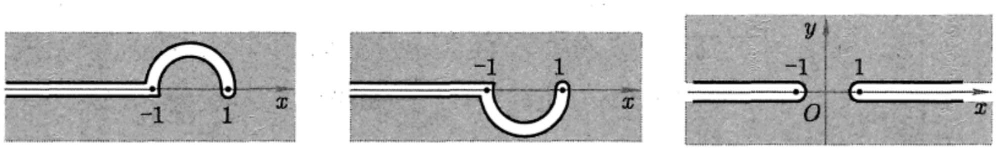
7. 判断下列哪些是多值函数，哪些是单值函数。

$\sin\sqrt{z}$, $\cos\sqrt{z}$, $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$, $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$, $\sin(i\ln z)$

8. 找出下列多值函数的支点，并讨论 z 绕一个及多个支点一周后，函数值的变化。

(1) $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$, (2)$\ln\dfrac{z-a}{z-b}$.

9. 已知 $w=\ln(1-z^2)$，并规定 $w(0)=0$，讨论当割线取法分别如图 (a)、(b)、(c) 所示时，$w(3)$ 的值。



(a) (b) (c)

解析

7. 这里考察两个常用的多值函数，根式函数和对数函数，多值性主要体现在对于幅角的 $2n\pi$ 的变化后，其值会不会发生一定的变换，对于 $\sqrt{z}$ 而言，随着幅角的变换，其值会在正负 $\sqrt{z}$（此处看作根号只能取实值, 可以令 $w=\sqrt{z}$），sin 是奇函数，cos 是欧函数，那么便可知道 $cos\sqrt{z}$，其值与 $\sqrt{z}$ 的正负无关，是单值函数，而 sin 则会变成多值函数。

对于对数函数，$\ln z$ 本身会出现 $2n\pi i$ 的多值性，而三角函数对于加减 $2n\pi$ 的相位，对于其值不会有任何影响，那么此题的最后一式便不是多值函数

下面是此题的参考答案

(1) $\sin\sqrt{z}=\sin\pm w=\pm\sin w$，因此为多值函数

(2) $\cos\sqrt{z}=\cos\pm w=\cos w$，因此为单值函数

(3) $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\dfrac{\pm\sin w}{\pm w}=\dfrac{\sin w}{w}$，因此为单值函数

(4) $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\dfrac{\cos w}{\pm w}=\pm\dfrac{\cos w}{w}$，因此为多值函数

(5) 令 $z=|z|e^{i\theta+2n\pi}$,$i\ln z=i[\ln|z|+i(\theta+2n\pi)]=-(\theta+2n\pi+i\ln|z|)$
因此 $\sin i\ln z=\sin(-\theta+i\ln|z|)$ 为单值函数
8. 以下是此题的参考答案，关于判断支点，往往是比较容易看出来的，首先它必须是一个多值函数，其次支点往往表现出 z-a 的性质。尽管它很容易，但必须要注意零点和无穷远点的判定。
(1) 设 $z-a=r_1e^{i(\theta_1)+2k_1\pi}, z-b=r_2e^{i(\theta_2)+2k_2\pi}$
则 $w=\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}=\sqrt[3]{r_1r_2}e^{\frac{i}{3}(\theta_1+\theta_2+2k\pi)}$
a, b 点显然为支点，绕 a, b 支点一周函数值变化 $\sqrt[3]{r_1r_2}e^{2i\pi/3}$，下证 ∞ 点处也为支点
令 $z=\dfrac{1}{t}$，则 $w=\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}=\sqrt[3]{\dfrac{(1-at)(1-bt)}{t^2}}$
因绕 0 点旋转，因此 $\arg(1-at),\arg(1-bt)$ 均不变，而 t^2 变化 4，因此 w 变化了 $\sqrt[3]{r_1r_2}e^{4i\pi/3}$，因此 ∞ 处也为支点。(2) 设 $z-a=r_1e^{i(\theta_1)+2k_1\pi}, z-b=r_2e^{i(\theta_2)+2k_2\pi}$
则 $w=\ln\dfrac{z-a}{z-b}=\ln\dfrac{r_1}{r_2}+i[\theta_1+\theta_2+(2k_1-2k_2)\pi]$
因此 a, b 点均为支点，绕一个点旋转 1 周变化 2，绕两个点旋转一周不变
考虑 ∞ 点，令 $z=\dfrac{1}{t}$
$w=\ln\dfrac{1-at}{1-bt}$，当 $t=0$ 时，$\arg(1-at),\arg(1-bt)$ 均不变，因此 ∞ 处不是支点
9.(a) $w=\ln(1-z)(1+z)=\ln|(1-z)(1+z)|+i[\arg(1+z)+\arg(1-z)]$ 当 $z=0$ 时 $\arg(1+z)+\arg(1-z)=0$ 不妨设 $\arg(1+z)=0,\arg(1-z)=0$ 当从下半面绕的时候，由图可知，$\arg(1+z)=0,\arg(1-z)=\pi$ 因此 $w(3)=3\ln 2+i\pi$ (b) 从上半面绕时，$\arg(1+z)=0,\arg(1-z)=-\pi$ 因此 $w(3)=3\ln 2-i\pi$ (c) 若从下岸绕则同 (a)，若从上岸绕则同 (b)，因此 $w(3)=3\ln 2\pm i\pi$

2.3 复变积分

题目

作业 *05* 3. 证明：$|\Gamma(x+yi)|\le\Gamma(x)$，其中 $x>1$，且 y 是任意实数。

15 年 a 卷第二题

2. 已知变上限积分 $\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta(e^{\zeta}+a\cos\zeta)}{\zeta}$ 是 z 的单值函数，则

- (A) $a=1$
- (B) $a=-1$
- (C) $a=0$
- (D) a 可以是任意常数

作业 03

2. 计算积分：

(1) $\oint_{|z|=R}|dz|$,

(2) $\oint_{|z|=R}\frac{e^{iz}}{z^3}dz$,

(3) $\oint_{|z|=R}\frac{|z|e^{z}}{z^2}dz$,

(4) $\oint_{|z|=R}\ln z dz$, 割线为正实轴，在割线上 $\ln 1=0$

3. 计算 $\oint_{|z|=b}\frac{\cos z}{(z-a)^2}|dz|$，分别考虑 $b>a$ 和 $b<a$ 的情况。

解析

1. 记住积分路径不仅与端点有关，还与积分路径有关，如果是单值函数，就等于路径无关，既如此，可以做一个与积分围道包围奇点，其围道积分（C1）为 0。(例：我们做一个任意的积分围道从 z_0 到 z（C2）与路径无关说明 C1+C2 与 C2 的值一样，那么一定是 C1 的积分为 0）根据柯西积分公式，积分为 0 意味着 $e^0+a\cos 0=0$ 即 a=-1

2 为参考答案

(1) 因 $|z|=R$ 令 $z=Re^{i\theta}$，则 $dz=iRe^{i\theta}d\theta$

$|dz|=|iRe^{i(\theta+2k\pi)}|d\theta=Rd\theta=-ie^{-i\theta}dz$

$\oint_{|z|=R}|dz|=\oint_{|z|=R}-ie^{-i\theta}dz=\int_0^{2\pi}Rd\theta=2\pi R$

(2) 令 $f(z)=e^{iz}$，由柯西积分公式推论可知：

$\oint_{|z|=R}\frac{e^{iz}}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(z)|_{z=0}=-\pi i$

(3) 由积分曲线可知 $|z|=R$，令 $f(z)=e^z$

$$\oint_{|z|=R}\frac{|z|e^z}{z^2}dz=\oint_{|z|=R}\frac{Rf(z)}{z^2}dz=R\frac{2\pi i}{1!}f'(z)|_{z=0}=2\pi iR$$

（注：不要忘记我们在圆上做这个积分，|z| 本身是不变的，就是 R）

(4) 因 $\ln z$ 是一个多值函数，$\ln z=\ln|z|+i(\theta+2n\pi)$

当 $z=1$ 时，在割线上岸 $i(\theta+2n\pi)|_{\theta=0}=0$，因此 $n=0$

因此我们可以按照 (1) 中将其写为 $dz=iRe^{i\theta}d\theta$，且 $\ln z=\ln R+i\theta$

$$\oint_{|z|=R}\ln z dz=\int_0^{2\pi}(\ln R+i\theta)iRe^{i\theta}d\theta=2\pi iR$$

3 为参考答案 $|dz|=\frac{bdz}{iz}$ $\oint_{|z|=b}\frac{b\cos z}{iz(z-a)^2}dz$

首先考虑 $b<a$ 的情况，此时仅有 $z=0$ 一个支点

$$\oint_{|z|=b}\frac{b\cos z}{iz(z-a)^2}dz$$

$$=\frac{b}{i}\oint_{|z|=b}\frac{\cos z}{z(z-a)^2}dz=\frac{b}{i}\oint_{|z|=b}\frac{f(z)}{z}dz=\frac{b}{i}2\pi if(z)|_{z=0}=\frac{2b\pi}{a^2}$$

其中 $f(z)=\frac{\cos z}{(z-a)^2}$

当 $b>a$ 时，此时有 $z=0$ 和 $z=a$ 两个奇点，我们可以围绕两个奇点作两个小圆，分别记为 C_1,C_2。因此由 Cauchy 定理可知

$$\oint_{|z|=b}=\oint_{C_1}+\oint_{C_2},$$

$$\oint_{|z|=b}\frac{b\cos z}{iz(z-a)^2}dz=\frac{b}{i}\left(\oint_{C_1}\frac{f_1(z)}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{f_2(z)}{(z-a)^2}dz\right)=\left(\frac{2\pi i}{a^2}+\left(\frac{\cos z}{z}\right)'|_{z=a}2\pi i\right)\frac{b}{i}$$

$$=\frac{2\pi b(1-a\sin a-\cos a)}{a^2}$$

其中 $f_1(z)=\frac{\cos z}{(z-a)^2},f_2(z)=\frac{\cos z}{z}$

2.4 Taylor and Laurent 级数及展开

2.4.1 Taylor and Laurent 级数

题目

作业 *04*

1. 给出下列级数的收敛区域

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} z^{2n}$,

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$,

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^{n}$,

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^{n}} z^{n}$.

2. 将下列函数在指定点展开为泰勒级数，并给出收敛半径

(1) $\sin z$ 在$z = n\pi$,

(2) $\frac{1}{1+z+z^2}$ 在$z = 0$,

(3) $\frac{1}{z^2}$ 在$z = -1$,

(4) $\ln \frac{1+z}{1-z}$ 在$z \to \infty$.

