ریاضی عمومی (۱)

تهیه و تدوین:

دکتر بهروز خسروی- دکتر داریوش کیانی- دکتر سارا سعیدی مدنی- دکتر امیر ساکی

دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

حد توابع

تابعی که به هر عدد طبیعی یک عدد حقیقی را نسبت می‌دهد یک **دنباله** نامیده می‌شود.

اگر مقداری که این تابع به عدد طبیعی n نسبت داده است را با a_n نمایش دهیم، آن‌گاه دنباله‌ی مورد بحث، با نماد $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ یا $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ نمایش داده می‌شود و گاهی به صورت $a_1, a_2, a_3, \ldots$ نیز نوشته می‌شود.

مثال

دنباله‌ی $\{n\}_{n=۱}^{+\infty}$ عبارت است از:

$$۱, ۲, ۳, \ldots$$

مثال

دنباله‌ی $\{n^۲ + ۵\}_{n=۱}^{+\infty}$ عبارت است از:

$$۶, ۹, ۱۴, ۲۱, \ldots$$

مثال

دنباله‌ی $\left\{\frac{۱}{n}\right\}_{n=۱}^{+\infty}$ عبارت است از:

$$۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots$$

مثال

دنباله‌ی $\left\{\frac{(-۱)^n}{۲^n}\right\}_{n=۱}^{+\infty}$ عبارت است از:

$$\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{-۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \frac{-۱}{۳۲}, \frac{۱}{۶۴}, \ldots$$

مثال

دنباله‌ی $\left\{\frac{۲^n}{n!}\right\}_{n=۱}^{+\infty}$ عبارت است از:

$$\frac{۲}{۱}, \quad \frac{۴}{۲!} = ۲, \quad \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}, \quad \ldots$$

مبحث حد دنباله‌ها را در فصل‌های بعدی، به‌طور دقیق خواهیم دید. در اینجا، به مفهوم شهودی آن اکتفا می‌کنیم.

فرض کنید $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ یک دنباله است. اگر مقدار n بیش‌تر و بیش‌تر شود و به بی‌نهایت میل کند، آن‌گاه مقادیر a_n ممکن است به عدد حقیقی مشخصی مانند a میل کنند. در این صورت می‌گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *همگرا* به a است و می‌نویسیم:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a.$$

هم‌چنین، ممکن است با میل‌کردن n به بی‌نهایت، مقادیر a_n به $+\infty$ یا $-\infty$ میل کنند یا به یک مقدار مشخص میل نکنند. در این صورت، می‌گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **واگرا** است. توجه کنید که در حالت اول، گاهی می‌گوییم $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ واگرا به $+\infty$ یا $-\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \text{ یا } -\infty$$

مثال

همگرایی یا واگرایی دنباله‌های زیر را بررسی کنید:

(الف) $\left\{\frac{۱}{n}\right\}_{n=۱}^{\infty}$

(ب) $\left\{\frac{۱}{n^{۲}}\right\}_{n=۱}^{\infty}$

(ج) $\left\{\frac{(-۱)^{n}}{n}\right\}_{n=۱}^{\infty}$

(د) $\{(-۱)^{n}\}_{n=۱}^{\infty}$

(ه) $\{n\}_{n=۱}^{\infty}$

پاسخ

※ دنباله‌های قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) هر سه به صفر همگرا هستند.

※ دنباله‌ی قسمت (د) واگراست، زیرا با میل‌کردن n به بی‌نهایت، $(-۱)^n$ می‌تواند هر دو مقدار $+۱$ و -۱ را داشته باشد.

※ دنباله‌ی قسمت (ه)، واگرا به $+\infty$ است.

قضیه فشردگی

فرض کنید (a_n)، (b_n) و (c_n) سه دنباله هستند و N یک عدد طبیعی است به‌طوری که به‌ازای هر $n \geq N$، داریم $a_n \leq b_n \leq c_n$، و به‌علاوه $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \ell$. در این صورت داریم $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

تذکر

بین هر دو عدد حقیقی، نامتناهی عدد گویا و نامتناهی عدد غیرگویا (گنگ یا اصم) وجود دارد (اصطلاحاً می‌گوییم که اعداد گویا و اعداد اصم در اعداد حقیقی چگال هستند).

