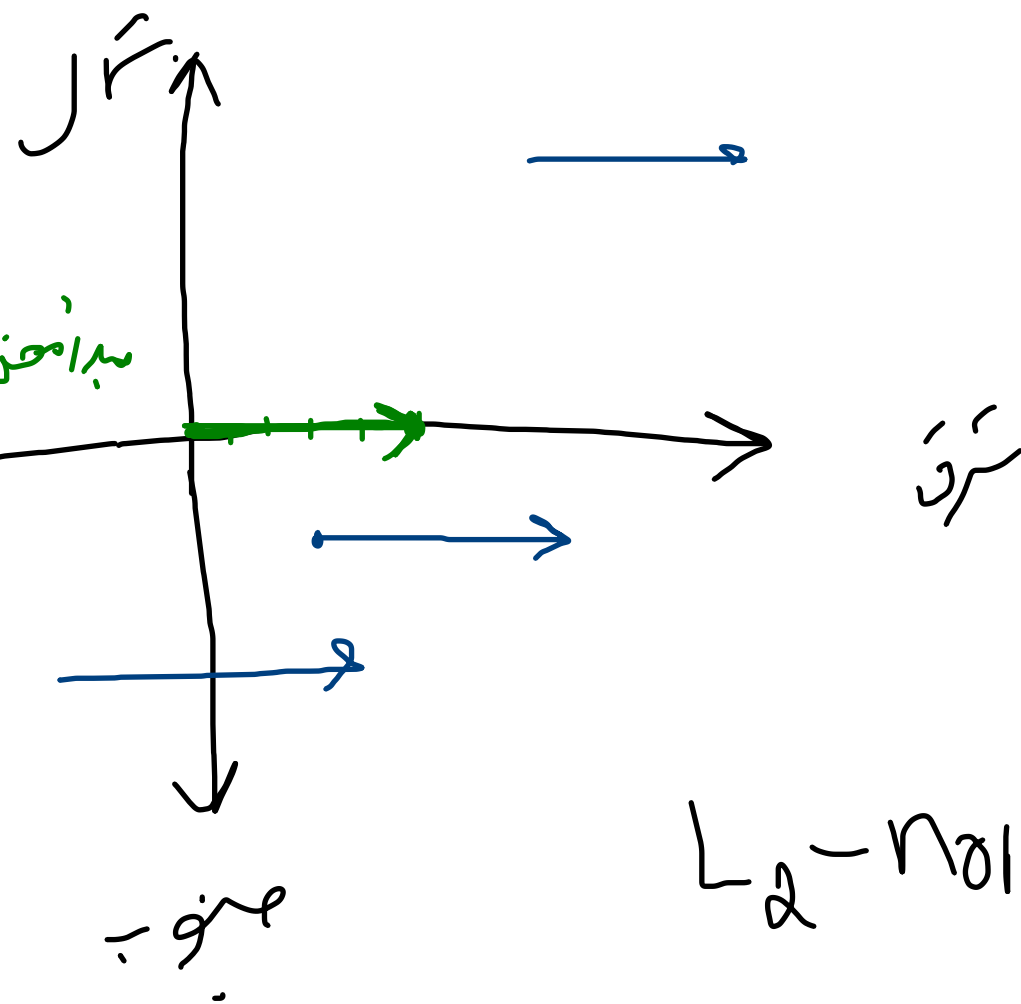


vector  $\Rightarrow$  سرعت + انرژی  
 10 Km/h

مربع

مبدأ حفظ

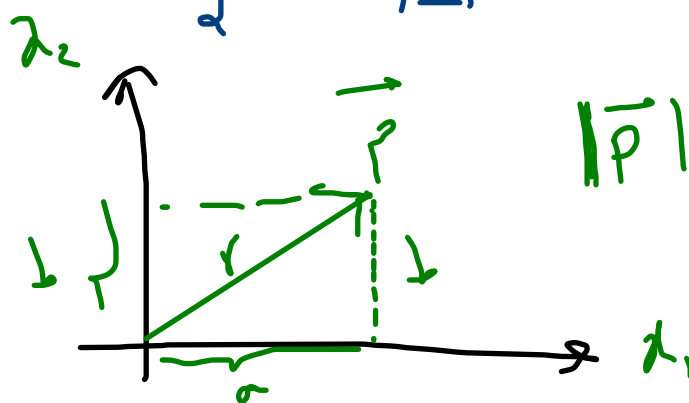


$L_2$ -norm

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

فاصله (مقدار)  $p_2$ -norm



$$\|\vec{P}\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = r$$

$$r^2 = a^2 + b^2$$

(1)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\|\vec{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$p = 1, 2, \infty$$

