$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

یک نمونه از

sample

ویژگی

feature

attribute

$A_{4\times 3}$

$n \times m$

Dataset => ماتریس

	فشارخون	ضربان	1	2	....
بیمار اول					
⋮					

System of Linear Equations — دستگاه معادلات خطی:

بیان خیلی از مسائل با استفاده از دستگاه معادلات خطی

(فرموله کردن $\Leftarrow$ یعنی یک مدل ریاضی

از جبر خطی برای حل دستگاه معادلات خطی استفاده می‌شود.

۱- محصول شرکت $N_1, N_2, \ldots, N_n$ با استفاده منابع $R_1, R_2, \ldots, R_m$

۲- برای ساخت یک واحد از محصول N_j به مقدار $\boxed{a_{ij}}$ از منبع R_i نیاز باشد.

$i = 1, \ldots, m$
$j = 1, \ldots, n$

$a_{ij} \Rightarrow$ میزان مصرف منبع R_i برای ساخت N_j

هدف (Objective): پیدا کردن بهترین نقشه تولید چه مقدار (x_j) از محصول N_j باید تولید شود که اگر مقدار منبع R_i به میزان b_i باشد، تماماً از آن استفاده کرد.

$x_j \quad j = 1, \ldots, n \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

شکل کلی دستگاه معادلات خطی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

حاصل جمع متغیر ضرب شده از سطر R_2 را ساخت یک معادله باید برابر با b_2 باشد.

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

$b_i \in \mathbb{R}$

برای ساخت معادله N_1 ازلد ضریب متغیر نیاز می‌باشد.

مجهولات $\Rightarrow \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle \in \mathbb{R}^n$

هر چند مقدار که جواب دستگاه باشد جواب مسئله است.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m معادله و n مجهول

دستگاه معادلات خطی:

۱- جواب یکتا ✓

۲- بیش از یک جواب

۳- بدون جواب ✗

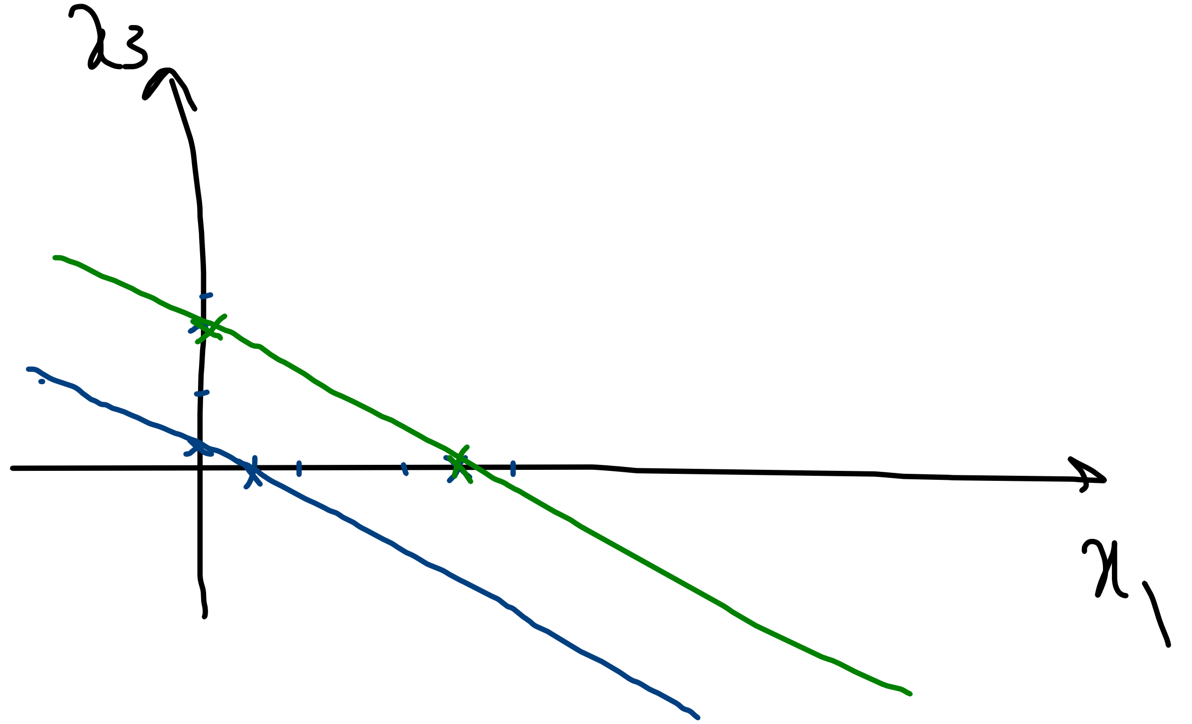
③
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

