

Linear regression

رگرسیون خطی

مثال: قد و وزن

تعدادی اندازه

داده ها

$$X = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$$

$$x^i \in \mathbb{R}^2$$

$$x_1^i \equiv \text{قد (cm)}$$

$$n = 1000$$

$$x_2^i \equiv \text{وزن (kg)}$$

$$X \in \mathbb{R}^{n \times 2}$$

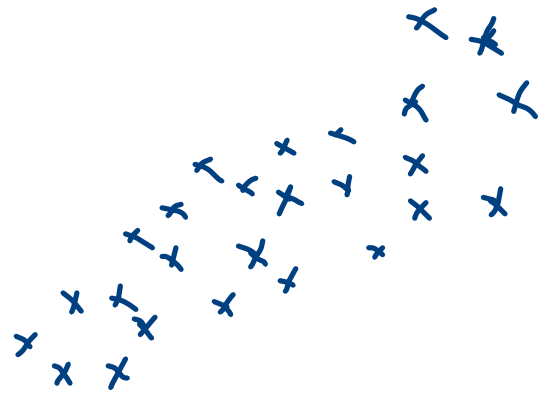
$$x^1 = \begin{bmatrix} 175 \\ 82 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 180 \\ 93 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 175 & 82 \\ 180 & 93 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -x^{1T} - \\ -x^{2T} - \\ -x^{nT} - \end{bmatrix}$$

آپایان با داشتن قد و وزن نفر را
پیشی کرد!



وزن
(x_2)
متغیر وابسته
هدف

target +

$n = 1000$

$n = 100$

$\phi = 168$

وزن = ?

قد (x_1)

متغیر مستقل

تبدیل پیشی وزن را به عدد

۱- رگرسیون عقرب ✓

L.R.

مدل

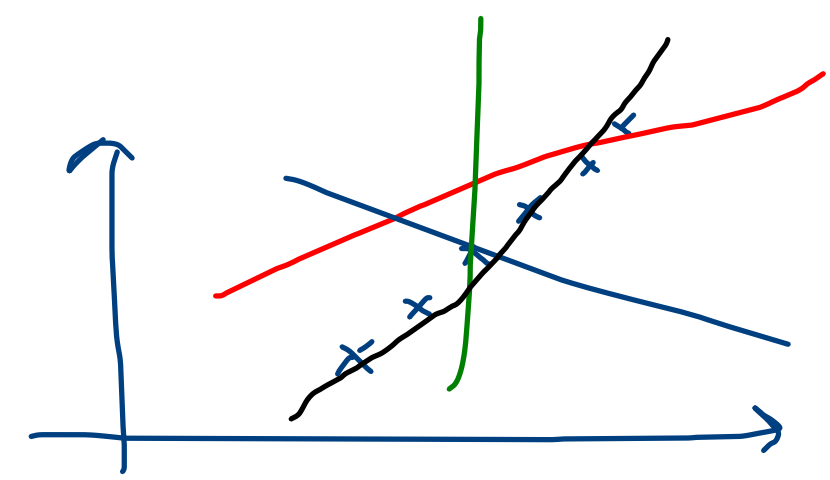
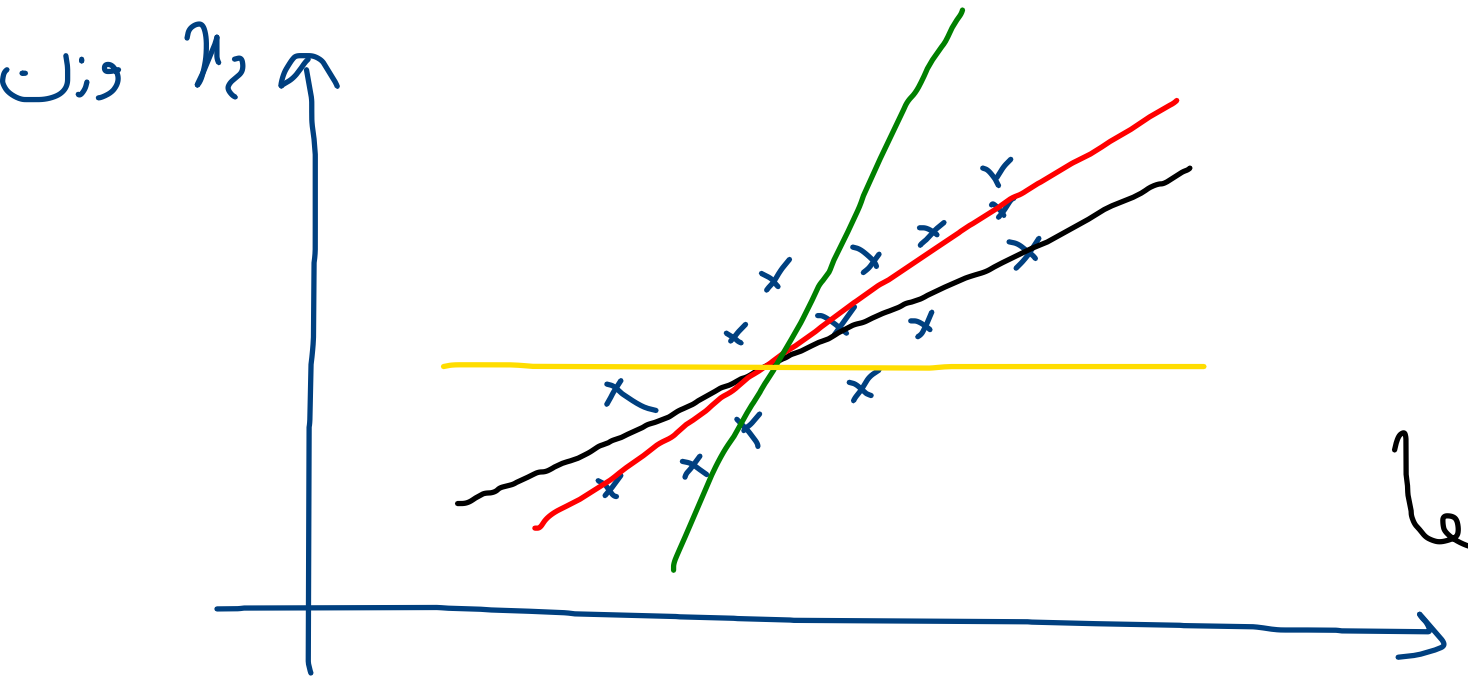


