افراز رأسی‌گراف ها به همگراف ها و اِستار ها

چکیده

یک همگراف، گرافی است که هیچ مسیری را روی چهار رأس بعنوان زیر گراف القائی نداشته باشد. یک همگراف $k-$ افراز از $G = (V, E)$، یک افراز رأسی از G به k بخش $V_1, \dots, V_k \subset V$ می‌باشد بطوریکه گراف القاء شده توسط V_i به ازای $1 \leq i \leq k$، یک همگراف است. گیمبل و نِستریل [5] پیچیدگی جنبه های همگراف $-$ افراز k را مطالعه کرده و به این سوال رسیدند: آیا یک گراف آزاد-مثلث مسطح وجود دارد که همگراف ۲- قابل‌افراز نباشد؟ اگر جواب بله است، پیچیدگی تصمیم وابسته به آن چگونه است؟ در این مقاله، ثابت می‌کنیم چنین مثالی وجود دارد و آن تصمیم گیری، خواه یک گراف آزاد-مثلث مسطح تصدیق کننده همگراف ۲- افراز باشد، پیچیدگی NP-complete را داراست. همچنین نشان خواهیم داد که هر گراف با میانگین ماکزیمم درجه حداکثر $\frac{14}{5}$ یک همگراف ۲ $-$ افراز را تصدیق می‌کند، بطوریکه هر جزء حداکثر روی سه راس اِستار است.

کلید واژه ها : همگراف افراز؛ رنگ‌آمیزی‌ها؛ اِن‌پی-کامپلیت بودن (NP-completeness)؛

۱. مقدمه

در این مقاله تمرکز خود را روی افراز های رأسی قرار می‌دهیم بطوریکه هر جزء مجموعه جداشده یک گراف القائی بهمراه ساختار داده شده، بدست آورد. همگراف ها یک خانواده مینیمال از گراف هایی هستند که شامل K_1 باشند که K_1 نسبت به عمل مکمل و اجتماع مجزا بسته است. همچنین همگراف ها بعنوان گراف هایی معرفی می‌شوند که هیچ کپی القائی از P_4 را شامل نیستند، که مسیر روی چهار رأس است ([9] مشاهده کنید). یک استار $k-$ افراز از G، افرازی رأسی از G به k مجموعه $V_1, \dots, V_k$ است بطوریکه گراف القاء شده توسط هر V_i یک استار جنگل باشد. علاوه بر این، یک استار $k-$ افراز را میخوانیم $d-$ استار $k-$ افراز هرگاه هر مولفه القاء شده از مرتبه حداکثر d باشد. یک ۱ $-$ استار k $-$ افراز یک k $-$ رنگ آمیزی است.

با تصمیم بر اینکه یک گراف $k-$ قابل‌افراز دروضعیتی که $k=$ ۱ در زمان خطی قابل حل است [4] و همچنین $NP-complete$ است اگر $k \geq 2$ [1]، گیمبل و نستریل روی گراف های مسطح تمرکز کرده و قضیه زیر را اثبات کردند.

قضیه ۱ (گیمبل و نستریل)

(۱) در حالتی که یک گراف مسطح همگراف ۳ – افرازپذیر باشد، NP – complete است.

(۲) در حالتی که یک گراف مسطح با ماکزیمم درجه حداکثر ۶، یک همگراف ۲ – افرازپذیر باشد، NP – complete است.

سوال ۱

(گیمبل و نستریل [5]) . ایا یک گراف آزاد-مثلث مسطح وجود دارد که یک همگراف ۲ – افرازپذیر نباشد؟ اگر جواب بله است، پیچیدگی تصمیم همراه با آن چیست؟

فرض کنید C_y یک کلاس از گراف هایی تعریف شود که قابل تبدیل به یک ۳ – استار ۲ – افراز باشند. فرض کنید C_n یک کلاس از گراف هایی باشد که در آن افراز رأسی به دو همگراف امکان پذیر نباشد. توجه داشته باشید که $C_y \cap C_n = \emptyset$. در بخش ۲، یک گراف نا-همگراف ۲- افراز پذیر را که آزاد-مثلث مسطح است، مثال می‌زنیم و قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲

(۱) برای تعیین اینکه یک گراف مثلث آزاد مسطح در $C_y \cup C_n$، متعلق به C_y است، پیچیدگی زمانی مسئله NP-complete خواهد بود.
(۲) برای تعیین اینکه یک گراف مسطح بدون داشتن ۴ – دور و با داشتن ماکزیمم درجه ۴ در $C_y \cup C_n$، معلق به C_y است، پیچیدگی زمانی مسئله NP-complete خواهد بود.

این سوال ۱ را جواب می‌دهد؛ علاوه براین، فرضیه مطرح شده در قضیه ۱ را بهبود بخشیده که درآن حداکثر درجه ۶ ، به ۴ تقلیل یافته است، که آن بهترین حالت ممکن است زیرا گراف های با ماکزیمم درجه ۳، رأس افراز به دو زیرگراف از درجه حداکثر ۱ را می‌پذیرند. بسیاری از کسانی که روی رأس افراز ها مطالعه کرده اند، از ماکزیمم میانگین درجه بعنوان پارامتر استفاده می‌کنند، بعنوان مثال [2, 3] را نگاه کنید.

مقدار ماکزیمم میانگین درجه یک گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{mad}(G) = \max\left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}$$

این پارامتر در [7] توسط Jensen و Toft به اثبات رسیده است که می‌تواند در زمان چندجمله ای محاسبه شود. همچنین به خوبی شناخته شده است که هر گراف مسطح G با کمر (girth) حداقل g در معادله $\mathrm{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$ صدق می‌کند.

باتوجه به مطالعات پیشین، در نظرگرفتن مسئله زیر طبیعی به نظر خواهد آمد.

مسئله ۱

با داشتن عدد صحیح $k \geq 1$، آیا وجود دارد $f(k)$ بطوریکه هرگراف با شرایط $\mathrm{mad}(G) < f(k)$ یک k – استار ۲ – افرازپذیر باشد؟

گراف هایی که ۱ – استار ۲ – افرازپذیر هستند، مطابق با گراف های ۲ – رنگپذیر می‌باشند؛ از اینروی، هر گراف G با $\mathrm{mad}(G) < 2$ ، ۱ – استار ۲ – افزارپذیر هستند. بنابر مقاله هاوت و سرنت [6] هر گراف با شرط $\mathrm{mad}(G) < \frac{8}{3}$ ۲- استار ۲ – افراز پذیر است . با مطالعه لیست خطی- قوی ۲ – درختی گراف های پراکنده (کم پشت)، برودین و ایوانووا ثابت کردند که هر گراف با $\mathrm{mad}(G) < \frac{14}{5}$ و کمر حداقل ۷، ۳- استار ۲- افرازپذیر است [3]. در بخش ۳ ، نشان خواهیم داد که می‌توان فرض بر روی کمر را رها کرد و قضیه زیر را اثبات کرد.

قضیه ۳

هر گراف G با $\mathrm{mad}(\mathrm{G}) < \frac{14}{5}$، یک ۳- استار ۲-ا فرازپذیر است.

برای $k \geq 4$، مسئله ۱ می‌ماند. بنابر [3]، هر گراف مسطح از کمر حداقل ۷، ۳ – استار ۲ – بخشپذیر است. بعلاوه، وجود دارد گراف های مسطحی با کمر ۴، که همگراف ۲ – افرازپذیر نیستند، و بنابراین k – استار – ۲ افرازپذیر برای هیچ k ای نیستند(قسمت A . ۲ را مشاهده کنید). بنابراین با دو سوال زیر به پایان می‌رسیم.

سوال ۲

(۱) آیا یک عدد صحیح s_6 وجود دارد بطوریکه هر گراف مسطح با کمر حداقل ۶، s_6 – استار ۲ – افرازپذیر باشد؟

(۲) آیا یک عدد صحیح s_5 وجود دارد بطوریکه هر گراف مسطح با کمر حداقل ۵، s_5 – استار ۲ – افرازپذیر باشد؟

۲. NP-COMPLETENESS

این بخش برای اثبات قضیه ۲ اختصاص داده شده است.

یادآوری می‌کنیم که یک ۲ – رنگ‌آمیزی از هایپرگراف $H = (V, E)$ یک افراز از مجموعه رأس V به دو کلاس رنگ آمیزی است بطوریکه هیچ یالی در E تک‌رنگ نیست. مسئله مذکور را به مسئله NP – complete در مورد تصمیم ۲ – رنگ آمیزی از هایپرگراف های ۳ – اونیفورم کاهش می‌دهیم.

A . گراف های مسطح مثلث آزاد

کاهشی که در نظر داریم بر روی گراف های $S_{x,y}$ ، $F_{x,y,z}$ و U_{x_1,x_2,y_1,y_2} بنا شده است که دارای برخی خصوصیات جالب توجه هستند.

(C01) گراف $S_{x,y}$ (شکل ۱) دارای هیچ همگراف ۲ – افراز بطوریکه x و y در افراز یکسانی قرار بگیرند، نیست.