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$$

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|_2^2 = \sum_i x_i^2$$

مربع طول

مربع طول

sum = 0

while i < n:

sum += x[i] \* x[i]

i += 1

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$p=2$$

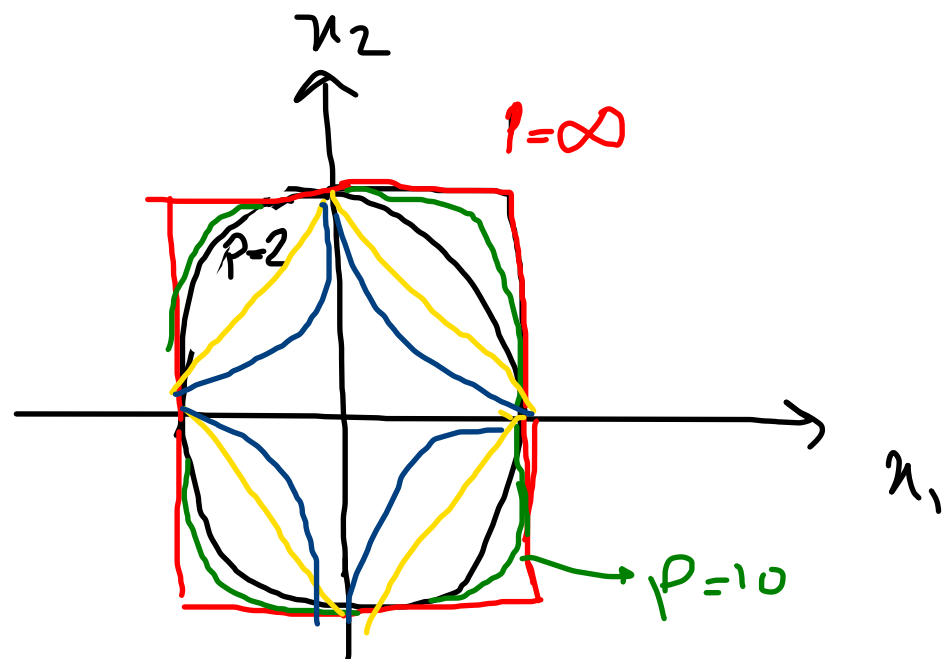
$$p > 2$$

$$p=10$$

$$p=\infty$$

$$p=1$$

$$p=0.5$$



$p=1$  City Block  
 $L_1$ -norm

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1$$

(2)

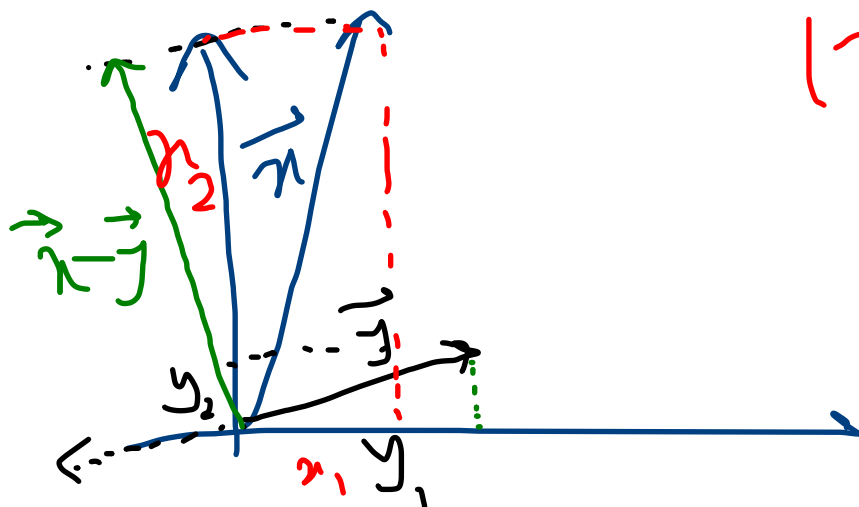
$$\|\vec{x}\|_2^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_i x_i^2$$

