به نام خدا

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

مخابرات بی سیم

گزارش پروژه شماره ۲

حسین عطرسایی ۸۱۰۱۹۸۴۴۲

تیر ماه ۱۴۰۲

فهرست

چکیده

در بخش اول پروژه با مفاهیم کانال باند باریک و کانال ریلی آشنا شده و به ازای مدولاسیون‌های مختلف و اینکه کانال در گیرنده شناخته شده یا ناشناخته است، نرخ احتمال خطا را بررسی و مقایسه می‌کنیم. در نهایت نیز به مقایسهٔ Diversity در گیرنده و فرستنده پرداخته و تاثیر تعداد آنتن‌ها در فرستنده و گیرنده را بر نرخ احتمال خطا بررسی می‌نماییم.

در بخش دوم پروژه یک سیستم OFDM را به طور کامل پیاده‌سازی می‌کنیم و برای حذف اثر کانال در آشکارسازی، روش‌های Waterfilling، Diversity در گیرنده و Equalization را پیاده کرده و مقایسه می‌کنیم. در نهایت نیز اثر Clipping را در متلب شبیه سازی می‌کنیم.

بخش اول) کانال باند باریک

یک سیستم وایرلس درنظر گرفته و فرض می‌کنیم کانال باند باریک باشد و پس از نمونه برداری، سیگنال دریافتی در لحظه m به صورت رابطه زیر باشد:

$$y[m] = h[m]x[m] + \omega[m]$$

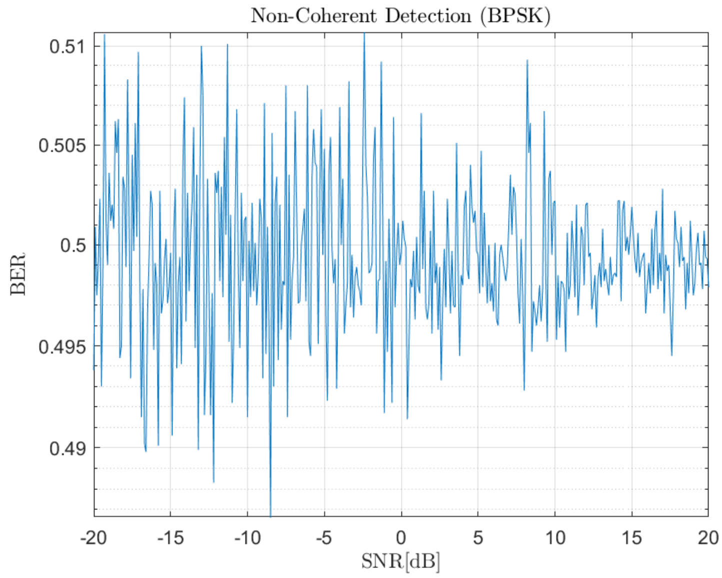
که در رابطه اخیر $h[m] \sim \mathcal{CN}(\cdot,\text{١})$ و $\omega[m] \sim \mathcal{CN}(\cdot, N_\cdot)$.

۱) فرض می‌کنیم از مدولاسیون BPSK برای ارسال داده استفاده شده باشد. (به عبارتی $x[m] = \pm a$)

الف) در مدلاسیون BPSK استفاده ازگیرندهٔ ناهمدوس روش مناسبی برای آشکارسازی نمی‌باشد چراکه گیرندهٔ ناهمدوس اطلاعات موجود در فاز سیگنال را دور می‌ریزد و از آن استفاده نمی‌کند. راه حل این مشکل استفاده از مدلاسیون DPSK است. درواقع در این حالت $y[m]$ دارای توزیع گوسی مختلط بوده و فاز آن یک دارای توزیع یکنواخت بین ۰ تا $\text{٢}\pi$ است.

$$y[m] \sim \mathcal{CN}(\cdot, a^{\text{٢}} + N_\cdot)$$

حال با شبیه سازی در متلب نیز این موضوع را نشان می‌دهیم:



شکل ۱: نمودار احتمال خطای آشکارسازی ناهمدوس بیت در مدلاسیون BPSK

با توجه به شکل بالا، مشخص است که این نوع آشکارسازی شکست خورده و سیگنال دریافتی کاملا ماهیت تصادفی دارد و احتمال خطا بسیار زیاد است.

ب) اگر از اثر محوشوندگی در کانال صرف نظر کنیم، خواهیم داشت:

$$y[m] = x[m] + \omega[m]$$

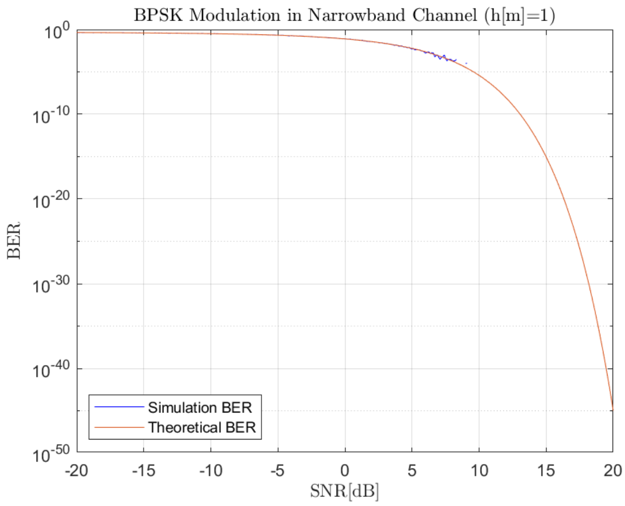
با توجه به اینکه $x[m]$، یک مقدار حقیقی است پس تنها مقدار حقیقی Complex Gaussian Noise روی آن تاثیر گذاشته و سیگنال دریافتی را تغییر می‌دهد. بنابراین:

$$Re\{y[m]\} = x[m] + \omega_I \; ; \quad \omega_I \sim N\left(۰, \frac{N_۰}{۲}\right)$$

حال می‌توان به راحتی احتمال خطا را از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$P_e = Q\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{N_۰}{۲}}}\right) = Q\left(\sqrt{۲\gamma_b}\right)$$

جهت شبیه سازی در متلب یک دنباله از سیگنال‌های ۰ و ۱ به طور تصادفی درست کرده و آن‌ها را ارسال می‌کنیم و مطابق آنچه گفته شد شبیه سازی را انجام می‌دهیم. برای شبیه سازی کانال و نویز کافی است که از تابع randn در متلب استفاده نماییم.



