

Capítulo 8

La determinación de una órbita (I)

8.1. Introducción

En los capítulos anteriores se han utilizado los elementos orbitales para propósitos de calcular, utilizando los resultados del problema de los dos cuerpos y la posición relativa de un objeto, con respecto a otro, para distintos tipos de trayectorias. Sin embargo, hasta ahora no se ha hablado de cómo es posible que el astrónomo pueda encontrar los elementos orbitales de un determinado cuerpo. Los métodos clásicos de determinación orbital se basan en el conocimiento previo de la posición aparente del objeto en varios instantes de tiempo. Si se trata de objetos cuyo movimiento está determinado por el Sol, como es el caso usual, y dado que las observaciones se hacen desde la Tierra, es preciso conocer los vectores posición de esta en esos mismos instantes, para poder reducir el movimiento con respecto al Sol.

En este capítulo examinaremos los principios básicos de algunos métodos que se utilizan para calcular los elementos orbitales, proceso que se conoce con el nombre de “determinación de una órbita”.

En particular, en el presente capítulo, examinaremos los siguientes casos:

- Determinación de los elementos orbitales a partir del conocimiento de los vectores posición y velocidad en una sola observación, digamos t_x . Este procedimiento es válido para cualquier tipo de trayectoria.
- Determinación de los elementos orbitales suponiendo una órbita elíptica. Para tal efecto, se expondrá el método más común, denominado método de Gauss.

Se reservarán, para el capítulo 9, los casos de la determinación de la órbita parabólica y de la trayectoria rectilínea, así como la determinación de la órbita de un planeta extrasolar a partir de varias observaciones de medidas de velocidad radial.

8.2. Cálculo de los elementos a partir de los vectores posición y velocidad

Este caso se presenta cuando es posible conocer de algún modo, en un instante dado, las componentes tanto del vector posición como del vector velocidad respecto a un origen de coordenadas y un plano fundamental determinado. También es un paso necesario para resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento del problema de los dos cuerpos relativo, ecuaciones (4.20), para un t cualquiera, si se dispone, para un tiempo inicial, de las condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ (ver ejercicio 8.4). También tiene una utilización ventajosa si se considera que hoy en día es frecuente la realización de integraciones numéricas de las ecuaciones diferenciales comúnmente empleadas en la mecánica celeste para estudiar una amplia diversidad de situaciones. En tales casos como, por ejemplo, estudiar un sistema de tres o más cuerpos o incluir otro tipo de interacciones (que no tienen solución analítica general) bien puede recurrirse, sin mayor complicación, a la integración directa de las ecuaciones de movimiento. Como resultado, se disponen de las componentes del vector posición (x, y, z) y del vector velocidad $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ para toda una serie de tiempos a un intervalo dado. Sin embargo, a partir de la observación de un listado de números no puede inferirse, con la debida perspectiva, mayor información sobre la evolución de la trayectoria de los cuerpos. Pero, si se define una cónica instantánea en cada tiempo (véase la sección 13.2.1), correspondiente a cada conjunto de componentes, de tal modo que a partir $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ se puedan encontrar los elementos orbitales de la cónica, bien puede observarse cómo es la evolución temporal de cada elemento orbital y observar características visibles sobre el movimiento de los cuerpos involucrados.

Supóngase que en un instante de tiempo cualquiera t_x se disponen de los vectores posición y velocidad que, en sus componentes cartesianas, están dados por:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k},$$

donde, como antes, los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ están en las direcciones de los ejes x, y y z , respectivamente. Es claro que dichos vectores deben de estar referidos a aquel sistema de coordenadas en el que se desee referir los elementos. Con esto queremos decir que en el caso en que se dispongan de vectores de un miembro del Sistema Solar referidos al Ecuador Celeste, es recomendable realizar la rotación de coordenadas al

plano de la Eclíptica, ya que los elementos angulares de estos cuerpos se acostumbran a expresar con relación al plano de la Eclíptica.

Se comienza por encontrar las magnitudes del radio vector y del vector velocidad los cuales están obviamente determinados por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Luego se realiza el cálculo de las componentes del vector momento angular por unidad de masa dados por las ecuaciones (4.22), (4.23) y (4.24). El objeto se encuentra en una trayectoria rectilínea si: $h = h_1 = h_2 = h_3 = 0$. Por el contrario, si $h \neq 0$ el objeto se desplaza a través de una trayectoria cónica (véase la sección 4.3.1).

Los valores de r y v permiten de entrada conocer el tipo de trayectoria cónica que describe el objeto. En efecto, el lector puede verificar que las ecuaciones que relacionan la velocidad en los tres tipos de órbita (ver ecuaciones (4.70), (4.71) y (4.72)) se pueden representar conjuntamente por:

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} \pm \frac{1}{\mathcal{A}} \right)} \quad (8.1)$$

con $\mu = G(m_1 + m_2)$ y el signo negativo con $\mathcal{A} = a$ corresponde a la órbita elíptica; el signo positivo con $\mathcal{A} = a$ corresponde a la órbita hiperbólica y $\mathcal{A} = \infty$ ($1/\mathcal{A} = 0$) si la órbita es una parábola.

Si se despeja el semieje mayor a de la expresión correspondiente a la órbita elíptica se obtiene:

$$\frac{1}{\mathcal{A}} = \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu},$$

que al reordenar y escribir convenientemente llegamos a:

$$\mathcal{A} = a = \frac{r}{2 - \mathcal{D}}, \quad (8.2)$$

donde \mathcal{D} es una cantidad adimensional definida como:

$$\mathcal{D} = \frac{rv^2}{\mu}. \quad (8.3)$$

El valor de a hallado con la ecuación (8.2) permite determinar el valor del semieje mayor (para las órbitas elíptica o hiperbólica). El valor de \mathcal{D} permite definir el tipo de trayectoria que sigue el objeto:

- Si $\mathcal{D} < 2 \Rightarrow a > 0$ en (8.2) esto es, $2\mu > rv^2 \rightarrow$ órbita elíptica,
- Si $\mathcal{D} > 2, \Rightarrow a < 0$ en (8.2) esto es, $2\mu < rv^2 \rightarrow$ órbita hiperbólica,
- Si $\mathcal{D} = 2, \Rightarrow a = \infty$ en (8.2) esto es, $2\mu = rv^2 \rightarrow$ órbita parabólica.

Nótese que hay un caso especial de la órbita elíptica: cuando $\mathcal{D} = 1$. En tal caso se tiene $r = a$, es decir, la órbita es circular.

En el caso en que la órbita sea parabólica, la magnitud del momento angular permite hallar el valor de la distancia pericéntrica q a través de (4.50):

$$q = \frac{h^2}{2\mu}. \quad (8.4)$$

La excentricidad se puede hallar a partir del cálculo de las componentes del vector de Laplace-Runge-Lenz (ver ecuaciones (4.39), (4.40) y (4.41)), y luego reemplazando en la ecuación (6.4).

Alternativamente, la magnitud del momento angular y el conocimiento del semieje mayor permite obtener también el valor de la excentricidad, e , pues basta despejar este valor de (4.49) o de (4.51):

$$e = \sqrt{1 \mp \frac{h^2}{\mu a}}, \quad (8.5)$$

donde el signo negativo corresponde a la órbita elíptica y el positivo a la hiperbólica. Es claro que si $\mathcal{A} = a = \infty$ se tiene que $e = 1$ (parábola).

El conocimiento de las componentes del vector momento angular permite determinar dos de los elementos orbitales angulares, tal y como se vio en la sección 6.2. La longitud del nodo ascendente, Ω , y la inclinación del plano orbital con relación al plano fundamental, i , se pueden calcular a partir de las ecuaciones (6.9) y (6.10), respectivamente.

El cálculo de ω puede hacerse inmediatamente, conociendo las componentes de los vectores \vec{h} y \vec{e} , a través de la ecuación (6.15). Se advierte, sin embargo, que esta expresión no es útil para el caso en que el plano orbital del objeto en cuestión coincida con el plano fundamental, dado que en tal situación se tiene que $h_1 = h_2 = 0$ (es decir, el momento angular por unidad de masa del objeto, \vec{h} , está justo en la dirección del eje z). Se explica en el ejercicio 8.3 cómo es posible obtener de forma alternativa este ángulo.

Finalmente, resta por encontrar el valor del tiempo del paso por el pericentro o, lo que es equivalente, el valor de la anomalía media de referencia, esto es, el valor de la anomalía media para un tiempo dado, en este caso t_x .

Iniciaremos la descripción para la órbita elíptica. De la ecuación (4.43), que relaciona la anomalía verdadera θ con el radio vector r , se obtiene al despejar θ :

$$\theta = \cos^{-1} \left\{ \frac{1}{e} \left[\frac{a(1 - e^2) - r}{r} \right] \right\}. \quad (8.6)$$

Como se ha comentado, esta expresión tiene el problema de que la satisfacen dos ángulos. Sin embargo, puesto que hay forma de conocer la tasa de cambio de la distancia radial a través de $\dot{r} = (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})/r$, la incertidumbre de encontrar el cuadrante verdadero desaparece, pues si $\dot{r} > 0$ el objeto ha de encontrarse en el primero o segundo cuadrante y para $\dot{r} < 0$, se hallará en el tercero o cuarto. Habiendo hallado θ en el cuadrante correcto, se procede a encontrar la anomalía excéntrica E con ayuda de la ecuación (5.5):

$$E = 2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (8.7)$$

Este valor de E corresponde al tiempo t_x . Es evidente que podemos calcular la anomalía media para el tiempo t_x , donde este tiempo se convierte en el tiempo de referencia ($t_x = t_r$), mediante (5.7):

$$M_r = E - e \left(\frac{180}{\pi} \right) \sin E, \quad (8.8)$$

donde se ha asumido que tanto E como M_r están en unidades de grados. Ahora, si se desea calcular el tiempo del paso por el pericentro t_0 , entonces, de la definición de anomalía media se tiene:

$$t_0 = t_r - \frac{M_r}{n}, \quad (8.9)$$

donde n es el movimiento medio, calculado con ayuda de (4.59).

Para la hipérbola el cálculo es semejante al anterior. El valor de θ se halla con (ver ecuación (4.48)):

$$\theta = \cos^{-1} \left\{ \frac{1}{e} \left[\frac{a(e^2 - 1) - r}{r} \right] \right\},$$

en el que, como antes, si $\dot{r} > 0$, el objeto ha de encontrarse en el primero o segundo cuadrante y para $\dot{r} < 0$, se hallará en el tercero o cuarto. La variable F se halla con (ver ecuación (5.13)):

$$F = 2 \tanh^{-1} \left[\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right].$$

El tiempo del paso por el pericentro se halla a partir de (5.11):

$$t_0 = t_r - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (e \sinh F - F).$$

De idéntica forma, para la parábola obtenemos θ de (4.47):

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{2q - r}{r} \right], \quad (8.10)$$

con la misma consideración en lo que respecta al signo de \dot{r} . Luego se calculan los ángulos Ψ y \mathbb{S} (ver ecuaciones (5.23) y (5.24)) a través de:

$$\Psi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2}{\tan(\frac{\theta}{2})} \right], \quad (8.11)$$

$$\mathbb{S} = 2 \tan^{-1}(\tan^3 \Psi), \quad (8.12)$$

y, de las ecuaciones (5.20) y (5.21) obtenemos el tiempo del paso por el pericentro:

$$t_0 = t - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q^3}{\mu}} \cot \mathbb{S}. \quad (8.13)$$

Finalmente, anotaremos unas pocas palabras para el caso de la trayectoria rectilínea. Ya vimos que ello ocurre cuando $h = h_1 = h_2 = h_3 = 0$. Es evidente que se tendrá aquí: $\dot{r} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$. Por intermedio de la ecuación (5.28) se determina el valor de \mathcal{E}' , lo que permite identificar si se trata de un caso acotado ($\mathcal{E}' < 0$), de escape ($\mathcal{E}' > 0$) o de escape con velocidad mínima ($\mathcal{E}' = 0$). Con la ecuación (6.3) es posible hallar J en función de \mathcal{E}' . Los valores de Ω' y de i' pueden hallarse o bien con las componentes del vector posición o con las componentes del vector velocidad (ver ecuaciones (6.37), (6.38), (6.39), (6.40), (6.41) y (6.42)), del siguiente modo:

$$\Omega' = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right),$$

$$i' = \text{sen}^{-1} \left(\frac{z}{r} \right) = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\dot{z}}{\dot{r}} \right).$$

* Ejercicio 8.1

Las componentes heliocéntricas eclípticas (referidas al Ecuador Celeste medio y Eclíptica del 2000,0) de los vectores posición y velocidad del planeta Júpiter para el día 9,0 de enero de 2009 (TT) son las siguientes:

$$\begin{array}{ll} x = 2,77904683 \text{ u.a.} & \dot{x} = 0,00624498 \text{ u.a./d} \\ y = -4,28963554 \text{ u.a.} & \dot{y} = 0,00446529 \text{ u.a./d} \\ z = -0,04438092 \text{ u.a.} & \dot{z} = -0,00015828 \text{ u.a./d} \end{array}$$

Determinar los elementos orbitales del planeta asumiendo elipse instantánea en ese punto.

