中心力场中粒子的运动

本部分扫描内容索引

s49: 开普勒问题中有效势的极小值和零点

s50: 推导开普勒问题中吸引势的情况在极坐标系下的轨道方程

s52: 推导开普勒问题中排斥势的情况在极坐标系下的轨道方程

s52.5: 结合圆锥曲线公式推导一些关系式

s53: 证明拉普拉斯-隆格-楞茨矢量是守恒量

s54: 刚球散射

s55: 卢瑟福散射（另见 Mathematica code: Rutherford scattering.nb）

本部分目录

中心力场

考虑质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点组成的系统，它们的势能仅是两者距离 r 的函数，拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

其中 $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$。

这个系统有 6 个自由度（注：这是一个无约束的系统）。
6 个广义坐标和 6 个广义速度可以取为
$\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$,
$\dot{\vec{r}}_1$ (即 $\vec{v}_1$)，$\dot{\vec{r}}_2$ (即 $\vec{v}_2$)。

也可以取质心的位矢

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

和相对位矢

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

作为广义坐标，相应的广义速度为 $\dot{\vec{R}}$ 和 $\dot{\vec{r}}$。

两套广义坐标的关系为

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{aligned}$$

因此

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

其中

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

称为约化质量（reduced mass）。

中心力场

两体问题化为单体问题

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

由拉格朗日方程

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} &= 0
\end{aligned}$$

得

$$(m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}} = 0$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$$

中心力场

两体问题化为单体问题

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

拉氏量不显含 $\vec{R}$，所以 $\vec{R}$ 是循环坐标，它对应的广义动量

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = (m_1 + m_2)\dot{\vec{R}} = const$$

是守恒量，即系统的总动量守恒。

又因为 m_1 和 m_2 都是常量，所以 $\dot{\vec{R}}$ 是一个常矢量（即 $\ddot{\vec{R}} = 0$）

两体问题变成了两个独立的单体运动问题：一个匀速运动的质心和一个质量为约化质量的质点（以下称为粒子）在势场 $V(r)$ 中的运动。

可以取一个特定的惯性系使得系统的质心速度为零，这样的参考系称为质心系，并且质心就位于坐标原点。

在质心系中，

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

这个拉氏量以及相应的运动方程 $\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$ 描述的是一个质量为 μ 的粒子在势场中的运动，势场的中心 $\vec{r} = 0$ 的位置即在质心（也就是原点）。

注意：这个质量为 μ 的粒子是一个假想的粒子，并不是质量为 m_1 或 m_2 的那两个真实物体中的任何一个。
引入这个假想粒子只是为了方便描述系统。

中心力场

两体问题化为单体问题

在求出 $\vec{r}(t)$ 后，由

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\
\vec{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}
\end{aligned}
$$

就可得出 $\vec{r}_1(t)$ 和 $\vec{r}_2(t)$，即两个质点在质心系运动的情况。

中心力场

利用角动量守恒近一步简化拉氏量

下面来分析这个拉氏量

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

绕过原点的任意轴转动，$\dot{\vec{r}}^2$ 和 r 都不变，所以这个拉氏量具有转动不变性，因此沿任意方向的角动量都守恒。

而一旦给出任意时刻（比如初始时刻）粒子的位矢和速度，角动量的大小和方向就知道了（并且大小和方向都不变）。

因此，可以将粒子的角动量取为沿 z 轴的方向，于是粒子的轨道就只在 $x-y$ 平面内，所以就可以用平面坐标来描述粒子的运动。

中心力场

利用角动量守恒近一步简化拉氏量

采用极坐标，拉氏量可写为

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r)}$$

拉氏量不显含 ϕ，它是循环坐标，相应的广义动量守恒，这也就是粒子沿 z 方向的角动量守恒

$$\boxed{J \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2\dot{\phi} = \mathrm{const}}$$

（因为已经取了轨道平面在 $x-y$ 平面内，所以就只有 z 方向的角动量了。）

中心力场

能量守恒

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r)}$$

这个拉氏量不显含时间，具有时间平移不变性，能量函数
$h = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L$ 是守恒量，
其中 $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r}$，$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2\dot{\phi}$。

因此

$$h = \mu\dot{r}\dot{r} + \mu r^2\dot{\phi}\dot{\phi} - \left[\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r)\right] = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r)$$

h 就是粒子的能量，记为 $E \equiv h$。

中心力场

能量守恒

再利用 $J = \mu r^2 \dot{\phi}$，得

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r)}$$

其中 $\frac{J^2}{2\mu r^2}$ 称为离心势能。

中心力场

不需要求解运动方程，利用能量和角动量守恒就能解决粒子在中心力场中的运动问题

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r)}$$

$$\Longrightarrow \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V(r)] - \frac{J^2}{\mu^2 r^2}}$$

注：由 $E = \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r)$ 求出的 r 给出了粒子运动区域边界到中心的距离，它成立的条件是 $\dot{r} = 0$。

$\dot{r} = 0$ 是粒子轨道的转折点，函数 $r(t)$ 在转折点从增加变为减小或者从减小变为增加。

中心力场

不需要求解运动方程，利用能量和角动量守恒就能解决粒子在中心力场中的运动问题

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r)}$$

$$\Longrightarrow \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V(r)] - \frac{J^2}{\mu^2 r^2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V(r')] - \frac{J^2}{\mu^2 r'^2}}} + t_0}$$

这给出了 r 和 t 的关系。

（注意积分中平方根在转折点改变符号）

中心力场

不需要求解运动方程，利用能量和角动量守恒就能解决粒子在中心力场中的运动问题

另外，

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{J}{\mu r^2}$$

除以

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V(r)] - \frac{J^2}{\mu^2 r^2}}$$

并积分得

$$\boxed{\phi = \int_{r_0}^{r} dr' \frac{J/r'^2}{\pm\sqrt{2\mu[E - V(r')] - \frac{J^2}{r'^2}}} + \phi_0}$$

这给出了 r 和 ϕ 的关系，即粒子的轨道。

（注意积分中平方根在转折点改变符号）

（另外，因为 $\frac{d\phi}{dt} = \frac{J}{\mu r^2}$，所以 ϕ 是随时间单调变化的）

中心力场

上述结果当然也可由拉氏方程得到

$$\boxed{L=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2)-V(r)}$$

得运动方程为

$$\frac{d(\mu r^2\dot{\phi})}{dt}=0$$

$$\mu\ddot{r}=\mu r\dot{\phi}^2-\frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