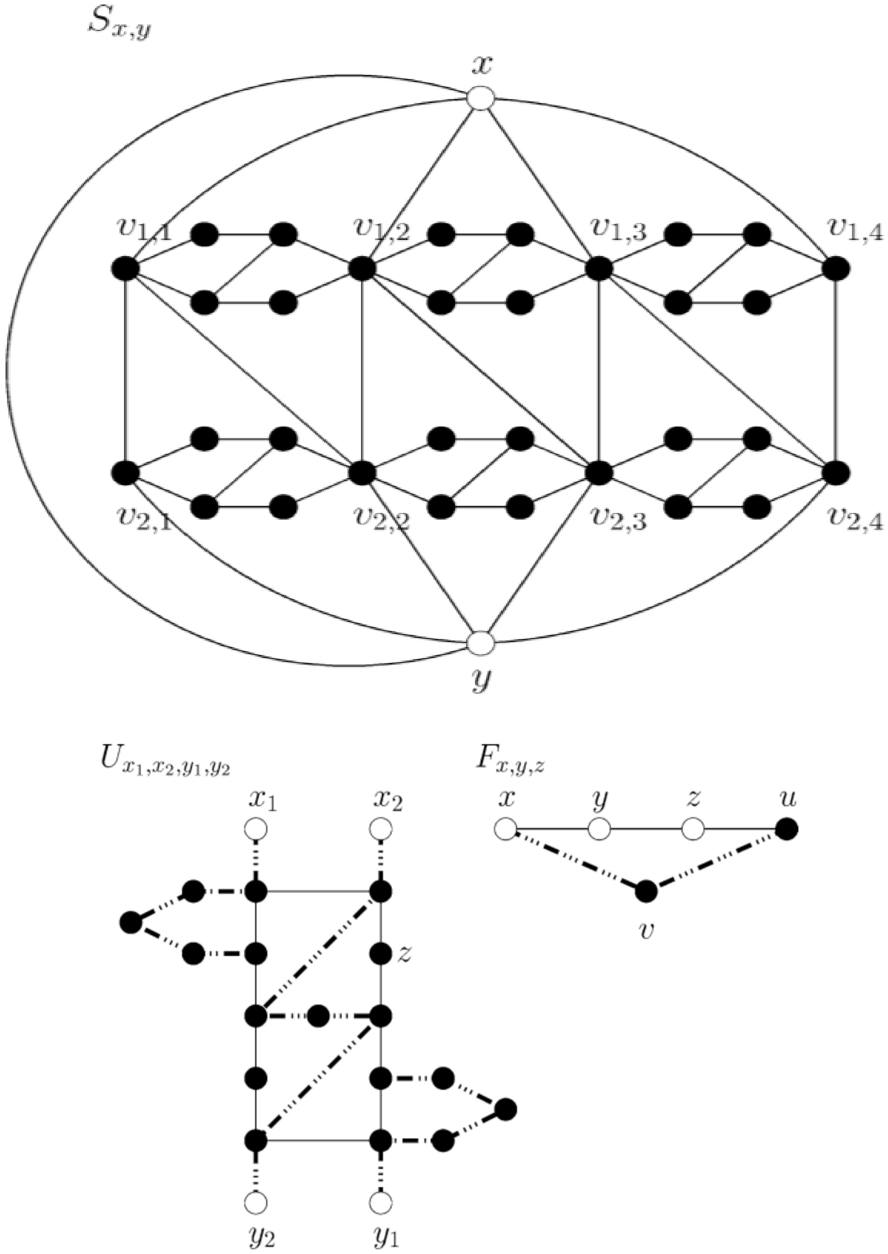
اثبات. با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم $S_{x,y}$ یک همگراف ۲ – افراز $V = A \cup B$ دارد بطوری که x و y در یک افراز A قرار دارند.

(O1) به ازای $1 \leq i \leq 2$ و $1 \leq j \leq 3$ ، $v_{i,j}$ و $v_{i,j+1}$ هردو نمی‌توانند در A باشند. به عبارت دیگر، این امر باعث می‌شود چهار رأس « بین » آن دو در B قرار بگیرد، که P_4 را می‌سازند. بطور مشابه، $v_{1,i}, v_{1,i+1}, v_{2,i+1}$ همگی نمیتوانند در یک مجموعه افراز قرار بگیرند، و همچنین برای $v_{2,i}, v_{2,i+1}, v_{1,i}$.

(O2) دو رأس غیرمجاور $v_{1,i}, v_{2,j}$ نمی‌توانند با یکدیگر در A باشند. در غیر اینصورت $v_{1,i}\ x\ y\ v_{2,j}$ یک P_4 در A هستند، که تناقض است.

ابتدا فرض کنید که $v_{1,1}$ در A است. آنگاه بنابر (O1) $v_{1,2}$ در B است و بنابر (O2) $v_{2,3}$ در B است. حال بنابر (O1) $v_{1,3}$ و $v_{2,2}$ باید در A باشند. که با (O2) در تناقض است.

بنابر تقارن، میتوانیم فرض کنیم که $v_{1,1}$ و $v_{2,4}$ در B هستنند. اکنون فرض کنید $v_{1,2}$ در A باشد. بنابر (O1)، $v_{1,3}$ در B است. و دوباره بنابر (O1)، $v_{1,4}$ و $v_{2,3}$ در A هستند. که با (O2) در تناقض است.

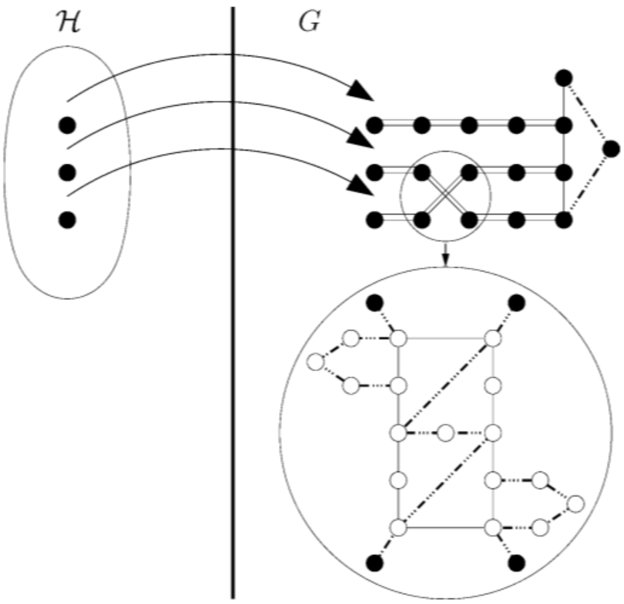


شکل ۱. گراف های $S_{x,y}, U_{x_1,x_2,y_1,y_2}, F_{x,y,z}$

بنابراین $v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,3}, v_{2,4}$ را در B داریم. بنابر (O1)، $v_{1,3}$ و $v_{2,2}$ در A هستند. که این با (O2) در تناقض است. ■

گراف $S_{x,y}$ را می‌توان بعنوان سویچ دید: اگر x در A باشد، آنگاه y در B است و برعکس. دو رونوشت از $S_{x,y}$ را به نام های S_{x_1,y_1} و S_{x_2,y_2} در نظر می‌گیریم که در آن $y_1 = x_2$ می‌تواند بعنوان توسعه دهنده دیده شود: رأس های x_1 و y_2 باید متعلق به مجموعه ای یکسان از افراز باشند. زمانی می‌توان یک گراف مثلث-آزاد مسطح ساخت که یک همگراف ۲ − افرازپذیر را با دریافت یک دور از طول ۵ را نپذیرد و هرکدام از یال هایش نظیر xy را توسط $S_{x,y}$ جایگزاری کند. بدین ترتیب جواب قسمت اول سوال ۲ پاسخ داده شد.

$(C02)$ گراف $F_{x,y,z}$ همگراف ۲ – افراز بطوریکه x, y و z در مجموعه ای یکسان در افراز قرار بگیرند، ندارد.



شکل ۲. تبدیل* H به G. یال های دوگانه و یال های نقطه چین شده به ترتیب نمایانگر توسعه دهنده ها و سویچ ها هستند. یال های باریک همان یال های معمولی هستند.

اثبات. به وسیله برهان خلف فرض کنید که $F_{x,y,z}$ یک همگراف ۲ – افراز $V = A \cup B$ دارد بطوریکه x, y و z در مجموعه یکسانی از افراز چون A قرار بگیرند. دو سویچ کننده بین xv و vu، u را وادار می‌کنند که در A باشد؛ که $P_4 = xyzu$ را در A تولید می‌کنند که این یک تناقض است.

$(C03)$ فرض کنید که $A \cup B$ یک همگراف ۲ – افراز از U_{x_1,x_2,y_1,y_2} باشد. آنگاه x_1 و y_1 (بطور مشابه x_2, y_2) باید در مجموعه ای یکسان در افراز قرار بگیرند.

اثبات. از طریق مسیر سویچ کننده های بین x_2 و y_2، لزوماً x_2 و y_2 باید در یک مجموعه یکسان از افراز چون A قرار بگیرند. اکنون فرض کنید که x_1 و y_1 در مجموعه های متفاوتی از افراز قرار بگیرند، x_1 در A باشد و y_1 در B قرار بگیرد. انتشار افراز از x_1 و y_1 با استفاده از سویچ کننده ها، دو مسیر P' و P'' از طول ۳ که اتمام آن در رأس z است را بگونه ای می‌سازد که که سه رأس اول P' (مطابق P'') در B هستند (مطابق A). این رویه میرسد به اینکه قرار گرفتن z در A یا B یک P_4 ساخته می‌شود، که تناقض با فرض مسئله دارد. ■

گراف U_{x_1,x_2,y_1,y_2} می‌تواند بعنوان غیر متقاطع[1] دیده شود: اگر x_1 در مجموعه ای از افراز قرار بگیر،آنگاه y_1 باید در همان مجموعه قرار بگیرد، که برای x_2, y_2 نیز برقرار است.

