Khôlles en MP-MP* : sujets posés aux Lazaristes et leurs corrigés, 2009-2016

Antoine Moreau

21 juillet 2017

Résumé

Ce document rassemble les énoncés des exercices et questions de cours que j'ai réalisés pour des khôlles aux Lazaristes, entre l'automne 2009 et le printemps 2016, ainsi que leurs solutions et réponses. Sauf mention du contraire, les solutions sont personnelles, par ailleurs la provenance de chaque énoncé est indiquée.

Chapitre 1

Questions de cours

I Enoncés seuls

Question I.1 :

Enoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Question I.2 :

Enoncer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Question I.3 :

Enoncer et nommer le théorème de dérivation sous le signe $\int$.

Question I.4 :

- Enoncer le théorème de comparaison des sommes partielles de deux séries à termes positifs.
- Enoncer le théorème de comparaison des restes de deux séries à termes positifs.

Question I.5 :

Enoncer et démontrer le théorème de représentation des formes linéaires d'un espace Euclidien.

Question I.6 :

Que dire d'une suite $(u_n)_n$ telle que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(0)$?

II Propositions à démontrer

Question II.1 :

Enoncer et démontrer le théorème de dŕivabilité, et la formule de dérivation, d'une fonction réciproque.

Question II.2 (Ancien programme) :

Exprimer $\arg\cosh$ et $\arg\sinh$ à l'aide de la fonction logarithme et de fonctions algébriques.

Question II.3 :

Enoncer et démontrer le critère de convergence des intégrales de Bertrand.

Question II.4 :

Enoncer et démontrer le théorème de convergence des séries de Bertrand.

Question II.5 :

Décomposer sur $\mathbb{C}$, $\frac{P'}{P}$ en éléments simples, où P est un polynôme complexe non constant.

Question II.6 :

Définir les polynômes de Tchebycheff, et établir une relation de récurrence entre les termes de la suite de ces polynômes. Calculer le polynôme de Tchebycheff de degré 5.

Question II.7 :

Montrer que, pour tout espace vectoriel de dimension finie E, toute famille (u_i) d'endomorphismes de E qui commutent deux à deux admet une base de diagonalisation commune dans E.

Question II.8 :

Démontrer qu'une matrice réelle symétrique est diagonalisable *id est* énoncer et démontrer le théorème spectral.

Question II.9 :

Calculer $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Question II.10 :

Soient r_1 et r_2 deux rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas des retournements. Montrer que ces rotations commutent si et seulement si elles ont le même axe.

Question II.11 (Ancien programme) :

Donner une classification complète des quadriques vectorielles en dimension 3.

Question II.12 :

Classifier totalement les automorphismes de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$.

III Calcul de primitives

Question III.1 :

Donner une primitive de $x \mapsto x \tan^2 x$ sur un intervalle sur lequel elle est définie.

Question III.2 :

Donner une primitive de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Question III.3 :

Donner une primitive, sur $\mathbb{R}_+^*$, de la fonction $x \mapsto \frac{(\ln x)^n}{x}$ -n est un entier différent de -1.

Question III.4 :

Soit a un réel strictement positif.
Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur l'intervalle $]-a, a[$.

Question III.5 :

Soient a un réel non nul, et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{x}{(a^2+x^2)^n}$.

Question III.6 :

Donner une primitive, sur $\mathbb{R}^*$, de $x \mapsto \frac{x}{1+\sqrt{x}}$.

Question III.7 :

Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x \tanh^2 x$.

Question III.8 :

Donner une primitive sur $]-\pi, \pi[$ de la fonction $x \mapsto \cos(x) \ln(1+\cos(x))$.

Question III.9 :

Soient a et b deux réels, b étant non nul. Donner des primitives de $x \mapsto \frac{\sin x}{a+b\cos x}$ sur les intervalles sur lesquels elle est définie.

Question III.10 :

Donner une primitive de $x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur son intervalle de définition.

Question III.11 :

Donner une primitive de $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}$ sur $]1, +\infty[$.

Question III.12 :

Donner des primitives de $x \mapsto \cos(ax)\cos(bx)$ et $x \mapsto \sin(ax)\sin(bx)$ sur $\mathbb{R}$, lorsque a et b sont deux réels quelconques.

Question III.13 :

Doner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x\sin(\alpha x)$ lorsque α est un réel non nul.

Question III.14 :

Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{x}{\cosh^2 x}$.

Question III.15 :

Donner une primitive de la fonction $\arg\tanh$ sur l'intervalle $]-1, 1[$.

Question III.16 :

Donner une primitive de la fonction $\arg\cosh$ sur $]1, +\infty[$.

Question III.17 :

Donner une primitive de la fonction $\arg\sinh$ sur $\mathbb{R}$.

Question III.18 :

Donner une primitive, sur un intervalle que l'on précisera, de la fonction $\frac{1}{\cos}$.

Question III.19 :

Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ sur un intervalle sur lequel cette fonction est définie.

Question III.20 :

Donner une primitive de $x \mapsto \frac{\cos x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV Formules de trigonométrie

Question IV.1 :

Donner les formule de linéarisation pour $\cos^2$ et $\sin^2$.

Question IV.2 :

Soit : $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin 3x$ et $\cos 3x$ comme des polynômes, respectivement en $\sin x$ et $\cos x$.

Question IV.3 :

Soient p et q deux réels. Exprimer $\tan p$ et $\tan q$ en fonction de cos et sin -en $p+q$, p, q.

Question IV.4 :

Soit a un réel. Exprimer $\sin 2a$ en fonction de $\tan a$.

Question IV.5 :

Rappeler les formules de factorisation des $\cos p \pm \cos q$ et $\sin p \pm \sin q$, lorsque p et q sont deux réels quelconques.

Question IV.6 :

Donner l'expression du cosinus et du sinus d'un angle de $]-\pi, \pi[$ en fonction de la tangente de l'angle moitié.

Question IV.7 :

Calculer : $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$, pour un entier naturel n.

Question IV.8 (Ancien programme) :

Ecrire les formules d'addition pour tan et tanh.

V Développements en série entière

Question V.1 :

Donner le développement en série entière ; au voisinage de 0, de la fonction $\operatorname{arg\,tanh}$.

Question V.2 :

Donner le développement en série entière, au voisinage de 0, de la fonction $\operatorname{arg\,sinh}$.

Question V.3 :

Donner le développement en série entière, au voisinage de 0, de la fonction $\arg\cosh$.

Question V.4 :

Soit α un réel quelconque. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Question V.5 :

Donner le développement en série entière ; au voisinage de 0, de la fonction arctan.

Question V.6 :

Donner le développement en série entière, au voisinage de 0, de la fonction arcsin.

Question V.7 :

Donner le développement en série entière, au voisinage de 0, de la fonction arccos.

Question V.8 :

Donner le dévelppoement en série entière au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$. Peut-on prolonger ce développement au bord de l'intervalle de convergence ?

Question V.9 :

Donner un développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ au voisinage de 0.

Chapitre 2

Algèbre générale

I Groupes, anneaux

Exercice I.1 :

Soit E un ensemble.
Montrer que E est infini si et seulement si, toute bijection de E sur lui-même stabiliseau moins une partie stricte de E.

* * *

Exercice I.2 (Cas particulier du théorème de Cauchy) :

Soient p un nombre premier impair, et G un groupe d'ordre $2p$.
Montrer que G admet un élément d'ordre p.

* * *

Exercice I.3 :

Soit $(G, .)$ un groupe abélien fini, noté multiplicativement. Pour tout élément x de G, on note $O(x)$ l'ordre de x.

1. Soient x et y deux éléments de G tels que $O(x)$ et $O(y)$ soient premiers entre eux. Déterminer l'ordre de xy.
2. On suppose ici x et y quelconques. Montrer qu'il existe un élément z de G tel que : $O(z) = O(x) \vee O(y)$.
3. En déduire l'existence d'un élément de G dont l'ordre m est le ppcm des ordres des éléments de G. m est appelé exposant de G.
4. Supposons maintenant :
$$\forall d \in \mathbb{N}^*, |\{x \in G/x^d = 1\}| \leqslant d$$
Montrer que G est cyclique.
5. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Montrer que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{K}$ est cyclique.

* * *

Exercice I.4 (Tout anneau intègre et fini est un corps) :

Soit en effet $(A, +, \times)$ un anneau, non nécessairement supposé unitaire, intègre et fini. Pour tout élément a de $A \setminus \{0\}$, on note m_a l'endomorphisme de multiplication à gauche $x \mapsto a \times x$ du groupe $(A, +)$ -pourquoi est-ce un endomorphisme ?

1. Montrer que les termes de la famille (m_a) sont des automorphismes de $(A, +)$.
2. Montrer que $a \mapsto m_a$ induit un morphisme injectif de la structure algébrique associative $(A \setminus \{0\}, \times)$ dans le groupe des automorphismes de $(A, +)$.
3. Démontrer le lemme suivant :*Soient $(G, *)$ un groupe et F une partie finie de G stable par $*$. Alors $(F, *)$ est un groupe.*
4. Conclure.

* * *

II Arithmétique

Exercice II.1 :

Montrer que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}(X)$ est de dimension non nénombrable.
On considérera la famille $(\frac{1}{X-\lambda})_{\lambda\in\mathbb{C}}$.

* * *

Théorème de Mason, théorème de Liouville.

Exercice II.2 (Densité naturelle et diviseurs communs) :

Soit A une partie de $\mathbb{N}$.
On dit que A admet une densité naturelle, si et seulement si la suite :

$$\left(\frac{\sharp A \cap [\![1, n]\!]}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge. On appelle densité de A, et note $d(A)$, cette limite lorsqu'elle existe.

1. Soit α un entier strictement positif. Montrer que $\alpha\mathbb{N}$ admet une densité naturelle, calculer cette densité.
2. Montrer que si A est une partie de $\mathbb{N}$ qui admet une densité naturelle égale à 1, alors A contient une infinité d'entiers premiers entre eux deux-à-deux.
3. Déduire de la question précédente un résultat classique en arithmétique.

* * *

Exercice II.3 (Le théorème d'infinitude de l'ensemble des nombres premiers revisité) :

On définit un ensemble τ parties de $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall P \in \mathbb{N}, P \in \tau \Leftrightarrow (\forall m \in P, \exists a \in \mathbb{Z} | m + a\mathbb{Z} \subseteq P)$$

1. Montrer que τ est une topologie sur $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que, si a est un entier et b un entier naturel non nul, alors : $a\mathbb{Z} + b$ est fermé dans $(\mathbb{Z}, \tau)$.
3. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

* * *

Exercice II.4 :

Soitn n un entier naturel non nul tel que la suite $(a_k)_k$ des entiers strictement positifs, inférieurs à n et premiers à n soit arithmétique.
Montrer que n est une puissance de deux, ou un nombre premier impair.

* * *

Exercice II.5 :

Démontrer qu'une fonction rationnelle complexe non constante omet au plus une valeur dans $\mathbb{C}$.

* * *

Exercice II.6 :

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Montrer que le produit de trois entiers naturels non nuls consécutifs n'est jamais une puissance $k-$ième.

* * *

Exercice II.7 :

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6.

* * *

Exercice II.8 :

Soit A un anneau commutatif.
On dit que A est Noetherien si et seulement si tout idéal de A est engendré map un nombre fini d'éléments de A.

1. Montrer que toute suite croissante d'idéaux d'un anneau Noetherien est stationnaire.
2. Montrer que, si A est un anneau intègre et Noetherien, alors tout élément de A est décomposable en produit de facteurs irréductibles.

* * *

III Séries formelles à une indéterminée

Exercice III.1 (Anneau des séries formelles à une indéterminée) :

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.
On appelle série formelle à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ touts suite (a_n) d'éléments de $\mathbb{K}$, et on note $\mathbb{K}[[X]]$ l'ensemble de ces suites, que l'on munit de se structure canonique d'espace vectoriel. On définit, de plus, le produit de Cauchy $\cdot$ par :

$$\forall((a_n),(b_n)) \in \mathbb{K}[[X]]^2, (a_n)\cdot(b_n) = \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right)$$

1. Montrer que ce produit munit $\mathbb{K}[[X]]$ d'une structure d'algèbre commutative. Que dire de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$?
   On note, de même que pour $\mathbb{K}[X]$, X la série formelle $(\delta_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$, et on écrit, pour toute suite (a_n) de $\mathbb{K}$:
   $$(a_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$$
2. Pour toute série formelle S, on appelle ordre de S l'entier $\omega(S)$ défini par :
   $$\forall (a_n) \in \mathbb{K}[[X]], \omega\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right) := \inf\{n \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\} / a_n \neq 0\}$$
   (a) Quel est l'ordre d'un polynôme ?
   (b) Montrer que :
   $$\forall (S,T) \in \mathbb{K}[[X]]^2, \omega(S+T) \geq \inf(\omega(S),\omega(T)) \wedge \omega(ST) = \omega(S)+\omega(T)$$
   (c) En déduire que $\mathbb{K}[[X]]$ est un anneau intègre.

* * *

Exercice III.2 (Substitution dans des séries formelles, une application) :

Dans des conditions relativement simples, on peut extrapoler la composition des fonctions telle qu'elle se traduit en termes de développements en série entière : on parle alors de subsitution d'une série formelle S à l'indéterminée dans une série formelle T. On écrit ainsi :

$$T \circ S = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n S^n$$

où T est la série formelle $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t_n X^n$.
Bien sûr, on se heurte ici à la difficulté de la sommation infinie $\sum t_n S^n$, qui n'est pas *a priori* une opération permise dans l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$.

1. Construire explicitement la série $T(S)$ dans les deux cas suivants :
   (a) T est un polynôme ;
   (b) S est de module non nul.
   Montrer que $T(S)$ ne peut être construite que dans ces deux cas.

