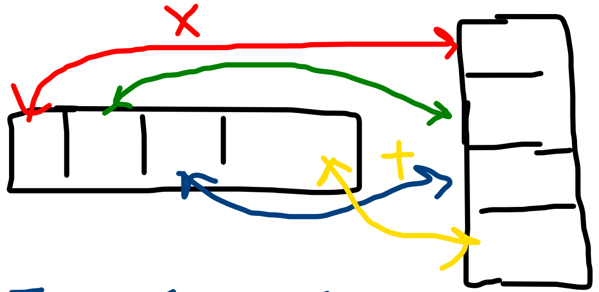
1- Vector-vector product :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.75 \\ -0.5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y} = \sum_i x_i y_i$$



a) $\vec{x}^T y = [1,2,7] \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.75 \\ -0.5 \end{bmatrix} = 1.5 + 1.5 - 3.5 = -0.5$

ضرب نقطه‌ای

inner product

$$\boxed{x^T y \in \mathbb{R}}$$

b) $\vec{x} \odot \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.75 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ -3.5 \end{bmatrix}$

ضرب هادامار, (ضرب درایه‌ای)

$$\boxed{\vec{x} \odot \vec{y} \in \mathbb{R}^n}$$

$$\boxed{x y^T \in \mathbb{R}^{n \times m}}$$

c) ضرب خارجی

outer product

$$x y^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & 0.75 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.5 & 0.75 & -0.5 \\ 3 & 1.5 & -1 \\ 10.5 & 4.55 & -3.5 \end{bmatrix}$$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^m$

a) $x^T y \; (n=m) \in \mathbb{R}$

b) $\vec{x} \odot \vec{y} \; (n=m) \in \mathbb{R}^n$

c) $x y^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

mat $\quad A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$n \Rightarrow$ تعداد سطرها — بُعد

$m \Rightarrow$ تعداد ستون — بُعد

درایه از ماتریس A $\quad a_{ij} \Rightarrow$ ردیف i ام ، ستون j ام

$$A = i \begin{bmatrix} & \vdots^{\,j} & \\ \cdots & a_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & 3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \end{array}_{2 \times 4}$$

$$\boxed{\vec{a}_j \Rightarrow A_{:,j} \quad , \quad \vec{a}_i^{\,T} \Rightarrow A_{i,:}}$$

ستون j ام ، سطر i ام

$$A_{:,3} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A_{2,:}^{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \Longrightarrow$$

1

$$A=\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

نمایش ماتریس بصورت بردار ستونی

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ w_3^T \end{bmatrix}$$

$$w_1^T=[1\ 9\ 5\ 4]$$

$$w_2^T=[5\ 1\ 3\ 1]$$

$$w_3^T=[2\ 7\ 2\ 3]$$

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} \quad \vec{v}_2=\begin{bmatrix}9\\1\\7\end{bmatrix} \quad \vec{v}_3=\begin{bmatrix}5\\3\\2\end{bmatrix} \quad \vec{v}_4=\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}$$

2

$$A=\begin{bmatrix} \leftarrow a_1^T \rightarrow \\ \leftarrow a_2^T \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow a_m^T \rightarrow \end{bmatrix}$$

نمایش ماتریس بصورت بردار سطری

2- matrix-vector product

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad \vec{x} \in \mathbb{R}^{m}$ $\quad \vec{y} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^{n}$

(a) $A \Rightarrow$ rows

$$\vec{y} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} \leftarrow a_1^T \rightarrow \\ \leftarrow a_2^T \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow a_n^T \rightarrow \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} a_1^T \cdot x \\ a_2^T \cdot x \\ \vdots \\ a_n^T x \end{bmatrix} = A\vec{x}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} [1\ 2]\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [3\ 4]\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [5\ 6]\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$y_i = a_i^T x \Leftarrow$ مقدار خانه i ام y برابر است با ضرب داخلی ردیف i ام A در x

$y = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{n\times m} \quad x \in \mathbb{R}^{m}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad$ $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n}$

سطرها ⟸ عرض‌ها

ستون‌ها ⟸ ترکیب‌ها

$$\vec{y} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} | \\ a_2 \\ | \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} | \\ a_n \\ | \end{bmatrix} x_n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \times (-1) + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3- Matrix–Matrix product

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ $C = AB \in \mathbb{R}^{m\times p}$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}}$$

$C = AB \Rightarrow$

① $AB \neq BA$

② $C = AB = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — & b_1^T & — \\ — & b_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & b_n^T & — \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^T$

یک ماتریس

③ $C = AB = A \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} \Rightarrow c_i = Ab_i$

④ $C = AB = \begin{bmatrix} — & a_1^T & — \\ — & a_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_m^T & — \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} — & a_1^T B & — \\ — & a_2^T B & — \\ & \vdots & \\ — & a_m^T B & — \end{bmatrix} \Rightarrow c_i^T = a_i^T B$

⑤ $A(B+C) = AB + AC$

⑥ $(AB)C = A(BC)$

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&-2\\-3&4\end{bmatrix}$$

$$AB=\sum_{i=1}^{2}a_i b_i^T=\underbrace{a_1b_1^T+a_2b_2^T}_{\text{بیرونی}}=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&-2\\3&-6\\5&-10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6&8\\-12&16\\-18&24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&6\\-9&16\\-13&14\end{bmatrix}=AB$$

$$\left[\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}\right]=\left[\begin{bmatrix}-5\\-9\\-13\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}+6\\10\\14\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}-5&6\\-9&16\\-13&14\end{bmatrix}$$

Transpose : A^T $\quad (A^T)_{ij} = A_{ji}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $\quad A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1- $(A^T)^T = A$

2- $(AB)^T = B^T A^T$

3- $(A+B)^T = A^T + B^T$

Identity: $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad I_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$IA = A = AI \implies I_n A = A = A I_m$$

Diagonal: $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad D_{ij} = \begin{cases} d_i & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(5, 3, -2)$$

$$I = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$$