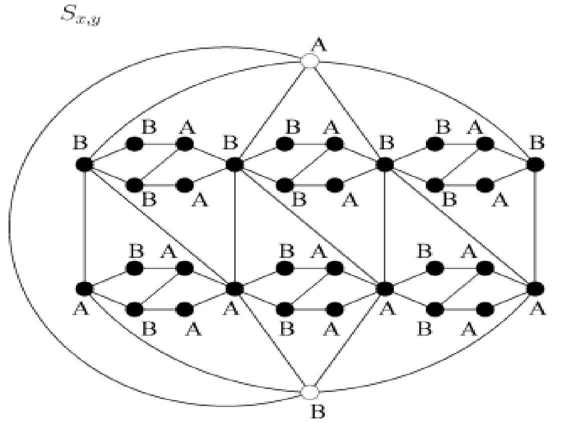
اکنون می‌توانیم ریداکشن[1] را نشان دهیم. ما یک نمونه H از ۲ – رنگ‌آمیزی از ۳ – متحدالشکل هایپرگراف را به نمونه G در مسئله خود، تبدیل کردیم. برای هر رأس در H، رأسی را در G انتساب می‌کنیم. برای هر یال در H، یک رونوشت[2] از گراف $F_{x,y,z}$ را انتساب می‌کنیم. اکنون، برای هر وقوع[3] بین یک رأس v و یک یال e، رأس منتسب شده به v را به یکی از رأس های x, y, z از رونوشت $F_{x,y,z}$ منتسب به e پیوند می‌دهیم. ما همچین پیوند هایی را با استفاده از توسیع‌دهنده ها در سری ها می‌سازیم. گراف بدست آمده لزوماً مسطح نیست: ما هر تقاطع را با استفاده از یک نامتقاطع انجام می‌دهیم. دینهایت، نمونه G را که مسطح و آزاد- مثلث است، بدست می‌آوریم. شکل ۲ را ببینید.

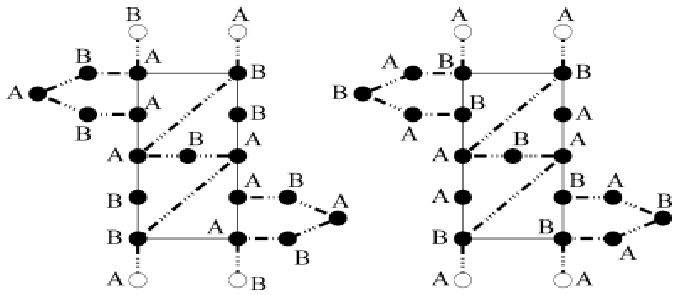
با استفاده از خصوصیات سویچ کننده ها، توسیع دهنده ها و نامتقاطع ها، گراف G یک ۳ – استار – ۲ – افراز را می‌پذیرد اگر H ۲ – رنگپذیر باشد و هیچ همگراف ۲ – افراز را نپذیرد.

اگر H ۲ – رنگپذیر نباشد، آنگاه نتیجه می‌دهد که در هر رأس افراز $A \cup B$ از G یک رونوشت از $F_{x,y,z}$ وجود دارد که در آن تمام رأس های x, y, z در یک مجموعه یکسان از افراز قرار می‌گیرند؛ با توجه به $(C02)$، G هیچ همگراف ۲ – افراز را نمی‌پذیرد.

فرض کنید H ۲ – رنگپذیر است و $A \cup B$ یک ۲ – رنگ‌امیزی از H باشد. در آنصورت یک ۳ – استار ۲- افراز از G را بصورت زیر می‌سازیم.

هر رأس از G مطابق با رأسی از H را در A قرار می‌دهیم (متوجهاً B). سپس این افراز را به تمام رأس های توسیع دهنده ها (متشـکل از دو سـویچ کننده) و نامقاطع ها همانطور که در شـکل ۳ به نمایش درآمده اسـت، توسـیع می‌دهیم. مشـاهده کنید که در ۲ – افراز از $S_{x,y}$، رأس های پایانی x و y هیچ همسـایه ای در مجموعه خود (از افراز) ندارند. این یک ۳ – استار ۲ – افراز از G را بدست می‌دهد.





شکل ۳.

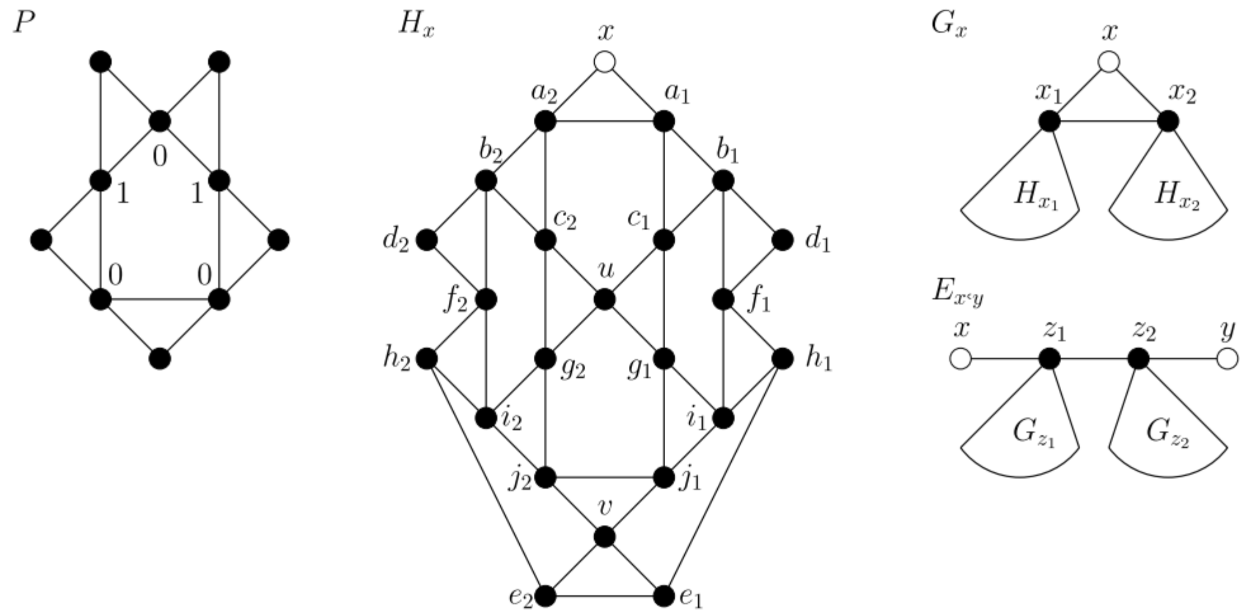
۳ – استار ۲ – افراز از $S_{x,y}$

و U_{x_1,x_2,y_1,y_2}

B. گراف های مسطح با ماکزیمم درجه ۴

اثبات قضیه ۲ .۳ مشابه اثبات قضیه ۱ .۳ است، اما این اثبات بر روی سویچ کننده $E_{x,y}$ بنا شده است.

$(C01)$ فرض کنید P گرافی باشد که در شکل ۴ به نمایش آمده است. فرض کنید x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 دور داخلی[1] به طول ۵ از P باشد. با استفاده از جایگشت، در هر همگراف ۲ – افراز $A \cup B$ از P، لزوماً خواهیم داشت، $x_1, x_2, x_4 \in A$ و $x_3, x_5 \in B$.



شکل ۴. گراف های $P, H_x, G_x, E_{x,y}$.

$(C02)$ فرض کنید H_x گرافی باشد که در شکل ۴ نمایش داده شده است. فرض کنید $A \cup B$ یک همگراف ۲ – افراز از H_x است و $x \in A$. حداقل یکی از a_1, a_2 در A است.

اثبات. از طریق برهان خلف فرض کنید هیچ کدام از a_1 و a_2 در A نباشـــد. بنابر $(C01)$، رویه به صـــورتی خواهد بود که در آن $a_1, a_2, u \in B$ و $c_1, c_2 \in A$. حداقل یکی از b_1, b_2 در A اســـت (در غیر اینصـــورت b_1, a_1, a_2, b_2 یک P_4 در B خوا هد بود.)، در نظر بگیریم که $b_1 \in A$. بنابر $(C01)$، داریم $i_1 \in A$ و $f_1, g_1 \in B$. همچنین بنابر $(C01)$ $j_2 \in B$ و $j_1, g_2 \in A$، و مشـــابهاً $f_2 \in A$ و $b_2, i_2 \in B$. اکنون، به و سیله تقارن، فرض کنید v در A ا ست؛ بنابراین e_1, e_2, h_1 در B، یک $P_4 = e_2e_1h_1f_1$ در B می سازد، یک یک تناقض با فرض مسئله به وجود می‌اورد. ■

گراف G_x از مثلث x, x_1, x_2 و دو رونوشت H_{x1} و H_{x2} بدست می‌آید، $glused$ روی x_1 و x_2. (شکل ۴ را ببینید.)