تذکر

به‌ازای هر عدد حقیقی دل‌خواه α، دنباله‌ای از اعداد گویا وجود دارد که به α همگرا است.
به طور مثال، دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$a_n = \frac{[n\alpha]}{n} \in \mathbb{Q}, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، می‌دانیم $n\alpha - ۱ < [n\alpha] \leq n\alpha$، و لذا $\alpha - \frac{۱}{n} < \frac{[n\alpha]}{n} \leq \alpha$، در حالی‌که حد طرفین برابر با α است. پس طبق قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

تذکر

هم‌چنین به‌ازای هر عدد حقیقی دل‌خواه α، دنباله‌ای از اعداد اصم وجود دارد به‌طوری که به α همگرا است. به طور مثال، دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$b_n = \frac{[n\alpha]}{n} + \frac{\sqrt{۲}}{n} \notin \mathbb{Q}, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

می‌دانیم $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[n\alpha]}{n} = \alpha$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{۲}}{n} = ۰$. پس داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \alpha.$$

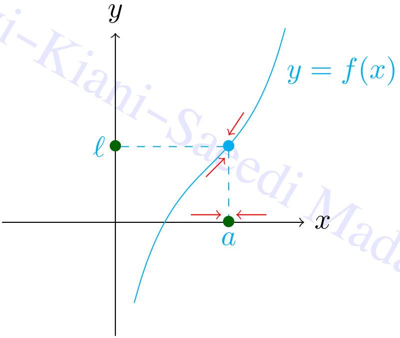
حد تابع

فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ در یک همسایگی دوطرفه‌ی نقطه‌ی a (به جز شاید خود a) تعریف شده است. هم‌چنین، فرض می‌کنیم بتوانیم با انتخاب x به اندازه‌ی کافی نزدیک به نقطه‌ی a مقدار $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دل‌خواه نزدیک به مقدار ℓ به‌دست آوریم.

در این صورت، اصطلاحاً می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x = a$ دارای **حد** برابر با ℓ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

برای مثال، شکل زیر را ببینید:



اگر انتخاب x صرفاً به‌ازای x نقاط بزرگتر از a مجاز باشد و شرط اخیر برقرار شود، می‌گوییم **حدراست** تابع $f(x)$ در $x=a$ برابر با ℓ است و می‌نویسیم:

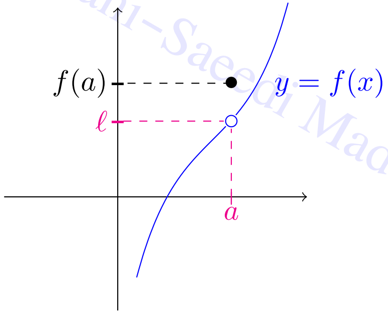
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell.$$

به طور مشابه، اگر صرفاً انتخاب x از مقادیر کوچک‌تر از a مجاز باشد، می‌گوییم **حدچپ** تابع $f(x)$ در $x=a$ برابر با ℓ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell.$$

تذکر

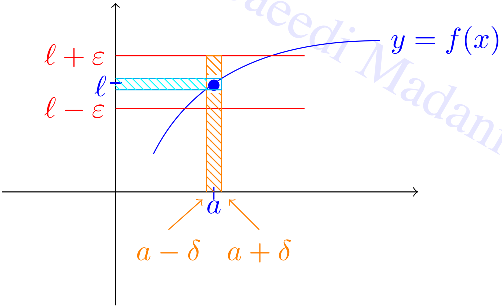
دقت کنید که ممکن است ℓ با $f(a)$ برابر نباشد یا اصلاً f در a تعریف نشده باشد (یا به طور معادل a در دامنهٔ تابع f نباشد). به طور مثال، به شکل زیر توجه کنید:



تعریف حد

می‌گوییم تابع $y = f(x)$ در $x = a$ دارای حد برابر با ℓ است هرگاه:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x; \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right).$$



یادآوری

به‌وضوح، منظور از نقاط x که در شرط $0 < |x - a| < \delta$ صدق می‌کنند، همان نقاط x است که در بازه‌ی $(a - \delta, a + \delta)$ قرار دارند و $x \neq a$. هم‌چنین، منظور از $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ آن است که $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.