   Soit maintenant S une série formelle d'ordre non nul.
2. Montrer que $\mathbb{K}[[X]] \to \mathbb{K}[[X]] : T \mapsto T\circ S$ est un endomorphisme d'algèbre unitaire.

   On s'intéresse maintenant à l'inversion dans l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$.
3. Montrer que $1-X$ est inversible dans l'anneau intègre $\mathbb{K}[[X]]$.
4. Montrer qu'une série formelle est inversible si et seulement si son ordre est nul.

* * *

Exercice III.3 (Rationalité et séries formelles) :

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant concernant les séries formelles inversibles :
Une série formelle S est inversible si et seulement si son module $\omega(S)$ est nul, c'est à dire si et seulement si son coefficient constant s_0 est non nul.

1. Montrer qu'une fraction rationelle peut être représentée par une série formelle si et seulement si elle n'admet pas 0 pour pôle.
2. Montrer qu'une série formelle $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ est une fraction rationelle si et seulement s'il existe une entier naturel d et une famille $(\alpha_k)_{k\in[\![0,d]\!]}$ telle que :

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in [\![N, +\infty[\![, \sum_{k=0}^{d} a_{n+k}\alpha_{d-k} = 0$$

* * *

Exercice III.4 (Dérivation des séries formelles) :

Soit D l'application de $\mathbb{K}[[X]]$ dans lui-même définie par :

$$\forall (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n X^{n-1}$$

1. Montrer que D est une dérivation de l'algèbre des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire un endomorphisme d'espace vectoriel vérifiant :

$$\forall (S,T) \in \mathbb{K}[[X]]^2, D(ST) = D(S)T + SD(T)$$

2. Montrer que réciproquement, D est la seule dérivation de $\mathbb{K}[[X]]$ telle que : $D(X) = 1$.
   Indications : soit en effet Δ une telle dérivation.
   (a) Calculer $\Delta(P)$, pour tout polynôme P sur $\mathbb{K}$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall R \in \mathbb{K}[[X]], R \in X^n\mathbb{K}[[X]] \Rightarrow \Delta(R) \in X^{n-1}\mathbb{K}[[X]]$.
   (c) Calculer $\Delta(S)$ pour tout S de $\mathbb{K}[[X]]$, on recherchera une décomposition de S en somme de deux séries formelles bien choisies.
3. Résoudre, dans $\mathbb{K}[[X]]$, l'équation en S : $D(S) = S$.

* * *

Chapitre 3

Algèbre linéaire

I Programme de sup

Exercice I.1 :

Soit n un entier naturel non nul.
On définit, sur $\mathbb{R}_n[X]$, l'application φ par : $\varphi(P) = Q$ où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widetilde{Q}(x) = \int_x^{x+1} P(x)dx$$

Démontrer que φ réalise un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on calculera le déterminant.

* * *

Exercice I.2 :

Soient A et B deux matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telles que : $detA \wedge detB = 1$.
Montrer qu'il existe deux matrices U et V, à coefficients entiers, telles que :

$$UA + VB = AU + BV; AU + BV = I_n$$

* * *

Exercice I.3 :

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie. Soit de plus G un sous-espace vectoriel de E, on note A l'ensemble :

$$\{u \in \mathcal{L}(E, F) | \ker u \supseteq G\}$$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et préciser sa dimension.
2. Que retrouve-t-on dans le cas où $F = \mathbb{K}$?

* * *

Exercice I.4 :

Soient n, k et p trois entiers naturels non nuls, on suppose que : $n \leq p$ Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. On suppose que le cardinal de $\mathbb{K}$ est strictement supérieur à $k(n-1)$.
Montrer que toute famille $(F_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ de sous-espaces vectoriels de mîme dimension p, on peut construire un supplémentaire commun à chacun des F_i.
On traite le cas où $\mathbb{K}$ est infini, on affine ensuite éventuellement.

* * *

Exercice I.5 :

Montrer que la famille $(x \mapsto \arg\sinh \lambda x)_{\lambda \in \mathbb{R}_{+}*}$ est libre dans $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

* * *

II Réduction des endomorphismes

Exercice II.1 :

Montrer que $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

* * *

Exercice II.2 :

Soient n un entier strictement positif, et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $AB = 0$, alors A et B sont simultanément diagonalisables.

* * *

Exercice II.3 :

Soit n un entier strictement supérieur à 1 et :

$$f : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}[X] : P \mapsto (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$$

Montrer que induit un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ et déterminer son image, son noyau et ses éléments propres.

* * *

Exercice II.4 :

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \varphi(P) = (3X + 8)P + (X^2 - 5X)P' - (X^3 - X^2)P''$$

Déterminer les éléments propres de φ.

* * *

Exercice II.5 :

Soient n un entier naturel non nul, E un espace vectoriel de dimension n.
Montrer que si $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille d'endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux-à-deux, alors le produit de cette famille d'endomorphismes est nul.

* * *

Exercice II.6 (Décomposition de Fitting) :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E.

1. Montrer que les suites $(\mathrm{Im} u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\ker u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotones puis stationnaires à un même rang p.
2. Montrer que la suite $(\ker u^k)_k$ "s'essouffle", c'est-à-dire que $(\dim\ker u^{k+1} - \dim\ker u^k)_k$ est décroissante.
3. Montrer que : $E = \mathrm{Im} u^p \oplus \ker u^p$.
   Ces deux espaces sont respectivement appelés coeur et nilespace de u.
4. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec un bloc nilpotent et un bloc inversible.

* * *

Exercice II.7 (Invariance du polynôme minimal par extension du corps de base) :

Soient M une matrice carrée à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$.
On note $\mu_{M\mathbb{K}}$, respectivement $\mu_{M\mathbb{L}}$, le polynôme minimal de M considérée come à coefficients dans $\mathbb{K}$, respectivement $\mathbb{L}$.
Montrer que ces polynômes sont égaux.

* * *

Exercice II.8 :

Soit : $n \in \mathbb{N}$. Soient E un espace vectoriel de dimension n -sur un corps de caractéristique nulle-, G un sous-groupe fini de $GL(E)$. On note E^G l'ensemble des éléments de G invariants sous l'action de G.
Montrer que :

$$\dim E^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Trg$$

On considérera le projecteur $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} g$.

* * *

Exercice II.9 (Disques de Gershgörin) :

Soit : $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer le lemme d'Hadamard :

   Soit $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$. Si :

   $$\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

   alors (a_{ij}) est inversible.
2. En déduire une localisation des valeurs propres d'une matrice complexe.

* * *

Exercice II.10 :

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque, et u et v deusx endomorphismes de E qui commutent. On suppose que u et v admettent un polyôme annulateur. Montrer qu'il en est de même pour $u + v$.

* * *

Exercice II.11 :

Soit A une matrice complexe.
Montrer que $(A^n)_n$ est bornée si et seulement si toutes ses valeurs propres sont de module inférieur à 1, et pour toute valeur propre λ de A de module 1 :

$$\ker(A-\lambda I)=\ker(A-\lambda I)^2$$

$*\ *\ *$

Exercice II.12 :

Soient p un entier naturel non nul et A une matrice complexe inversible tels que A^p soit diagonalisable.

— Montrer que A est diagonalisable.

— Le résultat subsiste-t-il si A n'est pas supposée inversible ?

$*\ *\ *$

Exercice II.13 :

Soit A une matrice complexe, $n\times n$, de rang 1 -$n>0$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que A soit diagonalisable.

$*\ *\ *$

Exercice II.14 :

Soit :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Calculer $\exp A$.

$*\ *\ *$

Exercice II.15 :

Soient n un entier naturel non nul, et G un sous goupe de $GL_n(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\forall g\in G, g^2=I_n$$

1. Montrer que G est abélien.
2. Montrer que les éléments de G sont simultanément diagonalisables.
3. Montrer que G est fini, et majorer son ordre.
4. Soit m un entier naturel. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à $GL_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $n=m$.

$*\ *\ *$

Exercice II.16 :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E. On note μ_u le polynôme minimal de u, et on appelle polynôme minimal ponctuel de u en un vecteur x le polynôme unitaire μ_u^x qui engendre l'idéal :

$$\{P \in \mathbb{K}[X]/P(u)(x) = 0\}$$

On munit E d'une base (e_i).

1. Montrer que les termes de μ_u^x divisent μ_u.
2. Montrer que μ_u est le ppcm des termes de $(\mu_u^{e_i})_i$.
3. Soit $(x, y) \in E^2$. montrer que si μ_u^x et μ_u^y sont premiers entre eux, alors il existe un élément de E dont le polynôme minimal ponctuel est $\mu_u^x \mu_u^y$.
4. Montrer qu'il existe un élément de E dont le polynôme minimal ponctuel est μ_u.

* * *

II.1 Endomorphismes cycliques

Exercice II.17 :

Dans tout cet exercice, E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E.

1. On appelle, pour un élément x quelconque de E, *espace cyclique* de u engendré par x le sous-espace E_x de E défini par : $E_x = Vect(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que E_x est le plus petit sous-espace de E stable par u et contenant x.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme μ_u^x, à coefficients dans $\mathbb{K}$, unique à une constante multiplicative près, qui divise tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(u)(x) = 0$.
   (c) Que dire du degré de μ_u^x ?
   (d) Comparer μ_u^x et le polynôme annulateur global de u, μ_u.
   (e) En exprimant la matrice de la restriction v de u à E_x dans une base bien choisie, montrer que : $\mu_u^x = \chi_v$.
   (f) Comparer μ_u^x et χ_u, sans utiliser le théoème de Cayley-Hamilton.
2. A l'aide des résultats qui précèdent, démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

   Un endomorphisme u de E tel que $E_x = E$ pour un certain x est dit *cyclique*.
3. Démontrer que si u est un endomorphisme cyclique, alors μ_u et χ_u sont égaux.
4. On suppose maintenant que le polynôme μ_u est irréductible.
   (a) Montrer que les espaces cycliques de u sont des sous-espaces stables minimaux, c'est-à-dire qu'ils n'incluent pas de sous-espace vectoriel strict stable par u.
   (b) Montrer que u se décompose comme somme d'endomorphismes cycliques, c'est-à-dire qu'il existe une famille (x_k) finie de vecteurs de E telle que :

$$E = \bigoplus_k E_{x_k}$$

* * *

Exercice II.18 (Lemme chinois et endomorphismes cycliques) :

Montrer que la somme directe d'une famille d'endomorphismes cycliques deux à deux étrangers -du point de vue de leur polynôme caractéristique- est cyclique.

* * *

II.2 Semi-simplicité

Exercice II.19 :

On dit que u est semi-simple si et seulement si tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire dans E, stable par u.
Montrer que u est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal n'admet que des facteurs irréductibles avec une multiplicité 1.

* * *

Exercice II.20 (Endomorphismes semi-simples) :

On appelle endomorphisme semi-simple d'un espace vectoriel E un endomorphisme u tel que, si F est un sous-espace de E stable par u, alors F admet un supplémentaire stable par u. On définit de même les matrices semi-simples.

1. Que dire d'un endomorphisme semi-simple et nilpotent ?
2. Montrer que le polynôme minimal d'un endomorphisme semi-simple d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps quelconque, n'admet pas de facteur multiple.
   Soit M une matrice (n, n) à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, semi-simple. On note $\mathbb{K}_{alg}$ la clôture algébrique de $\mathbb{K}$.
3. Montrer que si M est considérée comme étant à coefficients dans $\mathbb{K}_{alg}$, alors M est diagonalisable.
   Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $\mathbb{L}$ un sur-corps commutatif de $\mathbb{K}$.
4. Montrer qu'une matrice M -on considère les endomorphismes canoniquement associés- à coefficients dans $\mathbb{K}$, semi-simple lorsqu'elle est considérée à coefficients dans $\mathbb{L}$, est encore semi-simple.
5. En déduire qu'un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie, annulé par un polynôme n'admettant pas de facteur multiple, est semi-simple.

* * *

Exercice II.21 :

Montrer que si E est un espace vectoriel de dimension finie, et $(u_i)_i$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux, alors ces endomorphismes sont diagonalisables dans une même base.

* * *

II.3 Simplicité

Exercice II.22 :

On dit que u est simple si et seulement si les seuls sous-espaces de E stables par u sont E et $\{0\}$. Montrer que u est simple si et seulement si χ_u est irréductible.

* * *

Chapitre 4

Algèbre bilináire, formes quadratiques, espaces préhilbertiens

I Algèbre bilinéaire, espaces préhilbertiens

Exercice I.1 :

Soit E l'espace vectoriel des suites réeles de carré sommable, c'est-à-dire les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n^2$ converge. On pose :

$$\langle (u_n)|(v_n)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$

pour toutes les suites (u_n) et (v_n) de E.

1. Montrer que l'application définie précédemment est un produit scalaire sur E. Quelle norme dérive de ce roduit scalaire ?

   On note maintenant, pour tout entier naturel k, $\delta^{(k)}$ la suite dont le $k$iième terme vaut 1, et dont les autres termes sont nuls.
2. Décrire l'espace vectoriel engendré par la suite $(\delta^{(k)})_k$.
3. Montrer que cette suite est totale dans E.
4. Montrer qu'il existe une partie dénombrable de E, qui est dense dans E. On dit que E est *séparable*.

On note souvent $l^2(\mathbb{R})$ l'espace E, muni de la structure préhilbertienne étudıée ici.

* * *

Exercice I.2 :

Calculer

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x\ln x - ax^2 - bx)^2 dx$$

* * *

Exercice I.3 :

Montrer qu'une matrice réelle inversible est le produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure -décomposition d'Iwasawa.