+

① $2x_1 + 3x_3 = 5$

② $2x_1 + 3x_3 = 1$

در تناقض $\Rightarrow$ جواب ندارد

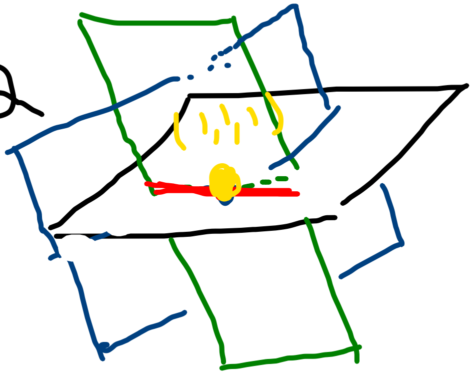


① $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right.$ ①+② ⇒ $2x_1 + 3x_3 = 5$ $\boxed{x_3 = 1}$

$+$

$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right.$

③ ⇒ $\boxed{x_2 = 1}$ $\boxed{x_1 = 1}$



$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle$ تعداد جواب یکتا

② $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ \boxed{2x_1 + 3x_3 = 5} \end{array}\right.$

①+②=③ $\boxed{2x_1 + 3x_3 = 5}$

$\boxed{x_3 = a} \in \mathbb{R}$

$\boxed{x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}a}$

$2x_1 = 5 - 3x_3$

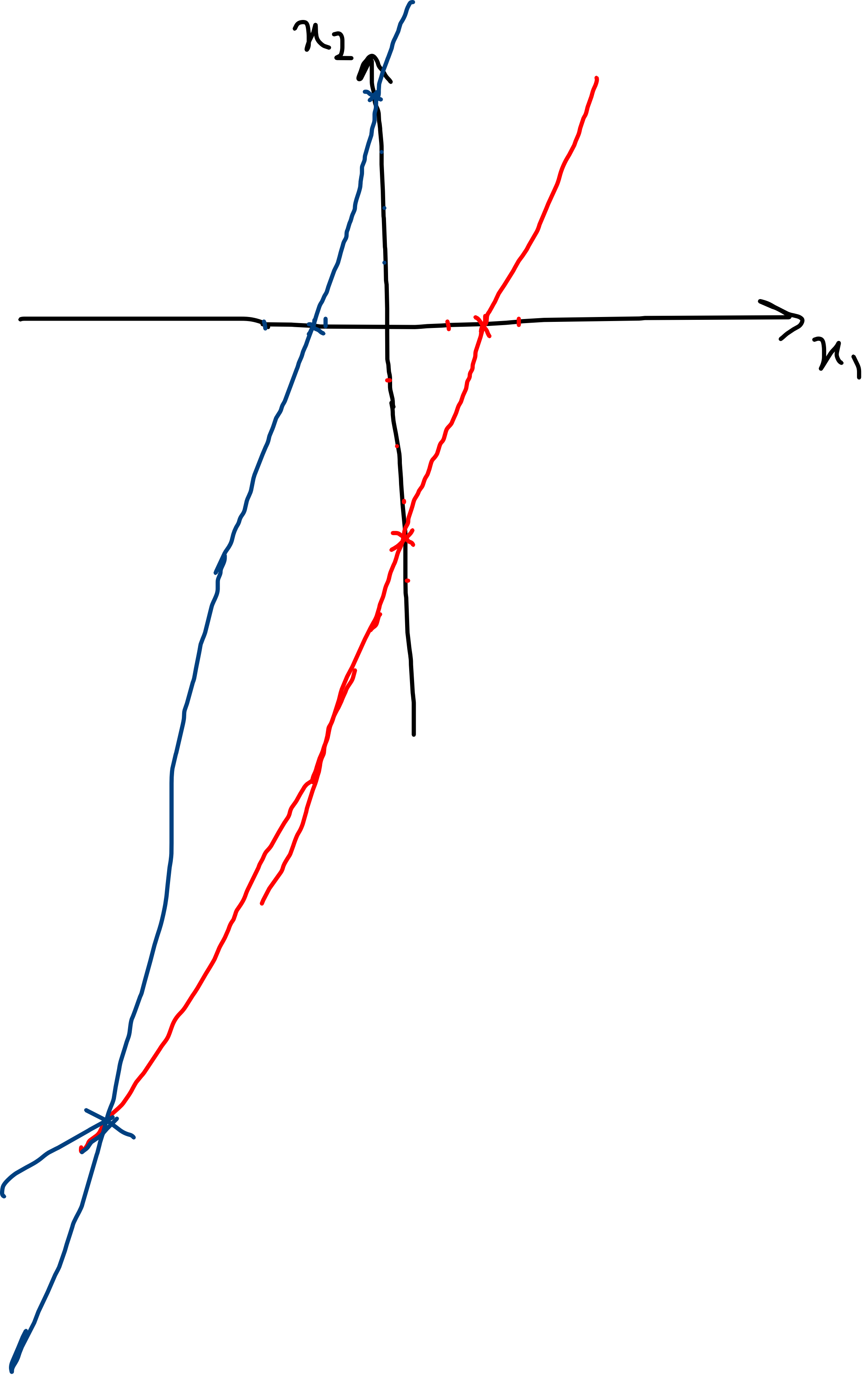
$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3$

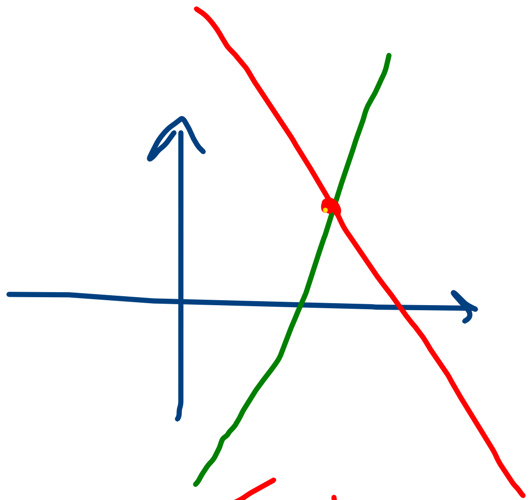
$\langle 2.5 - 1.5a, 0.5 + 0.5a, a \rangle$

$\frac{5}{2} - \frac{3}{2}a + x_2 + a = 3 \Rightarrow$ $\boxed{x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a}$

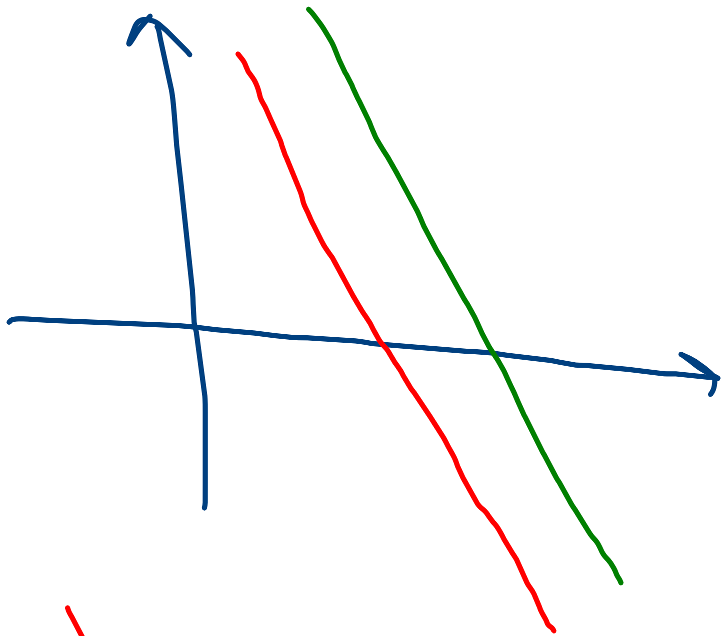
بی‌نهایت جواب.