شکل ۲: نمودار احتمال خطای آشکارسازی بیت در مدلاسیون BPSK ($h[m] = ۱$)

ج) حال تعیین می‌کنیم به ازای احتمال خطای $۱۰^{-۶}$ به چه سیگنال به نویزی نیاز داریم:

$$P_e = Q\left(\sqrt{۲\gamma_b}\right) = ۱۰^{-۶} \Longrightarrow SNR = \frac{\left(Q^{-۱}(۱۰^{-۶})\right)^{۲}}{۲} \cong ۱۱/۲۹ \Longrightarrow SNR[dB] \cong ۱۰/۵۳\, dB$$

۲) در این بخش می‌خواهیم در جهت رفع مشکل بخش قبل از مدولاسیون pulse position استفاده کنیم. در این مدولاسیون از orthogonal signaling بهره گرفته و فرض می‌کنیم برای ارسال بیت ۱ در دو بازه زمانی متوالی به ترتیب سمبل ۰ و α ارسال می‌شود.

$$x_A \triangleq \begin{pmatrix} x[۰] \\ x[۱] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ ۰ \end{pmatrix}, \quad x_B \triangleq \begin{pmatrix} ۰ \\ a \end{pmatrix}$$

همچنین نحوهٔ آشکارسازی به صورت زیر است:

$$y \triangleq \begin{pmatrix} y[۰] \\ y[۱] \end{pmatrix}$$

الف و ب) برای تعیین نحوهٔ تصمیم گیری بهینه از قانون Maximum Likelihood(ML) استفاده می‌کنیم:

$$\Delta(y) \underset{<^{x_B}}{\overset{\geq^{x_A}}{}} ۰$$

به طوری که Δ در رابطهٔ بالا log-likelihood ratio است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta(y) \triangleq \ln\{\frac{f(y|x_A)}{f(y|x_B)}\}$$

در واقع وقتی $f(y|x_A)$ از $f(y|x_A)$ بزرگتر شود، نسبت $\frac{f(y|x_A)}{f(y|x_A)}$ بزرگتر از یک شده و مقدار ln مثبت می‌شود که نشان دهندهٔ دریافت x_A است.

در این نوع مدلاسیون اگر x_A ارسال شود:

$$y[۰] \sim \mathcal{CN}(۰, a^۲ + N_۰), \quad y[۱] \sim \mathcal{CN}(۰, N_۰)$$

به طوری که $y[۰]$ و $y[۱]$ مستقل هستند. به همین ترتیب اگر x_B ارسال شود، خواهیم داشت:

$$y[۰] \sim \mathcal{CN}(۰, N_۰), \quad y[۱] \sim \mathcal{CN}(۰, a^۲ + N_۰)$$

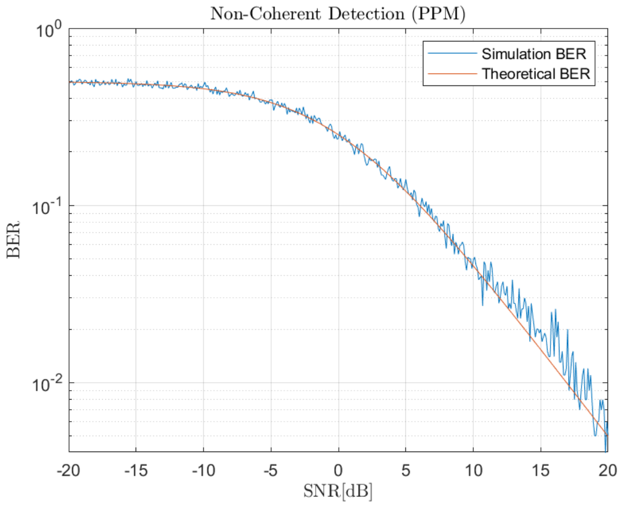
بنابراین log-likelihood ratio به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\Delta(y) &\triangleq \ln\left\{\frac{f(y|x_A)}{f(y|x_B)}\right\} = \ln\left\{\frac{f(y[۰]|x_A)f(y[۱]|x_A)}{f(y[۱]|x_B)f(y[۰]|x_B)}\right\} = \ln\left(\frac{e^{-\frac{y^۲(۰)}{a^۲+N_۰}} \times e^{-\frac{y^۲(۱)}{N_۰}}}{e^{-\frac{y^۲(۱)}{a^۲+N_۰}} \times e^{-\frac{y^۲(۰)}{N_۰}}}\right) \\ &= -\frac{y^۲(۰)}{a^۲+N_۰} - \frac{y^۲(۱)}{N_۰} + \frac{y^۲(۱)}{a^۲+N_۰} + \frac{y^۲(۰)}{N_۰} \\ &= \frac{y^۲(۰)}{N_۰} - \frac{y^۲(۰)}{a^۲+N_۰} - \frac{y^۲(۱)}{N_۰} + \frac{y^۲(۱)}{a^۲+N_۰} \\ &= y^۲(۰)\left(\frac{۱}{N_۰} - \frac{۱}{a^۲+N_۰}\right) - y^۲(۱)\left(\frac{۱}{N_۰} - \frac{۱}{a^۲+N_۰}\right) = \frac{\left(y^۲(۰) - y^۲(۱)\right)a^۲}{N_۰(a^۲+N_۰)}\end{aligned}$$

اگر $|y[۰]|^۲ > |y[۱]|^۲$ باشد، x_A آشکار شده و اگر $|y[۱]|^۲ > |y[۰]|^۲$، x_B آشکار می‌شود. با توجه به اینکه $y[۰]$ و $y[۱]$ دارای توزیع مختلط گوسی بوده پس $|y[۰]|^۲$ و $|y[۱]|^۲$ دارای توزیع نمایی با میانگین‌های $a^۲ + N_۰$ و $N_۰$ هستند و برای به دست آوردن احتمال خطا می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد:

$$p_e = \Pr\{|y[۱]|^۲ > |y[۰]|^۲ | x_A\} = \left(۲ + \frac{a^۲}{N_۰}\right)^{-۱} = \frac{۱}{۲(۱ + \frac{a^۲}{۲N_۰})} = \frac{۱}{۲(۱ + SNR)}$$

اکنون با توجه به توضیحات داده شده شبیه سازی را در متلب انجام داده و آشکارسازی را انجام می‌دهیم. سپس نمودار BER در شبیه سازی را به همراه BER به دست آمده از روابط تئوری رسم می‌کنیم:



شکل ۳: نمودار BER در مدولاسیون Pulse Position

ج) در این قسمت تعیین می‌کنیم برای رسیدن به احتمال خطای $۱۰^{-۶}$، به چه سیگنال به نویزی برحسب dB نیاز داریم:

$$p_e = \frac{۱}{۲(۱+SNR)} = ۱۰^{-۶} \Longrightarrow SNR[dB] = ۱۰\log\left(\frac{۱۰^{۶}}{۲} - ۱\right) \cong ۵۶/۹۸\, dB$$

این مقدار نسبت به قسمت ج در سوال قبل، حدود ۴۶ دسی بل، بیشتر است که این موضوع به خاطر حضور اثر محوشدگی در این مدولاسیون می‌باشد.

۳) فرض می‌کنیم از مدولاسیون BPSK برای ارسال داده استفاده شده باشد. (به عبارتی $x[m] = \pm a$)

الف) اثبات می‌کنیم که یک کانال محوشدگی می‌تواند به عنوان یک AWGN با یک تقویت متغیر در نظر گرفته شود. خود تقویت به عنوان یک متغیر تصادفی با یک تابع چگالی احتمال مشخص در نظر گرفته می‌شود. بنابراین می‌توان BER میانگین را با میانگین گیری از BER برای SNR لحظه‌ای روی توزیع SNR محاسبه کرد. با توجه به اینکه می‌دانیم BER برای BPSK از رابطهٔ $Q(\sqrt{۲\gamma_b})$ خواهیم داشت:

$$\overline{P_b} = \int_{۰}^{\infty} Q(\sqrt{۲\gamma})p_\gamma(\gamma)d\gamma$$

$$y = hx + \omega \xrightarrow{\times h^*} h^*y = |h|^۲x + h^*\omega; \quad \omega = \omega_I + j\omega_Q, \quad h = h_I + jh_Q$$