将第一式积分，积分常数记为 J，并将其代入第二式，得

$$\mu r^2\dot{\phi}=J$$

$$\mu\ddot{r}=\frac{J^2}{\mu r^3}-\frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

再对第二式两边乘 $\dot{r}$，并积分，将积分常数记为 E，即得
$E=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{J^2}{2\mu r^2}+V(r)$

中心力场

有效势

粒子的径向运动可以看作是在“有效势”影响下的一维运动，

$$\boxed{V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{J^2}{2\mu r^2}}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)}$$

$$\boxed{\mu\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r}}$$

开普勒问题

把两体问题化为两个独立的单体问题后，我们只需要研究一个质量为约化质量的粒子在势场 $V(r)$ 中的运动，质心在原点。

开普勒问题是指 $V(r) \propto r^{-1}$

开普勒问题

吸引势 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, 其中 α 是一个正常数

首先考虑吸引势的情况，

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

其中 α 是一个正常数。

例如对于万有引力势，$\alpha = Gm_2m_1$

对于太阳系来说，太阳的质量 m_2 远大于任何一个太阳系中其它天体的质量 m_1，故

$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \approx m_1$，$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \approx \vec{r}$，$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \approx 0$

开普勒问题

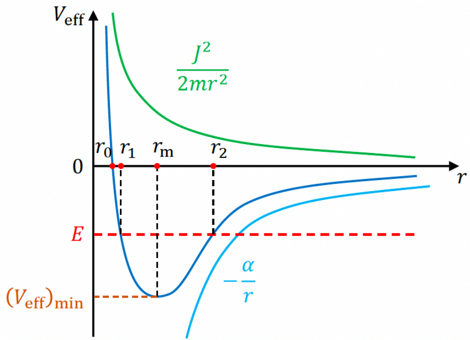
吸引势 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, 其中 α 是一个正常数

可以定义有效势

$$V_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{J^2}{2\mu r^2}$$

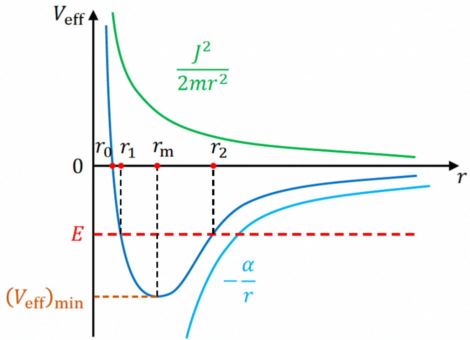
则

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$



开普勒问题

吸引势 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, 其中 α 是一个正常数



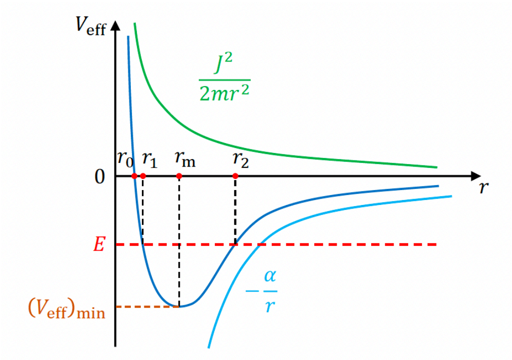
V_{eff} 在 $r_m = \frac{J^2}{\mu\alpha}$ 处存在极小值，$(V_{eff})_{min} = V_{eff}(r_m) = -\frac{\alpha^2\mu}{2J^2}$

V_{eff} 在 r_0 处存在零点，$r_0 = \frac{J^2}{2\mu\alpha}$

（推导详见 $s49$）

开普勒问题

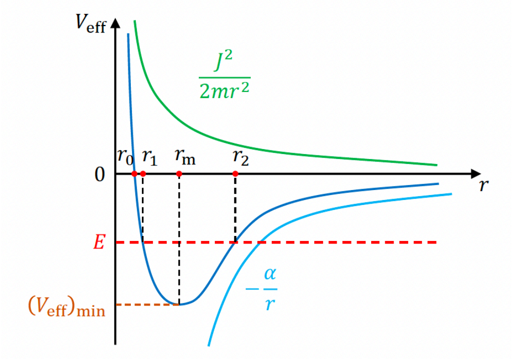
吸引势 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, 其中 α 是一个正常数



如果 $(V_{eff})_{min} < E < 0$，粒子限制在 $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ 区域运动，轨道为椭圆，r_1 称为“近日点”，r_2 称为“远日点”。

开普勒问题

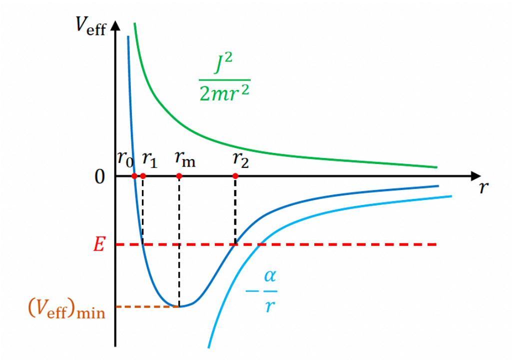
吸引势 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, 其中 α 是一个正常数



如果 $E = (V_{eff})_{min}$，轨道为圆，$r_1 = r_2 = r_m$

开普勒问题

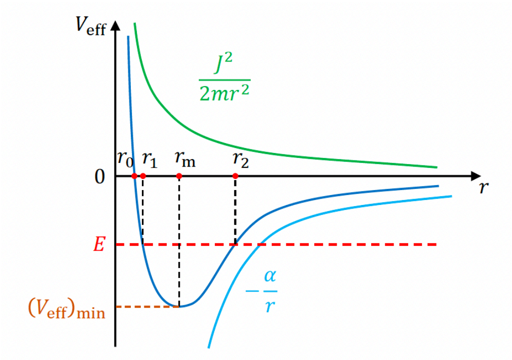
吸引势 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, 其中 α 是一个正常数



如果 $E = 0$，只有近日点 $r_1 = r_0$，无远日点（或者说远日点 $r_2 = +\infty$），轨道为抛物线。

开普勒问题

吸引势 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, 其中 α 是一个正常数



如果 $E > 0$，只有近日点，无远日点（或者说远日点 $r_2 = +\infty$），轨道为双曲线的一支。

开普勒问题

吸引势 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, 其中 α 是一个正常数

可以从

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{J^2}{\mu^2 r^2}}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{J}{\mu r^2}$$