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 7 & (1) \\ -3x_1 + x_2 = 4 & (2) \end{cases}$$





جواب یکتا



بدون جواب

بی‌نهایت جواب

$$\begin{cases} 2x_1-5x_2+4x_3=12 \\ x_1+x_2-2x_3=7 \\ -x_1+2x_2+x_3=4 \end{cases} \iff x_1\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-5\\1\\2\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}4\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\7\\4\end{bmatrix}$$

$$\vec{t}_1 \quad + \quad \vec{t}_2 \quad + \quad \vec{t}_3$$

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -5 & 4\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\7\\4\end{bmatrix}}$$

صیغه حل ⇐ معادله ماتریسی

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}5\\2\\7\end{bmatrix} \qquad \vec{y}=3\vec{x}=\begin{bmatrix}15\\6\\21\end{bmatrix}$$

$3\in\mathbb{R}$

vector: $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ بُعدی $n \Rightarrow$ بُعد

dimension

① $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{x} + \vec{y}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

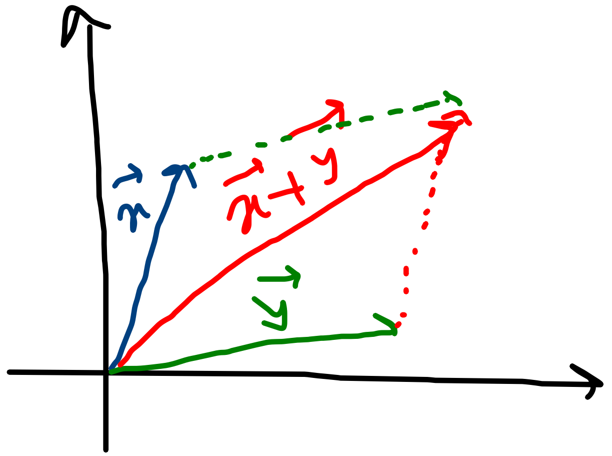
$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

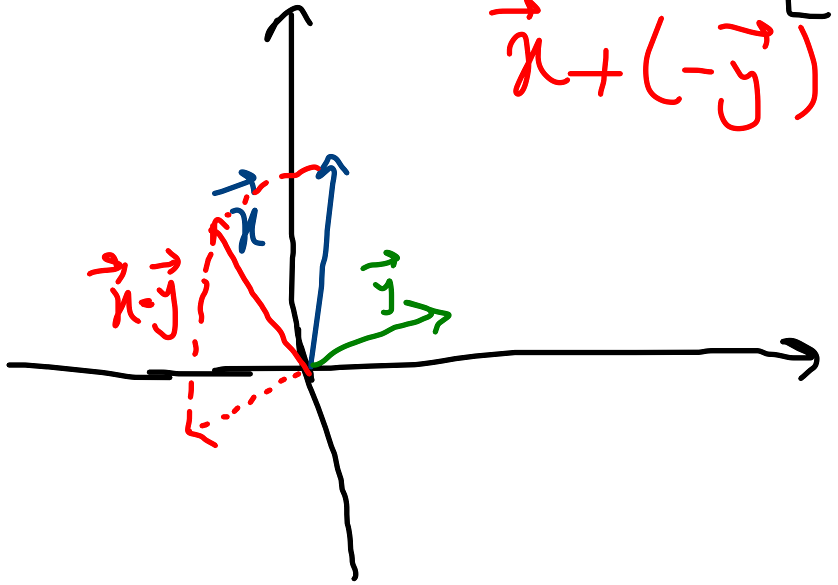
$\vec{t} = \vec{x} - \vec{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$

