Planche de topologie : exercices corrigés

Antoine Moreau

21 juillet 2017

Résumé

I Topologie générale

Exercice I.1 :

1. Rappeler la définition axiomatique des ouverts, et des fermés d'un espace topologique -ici le plus souvent, un espace vectoriel normé.

   Soit (E, d) un espace métrique, par exemple une partie d'un espace vectoriel normé munie de la distance associée à la norme.
2. Quelle est la caractérisation des ouverts de E par la distance -boules ouvertes ?
3. Montrer que tout fermé de E est intersection d'une suite d'ouverts.
4. Montrer que tout ouvert de E est la réunion d'une suite de fermés.
5. Que penser d'une intersection infinie d'ouverts, d'une union infinie de fermés, dans un espace métrique ?

* * *

Exercice I.2 :

Soit (E, d) un espace métrique.

1. L'adhérence d'une boule ouverte est-elle nécessairement la boule fermée de même centre et de même rayon ?
2. Montrer que c'est le cas si E est un espace vectoriel normé.

* * *

Exercice I.3 (Ouverts de $\mathbb{R}$) :

1. Montrer qu'un ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion disjointe d'une famille d'intervalles ouverts.
2. Montrer que cette union est au plus dénombrable.

* * *

Exercice I.4 (Le même, avec des questions intermédiaires) :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. On se propose d'établir le décomposition suivante :

$$U = \bigsqcup_{d \in D} I_d$$

où (I_d) est une famille d'intervalles ouverts, disjoints deux à deux, indexée dans un ensemble D au plus dénombrable.
On suppose que U est non vide, le cas contraire étant trivial.

1. Soit x un élément de U. Construire un intervalle I_x, incluant tous les intervalles de $\mathbb{R}$, eux-même inclus dans U, qui contiennent x.
2. Montrer qu'un intervalle de la forme I_x construite précédemment est *maximal* dans U, c'est-à-dire qu'il n'est inclus strictement dans aucun intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans U.
3. Que peut-on dire de deux intervalles maximaux de U ?
4. Déduire des questions précédentes que U est l'union disjointe de tous ses intervalles maximaux.
5. Montrer que cette union est au plus dénombrable. On utilisera la topologie d'une partie bien choisie de $\mathbb{R}$.

* * *

Exercice I.5 :

1. Rappeler la définition des espaces compacts par la propriété de Borel-Lebesgue.

   Soit K un espace compact.
2. Montrer que, si (F_i) est une famille de fermés de K dont l'intersection est vide, alors il existe une sous-famille finie de (F_i) d'intersection vide.
3. Montrer qu'une suite décroissante de fermés non vides de K a une intersection non vide.

* * *

Exercice I.6 :

Soit K un espace métrique compact, par exemple dans un espace vectoriel normé E.

1. Montrer qu'une suite d'éléments de K converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Soient maintenant f une application continue de K dans lui-même, et x_0 un élément de K. On étudie la suite récurrente $(x_n)_n$, de premier terme x_0, et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$$

On suppose, dans toute la suite de l'exercice, que (x_n) admet exactement deux valeurs d'adhérence z_0 et z_1.

2. Montrer que, quels que soient les voisinages V_0 et V_1 de z_0 et z_1 respectivement, il existe un entier naturel N tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n \in V_0 \vee x_n \in V_1$$
3. Soit φ une extraction telle que : $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers x_0. En étudiant la suite $(x_{\varphi(n)+1})$, montrer que :
$$f(z_0) = z_1$$
   Un raisonnement semblable permet bien sûr de montrer que : $f(z_1) = z_0$.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que les suites $(x_{2n})_n$ et (x_{2n+1}) convergent, l'une vers z_0, et l'autre vers z_1.

* * *

Exercice I.7 :

Soit (K, d) un espace métrique compact, par exemple un fermé borné d'un espace vectoriel normé de dimension finie.
On considère une isométrie f de K dans lui-même, c'est-à-dire une application de K dans K qui conserve la distance.

1. f admet-elle nécessairement un point fixe ?
2. Montrer que f est surjective.

* * *

Exercice I.8 (Espaces métriques enchaînés) :

Dans tout l'exercice, on notera (E,d) un espace métrique.
Pour tout réel strictement positif, on définit la relation d'équivalence $\Re_\epsilon$ définie par :

$x\Re_\epsilon y$ si et seulement si il existe une famille finie $(x_k)_{k\in[0,n]}1$ de $n+1$ points de E telle que :

$$x_0 = x \wedge x_n = y \wedge \forall k \in [0,n], d(x_k x_{k+1}) < \epsilon$$

On peut définir la conjonction, ou intersection de ces relations d'équivalence, que nous noterons $\Re$.
On dit que (E,d) est *bien enchaîné* -Cantor-connected- si et seulement si dux éléments de E sont toujours reliés par $\Re$.

1. Soit : $\epsilon \in \mathbb{R}^*$. Montrer que les classes modulo $\Re_\epsilon$ sont ouvertes, puis qu'elles incluent les conposantes connexes de la topologie de E.
2. Montrer qu'un espace métrique connexe pour sa topologie usuelle, est bien enchaîné.
3. Réciproquement, un espace métrique bien enchaîné est-il nécessairement connexe ?
4. Montrer que, si (E,d) est compact et bien enchaîné, alors il est connexe.

* * *

II Espaces vectoriels normés

Exercice II.1 :

Dans tout l'exercice, K est un compact, E est l'espace vectoriel des applications continues de K dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie.

