

# 2022 年广东高考数学 (新高考 I 卷)

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

答案：DDBCD ACC

1. 若集合  $M = \{x \mid \sqrt{x} < 4\}$ ,  $N = \{x \mid 3x \geq 1\}$ , 则  $M \cap N =$

- A.  $\{x \mid 0 \leq x < 2\}$
- B.  $\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 2\}$
- C.  $\{x \mid 3 \leq x < 16\}$
- D.  $\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 16\}$

$$M = \{x \mid 0 \leq x < 16\}, N = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{3}\right\}, M \cap N = \left\{\frac{1}{3} \leq x < 16\right\}, \text{ 故选 D.}$$

2. 若  $i(1 - z) = 1$ , 则  $z + \bar{z} =$

- A. -2
- B. -1
- C. 1
- D. 2

$$1 - z = \frac{1}{i} = -i, z = 1 + i, z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) = 2, \text{ 选 D.}$$

3. 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  在边  $AB$  上,  $BD = 2DA$ . 记  $\overrightarrow{CA} = m$ ,  $\overrightarrow{CD} = n$ , 则  $\overrightarrow{CB} =$

- A.  $3m - 2n$
- B.  $-2m + 3n$
- C.  $3m + 2n$
- D.  $2m + 3n$

$$\overrightarrow{CB} + 2m = 3n \quad (\text{延长 } CD \text{ 至 } E, \text{ 使得 } AE = BC), \text{ 所以 } \overrightarrow{CB} = -2m + 3n, \text{ 选 B.}$$

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题, 其中一部分水蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔 148.5 m 时, 相应水面的面积为  $140.0 \text{ km}^2$ ; 水位为海拔 157.5 m 时, 相应水面的面积为  $180.0 \text{ km}^2$ . 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台, 则该水库水位从海拔 148.5 m 上升到 157.5 m 时, 增加的水量约为 ( $\sqrt{7} \approx 2.65$ )

- A.  $1.0 \times 10^9 \text{ m}^3$
- B.  $1.2 \times 10^9 \text{ m}^3$
- C.  $1.4 \times 10^9 \text{ m}^3$
- D.  $1.6 \times 10^9 \text{ m}^3$

棱台体积公式  $V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$ , 其中  $S_1$  为上底底面积,  $S_2$  为下底底面积. 代入计算, 知

$$V = \frac{157.5 - 148.5}{3}(140000000 + 180000000 + \sqrt{140000000 \times 180000000}) \approx 1.4 \times 10^9 \text{ m}^3$$

即选 C.

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 则这 2 个数互质的概率为

- A.  $\frac{1}{6}$
- B.  $\frac{1}{3}$

- C.  $\frac{1}{2}$   
D.  $\frac{2}{3}$

枚举。互质的有

$$(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (3, 7), (3, 8), (4, 5), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 7), (6, 8)$$

共 14 组。概率为  $\frac{14}{7 \times 6 \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ 。

6. 记函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) + b (\omega > 0)$  的最小正周期为  $T$ 。若  $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$ , 且  $y = f(x)$  的图象关于点  $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$  中心对称, 则  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

A. 1

B.  $\frac{3}{2}$

C.  $\frac{5}{2}$

D. 3

因为关于  $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$  中心对称, 故  $b = 2$ 。进一步地,  $\sin\left(\frac{3\pi\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ , 且  $\frac{2\pi}{3} < \frac{2\pi}{\omega} < \pi, 2 < \omega < 3$ , 故  $\frac{6\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4} < \frac{3\pi\omega}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{19\pi}{4}$ , 又  $\sin\left(\frac{3\pi\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ , 故  $\frac{3\pi\omega}{2} + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{N}$ 。故  $\frac{3\pi\omega}{2} + \frac{\pi}{4} = 4\pi$ , 即  $\omega = \frac{5}{2}$ 。此时,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = \sin\frac{3\pi}{2} + 2 = 1$ , 故选 A。

7. 设  $a = 0.1e^{0.1}, b = \frac{1}{9}, c = -\ln 0.9$ , 则

A.  $a < b < c$

B.  $c < b < a$

C.  $c < a < b$

D.  $a < c < b$

方法一：（如果你是计算机）不难算得  $a \approx 0.110517, b \approx 0.111111, c \approx 0.105361$ , 所以  $c < a < b$ , 选 C。