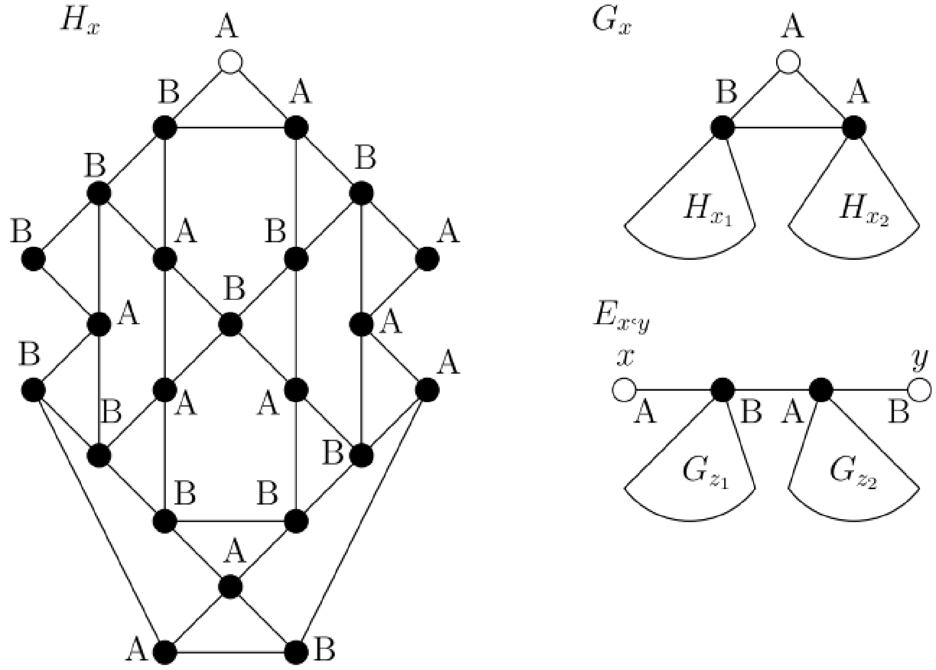
$(C03)$ فرض کنید $A \cup B$ یک همگراف ۲ – افراز از G_x باشـــد. فرض کنید $x \in A$، آنگاه رأس x انتهایی از مسیر به طول ۳ در A است.

اثبات. اگر هیچکدارم از x_1, x_2 در A نباشـــد، آنگاه بنابر $(C02)$ یک P_4 در B وجود. آنگاه .w.l.o.g که x_1 در A است. بنابر $(C02)$، یک همسایه از x_1 در H_{x_1} در A است. این اثبات $(C03)$ را کامل می‌کند. ■

در نهایت، گراف $E_{x,y}$ بدین صورت درست می‌شود: مسیر به طول ۴ x, z_1, z_2, y را گرفته و z_1 (متوجهاً z_2) را با رأس x از یک رونوشت از G_x مشخص می‌کنیم. بنابر $(C03)$، $(C04)$ بدست می‌آید.

اثبات قضیه ۲ .۳ مشابه ۱ .۳ است که در آن سویچ کننده $E_{x,y}$ به جای $S_{x,y}$ جایگزاری شده است. ۳ – استار ۲ – افرازی از $E_{x,y}$ در شکل ۵ نشان داده شده است.

مشاهده می‌شود که مقدار ۴ در قضیه ۲ .۳ بهترین امکان است، زیرا هر گراف با ماکزیمم درجه حداکثر ۳ $(1,1)$-رنگپذیر است، یعنی رأس افراز به دو زیر مجموعه را می‌پذیرد، هرکدام از آنها یک زیر گراف القائی با ماکزیمم درجه حداکثر ۱ است(و بنابراین ۳ – استار ۲ – افرازپذیر است). برای مشاهده ، فرض کنید ϕ رنگامیزی از رأس های با دو رنگ ۰ و ۱ باشد، دراینصورت $\sigma(\phi) = E_{00}(\phi) + E_{11}(\phi)$ مینیمم است، که در آن E_{ii} نشان دهنده تعداد یال هایی است که هردو با رنگ‌آمیزی رنگ i به پایان میرسند. آنگاه ϕ یک $(1,1)$ – رنگ‌آمیزی است (اگر نه، می‌توانیم دوباره یک رأس را رنگ زده و رنگ‌آمیزی ϕ' را با $\sigma(\phi') < \sigma(\phi)$ بدست می‌آوریم، که متناقض با انتخاب ϕ است.



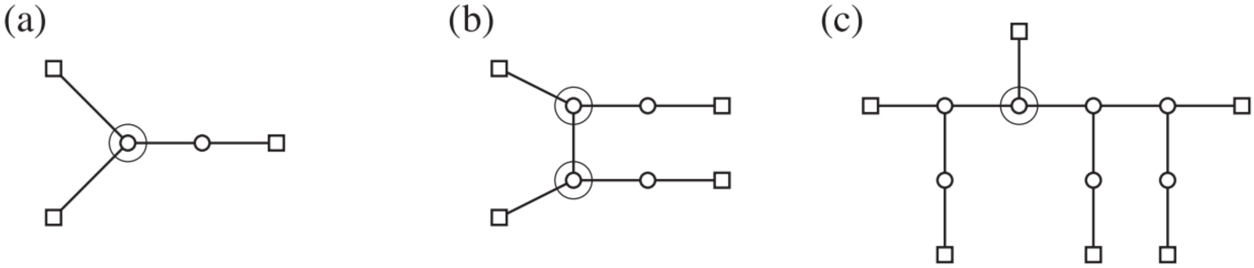
شکل ۵. ۳ – استار ۲ – افراز از $E_{x,y}$.

۳. ۳ – استار ۲ – افراز از گراف ها با $\mathrm{mad} < \frac{14}{5}$

اولین بخش از اثبات، یعنی لم ۷، مشابه لم مطرح شده توسط برودین[۱] و ایوانوا[۲] در [3] است. که برای بخاطر تمامیت کار در اینجا نیز آورده شده است.

به منظور ســـادگی، ما از علامت گذاری $k - vertex$ (متوجها $k^{+} - vertex$ ،$k^{-} - vertex$) استفاده می‌کنیم و آن را رأس از درجه k می‌خوانیم (متوجها حداکثر k حداقل k).

یک سبک ۳ – رأس، یک ۳ – رأس است که مجاور با ۲ – رأس می‌باشد. یک کسل ۳ – رأس، یک سبک ۳ – رأس است که با یک سبک ۳ – رأس دیگر مجاور است. یک خسته ۳ رأس، مجاور با یک سبک ۳ – رأس و یک کسل ۳ – رأس است. توجه داشته باشید که تمام آن ها همیشه ۳ – رأس هستند و ممکن است که ما از ذکر آن صرف نظر کنیم. (و سرفا بگوییم سبک رأس، کسل رأس، و خسته رأس) مثال های از چنین رأس هایی در شکل ۶ فراهم آورده شده است.



شکل ۶. (a) سبک، (b) کسل، (c) خسته

لم ۷. اگر یک گراف G در $\mathrm{mad(G)} < \frac{14}{5}$ صـــدق کند، آنگاه یکی از پیکربندی های $C1 - C12$ را دربر می‌گیرد، مثال های از آنان در شکل ۷ به نمایش در آمده است.

$C1$. یک ۱ – رأس.
$C2$. دو ۲ – رأس مجاور.
$C3$. یک ۳ رأس مجاور با دو ۲ – رأس.
$C4$. یک سبک ۳ – رأس مجاور با دو سبک ۳ – رأس.
$C5$. یک ۳ – رأس مجاور با سه سبک ۳ – رأس.
$C6$. دو ۳ – رأس مجاور، هرکدام از آنها مجاور با دو سبک ۳ – رأس.
$C7$. یک ۳ – رأس مجاور با دو کسل ۳ – رأس.

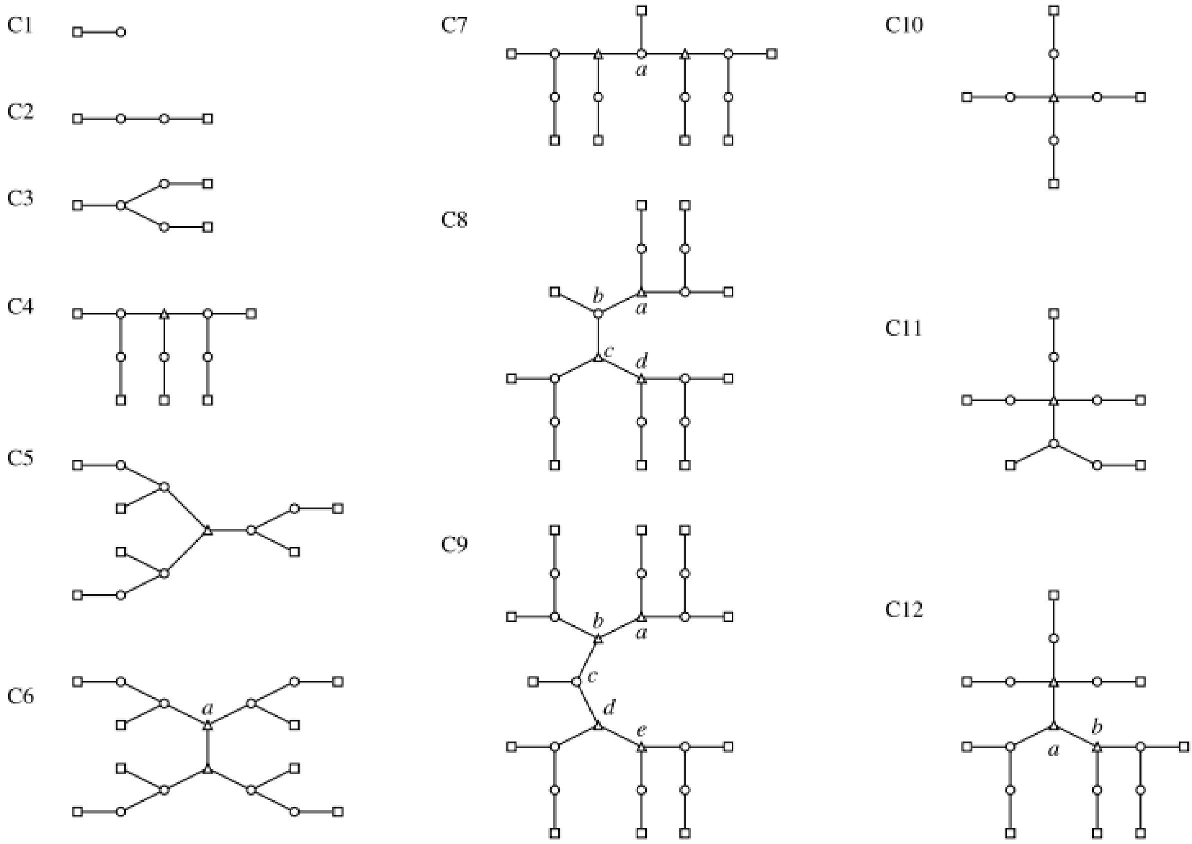
$C8$. یک ۳ – رأس مجاور با یک کسل ۳ – رأس و یک خسته ۳ – رأس.