همچنین می‌دانیم:

$$\omega_I, \omega_Q \sim N\left(۰, \frac{N_۰}{۲}\right)$$

از آنجا که x در BPSK یک مقدار حقیقی است پس تنها مقدار حقیقی نویز آن را تغییر می‌دهد و بنابراین تصمیم گیری روی مقدار حقیقی سیگنال دریافتی انجام می‌شود و چون اطلاعات کانال در گیرنده به طورکامل مشخص است، می‌توان نوشت:

$$r \triangleq Re\left\{\frac{h^* y}{|h|}\right\} = |h|x + \frac{Re\{(h_I - jh_Q)(\omega_I + j\omega_Q)\}}{|h|} = |h|x + \frac{h_I\omega_I + h_Q\omega_Q}{|h|}$$

$$\frac{h_I\omega_I + h_Q\omega_Q}{|h|} \sim \frac{h_I^{۲}}{|h|^{۲}} N\left(۰, \frac{N_۰}{۲}\right) + \frac{h_I^{۲}}{|h|^{۲}} N\left(۰, \frac{N_۰}{۲}\right) = N\left(۰, \frac{N_۰}{۲}\right)$$

$$\Longrightarrow r \triangleq Re\left\{\frac{h^* y}{|h|}\right\} = |h|x + n; \quad n \sim N(۰,)$$

با توجه به رابطهٔ اخیر می‌توان احتمال خطای آشکار سازی x را به صورت زیر نوشت:

$$P_b = Q\left(\frac{a|h|}{\sqrt{\frac{N_۰}{۲}}}\right) = Q\left(\sqrt{۲|h|^{۲} SNR}\right)$$

$$\overline{P_b} = \int_۰^\infty Q\left(\sqrt{۲|h|^{۲} SNR}\right) p_\gamma(\gamma) d\gamma$$

برای به دست آوردن توزیع $p_\gamma(\gamma)$، باید دقت کرد که این توزیع به $|h|^{۲}$ بستگی داشته و از آنجا که $|h|$ توزیع ریلی دارد، پس توزیع $|h|^{۲}$، یک توزیع نمایی است و به همین دلیل می‌توان نوشت:

$$\gamma = |h|^{۲}\gamma_b$$

$$p_\gamma(\gamma) = \frac{۱}{\gamma_b} e^{-\frac{\gamma}{\gamma_b}} \Longrightarrow \overline{P_b} = \int_۰^\infty Q\left(\sqrt{۲\gamma}\right) \frac{۱}{\gamma_b} e^{-\frac{\gamma}{\gamma_b}} d\gamma$$

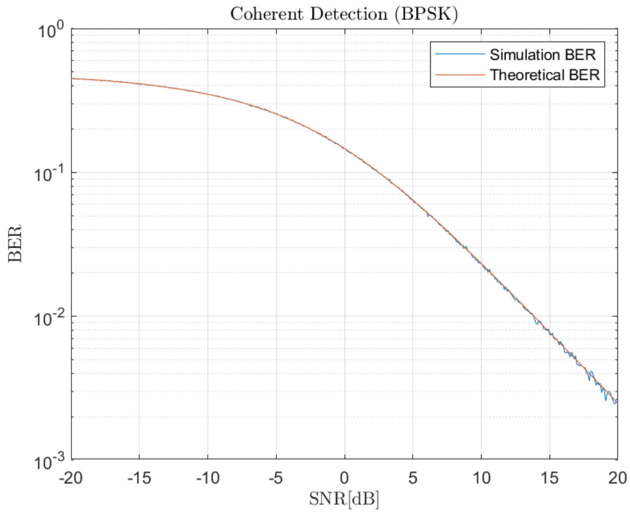
و با استفاده از MGF، می‌توان نوشت:

$$\overline{P_b} = \int_۰^\infty Q\left(\sqrt{۲\gamma}\right) \frac{۱}{\gamma_b} e^{-\frac{\gamma}{\gamma_b}} d\gamma = \frac{۱}{\pi} \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \exp\left(-\frac{x^{۲}}{۲sin^{۲}(\theta)}\right) d\theta = \frac{۱}{۲}(۱ - \sqrt{\frac{\gamma_b}{۱+\gamma_b}})$$

حال اگر از اثر محوشوندگی در کانال صرف نظر کنیم، دیگر γ متغیر تصادفی نخواهد بود و می‌توان به راحتی احتمال خطا را از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$P_e = Q\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{N_۰}{۲}}}\right) = Q\left(\sqrt{۲\gamma_b}\right)$$

حال برای شبیه سازی در متلب یک دنباله از سیگنال‌های ۰ و ۱ به طور تصادفی درست کرده و آن‌ها را در کانال ارسال می‌کنیم و مطابق آنچه گفته شد شبیه سازی را انجام می‌دهیم. برای شبیه سازی کانال و نویز کافی است که از تابع randn در متلب استفاده نماییم.

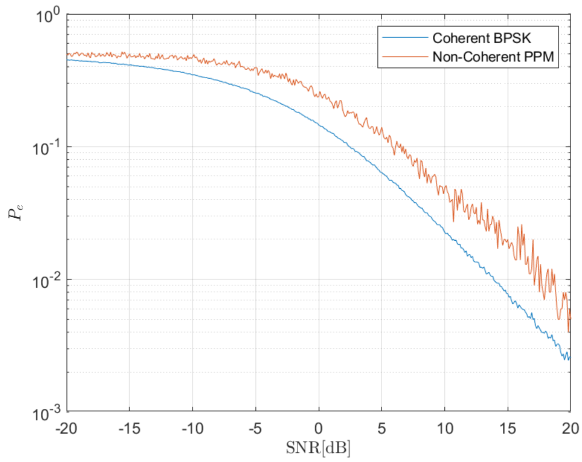


شکل ۴: نمودار احتمال خطای آشکارسازی همدوس بیت در شبیه سازی کانال ریلی

حال تعیین می‌کنیم به ازای احتمال خطای $۱۰^{-۶}$ به چه سیگنال به نویزی نیاز داریم:

$$P_e = \frac{۱}{۲}\left(۱ - \sqrt{\frac{\gamma_b}{۱+\gamma_b}}\right) = ۱۰^{-۶} \Longrightarrow SNR[dB] = ۱۰\log\left(\frac{(۱-۲\times ۱۰^{-۶})^{۲}}{۱-(۱-۲\times ۱۰^{-۶})^{۲}}\right) \cong ۵۳/۹۷\,dB$$

ب) برای مقایسهٔ آشکارسازی همدوس BPSK و آشکارسازی ناهمدوس در PPM، نمودار BER هر دو حالت را رسم می‌کنیم:



شکل ۵: مقایسهٔ نمودارهای احتمال خطای بیت به ازای مدولاسیون‌های BPSK و PPM

این دو نمودار به ازای SNRهای به اندازه کافی بزرگ، در حدود ۳dB تفاوت دارند.

ج) درواقع می‌توان گفت که داشتن اطلاعات در مورد کانال مزیت قابل توجهی نسبت به کمبود دانش در مورد آن ندارد. دلیل اصلی عملکرد نامناسب در حضور اثر محوشوندگی، نداشتن اطلاعات در مورد کانال نیست بلکه تصادفی بودن بهرهٔ کانال است.