کنشیم بر اساس داده ها

①

معادله؟ انتخاب —
 معادله ها را می توانیم

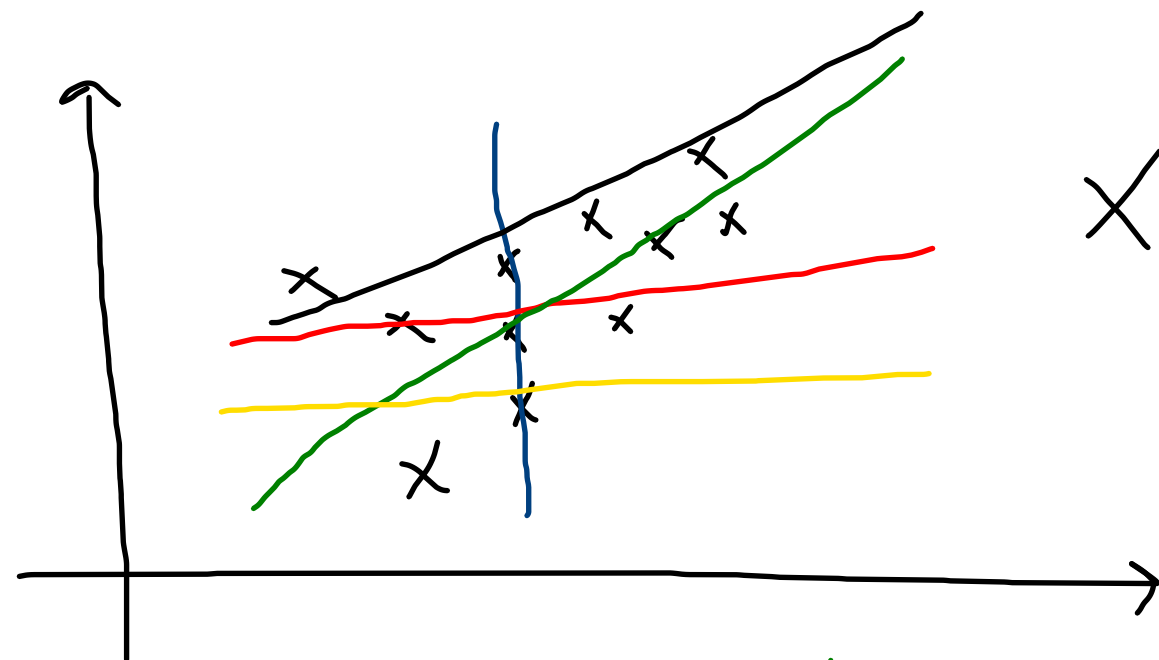
در فضای دوبعدی خط
 معادله را می توانیم



Objective function

تابع هدف

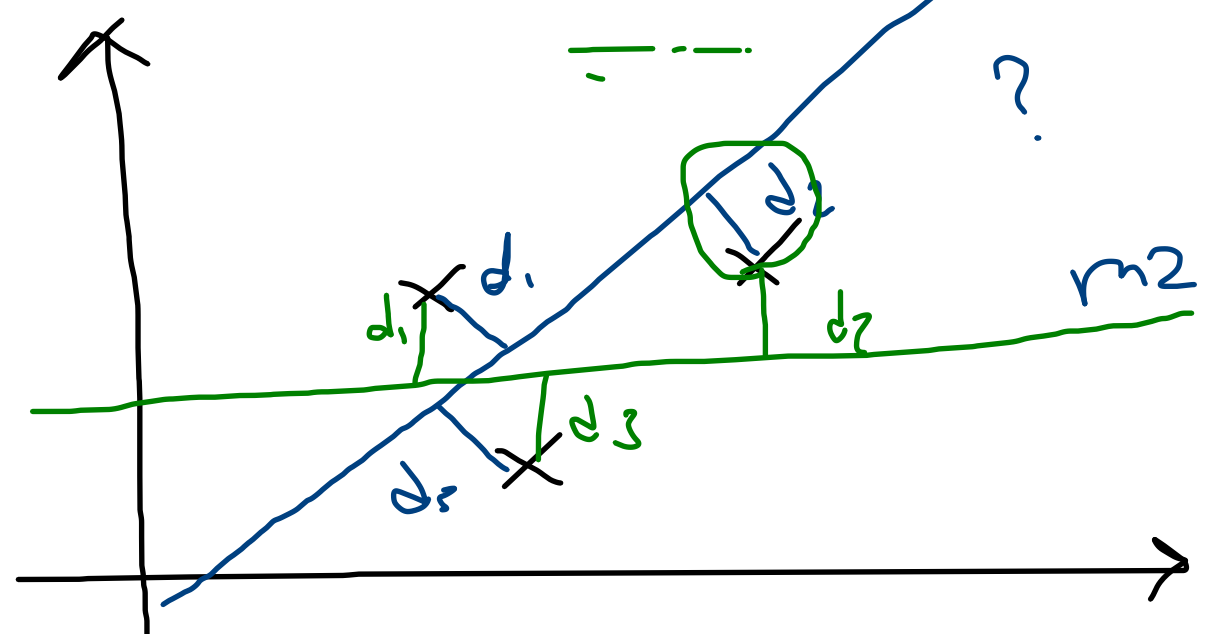
معادله هدف = تابع هدف



بسیار
 تابع کلاسی ۱ \rightarrow $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$ ✓

۸

Score = ...