Solución

Comenzamos por determinar las magnitudes correspondientes del vector posición y velocidad:

$$r = 5,11136420 \text{ u.a.}, \quad v = 0,00767878 \text{ u.a./d}.$$

Para Júpiter la razón $m_2/m_1 = 1/1047,348644$. Entonces $\mu = \mathbb{K}^2(1 + m_2/m_1)$. De ahí que $\mathcal{D} = 1,01752193$, esto es, permite saber lo que ya sabíamos: que el planeta se desplaza en una órbita elíptica. El semieje mayor es entonces: $\mathcal{A} = a = 5,20252245 \text{ u.a.}$ Las componentes de los vectores del momentum angular por unidad de masa junto con los del vector excentricidad y sus respectivas magnitudes son:

$$\begin{array}{ll} h_1 = 0,00087714 \text{ u.a.}^2/\text{d} & e_1 = 0,04731664 \\ h_2 = 0,00016271 \text{ u.a.}^2/\text{d} & e_2 = 0,01231559 \\ h_3 = 0,03919794 \text{ u.a.}^2/\text{d} & e_3 = -0,00110993 \\ \\ h = 0,03920809 \text{ u.a.}^2/\text{d} & e = 0,04890573 \end{array}$$

Como control, se ha de cumplir que: $h_1 e_1 + h_2 e_2 + h_3 e_3 = 0$ (ver ecuación (4.38)). Entonces el ángulo de inclinación es: $i = \cos^{-1}(h_3/h) = 1,30376234^\circ$ y la longitud del nodo ascendente: $\Omega = \tan^{-1}(h_1/(-h_2)) = 100,50895502^\circ$, a la cual se le determinó el verdadero cuadrante según las indicaciones anotadas en el apéndice B. El argumento de latitud del perihelio se calcula con: $\omega = \tan^{-1}(e_3 h/(-e_1 h_2 + e_2 h_1)) = 274,07925551^\circ$ (también se aplicó el criterio de cuadrante). Es claro que: $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} < 0$, lo que quiere decir que el objeto se está acercando al Sol y, en consecuencia, se encuentra en el tercer o cuarto cuadrante. Este dato es importante, ya que al hallar $\cos \theta = 0,31489155$ con (8.6) se tiene: $\theta = 71,64573339^\circ$, de ahí que el ángulo correcto que satisface la situación sea: $288,35426661^\circ$. El valor correspondiente para la anomalía excéntrica es: $E = 290,99458802^\circ$ y el de la anomalía media es $293,61066092^\circ$. Por lo tanto, $M_r = 293,61066092^\circ$ (9,0 de enero de 2009 (TT)).

*** Ejercicio 8.2**

Las componentes heliocéntricas eclípticas (referidas al Ecuador Celeste medio y Eclíptica del 2000,0) de los vectores posición y velocidad de un objeto en órbita alrededor del Sol para el día 15,0 de febrero de 2014 (TT) son:

$$\begin{array}{lll} x & = 0,0429740 & \text{u.a.} \\ y & = 3,5483648 & \text{u.a.} \\ z & = -5,0009781 & \text{u.a.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{x} = 0,0069528 \text{ u.a./d} \\ \dot{y} = -0,000767 \text{ u.a./d} \\ \dot{z} = 0,0068981 \text{ u.a./d} \end{array}$$

Determinar los elementos orbitales del objeto asumiendo cónica instantánea en ese punto.

Solución

Comenzamos por determinar las magnitudes correspondientes del vector posición y velocidad:

$$r = 6,1320895 \text{ u.a.}, \quad v = 0,0098241 \text{ u.a./d.}$$

Como no se especifica que sea un planeta, tomamos $m_2/m_1 = 0$. Entonces $\mu = \mathbb{K}^2$. Por lo tanto: $\mathcal{D} = 2,0000053$. Aunque dicho valor no es exactamente igual a 2, asumiremos aquí, para ilustración, que $\mathcal{D} = 2$ y, de ese modo, suponemos que el objeto se desplaza en una órbita parabólica. Las componentes de los vectores del momento angular por unidad de masa junto con los del vector excentricidad y sus respectivas magnitudes son:

$$\begin{array}{ll} h_1 & = 0,0206412 \text{ u.a.}^2/\text{d} \\ h_2 & = -0,0350672 \text{ u.a.}^2/\text{d} \\ h_3 & = -0,0247040 \text{ u.a.}^2/\text{d} \end{array} \quad \begin{array}{l} e_1 = 0,8744876 \\ e_2 = 0,4829686 \\ e_3 = 0,0450986 \end{array}$$

$$h = 0,0476032 \text{ u.a.}^2/\text{d} \quad e = 1,0000105$$

Teniendo en cuenta este último resultado y lo que se comentó del efecto de redondeo, tomaremos $e = 1$. Aquí, en lugar de semieje mayor, se tiene el de distancia pericéntrica. Lo calculamos a través de (8.4): $q = 3,8289407 \text{ u.a.}$ El ángulo de inclinación es: $i = 121,2623712^\circ$ y la longitud del nodo ascendente: $\Omega = 30,4818530^\circ$. El argumento de latitud del perihelio es: $\omega = 3,02425566^\circ$. Ahora bien, el producto $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} < 0$, lo que significa que el objeto está en el tercer o cuarto cuadrante. Al hallar $\cos \theta = 0,2488209$ con (8.10) se tiene: $\theta = 75,5922505^\circ$, de ahí que el ángulo correcto que satisface la situación sea: $284,4077495^\circ$. Este valor de θ también indica que el objeto no ha pasado por el pericentro. Entonces hallamos los ángulos Ψ y \mathbb{S} (con las ecuaciones (8.11) y (8.12)), respectivamente) que dan: $\Psi = -34,4022122$, $\mathbb{S} = -35,6033247$ y el valor del tiempo del paso por el pericentro se halla con (8.13) y que da: $t_0 = t + 573,504255$ lo que equivale, utilizando por comodidad fechas julianas, a: $t_0 = 2\,456\,703,5 + 573,504255 = 2\,457\,277,004 = 11,504$ de septiembre de 2015.

*** Ejercicio 8.3**

Respecto al Ecuador Celeste medio y Eclíptica del 2000,0 y para el día 23,0 (TT) de enero de 2014, las componentes heliocéntricas eclípticas del baricentro del sistema Tierra-Luna son, en un buen grado de aproximación, las siguientes:

$$\begin{aligned} x &= -0,5316809 \text{ u.a.} & \dot{x} &= -0,0147583 \text{ u.a./d} \\ y &= 0,8283019 \text{ u.a.} & \dot{y} &= -0,0093581 \text{ u.a./d} \\ z &= 0,0000000 \text{ u.a.} & \dot{z} &= 0,0000000 \text{ u.a./d} \end{aligned}$$

Determinar los elementos orbitales del sistema asumiendo una elipse instantánea en ese punto.

Solución

Como antes, se determinan las magnitudes correspondientes del vector posición y velocidad:

$$r = 0,9842604 \text{ u.a.}, \quad v = 0,0174752 \text{ u.a./d.}$$

De las ecuaciones (4.22), (4.23) y (4.24), que permiten determinar las componentes del momento angular, se obtiene (en unidades de u.a./d):

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = h = 0,0171998$$

Puesto que se trata del sistema Tierra-Luna ($m_2/m_1 = 1/328\,900,56$), entonces $\mathcal{D} = 1,0157578$, lo que era de esperarse, pues el baricentro del sistema describe una órbita elíptica instantánea en ese punto. El semieje mayor es: $a = 1,0000185 \text{ u. a.}$ La excentricidad puede calcularse con la ecuación (8.5) y da $e = 0,0169947$. La inclinación se obtiene con (6.10) y da $i = \cos^{-1}(1)$, es decir, $i = 0$, lo que es de esperarse dado que se trata de la órbita de la Tierra. La longitud del nodo ascendente, al ser calculada con (6.9), arroja una indeterminación, ya que en este caso dicho ángulo no tiene significado y puede tomarse como $\Omega = 0$. Más problemático es el argumento de latitud del pericentro, ω , ya que en la ecuación (6.15), al ser $h_1 = h_2 = 0$, indicaría que hay una indeterminación en su valor, lo que es incorrecto. La limitación de la expresión (6.15) para este caso es debida más al esfuerzo que se hizo de involucrar las constantes e_1 , e_2 y e_3 junto con h_1 , h_2 y h_3 que a una indicación de un valor particular para el ángulo ω . A continuación, se describe una forma alternativa de encontrar ω . Puesto que: $\vec{r} \cdot \hat{n} = r \cos(\omega + \theta)$, así como $\vec{r} \cdot \hat{m} = r \sin(\omega + \theta)$, entonces (ver ecuaciones (6.11) y (6.12)):

$$\tan(\omega + \theta) = \frac{\vec{r} \cdot \hat{m}}{\vec{r} \cdot \hat{n}} = \frac{-x \sin \Omega \cos i + y \cos \Omega \cos i + z \sin i}{x \cos \Omega + y \sin \Omega},$$

y, como en el presente caso: $\Omega = i = 0$, se tiene:

$$\tan(\omega + \theta) = \frac{y}{x}.$$

Por lo tanto, $\omega + \theta = 122,6961071^\circ$ (con el debido ajuste de cuadrante). Es preciso, entonces, calcular θ , para lo cual hacemos uso de (8.6). Habiendo verificado que $\dot{r} > 0$ (la Tierra está en el primer o segundo cuadrante) encontramos que:

$\theta = 22,3622232^\circ$. De ese modo: $\omega = 100,3653616^\circ$. Entonces: $E = 21,9946227^\circ$ y la ecuación de Kepler arroja para la anomalía media: $M = 21,6299438^\circ$ y así: $M_r = 21,6299438^\circ$ para el 23,0 (TT) de enero de 2014.