解析

为了解决 1 题，先复习一些基本知识

- 等比级数的判别法。级数的形式类似等比数列（只不过是复数）:

$$f(q) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

  要求其模 $|q|$ 小于 1

- 比值法求收敛半径

$$R = \frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$$

- 根值法求收敛半径

$$R = \frac{1}{\rho} = \lim n \to \infty |\frac{1}{c_n}|^{\frac{1}{n}}$$

（1）实际上为 $\frac{z^2}{4}$ 的等比级数，要求其模小于 1，那么就会得到，收敛区域为 $|z| < 2$。

（2）为缺项级数，可利用根值法，幂级数系数 c_k 当 $k = n!$ 时为 1, 其余为 0。那么 $\lim_{k\to\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty} |1|^{\frac{1}{n!}} = 1$, 即为收敛半径, 即 $z < 1$

(3）仍为等比级数，那么要求为 $|z|<|1+z|$, 平方后可以求得 $Rez>-\frac{1}{2}$

(4) 此题是标准的幂级数收敛半径求法,半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{c_n}{c_{n+1}}|$,带入上式得 $\frac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\;n^n}{n\;(n+1)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}$, 则 $z<e$

2. 我们不妨回忆一下常用的泰勒展开式

(1) 几何级数（等比级数）

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\quad |z|<1.$$

(1.5) 对几何级数求导

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,\quad |z|<1.$$

(2) 指数函数和三角函数的展开级数

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<\infty.$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},\quad |z|<\infty.$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},\quad |z|<\infty.$$

(3) 多值函数中，对数函数和任意幂次函数的展开级数

$$\ln(1+z)=\ln(1+z)\Big|_{z=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n,\quad |z|<1.$$

记住这些之后,（1）题对我们而言就不是什么问题了，我们只需令 $t=z-n\pi$ 换成 $z=t+n\pi$，对 t 做泰勒展开。同时别忘了 sint 要变成 $(-1)^n\sin z$（因为我们最后结果为 sinz=XXX）我们可以得到答案是当 n 为偶数时，$sinz=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(z-n\pi)^{2m+1}$；当 n 为奇数时，$sinz=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}(z-n\pi)^{2m+1}$。收敛半径，全复平面

(2）式显然不是我们熟悉的类型，让我们考虑如何化简（2）式。如果分母只有 z 的一次（比

如 z-c）那就变成等比级数的求和，so easy。可现在分母为二次，这也简单，我们利用高数的技巧。令分母为 0 则解为 $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 我们不妨记作 z_1 和 z_2，那么原式就可以变成 $\dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$，拆成两个分母为 z_1 和 z_2 式子，然后利用等比级数的知识，此题就解决了。答案为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}z^n,\quad |z|<1$(当然答案永远是最简形式，为了化成答案的样子，我们只需知道两点 $z_{1,2}=e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$,$sinz=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ 有了这个知识，化简它就不难了）

（3）不管怎样，令 $t=z+1$，做零点展开总是容易的。原式变成了 $(\dfrac{1}{t-1})^2$, 我们知道 $\dfrac{1}{t-1}=-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}t^n$，对两边求导，可得 $-(\dfrac{1}{t-1})^2=-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}nt^{n-1}$,（注意此操作只在收敛半径内才可以），把负号移到右边，将 t 变成 z。即可得答案为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n$ 收敛半径 z = 1

（4）既然是无穷远点那么令 $z=\dfrac{1}{t}$, 原式为 $ln\dfrac{t+1}{t-1}$，利用前文的多值函数公式即可得到答案（注意多值函数当 $t=ln1-\ln -1=-i\pi$），答案为 $-i\pi+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{1-2n}}{2n-1}$ 收敛半径 z = 1

2.4.2 奇点问题

题目

作业 *04*

4. 找出函数的奇点，并判断其性质。如果是极点，给出其阶数。（注意 ∞ 点）

(1)$\dfrac{\cos z}{z^2}$,

(2)$\dfrac{z}{\sin z}$,

(3)$\dfrac{1}{(z-1)\ln z}$,

(4)$\dfrac{1}{\sin z^2}$.

解析

如何判定为奇点，一般而言就是分母为 0 的点，比如（1）题 z=0 为二阶奇点, 但如果分子同时为 0，则要好好考虑一下，例如（2）题高数知识告诉我们 z=0 为 1，那么它就是可取奇点，同时也要注意多值函数，（3）题的 lnz 在不同分支下对于 z=1 的奇异性不同，无穷远点关于幂显示可以通过直接做代换 $z=\dfrac{1}{t}$ 来检查 t 的奇异性来确定，对于三角函数，例如 cosz，z 趋于无穷大是有无穷多个零点，一般属于本性奇点，但对于 $\dfrac{1}{cosz}$, 无穷多的零点对应无穷多

奇点，属于非孤立奇点。另外关于奇点的阶数，可以通过乘 $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n$n 最少取多少为有限量来判定。以下是习题解答

(1) $z=0$，孤立、二阶极点；$z\to\infty$，本性奇点。

(2) $z=0$，孤立、可去奇点；$z=n\pi(n\neq 0)$，一阶极点；$z\to\infty$，非孤立奇点。

(3) $\dfrac{1}{(z-1)\ln z}$ 是多值函数 $\ln(z)|_{z=1}=2n\pi i$。对于 $n=0$ 的单值函数，$z=1$，二阶极点；对于 $n\neq 0$ 的单值函数，$z=1$，一阶极点。

(4) 满足 $z^2=n\pi, z=0,\pm\sqrt{n\pi},\pm i\sqrt{n\pi}$。除了 0 是二阶极点，其他一阶；$\infty$ 也是一个非孤立奇点

2.5 留数定理

2.5.1 求留数以及在积分中的应用

题目

作业 05

1. 计算下列积分

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=n}\tan\pi z\,dz,\quad n$ 为正整数,

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2},\quad a>b>0,$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\quad a>0,\, b>0,$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{(x+a)^2+b^2}\,dx,\quad a>0,\, b>0,\, m>0,$

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}\,dx,\quad a>0,\, m>0.$

解析

记住公式，开始计算

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}f(a_k)$$

1(1) $\displaystyle\oint_{|z|=n}\tan(\pi z)\,dz$ 在 $z=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\ldots,\pm\frac{2n-1}{2}$ 处有奇点,共有 $2n$ 个。其中 $\mathrm{Res}[\tan(\pi z)]=\lim\limits_{z\to\frac{2n-1}{2}}\tan(\pi z)$ 洛必达法则，原式为 $-\dfrac{1}{\pi}$，值与 n 无关，说明 $2n$ 点的留数都相同，那么原

$= 2n \times \frac{-1}{\pi} \times 2\pi i = -4ni$

2 (2) 乍一看, 此题自变量怎么不是 z, 是不是提醒我们要做变换了? 那就开始做吧, 首先把实值函数变到复平面去令 $z = e^(ix)$, 那么积分就变成 $\oint \frac{dz}{iz(a+b\frac{(z+z^{-1})}{2})^2} = \oint \frac{4z}{ib^2(\frac{2az}{b}+z^2+1)^2}$, 解分母的方程（$\frac{2az}{b}+z^2+1$）找到零点，也就是被积函数的奇点，为 $z = \frac{a}{b} \pm \sqrt{(\frac{a}{b})^2-1}$ 不难验证，两个解的乘积为 1，说明一个在圆内，一个在圆外，取圆内解 (即为正号下的解)，利用留数定理（留数为 $\frac{a}{i(a^2-b^2)^{3/2}}$），可以得到原式为 $\frac{2a\pi}{(a^2-b^2)^{3/2}}$

2（3）存在奇点 $z = a\, z = b\, z = ia\, z = ib$。由于被积函数在 $z \longrightarrow \infty$ 为 0。可以选择绕上半平面的围道积分（这符合留数定理的积分沿逆时针）也就是说包含的奇点有 z=ia，z=ib，$Resf(ia) = \frac{1}{2ia(b^2-a^2)}$,$Resf(ib) = \frac{1}{2ib(a^2-b^2)}$。两式相加并乘以 $2\pi i$, 即可得原式为 $\frac{\pi}{ab(a+b)}$

2(4) 出现了 cos，那我们就按照 2（2）的代换去做可以吗？看一下积分区间吧，（2）之所以用那种代换完全是因为他能构造出一个闭合的积分围道，但（4）如果代换之后，那就会变成四不像了。况且（2）的代换是有条件的，我们要求 x 和 $x + 2n\pi$ 值是一致的，（4）可没这么说。别忘了欧拉公式，让我们先把 cosmx 换成 e^{imz}，然后取实部即可。由于 $n > 0$ 根据 Jordan 引理，我们应该取上平面（这下不能像（3）那么随意了），我们有奇点 $x = -a + ib$，带入式中求其留数，$Resf(-a+ib) = \frac{e^{-ima-mb}}{2ib}$ 那么值为 $\frac{\pi e^{-ima-mb}}{b}$, 将 e^{-ima} 变成 $\cos ma$ 即可得到答案

2（5）和（4）一样的套路，但我们要看到存在奇点在实轴上，怎么办，教材上给出的解法是可以做圆弧绕过这个奇点，至于绕到方向是随意的。当然我们一般选择绕上部积分（当然也可以绕下部，无非是个正负号的问题，但这意味着你的积分区间有奇点，你要多考虑一个奇点）。那么它的值为 $\int_{C_\delta} \frac{e^{imx}}{x(x^2+a^2)}\, dx = -\frac{i\pi}{a^2}$, 奇点只有一个了，留数为 $Resf(ia) = -\frac{e^{-ma}}{x(2a^2)}$, 注意，小圆弧的积分属于 $\oint_C f(z)\, dz$ 的积分，当你计算主值积分时需要加个符号才能与 $2\pi i Resf(z)$ 相加，可得结果是 $\frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-\pi a}\right)$

(注：对 Jordan 引理的朴素理解：Jordan 引理本质上是要求所选取的大圆弧积分为零，通过这种方法将实轴的积分转化为复平面的围道积分，如何做的呢，就是通过指数压低，引入 e^{-ipz}，要求 $pImz < 0$，我们可以看到，这实际上要求 p 与 Imz 是反号的，即如果 P>0, 就要求 Imz<0, 选取下平面，如果 P<0, 选取上平面）

2.5.2 解析延拓

题目

作业 *05*

2. 证明：$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1}(z-i)^n$ 与 $f_2(z)=\int_0^{\infty} e^{-zt}\,dt$ 互为解析延拓。