۵ $\Rightarrow d_1 + d_2 + d_3$
 ۶ $\Rightarrow d_1 + d_2 + d_3$
 Score

۶ $= \sum_i d_i$

۷

Objective function

$$e_i = \text{Score}(x_i, m_i) \quad \text{Score function}$$

$$x_i = \begin{bmatrix} 175 \\ 64 \end{bmatrix}$$

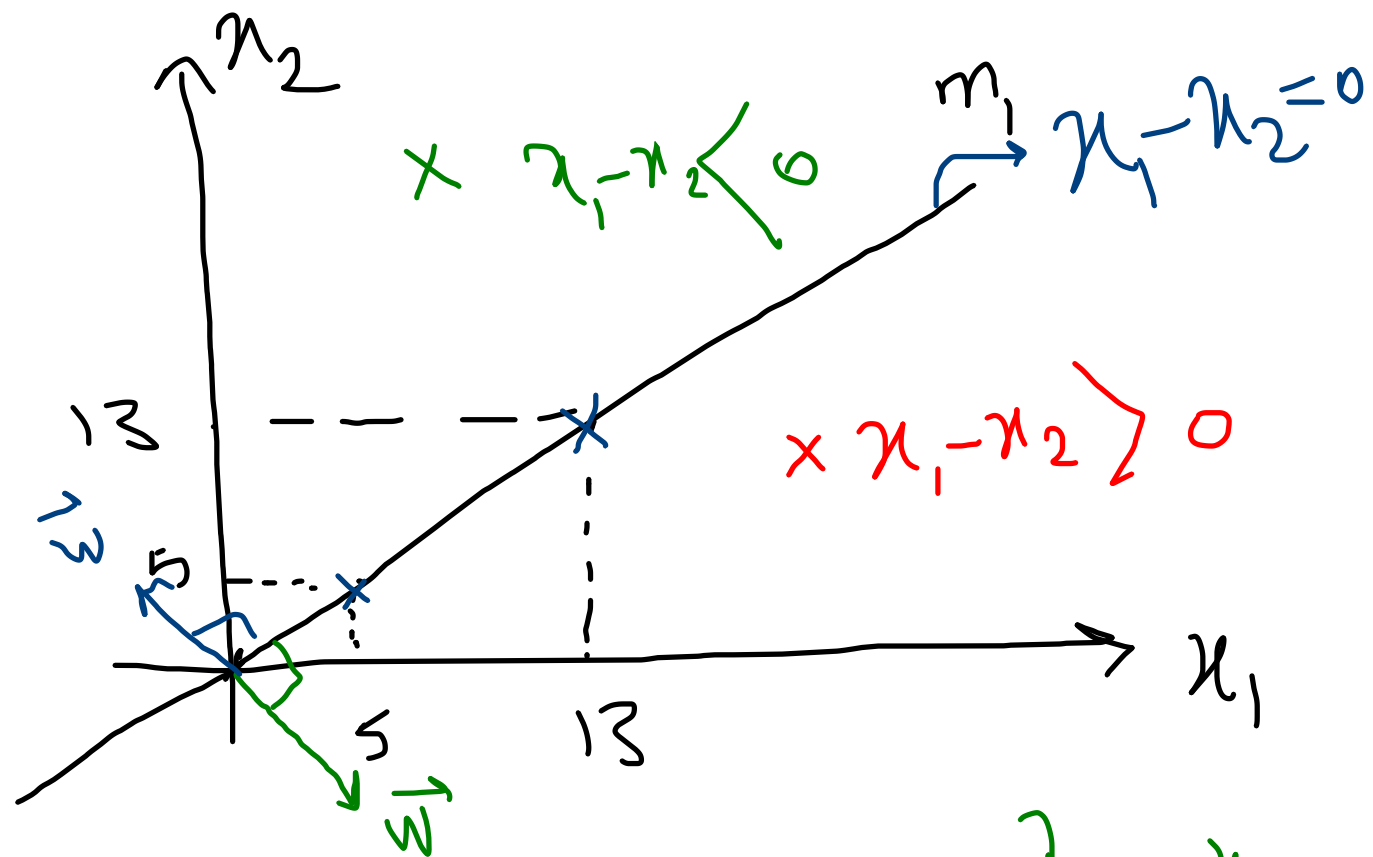
گلم اول: عین تابع حدت

گلم دوم:

عین تابع امتياز

x m_i

حل 6



$$x_1 - x_2 = 0$$

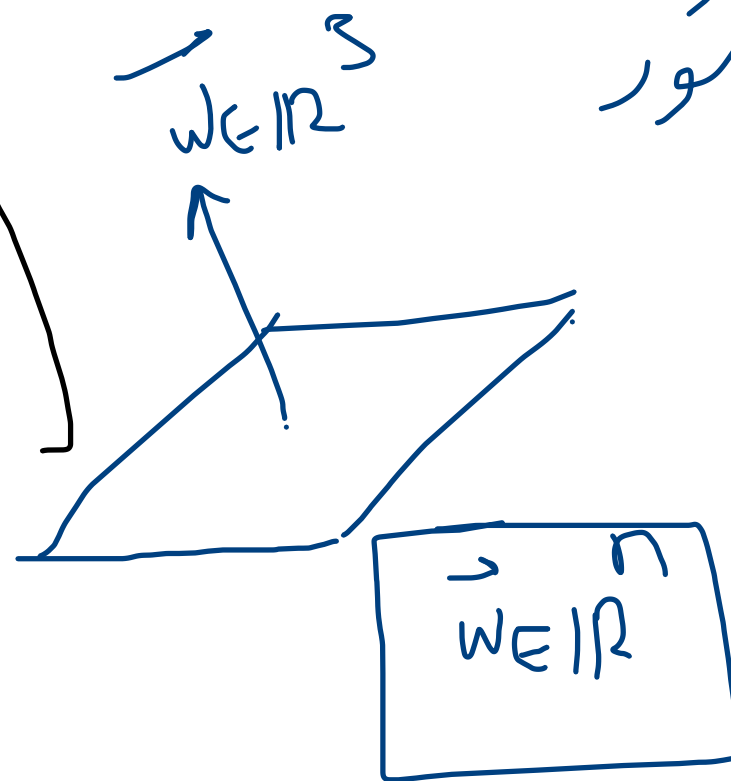
حزبى دى قطبىء طاقى
سفرى نور

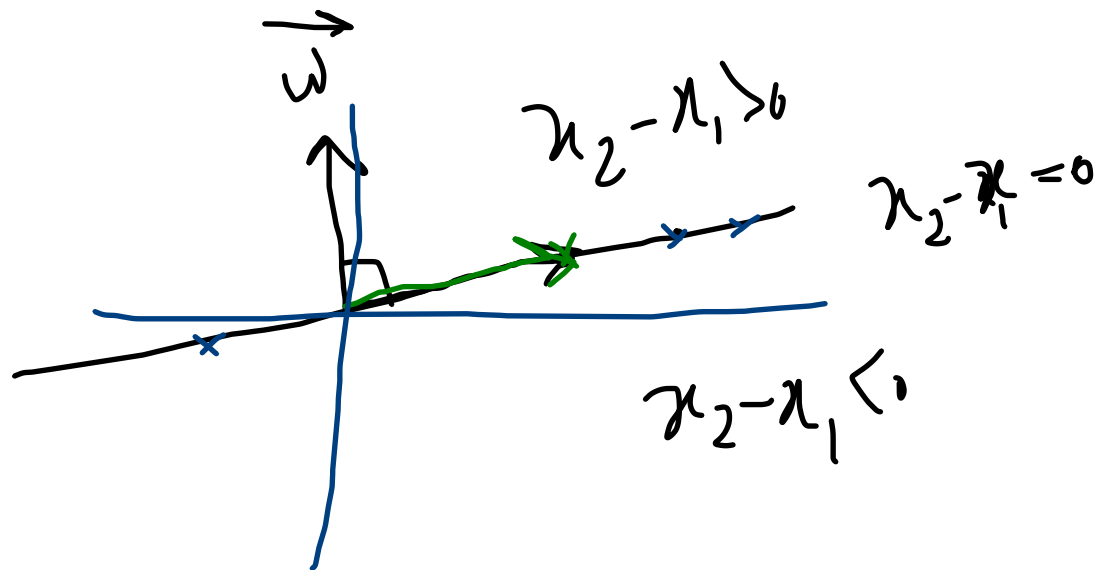
$$w_1, w_2 \quad x_1 - x_2 = 0$$

لء كا فرب

لء كا فرب