۴) در این بخش فرض می‌کنیم اطلاعات کانال در گیرنده معلوم و از مدولاسیون QPSK برای ارسال داده استفاده شده باشد. بنابراین منظومهٔ این مدولاسیون به صورت زیر خواهد بود:

$$\{a(۱+j), a(۱-j), a(-۱+j), a(-۱-j)\}$$

در واقع، یک نماد BPSK به طور همزمان در هر یک از کانال‌های I و Q انتقال داده می‌شود. از آنجایی که نویز در کانال‌های I و Q مستقل است، بیت‌ها می‌توانند به صورت جداگانه شناسایی شوند و احتمال خطا بیت در AWGN به صورت زیر محاسبه می‌شود:

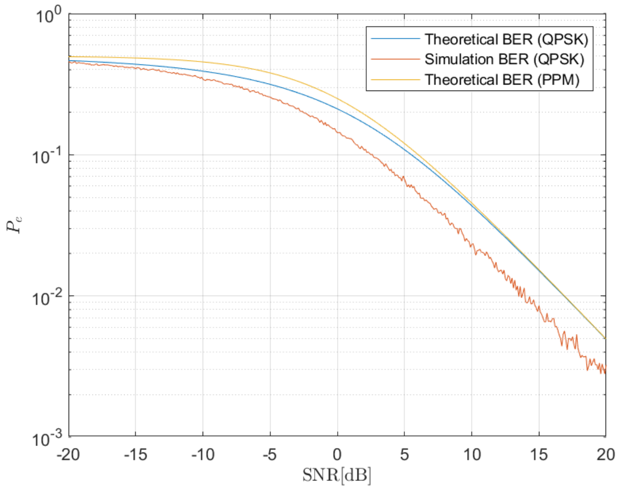
$$Q\left(\sqrt{\frac{۲a^۲}{N_۰}}\right) = Q\left(\sqrt{SNR_{QPSK}}\right)$$

بنابراین نسبت به BPSK، SNR نصف می‌شود. حال با جایگذاری در روابطی که در BPSK همدوس تحت تاثیر کانال ریلی داشتیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$P_e = \frac{۱}{۲}\left(۱ - \sqrt{\frac{SNR}{۲+SNR}}\right)$$

الف) حال نمودار خطای بهینه را برحسب SNR هم به صورت تئوری و هم به صورت شبیه سازی به دست می‌آوریم.

توجه شود که در شبیه سازی QPSK، از gray code بهره گرفته تا هر سمبل با سمبل کنار خود تنها در یک بیت اختلاف داشته باشد. حال یک دنباله‌ای از صفر و یک ها را به صورت تصادفی تولید کرده و آن‌ها را به صورت gray code در می‌آوریم. سپس آن‌ها را مدوله کرده و ارسال می‌کنیم. پس از ارسال اثر محوشوندگی در کانال و همچنین نویز را اضافه می‌نماییم. حال برای آشکارسازی، ابتدا اثر کانال را با تقسیم بر h کردن تا حدی جبران کرده و پس از آن با استفاده از Minimum Distance Detector، سیگنال دریافتی را آشکار می‌کنیم. در این روش ناحیه‌های تصمیم گیری را به توجه به منظومهٔ QPSK تعیین کرده و فاصلهٔ سیگنال دریافتی را از هرکدام از ۴ سمبل پیدا کرده و کمترین فاصله را انتخاب می‌نماییم.



شکل ۶: نمودارهای احتمال خطا به صورت تئوری و شبیه‌سازی به ازای مدولاسیون QPSK و مقایسهٔ آن با نمودار احتمال خطا به ازای مدولاسیون PPM

با توجه به شکل بالا نتیجه می‌گیریم که در SNRهای بالا، نمودارهای احتمال خطا در QPSK و PPM، به سمت هم میل کرده و احتمال خطا بهبود پیدا نکرده است. دقیقاً به همان دلیلی که پیش‌تر نیز گفته شد، داشتن اطلاعات در مورد کانال چندان تاثیری در بهبود احتمال خطا ندارد.

۵) دراین سوال می خواهیم از روش دایورسیتی در زمان استفاده کنیم. فرض کنید برای ارسال سمبل x به تعداد L بار، این سمبل را ارسال کنیم و سپس در گیرنده این سمبل را آشکار کنیم. به عبارتی سیگنال دریافتی در ارسال i ام به صورت زیر است:

$$y_l = h_l \, x + \omega_l \ ; \quad L \geq l \geq ۱$$

که دررابطه اخیر $\omega_i \sim \mathcal{CN}(۰, N_۰)$.

الف) در این روش، فاصله زمانی بین ارسال سمبل ها باید به گونه‌ای باشد که رفتار جدید از کانال مشاهده نماییم. با توجه به آنچه که در درس نیز اشاره شد، زمان همدوسی، زمانی است که با گذشت آن، یک کانال نسبت به حالت قبلی‌اش مستقل می‌شود. بنابراین فاصلهٔ زمانی بین ارسال سمبل‌ها باید به اندازهٔ زمان همدوسی کانال باشد.

ب) فرض می‌کنیم از مدولاسیون BPSK در فرستنده استفاده کرده باشیم. نحوهٔ تصمیم‌گیری بهینه و همچنین احتمال خطای بهینه را برحسب SNR بدست می‌آوریم.

همانند قبل ابتدا اثر کانال را جبران می‌کنیم:

$$\frac{h^*}{\|h\|} y = \|h\| x + \frac{h^*}{\|h\|} \omega$$

اکنون یک آشکارسازی اسکالر با نویز $\frac{h^*}{\|h\|}\omega\sim\mathcal{CN}(\cdot,N_\cdot)$ داریم که ساختار گیرندهٔ آن نیز یک matched filter یا maximal ratio combiner(MRC) است. در واقع در این روش در هرشاخه، سیگنال دریافتی با توجه به قدرت آن وزن داده شده و همچنین فاز ایجاد شده توسط کانال نیز با استفاده از Co-Phasing جبران می‌شود.

حال مدولاسیون BPSK را در نظر می‌گیریم؛ در این مدولاسیون احتمال خطا به شرطی شدن روی h به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Q\left(\sqrt{۲\|h\|^۲ SNR}\right)$$

که در رابطهٔ بالا، $SNR=\frac{a^۲}{N_\cdot}$ متوسط سیگنال به نویز دریافتی به ازای زمان سمبل است. برای محاسبهٔ احتمال خطای کل، باید روی $\|h\|^۲$ میانگین بگیریم. با توجه به i.i.d. بودن h_lها و توزیع مختلط گوسی آن‌ها می‌توان نوشت:

$$\|h\|^۲=\sum_{l=۱}^{L}|h_l|^۲$$

عبارت بالا نشان‌دهندهٔ یک متغیر تصادفی Chi-Square با ۲L درجه آزادی است که توزیع آن به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\frac{۱}{(L-۱)!}x^{L-۱}e^{-x},\quad x\geq\cdot$$

بنابراین احتمال خطای متوسط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$p_e=\int_\cdot^\infty Q\left(\sqrt{۲xSNR}\right)f(x)dx=\left(\frac{۱-\mu}{۲}\right)^L\sum_{l=\cdot}^{L-۱}\binom{L-۱+l}{l}\left(\frac{۱+\mu}{۲}\right)^l;\qquad \mu\triangleq\sqrt{\frac{SNR}{۱+SNR}}$$