* * *

Exercice I.4 (Polynômes de Tchebycheff et produit scalaire) :

On définit, pour deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

1. Montrer que l'application $\langle|\rangle$ définie ci-dessus est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos nx$$

3. Etablir la relation de récurrence d'ordre 2 entre les termes de la suite (T_n).
4. Montrer que la suite (T_n) est orthogonale pour $\langle|\rangle$ et calculer la norme des termes de (T_n).

* * *

Exercice I.5 :

Soit E un espace préhilbertien réel. Soient de plus F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Comparer $(F+G)^\perp$ et $F^\perp \cap G^\perp$.
2. Comparer $(F\cap G)^\perp$ et $F^\perp + G^\perp$.
3. Que dire si E est de dimension finie ?

* * *

Exercice I.6 :

Soit n un entier naturel non nul.
Déterminer, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la valeur :

$$\min_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (A_{i,j} - M_{i,j})^2$$

* * *

Exercice I.7 :

Soit $(E, \langle|\rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2, a et b deux vecteurs unitaires et indépendants de E.
On définit l'endomorphisme linéaire f de E par :

$$\forall x \in E, f(x) = \langle a|x\rangle a + \langle b|x\rangle b$$

1. Caractériser f lorsque a et b sont deux vecteurs orthogonaux.
2. Cas général : déterminer l'image et les éléments propres de f. f est-il diagonalisable ?

* * *

Exercice I.8 :

Soit E un espace Euclidien. On appelle centre d'un groupe G l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G.
Déterminer le centre de $O(E)$ et celui de $SO(E)$.

* * *

EXERCICE I.9 :

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.

1. Montrer que tout endomorphisme de E admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

   On suppose maintenant E Euclidien.

2. Montrer que si f est un endomorphisme de E qui stabilise l'orthogonal de tout sous-espace stable, alors E se décompose en somme directe orthogonale de sous-espaces stables de f, de dimension inférieure ou égale à 2.
3. En déduire, dans des bases orthogonales bien choisies, les matrices des endomorphismes symétriques ou orthogonaux.

* * *

EXERCICE I.10 :

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.
Montrer que si G est un sous-groupe fini de $GL(E)$, alors tout sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G admet un supplémentaire stable par G.

* * *

EXERCICE I.11 :

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Soit (e_k) une suite libre ordonnée, finie ou infinie, de vecteurs de E. Définir l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de (e_k). On suppose maintenant E Euclidien de dimension n.
2. Que dire de l'ensemble B des bases ordonnées de E par rapport à E^n ?
3. Montrer que l'application de B dans B qui associe, à une base de E, son orthonormalisée, est continue.

* * *

EXERCICE I.12 :

Trouver tous les couples de symétries orthogonales qui commutent.

* * *

II Ancien programme

II.1 Algèbre bilinéaire

EXERCICE II.1 :

Soit $A = \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R}) : t \mapsto A(t)$ une application continue qui prend des valeurs antisymétriques.
Montrer que toute solution de l'équation différentielle en X, fonction de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{R})$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A(t)X(t)$$

telle que $X(0)$ soit une matrice orthogonale, prend ses valeurs dans l'ensemble des matrices orthogonales.

* * *

Exercice II.2 :

Soit n un entier naturel non nul. On notera $Asym(n, \mathbb{R})$ l'espace des matrices antisymétriques d'ordre n sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'exponentielle de matrices induit une surjection de $Asym(n, \mathbb{R})$ sur $SO(n, \mathbb{R})$.

* * *

II.2 Formes bilinéaires et quadratiques

Exercice II.3 :

Sioent q et q' deux formes quadratiques de même cône isotrope.
Donner une relation simple entre q et q'.

* * *

Exercice II.4 :

Montrer que les formes bilinéaires ϕ, non dégénérées, d'un espace vectoriel vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y) = 0 \Rightarrow \phi(y, x) = 0$$

sont les formes bilinéaires symétriques et antisymétriques.

On pourra étudier les familles de formes linéaires, indexées en x $d_x : E \to \mathbb{K} : y \mapsto \phi(y, x)$ et $g_x : E \to \mathbb{K} : y \mapsto \phi(x, y)$

* * *

Pour toute forme quadratique q, on appelle groupe orthogonal de q et note $O(q)$ l'ensemble des automorphismes linéaires u de E, encore appelés isométries, tels que :

$$\forall x \in E, q(u(x)) = q(x)$$

En particulier, une isométrie pour q préserve sa forme polaire φ

Exercice II.5 (Commutant du groupe $O(q)$ dans $\mathcal{L}(E)$) :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère, dans cet exercice, une forme quadratique q non dégénérée sur E, on note φ sa forme polaire.
Soit de plus a un vecteur de E, non isotrope pour q. On note A la droite vectorielle de E engendrée par a, et B l'espace $\{x \in E | \varphi(a, x) = 0\}$.

1. Montrer que : $E = A \oplus B$.
2. Avec cette notation, montrer que la symétrie linéaire par rapport à A, et parallèlement à B, est une isométrie pour q.

   On note :
   $$C = \{v \in L(E) | \forall u \in O(q), uv = vu\}$$
   cet ensemble est appelé le commutant de $O(q)$ dans $L(E)$.
   Soit v un élément de C.
3. Soit encore a un vecteur de E non isotrope pour q. Montrer que : $\exists \lambda_a \in \mathbb{R} | v(a) = \lambda_a a$.
4. Que dire du scalaire λ_b, défini pour un autre quelconque vecteur non isotrope de q ?
5. Etudier le cas d'un vecteur isotrope de q.
6. Déterminer C.

* * *

Exercice II.6 (Condition de minimalité de $O(q)$) :

On reprend la notation de l'exercice précédent pour le groupe orthogonal.

Soient q et q' deux formes quadratiques sur E, on suppose que q est non dégénérée. On note encore b et b' les formes polaires respectives pour q et q'.

1. Montrer l'existence d'un endomorphisme u de E tel que :
   $$\forall (x, y) \in E^2, b'(x, y) = b(u(x), y)$$
   autrement dit :
   $$\forall (x, y) \in E^2, b'(x, y) = b(x, u(y))$$
   On suppose maintenant que : $O(q') \subseteq O(q)$.
2. Montrer que cette inclusion est une égalité.

* * *

II.3 Formes sesquilinéaires complexes

Exercice II.7 :

Montrer que la norme de $M_n(\mathbb{C})$ qui dérive du produit scalaire $(A, B) \mapsto Tr(A^*B)$ est une norme d'algèbre. Calculer la norme d'une matrice Hermitienne.

* * *

Exercice II.8 :

Soient A et B deux matrices Hermitiennes. Montrer que les valeurs propres de $AB - BA$ sont imaginaires pures.

* * *

Exercice II.9 :

Montrer qu'une matrice réelle -respectivement complexe- inversible est le produit d'une matrice orthogonale par une matrice symétrique définie positive -respectivement une matrice unitaire par une matrice Hermitienne définie positive.

* * *

Exercice II.10 :

On définit un ordre $\preceq$ sur l'ensemble des matrices hermitiennes positives par : $H \preceq K$ si et seulement si $K - H$ est positive.
Montrer que $M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}) : A \mapsto A^*A$ est convexe pour cette relation d'ordre.

* * *

Chapitre 5

Géométrie euclidienne

I Programmme actuel

Exercice I.1 :

Montrer que le plan Euclidien peut être pavé par des polygones réguliers, si et seulement si leurs nombres de côtés est 3, 4 ou 6.

* * *

Exercice I.2 :

On se donne 1000 points du plan affine Euclidien.
Montrer qu'il existe une droite affine qui partitionne la plan en deux demi-plans ouverts, contenant chacun exactement 500 points de la famille précédente.

* * *

Exercice I.3 (Théorème de Sylvester) :

On concidère n points du plan affine Euclidien.
Montrer que, si toute droite menée par deux de ces points en contient un troisième, alors tous ces points sont alignés.

* * *

Exercice I.4 :

Montrer que le plan affine Euclidien ne peut être partitionné en cercles Euclidiens de rayons non nuls.

* * *

II Ancien programme

Exercice II.1 :

Enoncer et démontrer une règle permettant de calculer explicitement les coordonnées du centre éventuel d'une conique, dont on connaît une équation cartésienne.
On pourra écrire l'équation d'une conique du plan affine Euclidien sous forme matricielle.

* * *

EXERCICE II.2 :

Soit q une forme quadratique non dégénérée de $\mathbb{R}^2$, définissant donc une conique C centrée en 0. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathbb{C}$ en un point (x_0, y_0) de deux manières :

— Considérer le vecteur dérivé d'un arc différentiable injectif tracé sur la conique, dans un voisinage de (x_0, y_0), au paramètre associé à (x_0, y_0) ;

— Calculer (pourquoi ?) le noyau de la différentielle de q en (x_0, y_0).

* * *

Chapitre 6

Topologie

I Topologie générale

Exercice I.1 :

1. Rappeler la définition axiomatique des ouverts, et des fermés d'un espace topologique -ici le plus souvent, un espace vectoriel normé.

   Soit (E, d) un espace métrique, par exemple une partie d'un espace vectoriel normé munie de la distance associée à la norme.
2. Quelle est la caractérisation des ouverts de E par la distance -boules ouvertes ?
3. Montrer que tout fermé de E est intersection d'une suite d'ouverts.
4. Montrer que tout ouvert de E est la réunion d'une suite de fermés.
5. Que penser d'une intersection infinie d'ouverts, d'une union infinie de fermés, dans un espace métrique ?

* * *

Exercice I.2 :

Soit (E, d) un espace métrique.

1. L'adhérence d'une boule ouverte est-elle nécessairement la boule fermée de même centre et de même rayon ?
2. Montrer que c'est le cas si E est un espace vectoriel normé.

* * *

Exercice I.3 (Ouverts de $\mathbb{R}$) :

1. Montrer qu'un ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion disjointe d'une famille d'intervalles ouverts.
2. Montrer que cette union est au plus dénombrable.

* * *

Exercice I.4 (Le même, avec des questions intermédiaires) :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. On se propose d'établir le décomposition suivante :

$$U = \bigsqcup_{d \in D} I_d$$

où (I_d) est une famille d'intervalles ouverts, disjoints deux à deux, indexée dans un ensemble D au plus dénombrable.
On suppose que U est non vide, le cas contraire étant trivial.

1. Soit x un élément de U. Construire un intervalle I_x, incluant tous les intervalles de $\mathbb{R}$, eux-même inclus dans U, qui contiennent x.
2. Montrer qu'un intervalle de la forme I_x construite précédemment est *maximal* dans U, c'est-à-dire qu'il n'est inclus strictement dans aucun intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans U.
3. Que peut-on dire de deux intervalles maximaux de U ?
4. Déduire des questions précédentes que U est l'union disjointe de tous ses intervalles maximaux.
5. Montrer que cette union est au plus dénombrable. On utilisera la topologie d'une partie bien choisie de $\mathbb{R}$.

* * *

Exercice I.5 :

1. Rappeler la définition des espaces compacts par la propriété de Borel-Lebesgue.

   Soit K un espace compact.
2. Montrer que, si (F_i) est une famille de fermés de K dont l'intersection est vide, alors il existe une sous-famille finie de (F_i) d'intersection vide.
3. Montrer qu'une suite décroissante de fermés non vides de K a une intersection non vide.

* * *

Exercice I.6 :

Soit K un espace métrique compact, par exemple dans un espace vectoriel normé E.

1. Montrer qu'une suite d'éléments de K converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Soient maintenant f une application continue de K dans lui-même, et x_0 un élément de K. On étudie la suite récurrente $(x_n)_n$, de premier terme x_0, et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$$

On suppose, dans toute la suite de l'exercice, que (x_n) admet exactement deux valeurs d'adhérence z_0 et z_1.

2. Montrer que, quels que soient les voisinages V_0 et V_1 de z_0 et z_1 respectivement, il existe un entier naturel N tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n \in V_0 \vee x_n \in V_1$$
3. Soit φ une extraction telle que : $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers x_0. En étudiant la suite $(x_{\varphi(n)+1})$, montrer que :
$$f(z_0) = z_1$$
   Un raisonnement semblable permet bien sûr de montrer que : $f(z_1) = z_0$.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que les suites $(x_{2n})_n$ et (x_{2n+1}) convergent, l'une vers z_0, et l'autre vers z_1.

* * *

Exercice I.7 :

Soit (K, d) un espace métrique compact, par exemple un fermé borné d'un espace vectoriel normé de dimension finie.
On considère une isométrie f de K dans lui-même, c'est-à-dire une application de K dans K qui conserve la distance.

1. f admet-elle nécessairement un point fixe ?
2. Montrer que f est surjective.

* * *

Exercice I.8 (Espaces métriques enchaînés) :

Dans tout l'exercice, on notera (E, d) un espace métrique.
Pour tout réel strictement positif, on définit la relation d'équivalence $\Re_\epsilon$ définie par :

$x\Re_\epsilon y$ si et seulement si il existe une famille finie $(x_k)_{k\in[0,n]}1$ de $n+1$ points de E telle que :

$$x_0 = x \wedge x_n = y \wedge \forall k \in [0, n], d(x_k x_{k+1}) < \epsilon$$

On peut définir la conjonction, ou intersection de ces relations d'équivalence, que nous noterons $\Re$.
On dit que (E, d) est *bien enchaîné* -Cantor-connected- si et seulement si dux éléments de E sont toujours reliés par $\Re$.

1. Soit : $\epsilon \in \mathbb{R}^*$. Montrer que les classes modulo $\Re_\epsilon$ sont ouvertes, puis qu'elles incluent les conposantes connexes de la topologie de E.
2. Montrer qu'un espace métrique connexe pour sa topologie usuelle, est bien enchaîné.
3. Réciproquement, un espace métrique bien enchaîné est-il nécessairement connexe ?
4. Montrer que, si (E, d) est compact et bien enchaîné, alors il est connexe.

