چکیده

این مقاله بطور سیستماتیک نتایج حاصل شده از قضیه مقدار میانگین انتگرال ها را روی فاصله های باز، در نقطه دلخواه در بازه ها و روی فاصله های بی‌نهایت بصورت خلاصه شرح می‌دهد و در همین حال به کاوش بیانات جدید بر این اساس ادامه خواهد داد.

کلیده‌واژه ها : آنالیز ریاضی، قضیه دوم مقدار میانگین برای انتگرال ها، بازه های باز، بازه بی‌نهایت

۱- بسط عمومی

قضیه۱٫۱ (۱) فرض کنید $g(x)$ روی $[a,b]$ نامنفی و بطور یکنواخت نزولی باشد همچنین $f(x)$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد ، $n \in \mathbb{R}$ و $n \geq 1$ ، آنگاه وجود دارد $\xi \in [a,b]$ بطوریکه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = ng(b)\int_a^\xi f(x)dx. \quad (۱.۱)$$

(۲) فرض کنید $g(x)$ روی $[a,b]$ نامنفی و بطور یکنواخت صعودی باشد همچنین $f(x)$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر است، $n \in \mathbb{R}$ و $n \geq 1$ ، آنگاه وجود دارد $\xi \in [a,b]$ بطوریکه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = ng(b)\int_\xi^b f(x)dx. \quad (۱.۲)$$

(۳) فرض کنید $g(x)$ یکنواخت و نامنفی روی $[a,b]$ است همچنین $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد، $m,n \in \mathbb{R}$ و $m \leq 1 \leq n$ ، آنگاه :

(i) هنگامی که $g(x)$ بطور یکنواخت نزولی باشد، وجود دارد $\eta \in [a,b]$ بطوریکه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = ng(a)\int_a^\eta f(x)\,dx + mg(b)\int_\eta^b f(x)dx.$$

(۱.۳)

(ii) هنگامی که $g(x)$ بطور یکنواخت صعودی باشد، وجود دارد $\xi \in [a,b]$ ، بطوریکه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \ = mg(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + ng(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

(۱.۴)

۲ - بسط قضیه برای فاصله باز

در قضیه مقدار میانگین دوم برای انتگرال ها، ξ که قضیه ۱٫۱ را برآورده می کند در [a, b] محدود می‌شود، پس اگر شرط بدون تغییر باقی بماند، آیا می توان نتیجه گیری قضیه را به (a, b) تحدید کرد؟ معلوم می‌شود که نمی‌تواند، یعنی ξ که قضیه میانگین دوم را برای انتگرال‌ها برآورده می‌کند، نمی‌تواند در بازه باز (a, b) محدود شود و ξ ممکن است در بازه باز نباشد.

دو مثال زیر می‌تواند توضیح دهد:

مورد ۲٫۱

$$f(x) = \sin x \ , \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & x = 2\pi \\ -1 & x \neq 2\pi \end{cases},$$

تنها زمانی که 2π یا $\xi = 0$ برقرار باشد، قضیه دوم مقدار میانگین در انتگرال ها می‌تواند درست باشد، در حالی که $\xi \notin (0,2\pi)$.

مورد ۲٫۲

دربازه $[a,b]$، $f(x) = 1$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 2 & x = b \end{cases}$، اگر وجود داشته باشد ξ بطوریکه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx\ ,$$

به این معنی که $b - a = g(a)(\xi - a) + 2(b - \xi) = 2b - a - \xi$ ، بنابراین $\xi = b$ وجود دارد، و ξ روی نقطه اکسترمم بازه $[a,b]$ وجود دارد از این نقطه، می‌توانیم بیاندیشیم که تحت چه شرایطی، می‌شود ξ را از قضیه دوم مقدار میانگین انتگرال ها در (a,b) بدست آورد؟ جستجو برای چنین شرایطی بی شک معنی دار است.

قضیه ۲,۱

(۱) فرض کنید $g(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته است، $f(x)$ مشتق پیوسته $f'(x)$ را روی $[a,b]$ دارد و $f'(x) \geq 0$ همچنین $f(a) \geq 0$ آنگاه $\xi \in [a,b]$ وجود دارد بطوریکه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx\,.$$

(۲) $f'(x) \leq 0$ و $f(b) \geq 0$ آنگاه وجود دارد

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx\ \ ,\ \ (a<\xi<b).$$

(۳) اگر شرط $f(a) \geq 0$ در (۱) ملغی شود یا شرط $f(b) \geq 0$ در (۲) لغو بشود، نتیجه بصورت زیر است

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx\,.$$

گر چه شرایط در قضیه ۲,۱ خیلی قوی است، مقدار میانی $\xi \in [a,b]$ قضیه بالا، می‌تواند به مقدار $\xi \in (a,b)$ محدود شود.