* Ejercicio 8.4

Se tienen las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu \frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu \frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu \frac{z}{r^3},$$

con $\mu = \mathbb{K}^2$ u.a.^{3/2} d y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Si para $t = 0$ se tienen como condiciones iniciales $x_0 = 2,5000000$ u.a., $y_0 = 0,0000000$ u.a., $z_0 = 0,1000000$ u.a., $\dot{x}_0 = 0,0060000$ u.a./d, $\dot{y}_0 = 0,0000000$ u.a./d y $\dot{z}_0 = 0,0000000$ u.a./d, determinar los valores de $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ para el tiempo $t = 100$ d.

Solución

Estas, por supuesto, son las ecuaciones diferenciales del problema de los dos cuerpos de un objeto de masa despreciable frente a la del Sol. Para resolver el problema se hace necesario determinar primero las constantes de movimiento. Es claro que $r_0 = 2,5019992$ u.a. y $v_0 = 0,006000$ u.a./d (las que hemos colocado con subíndice cero para indicar que se trata de los valores correspondientes a las condiciones iniciales). De ese modo, $\mathcal{D} = 0,3043875$ y así: $a = 1,4755725$ u.a.

Las componentes del momento angular y del vector excentricidad son:

$$\begin{aligned} h_1 &= 0,0000000 \quad \text{u.a.}^2/\text{d} & e_1 &= -0,9992009 \\ h_2 &= 0,0006000 \quad \text{u.a.}^2/\text{d} & e_2 &= 0,0000000 \\ h_3 &= 0,0000000 \quad \text{u.a.}^2/\text{d} & e_3 &= -0,0278023 \\ \\ h &= 0,0006000 \quad \text{u.a.}^2/\text{d} & e &= 0,9995876 \end{aligned}$$

Nótese que la órbita es elíptica, aunque casi es una parábola. Los ángulos que definen la orientación de la órbita (ver ecuaciones (6.9), (6.10) y (6.15)) y teniendo en mente los criterios de cuadrante, son entonces:

$$\Omega = 180,0000000^\circ, \quad i = 90,0000000^\circ, \quad \omega = 358,4061828^\circ.$$

Finalmente, el valor de la anomalía verdadera ($\dot{r} > 0$) es: $\theta = 179,303141^\circ$, y de ahí que: $E = 134,0989375^\circ$. La anomalía media da entonces: $M = 92,9695608^\circ$ para el tiempo $t = 0$ (i.e., $M_r = 92,9695608$ para $t = 0$).

Hallados los elementos orbitales ($a, e, \Omega, \omega, i, M_r$), ya es posible determinar los valores de $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ para el tiempo $t = 100$ d. Comenzamos por hallar n (ecuación (4.59) con $m_2 = 0$): $n = 0,5498741^\circ/\text{d}$. Entonces el valor de la anomalía media en el instante $t = 100$ d es: $M = 92,9695608^\circ + 0,5498741^\circ \times 100 = 147,9569708^\circ$.

La anomalía excéntrica es: $E = 163,8690750^\circ$, en tanto que la anomalía verdadera es: $\theta = 179,7667993^\circ$. El valor del radio vector es, entonces: $r = 2,8924662$ u.a. Con estos valores de r y θ , junto con los valores de Ω , ω e i es inmediato calcular los valores de x , y y z para el tiempo $t = 100$ d a través de las ecuaciones (6.27), (6.28) y (6.29):

$$x = 2,8909957 \text{ u.a.}, \quad y = 0,0000000 \text{ u.a.}, \quad z = 0,0922178 \text{ u.a.}$$

Para efectos de la determinación de las componentes de la velocidad se calculan primeramente \dot{r} y $r\dot{\theta}$ (ver tabla 6.1). Estas dan: $\dot{r} = 0,0020063$ u.a./d, $r\dot{\theta} = 0,0002075$ u.a./d. De ese modo, las ecuaciones (6.32), (6.33) y (6.34) permiten obtener:

$$\dot{x} = 0,00201190 \text{ u.a./d}, \quad \dot{y} = 0,0000000 \text{ u.a./d}, \quad \dot{z} = -0,0001434 \text{ u.a./d}.$$

8.3. Órbita elíptica: el método de Gauss

El método de Gauss es el procedimiento clásico de determinación orbital con base en tres observaciones distintas de un objeto del cual se desea conocer sus elementos orbitales. A pesar de su nombre, este procedimiento de determinación orbital, como se realiza modernamente, dista bastante del que originalmente desarrolló Carl Friedrich Gauss a inicios del siglo XIX con ocasión del descubrimiento de Ceres¹.

Supóngase que se disponen de tres observaciones distintas de un cuerpo celeste realizadas por un observador ubicado en la Tierra en los tiempos t_1 , t_2 y t_3 ($t_1 < t_2 < t_3$) (ver figura 8.1). Contar con observaciones significa que se conoce, para cada tiempo, la posición angular del cuerpo proyectada en la esfera celeste; en otros términos, la ascensión recta y la declinación. La trayectoria aparente del cuerpo proyectada en el fondo estelar vista desde la Tierra es la resultante de dos movimientos: el del cuerpo que se está moviendo en torno al Sol y la de la misma Tierra (o sea, donde está el observador) que también se mueve en torno al Sol. De ahí que la trayectoria aparente pueda ser comúnmente una curva que usualmente describe formas en apariencia caprichosas (ver figura 1.1 de la página 5). El objetivo es, con estas tres observaciones y conociendo la posición de la Tierra para todo tiempo, obtener los elementos orbitales a , e , i , Ω , ω y t_0 . La dificultad en el procedimiento radica en el desconocimiento de la distancia Tierra-cuerpo en cada observación. El método es apropiado siempre y cuando las observaciones sean muy próximas entre sí, puesto que esto permite realizar una serie de aproximaciones que permiten hallar las distancias y resolver, con ello, el problema.

¹Ceres fue descubierto por Giuseppe Piazzi, astrónomo del observatorio de Palermo (Sicilia) el primero de enero de 1801, gracias a lo cual se constituyó en el primer asteroide descubierto. Desde el 2006 ha sido reclasificado como planeta enano.

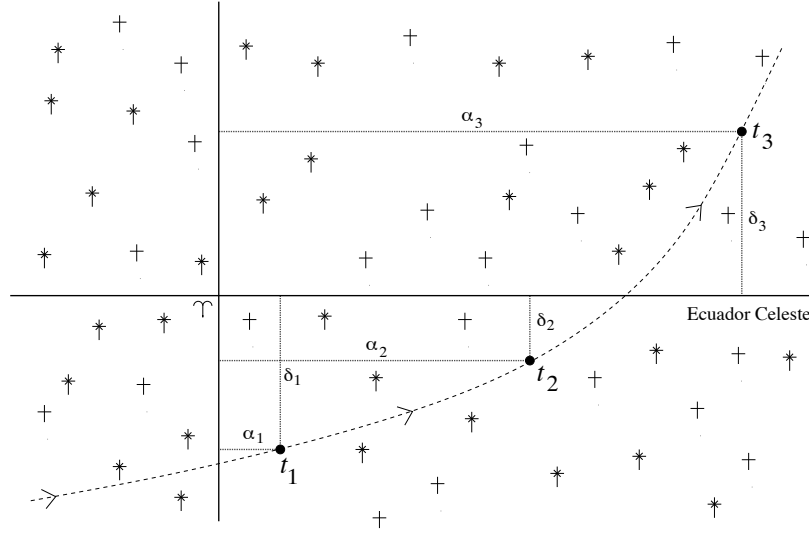


Figura 8.1. Trayectoria de un objeto (curva segmentada) a través del cielo visto desde la Tierra en tres tiempos distintos, t_1 , t_2 y t_3 . En cada tiempo se tiene la ascensión recta α y declinación δ correspondiente.

Sean las coordenadas angulares α_i , δ_i para t_i (con $i = 1, 2, 3$) del cuerpo de interés. Como se conocen los tiempos, es posible también, gracias a la consulta de un almanaque astronómico o a páginas de Internet, conocer el vector de posición de la Tierra con respecto al Sol (o del Sol con respecto a la Tierra). Designemos \vec{r}_T el vector de posición de la Tierra con respecto al Sol en el plano ecuatorial. Por lo tanto, son conocidos los \vec{r}_{Ti} , para $i = 1, 2, 3$, correspondientes, respectivamente, a los tiempos t_1 , t_2 y t_3 .

De la figura 6.8, y como ya hemos indicado en su momento, podemos observar la relación entre el vector posición helicocéntrico ecuatorial del objeto \vec{r}' , el vector helicocéntrico ecuatorial de la Tierra \vec{r}_T y el vector geocéntrico ecuatorial del objeto $\vec{\rho}'$. Es claro que

$$\vec{r}' = \vec{r}_T + \vec{\rho}'. \quad (8.14)$$

El vector geocéntrico $\vec{\rho}'$ en función de sus componentes es (ver ecuaciones (2.3)):

$$\vec{\rho}' = \rho \cos \alpha \cos \delta \hat{i} + \rho \sin \alpha \cos \delta \hat{j} + \rho \sin \delta \hat{k},$$

el cual puede colocarse como:

$$\vec{\rho}' = \rho \hat{u}', \quad (8.15)$$

donde el vector unitario \hat{u}' es una cantidad conocida a partir de los datos de observación:

$$\hat{u}' = \cos \alpha \cos \delta \hat{i} + \sin \alpha \cos \delta \hat{j} + \sin \delta \hat{k}. \quad (8.16)$$

Cada vector heliocéntrico ecuatorial puede escribirse como:

$$\vec{r}'_i = -\vec{R}'_{\odot i} + \rho_i \hat{u}'_i, \quad (8.17)$$

para $i = 1, 2, 3$ correspondientes a los tres tiempos de observación y $\vec{R}'_{\odot} = -\vec{r}'_T$.

La suposición básica del método de Gauss consiste en expresar uno de los vectores heliocéntricos en función de los otros dos. De acuerdo con Linton (2004), fue Pierre Bouguer quien notó en 1733 que si la trayectoria del objeto está contenida en un plano (libre de perturbaciones), los vectores \vec{r}'_i están linealmente relacionados (ver figura 8.2), por lo que es posible expresar \vec{r}'_2 en términos de \vec{r}'_1 y \vec{r}'_3 del siguiente modo:

$$\vec{r}'_2 = c_1 \vec{r}'_1 + c_3 \vec{r}'_3, \quad (8.18)$$

donde c_1 y c_3 son constantes que, por ahora, se desconocen.

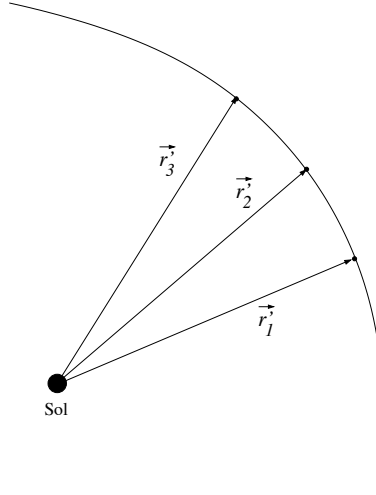


Figura 8.2. La consideración básica del método de Gauss es expresar uno de los vectores heliocéntricos, digamos \vec{r}'_2 , como una combinación lineal de dos vectores heliocéntricos, \vec{r}'_1 y \vec{r}'_3 , próximos entre sí.