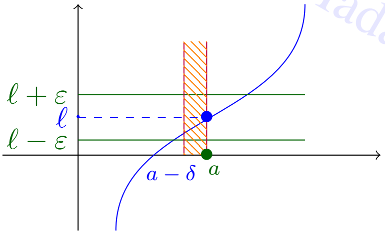
تعریف حد چپ

می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x = a$ دارای حد چپ برابر با ℓ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$$

هرگاه:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x, (a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon).$$



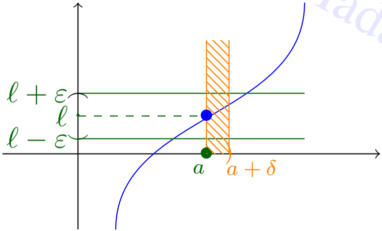
تعریف حد راست

می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x = a$ دارای حد راست برابر با ℓ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$$

هرگاه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, (a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$



قضیه

حد یک تابع، در صورت وجود یکتا است.

قضیه

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell = \lim_{x\to a^-} f(x) \iff \lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

قضیه

اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$، آن‌گاه داریم:

(۱) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \ell \pm \ell'$.

(۲) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \ell\ell'$.

(۳) اگر $\ell' \neq ۰$ آن‌گاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}$.

گزاره

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع هستند، و بازه‌ای حول a موجود است که به‌ازای هر x در این بازه داریم $f(x) \leq g(x)$. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$، آن‌گاه داریم $\ell \leq m$.

گزاره

(۱) اگر $f(x)$ تابعی باشد که $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ و $\ell > 0$، آن‌گاه بازه‌ای حول a موجود است که به‌ازای هر x در این بازه (صرف نظر از خود a) داریم $f(x) > 0$.

(۲) اگر $f(x)$ تابعی باشد که $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ و $\ell < 0$، آن‌گاه بازه‌ای حول a موجود است که به‌ازای هر x در این بازه (صرف نظر از خود a) داریم $f(x) < 0$.

قضیه (فشردگی)

فرض کنید $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ توابعی هستند که در یک همسایگی نقطه‌ی a (به جز شاید خود a) تعریف شده‌اند، و به‌علاوه برای هر x در این همسایگی داریم:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

اگر $\lim_{x\to a} g(x) = \ell = \lim_{x\to a} h(x)$، آن‌گاه $f(x)$ هم در $x = a$ دارای حد است و $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right]$.

پاسخ

می‌دانیم که به‌ازای هر عدد حقیقی t داریم $t-۱<[t]\leq t$. پس به‌ازای هر $x\neq ۰$، داریم: $\frac{۱}{x}-۱<\left[\frac{۱}{x}\right]\leq\frac{۱}{x}$. حال، دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول:

$$x>۰\Rightarrow x\left(\frac{۱}{x}-۱\right)<x\left[\frac{۱}{x}\right]\leq x\frac{۱}{x}\Rightarrow ۱-x<x\left[\frac{۱}{x}\right]\leq ۱.$$

اکنون طبق قضیه فشردگی داریم $\lim\limits_{x\to ۰^+} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$.

حالت دوم:

$$x<۰\Rightarrow ۱-x>x\left[\frac{۱}{x}\right]\geq ۱.$$

پس طبق قضیه فشردگی داریم $\lim\limits_{x\to ۰^-} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$. پس داریم $\lim\limits_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$.

توجه

فرض کنید $f(x)$ یک تابع باشد. داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

تذکر

اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ که $\ell \neq 0$، آن‌گاه به راحتی با استفاده از تعریف حد، نتیجه می‌شود که $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$. اما برای عکس این مطلب، دقت کنید که اگر $\lim_{x\to a} |f(x)| = \ell$، آن‌گاه در مورد حد تابع $f(x)$ نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت.

در واقع حد $f(x)$ در $x=a$ ممکن است حتی وجود نداشته باشد. برای مثال، تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x\geq ۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}.$$

در این مثال، $\lim_{x\to ۰}|f(x)|=۱$، در حالی‌که حد $f(x)$ در $x=۰$ وجود ندارد.

قضیه

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ و $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا به a باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به ℓ همگرا است.

کاربرد

اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$ به‌طوری که حدهای $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ با هم برابر نباشند، آن‌گاه تابع $f(x)$ در $x=a$ حد ندارد.

مثال

فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} ۳x + ۱, & x \in \mathbb{Q} \\ (x+۱)^۲, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

مطلوب است $\lim_{x\to ۲} f(x)$.

پاسخ

فرض می‌کنیم $\{a_n\}_{n=۱}^{+\infty}$ و $\{b_n\}_{n=۱}^{+\infty}$ به‌ترتیب دنباله‌هایی گویا و اصم هستند که هر دو همگرا به ۲ هستند. در این صورت، داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} ۳a_n + ۱ = ۳ \times ۲ + ۱ = ۷$$

و

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} (b_n + ۱)^۲ = (۲ + ۱)^۲ = ۹.$$

لذا چون ۹ $\neq$ ۷، پس $f(x)$ در $x = ۲$ حد ندارد.