المركب - المركب  $\Rightarrow$  المركب

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \sum_i (x_i - y_i)^2 = \text{Euclidean}(\vec{x}, \vec{y})^2$$

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$$



$$\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = \underline{\underline{\vec{x}^T \vec{x}}}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

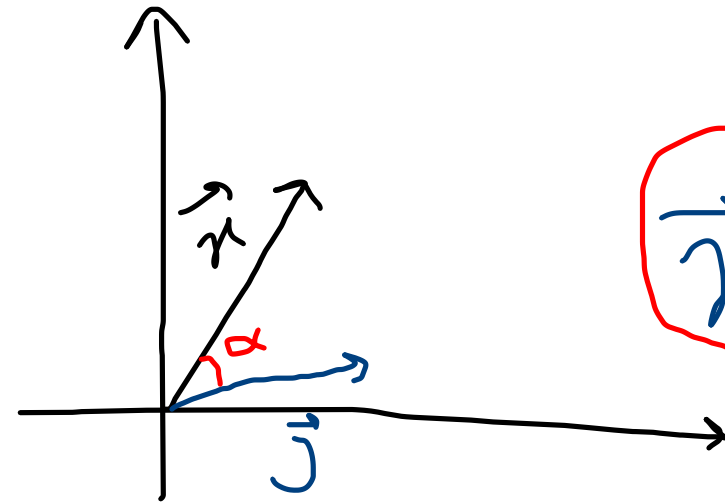
$$\vec{x}^T \vec{x} = \underset{1 \times 2}{[1 \quad 0.5]} \underset{2 \times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}} = 1^2 + 0.5^2 = 1.25$$

$$\|\vec{x}\|^2 = \vec{x}^T \vec{x}$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}^T \vec{x}} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$



$$\vec{x} \perp \vec{y}$$

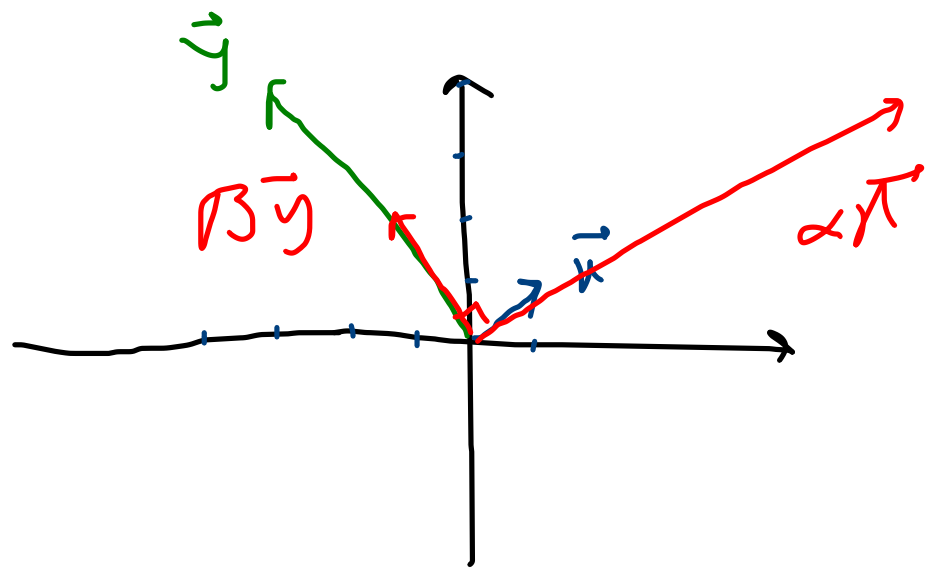
$$\text{iff } \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\text{if } \underline{\underline{\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}}}$$

① اگر دو بردار هم‌جهت یا متضاد باشند  
نه - نقطه از آن صفر نیست.

orthogonal  $\Rightarrow$

اگر حاصل نه - نقطه از دو بردار برابر با  
صفر شود.