Podemos entonces relacionar los vectores \vec{r}'_1 , \vec{r}'_2 y \vec{r}'_3 en términos de los vectores $\vec{R}'_{\odot 1}$, $\vec{R}'_{\odot 2}$, $\vec{R}'_{\odot 3}$, \hat{u}'_1 , \hat{u}'_2 y \hat{u}'_3 . Reemplazando los vectores (8.17) en (8.18) y

ordenando, podemos obtener:

$$c_1 \rho_1 \hat{u}'_1 - \rho_2 \hat{u}'_2 + c_3 \rho_3 \hat{u}'_3 = c_1 \vec{R}'_{\odot 1} - \vec{R}'_{\odot 2} + c_3 \vec{R}'_{\odot 3}. \quad (8.19)$$

Obsérvese que el problema es solucionable siempre y cuando sea posible obtener c_1 y c_3 , lo cual no es tan sencillo. Comenzamos por expresar tanto c_1 como c_3 en términos de los vectores del siguiente modo. Multiplicando vectorialmente la ecuación (8.18) por $\vec{r}'_1 \times$, se tiene:

$$\vec{r}'_1 \times \vec{r}'_2 = c_3 \vec{r}'_1 \times \vec{r}'_3,$$

y, de acuerdo con la interpretación geométrica del producto cruz, $|\vec{r}'_i \times \vec{r}'_j|$ es el área del paralelogramo comprendido por los vectores \vec{r}'_i y \vec{r}'_j , por lo que podemos hacer:

$$c_3 = \frac{|\vec{r}'_1 \times \vec{r}'_2|}{|\vec{r}'_1 \times \vec{r}'_3|}. \quad (8.20)$$

De igual forma, multiplicando (8.18) por $\times \vec{r}'_3$ y despejando c_1 , tenemos:

$$c_1 = \frac{|\vec{r}'_2 \times \vec{r}'_3|}{|\vec{r}'_1 \times \vec{r}'_3|}, \quad (8.21)$$

por lo que las constantes c_1 y c_3 son constantes adimensionales que constituyen razones de áreas.

Por otro lado, supóngase que podemos expresar, a través de una serie, un vector posición cualquiera alrededor de un vector definido en un tiempo, digamos t_a . Por lo tanto, el vector posición \vec{r} puede expresarse a través de una serie de Taylor del vector alrededor de $t = t_a$. Entonces:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_a + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{t=t_a} (t - t_a) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_{t=t_a} (t - t_a)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right)_{t=t_a} (t - t_a)^3 + \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n\vec{r}}{dt^n} \right)_{t=t_a} (t - t_a)^n + \cdots, \end{aligned} \quad (8.22)$$

para n entero. Asumiendo que el objeto se mueve alrededor del Sol libre de perturbaciones, podemos utilizar la ecuación del problema de los dos cuerpos y así:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_{t=t_a} = -\frac{\mathbb{K}^2}{r_a^3} \vec{r}_a, \quad (8.23)$$

en donde se hizo $\mu = \mathbb{K}^2$, esto es, la masa del cuerpo en cuestión es despreciable frente a la del Sol. De igual forma:

$$\left(\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right)_{t=t_a} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mathbb{K}^2}{r_a^3} \vec{r}_a \right) = -\mathbb{K}^2 \left(\frac{1}{r_a^3} \dot{\vec{r}}_a - \frac{3\dot{r}_a}{r_a^4} \vec{r}_a \right), \quad (8.24)$$

en donde hemos hecho $\dot{\vec{r}}_a = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=t_a}$. De ese modo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^4\vec{r}}{dt^4}\right)_{t=t_a} &= \frac{d}{dt} \left(-\mathbb{K}^2 \frac{\dot{\vec{r}}_a}{r_a^3} + \frac{3\mathbb{K}^2 \dot{r}_a \vec{r}_a}{r_a^4} \right), \\ &= -\mathbb{K}^2 \left(\frac{\ddot{\vec{r}}_a}{r_a^3} - \frac{6\dot{r}_a \dot{\vec{r}}_a}{r_a^4} - \frac{3\ddot{r}_a \vec{r}_a}{r_a^4} + \frac{12\dot{r}_a^2 \vec{r}_a}{r_a^5} \right), \\ &= -\mathbb{K}^2 \left[\left(-\frac{\mathbb{K}^2}{r_a^6} - \frac{3\ddot{r}_a}{r_a^4} + \frac{12\dot{r}_a^2}{r_a^5} \right) \vec{r}_a - \frac{6\dot{r}_a}{r_a^4} \dot{\vec{r}}_a \right], \end{aligned} \quad (8.25)$$

para la cual, en la última, en el primer término del paréntesis del lado derecho hicimos uso de la ecuación (8.23). Al ir reemplazando los valores de (8.23), (8.24), (8.25), etc., en la ecuación (8.22) se observará que siempre es posible colocar esta en términos de los vectores \vec{r}_a y $\dot{\vec{r}}_a$, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \left[1 - \frac{\mathbb{K}^2}{2r_a^3}(t-t_a)^2 + \frac{\mathbb{K}^2 \dot{r}_a}{2r_a^4}(t-t_a)^3 + \left(\frac{\mathbb{K}^4}{24r_a^6} + \frac{\mathbb{K}^2 \ddot{r}_a}{8r_a^4} - \frac{\mathbb{K}^2 \dot{r}_a^2}{2r_a^5} \right) (t-t_a)^4 + \dots \right] \vec{r}_a \\ &+ \left[(t-t_a) - \frac{\mathbb{K}^2}{6r_a^3}(t-t_a)^3 + \frac{\mathbb{K}^2 \dot{r}_a}{4r_a^4}(t-t_a)^4 + \dots \right] \dot{\vec{r}}_a. \end{aligned}$$

Ahora, si asumimos que la diferencia de tiempo $t-t_a$ es lo suficientemente pequeña como para despreciar los términos de orden cuarto en adelante y, como en la gran mayoría de los casos, los objetos cuya órbita se va a determinar se desplazan en órbitas con pequeñas excentricidades, por lo que $\dot{r}_a \approx 0$. Por ello, la expresión anterior se puede escribir, sin demasiada pérdida de exactitud, como:

$$\vec{r} = \underbrace{\left[1 - \frac{\mathbb{K}^2}{2r_a^3}(t-t_a)^2 \right]}_f \vec{r}_a + \underbrace{\left[(t-t_a) - \frac{\mathbb{K}^2}{6r_a^3}(t-t_a)^3 \right]}_g \dot{\vec{r}}_a, \quad (8.26)$$

y así podemos escribir el vector \vec{r} como:

$$\vec{r} = f\vec{r}_a + g\dot{\vec{r}}_a, \quad (8.27)$$

donde f y g son las series definidas como se indica en la ecuación (8.26).

Supóngase que los vectores \vec{r}'_1 , \vec{r}'_2 y \vec{r}'_3 están lo suficientemente cerca los unos de los otros, esto es, la diferencia entre los tiempos de observación es de fracciones de día o, a lo sumo, de pocos días, por lo que es factible expresar dos de los vectores

en términos de otro. Por lo tanto, los vectores \vec{r}'_1 y \vec{r}'_3 pueden expresarse a través de una serie de Taylor en torno al vector \vec{r}'_2 del siguiente modo:

$$\vec{r}'_1 = f_1 \vec{r}'_2 + g_1 \dot{\vec{r}}'_2, \quad (8.28)$$

$$\vec{r}'_3 = f_3 \vec{r}'_2 + g_3 \dot{\vec{r}}'_2, \quad (8.29)$$

donde las series f_1 , f_3 , g_1 y g_3 pueden expresarse por:

$$f_1 = \left[1 - \frac{\mathbb{K}^2}{2r_2^3} (t_1 - t_2)^2 \right] = \left[1 - \frac{\mathbb{K}^2}{2r_2^3} (t_2 - t_1)^2 \right], \quad (8.30)$$

$$f_3 = \left[1 - \frac{\mathbb{K}^2}{2r_2^3} (t_3 - t_2)^2 \right], \quad (8.31)$$

$$g_1 = \left[(t_1 - t_2) - \frac{\mathbb{K}^2}{6r_2^3} (t_1 - t_2)^3 \right] = \frac{-\mathbb{K}(t_2 - t_1)}{\mathbb{K}} \left[1 - \frac{\mathbb{K}^2(t_2 - t_1)^2}{6r_2^3} \right], \quad (8.32)$$

$$g_3 = \left[(t_3 - t_2) - \frac{\mathbb{K}^2}{6r_2^3} (t_3 - t_2)^3 \right] = \frac{\mathbb{K}(t_3 - t_2)}{\mathbb{K}} \left[1 - \frac{\mathbb{K}^2(t_3 - t_2)^2}{6r_2^3} \right]. \quad (8.33)$$

Siendo así, es posible expresar la constante c_1 de la siguiente forma (ver ecuación (8.21)):

$$c_1 = \frac{|\vec{r}'_2 \times (f_3 \vec{r}'_2 + g_3 \dot{\vec{r}}'_2)|}{|(f_1 \vec{r}'_2 + g_1 \dot{\vec{r}}'_2) \times (f_3 \vec{r}'_2 + g_3 \dot{\vec{r}}'_2)|},$$

y como $\vec{r}'_2 \times \vec{r}'_2 = \dot{\vec{r}}'_2 \times \dot{\vec{r}}'_2 = 0$ podemos obtener:

$$c_1 = \frac{g_3 |\vec{r}'_2 \times \dot{\vec{r}}'_2|}{(f_1 g_3 - g_1 f_3) |\vec{r}'_2 \times \dot{\vec{r}}'_2|} = \frac{g_3}{f_1 g_3 - g_1 f_3}. \quad (8.34)$$

Llamando:

$$\begin{aligned} T_1 &= \mathbb{K}(t_3 - t_2), \\ T_2 &= \mathbb{K}(t_3 - t_1), \\ T_3 &= \mathbb{K}(t_2 - t_1), \end{aligned} \quad (8.35)$$

entonces el producto $f_1 g_3 - g_1 f_3$ puede escribirse sucesivamente así:

$$\begin{aligned}
 f_1 g_3 - g_1 f_3 &= \frac{T_1}{\mathbb{K}} \left[1 - \frac{T_3^2}{2r_2^3} \right] \left[1 - \frac{T_1^2}{6r_2^3} \right] + \frac{T_3}{\mathbb{K}} \left[1 - \frac{T_1^2}{2r_2^3} \right] \left[1 - \frac{T_3^2}{6r_2^3} \right], \\
 &= \frac{1}{\mathbb{K}} \left[T_1 + T_3 - \frac{1}{2r_2^3} (T_3 T_1^2 + T_1 T_3^2) - \frac{1}{6r_2^3} (T_3^3 + T_1^3) \right], \\
 &= \frac{1}{\mathbb{K}} \left[T_1 + T_3 - \frac{1}{6r_2^3} (3T_3 T_1^2 + 3T_1 T_3^2 + T_3^3 + T_1^3) \right], \quad (8.36) \\
 &= \frac{1}{\mathbb{K}} \left[T_1 + T_3 - \frac{1}{6r_2^3} (T_1 + T_3)^3 \right] = \frac{1}{\mathbb{K}} \left(T_2 - \frac{T_2^3}{6r_2^3} \right),
 \end{aligned}$$

donde, por un lado, se han despreciado aquellos productos en la cuarta potencia en las diferencias de tiempo y, por otro, se ha utilizado el hecho de que $T_2 = T_1 + T_3$. Con esto, y con (8.33), al reemplazarlos en (8.34) queda, entonces, como:

$$c_1 = \frac{T_1 \left(1 - \frac{T_1^2}{6r_2^3} \right)}{T_2 \left(1 - \frac{T_2^2}{6r_2^3} \right)} = \frac{T_1}{T_2} \left(1 - \frac{T_1^2}{6r_2^3} \right) \left(1 + \frac{T_2^2}{6r_2^3} \right) = \frac{T_1}{T_2} \left(1 + \frac{T_2^2}{6r_2^3} - \frac{T_1^2}{6r_2^3} \right),$$

en la que se hizo como aproximación $(1+x)^{-1} \approx 1-x$, para un x pequeño. Podemos reescribir la expresión anterior del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{T_1}{T_2} \left(1 + \frac{T_2^2}{6r_2^3} - \frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{T_2^2}{6r_2^3} \right) = \frac{T_1}{T_2} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{T_2^2}{r_2^3} - \frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{T_2^2}{r_2^3} \right) \right], \\
 &= \frac{T_1}{T_2} \left[1 + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{T_1^2}{T_2^2} \right) \frac{T_2^2}{r_2^3} \right],
 \end{aligned}$$

entonces, si definimos:

$$a_1 = \frac{T_1}{T_2}, \quad (8.37)$$

$$b_1 = \frac{1}{6} a_1 (1 - a_1^2) T_2^2, \quad (8.38)$$

podemos escribir c_1 así:

$$c_1 = a_1 + \frac{b_1}{r_2^3}. \quad (8.39)$$

Un procedimiento enteramente análogo al como acabamos de exponer (partiendo de la ecuación (8.20)) permite obtener c_3 expresado por:

$$c_3 = a_3 + \frac{b_3}{r_2^3}, \quad (8.40)$$

donde:

$$a_3 = \frac{T_3}{T_2}, \quad (8.41)$$

$$b_3 = \frac{1}{6}a_3(1 - a_3^2)T_2^2. \quad (8.42)$$

Con ello, hemos logrado expresar c_1 y c_3 en términos de cantidades enteramente conocidas (a_1 , b_1 , a_3 y b_3 , pues dependen de las diferencias de tiempo), salvo por el valor de r_2 . El paso siguiente es ver cómo es posible determinar esta distancia.