消去 dt 并积分得到轨道方程 $r(\phi)$

（推导详见 $s50$）

开普勒问题

吸引势 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, 其中 α 是一个正常数

得到轨道方程为

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\phi}}$$

这是极坐标系下的圆锥曲线参数方程，极坐标的原点（即两体的质心位置）位于圆锥曲线的焦点，近日点对应于 $\phi = 0$。其中

$$p = \frac{J^2}{\mu\alpha}$$

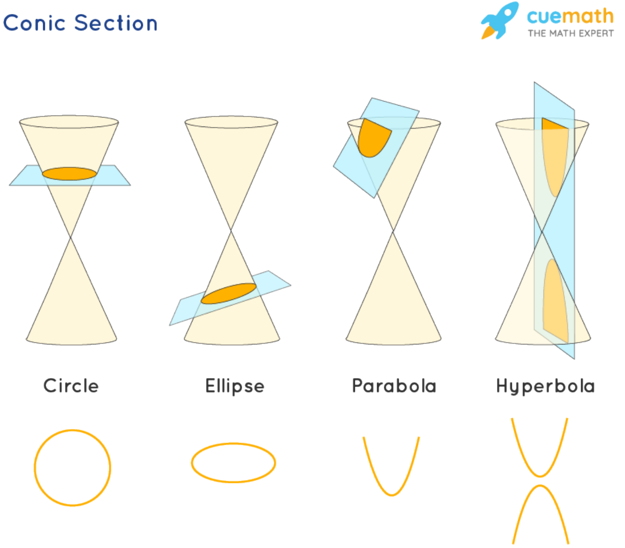
是半正焦弦，

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}}$$

是偏心率（也叫离心率）。

开普勒问题

圆锥曲线



Conic Section
cuemath
THE MATH EXPERT
Circle
Ellipse
Parabola
Hyperbola

开普勒问题

吸引势 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, 其中 α 是一个正常数

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\phi}}$$

$e = 0$ 轨道为圆,

$0 < e < 1$ 轨道为椭圆,

$e = 1$ 轨道为抛物线,

$e > 1$ 轨道为双曲线的一支，原点为该支双曲线的内焦点。

开普勒问题

吸引势 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, 其中 α 是一个正常数

对于椭圆轨道，半长轴 a 和半短轴 b 为

$$a = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{J}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

近日点 r_{min} 和远日点 r_{max} 为

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \quad r_{max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e)$$

轨道周期为

$$T = \frac{\pi ab}{r^2\dot{\phi}/2} = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\mu/\alpha}$$

其中 $r^2\dot{\phi}/2$ 是面积速度，πab 是椭圆的面积。

（推导详见 s52.5）

开普勒问题

排斥势 $V(r) = \alpha/r$，其中 α 是一个正常数

对于排斥势 $V(r) = \alpha/r$，其中 $\alpha > 0$，轨道为双曲线的一支，极坐标的原点（即两体的质心）在双曲线这一支的外焦点上，轨道方程为

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos\phi}$$

近日点 r_{min} 对应 $\phi = 0$，

$$r_{min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1)$$

（推导详见 $s52$）

拉普拉斯-隆格-楞茨矢量（Laplace-Runge–Lenz vector）

除了能量 E 和角动量 $\vec{J}$，α/r 势还存在一个被称为拉普拉斯-隆格-楞茨矢量的守恒量，

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{J} + \mu\alpha\frac{\vec{r}}{r}}$$

注意这里如果 $\alpha > 0$ 则为排斥势，$\alpha < 0$ 则为吸引势。
（证明 $\frac{d\vec{M}}{dt} = 0$ 的推导详见 $s53$）

$\vec{M}$ 的方向是沿着两体的质心（即原点）指向近日点的方向；

$\vec{M}$ 是守恒量（即常矢量）意味着从质心到近日点这一矢量的方向是不变的；

而如果从质心到近日点这一矢量的方向改变，则近日点有进动。

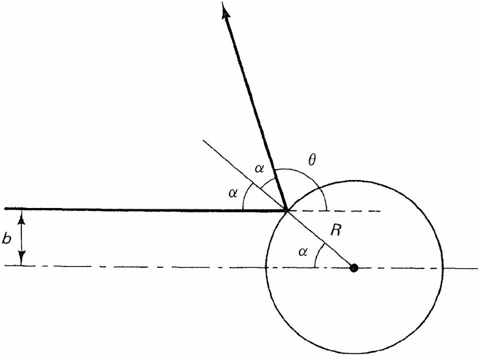
有心势中的散射问题

入射粒子（被散射者）

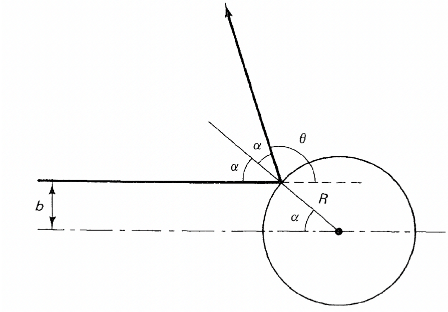
力心（散射者）

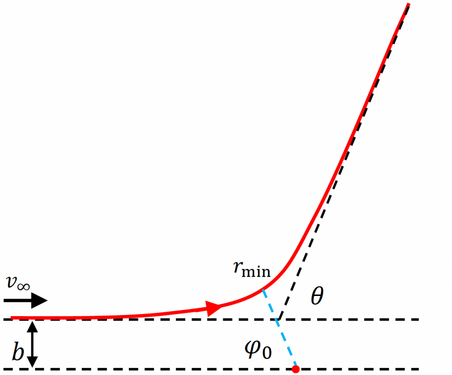
散射截面：对入射粒子来说力心的有效面积。

举例：刚球散射。



有心势中的散射问题

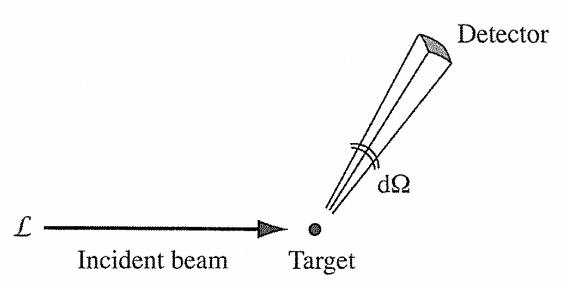




b：碰撞参数（瞄准距离）：入射速度矢量的延长线与原点之间的距离

θ： 散射角： 入射速度矢量与出射速度矢量的夹角

有心势中的散射问题

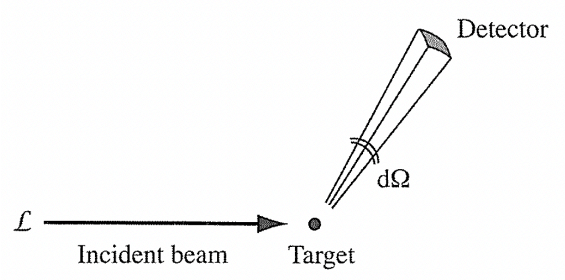


散射截面更一般的定义：

考虑一束入射粒子，流强为 I（单位时间通过垂直于入射粒子束方向的单位面积的粒子数），单位时间内被散射到某个立体角 $d\Omega$ 中的粒子数为 $dS(\theta,\phi)$，其中 $d\Omega = |\sin\theta d\theta d\phi|$，