$C9$. یک ۳ – رأس مجاور با دو خسته ۳ – رأس

$C10$. یک ۴ – رأس مجاور با چهار ۲ – رأس.

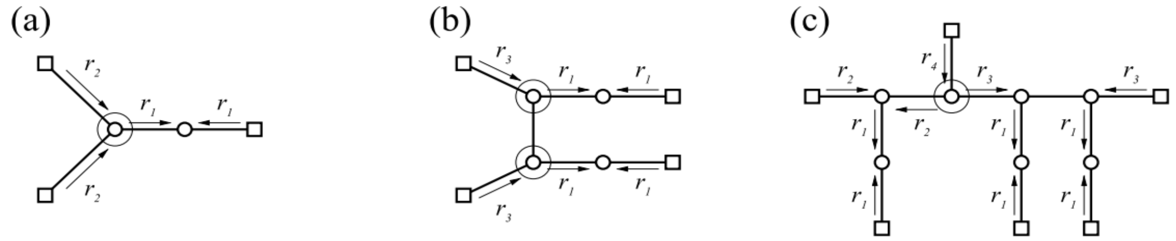
$C11$. یک ۴ – رأس مجاور با سه ۲ – رأس و یک سبک ۳ – رأس.

$C12$. یک ۴ رأس مجاور با سه ۲ – رأس و یک خسته ۳ – رأس.



شکل ۷. کوچکترین درخت هایی که پیکر های $C1$ تا $C12$ را در بر می‌گیرند.

اثبات. فرض کنید G مثال نقضی برای لم ۷ باشد، یعنی یک گراف با $\mathrm{mad(G)} < \frac{14}{5}$ بطوریکه هیچ یک از پیکربندی های $C1 - C12$ را دربرنگیرد. ابتدا به هر کدام از رأس های v، وزن $w(v)$ را که برابر است با درجه آن رأس، نسبت می‌دهیم، یعنی $\forall v \in V(G), w(v) = d(d)$. بنابر فرض، $\sum_{v \in V(G)} w(v) < \frac{14}{5}|V(G)|$. آنگاه دوباره وزن ها را بنابر قوانین $\mathrm{R1} - \mathrm{R4}$ که در شکل ۸ به نمایش در آمده است، توزیع می‌کنیم.



شکل ۸. قوانین $\boldsymbol{R1-R4}$ اعمال شده بر (a) سبک، (b) کسل و (c) خسته، ۳ – رأس.

$$\left(r_1 = \frac{2}{5}, r_2 = r_4 = \frac{1}{10}, r_3 = \frac{1}{5}\right).$$

$R1$. هر $^+$۳ - رأس $\frac{۲}{۵}$ به هر ۲ – رأس مجاور می‌دهد.
$R2$. هر 4^+ - رأس یا غیر سبک (غیر کسل) ۳ – رأس $\frac{1}{10}$ را به هر رأس سبک غیر کسل مجاور می‌دهد.
$R3$. هر 4^+ - رأس یا غیر سبک (غیر کسل) ۳ – رأس $\frac{1}{5}$ را به هر رأس کسل مجاور می‌دهد.
$R4$. هر 4^+ - رأس یا غیر سبک (غیر کسل) غیر خسته ۳ – رأس $\frac{1}{10}$ را به هر رأس خسته مجاور می‌دهد.

هنگامی که قوانین اعمال شدند، هر رأس v، وزن جدید $w^*(v)$ را به خود می‌گیرد. در هنگام پروسه، هیچ وزن جدیدی پدید نمی‌آید و هیچ وزنی ناپدید نمی‌شود؛ از اینروی، $\sum_{v\in V(G)} w(v) = \sum_{v\in V(G)} w^*(v)$. اگرچه، ثابت خواهیم کرد که هر رأس در انتهای پروسه وزن جدید $w^*(v)$، حداقل $\frac{14}{5}$ را خواهد داشت، که آن به تناقض زیر که اثبات را کامل می‌کند، می‌رسد:

$$\frac{14}{5}|V(G)| > \sum_{v\in V(G)} w(v) = \sum_{v\in V(G)} w^*(v) \geq \frac{14}{5}|V(G)|.$$

اکنون فرض کنید $\forall v \in V(G), w^*(v) \geq \frac{14}{5}$. با حذف پیکربندی $C1$، هر رأس v از گراف G دارای درجه حداقل ۲ است. مورد های زیر را مطابق با درجه v در نظر می‌گیریم.
مورد $d(v) = 2$. در ابتدا، $w(v) = 2$. باحذف پیکربندی $C2$، v مجاور است با دو 3^+ - رأس، و بنابراین به وسیله قانون R_1 وزن $\frac{2}{5}$ را از هرکدام از آنها می‌گیرد. به طریق آن به $w^*(v) = 2 + 2\frac{2}{5} = \frac{14}{5}$ می‌رسیم.
مورد $d(v) = 3$. در ابتدا، $w(v) = 3$. با حذف $C3$، v با حداکثر یک ۲ – رأس مجاور است. ابتدا دو مورد زیر را در نظر می‌گیریم که در آن v دقیقاً با یک ۲ – رأس مجاور است.

- ابتدا فرض کنید که v کسل باشد (شکل ۸(b)) یعنی، v مجاور با یک ۲ = رأس و سبک رأس باشد. توجه می‌کنیم که حذف $C4$ تضمین می‌کند که v حداکثر با یک سبک رأس مجاور است. به وسیله R_1، v $\frac{۲}{۵}$ را به رأس مجاور ۲ − رأس خود می‌دهد، و بنابر قانون R_3، v $\frac{۱}{۵}$ را از همسایه غیر سبک خود دریافت می‌کند. بنابراین داریم $w^*(v) = 3 - \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{14}{5}$.
- اکنون فرض کنید کـه v سـبک باشـد امـا کسـل نباشـد (شـکل ۸(a)) را ببینیـد: v بـا یـک ۲ − رأس و دو ۳^+ - رأس غیـر سـبک مجـاور اسـت. در آن مـورد، بـه وسـیله قـانون $R1$، v $\frac{۲}{۵}$ را بـه ۲ − رأس مجـاور خـود می‌دهـد، و بـه وسـیله قـانون $R2$، v $\frac{۱}{۱۰}$ را از هـر کـدام از ۳^+ - رأس هـای مجـاور اش دریافت می‌کند؛ بنابراین $w^*(v) = 3 - \frac{2}{5} + 2\frac{1}{10} = \frac{14}{5}$.

فرض کنید که v بـا یـک ۲ − رأس مجـاور نباشـد. بـه وسـیله حـذف $C5$، v حـداکثر بـا دو سـبک رأس مجـاور است. بعلاوه، با حذف $C7$، v حداکثر با یک کسل رأس مجاور است. مورد های زیر را در نظر می‌گیریم:

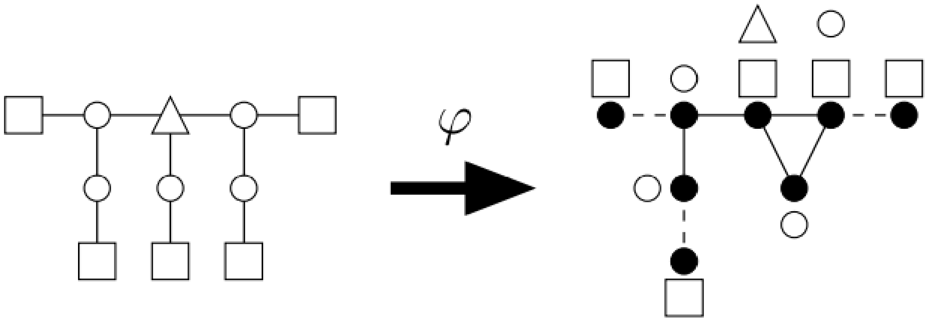
- فرض کنید v خســته باشـد (شـکل ۸ (c)) را ببینید، یعنی v با یک (غیر کسـل) سـبک رأس و با یک کسل رأس مجاور است. همسایه باقی‌مانده آن یک 3^+ - رأس است یعنی با حذف $C5$ سبک نیست (بنابراین کسل نیست) یا با حذف $C6$ خسته نیست. از اینروی، با اعمال قانون های $R2$ و $R3$، v به ترتیب $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{5}$ را به همسایه های سبک و کسل خود می‌دهد، اما به وسیله $R4$، v $\frac{1}{10}$ را از سومین همسایه اش دریافت می‌کند. بنابراین داریم : $w^*(v) = 3 - \frac{1}{10} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{14}{5}$.
- فرض کنیـد v بـا دو (غیـر کسـل) سـبک رأس مجـاور باشـد. اخـرین همسـایگی اش یـک 3^+ - رأس اسـت کـه می‌توانـد یـا بـا حـذف $C5$ سـبک نباشـد، یـا بـا حـذف $C6$ خسـته نباشـد. بنـابراین تنهـا قانون $R2$ را دو بار اعمال می‌کنیم و بنابراین داریم: $w^*(v) = 3 - 2\frac{1}{10} = \frac{14}{5}$.
- فرض کنید که v دقیقا با یک سـبک رأس مجاور اسـت. اگر این رأس کسـل باشـد، آنگاه با حذف $C8$، v نمی‌تواند با یک رأس خســته مجاور شــود، و با اعمال قانون $R3$ داریم: $w^*(v) = 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5}$. درغیراینصورت، با حذف $C9$، حداکثر یکی از همسایه های غیر سبک v، خسته است. این باعث می شود که با اعمل $R2$ و احتمالا $R4$ داشته باشیم: $w^*(v) \geq 3 - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = \frac{14}{5}$.
- درنهایت، فرض کنید که v با هیچ سبک رأسی مجاور نباشد. با حذف $C9$، v حداکثر با یک خسته رأس مجاور است. از این‌روی، احتمالا با اعمال قانون $R4$، داریم: $w^*(v) \geq 3 - \frac{1}{10} > \frac{14}{5}$.