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$





$$a^T b$$

$$w^T x = \|w\| \|x\| \cos \alpha$$

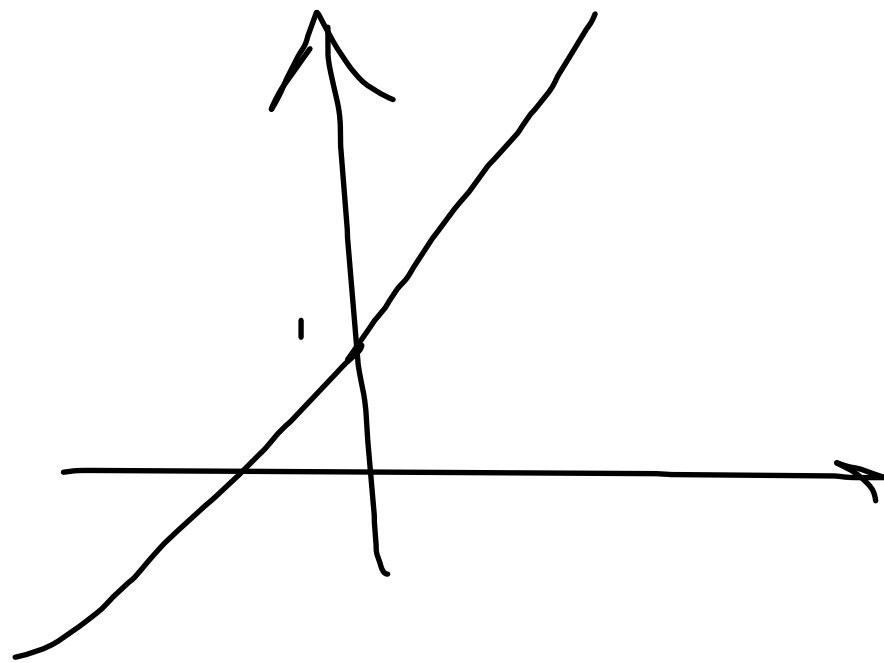
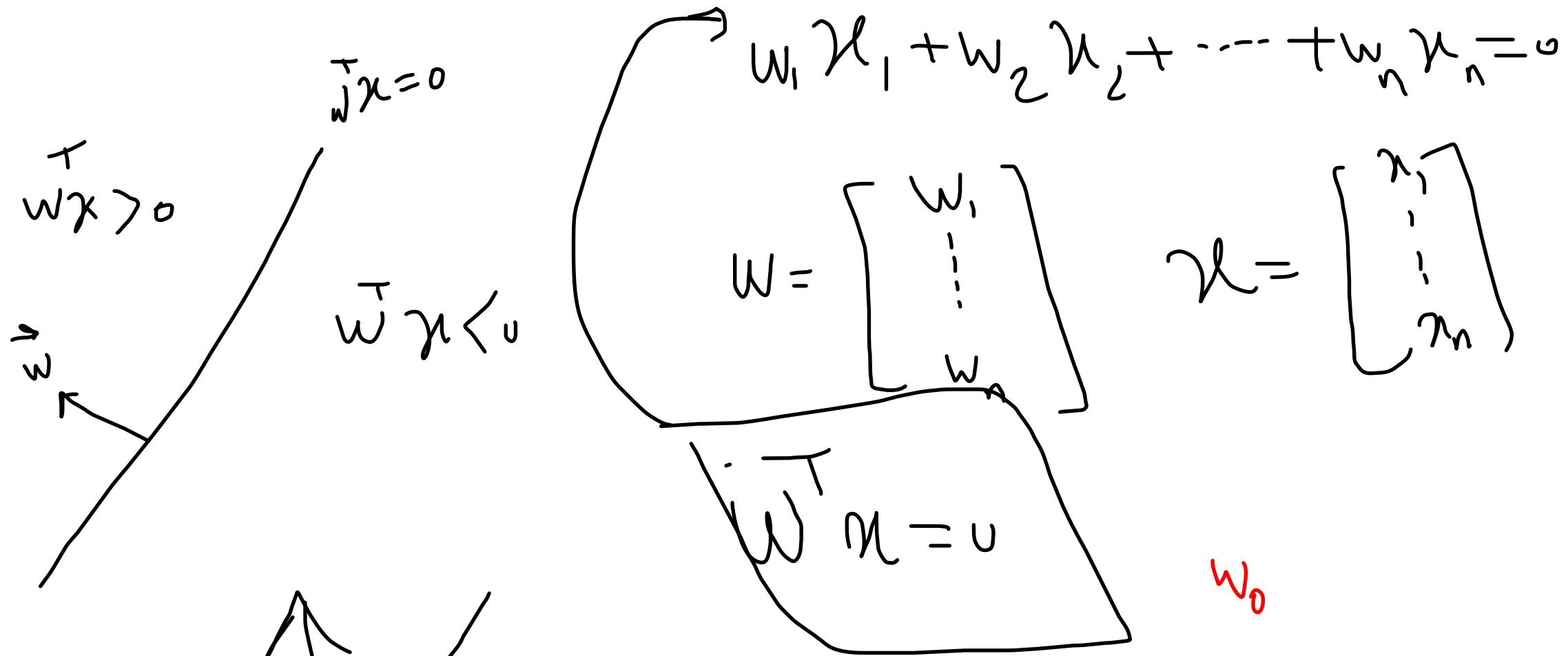
$$\alpha > 90 \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow w^T x < 0$$