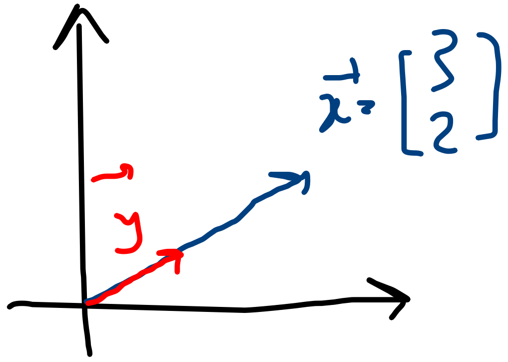
$\vec{x} + (-\vec{y})$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = \alpha \vec{x}$







$\vec{y} = 0.5\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$

dot product $\Longrightarrow$ عددی / اسکالر $\quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + \cdots + x_n \times y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} \cdot \vec{y} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$$

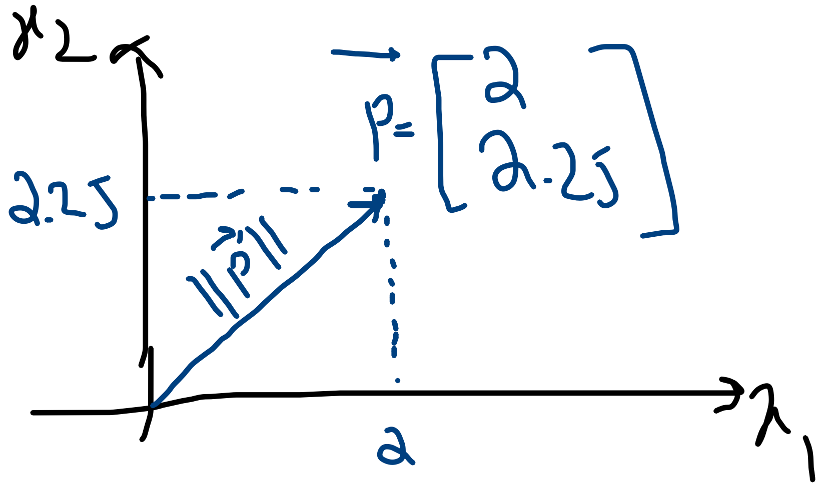
* ضرب نقطه‌ای حالت خاص از ضرب داخلی (inner product) می‌باشد.

1. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
2. $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
3. $\vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_i x_i^2$$

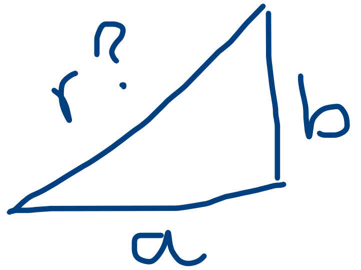
Vector length ⇒ norm

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{2^2 + 2.25^2}$$



$$\vec{p} \in \mathbb{R}^n$$

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\|\vec{p}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \Longrightarrow$$ Euclidian norm (distance)

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \Longrightarrow \|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$$

L_2-norm $\qquad \|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_i x_i^2\right)^{1/2}$ فاصله اقلیدسی