Multipliquemos la ecuación (8.19) por el producto $\cdot(\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3)$ lo cual, como se verá, tiene el propósito de aislar el término que acompaña a ρ_2 . Miremos:

$$\begin{aligned} & c_1 \rho_1 \left[\hat{u}'_1 \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] - \rho_2 \left[\hat{u}'_2 \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] + c_3 \rho_3 \left[\hat{u}'_3 \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] = \\ & c_1 \left[\vec{R}'_{\odot 1} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] - \left[\vec{R}'_{\odot 2} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] + c_3 \left[\vec{R}'_{\odot 3} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right], \end{aligned}$$

pero $\left[\hat{u}'_1 \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] = \left[\hat{u}'_3 \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_1) \right] = 0$, $\left[\hat{u}'_3 \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] = \left[\hat{u}'_1 \cdot (\hat{u}'_3 \times \hat{u}'_3) \right] = 0$ y $\left[\hat{u}'_2 \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] = \left[\hat{u}'_1 \cdot (\hat{u}'_3 \times \hat{u}'_2) \right] = - \left[\hat{u}'_1 \cdot (\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3) \right]$, entonces podemos despejar ρ_2 :

$$\rho_2 = \frac{c_1 \left[\vec{R}'_{\odot 1} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] - \left[\vec{R}'_{\odot 2} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] + c_3 \left[\vec{R}'_{\odot 3} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right]}{\left[\hat{u}'_1 \cdot (\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3) \right]},$$

que al reemplazar las ecuaciones (8.39) y (8.40) que colocan c_1 y c_3 , respectivamente, en función de r_2 , la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\rho_2 = \mathbb{A} + \frac{\mathbb{B}}{r_2^3}, \quad (8.43)$$

donde:

$$\mathbb{A} = \frac{a_1 \left[\vec{R}'_{\odot 1} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] - \left[\vec{R}'_{\odot 2} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] + a_3 \left[\vec{R}'_{\odot 3} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right]}{\left[\hat{u}'_1 \cdot (\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3) \right]}, \quad (8.44)$$

$$\mathbb{B} = \frac{b_1 \left[\vec{R}'_{\odot 1} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right] + b_3 \left[\vec{R}'_{\odot 3} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) \right]}{\left[\hat{u}'_1 \cdot (\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3) \right]}, \quad (8.45)$$

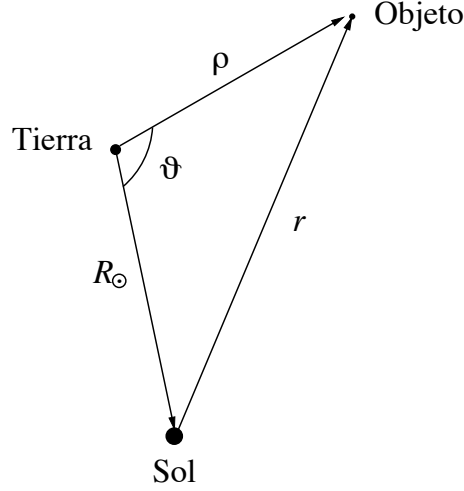


Figura 8.3. Relación entre la distancia entre el Sol y la Tierra (R_{\odot}), la distancia objeto y el Sol (r) y la distancia objeto la Tierra (ρ).

siendo \mathbb{A} y \mathbb{B} cantidades que se pueden calcular a partir de valores conocidos mientras que r_2 y ρ_2 constituyen, por ahora, valores desconocidos. Sería altamente conveniente conseguir otra ecuación que permita relacionar r_2 y ρ_2 con el fin de contar con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y así resolver el problema. De la figura 8.3 podemos observar la relación existente entre las magnitudes de los vectores \vec{r}'_2 , $\vec{R}'_{\odot 2}$ y $\vec{\rho}'_2$. Utilizando el teorema del coseno para los triángulos oblicuángulos podemos escribir:

$$r_2^2 = R_{\odot 2}^2 + \rho_2^2 - 2R'_{\odot 2} \rho_2 \cos \vartheta, \quad (8.46)$$

donde ϑ es el ángulo centrado en la Tierra. De la definición del producto punto, es claro que:

$$\cos \vartheta = \frac{\vec{R}'_{\odot 2} \cdot \vec{\rho}'_2}{R'_{\odot 2} \rho_2} = \frac{\vec{R}'_{\odot 2} \cdot (\rho_2 \hat{u}'_2)}{R'_{\odot 2} \rho_2} = \frac{\rho_2 (\vec{R}'_{\odot 2} \cdot \hat{u}'_2)}{R'_{\odot 2} \rho_2},$$

de forma que la ecuación (8.46) puede escribirse como:

$$r_2^2 = R_{\odot 2}^2 + \rho_2^2 - 2\rho_2 (\vec{R}'_{\odot 2} \cdot \hat{u}'_2). \quad (8.47)$$

Se advierte en esta última ecuación que son conocidos los términos $R_{\odot 2}^2$ y $2(\vec{R}'_{\odot 2} \cdot \hat{u}'_2)$, en tanto que r_2 y ρ_2 son incógnitas. Tenemos entonces que las ecuaciones (8.43) y (8.47) constituyen dos ecuaciones cuyas incógnitas son r_2 y ρ_2 . Como puede ver el lector, dada la funcionalidad de ambas ecuaciones, su solución ha de conseguirse mediante una técnica numérica. Es corriente asumir un primer valor tentativo de r_2 ,

digamos, $r_2 = 1$. Reemplazar este valor en la ecuación (8.43) permite obtener un valor numérico de ρ_2 . Este valor es reemplazado en la ecuación (8.47) lo que permite conseguir un nuevo valor de r_2 . Repitiendo el proceso varias veces se observa que tanto r_2 como ρ_2 convergen hacia valores numéricos específicos que son los valores deseados. Por supuesto que en este punto, los valores de c_1 y c_3 ya pueden calcularse (ver ecuaciones (8.39) y 8.40)).

Hallados los valores de ρ_2 , c_1 y c_3 es posible ya determinar los valores tanto de ρ_1 como de ρ_3 . De nuevo, con el propósito de aislar el término de ρ_1 , multiplicamos a ambos lados de la ecuación (8.19) por $\cdot(\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3)$ y obtenemos fácilmente:

$$\rho_1 = \frac{c_1 [\vec{R}'_{\odot 1} \cdot (\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3)] - [\vec{R}'_{\odot 2} \cdot (\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3)] + c_3 [\vec{R}'_{\odot 3} \cdot (\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3)]}{c_1 [\hat{u}'_1 \cdot (\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3)]}. \quad (8.48)$$

Del mismo modo, al multiplicar (8.19) por $\cdot(\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_2)$ podemos obtener ρ_3 así:

$$\rho_3 = \frac{c_1 [\vec{R}'_{\odot 1} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_2)] - [\vec{R}'_{\odot 2} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_2)] + c_3 [\vec{R}'_{\odot 3} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_2)]}{c_3 [\hat{u}'_1 \cdot (\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3)]}. \quad (8.49)$$

Halladas las distancias geocéntricas ρ_i (para $i = 1, 2, 3$) los vectores heliocéntricos ecuatoriales $\vec{r}'_i(x'_i, y'_i, z'_i)$ quedan determinados mediante la ecuación (8.17). Los vectores heliocéntricos eclípticos $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ se hallan mediante (ver ecuaciones (2.14)):

$$\begin{aligned} x_i &= x'_i, \\ y_i &= y'_i \cos \epsilon + z'_i \sin \epsilon, \\ z_i &= -y'_i \sin \epsilon + z'_i \cos \epsilon, \end{aligned} \quad (8.50)$$

con $i = 1, 2, 3$. La determinación de estos tres vectores con relación al plano fundamental permite hallar los elementos orbitales como a continuación se describe.

8.3.1. Cálculo de los elementos con los tres vectores de posición

El propósito de los métodos clásicos de determinación orbital, tales como el de Gauss y de Laplace (para las órbitas elípticas), y el de Olbers (para órbitas parabólicas), es encontrar las distancias geocéntricas y heliocéntricas del objeto en los tres tiempos de observación con base en solo medidas angulares (y el conocimiento de la posición de la Tierra). Con las distancias ya es posible conocer unívocamente los tres

vectores heliocéntricos del objeto, tal y como se acabó de describir con el método de Gauss. Lo que sigue a continuación es relacionar esos tres vectores posición con los elementos orbitales que se desean determinar.

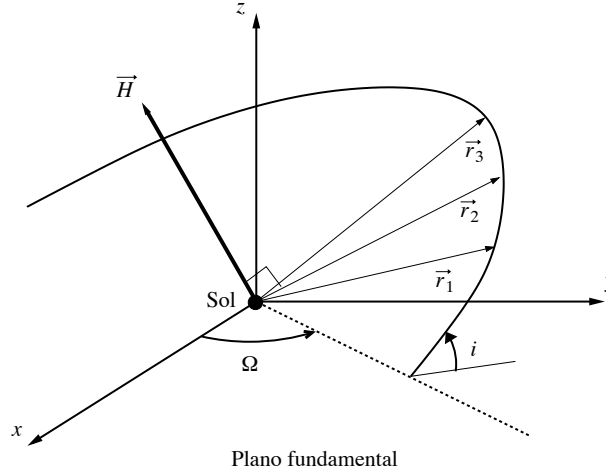


Figura 8.4. El producto cruz entre dos vectores heliocéntricos forman un vector ortogonal \vec{H} al plano orbital, lo cual permite conocer los ángulos Ω e i .