方法二：（如果你不是计算机）微小量的时候, 我们有  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$  (后面的量太小了), 所以  $e^x \approx 1.105$ , 故  $a \approx 0.1105 < b$ 。

同理,  $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ , 所以  $c = \ln \frac{10}{9} = \frac{17}{162} \approx 0.105$ 。所以选 C。

8. 已知正四棱锥的侧棱长为  $l$ , 其各顶点都在同一球面上。若该球的体积为  $36\pi$ , 且  $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$ , 则该正四棱锥体积的取值范围足

A.  $\left[18, \frac{81}{4}\right]$

B.  $\left[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}\right]$

C.  $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$

D.  $[18, 27]$

我们列式子计算。

$\frac{1}{3}Sh = V, \frac{r^2 + h^2}{2h} = R, \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$ 。其中，第二个式子是由勾股定理推得  $(r^2 + (h - R)^2) = R^2$ ,  $r$  为底面外接圆半径，换言之，即对角线长度的一半， $h$  为高）。不难解得  $6h = l^2$ 。此时  $h \in \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]$ , 故  $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}((l^2 - h^2) \cdot 2) \cdot h = \frac{2}{3}(6h^2 - h^3)$ 。我们对其求导，发现在  $[0, 4]$  内均为增函数。故最小值在  $h = \frac{3}{2}$  时取到，为  $\frac{27}{4}$ ，最大值则在  $h = 4$  时取到，为  $\frac{64}{3}$ 。故选 C。

**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。**

答案：ABD AC BCD BC

9. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ , 则
- A. 直线  $BC_1$  与  $DA_1$  所成的角为  $90^\circ$
  - B. 直线  $BC_1$  与  $CA_1$  所成的角为  $90^\circ$
  - C. 直线  $BC_1$  与平面  $BB_1D_1D$  所成的角为  $45^\circ$
  - D. 直线  $BC_1$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $45^\circ$

ABD。

10. 已知函数  $f(x) = x^3 - x + 1$ , 则
- A.  $f(x)$  有两个极值点
  - B.  $f(x)$  有三个零点
  - C. 点  $(0, 1)$  是曲线  $y = f(x)$  的对称中心
  - D. 直线  $y = 2x$  是曲线  $y = f(x)$  的切线

求导。发现  $f'(x) = 3x^2 - 1$ , 有两个根,  $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}(f_{\min}), x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}(f_{\max})$  (均为区域极值)。所以 A 正确。

因为  $f'(x)$  在  $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$  区间上均为正数, 故  $f(x) > f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0, -\frac{\sqrt{3}}{3} < x, f(x) < f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 且为单调递减, 故有且仅有一个零点。B 错误。

将 1 去掉, 考虑  $g(x) = x^3 - x$ , 发现  $g(x)$  为奇函数, 所以  $(0, 0)$  为  $g(x)$  对称中心, 从而  $(0, 1)$  为  $f(x)$  对称中心。C 正确。

考虑切线斜率。显而易见  $k(x = p) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=p}$ , 所以我们要计算什么时候  $f'(x) = 2$ 。不难算出当  $x = \pm 1$  时,  $f'(x) = 2$ , 而此时切线不过原点, 故 D 错误。

综上所述, 选择 AC。

11. 已知  $O$  为坐标原点, 点  $A(1, 1)$  在抛物线  $C : x^2 = 2py(p > 0)$  上, 过点  $B(0, -1)$  的直线交  $C$  于  $P, Q$  两点, 则
- A.  $C$  的准线为  $y = -1$
  - B. 直线  $AB$  与  $C$  相切
  - C.  $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$
  - D.  $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

因为  $A(1, 1)$  在  $C$  上, 故  $1 = 2p$ , 故  $p = \frac{1}{2}$ 。由准线公式  $y = -\frac{p}{2}$ , 知  $C$  的准线为  $y = -\frac{1}{4}$ 。故 A 错误。

考虑计算  $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=2}$ , 不难算得  $k = 2$ , 此时解析式为  $y = 2x - 1$ , 经过 B。故 B 正确。

我们设过 B 的直线是  $y + 1 = mx$ 。记  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ , 联立得到  $mx - 1 = x^2$ 。由韦达定理, 知