* * *

II Espaces vectoriels normés

Exercice II.1 :

Dans tout l'exercice, K est un compact, E est l'espace vectoriel des applications continues de K dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie.

1. Soit φ une application uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $E \to E : f \mapsto \varphi \circ f$ est uniformément continue. Est-elle linéaire ?
2. Soit ψ une application continue de K dans K. Montrer que $E \to E : f \mapsto f \circ \psi$ est linéaire continue, et calculer sa norme.

* * *

Exercice II.2 :

Soit φ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés E et F.
Montrer que φ est continue si et seulement si elle transforme toute suite qui tend vers 0 en une suite bornée.

* * *

Exercice II.3 :

Soit n un entier naturel non nul. Soit de plus G l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures et de déterminant 1.
G est-il fermé, borné, connexe par arcs ?

* * *

Exercice II.4 :

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On étudie ici, pour tout compact A dans E, l'ensemble L_A des endomorphismes de E qui stabilisent A.

1. Pourquoi les éléments de L_A sont-ils continus ?
2. Montrer que L_A est fermé, quel que soit le compact A de E.

On veut maintenant caractériser les compacts A de E tels que L_A est lui-même compact.

3. D'après ce qui précède, quelle propriété doit-on rechercher sur A pour conclure ? Montrer que cette propriété ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathcal{L}(E)$.

   On suppose que A est un compact de E qui contient les vecteurs d'une base $(e_i)_i$ de E. On peut écrire :
   $$VectA = E.$$

4. Montrer que l'application qui à une application linéaire f de E dans lui-même asocie le réel positif : $\max_i \|f(e_i)\|$ est une norme de $\mathcal{L}(E)$.
5. En déduire que L_A est borné, conclure.
6. Montrer réciproquement que tout compact A de E tel que L_A est compact vérifie : $VectA = E$. On pourra raisonner par l'absurde.

* * *

III Ancien programme : espaces complets

Exercice III.1 :

Soit E un espace vectoriel normé.
Montrer que E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente de E est convergente.

* * *

Exercice III.2 :

Soit (E, d) un espace métrique complet, par exemple un fermé d'un espace de Banach, muni de la distance associée à la norme.

1. Théorème de Baire : soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de E. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans E.
2. Montrer que la réunion d'une suite de fermés d'intérieurs vides de E est d'intérieur vide.
3. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

   On note maintenant $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Montrer que E n'admet pas de base dénombrable.
6. Montrer qu'il n'existe pas de norme pour laquelle $\mathbb{K}[X]$ soit un espace de Banach.

* * *

Exercice III.3 :

$\mathbb{K}$ est ici le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $l^\infty(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des suites bornées de $\mathbb{K}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall (u_n) \in l^\infty(\mathbb{K}), \|(u_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

Montrer que $l^\infty(\mathbb{K})$ est un espace de Banach.

* * *

Exercice III.4 :

$\mathbb{K}$ est ici le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $p \in [1, +\infty[$
On note, pour tout réel p supérieur ou égal à 1, $l^p(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des suites (u_n) de $\mathbb{K}$ telles que $\sum |u_n|^p$ converge, muni de la norme $\|.\|_p$ définie par :

$$\forall (u_n) \in l^p(\mathbb{K}), \|(u_n)\|_p = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p)^{1/p}$$

1. Quelles relations d'inclusion existe-t-il entre les espaces $l^p(\mathbb{K})$?
2. Montrer que ces espaces vectoriels normés sont de Banach.

* * *

Exercice III.5 :

Soit E un espace vectoriel normé.
Montrer que E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente de E est convergente.

* * *

Exercice III.6 :

$\mathbb{K}$ est ici le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $l^\infty(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des suites bornées de $\mathbb{K}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall (u_n) \in l^\infty(\mathbb{K}), \|(u_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

Montrer que $l^\infty(\mathbb{K})$ est un espace de Banach.

* * *

Exercice III.7 (Dual de l^1) :

On se place dans l'espace des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente, nous notons cet espace $l^1(\mathbb{R})$ et le munissons de la norme $\|\|_1$ définie par : $\forall (u_n)_n \in l^1, \|(u_n)\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. On appelle dual topologique de cet espace, et note $(l^1)'$, l'espace vectoriel des formes linéaires continues de l^1, que nous munirons de la norme subordonnée à $\|\|_1$à la source, $||$ à l'arrivée.
Montrer qu'il existe une isométrie linaire ϕ de l'espace l^∞ des suites réelles bornées muni de la norme infinie, sur $(l^1)'$, telle que :

$$\forall (a_n)_n \in l^\infty, \forall (u_n) \in l^1, \phi((a_n)_n)((u_n)_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$$

* * *

Exercice III.8 :

1. Enoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
2. Rappeler la définition de l'intégrabilité au sens de Riemann sur un segment.
3. Que dire de l'intégrale d'une limite uniforme de fonctions Riemann-intégrables ?

   Soit maintenant I un intervalle réel. On appelle fonction localement intégrable sur I une fonction intégrable sur tout segment de I. On peut se ramener au cas au cas d'un intervalle I de la forme $[a, b[$, où a est un nombre réel, et b un eélément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, strictement supérieur à a.
4. Montrer le théorème de convergence dominée pour l'intégrale de Riemann impropre :

> Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur I, localement intégrables et dominées par une fonction ϕ, positive et intégrable sur I. On note que les intégrales des termes de (f_n) convergent. Si (f_n) converge vers une limite f définie sur I, alors f est localement intégrable sur I, son intégrale sur I converge et :
> $$\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

* * *

Exercice III.9 :

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, telle que f et f'^2 soient intégrables.
Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$.

* * *

Chapitre 7

Suites et séries numériques

I Suites numériques

Exercice I.1 :

Donner une condition nécessaire et suffisante sur une suite réelle $(u_n)_n$ pour qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit ultimement monotone.

* * *

Exercice I.2 :

Déterminer le nombre de chemins permettant de joindre deux sommets opposés d'un cube -une étape est définie par le franchissement d'une arète.

* * *

Exercice I.3 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que 0 soit une valeur d'adhérence de (u_nv_n).
Montrer que 0 est une valeur d'adhérence de (u_n) ou de (v_n).

* * *

Exercice I.4 :

Soit (x_n) une suite d'un espace vectoriel normé -le résultat est vrai dans un espace topologique quelconque-, telle que(x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent.
Montrer que (x_n) converge.

* * *

II Séries numériques

Exercice II.1 :

Déterminer la nature des séries dont le terme général est donné ci-dessous :
- $n^{\frac{1}{n}} - 1$
- $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$

* * *

Exercice II.2 :

Montrer que les séries dont le terme général est donné ci-dessous sont convergentes, et calculer leurs sommes.

1. $\ln(1 - \frac{1}{n^2})$
2. $\frac{1}{n}$ lorsque n est un carré ; $\frac{1}{n^2}$ sinon.

* * *

Exercice II.3 :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que : $\sum a_n$ converge.

1. Soit α un réel strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. Montrer que la série $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ converge.
2. Que dire du cas où : $\alpha = \frac{1}{2}$?

* * *

Exercice II.4 :

Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0.

1. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature.
2. Montrer de plus que lorsque ces séries convergent, elles ont même somme.

* * *

Exercice II.5 :

Donner la nature, lorsque cela est possible, de la série de terme général $n! \prod_{k=1}^{n} \sin(\frac{x}{k})$, où x est un réel quelconque.

* * *

Exercice II.6 :

1. Montrer que si une série $\sum x_n$ d'éléments d'un espace de Banach est absolument convergente, alors elle est commutativement convergente, c'est-à-dire :

   Pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est convergente, de somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.

   On se propose maintenant de démontrer la réciproque de ce résultat dans le cas des séries réelles. Soit (u_n) une suite réelle telle que la série de terme général u_n soit semi-convergente.
2. Démontrer le théorème de réarrangement de Riemann : Pour tout réel α, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ soit convergente de somme α.
3. Montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la suite des sommes partielles de la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ n'admette pas de limite dans $\mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$.

* * *

Exercice II.7 :

1. Soit (q_n) une suite croissante d'entiers strictement supérieurs à 1. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{\Pi_{j=0}^{n} q_j}$ converge vers un élément de $]0,1]$, que nous noterons $\varphi((q_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
2. A titre d'exemple, soit k un entier naturel non nul. On constate que $1/k$ est élément de $]0,1]$. Décomposer ce nombre en somme d'une telle série.
3. Montrer que l'application φ de l'ensemble S des suites croissantes de $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ dans $]0,1]$ définie à la question 1. est bijective.
   L'antécédent par φ d'un élément x de $]0,1]$ est appelé *développement de x en série de Engel.*
4. A quelle condition sur (q_n) le réel $\varphi((q_n))$ est-il rationel ?
   On appelle nombre Egyptien l'inverse d'un entier naturel non nul.
5. Montrer que tout rationel de $]0,1]$ s'écrit d'une unique manière comme somme d'une suite finie de nombres Egyptiens distincts.
6. Déduire de la question 4 l'irrationalité d'un réel bien connu en analyse.

* * *

Exercice II.8 (Convergence et densité pour une suite d'entiers naturels) :

Soit A un ensemble d'entiers naturels. On dit que A admet une densité naturelle sus $\mathbb{N}$ si et seulement si :

$$\left(\frac{\sharp A \cap [\![1,n]\!]}{n}\right)_n \text{ admet une limite en } +\infty.$$

Lorsque cette limite existe, nous l'appelons densité de A, et la notons $d(A)$.
Soit maintenant $(a_n)_n$ une suite strictement croissante d'entiers natuels non nuls. Montrer que si la série $\sum \frac{1}{a_k}$ converge, alors l'ensemble des termes de (a_k) admet, dans $\mathbb{N}$, une densité naturelle égale à 0.

* * *

Exercice II.9 (Critère de condensation de Cauchy) :

1. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels décroisssante qui tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que, pour tout entier p strictement supérieur à 1, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum p^n u_{p^n}$ converge.
2. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ diverge. Montrer que $\sum min(u_n, 1/n)$ diverge.

* * *

Exercice II.10 :

Déterminer la nature de la série des entiers naturels qui s'écrivent, en base 10, sans le chiffre 9.

* * *

Exercice II.11 :

Soient (a_n) une suite d'éléments d'un espace de Banach telle que $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, et (ϵ_n) une suite réelle décroissante qui converge vers 0.

1. Montrer que la série de terme général $a_n\epsilon_n$ converge. Cette règle est appelée critère de convergence d'Abel.
2. Démontrer, en utilisant la question précédente, le critère spécial des séries alternées.

* * *

Chapitre 8

Analyse sur des fonctions

I Suites et séries de fonctions

Exercice I.1 :

Posons : $(a, b) \in \mathbb{R}$ $a < b$.

1. On dit qu'une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est réglée si et seulement si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
   (a) Soit : $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$. Montrer que f est réglée si et seulement si elle satisfait la condition : f admet en tout point de $[a, b]$ une limite à gauche et une limite à droite, lorsque ces limites sont définies.
   (b) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une telle application est au plus dénombrable.
2. On s'intéresse maintenant aux fonctions intégrables au sens de Riemann
   (a) Rappeler la définition de l'intégrabilité au sens de Riemann d'une application f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction réelle f, on note $E^+(f)$, respectivement $E^-(f)$, l'ensembe de fonctions en escalier définies sur $[a, b]$ et inférieures, respectivement supérieures, à f sur $[a, b]$.
   (b) Montrer que, lorsque $E^+(f)$ et $E^-(f)$ sont tous les deux non vides, que $\inf_{\varphi\in E^+(f)}(\int \varphi)$ et $\sup_{\varphi\in E^-(f)}(\int \varphi)$ sont bien définies dans $\mathbb{R}$ et vérifient : $\inf_{\varphi\in E^+(f)}(\int \varphi) \geq \sup_{\varphi\in E^-(f)}(\int \varphi)$
3. Montrer que toute application réglée f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann.

* * *

Exercice I.2 :

Etudier la convergence de la série de fonctions :

$$\sum x \mapsto \frac{x \exp -nx}{\ln n}$$

définies sur $\mathbb{R}$, pour tout entier n strictement positif.

* * *

Exercice I.3 :

Soit S la fonction, somme de la série : $\sum x \mapsto nx \exp(-nx^2)$.

1. Donner le domaine de définition de S.
2. La convergence de la série est-elle normale, uniforme, sur ce domaine ?
3. Exprimer S à l'aide de fonctions usuelles.

* * *

Exercice I.4 :

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, que l'on munit de sa norme de convergence uniforme, $\|\|_\infty$. Déterminer si les sous-ensembles qui suivent sont fermés ou non :

- L'ensemble F des suites croissantes.
- L'ensemble c_0 des suites qui convergent vers 0.
- L'ensemble V_0 des suites qui admettent 0 comme valeur d'adhérence.
- L'ensemble S des suites sommables.
- L'ensemble P des suites périodiques.
- Bonus : l'ensemble c des suites convergentes.

* * *

Exercice I.5 :

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non borné supérieurement, et f une application C^∞ de I dans $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$. f' tend-t-elle vers 0 en $+\infty$? Est-elle bornée au voisinage de $+\infty$?
2. Que devient ce résultat si l'on suppose, de plus, f croissante ?
3. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

et $g|_{\mathbb{R}_-} = 0$

(a) Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Définir, à l'aide de g, une application h_θ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, C^∞, nulle sur $\mathbb{R}\backslash]0, \theta[$, et strictement positive sur $]0, \theta[$.