El producto cruz entre dos vectores heliocéntricos, digamos $\vec{H} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_3$, permite definir un vector que es ortogonal al plano orbital (ver figura 8.4). La división de este vector por su magnitud ($\hat{H} = \vec{H}/|\vec{H}|$) permite obtener un vector unitario que también es ortogonal al plano orbital. Sean entonces H_1 , H_2 y H_3 las componentes de dicho vector unitario. Pero ya hemos visto cómo es la relación entre este vector unitario ortogonal al plano orbital con los elementos orbitales Ω e i a través de la ecuación (6.5). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_3|} &= H_1 \hat{i} + H_2 \hat{j} + H_3 \hat{k}, \\ &= \sin \Omega \sin i \hat{i} - \cos \Omega \sin i \hat{j} + \cos i \hat{k}, \end{aligned} \quad (8.51)$$

de las que se desprende que:

$$\Omega = \tan^{-1} \left(\frac{H_1}{-H_2} \right), \quad (8.52)$$

$$i = \cos^{-1} \left(\frac{H_3}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}} \right). \quad (8.53)$$

Es igualmente válido determinar ese vector ortogonal al plano orbital con la combinación $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ y $\vec{r}_2 \times \vec{r}_3$, por lo que bien se puede calcular un valor promedio de Ω e i con los valores arrojados de cada combinación.

Nótese que el valor de ángulo de inclinación i (que no es circularizante) depende del signo de H_3 . En el caso que $H_3 > 0$, el ángulo está comprendido entre 0 y 90 grados y la órbita es prógrada, esto es, en la dirección contraria de las agujas del reloj visto desde el polo norte eclíptico (Π), o sea, en la dirección de desplazamiento de todos los planetas del Sistema Solar. En el caso en que $H_3 < 0$ la inclinación está comprendida entre 90 y 180 grados; con ello se indica que la órbita es retrógrada: en dirección contraria a como se mueven los planetas del Sistema Solar, como la que poseen no pocos cometas.

Los restantes elementos demandan un poco más de cálculo en su consecución. Veamos. De la ley de las áreas (ver ecuación (4.26)) tenemos que el área infinitesimal entre los vectores, digamos, \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , es:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{A_2 - A_1}{t_2 - t_1},$$

y la diferencia $A_2 - A_1$ puede colocarse en términos de los radios vectores:

$$A_2 - A_1 = \frac{1}{2}(\vec{r}_2 \times \vec{r}_1) = \frac{1}{2}|\vec{r}_1||\vec{r}_2|\sin \Gamma,$$

donde el ángulo Γ entre los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 (ver figura 8.5) equivale a:

$$\Gamma = \theta_2 - \theta_1 = (\omega + \theta_2) - (\omega + \theta_1) = u_2 - u_1,$$

en la cual hemos llamado $u_i = \omega + \theta_i$, donde $i = 1, 2, 3$.

Por lo tanto:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|\sin(u_2 - u_1)}{t_2 - t_1},$$

y como dA/dt está dada por h (ver ecuación (4.27)) y a la vez, asumiendo órbita elíptica, h se puede colocar en términos de a y e (ecuación (4.49)), podemos escribir:

$$\mathbb{P} = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{t_2 - t_1}, \quad (8.54)$$

o también:

$$\mathbb{P} = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{t_3 - t_2}, \quad (8.55)$$

donde

$$\mathbb{P} = \mathbb{K}\sqrt{a(1-e^2)}, \quad (8.56)$$

para la cual hicimos $m_2/m_1 = 0$. El valor \mathbb{P} definido por (8.54) (o por (8.55)) sería una cantidad conocida si tuvieramos a su vez el valor de $u_2 - u_1$ (o de $u_3 - u_2$). A continuación, mostraremos cómo se pueden calcular estos últimos.

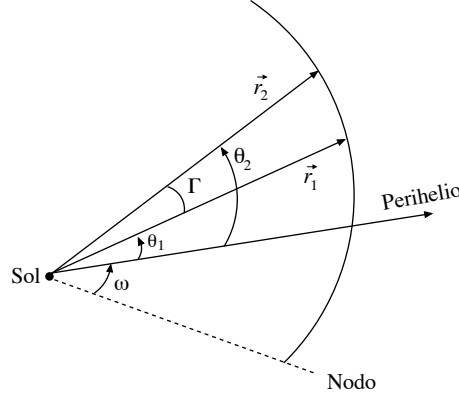


Figura 8.5. Dos radio vectores próximos entre sí y el ángulo Γ entre ellos.

De la ecuación (6.29) es claro que:

$$r_i \sin u_i = \frac{z_i}{\sin i}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Por otro lado, dado que el ángulo $\omega + \theta$ es el ángulo existente entre la línea de los nodos y el radio vector, tenemos (ver figura 8.6):

$$r_i \cos u_i = \hat{n} \cdot \vec{r}_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3,$$

donde \hat{n} , como se recordará (ver ecuación (6.11)) es un vector unitario definido sobre el plano fundamental en dirección de la línea de los nodos. De estas dos últimas ecuaciones se deduce:

$$\tan u_i = \frac{z_i}{\sin i(x_i \cos \Omega + y_i \sin \Omega)}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \quad (8.57)$$

los cuales son ángulos circularizantes que, en términos de la tangente, no van a dar lugar a problemas para encontrar su correcto cuadrante. Estos ángulos son conocidos, pues a estas alturas conocemos las componentes de los vectores posición así como Ω e i . De este modo se conoce la diferencia $u_2 - u_1$ (o $u_3 - u_2$) por lo que podemos determinar inmediatamente el valor de \mathbb{P} dado por (8.54) o por (8.55).

El valor de \mathbb{P} permite determinar otras cantidades. De la ecuación de la órbita elíptica (ecuación (4.43)) tenemos:

$$r_i(1 + e \cos \theta_i) = \left(\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{K}} \right)^2, \quad \text{para } i = 1, 2, 3,$$

esto es:

$$\mathbb{Q}_i = \frac{\mathbb{P}^2}{\mathbb{K}^2 r_i} - 1, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \quad (8.58)$$

en donde:

$$\mathbb{Q}_i = e \cos \theta_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (8.59)$$

Nótese que los \mathbb{Q}_i dados por (8.58) son cantidades conocidas.

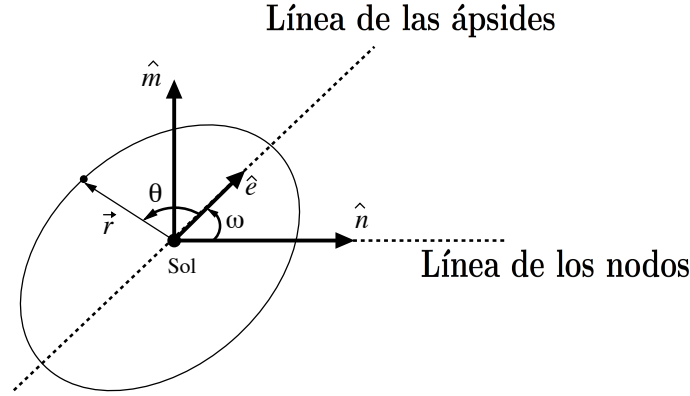


Figura 8.6. Relación entre los vectores \hat{n} , \hat{e} y el vector posición del objeto \vec{r} .

Para efectos de hallar ω y e es necesario determinar alguna de las anomalías verdaderas, bien sea θ_1 o θ_2 . Hagamos $\cos(u_3 - u_1)$:

$$\cos(u_2 - u_1) = \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1,$$

la que al multiplicar por $e \cos \theta_1$ a ambos lados da:

$$e \cos \theta_1 \cos(u_2 - u_1) = e \cos \theta_2 \cos^2 \theta_1 + e \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_1,$$

pero, como es fácil verificar: $\cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(u_2 - u_1) + \sin \theta_1 \cos \theta_2$, entonces:

$$\begin{aligned} e \cos \theta_1 \cos(u_2 - u_1) &= e \cos \theta_2 \cos^2 \theta_1 + e [\sin(u_2 - u_1) + \sin \theta_1 \cos \theta_2] \sin \theta_1, \\ &= e \cos \theta_2 (1 - \sin^2 \theta_1) + e \sin \theta_1 [\sin(u_2 - u_1) + e \cos \theta_2 \sin^2 \theta_1], \\ &= e \cos \theta_2 + e \sin \theta_1 \sin(u_2 - u_1), \end{aligned}$$

de la que, al despejar $e \sin \theta_1$ y teniendo en cuenta (8.59), podemos colocar:

$$e \sin \theta_1 = \frac{\mathbb{Q}_1 \cos(u_2 - u_1) - \mathbb{Q}_2}{\sin(u_2 - u_1)}.$$

Una consideración semejante permite obtener:

$$e \sin \theta_2 = \frac{\mathbb{Q}_2 \cos(u_3 - u_2) - \mathbb{Q}_3}{\sin(u_3 - u_2)}.$$

De (8.59) tenemos:

$$e \cos \theta_1 = \mathbb{Q}_1, \quad e \cos \theta_2 = \mathbb{Q}_2,$$

y, por lo tanto, se pueden encontrar θ_1 y θ_2 en términos de cantidades conocidas y en forma de la tangente para evitar problemas de cuadrante:

$$\tan \theta_1 = \frac{[\cos(u_2 - u_1) - (\mathbb{Q}_2/\mathbb{Q}_1)]}{\sin(u_2 - u_1)}, \quad \tan \theta_2 = \frac{[\cos(u_3 - u_2) - (\mathbb{Q}_3/\mathbb{Q}_2)]}{\sin(u_3 - u_2)}. \quad (8.60)$$

Habiendo hallado θ_1 (o θ_2), se encuentra inmediatamente el ángulo ω , pues $\omega = u_1 - \theta_1$ (o $\omega = u_2 - \theta_2$).

El valor de la excentricidad se puede encontrar del siguiente modo:

$$e^2 \sin^2 \theta_1 + e^2 \cos^2 \theta_1 = \left[\frac{\mathbb{Q}_1 \cos(u_2 - u_1) - \mathbb{Q}_2}{\sin(u_2 - u_1)} \right]^2 + \mathbb{Q}_1^2,$$

de la cual es directo obtener:

$$e = \frac{\sqrt{\mathbb{Q}_1^2 + \mathbb{Q}_2^2 - 2\mathbb{Q}_1\mathbb{Q}_2 \cos(u_2 - u_1)}}{\sin(u_2 - u_1)}, \quad (8.61)$$

y del mismo modo, también:

$$e = \frac{\sqrt{\mathbb{Q}_2^2 + \mathbb{Q}_3^2 - 2\mathbb{Q}_2\mathbb{Q}_3 \cos(u_3 - u_2)}}{\sin(u_3 - u_2)}. \quad (8.62)$$

El valor del semieje mayor se encuentra con (8.56):

$$a = \frac{\mathbb{P}^2}{\mathbb{K}^2(1 - e^2)}. \quad (8.63)$$

Por intermedio de (8.7) se encuentra el valor de la anomalía excéntrica (E_1) en el tiempo t_1 ; luego, con (8.8), el de la anomalía media de referencia en el tiempo t_1 y con (8.9) se determina el tiempo de paso por el perihelio.

Esta órbita definida por los parámetros que se acaban de encontrar (a , e , i , Ω , ω , M_r) se denomina órbita preliminar y no puede considerarse como definitiva. Es preciso corregir la trayectoria con sucesivas observaciones del objeto, lo que permite un conocimiento cada vez más próximo a la trayectoria real del objeto, por lo que, a medida que se dispogan de más observaciones, los elementos orbitales cambiarán ligeramente conforme se dispongan de más “puntos” observacionales (ver figura 8.7). Además, por supuesto, es necesario incluir el efecto de las perturbaciones que ejercen los planetas sobre el objeto. Ello hace el proceso aún más dispendioso, pero este no se abordará aquí por tratarse de la naturaleza introductoria de este libro.