مورد $d(v) = 4$. ابتداً، $w(v) = 4$. با حذف $C10$، v با حداکثر سه ۲ – رأس مجاور ا ست. اگر v با سه ۲ – رأس مجاور با شد، آنگاه اخرین هم سایه اش نمی‌تواند سبک با شد (به و سیله حذف $C11$) یا خ سته با شد (به وســـیله حذف $C12$)؛ از اینروی، با اعمال قانون $R1$، داریم $w^*(v) = 4 - 3\frac{2}{5} = \frac{14}{5}$. درغیراینصــورت، قانون $R1$ را حداکثر دو بار اعـمال می‌کنیم و احتـمالا دو قانون از $R2$ به $R4$ اعـمال می‌کنیم و خواهیم داشـــــت: $w^*(v) \geq 4 - 2\frac{2}{5} - 2\frac{1}{5} = \frac{14}{5}$.

مورد $d(v) = k \geq 5$. با اعمال قانون های $R1 - R4$، v می‌تواند حداکثر k بار $\frac{2}{5}$ بدهد، و خواهیم داشـــت $w^*(v) \geq k - k\frac{2}{5} = \frac{3k}{5} \geq 3$.

در تمام مورد ها، $w^*(v) \geq \frac{14}{5}$ را همانطور که ادعا شد، در یافت می‌کنیم و درنتیجه حکم اثبات می‌شود. ■

قبل از اثبات قضیه ۵، ما برخی از ویژگی های مفید گراف ها حاوی یکی از پیکربندی های C1-C12 را نشان می دهیم. توجه دا شته با شید که پیکربندی‌های C1-C12 ممکن ا ست در یک گراف G با جا سازی متفاوتی نسبت به مواردی که در شکل ۷ نشان داده شده‌اند، که شامل چرخه‌های کوتاه است، وجود داشته باشد. در [۳]، نویسندگان تعداد احتمالی چنین جاسازی‌هایی را با در نظر گرفتن تنها گراف هایی با دور حداقل ۷ کاهش دادند. در اینجا، ما از یک تکنیک متفاوت برای در نظر گرفتن هرگونه تعبیه احتمالی یک پیکربندی بدون برشـــمردن آنها اســـتفاده می کنیم. اصل این تکنیک این است که تأیید کنیم مهم نیست که چگونه یک پیکربندی تعبیه شده است، ما همچنان آزادی عمل کافی برای گسترش بخشی از بقیه گراف به پیکربندی داریم. این آزادی توسط چند رئوس در پیکربندی انجام می شود، یعنی رئوس مجموعه که بعداً با $V_\triangle$ نشان داده شد. مشاهده ۸ تا گزاره ۱۲ ویژگی های ساختاری ساده پیکربندی ها و جاسازی های آنها هستند. با نگاه کردن به پیکربندی‌های C1-C12، می‌توان به راحتی خود را متقاعد کرد. ســـپس یک فرآیند ســـاده را در دو مرحله توصـــیف می‌کنیم تا افرازی از بقیه گراف را به پیکربندی گســترش دهیم. در بیشــتر مواقع، مرحله اول (مرحله ۱ و ۲) تقریباً برای گســترش پارتیشــن کافی اســت. در برخی موارد که رئوس V دارای هم سایگان م شترک زیادی ه ستند، رئوس کمتری رنگی می شوند و آزادی عمل بی شتر، تو صیف را سخت‌تر می‌کند، اما هیچ م شکلی در گسترش افراز وجود ندارد. برای هر $1 \leq i \leq 12$، فرض کنید Ti کوچکترین درخت حاوی پیکربندی Ci با شد. یعنی درختانی که در شکل ۷ ن شان داده شده اند. بدین صورت تعریف می‌کنیم: با داشـــتن درخت Ti، رئوس آن را به ســـه مجموعه $V_\circ$، $V_\triangle$ و $V_\square$ تقســـیم می‌کنیم. مجموعه $V_\square$ شامل تمام رئوس هایی ا ست که درجه آنها تو سط پیکربندی ثابت[1] ن شده ا ست. به جز Ti، این مربوط به همه برگها ا ست. مجموعه $V_\circ$ شامل تمام رئوس مجاور با یک رأس در $V_\square$ ا ست. در نهایت، $V_\triangle$ شامل رئوس باقی مانده، ا ست که با هیچ رئو سی از $V_\square$ مجاور نیست. این افراز در شکل ۷ با شکل رئوس نمایش داده شده ا ست. با ساختن $V_\circ$، $V_\triangle$ و $V_\square$ ویژگی زیر را روی هر درخت در $T1 - T12$ مشاهده می کنیم.



شکل ۹. یک مثال از جاسازی متفاوت از $T4$.

مشاهده ۸. هر رأسی در $\boldsymbol{V}_{\circ}$ دقیقاً یک همسایه در $\boldsymbol{V}_{\square}$ دارد و هر راسی در $\boldsymbol{V}_{\triangle}$ هیچ همسایه ای در $\boldsymbol{V}_{\square}$ ندارد.

$$\forall v \in V_{\circ}, \quad |N(v) \cap V_{\square}| = 1$$

$$\forall v \in V_{\triangle}, \quad |N(v) \cap V_{\square}| = 0$$

فرض کنید G یک گراف حاوی یک رخداد از پیکربندی Ci باشد. ما هومومورفیسم را به شکل $\phi: V(Ti) \rightarrow V(G)$ تعریف می‌کنیم که در آن هر راس Ti را به رأسی از G که نقش یکسانی در این رخداد پیکربندی Ci دارد، نگاشت می کند. برخی از رئوس G ممکن است تصویر بیش از یک راس Ti باشد. به عنوان مثال، شکل ۹ را ببینید. با سوء استفاده از نماد، به سادگی مجموعه $\{u \in Ti | \varphi(u) = v\}$ را با $\phi^{-1}(v)$ نشان می دهیم. توجه داشته باشید برای هر یال uv در $E(Ti)$، $\phi(u)\phi(v)$ یک یال در G است. همچنین برای $\phi(Ti)$ برای اینکه یک رخداد از پیکربندی Ci باشد، تحدید ϕ از $N[u]$ به $N[\phi(u)]$ باید برای هر $u \in V_{\circ} \cup V_{\triangle}$، دو طرفه باشد. ما بعداً به این ویژگی اشاره می کنیم و می گوییم که ϕ به صورت محلی یک به یک است.

در G، توسط $E_{\circ}$ مجموعه از یال ها را که به صورت زیر تعریف می‌شوند، نشان می‌دهیم.

$$E_{\circ} = \{e \in E(G) | \phi^{-1}(e) \subseteq E(V_{\circ}, V_{\square})\}.$$

چنین یال هایی در شکل ۹ نقطه چین شده اند.

گزاره ۹. اگر $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})$ یک رأس از $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{V}_{\circ})$ باشد، آنگاه حداکثر یک یال وقوع یافته به $\boldsymbol{v}$، در $\boldsymbol{E}_{\circ}$ است.

اثبات. فرض کنید $v = \phi(v'), v' \in V_{\circ}$. فرض کنید $u \in N(v)$ وجود دارد بطوریکه $uv \in E_{\circ}$. فرض کنید $w \in N(v) \backslash \{u\}$. به واسطه خاصیت محلی یک به یک ϕ، $u' \in \phi^{-1}(u) \cap N_{Ti}(v')$ و $w' \in \phi^{-1}(w) \cap N_{Ti}(v')$ منحصر به فردی وجود دارد بطوریکه $u' \neq w'$. بنابرا مشاهده ۸، $w' \notin V_{\square}$ بنابراین $vw \notin E_{\circ}$. ■

گزاره ۱۰. فرض کنید پیکربندی $C \neq C2$ در G ظاهر شـــود. فرض کنید uv یک یال از G بگونه ای باشـــد که $u, v \in \phi(V_\circ)\backslash\phi(V_\triangle)$. اگر $uv \notin E_\circ$، آنگاه $d(u) = 2$ و $d(v) = 3$، یا برعکس.

اثبات. فرض کنید uv در شـرایط گزاره صـدق کند. از آنجایی که $uv \notin E_\circ$، رأس های مجاور u' و v' در C وجود دارند بطوریکه، $\phi(u') = u$، $\phi(v') = v$ و هیچیک از v' و u' در V نباشـــند. بنابر فرض، u' و v' حتی در $V_\triangle$ نیستند، بنابراین باید هر دو در $V_\circ$ باشند. آنگاه به سادگی می‌توان در تمام پیکربندی ها برسی کرد که هر یال بین دو رأس در $V_\circ$ دارای انتها درجه ۲ و دیگری ۳ است. ■

گزاره ۱۱. روی $C1$ تا $C12$، هومومورفیسم ϕ محدود شده روی $V_\triangle \rightarrow \phi(V_\triangle)$، یک به یک است.