解析

2.$f_1(z)$ 好像一个等比级数,.$f_1(z)$ 的积分也不是很难做,那我们不妨做一下它。$\sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1}(z-i)^n=-i\sum_{n=0}^{\infty}(iz+1)^n=\frac{1}{z}$ $\int_0^{\infty} e^{-zt}\,dt=-\frac{e^{-zt}}{z}|_0^{\infty}=\frac{1}{z}$ 发现两个结果竟然都等于 $\frac{1}{z}$. 好了，征毕。可以认为 $f_1(z)$ 从原来的 $|z-i|<1$ 已经延拓到了 $Re(z)>0$。

2.6 Γ 函数及其它特殊基本函数

2.6.1 Γ 函数家族

题目

作业 *06*

1. 证明：$\int_0^{\infty} e^{-r}\ln r\,dr=-\gamma$。

2. PolyGamma 函数的定义是：$\psi^{(m)}(z)=\frac{d^m}{dz^m}\psi(z)$，其中 $m=0,1,2,\ldots$。

请证明递推关系：$\psi^{(m)}(z+1)=\psi^{(m)}(z)+(-1)^m\frac{m!}{z^{m+1}}$。(10 分)

3. 证明：$B(a,b)B(a+b,c)=B(b,c)B(a,b+c)$。

4. 计算：$\int_0^1(1-x^a)^b\,dx$，并证明：$\int_{-1}^1(1-x^2)^n\,dx=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}$，$n=0,1,2,\ldots$。

解析

1. 此题考察$\Psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\ln t\,dt}{\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt}$

将 z=1 代入，分母为 $\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt$ 可以得出此积分为 1，同时分子正是原式的左端，而我们知道 $\Psi(1)=-\gamma$, 即可证得。

需要补充的是，此题的解析有点本末倒置的意味，此题最重要的问题是，你应该如何想到要用 Gamma 函数，事实上，我们破题的点在右端的欧拉常数，当看到这个时，就要想到 Gamma

函数了。作为物理系的学生，在之后的物理中会看到 Gamma 函数与欧拉常数之间的关系
2. 主要考察 Gamma 函数的 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ 有了这个,我们不难推的 $\Psi(z+1) = \Psi(z) + \dfrac{1}{z}$接下来就要看高数的功底了，对两式分别求 m 次导，即可证得。
3. 主要考察对 B 函数的定义

$$B(a,b)B(a+b,c) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b)\Gamma(a+b+c)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}$$

$$B(b,c)B(a,b+c) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(a)\Gamma(b+c)}{\Gamma(b+c)\Gamma(a+b+c)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}$$

两式相等，即可证得。
4. 看到积分区间为 0.1，努力向 B 函数靠拢，令 $t = x^a$,$dx = \dfrac{1}{a}t^(\dfrac{1}{a} - 1)dt$
那么 $\displaystyle\int_0^1 (1-x^a)^b dx = \frac{1}{a}\int_0^1 (1-t)^{(b+1)-1} t^{\frac{1}{a}-1} dt = \frac{1}{a}B\left(\frac{1}{a}, b+1\right)$
注意到偶函数的性质，最后将 $a = 2, b = n$ 带入，有:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = B\left(\frac{1}{2}, n+1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)} = 2^{2n+1}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)}$$
$$= \frac{2(2n)!!(2n)!!}{(2n+1)!} = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

2.6.2 δ 函数

题目

作业 06

5. 计算:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-2)e^{-x^2}\,dx$; (2) $\displaystyle\int_{-5}^{0} \delta'(x+1)\cos x\,dx$.

6. 计算:

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \delta(\sin x)e^{-x}\,dx$; (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\delta(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy$.

解析

δ 函数的知识并不算难，记住一些 δ 函数的操作即可，比如 5（1），将 x=2，直接作用到被积函数中，即可得到答案为 e^{-4},5（2）只需要多一步分部积分，将 δ 函数头上的导数去掉，具体操作为乘上一个符号并对被积函数求其原函数，那么就可以得到值为（-sin1）。(要注意函

数区间是否包含 δ 函数取值的点，否则一切积分都为 0）

6. 注意性质 (1) 由 δ 函数的性质可知：如果 $\delta(x)=0$ 的实根全是单根，

$\delta[\phi(x)] = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|\phi'(x_k)|}$

对应于 6（1）$\delta(\sin x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\delta(x-n\pi)}{|\cos n\pi|}$

$$\int_{-1}^{\infty}\delta(\sin x)e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x}\Big|_{x=n\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{1}{1-e^{-\pi}}$$

对应于 6(2)，只需考虑变换为极坐标，即 $x^2+y^2=r^2$, 那么

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r^2\cos^2\theta\delta(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2+1}dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{x^2\delta(r^2-1)}{2(r^2+1)}d(r^2)d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{4}d\theta = \frac{\pi}{4}$

2.7 积分变换

2.7.1 Fourier

题目

15 年 a 卷

5. 上半平面的 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 在对 x 作 Fourier 变换 $\mathscr{F}[u(x,y)] = U(k,y)$ 后成为

(A) $\frac{\partial^2 U}{\partial k^2}+k^2U=0,$

(B) $\frac{\partial^2 U}{\partial k^2}-k^2U=0,$

(C) $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+k^2U=0,$

(D) $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-k^2U=0.$

16 年 a 卷

6.$f(x)$ 的 Fourier 变换为 $F(k)=(\sqrt{2\pi})^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ikx}\,dx$，设 $g(x)=\int_{-\infty}^{x}f(\xi)\,d\xi$ 的 Fourier 变换为 $G(k)$，其中 $f(x)$ 使得 $g(+\infty)=0$，则

$(A)\ G(k)=ikF(k)$

$(B)\ G(k)=\dfrac{F(k)}{ik}$

$(C)\ G(k)=-ikF(k)$

$(D)\ G(k)=-\dfrac{F(k)}{ik}$

作业 *07*

2. 计算下列函数的傅里叶变换。

(1)$\dfrac{x}{x^2+1}$,

(2)$e^{-|x|}$.

3. 已知 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2+a^2}\,d\xi=\frac{1}{x^2+b^2}$，其中 $0<a<b$，求函数 $f(x)$。

解析

5.Fourier 变换可以说是物理中最常见的变换，$\mathcal{F}\{f(t)\}=F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$

此处所用到的性质为 $\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\}=(i\omega)^nF(\omega)$ 当 n=2，可以看出 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 会变为 $-k^2U$，而由于变换不涉及到 y，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 保持原本形式。

6. 此处所用到的性质是，$\mathcal{F}\left\{\displaystyle\int^x f(\xi)\,d\xi\right\}=\dfrac{1}{i\omega}F(\omega)$

似乎答案已经指向 B（将 ω 变成 k），事实也确实如此，那么有些人要问了，$g(+\infty)=0$, 这个条件有用吗？首先作为傅里叶变换的函数必须要满足平方可积性，这要求函数趋近无穷时必为零，同时上述性质的推导也要求为 0.

$\mathcal{F}\left\{\displaystyle\int^x f(\xi)\,d\xi\right\}$ 设 $\displaystyle\int^x f(\xi)\,d\xi=g(x)$，则 $g'(x)=f(x)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}g'(x)e^{-ikx}\,dx=\frac{g(x)e^{-ikx}}{-ik}\bigg|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{ik}\int_{-\infty}^{\infty}g'(x)e^{-ikx}\,dx=\frac{\mathcal{F}\left\{\int^x f(\xi)\,d\xi\right\}}{ik}$$

此处展示其推导，可以发现只有 g（x）趋于无穷为 0，才会由此性质。

作业 07：此处主要靠察的是用留数定理等方法去计算傅里叶积分，记住 jordan 引理的条件，看选择上围道还是下围道，主要积分方向逆时针为正，我们就不会因为正负号而白白丢分了，以下是此题解答

$$(1)\mathcal{F}\left\{\frac{x}{x^2+1}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}e^{-i\omega x}dx$$

当 $\omega < 0$ 时，我们可以构造上半平面的半圆形闭合围道，使用 Jordan 引理，进而得到积分结果：
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} e^{-i\omega x} dx = i\pi e^{\omega}$
而当 $\omega > 0$ 时，此时如果仍构造上半平面的积分区域，则 Jordan 引理不适用，
因此我们需要考虑下半平面的围道积分
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} e^{-i\omega x} dx = -i\pi e^{-\omega}$
$\mathcal{F}\left\{\frac{x}{x^2+1}\right\} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sign}(\omega) e^{-|\omega|}$
(2)$\mathcal{F}\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\omega)x} dx\right)$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-\omega i} + \frac{1}{1+\omega i}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}$
3. 此题是考察卷积公式，我们可以先研究一下 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2+a^2} d\xi$ 显然可以写作 $f(\xi)$ 和 $\frac{1}{x^2+a^2}$ 的卷积，为了降低难度 $\frac{1}{x^2+a^2}$ 和 $\frac{1}{x^2+b^2}$ 的形式十分相似，我们可以先做积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+b^2} e^{-i\omega x}\, dx$，此积分有奇点 ib 和-ib，利用 2.（1）的计算，选择合适围道，我们可以得到 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+b^2} e^{-i\omega x}\, dx = \frac{\pi}{b} e^{-b|\omega|}$，关于 $\frac{1}{x^2+a^2}$ 的傅里叶变换，我们只需要把前式的 b 换成 a 即可，利用卷积公式可以得出
$\mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = \frac{a}{b} e^{(a-b)|\omega|}$
我们需要反演回去吗?，认真观察此式，除了不必要的常数，它的信息与 $\frac{1}{x^2+b^2}$ 十分相似，此处我主要是指 $e^{(a-b)|\omega|}$ 项，可以猜测它是 $\frac{1}{x^2+(a-b)^2}$ 形式，剩下的常数补齐，那么答案应该是
$f(x) = \frac{a(b-a)}{\pi b[x^2+(b-a)^2]}$

2.7.2 Laplace

题目

作业 *07*

4. 给出下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $\sin 2t \cos 3t$;

(2)$e^{-\lambda t} \sin^2 t$

5. 给出下列函数的拉普拉斯反演：

(1)$\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)(p^2+\nu^2)}, \quad \omega \neq \nu$;

(2)$\dfrac{p^2}{(p^2+\omega^2)(p^2+\nu^2)}, \quad \omega \neq \nu$

6. 若 $y(t) = a \sin t - 2\int_0^t y(\tau) \cos(t-\tau)\, d\tau$，求 $y(t)$。

解析 4. 相比于傅里叶，拉普拉斯变换的在物理上应用并不高，考察的点主要在几个常见的变换下例如

当然还有教材里的一堆性质，这里就不赘述了。

$f(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
t^m	$\dfrac{m!}{p^{m+1}}$