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = 1 \\ y_1^2 y_2^2 = (x_1 x_2)^4 = 1 \end{cases}$$

$$|OP| \cdot |OQ| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{2 + (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2}$$

利用  $y = x^2$ , 有

$$|OP| \cdot |OQ| = \sqrt{2 + (x_1 x_2^2)^2 + (x_2 x_1^2)^2} = \sqrt{2 + x_2^2 + x_1^2} = \sqrt{m^2} = |m|$$

所以, 要求  $|m| > 2$ , 因为过 B 的直线要与抛物线有交点, 所以  $|m| > 2$  是必须的, 所以 C 正确。

同理, 我们有

$$|BP| \cdot |BQ| = \sqrt{x_1^2 + (y_1 + 1)^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + (y_2 + 1)^2} = \sqrt{1 + (y_1 + 1)^2 (y_2 + 1)^2 + (x_1 (y_2 + 1))^2 + (x_2 (y_1 + 1))^2}$$

注意到

$$\begin{aligned} (y_1 + 1)(y_2 + 1) &= x_1^4 x_2^4 + x_1^2 + x_2^2 + 1 = 1 + m^2 - 2 + 1 = m^2 \\ x_1(y_2 + 1) &= x_1 + x_1 x_2 \cdot x_2 = x_1 + x_2 = m \end{aligned}$$

所以可以简化为

$$|BP| \cdot |BQ| = \sqrt{1 + m^4 + 2m^2} = |m^2 + 1|$$

注意到  $|BA|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ , 即要求  $|m| > 2$ , 所以 D 正确。

综上所述, 选择 BCD。

12. 已知函数  $f(x)$  及其导函数  $f'(x)$  的定义域均为  $\mathbb{R}$ , 记  $g(x) = f'(x)$ . 若  $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right), g(2+x)$  均为偶函数, 则

- A.  $f(0) = 0$
- B.  $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
- C.  $f(-1) = f(4)$
- D.  $g(-1) = g(2)$

因为是选择题, 我们可以打滚做 (

显而易见  $f(x)$ 、 $g(x)$  均为周期函数。

取  $f(x) = 114514$ , 排除 A 选项。

不妨令  $t = 2x$ , 那么,  $f\left(\frac{3}{2} - t\right) = f\left(\frac{3}{2} + t\right)$ . 由于偶函数的导数是奇函数, 所以  $g\left(\frac{3}{2} - t\right)$  是奇函数。所以

$$g\left(\frac{3}{2} - 0\right) = -g\left(\frac{3}{2} + 0\right)$$

即  $g\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ , 故 B 正确。

C 显然正确。

注意到,  $g(2) = -g(1) = -g(3) = g(0)$ ,  $g(-1) = g(3) = -g(0)$ , 故  $g(-1) \neq g(2)$ , 故 D 错误。

综上所述, 选择 BC。

**三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。**

13.  $\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x+y)^8$  的展开式中  $x^2y^6$  的系数为 (用数作答).

由于我不太喜欢二项式定理, 我们暴力拆 (

$$-28x^2y^6 - 14x^3y^5 + 14x^4y^4 + 28x^5y^3 + 20x^6y^2 + 7x^7y + x^8 - \frac{y^9}{x} - 20xy^7 - 7y^8$$

故答案为  $-28$ 。

或者我们用一下二项式定理 (

对右边那一坨

$$T_k = C_8^k x^k y^{8-k}$$

左边一个  $1$ , 所以要  $k=2$  的, 此时  $C_8^2 = 28$ 。

右边一个  $-\frac{y}{x}$ , 所以要  $k=3$  的, 此时  $-C_8^3 = -56$ 。

所以答案为  $28 - 56 = -28$ 。

14. 写出与圆  $x^2 + y^2 = 1$  和  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$  都相切的一条直线的方程

显然  $x = 1$ 。

15. 若曲线  $y = (x+a)e^x$  有两条过坐标原点的切线, 则  $a$  的取值范围是

16. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $C$  的上顶点为  $A$ , 两个交点为  $F_1, F_2$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ . 过  $F_1$  且垂直于  $AF_2$  的直线与  $C$  交于  $D, E$  两点,  $|DE| = 6$ , 则  $\triangle ADE$  的周长是

以后接着写 (