(c) Soit $(\alpha, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Définir une application $H_{\theta,\alpha}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, C^∞, nulle sur $\mathbb{R}_-$, égale à α sur $[\theta, +\infty[$, et strictement croissante sur $[0, \theta]$.

Soit maintenant (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = H_{1/n^3,1/n^2}(x - n)$$

On constate que $\sum f_n$ est convergente -en quel sens ?- sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que la somme f de cette série de fonctions est C^∞, croissante sur $\mathbb{R}$, admet une limite finie en $+\infty$, mais que f' est non bornée au voisinage de $+\infty$.

* * *

Exercice I.6 (Réalisation d'un fermé de $\mathbb{R}$ comme ensemble des zéros d'une fonction C^∞) :

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union disjointe d'intervalles ouverts, et que cette union est dénombrable.

Soit maintenant F un fermé de $\mathbb{R}$, on note O son complémentaire. D'après la question précédente, on peut écrire :

$$O = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ où } (I_n) \text{ est une suite d'intervalles ouverts disjoints.}$$

On admet qu'il existe, pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, une fonction f_I définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, non nulle sur I et nulle en dehors de cet intervalle, de norme infinie 1.

2. En appliquant une opération judicieusement choisie aux termes de la suite $(f_{I_n})_n$, construire une suite g_n de fonctions de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, normalement convergente, dont la somme s'annulle exactement sur F.
   On remarque que la série $\sum g_n$ *est* ponctuellement stationnaire.
3. Etude des séries de dérivées successives de la suite (g_n) :
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k, la série $\sum g_n^{(k)}$ est ponctuellement stationnaire.
   (b) Donner une condition suffisante pour la dérivabilité de la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$.
   (c) Donner enfin une condition nécessaire et suffisante simple à ce que la série soit uniformément convergente sur un ouvert éventuellement petit, typiquement un intervalle.
   (d) Etudier les deux contre-exemples suivants :
   Cas non borné $O = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left]n, n+\frac{1}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$;
   Cas borné $O = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]\frac{\|g_n\|_\infty}{n+1}, \frac{\|g_n\|_\infty}{n}\right[$ dans $]0,1[$.
4. Soit f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, nulle en dehors de $]-1,1[$, strictement positive sur cet intervalle, paire, croissante sur $[-1,0]$ et telle que $f(0)=1$.
   (a) Comment construit-on une fonction $f_{a,\epsilon}$, de support $[a-\epsilon, a+\epsilon]$, positive majorée en a par a ?
   (b) Construire une nouvelle suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe C^∞ qui converge normalement sur toute partie bornée de $\mathbb{R}$.
   (c) Majorer les normes des dérivées successives des fonctions de la famille (h_n).
   (d) Corriger la construction précédente afin que les séries de dérivées convergent, pour tout ordre.
   (e) Conclure.

* * *

Exercice I.7 :

Soit f une application définie et deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Supposons : f'' est bornée sur I. Montrer que $x \mapsto n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)_n$ converge uniformément vers f' sur I.

* * *

Exercice I.8 (Théorème de Dini) :

Soit (K,d) un espace métrique compact. On considère une suite $(f_n)_n$ d'applications continues de K dans lui-même, qui converge simplement vers une application continue f de K dans K, de sorte que :

Si x est un élément de K, la suite $(d(f_n(x), f(x))_n$ est décroissante.

Montrer que (f_n) converge uniformément.

* * *

Exercice I.9 :

Soit (K,d) un espace métrique compact.
On considère une application f de K dans lui-même telle que :

$$\forall (x,y)\in K^2, d(f(x),f(y)) < d(x,y)$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe x_0.
2. Montrer que, pout tout élément x de K, la suite $(f_n(x))$ converge vers x_0.
3. A l'aide du théorème de Dini, montrer que cettte convergence est uniforme.

* * *

II Analyse sur des séries entières

Exercice II.1 :

Calculer le rayon de convergense de la série entière $\sum a_n z^n$, où a_n désigne la $n-$ième décimale de π.

* * *

Exercice II.2 :

Soit g la fonction définie par la formule :

$$g(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$$

1. Dt́erminer le domaine de convergence de la série entière définie ci-dessus.
2. Calculer explicitement $g(x)$ pout tout x dans ce domaine.

* * *

Exercice II.3 :

Calculer, pour tout réel x, la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

* * *

Exercice II.4 (Théorèmes Taubériens) :

Soit (a_n) une suite complexe telle que $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit définie pour tout x de $]-1,1[$.
On suppose de plus que f admet une limite l à gauche de 1.
Montrer que la série $\sum a_n$ converge, vers l, dans les deux cas suivants :

1. $\forall n\in\mathbb{N}, a_n\in\mathbb{R}_+$
2. $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{1}{n})$

* * *

III Fonctions intégrables

Exercice III.1 :

1. Soient a et b deux réels positifs non tous les deux nuls. Etudier l'intégrabilité sur $]0,1]^2$ de $(x,y) \mapsto 1/(ax+by)$.
2. Soit P une application polynomiale qui ne s'annulle, sur $[0,1]^2$, qu'en $(0,0)$. On suppose, de plus, que P s'écrit : $aX + bY + Q$, où a et b sont deux réels strictement positifs, et Q une somme de monômes de degré au moins 2.

   Montrer que $1/P$ est intégrable sur $]0,1]^2$.
3. Même question, en supposant : $P = aX + Q$, avec la même notation.

* * *

Exercice III.2 (Orthogonalité avec des polynômes) :

On se place ici sur l'intervalle $[0,1]$.

1. Que dire d'une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall p \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 f(t)P(t)dt = 0$$

2. On fixe : $n \in \mathbb{N}$. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall k \in [0,n], \int_0^1 x^k f(x)dx = 0$$

   Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros dans $[0,1]$.

* * *

Exercice III.3 :

Soient a et b deux réels positifs.

Montrer que $\int_0^\infty \frac{\exp(-at)}{1-\exp(-bt)}dt$ existe et vaut $\sum_0^\infty \frac{1}{(a+nb)^2}$.

* * *

Exercice III.4 :

1. Soient p et q deux réels strictement positifs.

   (a) Montrer que $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$ existe et vaut $\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{p+kq}$.

   (b) Ecrire des formules explicites pour $\frac{\pi}{4}$ et $\ln 2$.

   Soit maintenant p un réel compris entre 0 et 1, strictement.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$ existe et vaut

$$\frac{1}{p} + \sum_0^\infty \frac{2p}{p^2 - n^2}$$

* * *

Exercice III.5 :

Montrer que la série de fonctions de terme général $x \mapsto n \exp -nx$, définies sur $[1, +\infty[$, converge simplement, que la somme de cette série est intégrable, calculer son intégrale.

* * *

Exercice III.6 :

Déterminer les fonctions réelles continues f telles que :

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2, f(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$$

* * *

Exercice III.7 :

1. Soit f une fonction réelle positive, décroissante et intégrable sur $]0, 1]$. Etudier la limile en 0 de la fonction $x \mapsto xf(x)$.
2. Même question, en $+\infty$, pour une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.

* * *

Exercice III.8 :

1. Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que f est intégrable. F tend-elle vers 0 en $+\infty$?
2. Montrer qu'une fonction réelle intégrable sur $\mathbb{R}_+$, uniformément continue, tend vers 0 en $+\infty$.

* * *

Exercice III.9 (Intégrabilité et produit) :

1. Soit u une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour toute fonction réelle v intégrable sur $\mathbb{R}$, uv est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que réciproquement, si u est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour toute fonction intégrable v, uv est intégrable, alors u est bornée sur $\mathbb{R}$.

* * *

Exercice III.10 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que :

$$\int_a^b f(t)|\sin nt|dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi} \int_a^b f$$

* * *

Exercice III.11 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
Déterminer la limite de la suite :

$$\left(\int_a^b \frac{f(x)}{3 + 2\cos nx} dx \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

* * *

Exercice III.12 :

Soit $(a_n)_n$ une suite complexe telle que : $\sum a_n n!$ converge.
Montrer que $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx$ existe et vaut $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n! a_n$.

* * *

IV Fonctions réelles, autres propriétés

Exercice IV.1 :

Soit f une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans lui-même, qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
On suppose :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} / f(x_0) f'(x_0) \geqslant 0$$

1. Montrer que : $\exists x_1 \in [x_0, \infty[/ f'(x_1) = 0$.
2. Montrer quil existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ strictement croissante telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(x_k) = 0$$

* * *

Exercice IV.2 :

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, dérivable en 0, telle que : $f(0) = 0$.
On pose : $p \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer la limite de $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

* * *

V Ancien programme : séries de Fourier

Exercice V.1 (Inégalité de Wirtinger) :

Montrer que, si y est une application 2π-périodique C^1 de $\mathbb{R}$ dans lui-même, alors :

$$\int_0^{2\pi} y^2 \leq \int_0^{2\pi} y'^2$$

Etudier le cas d'égalité.

* * *

Exercice V.2 :

Soit f une fonction continue, $2\pi-$périodique dont les coefficients de Fourier de degré inférieur ou égal à un entier positif n sont nuls.
Montrer que f admet au moins $2n$ zéros sur une période.

* * *

Exercice V.3 :

Soit P un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n.
Démontrer qu'il existe un réel positif c, que l'on calculera explicitement, ne dépendant que de n, telle que :

$$\|P'\| \leq c\|P\|$$

On pourra, pour tout élément la fonction I_n définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$\forall x \in [0, 2\pi], I_n(x) = \int_0^{2\pi} P(x-y)F_n(y)dy$$

* * *

Exercice V.4 :

Soit f une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans lui-même, à décroissance rapide ainsi que ses dérivées, c'est-à-dire

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \lim_{\substack{+\infty \\ -\infty}} x^m f^{(n)}(x) = 0$$

On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2k\pi)$$

1. Montrer que cette somme est bien définie -en quels sens ? Que dire de la régularité de ϕ ?
2. Montrer que ϕ se développe en série de Fourier de la manière suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$$

où $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-int}dt$

* * *

Exercice V.5 :

Développer en série de Fourier la fonction : $x \mapsto \ln(2 + \cos x)$.
On pourra, en premier lieu, développer la dérivée en série de Fourier.

* * *

Exercice V.6 :

Soit E l'espace des fonctions complexes, continues et $2\pi-$périodiques sur $\mathbb{R}$, qui sont limites uniformes de leur série de Fourier.
On définit sur E la norme $\|\|_E$ par :

$$\forall f \in E \|f\|_E = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n(f)\|_\infty$$

Montrer que $(E, \|\|_E)$ est un espace de Banach.

* * *

EXERCICE V.7 (EQUATION À RETARD) :

Soit λ un réel. On considère l'équation en f suivante, dite équation à retard :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f(t+\lambda)$$

1. Montrer que si f est solution, alors f et f' sont développables en série de Fourier.
2. Avec la même notation, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (in - e^{in\lambda})c_n(f) = 0$$

   En déduire toutes les solutions possibles.

* * *

EXERCICE V.8 (LEMME DE RIEMANN-LEBESGUE GÉNÉRALISÉ) :

Soit : $(a,b) \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Montrer que si f est une fonction réelle continue définie sur $[a,b]$, g une fonction intégrable au sens de Riemann, $2\pi-$périodique et positive, alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)g(nt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(t)dt \int_0^{2\pi} g(t)dt$$

* * *

Chapitre 9

Equations différentielles ordinaires

I Equations différentielles linéaires

Exercice I.1 :

Donner la solution générale du système :

$$\begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases} \tag{9.1}$$

* * *

Exercice I.2 :

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$

* * *

Exercice I.3 :

Résoudre, sur $\mathbb{R}$, le système suivant :

$$\begin{cases} x' = x + 6y \\ y' = -3x - 5y \\ z' = -3x - 6y - 5z \end{cases} \tag{9.2}$$

* * *

Exercice I.4 :

1. Déterminer les sous-espaces de dimension finie de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, stables par la dérivation.
2. Cas réel ?

* * *

Exercice I.5 :

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée et a un réel strictement positif.
Montrer que l'équation différentielle $y'' - a^2 y = f$ admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

* * *

EXERCICE I.6 :

Soit p une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.
Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + py = 0$ s'annulent dans $\mathbb{R}$, sauf si $p = 0$.

* * *

EXERCICE I.7 :

Soit y une application de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; solution de

$$y'' = -X|y|$$

Montrer que y tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

* * *

EXERCICE I.8 :

Trouver le solution générale de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$

* * *

EXERCICE I.9 :

Soit E l'espace vectoriel : $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}$.
On définit sur E l'opérateur

$$T : E \to [0, 1]^{\mathbb{R}} : f \mapsto x \mapsto \int_0^x \int_t^1 f(u)dudt$$

Montrer que T induit un endomorphisme de E, et préciser ses éléments propres.

* * *

EXERCICE I.10 (UN THÉORÈME DE FLOQUET) :

Soient n un entier naturel non nul, T un réel strictement positif et $t \mapsto A(t)$ une application continue et $T-$périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On se propose d'étudier l'équation différentielle :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \tag{9.3}$$

1. Montrer qu'il existe une solution V du système, et un complexe λ, tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, V(t + T) = \lambda V(t)$$

Soit maintenant (V_k) un système fondamental de solutions de (**??**). On note, pour tout réel t, $M(t)$ la matrice dont les vecteurs colonne sont les $V_k(t)$.

2. Montrer qu'il existe une matrice C de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M(t + T) = M(t)C$$

* * *

EXERCICE I.11 :

Soit n un entier naturel non nul.
On pose : $(U, V) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On se propose, dans cet exercice, d'étudier l'équation différentielle :

$$X' = AX \tag{9.4}$$

où :$A = \lambda I_n + B$ et $B = U^T V$.