$$d\sigma(\theta,\phi) \equiv \frac{dS(\theta,\phi)}{I}$$

有心势中的散射问题



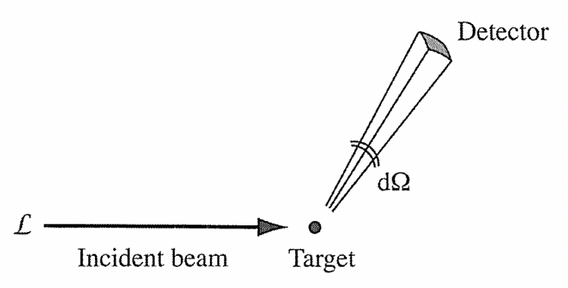
$$dS(\theta,\phi) = I\left(\frac{d\sigma(\theta,\phi)}{d\Omega}\right)d\Omega$$

$d\sigma(\theta,\phi)/d\Omega$ 称为微分散射截面。

总散射截面为

$$\sigma = \int d\sigma(\theta,\phi) = \int \left(\frac{d\sigma(\theta,\phi)}{d\Omega}\right)d\Omega = \frac{S}{I}$$

有心势中的散射问题



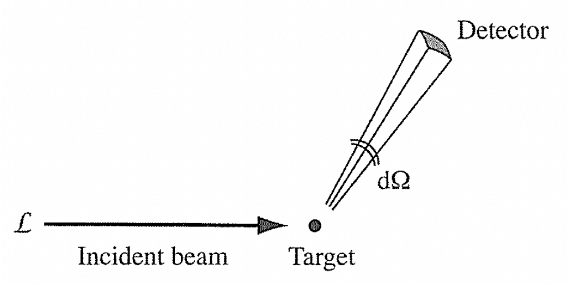
要点：

1. 粒子束中的每个粒子都是同种粒子（比如都是质子、都是电子、都是氦原子核），速度的大小和方向都一样。

2. σ 具有面积的量纲。

3. 微分散射截面体现了力心将入射粒子散射到某个特定方位角中的散射能力。

有心势中的散射问题

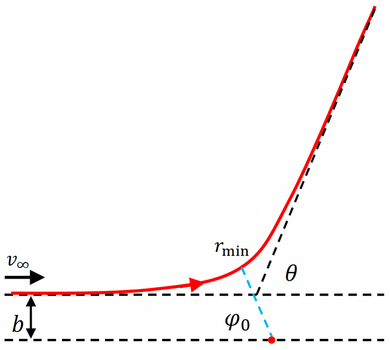


$$\boxed{\frac{d\sigma(\theta,\phi)}{d\Omega}=\frac{dS(\theta,\phi)}{I\,d\Omega}}$$

4. 这个微分散射截面的定义可使理论与实验相比较。

实验物理学家由探测器得到单位时间内散射到方位 (θ,ϕ) 附近的立体角 $d\Omega$ 中的粒子数，除以 I 和 $d\Omega$ 得出的微分散射截面与理论物理学家通过物理理论计算出来的微分散射截面比较，从而检验物理理论。

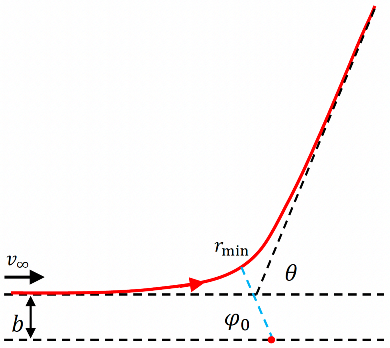
有心势中的散射问题



在有心势 $V(r)$ 中的散射，力心位于原点，入射粒子的质量为 m

注：这相当于在两体问题中把散射者的质量 (m_2) 取为无穷大，由 $\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$ 和 $\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$ 得入射粒子 (m_1) 的坐标 $\vec{r}_1$ 就等于 $\vec{r}$，散射者就在原点。约化质量 μ 就等于入射粒子的质量 m_1（以下记为 m）。通常把散射者在惯性系原点的参考系称为实验室系。

有心势中的散射问题

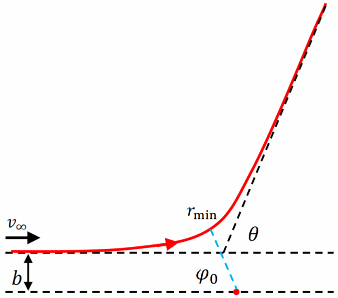


基本假设:

(1) 在 $r \to \infty$ 时, $V(r) \to 0$;

(2) 粒子从 $r = \infty$ 来, 散射后, 到 $r = \infty$ 去。

有心势中的散射问题

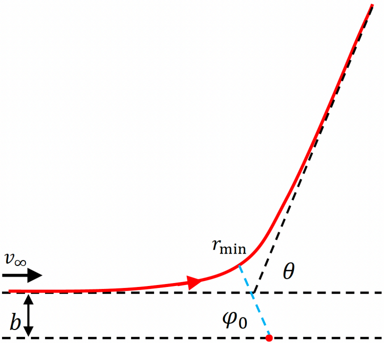


如果把入射粒子最靠近力心处的时刻取为 $t = 0$，则在 $t \to -\infty$ 时粒子从无穷远处入射到力场中，然后在 $t \to +\infty$ 时飞到无穷远去。

$t < 0$ 的轨迹与 $t > 0$ 的轨迹对称，所以蓝线与入射方向和出射方向的夹角都是 ϕ_0，因此

$$\boxed{\theta = \pi - 2\phi_0}$$

有心势中的散射问题



有心势能量守恒，且无穷远处势能为零，所以入射速率和出射速率相等。粒子的能量为 $\boxed{E = \frac{1}{2} m v_\infty^2}$

有心势角动量守恒，所以粒子的轨道在入射速度矢量与原点确定的平面内。粒子的角动量为 $\boxed{J = m b v_\infty}$

有心势中的散射问题

由

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{J^2}{m^2 r^2}}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{J}{mr^2}$$