表 1: Laplace Transforms

(1) 利用三角函数公式，可得 $\sin(-\omega t) + \sin(5\omega t) = 2\sin(2\omega t)\cos(3\omega t)$

根据公式反演则为 $\dfrac{5}{2(p^2+25)} - \dfrac{1}{2(p^2+1)} = \dfrac{2(p^2-5)}{(p^2+25)(p^2+1)}$

(2) 看到存在 $e^(-\lambda t$, 毫无疑问，p 应该全部换成 $p+\lambda$, 同时别忘了 $sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$, 跟据上表，不难得出

原式 $= \dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{p+\lambda} - \dfrac{2}{p^2+4}] = \dfrac{2}{(p+\lambda)^3 + 4(p+\lambda)}$

6. 与第四题一致，第五题仍然把复杂的式子拆成上表或性质中的一些形式，注意，拉普拉斯变换考察很少直接用普遍反演公式去做，现在我们试着把两式拆成熟悉的形式

$\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)(p^2+\nu^2)} = \dfrac{1}{\nu^2-\omega^2}(\dfrac{1}{p^2+\omega^2} - \dfrac{1}{p^2+\nu^2})$

此处拆解对于我们而言简直是小儿科，我们可以看到第一项反演是有关于 $\dfrac{sin\omega t}{\omega}$ 第二项则是把 ω 换成 ν, 好了，之后合并一下，可以得到 $\dfrac{-\omega\sin(t\nu) + \nu\sin(t\omega)}{\nu\omega(\nu^2-\omega^2)}$

(2) 题操作也是同理，这里直接给出过程

$\frac{p^2}{(p^2+\omega^2)(p^2+\nu^2)} = \frac{1}{\omega^2-\nu^2}(\frac{\omega^2}{p^2+\omega^2} - \frac{\nu^2}{p^2+\nu^2})$

反演后为 $\frac{\omega}{\omega^2-\nu^2}\sin\omega t + \frac{\nu}{\nu^2-\omega^2}\sin\omega t = \frac{\nu\sin(t\nu)-\omega\sin(t\omega)}{\nu^2-\omega^2}$

3 Part.II：数学物理方程

3.1 正交曲面坐标系

题目

作业 08

2. 考虑椭圆柱坐标系 (u,v,z)，在笛卡尔坐标系下，其三个坐标曲面分别为：

共焦椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2\cosh^2 u} + \frac{y^2}{a^2\sinh^2 u} = 1$, 共焦双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2\cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2\sin^2 v} = 1$, 和平面：$z=z$。

这也给出了相应的坐标变换关系。

(1) 计算椭圆柱坐标系下的线元，并验证这是一个正交曲面坐标系。

(2) 给出椭圆柱坐标系下拉普拉斯算符的表达式。

解析

（1）令 $x=a\cosh u\cos v, y=a\sinh u\sin v, z=z$ 则

$dx = a\cos v\sinh u du - a\sin v\cosh u dv$

$dy = a\cos v\sinh u du + a\sin v\cosh u dv$

$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = a^2(\sinh^2 u\cos^2 v+\cosh^2 u\sin^2 v)du^2+a^2(\sinh^2 u\cos^2 v+\cosh^2 u\sin^2 v)dv^2+dz^2$

由于度规为对角阵，没有交叉项，因此互相正交

（2）$h_1=h_2=a\sqrt{\sinh^2 u\cos^2 v+\cosh^2 u\sin^2 v}, h_3=1$

因此 $\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{a(\sinh^2 u\cos^2 v+\cosh^2 u\sin^2 v)}(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

3.2 数学物理方程与定解条件

题目

作业 08

4. 长度为 l 的均匀杆，其左端 $x=0$ 处温度恒为零，右端 $x=l$ 处持续有恒定的热流 q 进入杆内。已知初始时刻的温度分布为 $x(L-x)$，请写出相应的定解问题（包括微分方程、初始条件、边界条件）。

11 年 a 卷:

6. 弹性均匀细杆，在纵振动过程中，其一端受到已知拉力 $F(t)$ 的作用，则 $F(t)$ 在定解问题中表现为

(A) 方程中的非齐次项

(B) 第一类边界条件

(C) 第二类边界条件

(D) 第三类边界条件

15 年 a 卷

7. 长为 l 的均匀导热细杆, 两端和侧面均绝热, 杆上有热源, 热传导方程为 $\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_0\sin\lambda x$，其中 f_0 和 λ 为常数，下述哪个条件可以使杆上的温度分布在长时间后达到稳定?

(A) $\lambda l=\pi$

(B) $\lambda l=2\pi$

(C) $\lambda l=\frac{\pi}{2}$

(D) $\lambda l=\frac{3\pi}{2}$

解析

作业 08.(4)

方程:$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,(0<x<l)$

初始条件:$u(x,t)|_{t=0}=x(L-x)$

边界条件:$u(x,t)|_{x=0}=0,\quad k\partial_x u(x,t)|_{x=l}=q$

该边界条件即为第三类边界条件 (柯西，即边界的函数值与法向导数值混合)。该题有两点值得注意:

1.q 的符号。注意是热流流入杆内，所以为 + 号。

2. 将 $\partial_x u(x,t)$ 与 q 联系起来的物理量为 k, 即热导率。记住此处的物理含义，究其本源，在推导热传导方程时使用了有 Fourier 定律：

$$q_x = -k\partial_x u(x,t)$$

11 年 a 卷

该题答案为 A，解析可见手写版试卷题目解析。

15 年 a 卷

该题主要是考察物理含义。达到稳定的条件要求为 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$，也就是剩下了一个泊松方程。又因为杆绝热，则内部产生的净热应该为 0。考察方程右端的物理含义，即为单位时间产热量，对整个杆积分应当为 0。遂解得答案。

3.3 行波法与分离变量法

3.3.1 行波法

题目

作业 09

1. 对于密度为 ρ 的无限长弦，初始时刻静止，$t=0$ 时在 $x=x_0$ 点受到冲量为 I 的冲击。请利用行波法求解弦的振动。

解析

波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

c 是波速、T 张力、密度 ρ ，$a=\sqrt{T/\rho}$。

初始条件：

$$u(x,0)=0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{I}{\rho}\delta(x-x_0)$$

行波解:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\frac{I}{\rho}\delta(x-x_0) = \frac{I}{2a\rho}[\eta(x+at-x_0)-\eta(x-at-x_0)]$$

由于初始条件 $u(x,0)=0$，我们有：

$$f(x)+g(x)=0 \Rightarrow g(x) = -f(x)$$

因此，

$$u(x,t)=f(x-ct)-f(x+ct)$$

接下来，我们需要考虑冲击条件。冲击导致的初始速度分布为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{I}{\rho}\delta(x-x_0)$$

这意味着：

$$-cf'(x-ct)-cf'(x+ct)=\frac{I}{\rho}\delta(x-x_0)\quad \text{在 } t=0$$

积分上式关于 x，得到：

$$-2cf(x)=\frac{I}{\rho}H(x-x_0)+C$$

其中 $H(x-x_0)$ 是阶跃函数，C 是积分常数。由于 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 之外必须是平滑的，我们可以得出 $C=0$。因此，我们有：

$$f(x)=-\frac{I}{2c\rho}H(x-x_0)$$

所以，弦的位移表达式为：

$$u(x,t)=-\frac{I}{2c\rho}\left[H(x-ct-x_0)-H(x+ct-x_0)\right]$$

3.3.2 分离变量法 (基础)

题目

作业 09

3. 考虑一个矩形散热片，边长分别为 a 和 b，它的一条边 $y=b$ 接触温度恒为 T 的高温热源，另外三条边 $y=0,x=0,x=a$ 接触温度恒为 0 的冷却介质。请求解散热片在稳态下的温度分布。(15 分)

解析

稳态问题满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 T=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

在这个问题中，我们有以下边界条件：

$$T(x,0)=0,\quad 0\le x\le a$$
$$T(0,y)=0,\quad 0\le y\le b$$
$$T(a,y)=0,\quad 0\le y\le b$$
$$T(x,b)=T,\quad 0\le x\le a$$

使用分离变量法：$T(x,y)=X(x)Y(y)$ 代入拉普拉斯方程，我们得到：

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

两边同时除以 $X(x)Y(y)$ 得到：

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=0$$

设；

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2,\quad \frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda^2$$

得到了两个常微分方程：

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0$$

$$Y''(y)-\lambda^2Y(y)=0$$

考虑边界条件 $T(x,0)=T(0,y)=T(a,y)=0$，可以得到 $X(0)=X(a)=0$ 和 $Y(0)=0$。因此 $X(x)$ 的解形式为：

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right),\lambda_n^2=\frac{n^2\pi^2}{a^2},n=1,2,3,\cdots$$

对于 $Y(y)$ 的方程，

$$Y''(y)-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2Y(y)=0$$

解为：

$$Y_n(y)=A_n\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)+B_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

由于 $Y(0)=0$，我们有 $B_n=0$。因此，$Y_n(y)$ 的解简化为：

$$Y_n(y)=A_n\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

因此一般解为：

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

带入边界条件 $T(x,b)=T$，可得

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$$

积分可得：

$$A_n\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\int_0^a\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx=\int_0^a T\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx$$

$$A_n\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\frac{a}{2}=T\frac{a}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

所以 $A_{2k}=0, A_{2k+1}=\dfrac{4T}{(2k+1)\pi\sinh\frac{(2k+1)\pi b}{a}}$

温度分布为：

$$T(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4T}{(2k+1)\pi\sinh\left(\frac{(2k+1)\pi b}{a}\right)}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{(2k+1)\pi y}{a}\right)$$

3.4 正交曲面坐标系中的分离变量法

3.4.1 圆形区域及非齐次方程的处理

题目

作业 10

1. 考虑一个半径为 1 的单位圆盘，边缘的温度分布为 $f(\theta)=\begin{cases}1,(0<\theta<\pi),\\0,(\pi<\theta<2\pi).\end{cases}$ 请写出对应的定解问题，并采用分离变量法求解其稳定时的温度分布

解析

该定解问题对应的数理方程应为拉普拉斯方程：$\nabla^2u=0$。

对应的求解过程，可以参考教材 14.4 节的相应问题。

本题对应着 $a=1$ 和 $f=\begin{cases}1,(0<\theta<\pi),\\ 0,(\pi<\theta<2\pi).\end{cases}$ 的结果。