1. Exprimer, pour tout réel t, $X(t)$ en fonction de $X(0)$, t, λ, B et TrB.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels E de $\mathbb{R}^n$ tels que :

   $X(0) \in E$ implique $X(t) \in E$ pour tout t.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions de l'équation (**??**) admettent une limite finie en $+\infty$.

* * *

EXERCICE I.12 (DEUX PROBLÈMES COUSINS : ÉQUATIONS LINÉAIRES PERTURBÉES) :

On associe, à un polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ que nous noterons également P, les deux équations, dites linéaires perturbées, suivantes :

$$(D) : \sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)} = y$$

où x et y sont des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$;

$$(R) : \forall m \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} a_k x_{m+k} = y_m$$

où (x_m) et (y_m) sont deux suites complexes.
On se propose, dans les deux cas, de donner une condition nécessaire et suffisante à ce que la convergence vers 0 de y à l'infini implique celle de x.

1. Cas différentiel : à l'aide de solutions particulières de l'équation linéaire associée, donner une condition nécessaire (CD) sur les racines de P pour que la propriété de convergence considérée soit vérifiée.
2. Déterminer, de la même manière, une condition nécessaire (CR) à la propriété de convergence pour (R).

   On se propose maintenant de montrer que (CD) et (CR) sont suffisantes aux ropriétés de convergence des solutions des équations perturbées (D) et (R).

3. Montrer que pour chacun des deux problèmes, il suffit de résoudre le cas du degré 1.
4. Résoudre le problème dans le cas de (D).
5. Résoudre le problème dans le cas de (R).

* * *

Exercice I.13 (Une démonstration du comte Napoléon Daru) :

On considère, dans tout cet exercice, l'équation différentielle scalaire :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$$

où $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme réel scindé, unitaire de degré n, que nous noterons P.

1. Calculer la dimension de l'espace vectoriel des solutions de cette équation différentielle.

   On cherche maintenant à déterminer une base de cet espace vectoriel, à l'aide de la méthode de Daru. On s'intéresse pour cela à la famille de fonctions $(x \mapsto \exp mx)_{m\in\mathbb{R}}$.
2. Calculer l'image d'une telle fonction par l'opérateur différentiel $P(\frac{d}{dx})$.

   On considère l'application, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, $(m,x) \mapsto \exp mx$.
3. Exprimer les dérivées successives de cette application par rapport à m.

4. Que dire des opérateurs différentiels de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $\frac{\partial}{\partial m}$ et $P(\frac{\partial}{\partial x})$? En déduire les images par $P(\frac{d}{dx})$ des applications $x \mapsto x^k \exp(mx)$ - $m \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.
5. Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation différentielle considérée.

* * *

II Ancien programme : équations différentielles, cas général

Exercice II.1 (Flot de vecteur associé à une équation différentielle résolue) :

Soit E un espace de Banach, et U un ouvert de $E \times \mathbb{R}$. On considère une fonction f de U dans E, autrement dit un champ de vecteurs sur U, localement Lipschitzienne en x, par exemple C^1. On s'intéresse à l'équation différentielle en x :

$$x' = f(x,t)$$

On note, pour tout couple (x,s) de U et tout temps t suffisamment proche de s, $\varphi(t;s,x)$ la valeur en t de la solution globale de (Eq) associée à la condition initiale (x,s) -pourquoi existe-t-elle ?

---

1. Montrer que, pour tous (x,s_1), s_2 et t tels que cette exession est définie :

   $$\varphi(t;s_2,\varphi(s_2;s_1,x)) = \varphi(t;s_1,x)$$

   On s'intéresse au cas autonome. U s'écrit alors $V\times I$, où V est un ouvert de E et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit y_0 une solution du problème : $y_0' = f(y_0,u)$, $y_0(s_0) = Y$ avec s_0 un temps dans I et Y un vecteur de V.
2. Montrer que l'on peut définir un nouveau problème de Cauchy : $y' = f(y,t)$, $y(0) = Y$
   eu égard la constance de f en t, on précisera l'intervalle de définition de la nouvelle solution y_{0Y}.

   On suppose maintenant : $s_0 = 0$, I en particulier contient 0.
3. A l'aide d'un changement de variable inspiré de la question précédente et en utilisant une solution bien choisie à l'équation différentielle $y' = f(y)$, montrer :

   $$\varphi(t+s;0,Y) = \varphi(t;0,\varphi(s;0,Y))$$

* * *

Exercice II.2 (Explosion en temps fini, espace des phases de dimension finie) :

Soient n un entier strictement positif, J un intervalle ouvert réel et $f(.,.)$ un champ de vecteurs défini sur $J \times \mathbb{R}^n$. On choisit un couple (t_0, y_0) de conditions initiales sur $J \times \mathbb{R}^n$. On note y la solution du problème de Cauchy associé, $]T_*, T^*[$ son intervalle de définition.

1. Montrer que l'on se trouve dans l'alternative -non exclusive- suivante :
   (a) $T^* = \sup J$;
   (b) $\lim\limits_{t \to T^*} \|y(t)\| = +\infty$.

   Application. Soit t_0 un nombre réel, g et h des fonctions, respectivement C^1 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $[t_0, +\infty[$, dans $\mathbb{R}_+^*$, telles que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \int_a^{+\infty} \frac{1}{g(x)} dx = +\infty$$

2. Montrer que les solutions de l'équation différentielle : $x^{'} = h \cdot g(x)$ sont définies globalement.

$* * *$

Exercice II.3 :

Déterminer la forme générale du portrait de phase autonome en dimension 1.

$* * *$

Exercice II.4 :

Montrer que le problème général : $y' = f(y, t)$, posé sur un ouvert U d'un produit $E \times I$ où E est un espace de Banach et I un intervalle réel, est équivalent à une équation différentielle autonome sur un espace que l'on précisera.
Critiquer la pertinence d'une telle simplification.

$* * *$

Chapitre 10

Calcul différentiel et quelques applications

I Calcul différentiel élémentaire

Exercice I.1 :

Soit : $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$
Montrer que les applications suivantes sont différentiables et calculer leurs différentielles :

1. $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax + b$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$
2. $f_2 : E \to \mathbb{R} : u \mapsto \int_0^1 u(x)dx + 3u(0)$
3. $f_3 : M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (A, b) \mapsto Ab$
4. $f_4 : E^3 \to E : (u, v, w) \mapsto (x \mapsto (x^2 + 2)u(x)v(x) \int_0^1 a(t)w(t)dt + u(0)$, $a \in E$.

* * *

Exercice I.2 :

Soient n un entier naturel non nul, et une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
Montrer de deux manières que l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$x \mapsto f(x)(x)$$

est différentiable :

- En évaluant directement $f(x + h)(x + h)$.
- En l'exprimant comme composée de deux applications bien choisies.

* * *

Exercice I.3 :

Soit :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 \sin x_2, x_1 + \exp x_2)$$

Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

* * *

EXERCICE I.4 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, connexe par arcs : on s'intéresse aux fonctions f, différentiables, de U dans $\mathbb{R}$, telles que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est nulle sur U.

1. Donner un exemple, pour U et f, tel qu'il n'existe pas de fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) = g(y)$$

2. Donner une condition simple sur U, suffisante, pour qu'une telle fonction g existe pour tout f qui satisfait à l'hypothèse de l'exercice.

* * *

EXERCICE I.5 :

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$, à l'aide d'un changement de variable, l'équation aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

où f est une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et où l'un au moins de nombres a et b est non nul.

* * *

EXERCICE I.6 :

Soient n un entier strictement positif, et f une application convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f admet un minimum local, alors ce minimum est global.
2. Montrer que si, de plus, f est strictement convexe, alors ce minimum est unique et que : $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

* * *

EXERCICE I.7 :

Soit K un espace topologique compact. On note E l'espace vectoriel des applications continues de K dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de $\| \|_\infty$. Soient g une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et Φ l'application :

$$E \to E : f \mapsto g \circ f$$

1. Montrer que Φ est bien définie.
2. Montrer que Φ est différentiable et calculer sa différentielle.
3. Calculer, à l'aide de ce résultat, les différentielles respectives des applications ϕ_1 et ϕ_2 définies par :

$$\forall u \in E, \phi_1(u) = x \mapsto u^p(x)$$

$$\forall u \in E, \phi_2(u) = x \mapsto \exp(u(x)) + 3 \sin u(x_0), x_0 \in K$$

* * *

Exercice I.8 :

Pour chacune des fonctions :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

et

$$g : (x, y) \mapsto \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}$$

définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, étudier :

— La différentiabilité sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
— La prolongeabilité en $(0,0)$;
— La diffŕentiabilité, en $(0,0)$, de l'éventuel prolongement.

* * *

Exercice I.9 :

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\Delta f \geq f$ et que f admet un maximum dans U. Montrer que f est négative sur U.
2. On suppose maintenant que U est borné, et on note Γ la frontière de U. Soit g une application continue de Γ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe au plus une application h de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$ telle que :
   (a) h admet un prolongement continu commun avec g sur $\overline{U}$
   (b) $\Delta h = h$

* * *

Exercice I.10 (Contre-exemple pour le lemme de Schwarz) :

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = 0 \vee y = 0 \Rightarrow f(x, y) = 0 \\ x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow f(x, y) = x^2 \arctan \dfrac{y}{x} - y^2 \arctan \dfrac{x}{y} \end{cases} \tag{10.1}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent, mais sont différentes en $(0,0)$.

* * *

Exercice I.11 :

Soient n un entier strictement supérieur à 1, et soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Montrer que l'application $\overrightarrow{grad}(f)$ est surjective.

* * *

Exercice I.12 :

Montrer que la série de terme général :

$$U_n : (x,y) \mapsto \frac{1}{n^2}\exp(-n(x^2+y^2))$$

converge, en un sens que l'on précisera, vers une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

* * *

Exercice I.13 :

On note respectivement $(Ox)_+$ et $(Oy)_+$ les deux demi-axes positifs des abcisses et ordonnées de $\mathbb{R}^2$. Existe-t-il un arc C^1 dont le support soit égal à $(Ox)_+ \bigcup (Oy)_+$? Un tel arc peut-il être régulier ?

* * *

II Ancien programme : avec les accroissements finis

Exercice II.1 :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, et f une application continue de U dans F différentiable sur $U \setminus \{a\}$, où a est un élément de U. On suppose, de plus, que df admet une limite en a. Montrer que f est différentiable en a.

* * *

Exercice II.2 :

1. Donner un exemple d'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même qui soit un difféomorphisme local mais non global.
2. Montrer que
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (\sin x + \sinh y, \sinh x - \sin y)$$
est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

* * *

Exercice II.3 :

Soit n un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soit de plus f une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, différentiable, telle que :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ | \forall a \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n, \langle df(x)h | h\rangle \geq \alpha \|h\|^2$$

1. Soient a et b deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :
$$\langle f(b) - f(a) | b - a\rangle \geq \|b-a\|^2$$
2. Monterer que f est une application fermée.
3. Montrer que f est un difféomorphisme local.
4. Montrer que f est un difféomorphisme global.

* * *

Exercice II.4 :

Montrer que le système

$$xu^2 + yzv + x^2z = 3, xyv^3 + 2zu - u^2v^2 = 2$$

permet de définir, au voisinage du point $(1,1,1,1,1)$, (u,v) comme une fonction de (x,y,z).
Quelle est la différentielle de cette fonction en $(1,1,1)$?

* * *

Exercice II.5 :

Soient H_0 l'espace de Banach des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\|_\infty$, H_1 l'espace vectoriel de applications C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0, normé par $\|\|_\infty + f \mapsto \|f'\|_\infty$ que nous noterons $\|\|_1$.

1. Montrer que $(H_1, \|\|_1)$ est un espace de Banach.
2. Soit $\phi H_1 \to H_0 : f \mapsto f' + ff'$. Montrer que ϕ est différentiable et calculer sa différentielle.
3. Que dire de la différentielle de ϕ en 0 ?
4. Montrer que si la norme de l'application continue g est suffisament petite, alors l'équation différentielle $f' + ff' = g$ admet une solution dans H_1.

* * *

Exercice II.6 :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ qui admet des dérivées partielles bornées.

1. Montrer que si U est convexe, alors f est uniformément continue.
2. Que devient le résultat si on suppose seulement U connexe ?

* * *

Exercice II.7 :

Montrer qu'une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ne peut pas être injective.

* * *

III Ancien programme : géométrie différentielle

Exercice III.1 :

Soit f une fonction réelle à valeurs complexes, dérivable et 2π périodique.
Montrer que : $\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}dt$ est un entier.

* * *

Exercice III.2 :

On se propose de démontrer l'inégalité isopérimétrique :
si γ est un arc de Jordan régulier de $\mathbb{R}^2$, de longueur l et dont l'intérieur admet pour aire A, alors :

$$4\pi A \leq l^2$$

1. Démontrer l'inégalité de Wirtinger : si y est une application 2π-périodique C^1 de $\mathbb{R}$ dans lui-même, alors :

   $$\int_0^{2\pi} y^2 \leq \int_0^{2\pi} y'^2$$

   Etudier le cas d'égalité.

   On reprend les notations de l'énoncé, et on écrit : $\gamma := (x, y)$.

2. Montrer que l'on peut supposer γ centré en $(0,0)$, et de longueur 2π.

   On supposera par la suite que γ est paramétré par longueur d'arc.

3. Démontrer, en utilisant la formule de Green-Riemann, que :

   $$2A \leq \int_0^{2\pi} (x^2(s) + y'^2(s))ds$$

4. Conclure.
5. Etudier le cas d'égalité.

* * *

Chapitre 11

Combinatoire

I Exercices

Exercice I.1 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$; $u_1 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$ On se propose de déterminer une formule du terme général de (u_n), par la méthode dite des séries génératrices.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2^{n+1} - 1$$
et en déduire une minoration du rayon de convergence de la série entière $\sum z \mapsto u_n z^n$.
Cette série entière est appelée série génératrice de (u_n).
2. Soit f la somme de cette série sur son disque de convergence. Exprimer simplement $f(z)$, pour tout complexe z dans ce domaine.
3. En déduire une formule de u_n.