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$p=1$ فاصله منهتن

$p=2$ فاصله اقلیدسی

$p=\infty$

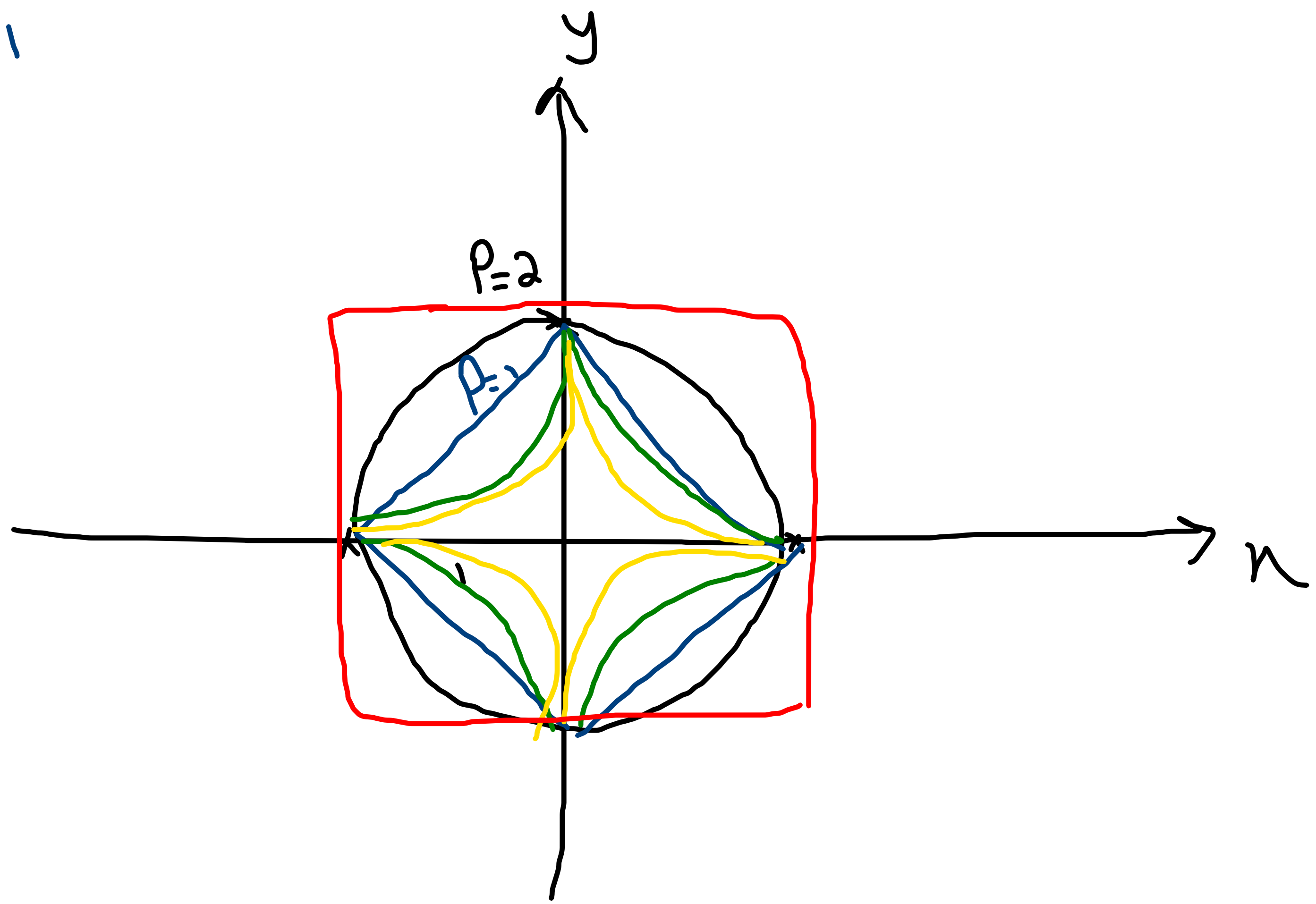
L_1-norm $\Rightarrow \|\vec{x}\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) \leftarrow$ فاصله منهتن / فاصله city-block

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_i(|x_i|)$$

$P=1 \Rightarrow |x|+|y|=1$

$P=2 \Rightarrow x^2+y^2=1$

$P=\infty$



$P=2$

$r^2 = x^2 + y^2$

$$\boxed{x^2+y^2=1}$$