$$\alpha < 90 \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow w^T x > 0$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow w^T x = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ iff } \vec{a}^T \vec{b} = 0$$

$$x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = 0$$



$$x_2 - x_1 - 1 = 0$$

"عزف از سبدا"
 bins

$$w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n = 0$$

تمرین فوای عبور کم:

$$\underline{w_0 + w^T x = 0}$$

$$x, w \in \mathbb{R}^n$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$w_0 \quad 1 \in x$$

$$w^T x = 0$$

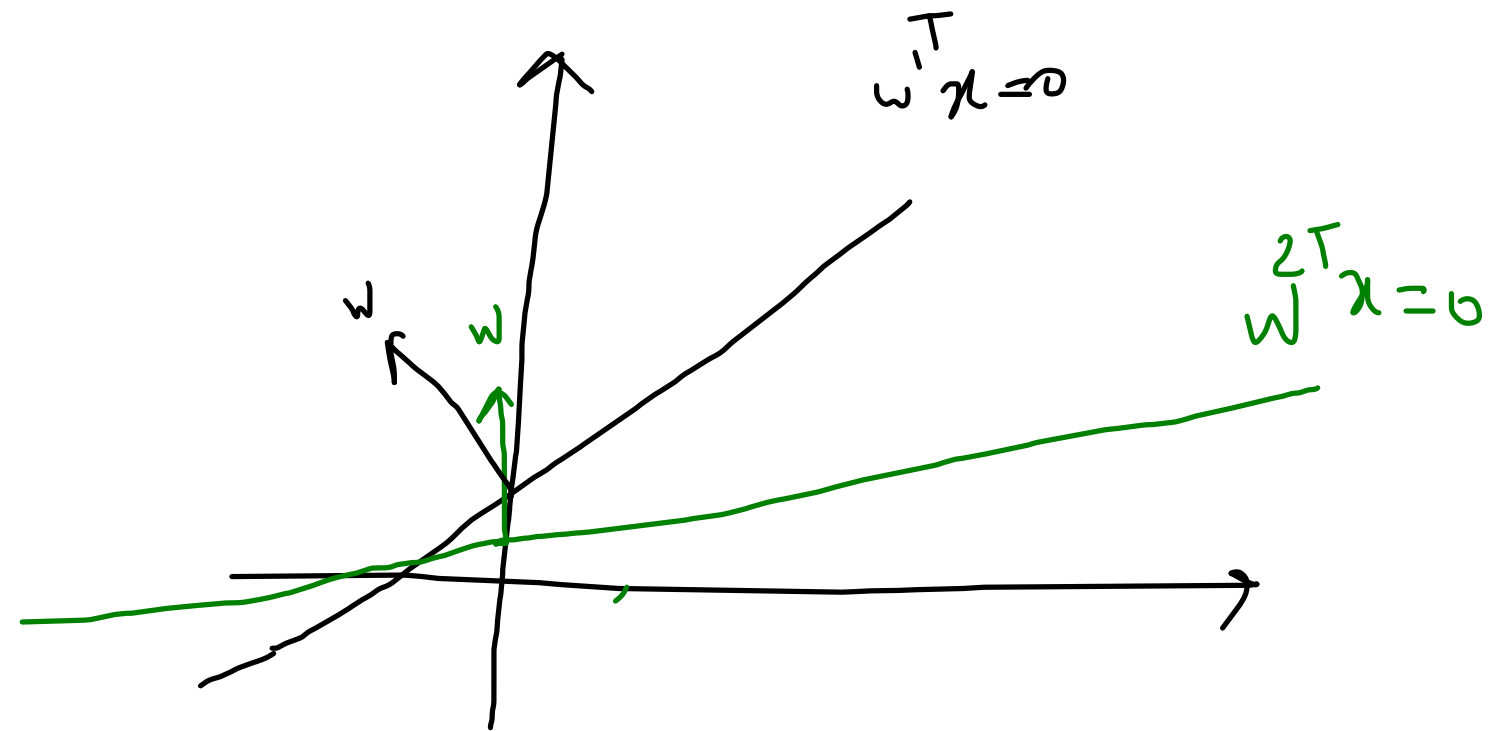
$$w_0 \times 1 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n = 0$$