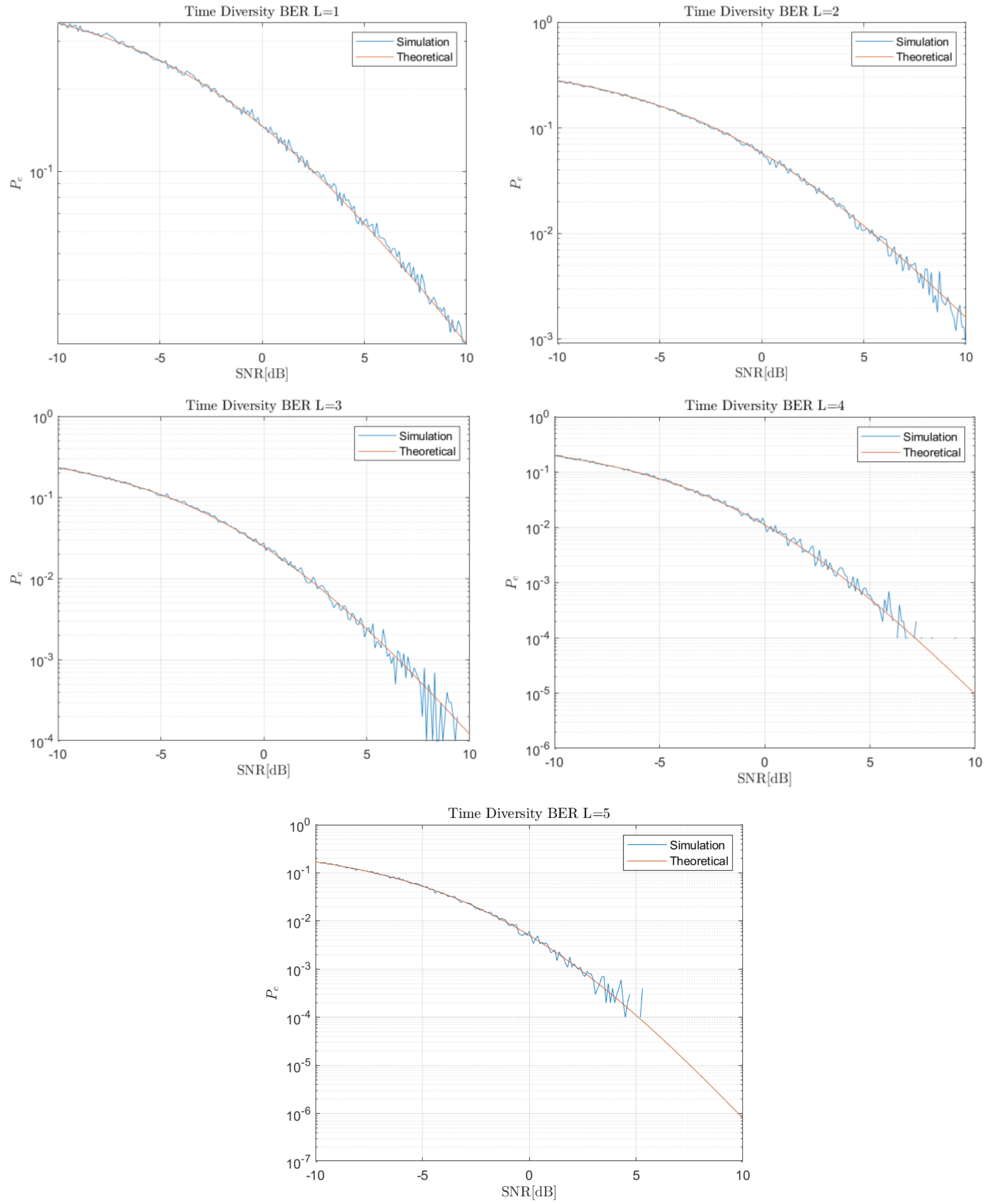
اکنون با استفاده از رابطـــه بدست آمده و هم به صورت شبیه ســـازی احتمـــال خطا را به ازای هر $L\in\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ برحسب SNR دربازهٔ $[-۱\cdot\ dB,۱\cdot\ dB]$ در یک نمودار رسم می‌کنیم.

در شبیه سازی همانند قبل، دنباله‌ای تصادفی از بیت‌های ۰ و ۱ درست کرده و آن‌ها را با مدولاسیون BPSK ارسال می‌کنیم. سپس به ازای مقادیر مختلف L، کانال و نویز را شبیه سازی کرده و به سیگنال ارسالی اضافه می‌نماییم. برای آشکارسازی این سیگنال مطابق آنچه که گفته شد از روش MRC بهره گرفته و هرشاخه‌ای که SNR بیشتری دارد را گین بیشتری می‌دهیم. در نهایت برای به دست آوردن خروجی، با استفاده از تابع sum و real گرفتن سیگنال دریافتی را آشکار می‌نماییم.

$$z(t) = \left(\sum_{l=1}^{L} a_l\, h_l\right) x + \left(\sum_{l=1}^{L} a_l\right) n; \qquad a_l = |a_l| e^{-j\angle h_l}$$

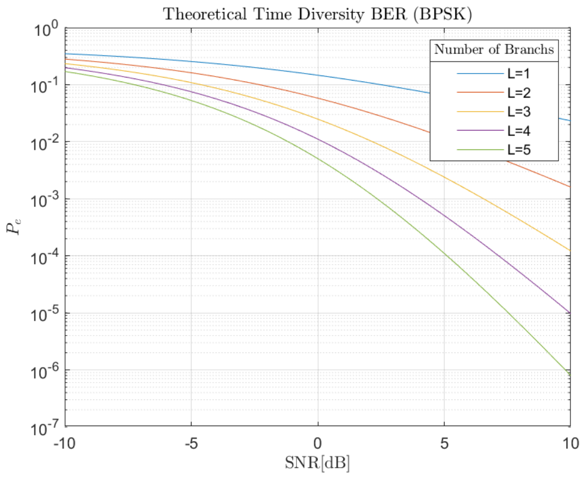
$$|a_l| = \frac{|h_l|}{\sqrt{N.}}$$

همانطور که در رابطۀ بالا مشاهده می‌شود، با استفاده از ضریب a، Co-phasing صورت می‌گیرد. اکنون نمودارها را به ازای مقادیر مختلف L، رسم می‌کنیم.



شکل ۷: نمودارهای احتمال خطا به صورت تئوری و شبیه‌سازی به ازای مدولاسیون BPSK و مقادیر مختلف از تعداد شاخه‌ها

با توجه به شکل ۷، مشاهده می‌کنیم که نتایج شبیه سازی با احتمال خطاهای تئوری هم‌خوانی دارد. حال برای تحلیل و مقایسه، نمودار خطاهای تئوری را به ازای مقادیر مختلف تعداد شاخه‌ها را در یک نمودار رسم می‌کنیم.



شکل ۸: نمودارهای احتمال خطا به صورت تئوری به ازای مدولاسیون BPSK و مقادیر مختلف از تعداد شاخه‌ها

با توجه به شکل ۸، می‌توانیم نتیجه بگیریم که هرچه قدر تعداد دفعات تکرار ارسال بیشتر باشد، احتمال خطا به ازای SNR یکسان در تمام حالات، کمتر می‌شود.

۶) در این سوال می‌خواهیم از دایورسیتی در مکان استفاده کنیم. فرض می‌کنیم M آنتن در فرستنده و یک آنتن در گیرنده داشته باشیم. فرض می‌کنیم آنتن های فرستنده به اندازه کافی از هم فاصله داشته باشند تا بهره کانال در آنها از هم مستقل شود. به عنوان مثال اگر $M = ۲$ آنگاه سیگنال دریافتی در بازه زمانی mام به صورت زیر است:

$$y[m] = h_۱[m]x_۱[m] + h_۲[m]x_۲[m] + \omega[m], \qquad L \geq i \geq ۱$$

الف) برای پیاده سازی دایورسیتی در زمان می‌توان به تعداد ارسال‌ها، آنتن فرستنده با فاصلهٔ مناسب گذاشت و سمبل یکسانی را درهر کانال ارسال کرد. بدین صورت این ساختار شبیه ساختار دایورسیتی زمانی می‌شود.