$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \neq 0 \quad \vec{x} \perp \vec{y}$$

$$\alpha \vec{x} \cdot \beta \vec{y} = 0$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 1 \times (-4) + 1 \times 4 = -4 + 4 = 0$$

$$\vec{x} \perp \vec{y}$$

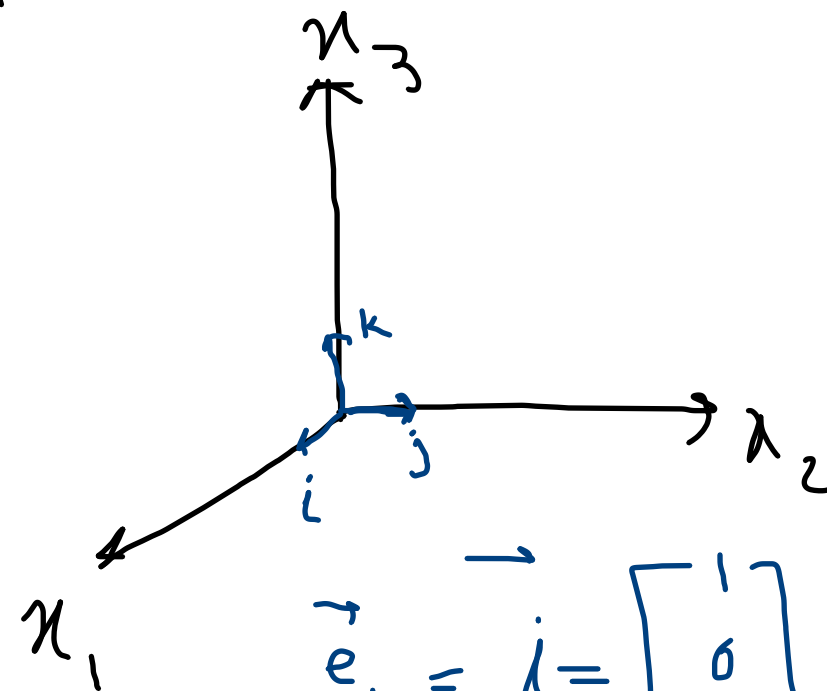
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

۱- بردار صفر  $\vec{0}$

۲- بردار ۱  $\vec{1}$

- 1- Zero Vector :  $\vec{0}_n$   $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$
- 2- One vector :  $\vec{1}_n$   $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_n$
- 3-  $\vec{e}_i$   $= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$   $\vec{e}_i$



$\vec{0}_5$

Unit Vector

$\vec{P} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$  basis vectors

$\vec{P} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

$\vec{r}_i$

$\vec{e}_1 = \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   $\vec{e}_2 = \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$   $\vec{e}_3 = \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.75 \\ 2 \end{bmatrix}$   $\|\vec{e}_i\| = 1$

$= 1.5\vec{e}_1 - 0.75\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$

$= 1.5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.75 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.75 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_2^T \vec{x} = ?$$

$$e_i^T x = x_i$$

$$x[i]$$

numeric Python

numpy

Julia

C++

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{x}\|^2 = \vec{x}^T \vec{x} = \sum_i x_i^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_i |x_i|$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = 3$$



ماتریس: آرگولر دد مجری ← سطر

← ستون

بردار  $\Leftarrow$  ستون = 1

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$$

تینسور  $\Leftarrow$  Tensor آرگولر صافی با ابعاد  $n_1, n_2, \dots, n_N$

$(1, n) =$  row vector  $[ \text{---} ]$

$(m, 1) =$  column vector  $[ \text{---} ]$

غیرینه ها  $\Rightarrow$  سطر  
ویرانه ها  $\Rightarrow$  ستون

ماتریس تعریف:

$$m, n \in \mathbb{N}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \in \mathbb{R}^{mn}$$