قضیه ۲,۲

(۱) اگر تابع $f(x)$ و $g(x)$ کراندار و انتگرال پذیر باشند و $g(x)$ روی (a,b) یکنواخت باشد و $g(a+0) \neq g(b-0)$ ، انگاه وجود دارد $\xi \in (a,b)$ بطوریکه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0)\int_a^\xi f(x)dx\ + g(b-0)\int_\xi^b f(x)dx\,.$$

(۲) فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ کراندار و انتگرال پذیر روی $[a,b]$ باشند و تابع $g(x)$ روی (a,b) بطور یکنواخت صعودی و نامنفی باشد و $g(a+0) \neq g(b-0)$ ، آنگاه وجود دارد $\xi \in (a,b)$ بطوریکه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b-0)\int_\xi^b f(x)dx\,.$$

از قضـــیه ۲,۲ درمیابیم که تحت شـــرایط ضـــعیف تر در قضـــیه دوم مقدار میانگین در انتگرال ها؛ اگر شـــرط $g(a) \neq g(b)$ را اضـــافه کنیم، نقطه میانی $\xi \in [a,b]$ می‌تواند تحدید به $\xi \in (a,b)$ بشـــود . در قضـــیه ۲,۲ ξ میتواند یکه نباشد، بیایید نگاهی به مثال زیرین بیاندازیم

مورد ۲,۳

فرض کنید $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ ، $x \in [\,0, 2\pi\,]$. فهم آن ســـاده اســـت، هنگامی که $\xi = \frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ ، خواهیم داشت

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = g(0+0)\int_0^\xi f(x)dx \; + g(2\pi-0)\int_\xi^{2\pi} f(x)dx\;,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = g(2\pi-0)\int_\xi^{2\pi} f(x)dx\,.$$

اکنون مسئله این است که، تحت چه شرایطی ξ یکه است؟ آنگاه بیاید در مورد شرط کافی در مورد یکه بودن ξ در بازه (a,b) صحبت کنیم.

قضیه ۲,۳

(۱) اگر تابع $f(x)$ و $g(x)$ شـــرایط (1) 2.2 را در بازه $[a,b]$ داشـــته باشـــند و $f(x)$ مثبت (یا منفی) باشـــد، سپس فقط یک $\xi \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0)\int_0^\xi f(x)dx \; + g(b-0)\int_\xi^b f(x)dx\,.$$

(۲) اگر تابع $f(x)$ و $g(x)$ شـــرایط (2) 2.2 را در بازه $[a,b]$ داشـــته باشـــند و $f(x)$ مثبت (یا منفی) باشـــد، سپس فقط یک $\xi \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b-0)\int_\xi^b f(x)dx\,.$$

۳ - بسط قضیه به هر نقاط روی فاصله

در نتیجه حاصل شده از قضیه میانگین دوم برای انتگرال‌ها؛ فقط یک نقطه وجود دارد، بدیهی است که این قضیه محدودیت دارد، ما امیدواریم که نتیجه در هر نقطه‌ای از بازه درست باشد، بنابراین قضیه زیر را داریم :

قضیه ۳,۱

فرض کنید $f(x)$ روی بازه بسته $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد.

(i) اگر تابع $g(x)$ بطور اکیدا یکنواخت روی بازه $[a,b]$ نزولی باشـــد همچنین $g(x) \geq 0$ و $f(x) > 0$ آنگاه برای نقطه دلخواه $\xi \in [a,b]$ ، دو نقطه متفاوت $\alpha, \beta \in [a,b]$ با شرط $\alpha < \xi < \beta$ وجود دارد بطوریکه

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx = g(\alpha)\int_{\alpha}^{\xi} f(x)\,dx.$$

(ii) اگر تابع $g(x)$ بطور اکیدا یکنواخت روی بازه $[a,b]$ صعودی باشد و $g(x)$ و $f(x) > 0$ آنگاه برای نقطه دلخواه $\eta \in [a,b]$ ، دو نقطه متفاوت $\alpha, \beta \in [a,b]$ با شرط $\alpha < \eta < \beta$، وجود دارد بطوریکه

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx = g(\beta)\int_{\eta}^{\beta} f(x)\,dx.$$

(iii) اگر تابع $g(x)$ بطوراکیدا یکنواخت روی بازه $[a,b]$ باشد و $g(x)$ و $f(x) > 0$, $(f(x) < 0)$ آنگاه برای نقطه دلخواه $\xi \in [a,b]$ ، دو نقطه متفاوت $\alpha, \beta \in [a,b]$ با شرط $\alpha < \xi < \beta$، وجود دارد بطوریکه

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx = g(\alpha)\int_{\alpha}^{\xi} f(x)\,dx + g(\beta)\int_{\xi}^{\beta} f(x)\,dx.$$

در قضیه ۳,۱، بعد از اضافه کردن تعدادی شرایط، ما آن نتیجه را به هر نقطه در بازه بسط می‌دهیم:

اما آن شرایط بسیار سفت و سخت است . اکنون بنابر قضیه زیر، حاصل قضیه بالا را تحت شرایط ضعیف تری بدست می‌آوریم.