* * *

Exercice I.2 :

Soit F_n la suite de Fibonacci, définie par :

$$F_0 = 0; F_1 = 1; \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Calculer la fonction génératrice de (F_n) -je définis ce terme, si cela s'avère nécessaire.
2. En déduire une formule explicite du terme général de (F_n).

* * *

Exercice I.3 :

On définit, pour tout entier naturel n, le $n-$ième nombre de Bell B_n comme le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

1. Calculer B_1, B_2, B_3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.
On appelle série génératrice exponentielle des nombres de Bell la série entière -réelle- $\sum x \mapsto \frac{B_n}{n!} x^n$.
2. Minorer le rayon de convergence de cette série entière, et exprimer cette fonction sur son disque de convergence.
3. En déduire une formule explicite du terme général de B_n.

* * *

Exercice I.4 (Nombre de dérangements et série génératrice) :

1. Montrer, à l'aide d'un argument combinatoire, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_{n-k}$$

On connaît ainsi une "transformée" de la suite (D_n). Les calculs sont ici plus commodes avec la suite $\left(\frac{D_n}{n!}\right)$, la série formelle $\sum \frac{D_n}{n!} X^n$ est appelée série génératrice exponentielle de la suite (D_n).

2. A l'aide d'une équation déduite de la formule établie à la question 1., calculer la série génératrice de (D_n).

3. En déduire une formule explicite pour D_n.

* * *

Exercice I.5 (Dérangements, autre méthode) :

1. Montrer, à l'aide d'un argument combinatoire, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$$

2. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

3. Donner une formule explicite pour D_n.

* * *

Exercice I.6 :

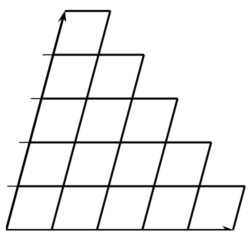
Un chef d'entreprise décide de distribuer des badges à ses employés, qui seront chacun identifiés par un numéro à cinq chiffres, afin de réguler l'entrée des différents locaux d'un site de production. Afin de limiter les risques d'erreur liés à une mauvaise lecture de la carte d'un employé, chaque numéro devra différer des numéros déjà affectés, de deux chiffres au moins.

1. Combien de badges est-il possible de réaliser compte tenu de cette contrainte ?
2. Pour les élèves de l'option informatique : écrire un algorithme, par exemple dans le langage Caml, donnant une distribution optimale de badges pour quatre chiffres.

* * *

Exercice I.7 :

Combien trouve-t-on de parallélogrammes sur cette figure ?

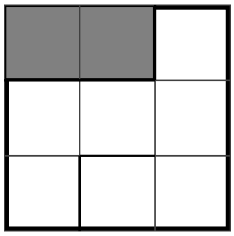


* * *

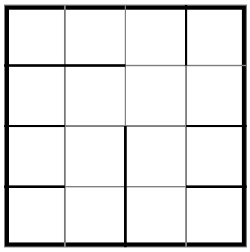
Exercice I.8 (Labyrinthes) :

Soit n un entier naturel non nul. On construit un labyrinthe, sur un carré de $n \times n$ cases entouré de murs infranchissables, en ajoutant des parois aux bords des n^2 cases.

Cas 3×3 : 5 parois, bloquage.



Cas 4×4 : 9 parois. Chaque case est accessible depuis n'importe quelle autre.



Déterminer, en fonction de n, le nombre maximal de parois que l'on peut ajouter en gardant le labyrithe connexe, c'est-à-dire de sorte que l'on puisse atteindre une case quelconque du labyrithe depuis n'importe quelle autre, compte tenu des contraintes imposées par les quatre murs d'enceinte et les parois.

* * *

Chapitre 12

Probabilités

I Formalisme des probabilités

Exercice I.1 (Tribus sur $\mathbb{N}$) :

Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur $\mathbb{N}$. Pour tout entier naturel a, on note B_a l'ensemble des éléments b de $\mathbb{N}$ tels que :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \{a, b\} \subseteq B \vee \{a, b\} \subseteq B^c$$

Montrer, à l'aide de la famille $(B_a)_a$, qu'il existe une famille (A_i) de parties de $\mathbb{N}$ telles que tout élément de $\mathcal{B}$ est une union disjointe de A_i.

* * *

Exercice I.2 :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

* * *

Exercice I.3 :

Montrer qu'une intersection dénombrable d'évènements presque sûrs est encore un évènement presque sûr.
En est-il de même pour une intersection non dénombrable ?

* * *

II calculs élémentaires

Exercice II.1 (Une distraction du savant cosinus) :

N voyageurs (au moins deux) s'apprêtent à monter dans un avion contenant N places numérotées. Le premier d'entre eux s'avère être le savant cosinus qui, distrait comme il l'est toujours, ne regarde pas le numéro de sa réservation. Les passagers suivants, quand ils montent, en ordre, dans l'avion, s'asseyent alors à leur place réservée si elle est encore libre, et sinon choisissent une place au hasard parmi celles qui restent.

---

1. Calculer, par récurrence sur N, la probabilité p_N que le dernier passager soit assis à sa place.
2. Retrouver le résultat précédent par un argument direct.

* * *

Exercice II.2 :

On jette plusieurs fois de suite et indépendamment une pièce de monnaie non équilibrée, la probabilité de tomber sur "Pile" est un réel p compris entre 0 et 1 strictement.
Calculer :

1. La probabilité de ne pas avoir de "Face" au cours des n premiers jets pour tout n supérieur à 1 ;
2. La prpobabilité d'obtenir "Face" pour la première fios au $n-$ième jet ;
3. l'espérance du nombre de jets jusqu'à la première apparition de "Face".

* * *

Exercice II.3 :

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère n boules numérotées de 1 à n, que l'on place dans n urnes, numérotées de la même manière.

1. Calculer, pour tout n, la probabilité p_n de l'évènement : chaque urne contient exactement une boule à la fin de l'opération.
2. Montrer que la suite (p_n) est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$.

* * *

III Lois de probabilités

Exercice III.1 (Recensement d'une population d'écureuils) :

On veut estimer le nombre N d'écureuils dans une forêt. Pour cela on en capture k, on leur met une petite marque sur la patte et on les relâche. Une semaine après (on suppose qu'aucun écureuil est mort ou né dans cet intervalle), on en capture l et on compte ceux d'entre eux qui portent la marque.

---

1. Calculer la probabilité d'observer une valeur m écureuils marqués en fonction de N, k et l.
2. Calculer, quand N est grand, la valeur N_{max} pour laquelle la probabilité ci-dessus est la plus grande. On appelle cette valeur *estimateur du maximum de vraisemblance* pour le nombre d'écureuils.

* * *

Exercice III.2 :

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de lois respectives $\mathcal{B}(n, p_n)$ où np_n est constant, de valeur unique λ.
On note, pour tout n : $A_n = (X_n \geq 1)$.
Soit, de plus, Y une variable de Poisson de paramètre λ.
Montrer, pour j fixé et supérieur à 1, que :

$$\mathbb{P}(X_n = j | A_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(Y = j | y \geq 1)$$

* * *

Exercice III.3 :

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$.
Quel entier j compris entre 0 et n, maximise $\mathbb{P}(X = j)$?

* * *

Exercice III.4 (Optimisations avec la loi de Poisson) :

1. Soit λ un réel strictement positif. Quel entier j maximise $\mathbb{P}(X = j)$, pour une variable de Poisson de paramètre λ ?
2. Soit j un entier positif. Quel est le réel λ pour lequel $\mathbb{P}(X = j)$ et maximal, où X est choisie avec une loi $\mathcal{P}(\lambda)$?

* * *

Exercice III.5 :

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.
Montrer que :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \ln((1-p)^{\frac{p}{p-1}}))$$

* * *

Exercice III.6 :

Soit p un réel compris, strictement entre 0 et 1, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathcal{B}(p)$.
Donner les lois de $max(X, Y)$ et $min(X, Y)$.

* * *

Exercice III.7 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace Ω, indépendantes, et telles que :
— X suit une loi de Poisson de paramètre λ ;
— Y vaut 1 ou 2, avec la même probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Donner la loi de la variable Z définie par : $Z = XY$.
2. Calculer la probabilité que Z prenne une valeur paire.

* * *

Exercice III.8 :

Soit X une variable aléatoire de Poisson, de paramètre λ. On note Y la variable $(-1)^X$.

1. Donner l'ensemble des valeurs prises par Y, puis calculer son espérance.
2. Déterminer la loi de Y.

* * *

IV L^2

Exercice IV.1 :

Soit X une variable aléatoire L^2. Quel réel minimise $c \mapsto \mathbb{E}((X-c)^2)$? Quel est le minimum atteint ?

* * *

Exercice IV.2 :

Soit X une variable aléatoire L^2.
On suppose que : $V(X) = 0$.
Montrer que X prend la valeur $\mathbb{E}(X)$ avec une probabilité 1.

* * *

Exercice IV.3 (L'inégalité de Tchebycheff est-elle optimale ?) :

1. (Oui) Montrer que, si a est un réel strictement positif, alors il existe une variable aléatoire X, L^2, telle que :
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \frac{V(X)}{a^2}$$
2. (Non) Soit X une variable aléatoire L^2. Montrer que :
$$a^2 \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \underset{a \to \infty}{\to} 0$$

* * *

V Classiques, ou presque ...mais beaux !

Exercice V.1 (Ruine du joueur) :

Un joueur dispose d'une mise initiale de k euros. A chaque partie qu'il joue, il a la probabilité p de perdre un euro, dans le cas contraire sa mise augmente d'un euro. Ce joueur se fixe comme objectif de jouer jusqu'à ce qu'il soit ruiné, ou jusqu'à ce que son capital atteigne la somme de M euros, où M est un entier fixé à l'avance.

---

1. On veut calculer la probabilité de l'évènement : "le joueur finit ruiné".
   (a) Modéliser, pour une mise k quelconque au début du jeu, le rpoblème comme une marche aléatoire.

   Pour tout entier k compris entre 0 et M, on note E_k l'événement correspondant à : "le joueur, ayant misé k euros, finit ruiné avant d'avoir enpoché un capital de M". On note q_k la probabinité correspondant à un tel évènement.

   (b) Calculer q_0 et q_M.
   (c) Montrer la relation de récurrence : $q_j = (1-p)q_{j+1} + pq_{j-1}$, pour tout indice j où cette formule est définie.
   (d) Montrer, pour tout j, que : $q_{j+1} - q_j = \left(\frac{p}{1-p}\right)^j (q_1 - q_0)$
   (e) En déduire que : $\forall k \in [\![0, M]\!], q_k - q_0 = (q_1 - q_0) \sum\limits_{j=0}^{k-1} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j$.
   (f) En appliquant la formule précédente au rang M, donner une expression de q_1 en fonction de p. On distinguera bien le cas où $p = \frac{1}{2}$.
   (g) Donner une expression de q_k en fonction de p.
2. Soit maintenant pour tout k compris entre 0 et M, F_k l'évènement : "le joueur empoche la mise de M euros sans avoir jamais été ruiné".
   (a) Peut-on dire que les évènements E_k et F_k sont contraires ?
   (b) En utilisant la même méthode que pour E_k, exprimer la probabilité de F_k en fonction de p. On distiguera bien le cas où $p = \frac{1}{2}$.
   (c) Conclusion ?

* * *

Exercice V.2 (Nombre de cycles dans une grande permutation aléatoire) :

Dans cet exercice, on cherche à estimer le nombre de cycles d'une permutation choisie au hasard dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ de $[\![1, n]\!]$, quand n est un entier naturel qui tend vers $+\infty$.
On étudie donc une suite (S_n) de variables aléatoires, de lois uniformes, respectivement sur les termes de $(\mathcal{S}_n)$.
Pour toute permutation σ d'un ensemble $[\![1, n]\!]$, on note $c(\sigma)$ le nombre de cycles de σ.
Par exemple : $c(S_n) = 1$ lorsque la valeur de S_n est un cycle, $c(S_n) = n$ lorsque S_n prend comme valeur l'identité.

---

1. Pour tout entier n strictement positif, on note Φ^n l'application :
$$\mathcal{S}_n \times [\![1, n+1]\!] \longrightarrow \mathcal{S}_n : (\sigma, i) \mapsto \tilde{\sigma} \circ (i, n+1)$$
où $\tilde{\sigma}$ est la permutation de $[\![1, n+1]\!]$ qui agit comme σ sur $[\![1, n]\!]$, et fixe $n+1$.
Montrer que cette application est une bijection.
2. Avec les conventions qui précèdent, discuter, selon σ et i, de la valeur de $c(\Phi^n(\sigma))$ en fonction de $c(\sigma)$.

   On se fixe maintenant un entier naturel non nul n et on cherche à connaître la loi de S_n.
   Soit $(U_k)_{k \in [\![1, n-1]\!]}$ une famille de variables aléatoires, indépendantes, respectivement sur les termes de $([\![1, k+1]\!])_k$. Soit (X_k) la suite de variables aléatoires, définie par récurrence finie sur k par :
   X_1 prend seulement la valeur $Id_{\{1\}}$; $\forall k \in [\![1, n-1]\!], X_{k+1} = \Phi^k(X_k, U_k)$.