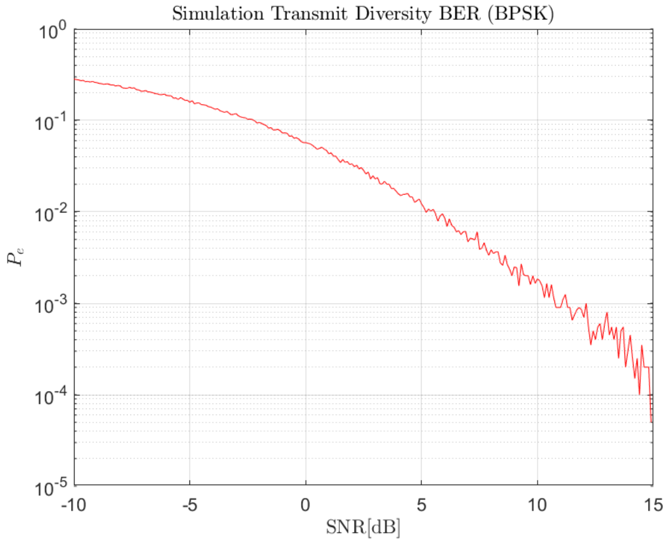
ب) در این بخش به شبیه سازی این ساختار می‌پردازیم. همانند گذشته دنباله‌ای تصادفی از صفر و یک را برای هردو آنتن فرستنده درست کرده و با بهره گیری از حلقه‌های for، هر سمبل را مطابق آنچه که گفته شد در هر time slot ارسال می‌نماییم. سپس به کمک روابط زیر آشکارسازی سمبل را انجام می‌دهیم:

$$y = \begin{bmatrix} y_۱ \\ {y_۲}^* \end{bmatrix} = H_c \begin{bmatrix} s_۱ \\ s_۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_۱ \\ n_۲ \end{bmatrix};\ H_c \triangleq \begin{pmatrix} h_۱ & h_۲ \\ {h_۲}^* & -{h_۱}^* \end{pmatrix}$$

$$z = {H_c}^H y = \begin{pmatrix} |h_۱|^۲ + |h_۲|^۲ & \cdot \\ \cdot & |h_۱|^۲ + |h_۲|^۲ \end{pmatrix} s + \tilde{n}$$

حال با توجه به اینکه مدولاسیون مورد نظر BPSK است و سمبل‌ها ۱ یا ۱- هستند و همچنین عبارت $|h_1|^2 + |h_2|^2$ همواره نامنفی است می‌توان برای آشکارسازی تنها بخش حقیقی z را مورد بررسی قرار داد؛ به گونه ای که اگر بخش حقیقی مثبت، سمبل ۱ و اگر بخش حقیقی منفی سمبل ۱- آشکار شود.

اکنون به ازای SNRهای مختلف نمودار احتمال خطا را رسم می‌کنیم.



شکل ۹: نمودار احتمال خطا در Transmit Diversity به ازای مدولاسیون BPSK و مقادیر مختلف SNR

ج) space time codes باعث کاهش احتمال خطا و افزایش نرخ ارسال می‌شود. همچنین، در این روش، تعداد آنتن های فرستنده بیشتر است که باعث افزایش گین و بهبود کیفیت سیگنال می‌شود. استفاده از چندین آنتن فرستنده، باعث می‌شود تا گیرنده بتواند از سیگنال‌های مختلف دریافت شده، اطلاعات بیشتری را استخراج کند و در نتیجه باعث بهبود کیفیت سیگنال و کاهش احتمال خطا می‌شود.

بخش دوم) کانال فرکانس گزین

در این بخش فرض می‌کنیم، کانال فرکانس گزین یا به عبارتی پهن باند باشد. بنابراین سیگنال دریافتی در لحظه k در حوزه گسسته (پس از نمونه برداری) به صورت زیر است:

$$y[k] = \sum_{i} h_i[k]x[k-i] + \omega[k] \quad (۱)$$

که دررابطه اخیر، $h_i[k] \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$ تپ i ام کانال در لحظه k می باشد. فرض می‌کنیم L تعداد کل تپ‌های کانال باشد .در این صورت رابطهٔ (۱) به صورت رابطه زیر ساده می شود:

$$y[k] = \sum_{i=۰}^{L-۱} h_i[k]x[k-i] + \omega[k] \quad (۲)$$

پهنـــای باند کـانال $W = ۲۰\ MHz$ ، زمان همدوسی کانال $T_c = ۵\ ms$ و گستـــردگی تاخـیر کانال، $T_d = ۱۰ \mu s$ در نظر گرفته می‌شود. می‌خواهیم یک پیام به طول $N = ۲ \times ۱۰^۶$ بیت را در این کانال به سمت گیرنده با مدولاسیون BPSK ارسال کنیم. یک سیستم OFDM برای ارسال این پیام طراحی می‌کنیم. فرض می‌نماییم n_c تعداد زیرحامل‌ها و cp طول پیشوند گردشی باشد. بیت های پیام را به صورت تصادفی (با احتمال ۰/۵ ،بیت صفر و با احتمال ۰/۵ ،بیت ۱) تولید می‌کنیم. فرض می‌کنیم تپ های کانال در طول یک بازه زمانی به طول T_c تغییرات کمی دارند و برای سادگی ثابت فرض می‌شوند.

۱) با توجه به نرخ نمونه برداری نایکوییست، تعداد تپ‌های کانال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_{samp} = \frac{T}{N} = \frac{۱}{W}$$

$$L = \frac{T_d}{T_{samp}} = WT_d = ۲۰ \times ۱۰ = ۲۰۰$$

طول پیشوند گردشی (cp) را نیز برای جلوگیری از ISI و استفاده کردن از خواص DFT، $L-۱$ در نظر می‌گیریم.

$$cp = L - ۱ = ۱۹۹$$

۲) بهره‌گیری از OFDM افزون بر مزیت‌هایی که به ارمغان می‌آورد، محدودیت‌ها و هزینه‌هایی را نیز به همراه دارد. یکی از معایب و محدودیت‌های آن استفاده از پیشوند گردشی است. این پیشوند با اینکه در کاهش تداخل موثر بوده اما قسمتی از کل زمان را که برای ارسال داده قابل استفاده نیست، اشغال می‌کند. در نتیجه مقدار تلفات کل زمان ارسال به صورت $\frac{L}{N_c+L}$ بوده و این موضوع باعث تلفات در توان متوسط پیام ارسالی نیز می‌شود. بنابراین باید تا حد ممکن N_c را بزرگ در نظر گرفت. اما باید توجه کرد که N_c دارای کران بالا بوده