得

$$\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} dr \frac{J/r^2}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{J^2}{r^2}}} \tag{1}$$

有心势中的散射问题

如果 $\dot{r}$ 能连续变化，则距力心最近点 r_{min} 对应 $\dot{r}=0$，于是由

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + V(r)$$

得

$$E = \frac{J^2}{2mr_{min}^2} + V(r_{min})$$

由 $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$ 和 $J = mbv_\infty$ 可将 (1) 式中的 E 和 J 用 v_∞ 和 b 表示出来，于是散射角 θ 可由 $V(r)$ 和初始条件 b、v_∞ 表示出来

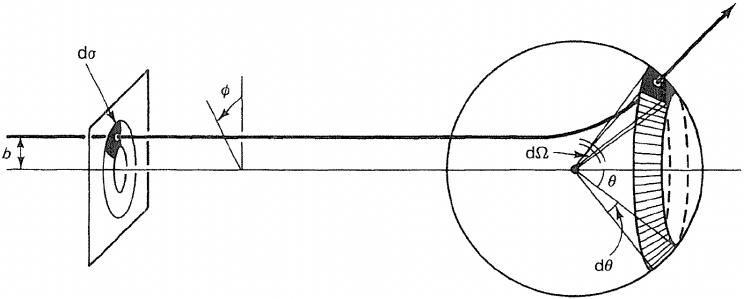
$$\boxed{\theta = \pi - 2b\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2V(r)}{mv_\infty^2}}}}$$

有心势中的散射问题

$$\boxed{\theta = \pi - 2b\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1-\frac{b^2}{r^2}-\frac{2V(r)}{mv_\infty^2}}}} \tag{2}$$

注：对于探测器来说，散射角应在 $[0,\pi]$ 之间；但若从上式得到的 θ 不在此区间，则应取负号（另外也可能需要改变 2π 的整数倍）使其变到 $[0,\pi]$ 之间。

有心势中的散射问题

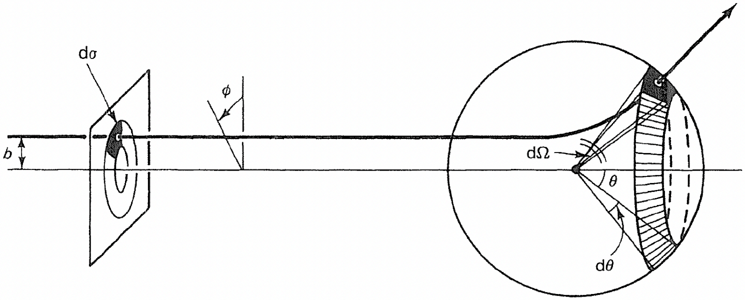


对有心势而言，散射具有轴对称性，因此微分散射截面不依赖于方位角 ϕ 而仅仅是 θ 的函数，即

$$\frac{d\sigma(\theta,\phi)}{d\Omega}=\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$$

（注：z 轴过力心，正方向为入射粒子的入射方向）

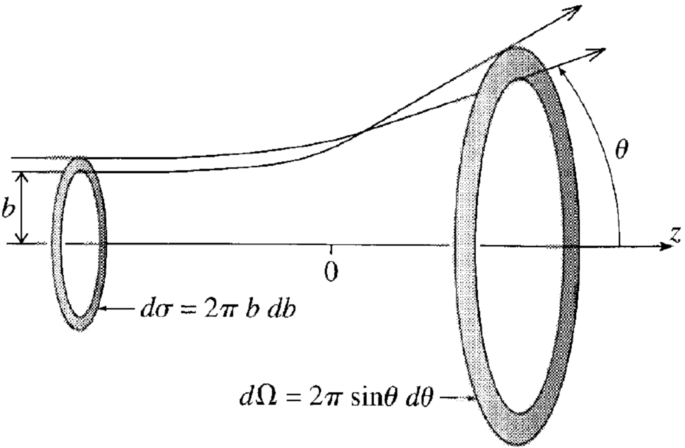
有心势中的散射问题



另外，由于角动量守恒，一个入射粒子的整个轨道都在 $\phi =$ 常数 的平面内。

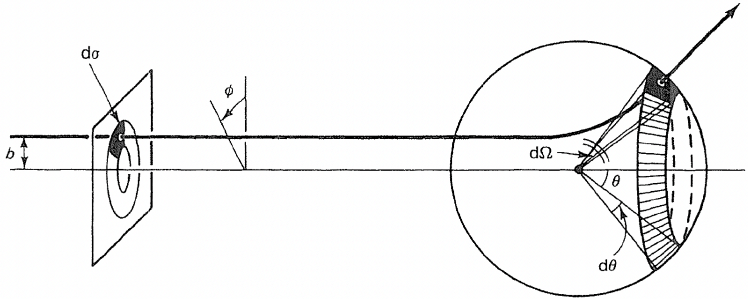
散射角 θ 唯一地由碰撞参数 b 确定，因此可以记为 $\theta = \theta(b)$ 或反过来 $b = b(\theta)$；散射到 θ 到 $\theta + d\theta$ 角度的粒子是碰撞参数在 $b(\theta)$ 到 $b(\theta) + db(\theta)$ 的粒子。

有心势中的散射问题



散射角 θ 唯一地由碰撞参数 b 确定，因此可以记为 $\theta = \theta(b)$ 或反过来 $b = b(\theta)$；散射到 θ 到 $\theta + d\theta$ 角度的粒子是碰撞参数在 $b(\theta)$ 到 $b(\theta) + db(\theta)$ 的粒子。

有心势中的散射问题

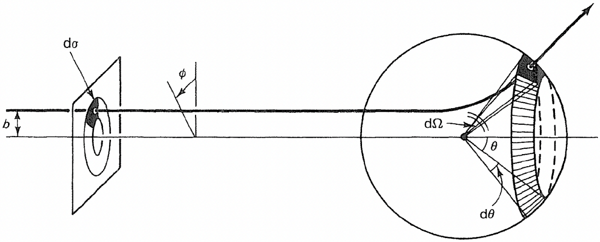


考虑从碰撞参数 b 附近，宽度为 db 的圆环中入射的粒子，单位时间内穿过其截面积 $|(b)(db)(d\phi)|$ 的粒子都将被散射到角度 θ 附近的立体角 $d\Omega = |\sin\theta d\theta d\phi|$ 中。因此，

$$dS = I|(b)(db)(d\phi)|$$

注：因为面积和立体角都是正数，所以取了绝对值号。另外，若存在多个 b 对应同一个 θ 的情况，则应在上式右边对所有贡献求和。

有心势中的散射问题



又由微分散射截面的定义，

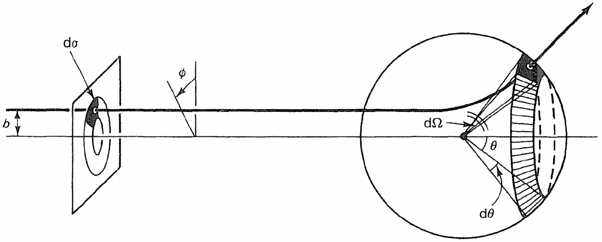
$$dS = I d\sigma(\theta) = I \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega = I \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} |\sin\theta d\theta d\phi|$$

