Ch1 风险管理与金融衍生物

2019 年 10 月 8 日
9:53

符号说明

K	交割价格	敲定价格
T	交割日	到期日
S_T	交割日原生资产价格	到期日原生资产价格
V_T	在交割日的收益	在到期日的收益

P_T	总收益
p	期权金
S_t	t 时刻原生资产价格
V_t	t时刻期权价格 $=V(S_t,t)$

1 风险和风险管理 2 远期合约与期货 3 期权

2019 年 10 月 8 日
9:54

风险——结果的不确定性 P1

1. 回避风险
    a. 放弃风险带来的获益机会
    b. 保留获益机会，愿付出一定代价
2. 承担风险
    投机，甘愿用资金冒险

金融衍生物——风险管理工具，价值依赖原生资产（标的资产）

风险管理基本策略：套期保值（或对冲）P2

1. 远期合约 P2
    在未来确定时间（交割日），确定价格（交割价）购资产。
    多头：购入方　　空头：销售方　#V-S 图 P2

$V_T = S_T - K$	多头方
$V_T = K - S_T$	空头方

    场外交易 OTC
2. 期货
    在未来确定时间，确定价格购资产。
    场内交易，价格依赖市场
3. 期权 P3
    在未来可在确定时间（到期日），确定价格（实施价格/敲定价格）购资产。但也可以不买（实施）。
    看涨期权：购入原生资产　　看跌期权：卖出
    欧式：只能在到期日实施　　美式：任意工作日实施

到期日期权的收益 #V-S 图 P4

$V_T = (S_T - K)^+$	看涨
$V_T = (K - S_T)^+$	看跌

期权是未定收益

到期日持有人总收益　期权价值减去期权金 #P-S 图 P5

$P_T = (S_T - K)^+ - p$	看涨
$P_T = (K - S_T)^+ - p$	看跌

4 期权定价 5 交易者类型

2019 年 10 月 8 日
10:35

期权的定价决定于原生资产价格的变化，因此变化随机 P5
原生资产价格确定，期权价格就确定了

$V_t=V(S_t,t)$ ——建立偏微分方程确定V

V_T确定为期权收益

$V_T = (S_T-K)^+$	看涨
$V_T = (K-S_T)^+$	看跌

期权定价问题是求$V = V(S,t),(0 \le S < \inf, 0 \le t \le T)st$

$V(S,t) = (S-K)^+$	看涨
$V(S,t) = (K-S)^+$	看跌

t=0,股价S_0问期权金

$p=V(S_0,t)=?$

是倒向问题

交易人群:
1.套期保值者 两面下注避免损失
例 P6 英镑汇率
2.投机者 用资金冒险，投入少量资金（期权金）进行投机
例 P7 投资股票
3.套利者 获取瞬时无风险利益（给我也整一个
一旦有套利机会，套利者就会把机会用光，使其变为无套利。
因此前提无套利原理是可行的。

Ch2 无套利原理

2019 年 10 月 8 日
9:53

符号说明

S_t	风险资产价格
c	看涨
p	看跌
大写	美式
小写	欧式
r	无风险利率

B	无风险资产
S	风险资产
ϕ	投资组合
V	价值

1 金融市场与无套利原理

2019 年 10 月 8 日
9:54

考虑无风险资产B与n个风险资产S_i构成的金融市场，都是时间t的函数。
在时段$[t0,t1]$内的收益$B_{t1}-B_{t0}$,回报$\frac{B_{t1}-B_{t0}}{B_{t0}}$ p9
无风险资产回报确定，而风险资产的回报不确定，是一个随机变量。

投资策略为取投资组合ϕ:

$$\phi = \alpha B + \sum_{i=1}^{n} \phi_i S_i$$

称$\{\alpha, \phi_i\}$为投资策略。严格说是t的函数，但两个相邻交易日间不变。

$V_t(\phi)$是投资组合在时刻t的值，简写为ϕ_t。

自融资 在整个时段$[0,T]$，内投资策略没有改变资金。p10

def2.1 自融资投资策略在$[0,T]$内**存在套利机会**，如果存在$t^* \in [0,T)$，使得

$$V_{t^*}(\phi) = 0$$

有

$V_T(\phi) \geq 0$	$\mathrm{Prob}\{V_T(\phi) > 0\} > 0$

def2.2 任意自融资投资策略ϕ在任意$[0,T]$内时段不存在套利机会，则称市场在$[0,T]$内**无套利**。

th2.1 市场无套利，对任意两个投资组合，若　　（必须写全）

$V_T(\phi_1) \geq V_T(\phi_2)$	$\mathrm{Prob}\{V_T(\phi_1) > V_T(\phi_2)\} > 0$

那么$\forall t \in [0,T)$，有　P11

$$V_t(\phi_1) > V_t(\phi_2)$$

col2.1 市场无套利，对任意两个投资组合，若

$$V_T(\phi_1) = V_T(\phi_2)$$

那么$\forall t \in [0,T)$，有　P12

$$V_t(\phi_1) = V_t(\phi_2)$$

2 欧式期权定价估计及平价公式 3 美式期权定价估计及提前实施

2019年10月8日

9:54

基本假设

市场无套利

证券交易无费用，**不付红利**

无风险利率 r 为常数

th2.2 欧式期权不等式（复利）p13

$\left(S_t - Ke^{-r(T-t)}\right)^+ < c_t < S_t$	$\left(Ke^{-r(T-t)} - S_t\right)^+ < p_t < Ke^{-r(T-t)}$