$$\hat{w}^T \hat{x} = 0$$

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$w^T x = 0$$



$$w \in \mathbb{R}^{n+1}$$

بعد کردن به w !

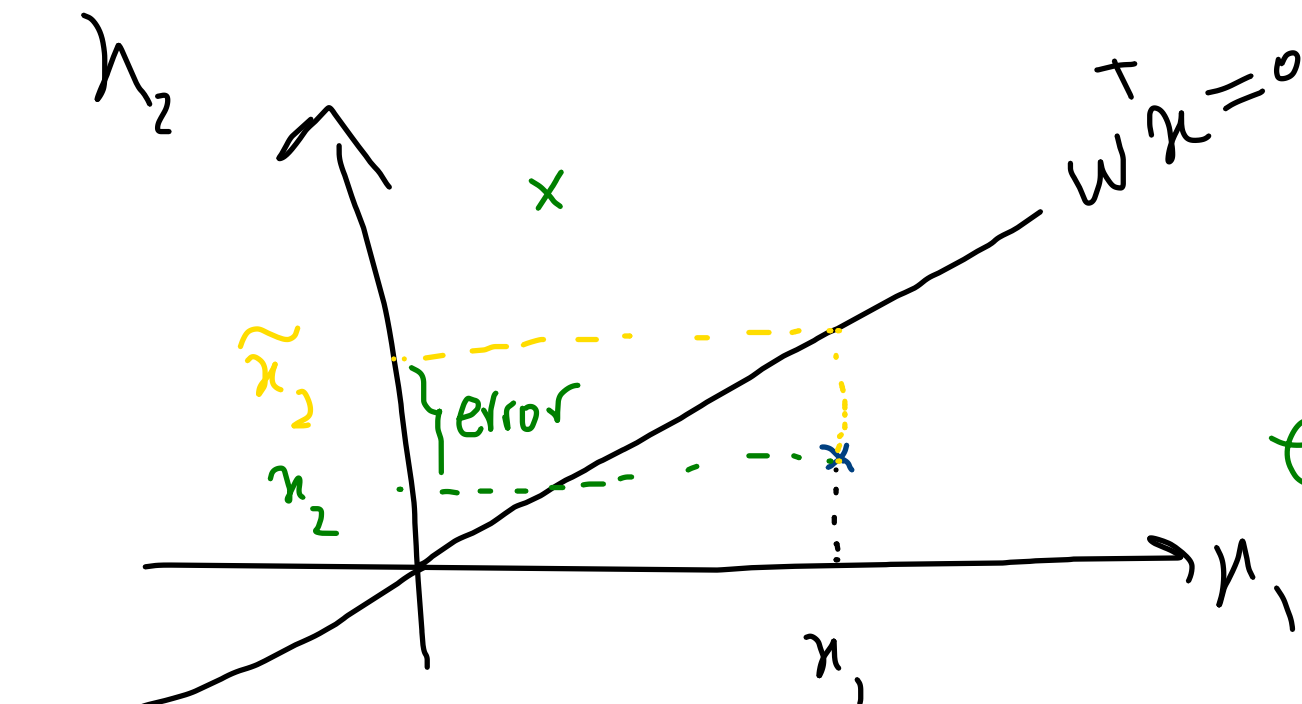
$$w^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w^2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Score}(x^i, w) = w^T x^i =$$