قضیه ۳,۲

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ روی بازه بســـته دلخواه $[a,b]$ انتگرال پذیر و مثبت (منفی) باشـــند، با داشـــتن $\xi \in (a,b)$ داریم :

(i) اگر تابع $g(x)$ بطور محلی اکیدا یکنواخت نزولی (یا صعودی) در ξ با شد، آنگاه وجود دارد $\alpha , \beta \in [a,b]$ باشرط $\alpha < \xi < \beta$ ، بطوریکه

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx = g(\alpha)\int_{\alpha}^{\xi} f(x)\,dx.$$

(ii) اگر تابع $g(x)$ بطور محلی اکیدا یکنواخت نزولی (یا صعودی) در η با شد، آنگاه وجود دارد $\alpha , \beta \in [a,b]$ باشرط $\alpha < \eta < \beta$ ، بطوریکه

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx = g(\beta)\int_{\eta}^{\beta} f(x)\,dx.$$

همچنین می‌توانیم از میانگین های های بالا استفاده کنیم تا سومین فرم از قضیه دوم مقدار میانگین در انتگرال ها را بهبود ببخشیم

(iii) فرض کنید $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر باشـــد و $f(x)$ مثبت (یا منفی) باشـــد. با داشـــتن $\xi \in (a,b)$ ، اگر $g(x)$ بصـــورت محلی اکیدا یکنواخت در ξ باشـــد، آنگاه وجود دارد $\alpha, \beta \in [a,b]$ با شـــرط $\alpha < \xi < \beta$ بطویکه

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx = g(\alpha)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + g(\beta)\int_{\xi}^{\beta} f(x)\,dx\,.$$

۴ - بسط قضیه برای بازه بی‌نهایت

در قضیه دوم مقدار میانگین برای انتگرال ها، اگر چه بازه $[a,b]$ نمی‌تواند آزادانه به (a,b) تحدید شود، می‌تواند به $[a,+\infty)$ یا $(-\infty,b]$ یا $(-\infty,+\infty)$ بسط پیدا کند.

قضیه ۴,۱

فرض کنید $g(x)$ بطور یکنواخت روی $[a,+\infty)$ کراندار و $f(x)$ روی $[a,+\infty)$ انتگرال پذیر باشد و $f(x)$ جز مقدار $+\infty$ نداشته باشد، آنگاه وجود دارد $\xi \in [a,+\infty)$، بطوریکه

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = g(\alpha)\int_{\alpha}^{\xi} f(x)\,dx + g(+\infty)\int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx\,,$$

بطوریکه

$$g(+\infty) = \lim_{x\to\infty} g(x).$$

قضیه ۴,۲

فرض کنید $g(x)$ بطور یکنواخت روی $(-\infty,+\infty)$ کراندار $f(x)$ انتگرال پذیر باشد و $f(x)$ جز مقدار $+\infty$ و $-\infty$ نداشته باشد، آنگاه وجود دارد $\xi \in (-\infty,+\infty)$، بطوریکه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = g(-\infty)\int_{-\infty}^{\xi} f(x)\,dx + g(+\infty)\int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx\,,$$

بطوریکه

$$.g(-\infty) = g(+\infty) = \lim_{x\to\infty} g(x)\,.$$

منابع :

1. Zhang, Q.-z.: Generalization of the Mean Value Theorem of Integrals. Journal of Shangqiu Teachers College 24(6), 120–122 (2008)

2. Department of Mathematics of Jilin University Mathematics, Mathematics Analysis, pp. 205–207. People's education press, Beijing (1979)

3. Jin, Y.-g.: On the calculus Mean Theorem. Journal of Chongqing Normal University (Natural science edition) 19(3), 83–85 (2004)

4. Yu, H.-l.: Journal of Shandong Normal University (Natural Science) 19(3), 83–85 (2004)

5. Li, K.-d.: Converse Proposition of the second mean Value Theorem for Integrals. Huanghuai Journal 10(1), 67–69 (1994)

6. Feng, M.-q.: An improvement on the Mean Value Theorem of Integral. Journal of Beijing Institute of Machinery 22(4), 40–43 (2007)

7. Lou, M.-z.: A Remark of the second mean Value Theorem for Integrals. Huanghuai Journal 10(3), 65–66 (1994)

8. Yu, L.-f.: Understanding of the Calculus Mean Value Theorem. Ningbo City College of Vocational Technology 22(2), 24–29 (2006)

9. Zhu, B., Wang, L.: Some generalizations and Applications of the second mean Value Theorem