اثبات. برای رســـیدن به اثبات کافی اســـت که یک به یک بودن تابع را برســـی کنیم. برای پیکربندی های $C1 - C5$، $C10$ و $C11$، از آنجایی که $|V_\triangle| \leq 1$، یک به یک بودن تابع به روشنی برقرار است. برای پیکربندی های $C6$، $C7$ و $C12$، این گزاره نتیجه ای از یک به یک بودن ϕ روی $N[a]$ است.

اکنون فرض را روی $C8$ برسـی می‌کنیم. به وسـیله خاصـیت یک به یک بودن ϕ به ترتیب در $N[b]$ و $N[c]$، میدانیم که $\phi(a) \neq \phi(c)$ و $\phi(c) \neq \phi(d)$. بعلاوه، اگر $\phi(a) = \phi(d)$، پس لزوماً، $\phi(b) = \phi(c)$، زیرا سایر همسایگان a و d یا ۲ − رأس هستند یا سبک رأس. اما این با یک به یک بودن محلی ϕ در تضاد است. بنابراین، $\phi(a) = \phi(d)$ و ϕ بروی $V_\triangle$ یک به یک است.

در نهایت، بطور مشابه با $C9$ سروکار داریم . به وسیله یک به یک بودن محلی ϕ ، می‌دانیم که $\phi(a) \neq \phi(b)$، $\phi(b) \neq \phi(d)$ و $\phi(d) \neq \phi(e)$. بعلاوه، از آنجایی که a و e رأس های سبک هستند، اما b و d نیستند، داریم $\phi(a) \neq \phi(d)$ و $\phi(b) \neq \phi(e)$. نهایتاً اگر $\phi(a) \neq \phi(e)$، آنگاه $\phi(b) = \phi(d)$، b و d تنها رئوسی می‌شوند که نه سبک هستند و نه همسایگان از درجه ۲ رئوس a و e، و این با یک به یک بودن ϕ روی $N[c]$ در تناقض است. بنابراین ، ϕ روی $V_\triangle$ در $C9$ نیز یک به یک است، و گزاره اثبات می‌شود. ■

گزاره ۱۲. فرض کنید Ti پیکربندی باشد که در G اتفاق می‌افتد. هیچ رئوسی در $\phi(Ti)$ امکان ندارد که با سه یا تعداد بیشتری از رئوس در $\phi(V_\triangle)$ مجاور باشد.

اثبات. در تنها پیکربندی هایی که این اتفاق می‌افتد، $C8$، $C9$، و $C12$ است. در $C8$، اگر $\phi(d)$ یک همسایه از $\phi(b)$ باشد، تنها رأس $\phi(b)$ امکان دارد که سه همسایه در $\phi(V_\triangle)$ داشته باشد. اما همسایه های d متفاوت از c، ۲ − رأس یا سبک رأس هستند درحالیکه b نیست. در $C9$، تنها $\phi(c)$ می‌تواند سه همسایه در $\phi(V_\triangle)$ داشته باشد، اما به دلیل مشابه $\phi(c)$ نمی‌تواند یک همسایه از $\phi(a)$ یا $\phi(e)$ باشد. در نهایت، در $C12$، برای داشتن سه همسایه در $\phi(V_\triangle)$، یک رأس باید با ۴ − رأس مجاور باشد، و با $\phi(a)$، اما رئوس مجاور با ۴ − رأس مذکور که متفاوت از a هستند، از درجه ۲ می‌باشند. از اینروی، هیچ رأسی امکان ندارد با سه رأس در $\phi(V_\triangle)$ مجاور باشد.

اکنون قضیه ۵ را دوباره خوانده و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۵. هر گراف G با $\text{mad(G)} < \frac{14}{5}$ یک ۳ – استار ۲ – بخشپذیر است.

اثبات. قضیه ۵ را به وسیله تناقض اثبات می‌کنیم. فرض کنید که فرض درست نباشد و G یک مثال نقض با کمترین مرتبه باشد. بنابر لم ۷، G حاوی یکی از پیکربندی های $C1 - C12$ است، فرض کنید C یک پیکربندی از کوچکترین برچسبی[۱] باشد که در G ظاهر می‌شود. فرض کنید υ یک افراز معتبر از $G[V\backslash\phi(V_\circ \cup V_\triangle)]$ باشد. به این افراز به عنوان یک رنگامیزی از رأس های $\upsilon: V \rightarrow [0, 1]$ نگاه می‌کنیم، که در آن یک بخش به صورت $\{v \in V | \upsilon(v) = 0\}$ تعریف می‌شود و دیگری به صورت $\{v \in V | \upsilon(v) = 1\}$.

υ را از طریق زیر به $G[V\backslash\phi(V_\triangle)]$ توسعه می‌دهیم:

گام ۱. هر یال $uv \in E_\circ$ را بدرستی رنگ می‌زنیم، یعنی $\upsilon(u) \neq \upsilon(v)$ را انتخاب می‌کنیم. میدانیم که این کار را می‌توان به وسیله گزاره ۹ انجام داد.

گام ۲. برای هر رأس باقی مانده v در $V\backslash\phi(V_\triangle)$، با حداقل یک همسایه رنگ شده، برای $\upsilon(v)$ حداقل رنگی را انتخاب می‌کنیم که در $N(v)$ نشان داده شود. قدم ۲ را تا جایی که امکان داشته باشد تکرار می‌کنیم. اگر در مواردی، رأس هایی در $V\backslash\phi(V_\triangle)$ باقی مانده باشند که هیچ همسایه رنگ رنگامیزی شده ای نداشته باشند، یکی را برمی‌داریم و به صورت تصادفی رنگ می‌زنیم و قدم ۲ را تکرار می‌کنیم.

توجه داشته باشید که آنهایی که در حین گام ۲ رنگ شده اند، دقیقاً تمام رأس های $v \in \phi(V_\circ)\backslash\phi(V_\triangle)$ هستند که با هیچ یالی از $E_\circ$ وقوع نداشته اند. مشاهده زیر را نیز خواهیم داشت.

مشاهده ۱۳. هر رأس رنگ شده در حین گام ۱ یا ۲ هیچ همسایه رنگامیزی شده ندارد یا حداقل دارای یک همسایه از رنگامیزی مخالف است.

گزاره ۱۴. پس از اعمال گام های ۱ و ۲، G یا شامل Ci برای $i \in \{1, 2, 3\}$ است یا υ بگونه ای است که $G[\{v \in \phi(V_\circ) | \upsilon(v) = i\}$ حاوی هیچ مسیری روی سه رأس برای $i = 0, 1$ نباشد، یعنی هیچ تک‌رنگ[۱] P_3 وجود نداشته باشد.

اثبات. فرض کنید G هیچ کدام از $C1$، $C2$ یا $C3$ را شامل نشود، با این‌حال $u, v, w \in \phi(V_\circ)$ یک P_3 با یال های uv, vw تشکیل می‌دهد بطوریکه $v(u) = v(v) = v(w)$. بوضوح، هیچ یک از uv و vw در $E_\circ$ نیستند، یا دو انتهای یال، دارای برچسب های متفاوتی هستند. بنابراین می‌توانیم گزاره ۱۰ را برای هر دو یال اعمال کنیم، و نتیجه بگیریم که یا v از درجه ۲ است، یا هر دو u و w از درجه۲ هستند و v از درجه ۳ است. مورداخر مورد بعدی مربوط به حضور پیکربندی $C3$ در G است. اکنون فرض کنید v درجه ۲ است، در حالی که u و w درجه حداقل ۳ هستند تا از حضور $C1$ یا $C2$ جلوگیری شود. از آنجایی که v در $E_\circ$ با هیچ یالی برخورد ندارد، در گام ۲ یک رنگ به v اختصاص داده می شود. پس باید حداقل یک همسایه با رنگ متفاوت داشته باشد $\left(u \text{ یا } v\right)$ که این تناقض است. ■

گزاره ۱۵. پس از اعمال گام های ۱ و ۲، v یک ۳ – استار ۲ – افراز مناسب از $G[V \backslash \phi(V_\triangle)]$ است.

اثبات. به خلف فرض کنید که یک مولفه از مرتبه حداقل ۴ یا یک مثلث در زیر گراف القائی G توسط یک کلاس رنگامیزی وجود دارد. از آنجایی که v یک افراز معتبر از $G[\, v \backslash \phi(V_\circ \cup V_\triangle)]$ است، این مولفه فقط رأس های $V \backslash \phi(V_\circ \cup V_\triangle)$ را شامل نیست. توجه داشته باشید هر یالی که از رأسی از $\phi(V_\circ \cup V_\triangle)$ به رأس از $V \backslash \phi(V_\circ \cup V_\triangle)$ می‌پیوندد لزوماً در $E_\circ$ است، بنابراین به درستی رنگ شده است. ازاین‌روی مولفه باید در $\phi(V_\circ \cup V_\triangle)$ باشد.