因此只需要计算教材 240 页的 14.79 中的三个积分：

$C_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}d\theta=\dfrac{1}{2}$。

$$C_{m1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin m\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin m\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos m\theta}{m}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{m\pi}((-1)^m-1)=\begin{cases}0, & m=2k,\\ \dfrac{2}{m\pi}, & m=2k+1\end{cases}$$

$$C_{m2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos m\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos m\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\left.\frac{\sin m\theta}{m}\right|_0^{\pi}=0$$

所以有：$u(r,\theta)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}r^{2k+1}\frac{\sin(2k+1)\theta}{2k+1}$。

3.4.2 二阶微分方程极点判断

题目 *作业 10*

2. 请判断下面的微分方程有哪些奇点？是否是正则奇点？

（1）厄米方程：$\dfrac{dy^2(x)}{dx^2}-2x\dfrac{dy(x)}{dx}+2\lambda y(x)=0$

（2）马丢方程：$4x(1-x)\dfrac{dy^2(x)}{dx^2}+2(1-2x)\dfrac{dy(x)}{dx}+(\lambda+2q-4qx)y(x)=0$

16 年 a 卷

5. $x=0$ 是常微分方程 $xy''+(b-x)y'-ay=0$（其中 a、b 是常数）的

(A) 正则奇点

(B) 常点

(C) 一阶极点

(D) 本性奇点

解析

作业 10

(1): $p(y)$ 和 $q(y)$ 都无显式不解析的点，则考虑变换 $x=1/t$ 判断无穷远的情况。变换后可得 $p(y)$ 与 $q(y)$ 都为 $\dfrac{4}{t^3}$，最终得到无穷远为奇点，但不是正则奇点。

(2)：按照相同的方式，首先将 $\dfrac{dy^2(x)}{dx^2}$ 项的系数归一，判断为不解析点后再变换 $x=1/t$。最终得到 0，1 为奇点且为正则奇点，无穷远为奇点但不是正则奇点

16 年 a 卷

3.5 球函数 (Legendre 的应用)

3.5.1 Legendre 方程及多项式性质

题目

作业 *11*

1. 利用勒让德多项式的级数表达式

$$P_l(x)=\sum_{n=0}^{l}\frac{(l+n)!}{(n!)^2(l-n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

以及

$$P_l(x)=\sum_{n=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n}$$

计算 $P_l(1)$, $P_l(0)$ 和 $P_l'(0)$ 的值。

2. 利用课上给出的递推关系。(1) 证明：

$$\sum_{l=0}^{n}(2l+1)P_l(x)=P_n'(x)+P_{n+1}'(x)$$

(2) 计算积分

$$\int_{-1}^{1}xP_m(x)P_n(x)dx$$

3. 计算积分：

(1) $\int_0^{\pi}P_n(\cos\theta)\sin(2\theta)d\theta.$

(2) $\int_{-1}^{1}(1+x)^k P_l(x)dx.$

4. 将 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)=5x^3+3x^2+2x+1$ 展开为勒让德级数。

解析

1.

对于第一个表达式，求导可得：

$P_l'(x)=\sum_{n=0}^{l}\frac{(l+n)!}{(n!)^2(l-n)!}\frac{n}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}$

当取 $x=1$ 时，只有 $n=1$ 的项非零，所以 $P_l'(1)=\frac{(l+1)!}{2(l-1)!}=\frac{(l+1)l}{2}$

对于第二个表达式，取 $x=0$。

当 $l=2k+1$ 为奇数时，表达式无常数项，所以 $P_{2k+1}(0)=0$。

当 $l=2k$ 为偶数时，只有 $n=k$ 的项非零，

所以 $P_{2k}(0)=\frac{(-1)^{2k}(4k-2k)!}{2^{2k}k!(2k-k)!(2k-2k)!}=\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$

对于第二个表达式，求导可得：$P_l'(x)=\sum_{n=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^n(2l-2n)!(l-2n)}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n-1}$

取 $x=0$：

当 $l=2k$ 为偶数时，表达式无常数项，所以 $P_{2k}'(0)=0$。

当 $l=2k+1$ 为奇数时，只有 $n=k$ 的项非零，所以 $P_{2k+1}'(0)=\frac{(-1)^k(2k+2)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}$。

考试虽然不会直接出大题考察这样的递推关系，但此处的结论却非常有用（在处理半球延拓问题时，很容易遇到 $P_{2k+1}(x)$ 形式的 *Legendre*）

2.

(1) 利用递推公式：$(2l+1)P_l(x)=P_{l+1}'(x)-P_{l-1}'(x)$，

$$\begin{aligned}\text{左边}&=P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)+P_n'(x)-P_{n-2}'(x)+P_{n-1}'(x)-P_{n-3}'(x)+\cdots\\&\quad+P_4'(x)-P_2'(x)+P_3'(x)-P_1'(x)+P_2'(x)-P_0'(x)+P_0(x)\\&=P_{n+1}'(x)+P_n'(x)-P_1'(x)-P_0'(x)+P_0(x)=P_{n+1}'(x)+P_n'(x)\\&=\text{右边。}\end{aligned}$$

(2) 利用递推公式 $(2l+1)xP_l(x)=(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x)$，可得

$$\begin{aligned}\text{当 } m\neq 0 \text{ 时，原式}&=\frac{1}{2m+1}\int_{-1}^{1}((m+1)P_{m+1}(x)P_n(x)+mP_{m-1}(x)P_n(x))dx\\&=\frac{1}{2m+1}(\frac{2(m+1)}{2m+3}\delta_{m+1,n}+\frac{2m}{2m-1}\delta_{m-1,n})\\&=\frac{2n}{4n^2-1}\delta_{m+1,n}+\frac{2m}{4m^2-1}\delta_{m-1,n}\end{aligned}$$

当 $m=0$ 时，$P_0(x)=1$, 原式 $=\int_{-1}^{1}xP_n(x))dx=\int_{-1}^{1}P_1(x)P_n(x)=\frac{2}{3}\delta_{n1}$

3.5.2 Legendre 的具体应用

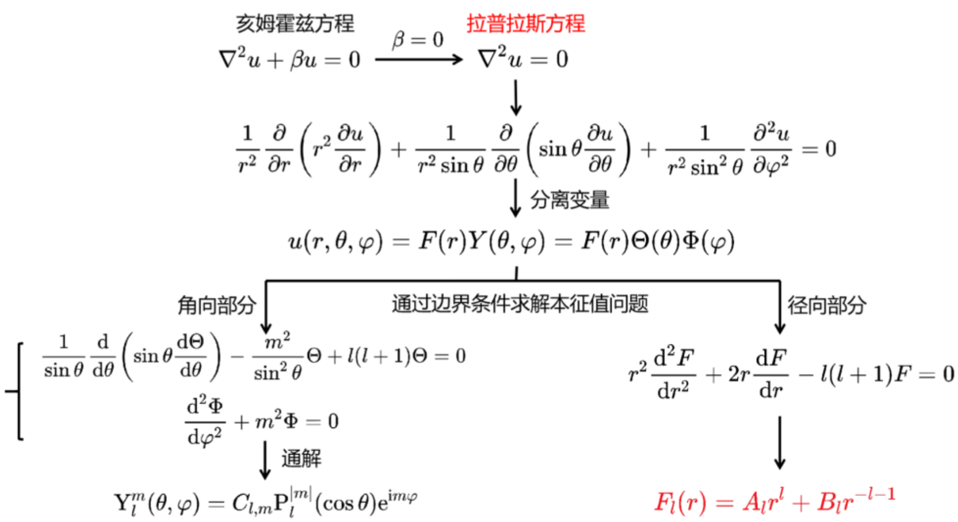
题目

作业 11

5. 半径分别为 $r=1$ 和 $r=2$ 的同心球壳。内层球壳上的电势分布为 $\cos\theta$，外层球壳上的电势分布为 $1+\cos^2\theta$，请给出两个球壳之间的区域的电势分布。

解析

我们先通过下列图表对 Laplace 方程在球坐标系下的分离变量有个直观的认识：



若方程三个自变量都含，角向加径向的通解为球谐函数（难度较大）。因此，我们必须要会处理的，是**不含 Φ 方向**的简化情况，其解为 Legendre 多项式。

下面开始正式解析。

第一步：利用轴对称性化简，并写出定解方程：

由于初始条件为轴对称，解与方位角 ϕ 无关，可记为 $u(r,\theta)$。

定解问题为：$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r u(r,\theta))+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta u(r,\theta))=0$

边界条件为：$u(1,\theta)=\cos\theta$，$u(2,\theta)=1+\cos^2\theta$，$u(r,0)$ 有界，$u(r,\pi)$ 有界。

第二步：分离变量，写出各变量的微分方程：

设 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，则有 $\dfrac{r^2R''(r)+2rR'(r)}{R(r)}=-\dfrac{\Theta''(\theta)+\cot\theta\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)}=\lambda$

可得方程为：$R''(r)+\dfrac{2}{r}R'(r)-\dfrac{\lambda}{r^2}R(r)=0$，$\Theta''(\theta)+\cot\theta\Theta'(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0$
且有边界条件：$\Theta(0)$，$\Theta(\pi)$ 有界。

第三步：求解各变量的本征值与本征函数，叠加得到通解：

角向方程为勒让德方程，根据有界条件，可得本征值为：$\lambda_l=l(l+1)$，$l\in\mathbb{N}$。

对应的本征函数为 l 阶勒让德多项式：$\Theta(\theta)=P_l(\cos\theta)$。

代入径向方程，可得 $R''(r)+\dfrac{2}{r}R'(r)-\dfrac{l(l+1)}{r^2}R(r)=0$

径向方程的通解为：$R_l(r)=A_lr^l+B_l\dfrac{1}{r^{l+1}}$。

该定解问题的一般解为：$u(r,\theta)=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}(A_lr^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}})P_l(\cos\theta)$。

第四步：利用边界条件确定系数：

p.s.: 一般而言，涉及 *Legendre* 的求系数方法，都是直接展开目标函数，而非利用正交性积分

代入径向边界条件：$\begin{cases}u(1,\theta)=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}(A_l+B_l)P_l(\cos\theta) & =\cos\theta\\ u(2,\theta)=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}(2^lA_l+\frac{B_l}{2^{l+1}})P_l(\cos\theta) & =1+\cos^2\theta\end{cases}$

径向边界条件，可按照勒让德多项式展开为：

$1+\cos^2\theta=\dfrac{2}{3}P_2(\cos\theta)+\dfrac{4}{3}P_0(\cos\theta)$，$\cos\theta=P_1(\cos\theta)$