1. Soit φ une application uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $E \to E : f \mapsto \varphi \circ f$ est uniformément continue. Est-elle linéaire ?
2. Soit ψ une application continue de K dans K. Montrer que $E \to E : f \mapsto f \circ \psi$ est linéaire continue, et calculer sa norme.

* * *

Exercice II.2 :

Soit φ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés E et F.
Montrer que φ est continue si et seulement si elle transforme toute suite qui tend vers 0 en une suite bornée.

* * *

Exercice II.3 :

Soit n un entier naturel non nul. Soit de plus G l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures et de déterminant 1.
G est-il fermé, borné, connexe par arcs ?

* * *

Exercice II.4 :

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On étudie ici, pour tout compact A dans E, l'ensemble L_A des endomorphismes de E qui stabilisent A.

1. Pourquoi les éléments de L_A sont-ils continus ?
2. Montrer que L_A est fermé, quel que soit le compact A de E.

   On veut maintenant caractériser les compacts A de E tels que L_A est lui-même compact.

3. D'après ce qui précède, quelle propriété doit-on rechercher sur A pour conclure ? Montrer que cette propriété ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathcal{L}(E)$.

   On suppose que A est un compact de E qui contient les vecteurs d'une base $(e_i)_i$ de E. On peut écrire : $$VectA = E.$$

4. Montrer que l'application qui à une application linéaire f de E dans lui-même asocie le réel positif : $\max_i \|f(e_i)\|$ est une norme de $\mathcal{L}(E)$.
5. En déduire que L_A est borné, conclure.
6. Montrer réciproquement que tout compact A de E tel que L_A est compact vérifie : $VectA = E$. On pourra raisonner par l'absurde.

* * *

III Ancien programme : espaces complets

Exercice III.1 :

Soit E un espace vectoriel normé.
Montrer que E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente de E est convergente.

* * *

Exercice III.2 :

Soit (E, d) un espace métrique complet, par exemple un fermé d'un espace de Banach, muni de la distance associée à la norme.

1. Théorème de Baire : soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de E. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans E.
2. Montrer que la réunion d'une suite de fermés d'intérieurs vides de E est d'intérieur vide.
3. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

   On note maintenant $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
5. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Montrer que E n'admet pas de base dénombrable.
6. Montrer qu'il n'existe pas de norme pour laquelle $\mathbb{K}[X]$ soit un espace de Banach.

* * *

Exercice III.3 :

$\mathbb{K}$ est ici le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $l^\infty(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des suites bornées de $\mathbb{K}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall (u_n) \in l^\infty(\mathbb{K}), \|(u_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

Montrer que $l^\infty(\mathbb{K})$ est un espace de Banach.

* * *

Exercice III.4 :

$\mathbb{K}$ est ici le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $p \in [1, +\infty[$
On note, pour tout réel p supérieur ou égal à 1, $l^p(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des suites (u_n) de $\mathbb{K}$ telles que $\sum |u_n|^p$ converge, muni de la norme $\|.\|_p$ définie par :

$$\forall (u_n) \in l^p(\mathbb{K}), \|(u_n)\|_p = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p)^{1/p}$$

1. Quelles relations d'inclusion existe-t-il entre les espaces $l^p(\mathbb{K})$?
2. Montrer que ces espaces vectoriels normés sont de Banach.

* * *

Exercice III.5 :

Soit E un espace vectoriel normé.
Montrer que E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente de E est convergente.

* * *

Exercice III.6 :

$\mathbb{K}$ est ici le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $l^\infty(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des suites bornées de $\mathbb{K}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall (u_n) \in l^\infty(\mathbb{K}), \|(u_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

Montrer que $l^\infty(\mathbb{K})$ est un espace de Banach.

* * *

Exercice III.7 (Dual de l^1) :

On se place dans l'espace des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente, nous notons cet espace $l^1(\mathbb{R})$ et le munissons de la norme $\|\|_1$ définie par : $\forall (u_n)_n \in l^1, \|(u_n)\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. On appelle dual topologique de cet espace, et note $(l^1)'$, l'espace vectoriel des formes linéaires continues de l^1, que nous munirons de la norme subordonnée à $\|\|_1$à la source, $||$ à l'arrivée.
Montrer qu'il existe une isométrie linaire ϕ de l'espace l^∞ des suites réelles bornées muni de la norme infinie, sur $(l^1)'$, telle que :

$$\forall (a_n)_n \in l^\infty, \forall (u_n) \in l^1, \phi((a_n)_n)((u_n)_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$$

* * *

Exercice III.8 :

1. Enoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
2. Rappeler la définition de l'intégrabilité au sens de Riemann sur un segment.
3. Que dire de l'intégrale d'une limite uniforme de fonctions Riemann-intégrables ?

   Soit maintenant I un intervalle réel. On appelle fonction localement intégrable sur I une fonction intégrable sur tout segment de I. On peut se ramener au cas au cas d'un intervalle I de la forme $[a, b[$, où a est un nombre réel, et b un eélément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, strictement supérieur à a.
4. Montrer le théorème de convergence dominée pour l'intégrale de Riemann impropre :

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur I, localement intégrables et dominées par une fonction ϕ, positive et intégrable sur I. On note que les intégrales des termes de (f_n) convergent. Si (f_n) converge vers une limite f définie sur I, alors f est localement intégrable sur I, son intégrale sur I converge et :

$$\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

* * *

Exercice III.9 :

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, telle que f et f'^2 soient intégrables.
Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$.

* * *