th2.3 平价公式 p14

$$c_t + Ke^{-r(T-t)} = p_t + S_t$$

th2.4 一切$t \in [0,T]$ p15

$C_t \geq (S_t - K)^+$	$P_t \geq (K - S_t)^+$

th2.5 美式看涨不需提前实施。 p16

$$C_t = c_t$$

但美式看跌在时刻 t 如果有

$$S_t < K\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)$$

则必须实施。

th2.6 美式估计式 p17

$$S_t - K < C_t - P_t \leq S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

4 期权定价对敲定价格的依赖关系

2019 年 10 月 8 日
9:54

基本假设

市场无套利

证券交易无费用，**不付红利**

无风险利率 r 为常数

th2.7 $K_1 > K_2$,相同到期日欧式看涨 p18

$$0 < c_t(K_2) - c_t(K_1) < K_1 - K_2$$

th2.8 $K_1 > K_2$,相同到期日欧式看跌 p20

$$0 < p_t(K_1) - p_t(K_2) < K_1 - K_2$$

th2.9 欧式期权价格是K的凸函数。若$K_1 > K_2$

$$K_\lambda = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_2\ (0 \le \lambda \le 1)$$

则

$$c_t(K_\lambda) \le \lambda c_t(K_1) + (1-\lambda)c_t(K_2)$$

$$p_t(K_\lambda) \le \lambda p(K_1) + (1-\lambda)p_t(K_2)$$

th2.10 欧式期权价格的齐次性。$\forall \alpha > 0$ p21

$$c_t(\alpha S_t, \alpha K) \le \alpha c_t(S_t, K)$$

$$p_t(\alpha S_t, \alpha K) \le \alpha p_t(S_t, K)$$

以上定理对于美式期权同时成立。

对于美式和支付红利可见课后习题 p23

Ch3 期权定价的离散模型——二叉树方法

2019 年 10 月 8 日
9:53

符号说明

ρ	1+rT 增长因子
q^u	$\frac{\rho-d}{u-d}$概率
η	1+qT 红利（外汇的无风险利率）
q	$\frac{\rho/\eta - d}{u-d}$
u,d	u>d 风险资产变化率

1 栗子 2 单时段-双状态模型

2019 年 10 月 8 日
9:54

栗子 p24

用 S 和 c 形成适当的投资组合使得它是无风险的，这就是对冲的思想。

$$S_0 \nearrow S_T^u = S_0 u \qquad V_0 \leftarrow V_T^u$$
$$S_0 \searrow S_T^d = S_0 d \qquad V_0 \leftarrow V_T^d$$

$$B_0 \to B_T = B_0\rho$$

def3.1 对给定的期权V，在相反方向交易Δ份额的原生资产S，使得投资组合Π: $p27$

$$\Pi = V - \Delta S$$

无风险，这称为Δ −对冲。

由

$$\Pi_T = V_T - \Delta S_T = \rho \Pi_0 \qquad \Pi_T^d = \Pi_T^u$$

可解得

$$V_0 = \frac{1}{\rho}\Pi_T + \Delta S_0 = \frac{1}{\rho}(q^u V_T^u + q^d V_T^d) \qquad d < \rho < u$$

$$q^u = \mathrm{Prob}_Q\{S_T = S_T^u\} = \frac{\rho - d}{u - d}$$

$$q^d = \mathrm{Prob}_Q\{S_T = S_T^d\} = \frac{u - \rho}{u - d}$$

def 3.2 $\frac{S_t}{B_t}$称为在t时刻风险资产S的贴现价格或相对价格。 p28

th3.1 在概率测度 Q 下（th3.2 市场无套利则 Q 存在）

$$\frac{V_0}{B_0} = E^Q\left(\frac{V_T}{B_T}\right)$$

ps 风险中性测度

$$\frac{S_0}{B_0} = E^Q\left(\frac{S_T}{B_T}\right)$$

def3.3 在无风险资产 B 与风险资产 S 构成的金融市场中，若存在投资组合 p29

$$\Phi = \alpha S + \beta B$$

使得当t=T时该投资组合与期权V的值相同，则称Φ为期权V的复制。

th3.2 在由风险资产S和无风险资产B组成的市场中，$d < \rho < u \Leftrightarrow$市场无套利。 p30

3 欧式期权定价的二叉树方法（I）——不支付红利

2019 年 10 月 8 日
9:54

期权的生存区间[0,T]细分成 N 个子空间，每个区间是一个单时段-双状态模型，则 S 的演化构成一个二叉树 p33

记

$$S_\alpha^n = S_0 u^{n-\alpha} d^\alpha \qquad V_\alpha^n = V(S_\alpha^n, t_n) \qquad 0 \le n \le N, 0 \le \alpha \le n$$