可得方程组：$\begin{cases}A_0+B_0= & 0\\ A_0+\dfrac{B_0}{2}= & \dfrac{4}{3}\end{cases}\qquad\begin{cases}A_1+B_1= & 1\\ 2A_1+\dfrac{B_1}{4}= & 0\end{cases}$

$\begin{cases}A_2+B_2= & 0\\ 4A_2+\dfrac{B_2}{8}= & \dfrac{2}{3}\end{cases}\qquad\begin{cases}A_l+B_l= & 0\\ 2^lA_l+\dfrac{B_2}{2^{l+1}}= & 0\end{cases}\quad(l>2)$

所有非零系数为：$A_0=\dfrac{8}{3},B_0=-\dfrac{8}{3},A_1=-\dfrac{1}{7},B_1=\dfrac{8}{7},A_2=\dfrac{16}{93},B_2=-\dfrac{16}{93}$

$u(r,\theta)=\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{8}{3r}\right)P_0(\cos\theta)+\left(-\dfrac{r}{7}+\dfrac{8}{7r^2}\right)P_1(\cos\theta)+\left(\dfrac{16r^2}{93}-\dfrac{16}{93r^3}\right)P_2(\cos\theta)$

3.5.3 球谐函数

题目

作业 *12*

3. 半径为 R 的球壳上，电势分布为 $-\sin^2\theta\cos^2\phi+\dfrac{1}{3}$，球壳的内外区域均无电荷，请分别给出球壳内部区域和外部区域的电势分布。

解析

定解问题为：$\dfrac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r u)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta u)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2 u=0$

边界条件为：$u(R,\theta,\phi)=-\sin^2\theta\cos^2\phi+\dfrac{1}{3}$，$u(r,0,\phi)$，$u(r,\pi,\phi)$ 有界。

$u(r,\theta,0)=u(r,\theta,2\pi)$，$\partial_\phi u(r,\theta,0)=\partial_\phi u(r,\theta,2\pi)$

对于球内区域，应有 $u(0,\theta,\phi)$ 有界；对于球外区域，应有 $\lim\limits_{r\to\infty}u(r,\theta,\phi)=0$。

分离变量，设 $u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$，则有

$$\frac{r^2R''(r)+2rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\sin^2\theta\partial_\theta^2 S(\theta,\phi)+\cos\theta\sin\theta\partial_\theta S(\theta,\phi)+\partial_\phi^2 S(\theta,\phi)}{\sin^2\theta S(\theta,\phi)}=\lambda$$

可得方程为：$R''(r)+\dfrac{2}{r}R'(r)-\dfrac{\lambda}{r^2}R(r)=0$

$$\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta S(\theta,\phi))+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2 S(\theta,\phi)+\lambda S(\theta,\phi)=0$$

根据有界和周期性条件，可得本征值为：$\lambda_l=l(l+1)$，$l\in\mathbb{N}$。

对应的本征函数为 lm 阶球谐函数：

$S_{lm}(\theta,\phi)=P_l^m(\cos\theta)\cos m\phi, m=0,1,2,\cdots,l$

或 $S_{lm}(\theta,\phi)=P_l^m(\cos\theta)\sin m\phi, m=1,2,\cdots,l$。

代入径向方程，可得 $R''(r)+\dfrac{2}{r}R'(r)-\dfrac{l(l+1)}{r^2}R(r)=0$

径向方程的通解为：$R_l(r)=A_lr^l+B_l\dfrac{1}{r^{l+1}}$。

该定解问题的一般解为：

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}(A_lr^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}})P_l^m(\cos\theta)(C_{lm}\cos m\phi+D_{lm}\sin m\phi)。$$

对于 $r=R$ 处的边界条件，有：

$$-\sin^2\theta\cos^2\phi+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\sin^2\theta(\cos 2\phi+1)+\frac{1}{3}$$
$$=-\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos 2\phi+\frac{1}{2}(\cos^2\theta-\frac{1}{3})=-\frac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi+\frac{1}{3}P_2(\cos\theta)$$

（1）对于球内，由于 $r=0$ 时 u 有界，所以 $B_l=0$，且

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}R^lP_l^m(\cos\theta)(C_{lm}\cos m\phi+D_{lm}\sin m\phi)=-\frac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi+\frac{1}{3}P_2(\cos\theta)$$

所以 $R^2C_{22}=-\dfrac{1}{6}$，$R^2C_{20}=\dfrac{1}{3}$

因此，球内区域电势为：$u(r,\theta,\phi)=\dfrac{r^2}{R^2}\left(-\dfrac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi+\dfrac{1}{3}P_2(\cos\theta)\right)$

（2）对于球外，由于 $r\to\infty$ 时 u，所以 $A_l=0$，且

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{R^{l+1}}P_l^m(\cos\theta)(C_{lm}\cos m\phi+D_{lm}\sin m\phi)=-\frac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi+\frac{1}{3}P_2(\cos\theta)$$

所以 $\dfrac{C_{22}}{R^3}=-\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{C_{20}}{R^3}=\dfrac{1}{3}$

因此，球内区域电势为：$u(r,\theta,\phi)=\dfrac{R^3}{r^3}\left(-\dfrac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi+\dfrac{1}{3}P_2(\cos\theta)\right)$

总结：该题难度较大，主要有两个地方需要注意：

1. 对于径向方程通解，$R_l(r)=A_l r^l+B_l\dfrac{1}{r^{l+1}}$，需要考虑不同的有界条件，确定 A_l 或者 B_l 为 0。

2. 求系数若使用球谐函数的形式直接求积分难度过大，一般将目标函数变为连带勒让德展开式。

3.6 柱函数（Bessel)

3.6.1 Bessel 函数的性质

作业 12

4. 利用生成函数，证明加法公式：$J_n(x+y)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)J_{n-k}(y)$，并进一步证明：$1=J_0^2(x)+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}J_k^2(x)$。

5. 利用由生成函数得到的：$e^{ix\sin\theta}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}$，证明：

（1）$\cos(x)=J_0(x)+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^kJ_{2k}(x)$，$\sin(x)=2\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kJ_{2k+1}(x)$；

（2）$x=2\sum\limits_{k=0}^{\infty}(2k+1)J_{2k+1}(x)$。

作业 13

1. 计算不定积分：$\displaystyle\int J_3(x)dx$

解析

作业 12

4. 利用生成函数，证明加法公式：$J_n(x+y)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)J_{n-k}(y)$，并进一步证明：$1=J_0^2(x)+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}J_k^2(x)$。

参考解答:

由生成函数 $e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)t^k$，可得：$e^{\frac{1}{2}(x+y)(t-\frac{1}{t})}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x+y)t^k$

同时，还有：$e^{\frac{1}{2}(x+y)(t-\frac{1}{t})}=e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})}e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)t^k\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}J_m(y)t^m$

令 $n=m+k$，有原式 $=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)J_{n-k}(y)t^n$。

所以有 $J_n(x+y)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)J_{n-k}(y)$。

取 $n=0$，且 $y=-x$，则有：$J_0(0)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)J_{-k}(-x)$。

由于当 k 为整数时，有 $J_{-k}(x)=(-1)^kJ_k(x)$，且 $J_k(-x)=(-1)^kJ_k(x)$

所以有 $J_{-k}(-x)=(-1)^{2k}J_k(x)=J_k(x)$

5. 利用由生成函数得到的：$e^{ix\sin\theta}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}$，证明：

（1）$\cos(x)=J_0(x)+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^kJ_{2k}(x)$，$\sin(x)=2\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kJ_{2k+1}(x)$；

（2）$x=2\sum\limits_{k=0}^{\infty}(2k+1)J_{2k+1}(x)$。

参考解答:

（1）取 $\theta=\frac{\pi}{2}$，则有 $\sin\theta=1$，且 $e^{ix\sin\theta}=e^{ix}=\cos x+i\sin x$。

等式右边 $=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{i\frac{n\pi}{2}}=J_0(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{i\frac{n\pi}{2}}J_n(x)+e^{-i\frac{n\pi}{2}}J_{-n}(x))$

$=J_0(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{i\frac{n\pi}{2}}+(-1)^ne^{-i\frac{n\pi}{2}})J_n(x)$

$=J_0(x)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}2\cos k\pi J_{2k}(x)+\sum\limits_{k=0}^{\infty}2i\sin(k+\frac{1}{2})\pi J_{2k+1}(x)$

$=J_0(x)+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^kJ_{2k}(x)+2i\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kJ_{2k+1}(x)$

等式两次分别取实部和虚部，则有：

$\cos x=J_0(x)+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^kJ_{2k}(x)$，$\sin x=2\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kJ_{2k+1}(x)$

（2）等式左右两侧对 θ 求导，可得：

$ix\cos\theta e^{ix\sin\theta}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}inJ_n(x)e^{in\theta}$

取 $\theta=0$，则 $\sin\theta=0$，$\cos\theta=1$，$e^{in\theta}=1$。
则有：$ix=\sum_{n=-\infty}^{\infty} inJ_n(x)$，既 $x=\sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(nJ_n(x)-nJ_{-n}(x))$。由于 $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$，所以 $x=\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n)nJ_n(x)=2\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)J_{2k+1}(x)$

作业 13

1. 计算不定积分：$\int J_3(x)dx$（10 分）

参考解答：
$J_3(x)=\frac{2}{x}J_2(x)-J_2'(x)$
$-\frac{1}{x}J_2(x)=\left(\frac{1}{x}J_1(x)\right)'$
所以 $\int J_3(x)dx=-\frac{2}{x}J_1(x)-J_2(x)$
可以进一步化简，利用 $J_0(x)+J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)$，可得：
$\int J_3(x)dx=-\frac{4}{x}J_1(x)+J_0(x)$（可以不用化简到这一步。）

3.6.2 Bessel 的应用

作业 13

2. 考虑一个半径为 a，高为 h 的圆柱体。圆柱侧面的温度恒为 0，上下底面绝热。初始时刻圆柱体整体温度为 u_0，请计算柱体内部温度分布随时间的变化。

3. 考虑一个半径为 a，密度为 ρ，四周固定的圆形薄膜。在 $t=0$ 的时候，在 $r=a/2,\theta=0$ 的点敲击一下，假设敲击的冲量是 I，请求解薄膜的运动。(20 分)

提示：极坐标下的 δ 函数形式为：$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$

4. 半径为 a，高为 h 的圆柱体，上下底面（$z=h,0$）的温度为 0，侧面温度为 $u_0\sin\frac{2\pi}{h}z$，求圆柱内部稳定的温度分布。

解析

在解决这三道题之前，我们可以先回顾一下 Bessel 函数的核心：**柱坐标下 Helmholtz 方程分离变量后的径向方程**

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(k^2-\lambda-\frac{\mu}{\rho^2}\right)R=0$$