得

$$\boxed{\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left| \frac{b(\theta) db}{\sin\theta d\theta} \right|} \tag{3}$$

如果 θ 随 b 的增加而减小，则 $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = -\frac{b(\theta)db}{\sin\theta d\theta}$

有心势中的散射问题



利用前面已经给出的 θ 和 b 的关系 (2) 式，完成积分就可以得到 $\theta(b)$，于是就可以利用 (3) 式得到微分散射截面 $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$。

注 1：有时不用 (2) 式，而直接用几何关系得出 $\theta(b)$ 更方便；

注 2：若存在多个 b 对应同一个 θ 的情况，则应在 (3) 式右边对所有贡献求和。

举例：刚球散射（hard-sphere scattering）

（详见 $s54$，注意在 r_{min} 处，$\dot{r} \neq 0$）

举例：卢瑟福散射（Rutherford scattering）

（详见 $s55$，直接用了几何关系和轨道方程得到了 θ 和 b 的关系）

（直接积分得到 θ 和 b 的关系的方法见

Mathematica code: Rutherford scattering.nb）

$$V_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{J^2}{2\mu r^2}, \quad \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{J^2}{\mu r^3} \overset{要求}{=} 0 \Rightarrow r = \frac{J^2}{\mu\alpha}$$

$$\left.\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right|_{r=\frac{J^2}{\mu\alpha}} = \left.\left(-\frac{2\alpha}{r^3} + \frac{3J^2}{\mu r^4}\right)\right|_{r=\frac{J^2}{\mu\alpha}} = \left.\frac{1}{r^3}\left(-2\alpha + \frac{3J^2}{\mu r}\right)\right|_{r=\frac{J^2}{\mu\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{J^2}{\mu\alpha}\right)^3}\left(-2\alpha + \frac{3J^2}{\mu\frac{J^2}{\mu\alpha}}\right) = \frac{\alpha}{\left(\frac{J^2}{\mu\alpha}\right)^3} > 0$$

$$\left.V_{eff}\right|_{r=\frac{J^2}{\mu\alpha}} = -\frac{\alpha}{\frac{J^2}{\mu\alpha}} + \frac{J^2}{2\mu\frac{J^4}{\mu^2\alpha^2}} = -\frac{\alpha^2\mu}{J^2} + \frac{\mu\alpha^2}{2J^2} = -\frac{\alpha^2\mu}{2J^2}$$

$\boxed{\text{因此，}V_{eff}\text{ 在 }r_m = \frac{J^2}{\mu\alpha}\text{ 处存在极小值，极小值 }(V_{eff})_{min} = -\frac{\alpha^2\mu}{2J^2}}$

当 $V_{eff}(r) = 0$ 时，

$$-\frac{\alpha}{r} + \frac{J^2}{2\mu r^2} = 0 \Rightarrow r = \frac{J^2}{2\mu\alpha}$$

$\boxed{\text{因此，}V_{eff}\text{ 在 }r_0\text{ 处存在零点，}r_0 = \frac{J^2}{2\mu\alpha}}$

S49.

由 $\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E+\frac{\alpha}{r})-\frac{J^2}{\mu^2 r^2}}$, $\alpha>0$

和 $\frac{d\phi}{dt}=\frac{J}{\mu r^2}$

得，

$$\frac{d\phi}{dr}=\pm\frac{\frac{J}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E+\frac{\alpha}{r})-\frac{J^2}{\mu^2 r^2}}}$$

以下推导省略正负号，但可验证结果正确。 即正负号的选择保证了轨道的连续性，而最终得到的轨道方程确实是连续的.

$$\phi=\int\frac{\frac{J}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E+\frac{\alpha}{r})-\frac{J^2}{\mu^2 r^2}}}dr.$$

$$=\int\frac{J^2}{\mu\alpha r^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}+1-\left(1-\frac{J^2}{\mu\alpha r}\right)^2}}$$

令 $\boxed{p\equiv\frac{J^2}{\mu\alpha},\quad e\equiv\sqrt{1+\frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}}}$ (注：$E_{min}=(V_{eff})_{min}=-\frac{\alpha^2\mu}{2J^2}$，所以 $1+\frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}\geqslant 0$.)

得

$$\phi=\int\frac{p}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{e^2-(1-\frac{p}{r})^2}}$$

令 $u\equiv 1-\frac{p}{r}$, $\Rightarrow du=\frac{p}{r^2}dr$

$$\Rightarrow \phi=\int\frac{du}{\sqrt{e^2-u^2}}=\arcsin\left(\frac{u}{e}\right)+\varphi_0$$

$$\Rightarrow u=1-\frac{p}{r}=e\sin(\varphi-\varphi_0)$$

取 $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$，得

$$1-\frac{p}{r}=-e\cos\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{r=\frac{p}{1+e\cos\phi}}$$

这样，$\phi=0$ 对应近日点

对于排斥势 $V(r)=\frac{\alpha}{r}$，$(\alpha>0)$

由 $\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E-\frac{\alpha}{r})-\frac{J^2}{\mu^2r^2}}$

和 $\frac{d\phi}{dt}=\frac{J}{\mu r^2}$

得 $\frac{d\phi}{dr}=\pm\frac{\frac{J}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E-\frac{\alpha}{r})-\frac{J^2}{\mu^2r^2}}}$

以下推导省略正负号，但可验证结果正确

$$\Rightarrow \phi=\int\frac{J^2}{\mu\alpha r^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}+1-(1+\frac{J^2}{\mu\alpha r})^2}}$$

令 $\boxed{p\equiv\frac{J^2}{\mu\alpha},\quad e\equiv\sqrt{1+\frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}}}$，得

$$\phi=\int\frac{p}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{e^2-(1+\frac{p}{r})^2}}$$

令 $u\equiv 1+\frac{p}{r}$，得 $du=-\frac{p}{r^2}dr$

$$\Rightarrow \phi=-\int\frac{du}{\sqrt{e^2-u^2}}=-\arcsin\left(\frac{u}{e}\right)+\phi_0$$

$$\Rightarrow u=1+\frac{p}{r}=-e\sin(\phi-\phi_0)$$

$$\Rightarrow r=\frac{p}{-1-e\sin(\phi-\phi_0)}$$

取 $\phi_0=\frac{\pi}{2}$，得

$$\boxed{r=\frac{p}{-1+e\cos\phi}}$$

这样，$\phi=0$ 对应近日点

S52.