则 p34

$$V_\alpha^n = \frac{1}{\rho}(q V_\alpha^{n+1} + (1-q) V_{\alpha+1}^{n+1}) \qquad q = \frac{\rho - d}{u - d}$$

递推得到

$$V_\alpha^{N-h} = \frac{1}{\rho^h} \sum_{l=0}^{h} C_h^l q^{h-l} (1-q)^l V_{\alpha+l}^N$$

为了好看改写的式子 p35

离散的平价公式 p36

$$c_\alpha^{N-h} + K\rho^{-h} = p_\alpha^{N-h} + S_\alpha^{N-h}$$

ps 离散鞅 p37

4 欧式期权定价的二叉树方法（II）—— 支付红利

2019 年 10 月 8 日
9:54

只考虑连续支付红利 η为红利（外汇的无风险利率） p39

$$S_0 \begin{cases} \nearrow S_T^u\eta = S_0 u\eta \\ \searrow S_T^d\eta = S_0 d\eta \end{cases}$$

$B_0 \to B_T = B_0\rho$

由

$\Pi_T = V_T - \Delta S_T\eta = \rho\Pi_0$	$\Pi_T^d = \Pi_T^u$

可解得 p41

$V_0 = \frac{1}{\rho}(q^u V_T^u + q^d V_T^d)$	$d\eta < \rho < u\eta$
$q^u = \mathrm{Prob}_Q\{S_T = S_T^u\eta\} = \frac{\rho/\eta - d}{u - d}$	
$q^d = \mathrm{Prob}_Q\{S_T = S_T^d\eta\} = \frac{u - \rho/\eta}{u - d}$	

递推式

$V_\alpha^n = \frac{1}{\rho}(qV_\alpha^{n+1} + (1-q)V_{\alpha+1}^{n+1})$	$q=\frac{\rho/\eta-d}{u-d}$

为了好看改写的式子 p42

只有q不一样 V仍是$(S-K)^+$或$(K-S)^+$

5 美式期权定价的二叉树方法

2019 年 10 月 8 日
9:54

看跌 p43

$V_\alpha^n = \max\{\frac{1}{\rho}(qV_\alpha^{n+1} + (1-q)V_{\alpha+1}^{n+1}), (K - S_\alpha^n)^+\}$	$q=\frac{\rho-d}{u-d}$

假设ud=1,S_0=1，则

$S_j = u^j$	$j \in Z$
$t_n = n\Delta t$	$n \in N$

则

$$V_j^n = \max\{\frac{1}{\rho}(qV_{j+1}^{n+1} + (1-q)V_{j-1}^{n+1}), (K - S_j)^+\}$$

th3.4 若V_j^n是美式看跌期权的定价，则 p44

$V_j^n \ge V_{j+1}^n$	$V_j^{n-1} \ge V_j^n$

th3.5 对每一个t_n，存在j=j_n，st

$V_j^n = (K - S_j)^+$	$j \le j_n$
$V_j^n > (K - S_j)^+$	$j = j_n + 1$
$V_j^n \ge (K - S_j)^+$	$j \ge j_n + 2$

且

$j_{N-1} = -1$	$j_{i+1} - 1 \le j_i \le j_{i+1}$

j 组成的边界是最佳实施边界，左侧为终止持有区域，右侧为继续持有区域。p47

6 美式看涨与看跌期权定价的对称关系式

2019年10月8日
9:54

th3.6 若 ud=1，对于具有相同到期日的美式期权，有 p49

$$C(S,K;\rho,\eta;t)=P(K,S;\eta,\rho;t)$$

lemma3.1 若

$q=\dfrac{\rho/\eta-d}{u-d}$	$q'=\dfrac{\eta/\rho-d}{u-d}$

则

$\dfrac{qu}{\rho}=\dfrac{1-q'}{\eta}$	$\dfrac{(1-q)d}{\rho}=\dfrac{q'}{\eta}$

lemma3.2 美式期权价格的齐次性。p50

ps 对称关系式对欧式也成立

th3.7 对有相同到期日的美式期权，若 p52

$$\frac{K_p}{S_p}=\frac{S_c}{K_c}$$

则

$$\frac{C(S_c,K_c;\rho,\eta;t)}{\sqrt{S_cK_c}}=\frac{P(S_p,K_p;\eta,\rho;t)}{\sqrt{S_pK_p}}$$

col 取$S_c=c,K_p=K_c=K$，则

$S_p=\dfrac{K^2}{S}$	$C(S,K;\rho,\eta;t)=\dfrac{S}{K}P(\dfrac{K^2}{S},K;\eta,\rho;t)$