其中，R 项的三个系数 k^2,λ,$\dfrac{\mu}{\rho^2}$ 分别对应时间、Z 方向和角向的分离变量常数。

柱坐标下，令

$$x=\sqrt{k^2-\lambda}\rho, \mu=\nu^2, y(x)=R(\rho),$$

则

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy(x)}{dx}\right]+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x)=0$$

为贝塞尔方程。

解为：$J_{\pm\nu}(\sqrt{k^2-\lambda}r)$，　$N_{\pm\nu}(\sqrt{k^2-\lambda}r)$。令 $\sqrt{k^2-\lambda}=\lambda_{\nu m}$, 代表$\nu$ 阶函数的第m 个本征值。ϕ 方向的方程，0 处有界。可舍弃发散的诺依曼函数。 又可根据周期性条件确定 ν 为整数。

第一类边界条件：$J_n(\lambda_{nm}a)=0$.若μ_{nm} 为$J_n(x)$ 的第m 个非 0 零点，则$\lambda_{nm}=\dfrac{\mu_{nm}}{a}$

第二类边界条件：$J_n'(\lambda_{nm}a)=0$.若μ_{nm} 为$J_n'(x)$ 的第m 个非 0 零点，则$\lambda_{nm}=\dfrac{\mu_{nm}}{a}$

- 不一定非要是 Helmholtz 方程，只要最后的径向方程形式类似即可。
- 如果利用对称性化简，角向方程不存在，解为 Bessel 函数。(第二题)
- 如果不含 Z 方向，则变成退化成含时的极坐标问题，解依然为 Bessel 函数。在这里可以与不含时的极坐标下的稳定问题相比较：不含时则只有一个分离变量常数，角向通解为相对简单的 Ar^m+Br^{-m} 的形式。(第三题)
- 如果不含时，则退化为 Laplace 方程。解依然为 Bessel 函数，但是是虚宗量 Bessel 函数 (所谓虚宗量，就是 $\sqrt{k^2-\lambda}$ 为虚数，$k=0$ 了，宗量自然就为虚数了)。(第四题)

由于虚宗量 *Bessel* 函数的性质较为复杂，细心的读者可能发现了：对于 *Lapalce* 方程，如果我们在分离变量的时候，将式子中的 λ 变作 $-\lambda$，同理 Zf 方向的本征函数也就变成了 $sinhz$ 或者 $coshz$，这样不就能避免出现虚宗量了吗？

这种思路是完全可行的。不过具体还是依赖于边界条件。例如第四题就是就不太适合上述操作。读者可思考为什么。 下面给出具体解析：

2.

第一步：利用轴对称性化简，并写出定解方程：

问题为轴对称，方程与解和 ϕ 无关。

定解问题为：$\partial_t u(r,z,t)-\kappa\left[\dfrac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u(r,z,t))+\partial_z^2 u(r,z,t)\right]=0$

边界条件为：$\partial_z u(r,0,t)=\partial_z u(r,h,t)=0, u(a,z,t)=0, u(0,z,t)$ 有界。

初始条件为：$u(r,z,0)=u_0$。同时应有 $u(r,z,\infty)$ 有界。

第二步：分离变量：

设 $u(r,z,t)=R(r)Z(z)T(t)$，则有 $\dfrac{T'(t)}{\kappa T(t)}=\dfrac{1}{rR(r)}\dfrac{d(rR'(r))}{dr}+\dfrac{Z''(z)}{Z(z)}$。

注意此处分离变量的技巧，同样是先分离 T, 并且把相对无关紧要的系数 κ 丢给 T 来保证 *Bessel* 方程的相对简洁。

分离变量，可得：$R''+\dfrac{1}{r}R'+k^2R=0$，$Z''+m^2Z=0$，$T'+\lambda\kappa T=0$。

其中 $\lambda=k^2+m^2$，并有：$R(a)=Z'(0)=Z'(h)=0$，$R(0)$ 有界。

此处也不必严格按照 $k^2-\lambda$ 的形式去写径向方程，重点是知道 $k^2-\lambda$ 在推导过程中实际上是作为一个整体，毕竟最终解的形式也是 $J_{\pm\nu}(\sqrt{k^2-\lambda}r)$，所以在实际运算中写作 k^2 更简洁。

第三步：求解各方向的本征函数与本征值：

径向解为：$R(r)=J_0(k_ir)$，其中 $k_i=\dfrac{\mu_i}{a}$，μ_i 为 $J_0(x)$ 的第 i 个非零的零点。

不含角向方程所以直接得到的就是 $J_0(k_ir)$，大幅简化运算

纵向解为：$Z(z)=A_n\sin m_nz+B_n\cos m_nz$，带入边界条件，可得：

$m_nA_n=0, m_nA_n\cos m_nh-m_nB_n\sin m_nh=0$,

所以 $A_n=0$，$m_nh=n\pi$，$Z(z)=\cos\dfrac{n\pi}{h}z, n\in\mathbb{N}$。

因此 $\lambda_{in}=k_i^2+m_n^2=\dfrac{\mu_i^2}{a^2}+\dfrac{n^2\pi^2}{h^2}$，且 $T_{in}(t)=e^{-\lambda_{in}\kappa t}$。

注意这种有三个自变量的情形就会有两个独立的分离变量常数，所以下标就会有两个。求解 k 和 m 的时候认为它们独立，则 λ 就由这两者组成

故一般解为：$u(r,z,t)=\displaystyle\sum_{in}A_{in}J_0(\frac{\mu_ir}{a})\cos\frac{n\pi z}{h}e^{-\lambda_{in}\kappa t}$。

第四步：利用初始条件和正交性确定系数

代入初始条件，可得：$u_0=\displaystyle\sum_{in}A_{in}J_0(\frac{\mu_ir}{a})\cos\frac{n\pi z}{h}$。

根据正交条件：$\displaystyle\int_0^a J_0(k_ir)J_0(k_jr)rdr=\frac{a^2}{2}J_1^2(k_ia)\delta_{ij}$,

考试会给出第一类和第二类边界条件的正交性的结果，不过是自变量为 x, 积分区间是 *0* 到 *1*; 只需要换元 $x=\dfrac{r}{a}$ 即可得到上述结果。同样地，考试也会给出 *Bessel* 函数的递推关系，积分区间是 *0* 到 *1*，依然需要进行换元。

以及 $\displaystyle\int_0^h\cos\frac{n\pi z}{h}\cos\frac{m\pi z}{h}dz=\delta_{mn}\begin{cases}h, n=0\\ \dfrac{h}{2}, n\neq 0\end{cases}$

或者按照教材上更常用的写法：$\dfrac{h}{2}(1+\delta_{n0})\delta_{nm}$

对左侧积分，可得：$u_0\int_0^a\int_0^h J_0(k_ir)\cos\frac{n\pi z}{h}rdrdz=u_0h\delta_{n0}\frac{a}{k_i}J_1(k_ia)=u_0\frac{ha^2}{\mu_i}J_1(\mu_i)$。
注意此处的一个细节，$n=0$ 时，使用 $\int_0^a d(sin\frac{n\pi z}{h})$ 的思路就行不通了，必须分开算。
所以系数为：$A_{in}=\frac{2u_0}{\mu_iJ_1(\mu_i)}\delta_{n0}$，解为：$u(r,z,t)=\sum_i\frac{2u_0}{\mu_iJ_1(\mu_i)}J_0(\frac{\mu_ir}{a})e^{-\frac{\mu_i^2\kappa}{a^2}t}$

3.

第一步：利用轴对称性化简，并写出定解方程：

定解问题为：$\partial_t^2u(r,\theta,t)-c^2\left[\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_ru(r,\theta,t))+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2u(r,\theta,t)\right]=0$
边界条件为：$u(a,\theta,t)=0,u(0,\theta,t)$ 有界。
周期性条件：$u(r,0,t)=u(r,2\pi,t),\partial_\theta u(r,0,t)=\partial_\theta u(r,2\pi,t)$。
初始条件为：$u(r,\theta,0)=0,\partial_tu(r,\theta,0)=\frac{I}{\rho r}\delta(r-a/2)\delta(\theta)$。

第二步：分离变量：

设 $u(r,\theta,t)=R(r)\Theta(\theta)T(t)$，则有

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)}=\frac{1}{rR(r)}\frac{d(rR'(r))}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-k^2$$

分离变量，可得：

$$R''+\frac{1}{r}R'+(k^2-\frac{m^2}{r^2})R=0,\Theta''+m^2\Theta=0,T''+k^2c^2T=0$$

注意此处的分离变量技巧。没有 Z 方向的方程，但是出现了关于时间的二阶微分方程。所以将两个独立分离变量常数分别给径向和角向方程，又因为 $\sqrt{k^2-\lambda}$ 中的 λ 为 *0*，所以同样能保证 *Bessel* 的本征值的简洁性。

第三步：求解各方向的本征函数与本征值：

代入边界条件：$R(a)=0$，$R(0)$ 有界，有径向解为：
$R(r)=J_m(k_{mn}r)$，其中 $k_{mn}=\frac{\mu_{mn}}{a}$，$\mu_{mn}$ 为 $J_m(x)$ 的第 n 个非零的零点。
类似地，代入周期性条件，角向解为：$\Theta(\theta)=A_m\sin m\theta+B_m\cos m\theta$
代入 k_{mn}，可得 $T(t)=C_{mn}\sin\omega_{mn}t+D_{mn}\cos\omega_{mn}t$，其中 $\omega_{mn}=k_{mn}c$。

第四步：利用初始条件和正交性确定系数

由初始条件 $u(r,\theta,0)=0$，可得 $D_{mn}=0$，故方程的一般解可以写为

$$u(r,\theta,t)=\sum_{mn}(A_{mn}\sin m\theta+B_{mn}\cos m\theta)J_m(k_{mn}r)\sin\omega_{mn}t$$

由初始条件：
$\partial_t u(r,\theta,0)=\sum_{mn}(A_{mn}\sin m\theta+B_{mn}\cos m\theta)J_m(k_{mn}r)\omega_{mn}=\dfrac{I}{\rho r}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$
利用正交条件，对上式积分，即

$$\begin{aligned}
&\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{mn}(A_{mn}\sin m\theta+B_{mn}\cos m\theta)J_m(k_{mn}r)\omega_{mn}J_m(k_{mp}r)\cos(q\theta)rdrd\theta\\
&=\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi}\frac{I}{\rho r}\delta(r-a/2)\delta(\theta)J_m(k_{mp}r)\cos(q\theta)rdrd\theta\\
&\Rightarrow B_{mn}\omega_{mn}\frac{a^2}{2}[J_m'(\mu_{mn})]^2\delta_{np}\pi(1+\delta_{m0})\delta_{mq}=\frac{I}{\rho}J_m(\mu_{mp}/2)\\
&\Rightarrow B_{mn}\omega_{mn}\frac{a^2}{2}[J_m'(\mu_{mn})]^2\frac{\pi}{2}(1+\delta_{m0})=\frac{I}{\rho}J_m(\mu_{mn}/2)\\
&\Rightarrow B_{mn}=\frac{2IJ_m(\mu_{mn}/2)}{\pi\rho a^2\omega_{mn}[J_m'(\mu_{mn})]^2(1+\delta_{m0})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{mn}(A_{mn}\sin m\theta+B_{mn}\cos m\theta)J_m(k_{mn}r)\omega_{mn}J_m(k_{mp}r)\sin(q\theta)rdrd\theta\\
&=\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi}\frac{I}{\rho r}\delta(r-a/2)\delta(\theta)J_m(k_{mp}r)\sin(q\theta)rdrd\theta=0\\
&\Rightarrow A_{mn}=0
\end{aligned}$$

所以方程的解为：

$$u(r,\theta,t)=\sum_{mn}\frac{2IJ_m(\mu_{mn}/2)}{\pi\rho a^2\omega_{mn}[J_m'(\mu_{mn})]^2(1+\delta_{m0})}\cos m\theta J_m(k_{mn}r)\sin\omega_{mn}t$$

4.