椭圆轨道的半长轴和半短轴

$$a-c = r_{min} = \frac{p}{1+e\cos 0} = \frac{p}{1+e}$$

而 $a-c = a(1-e)$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\frac{J^2}{\mu\alpha}}{-\frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}} = -\frac{\alpha}{2E} = \frac{\alpha}{2|E|}}$$

$$\boxed{b = \sqrt{a^2-c^2} = a(1-e^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\frac{J^2}{\mu\alpha}}{\left(-\frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{J}{\sqrt{2\mu|E|}}}$$

椭圆轨道的近日点和远日点

$$r_{min} = \frac{p}{1+e\cos 0} = \frac{p}{1+e} = a(1-e)$$

$$r_{max} = \frac{p}{1+e\cos\pi} = \frac{p}{1-e} = a(1+e)$$

椭圆轨道的周期

$$\boxed{T = \frac{\pi ab}{r^2\dot{\varphi}/2}} = \frac{\pi ab}{r^2\frac{J}{\mu r^2}/2} = \frac{2\mu\pi ab}{J} = \frac{2\mu\pi a\frac{J}{\sqrt{2\mu|E|}}}{J}$$

$$= 2\pi a\sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} = 2\pi a\sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}} = \boxed{2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}}$$

双曲线（吸引势）

由 $r_{min} = c-a$，$r_{min} = \frac{p}{1+e\cos 0} = \frac{p}{1+e}$，$c = ae$，得

$$\boxed{r_{min} = a(e-1) = \frac{p}{1+e}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\frac{J^2}{\mu\alpha}}{\frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}} = \frac{\alpha}{2E}}$$

双曲线（排斥势）

$$\boxed{r_{min} = a+c = a(e+1)}, \quad \boxed{r_{min} = \frac{p}{-1+e\cos 0} = \frac{p}{e-1}}$$

552.5

证明 $\vec{M}=\vec{p}\times\vec{J}+\mu\alpha\frac{\vec{r}}{r}$ 是守恒量.

由拉氏量 $L=\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2-V(r)=\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2-\frac{\alpha}{r}$,(α 可大于或小于0)

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial L}{\partial\vec{r}}=-\frac{\partial V(r)}{\partial\vec{r}}=\frac{\partial(-\frac{\alpha}{r})}{\partial\vec{r}}=\frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{p}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}}=\mu\dot{\vec{r}},\quad \dot{\vec{p}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}}\right)=\mu\ddot{\vec{r}}$$

拉氏方程

$$\Rightarrow\quad \dot{\vec{p}}=\mu\ddot{\vec{r}}=\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}$$

所以 $$\frac{d}{dt}\vec{M}=\dot{\vec{p}}\times\vec{J}+\vec{p}\times\dot{\vec{J}}+\mu\alpha\frac{\dot{\vec{r}}}{r}+\left(-\mu\alpha\frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2}\right)$$

$$=\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}\times\vec{J}+0+\mu\alpha\frac{\dot{\vec{r}}}{r}-\mu\alpha\frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2}$$

利用了角动量守恒
故 $\dot{\vec{J}}=0$

$$由\ \vec{J}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(\mu\dot{\vec{r}})\Rightarrow\vec{r}\times\vec{J}=\mu\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})$$

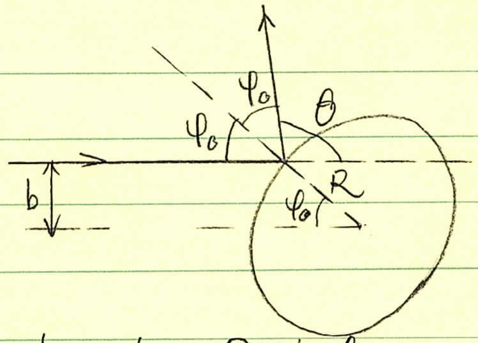
利用 $$[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})]^i=\varepsilon^{ijk}a^j(\vec{b}\times\vec{c})^k=\varepsilon^{ijk}a^j\varepsilon^{kmn}b^mc^n$$
$$=(\delta^{im}\delta^{jn}-\delta^{in}\delta^{jm})a^jb^mc^n=b^i(\vec{a}\cdot\vec{c})-c^i(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

即 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$$\Rightarrow\quad \frac{\alpha}{r^3}\vec{r}\times\vec{J}=\frac{\alpha}{r^3}\mu\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})=\frac{\alpha\mu}{r^3}[\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})-\dot{\vec{r}}(\vec{r}\cdot\vec{r})]$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\alpha\mu}{r^3}\vec{r}\frac{d(\vec{r}\cdot\vec{r})}{dt}-\frac{\alpha\mu}{r}\dot{\vec{r}}=\frac{1}{2}\frac{\alpha\mu}{r^3}\vec{r}\frac{dr^2}{dt}-\frac{\alpha\mu}{r}\dot{\vec{r}}$$
$$=\frac{\alpha\mu}{r^2}\vec{r}\dot{r}-\frac{\alpha\mu}{r}\dot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\vec{M}=0.$$

即 $\vec{M}$ 是守恒量



$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \le R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

由 $b = R\sin\varphi_0$

$2\varphi_0 + \theta = \pi$

$$\Rightarrow \boxed{b = R\sin[(\pi-\theta)/2] = R\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$db = -R\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}d\theta$$

$$\boxed{\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}} = \left|\frac{b(\theta)db}{\sin\theta\, d\theta}\right| = \left|\frac{R\cos\frac{\theta}{2}(-R)\sin\frac{\theta}{2}\,\frac{1}{2}d\theta}{\sin\theta\ d\theta}\right|$$

$$= \boxed{\frac{R^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma} = \int\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}d\Omega = \frac{R^2}{4}4\pi = \boxed{\pi R^2}$$

注意，$r_{min} = R$；当 $r = r_{min}$ 时，$\dot{r} \neq 0$.