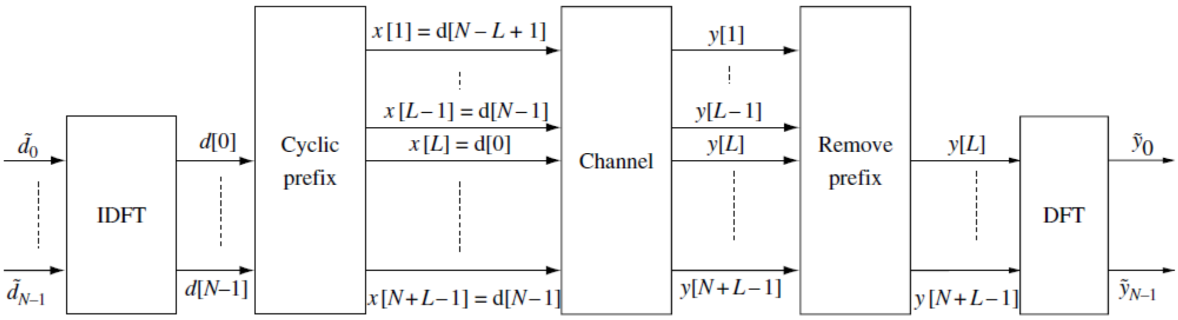
و بیش از حد نمی‌توان آن را بزرگ در نظر گرفت. اگر کانال به آرامی تغییر کند، آنگاه زمان همدوسی کانال (T_C) بسیار بزرگتر از پهنای تأخیر (T_d) است. برای کانال‌های under spread، طول بلوک OFDM می‌تواند به طور قابل توجهی بزرگتر از طول چند مسیر ($L = T_d W = ۲۰۰$) انتخاب شود، اما همچنان کوچکتر از طول بلوک همدوسی ($T_c W = ۱۰۰۰۰۰$) باشد. بنابراین:

$$L \ll N_c < T_c W$$

حال با توجه به توضیحات تعداد زیر حامل‌ها را در یک بلاک ۸۰۰۰۰ در نظر می‌گیریم و بدین صورت طول هر بلاک ۸۰۰۰۰ می‌شود. دلیل اینکه طول بلاک را به این صورت تعیین می‌کنیم این است که در شبیه سازی با توجه به زمان همدوسی، کانال بعد از ارسال هربلاک عوض شود و شبیه سازی ساده تر شود.

۳) با توجه به اینکه طول هر بلاک ۸۰۰۰۰ است و طول پیام نیز ۲×۱۰^۶ است. بنابراین ۲۵ تا بلاک نیاز است.

۴) بلاک دیاگرام یک سیستم OFDM به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۱۰: بلوک دیاگرام یک سیستم OFDM

در این سیستم، در ابتدا سمبل‌های هر بلاک به صورت موازی مدوله شده و وارد بلاک IFFT می‌شوند تا به وسیلهٔ زیرحامل‌ها وارد کانال شوند. پس از آن به دلیل آنچه که پیش تر نیز گفته شد، پیشوند گردشی اضافه شده و پیام ارسال می‌شود. پیشوند گردشی پیام ارسالی، پس از عبور از کانال چند مسیره و اضافه شدن نویز که شامل تداخل بین سمبل‌ها است، حذف می‌شود. در نهایت نیز از خروجی حاصل FFT گرفته می‌شود. در این حالت سیگنال خروجی به صورت زیر می‌باشد:

$$Y_k = a_k H_k + n_k$$

حال برای از بین بردن اثر کانال از Waterfilling قبل از عملیات IFFT استفاده می‌کنیم. Waterfilling با دانش بر اطلاعات کانال در فرستنده انجام می‌شود و تخصیص توان برای به هر زیر کانال به این صورت است که روی هر کانالی که وضعیت بهتری دارد، بیشتر سرمایه گذاری می‌کنیم.

$$P_i^* = (\frac{۱}{\lambda} - \frac{N.}{|H_i|^۲})^+$$

که مقدار λ با توجه به قید رو به رو تعیین می‌شود:
$$\sum_{i=0}^{n_c-1} P_i^* = P_{max}$$

P_{max} مجموع توان زیر حامل‌ها است. با این تفاسیر برای از بین بردن اثر کانال، ضرائب Waterfilling را به صورت زیر تعریف می‌کنیم تا اثر کانال را در فرستنده خنثی نماییم:

$$W_k = \sqrt{P_i^*} \measuredangle H_i^*$$

مسئلهٔ بهینه سازی به صورت زیر حل می‌شود:

$$C(P) = \sum_{i=۱}^{n} \log{(۱ + \frac{P_i|H_i|^۲}{N.})}$$

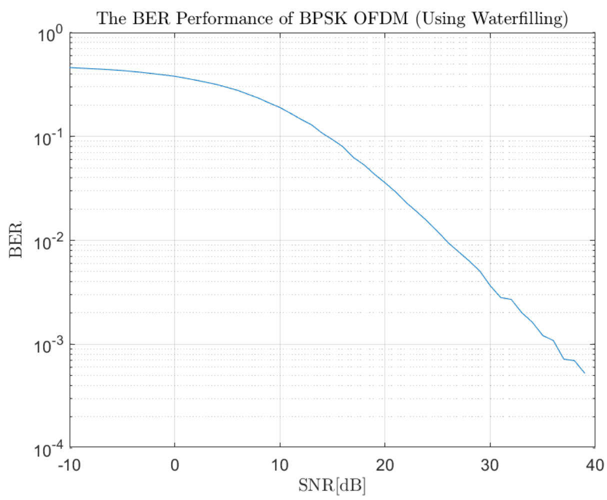
$$g(P) = \sum_{i=۱}^{n} P_i - P_{max} \;\; ; \quad P = \begin{bmatrix} P_۱ \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$L(\lambda, P) = C(P) - \lambda g(P)$$

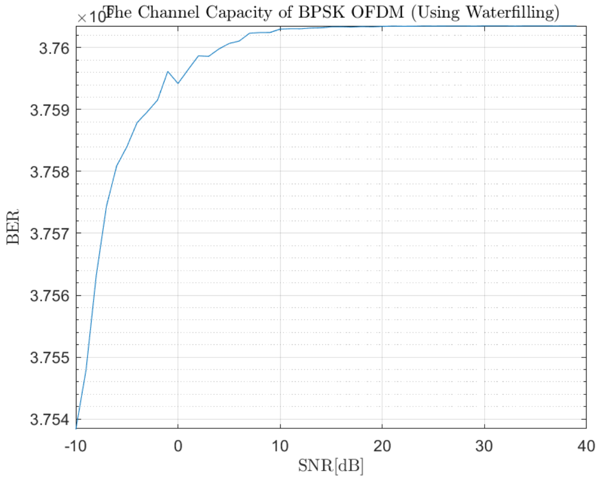
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial P_i} L(\lambda, P) = \frac{\partial}{\partial P_i} (\sum_{i=۱}^{n} \log{(۱ + \frac{P_i|H_i|^۲}{N.})}) + \lambda \frac{\partial}{\partial P_i} (\sum_{i=۱}^{n} P_i - P_{max}) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{|H_i|^۲}{N.}}{۱ + P_i \frac{|H_i|^۲}{N.}} - \lambda = ۰ \Rightarrow P_i^* = \left(\frac{۱}{\lambda} - \frac{N.}{|H_i|^۲}\right)^+ = \max{(\frac{۱}{\lambda} - \frac{N.}{|H_i|^۲}, ۰)}$$

بنابراین باید به دنبال λ ای باشیم که $P_i^* = \left(\frac{۱}{\lambda} - \frac{N.}{|H_i|^۲}\right)^+$ شود. بنابراین باید مقدار $\sum_{i=۰}^{n_c-۱} P_i - P_{max}$ کمینه و برابر صفر شود. می‌توان با استفاده از دستور fsolve، ریشه‌های معادلهٔ فوق را پیدا کرد. درنهایت نیز Waterfilling را اعمال می‌کنیم و نمودار احتمال خطا و ظرفیت کانال را رسم می‌کنیم.