مثال

فرض کنید $f(x) = \sin\frac{۱}{x}$. مطلوب است $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$.

پاسخ

دنباله‌های $a_n = \dfrac{۱}{۲n\pi + \frac{\pi}{۲}}$ و $b_n = \frac{۱}{۲n\pi}$ را در نظر می‌گیریم. حد هر دوی این دنباله‌ها، برابر صفر است. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم:

$$f(a_n) = \sin\frac{\pi}{۲} = ۱$$

و

$$f(b_n) = \sin ۰ = ۰$$

پس $f(x)$ در $x = ۰$ حد ندارد.

تعریف

تابع $g(x)$ را بر بازه‌ی I **کران‌دار** می‌گوییم، هرگاه عدد حقیقی M وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\forall x \in I, \quad |g(x)| \leq M.$$

قضیه

اگر $\lim_{x\to a} f(x) = ۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی نقطه‌ی a (به جز شاید خود a) تابعی کران‌دار باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = ۰.$$

مثال

حاصل حد زیر را (در صورت وجود) به‌دست آورید:

$$\lim_{x\to ۰}(x\sin\frac{۱}{x}).$$

پاسخ

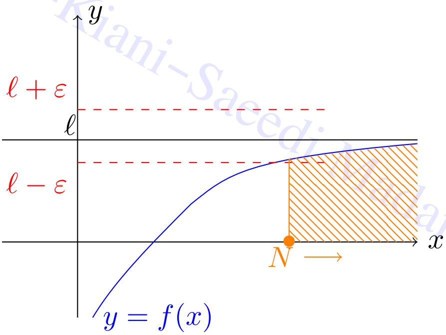
تابع $g(x) = \sin\frac{۱}{x}$ را به‌ازای $x \neq ۰$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که g تابعی کران‌دار است، و به وضوح داریم $\lim_{x\to ۰} x = ۰$. پس طبق قضیه‌ی قبل، حاصل حد داده‌شده برابر با صفر است.

فرض کنید تابع $f(x)$ به‌ازای هر $x \geq b$ تعریف شده است که در آن b عددی حقیقی است. به‌علاوه، فرض کنید با انتخاب نقاط x به اندازه‌ی کافی بزرگ بتوانیم مقادیر $f(x)$ را به اندازه‌ی دل‌خواه نزدیک به مقدار ℓ به‌دست آوریم. در این صورت، اصطلاحاً می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند برابر با ℓ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

به صورت مشابه، اگر $f(x)$ به‌ازای هر $x \leq b$ تعریف شده باشد که در آن b عددی حقیقی است و با انتخاب نقاط x به اندازه‌ی کافی کوچک بتوان حکم مشابهی را به‌دست آورد، آن‌گاه می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

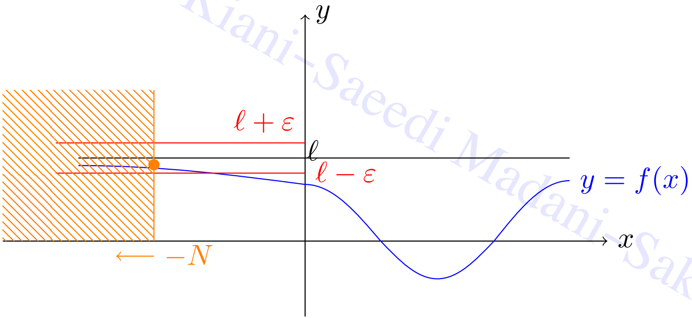
به عبارت دقیق‌تر، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ هرگاه:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : \forall x > N,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$



هم‌چنین، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ هرگاه:

$$\forall \varepsilon > \circ\ \exists N > \circ : \forall x < -N,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$



مثال

مطلوب است:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2-4x+1}.$$

پاسخ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2-4x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(3-\cancelto{0}{\frac{4}{x}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{2}{3}.$$

حد بی‌نهایت

اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه‌ی a به جز شاید خود a (یعنی همسایگی محذوف a) تعریف شده باشد و با انتخاب نقاط x به اندازه‌ی کافی نزدیک به a بتوان مقادیر $f(x)$ را به اندازه‌ی دل‌خواه بزرگ به‌دست آورد، اصطلاحاً می‌گوییم حد $f(x)$ در $x = a$ برابر با $+\infty$ است و می‌نویسیم:

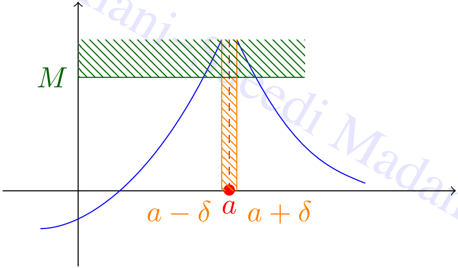
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

و به صورت مشابه، اگر به میزان دل‌خواه بتوان مقادیر $f(x)$ را کوچک به‌دست آورد، می‌گوییم حد $f(x)$ در $x = a$ برابر با $-\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

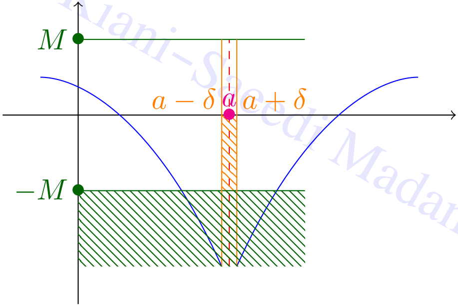
به عبارت دقیق‌تر، $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ هرگاه

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0:\ \forall x (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M).$$

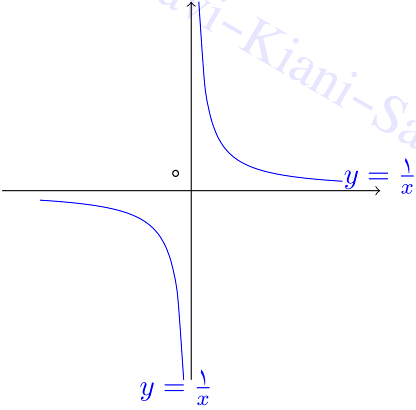


همچنین، به‌طور دقیق‌تر، $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ هرگاه:

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M).$$



مثال

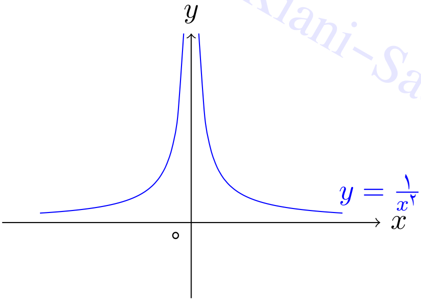


با توجه به شکل، واضح است که:

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x} = -\infty$$

مثال

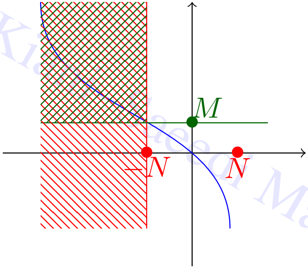
با توجه به شکل، واضح است که:



$$\lim_{x \to ۰^+} \frac{۱}{x^۲} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{۱}{x^۲} = +\infty$$

توجه کنید که حاصل یک حد در بی‌نهایت، ممکن است بی‌نهایت شود. پس چهار حالت دیگر می‌توانیم داشته باشیم. برای نمونه، طبق تعریف، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ هرگاه:

$$\forall M > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall x (x < -N \Rightarrow f(x) > M).$$



تمرین

در ادامه‌ی بحث بالا، سه حالت دیگر باقی‌مانده برای حد را در نظر بگیرید و با الگوگیری از بحث‌های قبل، تعریف دقیق را برای آن‌ها بنویسید.

قضیه

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x} = ۱.$$

مثال

نشان دهید $\lim_{x\to ۰} \frac{\cos x}{x}$ وجود ندارد.

پاسخ

وقتی x به سمت صفر میل می‌کند $\cos x$ به سمت ۱ میل می‌کند. لذا وقتی x به سمت صفر میل می‌کند، از جایی به بعد می‌توان فرض کرد $۱ \leq \cos x \leq \frac{۱}{۲}$.
حال اگر $x > ۰$، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{۱}{x}.$$

از آنجا که $\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{۲x} = +\infty$، داریم $\lim_{x\to ۰^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$.
به صورت مشابه، اگر $x < ۰$ آن‌گاه $\frac{۱}{۲x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{۱}{x}$. حال، چون $\lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{۲x} = -\infty$، لذا $\lim_{x\to ۰^-} \frac{\cos x}{x} = -\infty$. بنابراین، حد داده‌شده وجود ندارد.