$V(r)=\frac{\alpha}{r}$，$\alpha>0$，

轨道方程为 $r=\frac{p}{-1+e\cos\phi}$ （推导见 552）

$\Rightarrow$ $r_{min}=\frac{p}{-1+e}$ （对应于 $\phi=0$）

当 $\cos\phi=\frac{1}{e}$ 时，$r=\infty$

因此，由 $\theta=\pi-2\phi_0$ 得

$$\phi_0=\frac{\pi-\theta}{2}$$

于是 $\cos\phi_0=\frac{1}{e}$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)=\frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{e}$$

而 $e=\sqrt{1+\frac{2EJ^2}{m\alpha^2}}$

由 $E=\frac{1}{2}mV_\infty^2$ 和 $J=mV_\infty b$ 得

$$e=\sqrt{1+\frac{2\times\frac{1}{2}mV_\infty^2\, m^2V_\infty^2 b^2}{m\alpha^2}}=\sqrt{1+\frac{m^2b^2V_\infty^4}{\alpha^2}}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2}=\left(1+\frac{m^2b^2V_\infty^4}{\alpha^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \csc^2\frac{\theta}{2}=1+\frac{m^2b^2V_\infty^4}{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow b^2=\frac{\alpha^2}{m^2V_\infty^4}\cot^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow b(\theta)=\frac{\alpha}{mV_\infty^2}\cot\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow db=\frac{\alpha}{mV_\infty^2}\left(-\csc^2\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{2}\,d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}}=\left|\frac{b(\theta)\,db}{\sin\theta\, d\theta}\right|=\left|\frac{\left(\frac{\alpha}{mV_\infty^2}\right)^2\cot\frac{\theta}{2}\csc^2\frac{\theta}{2}\,\frac{1}{2}}{\sin\theta}\right|=\boxed{\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{mV_\infty^2}\right)^2\csc^4\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \sigma=\int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega=\frac{2\pi}{4}\left(\frac{\alpha}{mV_\infty^2}\right)^2\int_0^\pi\csc^4\frac{\theta}{2}\sin\theta\, d\theta=\infty$$

本程序的目的：直接用积分公式

$$\theta = \pi - 2\,b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\,V(r)}{m\,v_\infty{}^2}}}$$

求出Rutherford散射中散射角θ和瞄准距离b的关系

This code was made and checked on Nov. 4, 2024.

rec1是被积函数，已把V(r)写作α/r

In[1]:=
```
rec1 = (r^2 * (1 - b^2 / r^2 - 2 * α / (m * v∞^2 * r)) ^ (1 / 2)) ^ (-1)
```

Out[1]=
$$\frac{1}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\,\alpha}{m\,r\,v_\infty^2}}}$$

利用$E = \frac{1}{2}\,m\,v_\infty{}^2$ 和 $J = mbv_\infty$ 以及 $E = \frac{J^2}{2\,m\,r_{min}{}^2} + \frac{\alpha}{r_{min}}$ 得

$$1 = \frac{m^2\,b^2\,v_\infty{}^2}{2\,m\,r_{min}{}^2} * 2 \Big/ \left(m\,v_\infty{}^2\right) + \frac{\alpha}{r_{min}} * 2 \Big/ \left(m\,v_\infty{}^2\right)$$，即

$$1 = \frac{b^2}{r_{min}{}^2} + \frac{2\,\alpha}{m r_{min}\,v_\infty{}^2}$$

rec2=rec1，但利用了上面的关系。rmin是r_{min}

In[2]:=
```
rec2 = (r^2 * (1 - b^2 / r^2 - (1 - b^2 / rmin^2) * rmin / r) ^ (1 / 2)) ^ (-1)
```

Out[2]=
$$\frac{1}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{\left(1 - \frac{b^2}{rmin^2}\right) rmin}{r}}}$$

In[3]:=
```
Integrate[rec2, {r, rmin, +∞}, Assumptions → {(rmin > 0) && (b > 0)}]
```

Out[3]=
$$\frac{2\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{b}{rmin}\right]}{b}$$

In[4]:=
```
θ = π - 2 * b * %
```

Out[4]= $\pi - 4\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{b}{rmin}\right]$

计算Sin[θ/2]

In[5]:=
```
Simplify[Sin[θ / 2]]
```

Out[5]= $\mathrm{Cos}\left[2\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{b}{rmin}\right]\right]$

代入rmin= p/(e-1), p= J^2/(m*α), e= (1+2*E*J^2/(m*α^2))^(1/2)以及E和J的表达式

In[6]:=
```
Simplify[(% /. {rmin → p / (e - 1)}) /. {p → (m * b * vinf) ^ 2 / (m * α),
   e → (1 + 2 * 1 / 2 * m * vinf ^ 2 * (m * b * vinf) ^ 2 / (m * α ^ 2)) ^ (1 / 2)}]
```

Out[6]=
$$\text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{\left(-1+\sqrt{1+\frac{b^2\,m^2\,\text{vinf}^4}{\alpha^2}}\right)\alpha}{b\,m\,\text{vinf}^2}\right]\right]$$

In[7]:=
```
StandardForm[%]
```

Out[7]//StandardForm=
$$\text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{\left(-1+\sqrt{1+\frac{b^2\,m^2\,\text{vinf}^4}{\alpha^2}}\right)\alpha}{b\,m\,\text{vinf}^2}\right]\right]$$

记 $\frac{\left(-1+\sqrt{1+\frac{b^2\,m^2\,\text{vinf}^4}{\alpha^2}}\right)\alpha}{b\,m\,\text{vinf}^2}$ 为x

由Cos[2*Arctan[x]] = 2 (Cos[Arctan[x]])^2 - 1 = 2 ((Sec[Arctan[x]])^2)^(-1) - 1 = 2 (1+(Tan[Arctan[x]])^2)^(-1) - 1 = 2 (1+x^2)^(-1) - 1，得

In[8]:=
$$\text{FullSimplify}\left[2*\left(1+\left(\frac{\left(-1+\sqrt{1+\frac{b^2\,m^2\,\text{vinf}^4}{\alpha^2}}\right)\alpha}{b\,m\,\text{vinf}^2}\right)^{\wedge}2\right)^{\wedge}(-1)-1\right]$$

Out[8]=
$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2\,m^2\,\text{vinf}^4}{\alpha^2}}}$$

这与s55的结果相同

In[9]:=
```
Date[]
```

Out[9]= {2024, 11, 5, 16, 17, 22.415475}