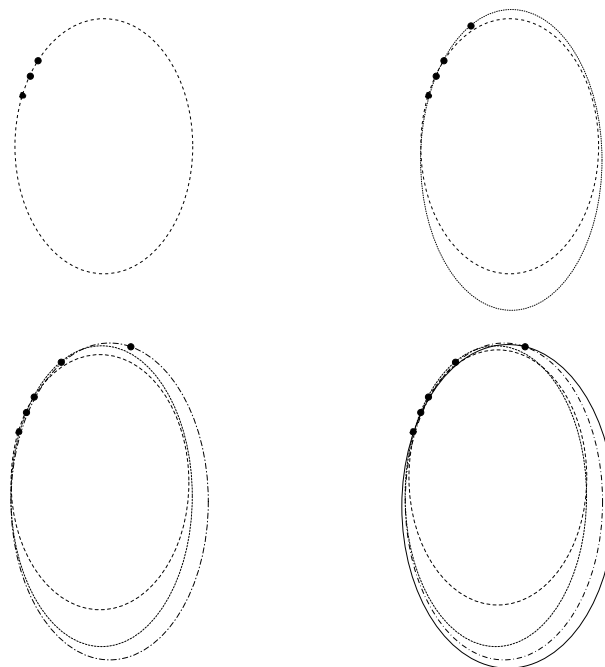


Figura 8.7. La órbita preliminar se obtiene mínimo con tres observaciones (izquierda, arriba). Una cuarta observación ofrece un dato adicional que permite corregir la órbita (derecha, arriba); nuevos puntos observacionales (abajo) irán refinando la trayectoria y de ese modo aproximándola a la real.

La necesaria corrección orbital de un objeto recién descubierto explica los anuncios que se dan con cierta frecuencia de asteroides que se acaban de descubrir y que, al calcular su movimiento a futuro, tendrán fuertes acercamientos con la Tierra (algunos con la posibilidad de impacto) y que, sin embargo, a las pocas semanas o meses, vienen acompañados por la noticia de que ya no se acercarán tanto. Un ejemplo de ello fue el anuncio hecho a mediados de marzo de 1998 de que el asteroide

1997 XF11 se iba a acercar a unos 40 000 km de la Tierra el 26 de octubre de 2028 y, dada la incertidumbre en el conocimiento real de su órbita, cabía la posibilidad de que pudiera chocar con la Tierra. Puesto que se trata de un objeto con un tamaño de casi 2 km —lo suficientemente grande como para producir una catástrofe global—, la noticia despertó una amplia cobertura en los medios. Sin embargo, observaciones realizadas poco después (así como observaciones basadas en fotografías tomadas con antelación al descubrimiento del objeto) permitieron asegurar que el asteroide, en la fecha en referencia, iba a pasar a más de 800 000 km de distancia de la Tierra y que, en realidad, no albergaba ningún peligro para la humanidad.

* Ejercicio 8.5

Un asteroide es observado en tres tiempos distintos, con las siguientes posiciones en coordenadas esféricas ecuatoriales:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 23^h 16^m 41,26^s & \alpha_2 = 23^h 35^m 23,76^s & \alpha_3 = 23^h 46^m 37,42^s \\ \delta_1 = 4^\circ 4' 40,84'' & \delta_2 = 5^\circ 54' 40,72'' & \delta_3 = 7^\circ 0' 47,23'' \\ t_1 = 10,0 \text{ abril 2013 (TT)} & t_2 = 20,0 \text{ abril 2013 (TT)} & t_3 = 26,0 \text{ abril 2013 (TT)} \end{array}$$

donde las coordenadas están referidas al Ecuador Celeste medio y Eclíptica del J2000,0. Determinar la órbita preliminar del asteroide.

Solución

Primero que todo se requiere conocer las componentes del vector posición de la Tierra en los tres instantes de tiempo dados. Una consulta con la página del IMCCE, permite obtener las componentes rectangulares ecuatoriales para la Tierra referidas al equinoccio medio y Eclíptica del J2000,0, que son (en u.a.):

$$\begin{array}{lll} x'_{T1} = -0,9408247 & x'_{T2} = -0,8709413 & x'_{T3} = -0,8166954 \\ y'_{T1} = -0,3159156 & y'_{T2} = -0,4594003 & y'_{T3} = -0,5392726 \\ z'_{T1} = -0,1369553 & z'_{T2} = -0,1991535 & z'_{T3} = -0,2337823 \end{array}$$

$$\text{F.J.}_1 = 2\,456\,392,5 \quad \text{F.J.}_2 = 2\,456\,402,5 \quad \text{F.J.}_3 = 2\,456\,408,5$$

donde, de paso, se colocaron las fechas julianas correspondientes a cada uno de los tiempos de observación. Entonces (ver ecuaciones (8.35)):

$$T_1 = 0,1032126, \quad T_2 = 0,2752336, \quad T_3 = 0,1720210,$$

así mismo, de las ecuaciones (8.37), (8.38), (8.41) y (8.42) tenemos:

$$a_1 = 0,3750000, \quad b_1 = 0,004068, \quad a_3 = 0,6250000, \quad b_3 = 0,0048086.$$

Los vectores unitarios geocéntricos son, ver ecuación (8.16) y teniendo en cuenta que las ascensiones rectas hay que multiplicarlas por 15 para pasarlas a unidades de grados:

$$\begin{array}{lll}
\hat{u}'_{1x} & = & 0,9797085 \quad \hat{u}'_{2x} = 0,9889561 \quad \hat{u}'_{3x} = 0,9908282 \\
\hat{u}'_{1y} & = & -0,1873871 \quad \hat{u}'_{2y} = -0,1065793 \quad \hat{u}'_{3y} = -0,0578957 \\
\hat{u}'_{1z} & = & 0,0711146 \quad \hat{u}'_{2z} = 0,1029889 \quad \hat{u}'_{3z} = 0,1220966
\end{array}$$

Calculamos a continuación los siguientes vectores:

$$\begin{array}{lll}
(\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3)_x & = & -0,0187621 \quad (\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3)_x = -0,0070504 \quad (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_2)_x = -0,0117194 \\
(\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3)_y & = & -0,0491567 \quad (\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3)_y = -0,0187039 \quad (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_2)_y = -0,0305698 \\
(\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3)_z & = & 0,1289475 \quad (\hat{u}'_2 \times \hat{u}'_3)_z = 0,0483455 \quad (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_2)_z = 0,0809009
\end{array}$$

de tal modo que al tener presente que $\vec{R}'_{\odot} = -r'_T$, se tienen los siguientes productos:

$$\begin{array}{ll}
\vec{R}'_{\odot 1} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) & = -0,0155212 \quad \vec{R}'_{\odot 1} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) = -0,0116861 \\
\vec{R}'_{\odot 2} \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) & = -0,0132429 \quad \hat{u}'_1 \cdot (\hat{u}'_1 \times \hat{u}'_3) = 0,0000356
\end{array}$$

al igual que se tiene:

$$R'^2_{\odot 2} = 1,0092495 \quad \vec{R}'_{\odot 2} \cdot \hat{u}'_2 = 0,8328707$$

y, por lo tanto, al reemplazar en las ecuaciones (8.44) y (8.45) obtenemos:

$$\mathbb{A} = 3,3296581, \quad \mathbb{B} = -3,3486722,$$

y las ecuaciones (8.43) y (8.46) quedan como:

$$\rho_2 = 3,3296581 - \frac{3,3486722}{r_2^3}, \quad r_2^2 = 1,0092495 + \rho_2^2 - 2\rho_2 \times 0,8328707.$$

Tomando un valor tentativo de $r_2 = 1,0$ u.a. para calcular un valor de ρ_2 y este a su vez reemplazando en la ecuación de la derecha para hallar un valor de r_2 y así sucesivamente, se tiene la siguiente secuencia de resultados (en u.a.):

$$\begin{array}{ll}
(r_2)_1 = 1,0 & (\rho_2)_1 = -0,0190141 \\
(r_2)_2 = 1,0204330 & (\rho_2)_2 = 0,1781450 \\
(r_2)_3 = 0,8626943 & (\rho_2)_3 = -1,885911 \\
(r_2)_4 = 2,7762122 & (\rho_2)_4 = 3,1731579 \\
(r_2)_5 = 2,4067656 & (\rho_2)_5 = 3,0894591 \\
\vdots & \vdots \\
(r_2)_{18} = 2,2868620 & (\rho_2)_{18} = 3,0496615 \\
(r_2)_{19} = 2,2868619 & (\rho_2)_{19} = 3,0496615
\end{array}$$

Por lo tanto: $r_2 = 2,2868619$ u.a., $\rho_2 = 3,0496615$ u.a. Con las ecuaciones (8.39) y (8.40) hallamos los valores de c_1 y c_3 :

$$c_1 = 0,3753402, \quad c_3 = 0,6254021,$$

lo que a la vez permite determinar las otras distancias geocéntricas ρ_1 (ecuación (8.48)) y ρ_3 (ecuación (8.49)):

$$\rho_1 = 3,1276375 \text{ u.a.} \quad \rho_3 = 2,9997206 \text{ u.a.}$$

Con las distancias geocéntricas ya conocidas se pueden determinar las componentes de los vectores heliocéntricos ecuatoriales (en u.a.) del asteroide para los tres tiempos con ayuda de (8.17):

$$\begin{array}{lll} x'_1 & = & 2,1233484 \quad x'_2 = 2,1450400 \quad x'_3 = 2,1555124 \\ y'_1 & = & -0,9019946 \quad y'_2 = -0,7844312 \quad y'_3 = -0,7129435 \\ z'_1 & = & 0,0854655 \quad z'_2 = 0,1149278 \quad z'_3 = 0,1324734 \end{array}$$

Estas componentes con relación a la Eclíptica (ver ecuaciones (8.50)) quedan como:

$$\begin{array}{lll} x_1 & = & 2,1233484 \quad x_2 = 2,1450400 \quad x_3 = 2,1555124 \\ y_1 & = & -0,7935677 \quad y_2 = -0,6739860 \quad y_3 = -0,6014181 \\ z_1 & = & 0,4372058 \quad z_2 = 0,4174729 \quad z_3 = 0,4051345 \end{array}$$

y los restantes valores de la magnitud de los vectores heliocéntricos son:

$$r_1 = 2,3085726 \text{ u.a.}, \quad r_3 = 2,2742189 \text{ u.a.}$$

El vector $\vec{r}_1 \times \vec{r}_3$ es:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_3 = -0,0585582\hat{i} + 0,0821607\hat{j} + 0,4335249\hat{k},$$

y con magnitud $|\vec{r}_1 \times \vec{r}_3| = 0,2783729$. De ese modo, un vector unitario ortogonal al plano orbital es:

$$H_1 = -0,1315589, \quad H_2 = 0,1845850, \quad H_3 = 0,9739716,$$

y con ello se puede determinar la longitud del nodo ascendente y la inclinación por intermedio de (8.52) y (8.53) así:

$$\Omega = 215,4785322^\circ, \quad i = 13,1011075^\circ.$$

Como es directo verificar, se obtienen valores idénticos de estos ángulos si se hace el cálculo con $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ o con $\vec{r}_2 \times \vec{r}_3$. Con ayuda de (8.57) podemos determinar el ángulo u para cada uno de los tres tiempos, para los cuales se ha aplicado el criterio de cuadrante visto en el apéndice B:

$$u_1 = 123,3317422^\circ, \quad u_2 = 126,3542515^\circ, \quad u_3 = 128,1950998^\circ.$$

El valor de \mathbb{P} se puede hallar por intermedio de (8.54): $\mathbb{P} = 0,0278373$ o también de (8.55): $\mathbb{P} = 0,0278446$. Tomando como valor promedio tenemos: $\mathbb{P} = 0,0278410$. Los valores de \mathbb{Q} se calculan con (8.58):

$$\mathbb{Q}_1 = 0,1346507, \quad \mathbb{Q}_2 = 0,1454227, \quad \mathbb{Q}_3 = 0,1517904,$$

y los valores del ángulo θ_1 y θ_2 se calculan con (8.60):

$$\theta_1 = 302,9368561^\circ, \quad \theta_2 = 305,9447780^\circ,$$

de las que se puede calcular el argumento de latitud del pericentro: $\omega = 123,3317422^\circ - 302,9368561^\circ = -179,6051139^\circ = 180,3948861^\circ$. También: $\omega = 126,3542515^\circ - 305,94477801^\circ = -179,5905265^\circ = 180,4094735^\circ$. Tomando el promedio entre ambos, tenemos:

$$\omega = 180,4021798^\circ.$$

El valor de la excentricidad se puede calcular con (8.61): $e = 0,2476497$, o también con (8.62): $e = 0,247736$. Tomando el valor promedio, se tiene:

$$e = 0,2476931.$$

El semieje mayor a se calcula entonces con (8.63):

$$a = 2,7898982 \text{ u.a.},$$

siendo el movimiento medio dado por (4.59) ($m_2/m_1 = 0$ para este tipo de casos): $n = 0,2115054^\circ/\text{d}$.