پیکربندی های $C1$ و $C2$ بگونه‌ای هستند که $|\phi(V_\circ \cup V_\triangle)| \leq 2$، پس هیچ مولفه ای از اندازه حداقل ۳ نمی‌تواند در $\phi(V_\circ \cup V_\triangle)$ باشد. در $C3$، $|V_\circ \cup V_\triangle| = 3$، بنابراین می‌توانیم تنها یک مثلث پیدا کنیم. گرچه، اگر رأس از درجه ۳ با دو همسایه اش از درجه ۲ یک مثلث تشکیل دهد، آنگاه یالی که به رأس های از درجه ۲ می‌پیوندند در $E_\circ$ است، و به درستی رنگامیزی شده است، یک تناقض. در نهایت، اگر هیچ یک از $C1$ و $C2$ و $C3$ در G ظاهر نشوند واما پیکربندی دیگری ظاهر شود، آنگاه نتیجه توسط گزاره ۱۴ برقرار است. ■

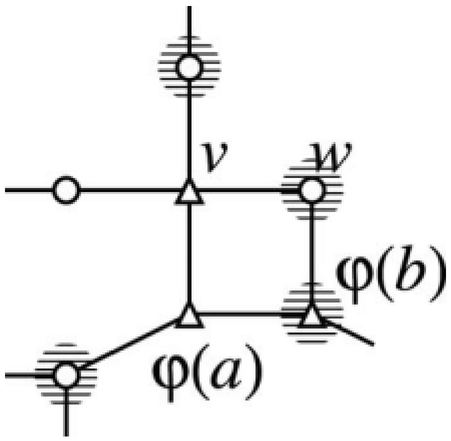
از گزاره قبلی، تنها باید تخصیص رنگ ها را به رئوس در $\phi(V_\triangle)$ گسترش دهیم. ما رنگ هارا اختصاص می‌دهیم و سعی می‌کنیم ویژگی های زیر را حفظ کنیم:

- $P1$. گراف القایی توسط $\phi(V_\circ \cup V_\triangle)$ هیچ تک‌رنگ P_3 مجاور با رأسی رنگامیزی نشده از $\phi(V_\triangle)$ را شامل نیست.
- $P2$. گراف القایی توسط $\phi(V_\circ \cup V_\triangle)$ هیچ تک‌رنگ P_2 (مسیری که از دو رأس میگذرد) مجاور با دو رأس رنگ‌امیزی نشده از از $\phi(V_\triangle)$ را شامل نیست.

پس از گام های ۱ و ۲، $P1$ یک نتیجه از گزاره ۱۴ است. فرض کنید $P2$ برقرار نباشد. فرض کنید a, b از تک‌رنگ P_2 با دو رأس از $\phi(V_\triangle)$ مجاور باشند. یال ab در $E_\circ$ نیست، پس با اعمال گزاره ۱۰، می‌دانیم که a و b از درجه ۲ و ۳ هستند، فرض کنیم b از درجه ۲ است. اگر b مجاور با یک رأس در $\phi(V_\triangle)$ باشد، انگاه a تنها همسایه رنگ‌آمیزی شده است، و بنابر مشاهده ۱۳، متفاوت رنگ‌امیزی شده است، یک تناقض. اگر a با دو رأس از $\phi(V_\triangle)$

مجاور باشد، آنگاه b تنها همسایه رنگ‌آمیزی شده از a است، و مشاهده ۱۳ دوباره به تناقض ما را می‌رساند.

ما از این استراتژی های زیر برای رنگ‌امیزی ۳ – رأس رنگ نشده از $\phi(V_\triangle)$ استفاده می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که برای هر استراتژی، رنگ‌امیزی همچنان با یک ۳ – استار ۲ – افراز مطابقت دارد و ویژگی های $P1$ و $P2$ را برآورده می‌کند (توجه داشته باشید که رنگ‌امیزی ۴ - رأس را تا انتها کار رها می‌کنیم).



شکل ۱۰. جاسازی جزئی خاص از $C12$.

- اگر $v \in \phi(V_\triangle)$ دو همسایه رنگ‌امیزی نشده داشته باشد، به v رنگی مخالف با سومین همسایه اش اختصاص می‌دهیم.

در این مورد، واضح است که هنوز یک ۳ – استار ۲ – افراز داریم و آنکه $P1$ و $P2$ هنوز صادق هستند.

- اگر $v \in \phi(V_\triangle)$ دو همسایه از رنگ‌آمیزی یکسان را دارا است، به v رنگی مخالف را اختصاص می‌دهیم.

از آنجایی که v یک ۳ – رأس است، حداکثر یک همسایه از رنگ‌آمیزی یکسان را داراست، ازاینروی، یک مثلث تک‌رنگ تشکیل نمی‌شود. از ویژگی $P1$ می‌توانیم به سادگی نتیجه بگیریم که با رنگ‌آمیزی v، مولفه ای با مرتبه بیشتر از ۳ تشکیل نمی‌شود. فرض کنید که تک‌رنگ P_3 تشکیل داده شد، آنگاه بنابر ویژگی $P2$، در مجاورت یک رأس رنگ‌آمیزی نشده از $\phi(V_\triangle)$ نیست و $P1$ و $P2$ بی‌اهمیت برقرار هستند. اگر فقط یک P_2 تک‌رنگ تشکیل شود، بنابر گزاره ۱۲، $P2$ برقرار است و $P1$ بی‌اهمیت برقرار است.

- اگر $u, v \in \phi(V_\triangle)$ دو رأس مجاور رنگ‌آمیزی نشده باشند که هر دو در مجاورت با یک رأس از هر رنگ هستند، آنگاه یال uv را بدرستی رنگ‌آمیزی می‌کنیم.

در اینجا دوباره، $P1$ برای نتیجه گیری آنکه رنگ‌آمیزی بدست آمده، مطابق با ۳ – استار – افراز است، کفایت می‌کند. ویژگی $P2$ نتیجه می‌دهد که $P1$ همچنان برقرار است، و گزاره ۱۲ نتیجه می‌دهد که $P2$ همچنان برقرار است.

اکنون نیاز به رســـیدگی به باقی ۴ – رأس v در $\phi(V_\triangle)$ برای پیکربندی $C10$، $C11$ و $C12$ داریم. توجه داشــته باشــید که در $C12$، باید اولین اســتراتژی را روی a پیش از رنگ‌آمیزی رئوس دیگر اعمال کنیم، پس ۴ – رأس بدون رنگ‌آمیزی در انتهای کار باقی می‌ماند. اگر v حداقل سه همسایه از رنگ‌آمیزی یکسان داشته باشد، از رنگ‌آمیزی مخالف برای v استفاده کنید. با توجه به خصوصیت $P1$، رنگ‌آمیزی بدست آمده تطابق با با یک ۳ – استار ۲ – افراز از گراف دارد.

اکنون فرض کنید v دو همســـایه از هر رنگ دارد. در بین آنها، ســه تای ۲ رأس هســـتند و دو تای آنها لزوماً یک رنگ دارند، مثلاً ۰. اگر دومین همســـایه از هرکدام از این دو رأس از رنگ ۱ باشـــد، آنگاه برای v رنگ ۰ را انتخاب می‌کنیم، و یک تک‌رنگ $P3$ تشکیل می‌دهیم و این ۳ – استار ۲ – افراز را گسترش می‌دهد. در تنها موقعیتی که این رویه درست نیست در $C12$ است، زمانی که یکی از آنها، مثلاً w، هر دو همسایه خود را در $\phi(V_\triangle)$ دارد؛ در غیر این صورت، مشاهده ۱۳ اعمال می شود. دومین همسایه لزوماً $\phi(b)$ است.

فرض کنید در این موقعیت هستیم، که در شکل ۱۰ به نمایش درآمده است. می‌دانیم که w نسبت به $\phi(b)$ و دیگر همسایه های از درجه ۲ v همرنگ است. همچنین، $\phi(a)$ با رنگ های w و $\phi(b)$ متفاوت است. با استراتژی اعمال شده، $\phi(a)$ رنگی متفاوت از تنها همسایه خود که در $\phi(V_\triangle)$ نبود، دریافت کرد. بنابراین، ما می توانیم برای v همان رنگی که $\phi(a)$ دارد را انتخاب کنیم. این چیزی بیش از یک $P3$ تک‌رنگ تشکیل نمی‌دهد، و ۳ – استار ۲ – افراز را به G توسعه می‌دهد. در نهایت در هر موقعیت ثابت کردیم که G یک مثال متضاد نیست و به یک تناقض رسیدیم. این اثبات را به پایان می رساند. ■

منابع

[1] D. Achlioptas, The complexity of g-free colourability, Discrete Math 165–166 (1997), 21–30.
[2] O. V. Borodin and A. O. Ivanova, Near proper 2-coloring the vertices of sparse graphs, Discrete Anal Oper Res 16(2) (2009), 16–20.
[3] O. V. Borodin and A. O. Ivanova, List strong linear 2-arboricity of sparse graphs, J Graph Theory 67(2) (2011), 83–90.
[4] D. G. Corneil, Y. Perl, and L. Stewart, A linear recognition algorithm for cographs, SIAM J Comput 14 (1985), 926–934.
[5] J. Gimbel and J. Neset ˇ ˇril, Partitions of graphs into cographs, Discrete Math 310 (2010), 3437–3445.
[6] F. Havet and J.-S. Sereni, Improper choosability of graphs and maximum average degree, J Graph Theory 52 (2006), 181–199.
[7] T. R. Jensen and B. Toft, Choosability versus chromaticity, Geombinatorics 5 (1995), 45–64.
[8] L. Lovasz, Coverings and colorings of hypergraphs, Proceedings of the Fourth ´ South-Eastern Conference on Combinatorics, Graph theory, and Computing, Boca Raton, FL, 1973, pp. 3–12.
[9] J. Stacho, On p4-transversals of chordal graphs, Discrete Math 308 (2008), 5548–5554.