مقدار x^i روی خط میل

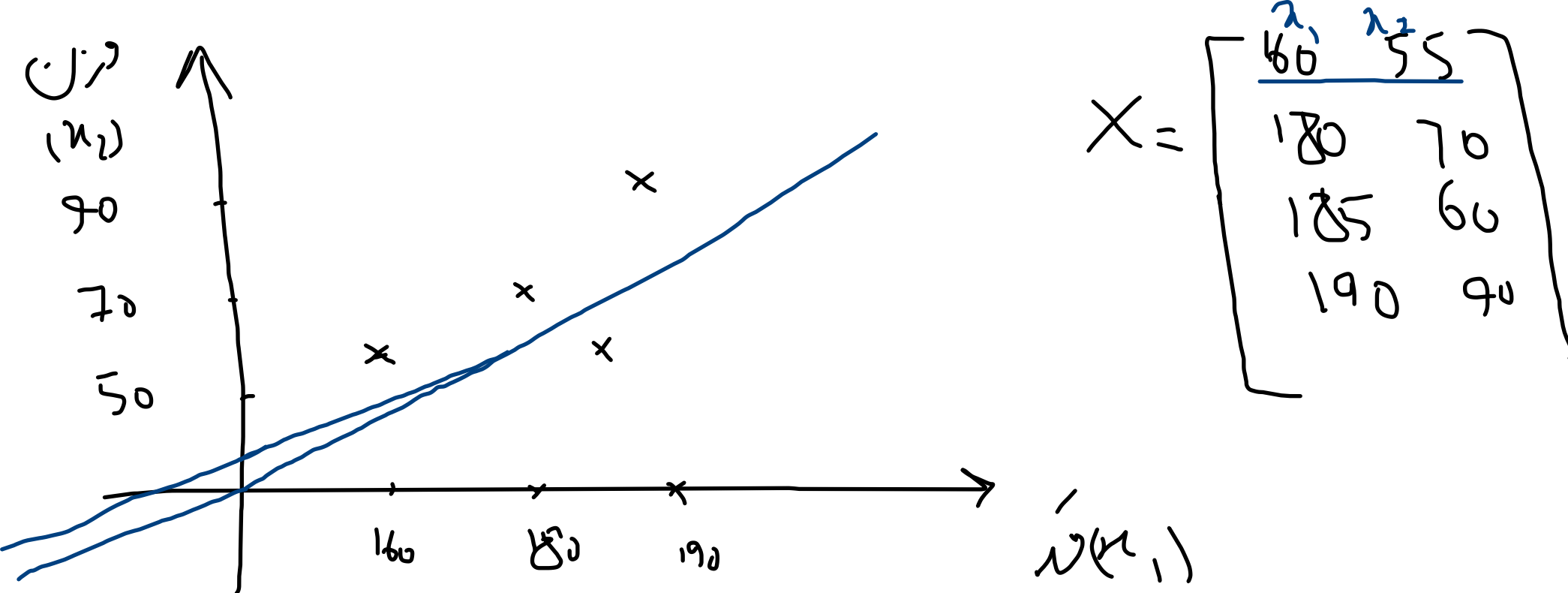
$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\text{error}_i = |x_2 - (\underbrace{w_0 + w_1 x_1}_{\tilde{x}_2?})|$$

تابع هدف

$$J(w) = \sum_{i=1}^n \text{error}_i = \sum_{i=1}^n |x_2^i - (w_0 + w_1 x_1^i)|$$



$$X = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 160 & 55 \\ 180 & 70 \\ 185 & 60 \\ 190 & 90 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} -0.011 \\ -0.014 \end{bmatrix} w_2$$

$$w^2 = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{J(w)}} = ? \sum_{i=1}^4 |x_2^i - (w_0 + w_1 x_1^i)|$$

$$= |55 - (1 + 0.011 \times 160)| + |70 - (1 + 0.011 \times 180)|$$

$$+ |60 - (1 + 0.011 \times 185)| + |90 - (1 + 0.011 \times 190)|$$

$$= 52.24 + 67.02 + 86.91 = 206.17$$

$$J(w) = \sum_i \underbrace{\|x^i - w^T x^i\|}_{\text{norm}}$$

$$w^* = \frac{\partial J(w)}{\partial w} = 0$$

$$\underline{\underline{J(w) = \sum_i \|x^i - w^T x^i\|_2^2}}$$