Finalmente, con los valores de la anomalía verdadera en los tiempos t_1 y t_2 , permite determinar la anomalía excéntrica:

$$E_1 = 314,2229120^\circ, \quad E_2 = 316,7809879^\circ,$$

y la anomalía media de referencia es:

$$M_1 = 324,3914010^\circ, \quad M_2 = 326,4993562^\circ,$$

de las cuales se puede determinar el tiempo de paso por el perihelio con relación al tiempo t_1 :

$$t_0 = 2\,456\,392,5 - 1533,7335163 = 2\,454\,858,7664837,$$

o con relación al tiempo t_2 :

$$t_0 = 2\,456\,402,5 - 1543,6925132 = 2\,454\,858,8074868,$$

lo cual da, tomando el promedio:

$$t_0 = 2\,454\,858,7869853 = 6^h 53^m \text{ TT del 27 de enero del 2009}$$

Al hacer el cálculo de las posiciones angulares con estos elementos orbitales (el proceso se realizó con el valor de M_1 como anomalía media de referencia para el tiempo t_1) para los tres tiempos en cuestión (los datos de la posición Tierra son los mismos que están al inicio de este ejercicio) obtenemos los siguientes resultados:

$\alpha_1 = 23^h 16^m 42,27^s$	$\alpha_2 = 23^h 35^m 24,94^s$	$\alpha_3 = 23^h 46^m 38,71^s$
$\delta_1 = 4^\circ 4' 43,78''$	$\delta_2 = 5^\circ 54' 44,62''$	$\delta_3 = 7^\circ 0' 51,67''$
$\Delta\alpha = 1,01^s$	$\Delta\alpha = 1,18^s$	$\Delta\alpha = 1,29^s$
$\Delta\delta = 2,94''$	$\Delta\delta = 3,9''$	$\Delta\delta = 4,44''$

donde $\Delta\alpha$ y $\Delta\delta$ corresponden a las diferencias en valor absoluto de las ascensiones rectas y declinaciones, respectivamente, entre los valores observados y los calculados con el conjunto de elementos preliminares hallados.

Problemas

8.1 Un objeto de masa despreciable en órbita alrededor del Sol posee las siguientes componentes del vector posición y velocidad con respecto al plano del Ecuador Celeste: $x' = -2,32791156$ u.a., $y' = -0,80227612$ u.a., $z' = -0,35673637$ u.a.; $\dot{x}' = 0,00554700$ u.a./d, $\dot{y}' = -0,00883579$ u.a./d y $\dot{z}' = -0,00261369$ u.a./d, correspondientes al instante 26,0 de junio de 2015 (TT). Determinar el tipo de órbita en la que se desplaza y sus elementos orbitales con relación al plano de la Eclíptica.

Resp. Elíptica, $a = 2,42152141$ u.a., $e = 0,18479305$, $\Omega = 202,44598740^\circ$, $\omega = 107,13869188^\circ$, $i = 6,02979307^\circ$, $M_r = 271,92847594^\circ$ (26,0 de junio 2015 (TT)).

8.2 Las componentes del vector posición y velocidad del cometa McNaught con respecto al plano fundamental son: $x = -2,57961310$ u.a., $y = -1,46709088$ u.a., $z = -1,23199012$ u.a.; $\dot{x} = -0,00850280$ u.a./d, $\dot{y} = 0,01015010$ u.a./d y $\dot{z} = 0,00297724$ u.a./d, correspondientes al instante 20,0 de agosto de 2005 (TT). Con tales datos determinar el tipo de órbita y sus elementos orbitales.

Resp. Parabólica, $q = 3,19393775$ u.a., $\Omega = 155,85899889^\circ$, $\omega = 294,20696215^\circ$, $i = 152,76699862^\circ$, $t_0 = 2453565,9999$ (14,5 de julio de 2005).

8.3 Mostrar que la anomalía verdadera en la órbita parabólica puede determinarse a partir de las componentes del vector posición \vec{r} y velocidad $\dot{\vec{r}}$ de acuerdo con:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{2q/\mu}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}{2q - r}.$$

8.4 Un asteroide es observado en tres tiempos distintos y se determinaron sus correspondientes coordenadas angulares (referidas a la Eclíptica media y equinoccio del 2000,0), a saber: $t_1 = 2,0$ de marzo de 2015 (TT), $\alpha = 23^h56^m58,06^s$, $\delta = -1^\circ45'16,56''$; $t_2 = 11,0$ de marzo de 2015 (TT), $\alpha = 0^h12^m21,75^s$, $\delta = -0^\circ9'12,92''$ y $t_3 = 23,0$ de marzo de 2015 (TT), $\alpha = 0^h33^m1,96^s$, $\delta = 1^\circ58'58,21''$. Determinar sus correspondientes elementos orbitales asumiendo órbita elíptica.

Resp. $a = 2,942346$ u.a., $e = 0,140953$, $\Omega = 150,240547^\circ$, $\omega = 226,796048^\circ$, $i = 3,096072^\circ$, $M_r = 351,368341^\circ$ (2,0 de marzo del 2015 (TT)).

8.5 En el punto A, que representa la cima del monte Everest (con altura de 8848 m sobre la superficie terrestre), se lanza un objeto con una velocidad de 8000 m/s (ver figura 8.8). Determinar el semieje mayor, la excentricidad de la órbita y el ángulo ϑ entre el vector posición y velocidad requerido para que el objeto choque con la superficie terrestre en el punto B de tal manera que el ángulo θ sea igual a 330° . Asumir que la Tierra es esférica (excepto por la presencia del Everest) con una radio (1 RT) igual a 6378 140 m.

Resp. $a = 1,026091$ RT, $e = 0,0291224$, $\vartheta = 87,674731^\circ$.

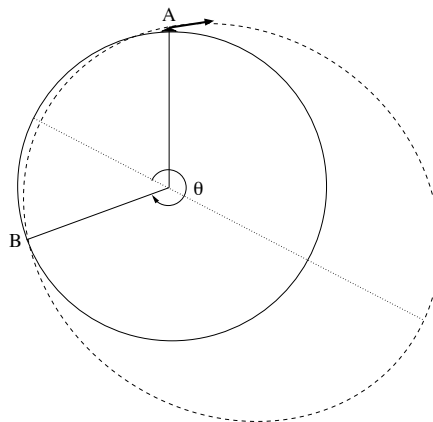


Figura 8.8. Trayectoria elíptica de un objeto que se arroja desde el punto A (cima del Everest) y que impacta sobre la superficie de una Tierra esférica en el punto B.

8.6 Un misil norcoreano fue lanzado desde el punto A y la fase propulsada finalizó en el punto B (ver figura 8.9). El alcance del misil (arco AD) fue de 950 km y alcanzó una altura máxima sobre la superficie terrestre de 4475 km. Al momento de la inyección (punto B) la altura con respecto a la superficie de la Tierra era de 650 km.

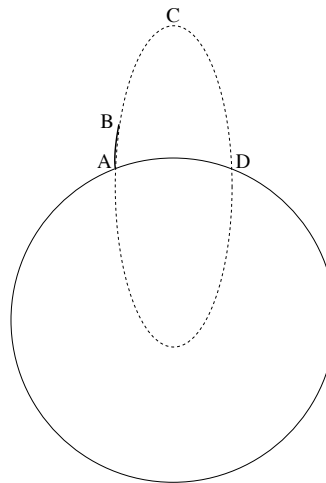


Figura 8.9. Trayectoria elíptica de un misil cuya fase propulsada es el arco AB y su fase inercial es la trayectoria desde B hasta D.

Suponiendo que la Tierra es esférica con radio de 6378,14 km y que el arco de la fase propulsada (AB) coincide con el arco de la trayectoria elíptica como se muestra en la figura, determinar el semieje mayor y la excentricidad de la elipse correspondiente. Así mismo, determinar el tiempo t transcurrido desde la inyección que tarda el misil en colisionar con la Tierra en el punto D.

Resp. $a = 5586,86 \text{ km}$, $e = 0,996314$, $t = 51^m 43^s$.

Bibliografía, lecturas recomendadas y notas históricas adicionales

Dentro de los autores que explican de forma sencilla la determinación orbital con varias observaciones está Moulton (1914), Danby (1962) y McCuskey (1963), que no solo abordan el método de Gauss sino también el denominado “de Laplace”. Libros dedicados por entero a la determinación orbital de objetos en el Sistema Solar se pueden encontrar los de Herget (1948), Escobal (1965) y la excelente obra, abundante en ejemplos, de Dubyago (1961). En lo que respecta a aspectos puntuales, recomendamos Batte, Mueller y White (1971) para examinar varios términos adicionales de las series f y g . Así mismo, se recomienda Plummer (1918), Dubyago (1961) y Danby (1962) en el que se expone el caso interesante de la determinación de una órbita circular con solo dos observaciones. El método de Gauss está bien descrito en el artículo bajo la palabra “Planeta” de la Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo-Americana Hermanos de Espasa-Calpe (volumen 45, pág. 332).

Los libros más recientes, incluidos los de astrodinámica, abordan la determinación orbital dirigida más hacia satélites artificiales. Es el caso de Curtis (2005), Beutler, Mervart y Verdun (2005), Xu (2008), Montenbruck y Gill (2011) y, en particular, Tapley, Schutz y Born (2004).

Antes de mediados del siglo XVIII a nadie se le ocurrió proponer un método de determinación orbital que permitiera conocer una órbita elíptica con pocas observaciones y con periodos de tiempo poco espaciados entre ellos. La razón es evidente: no existía la necesidad. El Sistema Solar, salvo por los satélites de Júpiter y Saturno y uno que otro cometa, estaba integrado por los mismos cuerpos con los que los astrónomos de la antigüedad estaban familiarizados, por lo que, habiendo un sinnúmero de datos observacionales de los planetas (esto es, disponiendo de datos observacionales en cualquier posición orbital a través de la realización de muchos periodos), las órbitas de estos estaban muy bien determinadas. Los estudios de determinación orbital se concentraron en las órbitas parabólicas aplicados a cometas. La dificultad estriba en calcular la órbita con pocas observaciones, con tiempos cortos entre ellas y poder realizar estas sin lugar a equívocos, ya que, en numerosos casos, no suele existir una segunda temporada de observaciones. El mismo Newton propuso un método de determinación de órbita parabólica con tres observaciones (libro 3, proposición 41 de *Los Principios*) el cual, con algunas modificaciones, fue el utilizado por Edmond Halley en sus estudios de órbitas cometarias. La determinación de órbitas parabólicas también ocupó el interés de Euler y de Lagrange e incluso fue el motivo para proponer un premio por parte