3. Montrer que pour tout k, $c(X_k)$ est une sommme de variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes entre elles, dont on précisera les paramètres.
4. Montrer que, pour tout k, X_k et S_k ont la même loi. En déduire la loi de $c(S_n)$.
5. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
   Pour tout entier n strictement positif, on note H_n le $n-$ième nombre harmonique défini par : $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
6. Montrer que, pour tout réel ϵ strictement positif : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{c(S_n)}{H_n} - 1\right| \geq 1\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
   On dit que $\frac{c(S_n)}{H_n}$ converge vers 1 en probabilité.
7. En déduire que $\frac{c(S_n)}{\log n}$ converge vers 1 en probabilité. Conclusion ?

* * *

Exercice V.3 (Marche aléatoire cyclique) :

Soit N un entier naturel supérieur à 2. On définit une suite (z_n) de variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(z_n = \exp\frac{2i\pi}{N}\right) = \frac{1}{2} \wedge \mathbb{P}\left(z_n = \exp -\frac{2i\pi}{N}\right) = \frac{1}{2}$$
On définit ensuite la marche (s_n), sur $\mathbb{U}_N$, par :
$$s_0 = 1 \wedge \forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = s_n z_n$$

---

1. Montrer que (s_n) parcourt tout $\mathbb{U}_N$ avec probabilité 1. On définit la variable aléatoire V par :
   V est la dernière valeur dans $\mathbb{U}_N$ atteinte par la suite (s_n) si la marche parcourt tout $\mathbb{U}_N$, et vaut 1 si cet évènement ne se réalise pas.
2. Montrer que V suit la loi uniforme sur $\mathbb{U}_N \setminus \{1\}$.

* * *

Exercice V.4 (Norme euclidienne d'un sommet de l'hypercube choisi au hasard) :

Pour un entier n strictement positif, on note H_n l'ensemble des sommets de l'hypercube de dimension n, $\{0,1\}^n$. Soit de plus X_n une variable aléatoire uniforme sur H_n. Montrer que, si n tend vers $+\infty$, alors la norme euclidienne de X_n divisée par $\sqrt{n}$ converge en probabilité vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}\left(\left|\frac{\|X_n\|}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

* * *

VI Processus de branchement

Exercice VI.1 :

Un processus de branchement est une famille de variables aléatoires qui permet d'étudier l'évolution de la taille d'une population.Historiquement, c'est F Galton, pour estimer le probabilité d'extinction des noms nobles, qui a étudié le premier de ces processus : le processus de Galton-Watson.

Soit X_0 la taille initiale de la population étudiée.
Chaque individu donne naissance, indépendamment des autres, à m nouveaux individus, suivant une loi (p_m). Les descendants directs de la population initiale forment la première génération, dont on note la taille, aléatoire, X_1. Ces descendants ont des enfants, chacun suivant la même loi (p_k), et engendrent la deuxième génération, de taille X_2. De proche en proche, on définit ainsi la suite (X_n), dont le terme général nous donne le nombre d'individus de la $n-$ième génération.
Formellement, supposons que : $X_0 = 1$.
On définit la famille de $((\xi_k^n)_{k\in\mathbb{N}^*})_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires L^2, indépendantes entre elles et toutes de loi $(p_m)_m$, qui régissent la reproduction des individus des différentes générations, de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \xi_k^{n+1}$$

La fonction génératrice φ de la loi commune des termes de (ξ_k^n) est définie, pour tout s de $[-1, 1]$, par :

$$\varphi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m s^m$$

On note, pour tout entier n strictement positif, φ_n la fonction génératrice de X_n.

---

1. Quelle est la loi de X_1 ? On notera, respectivement, m et σ sa variance et son écart-type.
2. Justifier la formule : $\forall s \in [-1, 1], G_Y(s) = \mathbb{E}(s^Y)$, valable pour toute variable aléatoire discrète Y de fonction génératrice G_Y (on ne s'intéresse pas à l'espace de probabilité sous-jacent).
3. Démontrer soigneusement que, pour tout entier positif n :

$$\mathbb{E}\left(s^{X_{n+1}}\right) = \sum_{x\in X_n(\Omega)} \mathbb{E}\left(s^{\sum\limits_{k=1}^{x} \xi_k^{n+1}}\right)\mathbb{P}(X_n = x)$$

4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n = \varphi^{\circ n}$ où $\varphi^{\circ n}$ est le $n-$ième itéré de φ.
5. Démontrer que, pour tout entier n strictement positif n, X_n est L^2 et :

$$\mathbb{E}(X_n) = m^n \,;\, V(X_n) = \sigma^2 m^{n-1}\tfrac{m^n-1}{m-1} \text{ si } m \neq 1 \,;\, V(X_n) = n\sigma^2 \text{ si } m = 1.$$

On s'intéresse à la probabilité π d'extinction de la population, définie par : $\pi = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} | x_n = 0)$.

6. Pourquoi peut-on écrire $\pi = \underset{n\to+\infty}{lim} \mathbb{P}(X_n = 0)$?

   On note, pour tout entier naturel n : $q_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.
7. Que dire de π si $p_0 = 0$, $p_0 = 1$? On suppose maintenant : $p_0 \in]0, 1[$.
8. Montrer que : $\pi = \varphi(\pi)$. On établira pour cela une relation de récurrence sur les termes de (q_n).
9. Discuter, suivant m, de la valeur de π à l'aide des propriétés analytiques de φ.

* * *

Exercice VI.2 :

A l'instant 0, une culture biologique démarre avec une cellule rouge. Au bout d'une minute, cete cellule meurt et est remplacée par :

— deux cellules rouges avec probabilité $\frac{1}{4}$,
— Une cellule rouge et une cellule blanche avec probabilité $\frac{2}{3}$,
— deux cellules blanches probabilité $\frac{1}{12}$.

Chaque cellule rouge vit une minute et se reproduit à son tour suivant la même règle, chaque cellule blanche meurt dans le même temps sans se reproduire.

1. A l'instant $n + \frac{1}{2}$, quelle est la probabilité qu'aucune cellule blanche n'ait encore fait son apparition ?
2. Quelle est la probabilité que la population tout entière disparaise ?

* * *

Exercice VI.3 (Division cellulaire) :

On garde la notation de l'exercice qui précède.
Soit (Z_n) un procédé de division dans une population de cellules, vérifiant : $p_0 > 0$; $p_2 > 0$; $p_1 \in [0, 1[$ et $p_n = 0$ pour tout n supérieur ou égal à 3.

— Etudier la probabilité d'extinction de (Z_n).
— Quelle est la signification, biologiquement, du cas : $p_1 = 0$?

* * *

Chapitre 13

Exercices à retravailler

I Enoncés à retravailler

Exercice I.1 :

Soient n un entier naturel non nul, A une matrice telle que :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \det(A+M) = (\det A) + (\det M)$$

Montrer que A est nulle.

* * *

Exercice I.2 :

1. Enoncer le théorème de convergence d'un produit de Cauchy qui a été démontré en cours.
2. Démontrer le théorème de Mertens : si $\sum u_n$ et $\sum v_m$ sont deux séries d'une algèbre normée, respectivement absolument convergente et convergente, alors le produit de Cauchy de ces deux séries est convergent, de somme :
$$(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{m=0}^{+\infty} v_m)$$

* * *

Exercice I.3 :

Théorème de Stone-Weierstrass général.

* * *

Exercice I.4 :

Soit E un espace préhilbertien réel, F un espace vectoriel normé, et f une application continue de E dans F vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2, x \perp y \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On se propose de déterminer la nature de f.

1. Examiner le cas où E est de dimension inférieure ou égale à 1.
2. Que peut-on dire de $x+y$ et $x-y$ lorsque x et y sont deux vecteurs de E de même norme ?
3. Examiner le cas où f est paire.
4. Examiner le cas où f est impaire.
5. Examiner le cas général.

* * *

Exercice I.5 :

Soient E un espace Euclidien de dimension 3, x, y, et z des vecteurs de E.
Montrer :

$$[y \wedge z, z \wedge x, x \wedge y] = ([x, y, z])^2$$

et

$$(x \wedge y) \wedge (x \wedge z) = [x, y, z]x$$

* * *

Exercice I.6 :

Soit (z_n) une suite complexe vérifiant :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, |z_n - z_m| \geq 1$$

1. Soit α un réel strictement positif. Montrer que $\sum \frac{1}{|z_n|^{2+\alpha}}$ converge.
2. $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$ converge-t-elle ?

* * *

Exercice I.7 :

Soit (K, d) un espace métrique compact, par exemple un fermé borné d'un espace vectoriel normé de dimension finie.
On considère une isométrie f de K dans lui-même, c'est-à-dire une application de K dans K qui conserve la distance.

1. f admet-elle nécessairement un point fixe ?
2. Montrer que f est surjective.

* * *

Exercice I.8 :

Considérons la solution f l'équation différentielle $y' = 1 + Idy^2$, maximale, nulle en 0, dont on notera I_f l'intervalle de définition.
On suppose que f admet un développement en série entière au voisinage de 0.

1. Montrer que ce développement est de la forme $\sum_{n=0}^{\propto} a_n X^{3n+1}$ et que (a_n) vérifie : $a_0 = 1$;
$$\forall n \in \mathbb{N}, (3n + 4)a_{n+1} = \sum_{q=0}^{n} a_{n-q} a_q$$
2. Montrer que la suite (a_n) définie par les relations ci-dessus est décroissante.
3. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, et minorer son rayon de convergence R.
4. Montrer que $R < \pi/2 - Arctan(5/4) + 1$
5. Montrer que I_f n'est pas borné inférieurement.

* * *

Théorème de réalisation de Borel.
Série entière semi-convergente en tout point de son cercle de convergence ?
Condition de Frédéric pour la développabilité en sérien entière :
Existence d'un réel strictement positif M tel que :

$$forallk \in \mathbb{N}, \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \leq M^k$$

? ?

Exercice I.9 :

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Cet exercice utilise le résultat suivant : *Soit un espace vectoriel normé E, une partie compacte et convexe K de E et un groupe G affine, équicontinu -les normes des parties linéaires sont majorées par une constante M fixée-, sur E qui laisse stable K. Il suffit par exemple que G soit compact. Alors les éléments de G admettent un point fixe commun dans K.* Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. On se propose de montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, soit que les éléments de G préservent un produit scalaire.

- Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.
- Que dire de l'ensemble des termes de la famille $({}^tMM)_{M \in G}$?
- Etudier l'adhérence de son enveloppe convexe.
- Conclure à l'aide de la propriété des groupes affines compacts énoncée au début de cet exercice.

* * *

Exercice I.10 :

On considère une famille $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de courbes de $\mathbb{R}^2$, indexée sur une partie Λ de $\mathbb{R}$, définie par une famille d'équations $(G(x, y, \lambda) = 0)_{\lambda \in \Lambda}$, où G est une fonction de classe C^1. Dans les cas suivants, trouver une équation différentielle en $x \mapsto y$ -dont aura disparu λ- dont les solutions ont pour graphes des arcs des termes de Γ_λ.
Les termes de (Γ_λ) sont :

1. Les hyperboles d'équations respectives : $xy = \lambda$.
2. Les cercles d'équations respectives : $x^2 + y^2 = \lambda$.
3. Les ellipses de foyers $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ -trouver G.
4. Les courbes d'équations repectives :

$$(c(x)\lambda + d(x))y = a(x)\lambda + b(x)$$

   où a, b, c, et d sont des applications de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

* * *

Exercice I.11 :

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n X^n$, où a_n désigne la n-ième décimale de π.

* * *

Exercice I.12 :

Soit $\sum a_n$ une série divergente à termes strictement positifs. On note (S_n) la suite des sommmes partielles de $\sum a_n$, et on suppose que de plus, $\frac{a_n}{S_n}$ tend vers 0 en $+\infty$. Calculer les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum S_n z^n$, et étudier la relation qu'entretiennent leurs sommes respectives.

* * *

Exercice I.13 :

Soient n un entier naturel supérieur à 2, $(A_i)_i$ une famille de n points du plan Euclidien.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un $n-$gone dont les milieux des côtés soient les termes de (A_i).
2. Construire, le cas échéant, ces polygones.

* * *

Exercice I.14 (Décompostion de Dunford d'un endomorphisme d'espace vectoriel complexe) :

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie.

— Montrer qu'un endomorphisme u de E se décompose de manière unique d'une forme $d + n$, où d et n sont deuxendomorphismes, respectivement diagonolisable et nilpotent, qui commutent.

— Montrer de plus que d et n sont des polynômes en u.

* * *

Exercice I.15 :

Soient n un entier naturel non nul, et $\langle | \rangle$ le produit scalaire canonique de R^n.

1. Soient p un entier naturel non nul, (u_i) une famille de p vecteurs de R^n vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [[1,p]]^2, \langle u_i | u_j \rangle < 0$$

   Montrer que toute sous-famille de $p - 1$ vecteurs de (u_i) est libre.

2. Montrer que l'on ne peut trouver plus de $n + 1$ vecteurs vérifiant ces conditions.
3. Montrer que l'on peut trouver $n + 1$ vecteurs vérifiant ces conditions.

* * *

Exercice I.16 :

Soient I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$ telles que :
Si (x_n) est une suite convergente de I, alors $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une limite f.
2. Montrer que (f_n) converge uniformément.

* * *

Exercice I.17 :

Donner un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \exp(-x^2) \int_0^{x^2} \exp(t^2)dt$.

* * *

Exercice I.18 ($\mathbb{R}^3$ se partitionne en cercles Euclidiens) :

1. Donner une partition simple d'un tore plein en cercles Euclidiens.
2. Comment construit-on simplement un tore deuxième partitionné, dont le cercle radial contient le centre du premier tore, et qui englobe la première figure ? On s'inspirera, dans une large mesure, de la construction précédente.
3. Construire une partition de $\mathbb{R}^3$ en cercles Euclidiens.

* * *