شکل ۱۱: نمودار احتمال خطای یک سیستم OFDM با استفاده از Waterfilling



شکل ۱۲: نمودار ظرفیت کانال در یک سیستم OFDM با استفاده از Waterfilling

۵) در این بخش ابتدا یک رشته بیت به طول ۲×۱۰^۶ تولید کرده و سپس با استفاده از مدولاسیون BPSK، رشته بیت ۰ و ۱ را به ۱- و ۱ تبدیل کرده و به صورت ۲۵ بلاک در می‌آوریم. دقت شود که کانال تقریباً به ازای هر بلاک تغییر می‌کند و این تغییر در حلقهٔ مربوط به ارسال بلاک‌ها اعمال می‌کنیم. حال در هربلاک cp را اضافه نموده و خروجی حاصل را با کانال کانوالو می‌کنیم. با توجه به اینکه طول کانال L می‌باشد طول خروجی کانوولوشن $N_c + L + cp - ۱$ می‌شود و باید $L - ۱$ تا از آخر و cp را از آن حذف کنیم. سپس مطابق بلوک دیاگرام سیستم OFDM، از خروجی در گیرندهٔ FFT می‌گیریم.

۶) در این همانند بخش قبل ابتدا یک رشته بیت به طول ۲×۱۰^۶ تولید کرده و سپس با استفاده از مدولاسیون BPSK، رشته بیت ۰ و ۱ را به ۱- و ۱ تبدیل کرده و به صورت ۲۵ بلاک در ۱۰ کانال ارسال کرده تا ۱۰ گیرنده آن‌ها را دریافت کنند. حال خروجی تمام گیرنده‌ها را به روش MRC با هم جمع می‌کنیم. برای این کار ابتدا فاز کانال را خنثی کرده و ضرائب Co-Phasing را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

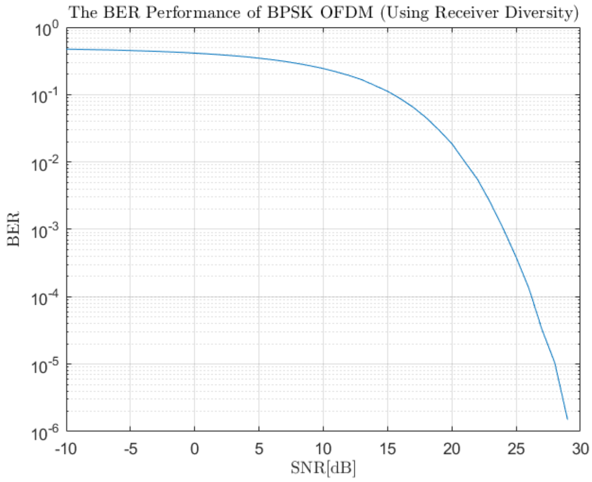
خروجی گیرندهٔ k ام: $Y_k = a_k H_k + \eta_k \quad ; \quad \eta_k = FFT(n_k)$

$$r_k = |r_k| e^{-j\angle H_k}$$

$$|r_k| = \frac{|H_k|}{\sqrt{N_c N.}}$$

دلیل اینکه توان نویز $N_c N.$ در نظر گرفته می‌شود این است که در خروجی گیرنده‌ها از نویز اضافه شده در کانال FFT به تعداد نقاط N_c گرفته شده و توان نویز $N_c N.$ می‌شود.

درنهایت پس از پیاده سازی این سیستم، نمودار احتمال خطا را رسم می‌کنیم.



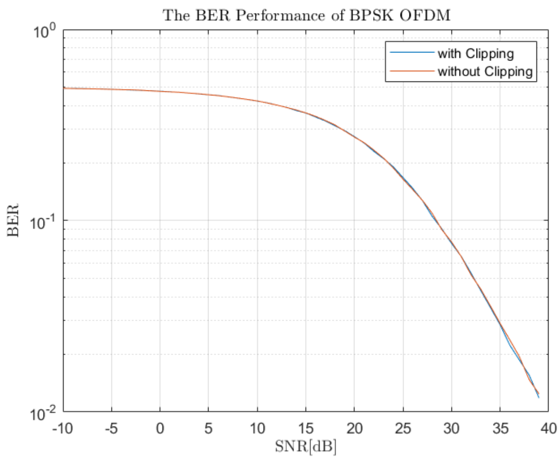
شکل ۱۳: نمودار احتمال خطای یک سیستم OFDM با استفاده از Equalization

۷) همانند آنچه در بخش‌های قبل پیاده سازی کردیم. ابتدا پیام ارسالی را به صورت بلاک بلاک ارسال کرده و مطابق بلوک دیاگرام سیستم OFDM، از خروجی در گیرنده FFT گرفته و Equalization را مطابق روابط زیر اعمال می‌نماییم.

$$ZF: W_k = \frac{۱}{H_k}$$

$$MMSE: W_k = \frac{{H_k}^*}{|H_k|^{۲} + \frac{\sigma_n^{۲}}{\sigma_s^{۲}}}$$

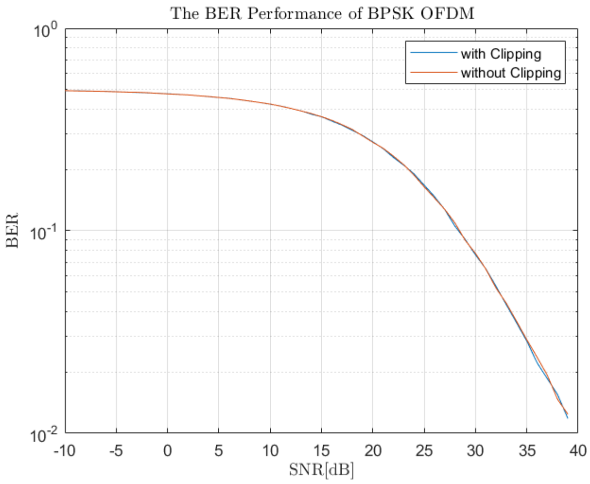
با توجه به اینکه توان پیام ارسالی از توان نویز بسیار بزرگتر است، هردو روش به سمت هم میل می‌کنند.



شکل ۱۴: نمودار احتمال خطای یک سیستم OFDM با استفاده از Equalization

۸) در این قسمت قصد داریم تاثیر clipping را بر نمودار احتمال خطا ببینیم. برای این موضوع باید به اندازهٔ $۰/۸ \max(|X_k|)$ در خروجی IFFT در فرستنده، clipping رخ دهد. برای شبیه سازی، باید ابتدا اندیس آن دسته از درایه‌هایی که بزرگتر از $۰/۸ \max(|X_k|)$ هستند را پیدا کرده و با نگه داشتن فاز آن‌ها، اندازهٔ

آن‌ها را برابر $\text{۰/۸}\max(|X_k|)$ قرار دهیم. در شبیه سازی انجام شده تفاوت چندانی بین حالت قبل (بدون اثر clipping با MMSE Equalization) دیده نمی‌شود درحالی که انتظار داشتیم، در SNR های بالاتر اثر clipping از نظر احتمال خطا وضع بدتری داشته باشد.



شکل ۱۵: مقایسهٔ نمودار احتمال خطای یک سیستم OFDM با استفاده از Equalization در دو حالت با اثر Clipping و بدون Clipping