问题为轴对称，方程与解和 ϕ 无关。
定解问题为：$\dfrac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u(r,z))+\partial_z^2u(r,z)=0$
边界条件为：$u(r,0)=u(r,h)=0, u(a,z)=u_0\sin\dfrac{2\pi}{h}z$，$u(0,z)$ 有界。
设 $u(r,z)=R(r)Z(z)$，则有 $\dfrac{1}{rR(r)}\dfrac{d(rR'(r))}{dr}=-\dfrac{Z''(z)}{Z(z)}$

分离变量，可得：$R''+\frac{1}{r}R'-m^2R=0$，$Z''+m^2Z=0$，$T'+\lambda\kappa T=0$。
并有：$Z(0)=Z(h)=0$，$R(0)$ 有界。
纵向解为：$Z(z)=A\sin mz+B\cos mz$，带入边界条件，可得：
$B=0, A\sin mh+B\cos mh=0$，$m_n=\frac{n\pi}{h}$，$n=1,2,3,\cdots$
径向解为：$R(r)=I_0(\frac{n\pi}{h}r)$。
故一般解为：$u(r,z)=\sum_n A_nI_0(\frac{n\pi r}{h})\sin\frac{n\pi z}{h}$。
代入边界条件，可得：$u_0\sin\frac{2\pi}{h}z=\sum_n A_nI_0(\frac{n\pi a}{h})\sin\frac{n\pi z}{h}$。
可得系数为：$A_2=\frac{u_0}{I_0(\frac{n\pi a}{h})}$，其余系数为 0。
解为：$u(r,z)=u_0\frac{I_0(\frac{n\pi r}{h})}{I_0(\frac{n\pi a}{h})}\sin\frac{n\pi z}{h}$

3.7 补充：半球延拓问题

张建东 PPT 题目

半径为 R 的半球，球面温度为 $u_0\cos\theta$，底面绝热。

解析

在解决延拓问题的时候，我们要注意这麽几个关键点：

- **为什么要延拓**：显然，如果不延拓，再利用正交性求叠加系数的时候，我们将因为积分区间的空缺，而无法利用正交性。延拓的目的正是将区间补全，得以利用正交性消除掉我们不需要的系数。

- **边界条件**：边界条件决定了进行的延拓的种类。第一类边界条件使用奇延拓，第二类边界条件使用偶延拓，不同延拓种类的本质是为了**保边界条件**。此外，这两种延拓方法都只能用于解决**齐次边界条件**，若非齐次，则必须先齐次化。

- **分界面条件的利用**：在本题（以及其它的延拓问题）中，分界面的条件往往是用来确定 Legendre 多项式的阶数的。因为对于延拓前后的球面，其边界条件并非一致的，理论上而言应该用两套函数分别描述（但这样就违背了我们的意愿–正交性的利用）。但如果 Legendre 多项式满足分界面的条件，就可以在完整的 [0,π] 的区间应用。

- **求系数时的必备技巧：** 在积分过程中，我们势必会遇到 Lengendre 多项式在 [0,$\frac{\pi}{2}$] 区间的积分 (请思考是在哪一步)，此时就应该利用下列递推关系：

$$\int_0^1 P_l(x)\,dx=\frac{P_{l-1}(0)-P_{l+1}(0)}{2l+1}$$

上述是最重要的一个技巧，其余的 Legendre 的递推技巧就不再赘述了。

注：下列过程中存在一个 $TYPO$，即最后利用正交性的时候应该是两边同乘 $P_{2k}(cos\theta)sin(\theta)$，这才是 $legendre$ 多项式的 $cos(\theta)$ 形式的正交方法。因此也出现了一个计算错误，即 A_0 应当等于 $\frac{u_0}{2}$

延拓问题

step1. 由对称性，化简为 $u(R,\theta,\phi)=u(R,\theta)$

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0$$

step2. 由"底面绝热" $\Leftrightarrow$ $\partial_\theta u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$，作偶延拓（二类边条）

$\Rightarrow$ 边界条件：$u|_{r=0}$ 有界　$u|_{r=R,\theta\in(0,\frac{\pi}{2})}=u_0\cos\theta$

$u|_{r=R,\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)}=-u_0\cos\theta$　$\partial_\theta u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$

step3. 分离变量　$u(r,\theta)=R(r)\cdot\Theta(\theta)$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\cdot\left(r^2\cdot\frac{dR}{dr}\right)\cdot\frac{1}{R}=-\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\cdot\frac{1}{\Theta}=?=\frac{\lambda}{r^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} r^2\cdot R''+2r\cdot R'-\lambda R=0 & \text{①欧拉型} \\ \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\Theta=0 & \text{②Legendre}\end{cases}$$

step4. 本征值 and 本征函数 and 通解

②式：本征值 $\lambda=l(l+1)$，$l=0,1,2\cdots$　$\Theta(\theta)=P_l(\cos\theta)$

①式：$R(r)=A\cdot r^l+B\cdot r^{-(l+1)}$　由 $u|_{r=0}$ 有界，得 $B=0$

则 $u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\cdot r^l\cdot P_l(\cos\theta)$

step5.（延拓问题的特色）求系数

由 $\partial_\theta u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$ 得，$\partial_\theta u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\cdot r^l\cdot P_l'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)=0$

$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty}A_l\cdot r^l\cdot P_l'(0)=0$　特色：当 $l=2k$ 时，$P_l'(0)=0\Rightarrow l=2k$

$\Rightarrow u(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\cdot r^{2k}\cdot P_{2k}(\cos\theta)$

利用正交性：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}u_0\cos\theta\cdot P_{2k}(\cos\theta)\cdot d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}u_0(-\cos\theta)\cdot P_{2k}(\cos\theta)\cdot d\theta\Rightarrow\cos\theta$ 关于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 中心对称

$=A_{2k}\cdot R^{2k}\cdot\int_0^{\pi}P_{2k}^2(\cos\theta)\cdot d\theta$

$\Rightarrow 2\cdot u_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}P_{2k}(\cos\theta)\cdot\cos\theta\cdot d\theta=A_{2k}\cdot R^{2k}\cdot\frac{2}{4k+1}$（利用两个 Legendre 的递推关系）

$\Rightarrow A_0=u_0$?　$A_{2k}=(-1)^{k+1}\cdot\frac{(4k+1)\cdot(2n-3)!!}{(2k+2)!!}\cdot\frac{u_0}{R^{2k}}$　$A_{2k+1}=0$

复习提示：
下面这些你都记住了吗：

- 复数基础

  1. 极坐标系下的 C-R 条件
  2. Cauchy 积分、高阶导公式及其**适用条件**。
  3. 大小圆弧引理以及留数定理。以及使用留数定理算积分时，必须要掌握的是哪些围道？
  4. $d\theta$ 和 $d|z|$ 等表示，常见的换元方法是什么？
  5. 使用约当引理时，围道取的是上半平面还是下半平面？
  6. 做 Taylor or Laurent 展开，求收敛半径的方法有哪些？常用的必背展开式是哪几个？
  7. Γ 函数不会给出来的性质你记住了吗？例如 1 和 $\frac{1}{2}$ 的特殊值，递推关系，解析延拓到负数上。以及 B 函数和双 Gamma 函数的定义。
  8. δ 复合函数的公式是什么？δ 函数的傅里叶变换和 Laplace 变换是什么？
  9. Fourier 和 Laplace 变换的必背性质你记住了吗？例如：导数变换、平移变换、尺度变换以及卷积公式

- 数理方程总结

  1. 波动方程、热传导（扩散）方程的一般形式（带 ∇ 算符）。以及 $\nabla^2 u$ 项前系数的含义。若有非齐次项，非齐次项的单位何如？
  2. 波动方程、热传导 (扩散) 方程的一、二、三维形式（直角坐标系），以及他们分离变量时，常用的分离变量顺序是什么？其各个分量通解是什么？
  3. Legendre 和 Bessel 的正交归一式会给出，但是 cos 和 sin 的正交归一式并不会给出，其正交归一的结果是什么（或者你还记得其推导方式吗）？
  4. 球坐标系
     - (稳定问题)Laplace 方程怎么写？在给定 r, θ, ϕ 三个自由度怎么分离变量？如果 ϕ 因为对称性被简化，怎么分离变量？其本征值和通解是什么（谁是欧拉型，谁是 Legendre?)?
     - (Helmholtz) 方程怎么写？径向解和角向解是什么？
  5. 柱坐标系

- 给定 Helmholtz 方程在柱坐标下径向的分离变量 (回忆一下这是怎么分出来的)

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(k^2-\lambda-\frac{\mu}{\rho^2}\right)R=0$$

- k^2,λ,$\dfrac{\mu}{\rho^2}$ 分别对应哪个方向的分离变量常数?
- 贝塞尔函数的本征值是什么?是哪些分离变量常数的函数?其**正交归一式**有和特点?
- 更常考的是柱的稳定或者含时演化问题。不含时的分离变量思路是什么?不含角向和 Z 项呢?

希望大家能有所受益，也欢迎分享和提出改进意见！

微信搜一搜

HORSE RUNNING WILD