Universidade Estadual de Maringá/DMA
Prof$^{\text{a}}$ Patrícia Hernandes Baptistelli

Álgebra Linear - 4ª Lista de Exercícios
Espaços Vetoriais

1. Em cada item abaixo, verifique se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

   (a) $V = \{(a,b);\ a,b \in \mathbb{R}\}$ com as seguintes operações de adição e multiplicação por escalar:
   $$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \text{ e } k(a,b) = (ka, 0).$$

   (b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} :\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$ com as operações usuais de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Verifique se os subconjuntos W abaixo são subespaços vetoriais de V:

   (a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ ax + by + cz = 0, \text{ com } a,b,c \in \mathbb{R}\},\ V = \mathbb{R}^3$;

   (b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y + z = 0\},\ V = \mathbb{R}^3$;

   (c) $W = \{p \in \mathcal{P}_n : p(0) = p(1)\},\ V = \mathcal{P}_n$;

   (d) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\},\ V = \mathbb{R}^4$;

   (e) $W = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A^2 = 0\},\ V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$;

   (f) $W = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : AB = BA\}$, para $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

   (g) $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) + f'(x) = 0\},\ V =$ espaço das funções a valores reais.

3. Seja U o seguinte subconjunto de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por $U = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} :\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

   (a) U é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in U$?

4. Seja W o subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. O vetor $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ pertence a W?

5. O espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$?

6. Mostre que os polinômios $1 - t^3$, $(1-t)^2$, $1 - t$ e 1 geram o espaço $\mathcal{P}_3$ dos polinômios de grau ≤ 3.

7. Considere o subespaço vetorial $W = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 : p''(1) = 0\}$ e obtenha os seus geradores.

8. Expresse o polinômio $p(t) = t^2 + 4t - 3$ sobre $\mathbb{R}$ como combinação linear dos polinômios $p_1(t) = t^2 - 2t + 5$, $p_2(t) = 2t^2 - 3t$ e $p_3(t) = t + 3$.

9. Mostre que $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$ pode ser escrita como combinação linear das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

10. Determinar m e n para que os conjuntos de vetores de $\mathbb{R}^3$ dados abaixo sejam L.I.

 (a) $\{\ (3, 5m, 1),\ (2, 0, 4),\ (1, m, 3)\ \}$

 (b) $\{\ (6, 2, n),\ (3, m + n, m - 1)\ \}$.

11. (a) Mostre que $v = (1 - i, i) \in \mathbb{C}^2$ e $w = (2, -1 + i) \in \mathbb{C}^2$ são L.D. sobre $\mathbb{C}$, mas são L.I. sobre $\mathbb{R}$.

 (b) Mostre que $(3 + \sqrt{2},\ 1 + \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ e $(7,\ 1 + 2\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ são L.D. sobre $\mathbb{R}$, mas são L.I. sobre o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$.

12. No espaço $\mathcal{P}_3$ dos polinômios de grau ≤ 3, os polinômios $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$, $q(x) = x^3 - x^2 + 6x + 2$ e $r(x) = x^3 - 7x^2 + 4x$ são L.D. ou L.I.?

13. Seja $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine se os vetores abaixo formam uma base de V:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Mostre que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial de dimensão 2 sobre $\mathbb{R}$. E qual é a dimensão de $\mathbb{C}$ visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$? Qual é a dimensão de $\mathbb{C}^2$ visto como espaço vetorial $\mathbb{R}$? E sobre $\mathbb{C}$?

15. Exiba uma base e determine a dimensão do espaço vetorial real das matrizes diagonais $n \times n$.

16. Ache uma base e a dimensão do subespaço W de $\mathbb{R}^3$, onde

 (a) $W = \{(a, b, c);\ a+b+c = 0\}$ (b) $W = \{(a, b, c);\ a = b = c\}$ (c) $W = \{(a, b, c);\ c = 3a\}$.

17. Sejam $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4;\ b - 2c + d = 0\}$ e $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4;\ a = d,\ b = 2c\}$. Ache uma base e a dimensão dos subespaços:

 (a) U (b) W (c) $U \cap W$.

18. Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ a = d \text{ e } b = c \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ a = c \text{ e } b = d \right\}$ subespaços de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

 (a) Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base.

 (b) Determine $W_1 + W_2$. Podemos dizer que $W_1 + W_2 = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$? Justifique!

19. Considere os subespaços $W_1 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 : z = 0, x + w = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 : y + z + t = 0\}$ e $W_3 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 : 2x + t + 2w = 0\}$.

(a) Determine uma base para o subespaço $W_1 \cap W_2 \cap W_3$;

(b) Verifique se $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^5$. Justifique.

20. Considere os subespaços $U = \{p \in \mathcal{P}_3 : p'(t) = 0\}$ e $W = \{p \in \mathcal{P}_3 : p''(t) = 0\}$. Determine as dimensões de $U + W$ e $U \cap W$.

21. Determine se os vetores $(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 2), (2, 5, 6, 4)$ e $(2, 6, 8, 5)$ formam uma base para $\mathbb{R}^4$.

22. Considere o sistema linear homogêneo

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 & = & a \\ x_1 - x_2 + 4x_3 & = & b \\ 6x_2 - 14x_3 & = & c \end{array} \right.$$

e seja $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ (x_1, x_2, x_3)$ é solução de $S\}$.

(a) Que condições devemos impor sobre a, b e c para que W seja subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$?

(b) Nas condições determinadas em (a), encontre uma base para W.

(c) Que relação existe entre a dimensão de W e o grau de liberdade do sistema? Seria este resultado válido para quaisquer sistemas homogêneos?

23. Ache uma base e a dimensão do espaço solução W de cada sistema linear homogêneo abaixo.

(a) $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 2z + 2s - t = 0 \\ x + 2y - z + 3s - 2t = 0 \\ 2x + 4y - 7z + s + t = 0 \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z + 3s - 4t = 0 \\ 2x + 4y - 2z - s + 5t = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 4s - 2t = 0 \end{array} \right.$

24. Sejam $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\mathcal{B}_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$ e $\mathcal{B}_3 = \{(2, 0), (0, 2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

(a) Ache as matrizes de mudança de base: (i) $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_1}$ (ii) $[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}}$ (iii) $[I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}}$ (iv) $[I]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}}$.

(b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação à base: (i) $\mathcal{B}$ (ii) $\mathcal{B}_1$ (iii) $\mathcal{B}_2$.

(c) As coordenadas de um vetor u com relação à base $\mathcal{B}_1$ são dadas por $[u]_{\mathcal{B}_1} = [4, 0]^t$. Quais são as coordenadas de u com relação à base $\mathcal{B}$.

25. Considere as bases $\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ e $\mathcal{B} = \{2, 2x, 4x^2, 8x^3, 16x^4\}$ de $\mathcal{P}_4$.

(a) Determine $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

(b) Se $[p]_{\mathcal{A}} = [1, 2, 3, 4, 5]^t$, determine $[p]_{\mathcal{B}}$.

(c) Determine o polinômio p cujas coordenadas são dadas no item (b).

26. Considere o subespaço $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : d = 0 \right\}$.

(a) Determine duas bases distintas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de W.

(b) Determine $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

(c) Seja v um vetor tal que $[v]_{\mathcal{B}} = [\pi, e, 0]^t$. Determine $[v]_{\mathcal{A}}$.