«سری ۳ تمرینات کیهان شناسی مقدماتی»

حسین محمدی «96101035» دکتر ابوالحسنی TA: آقای سمندر و آقای سرانجام

سوال ۱:

$$\frac{dE}{dr} = -kE \to \frac{dE}{E} = -k\,dr \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}}$$

$$\ln \frac{E}{E_0} = -k(r-r_0) \Rightarrow E(r) = E_0 e^{-k(r-r_0)}$$

پس نور به شکل نمایی خسته می‌شود. قرار دهید که $r_0 = 0$ در این صورت برای rها بسیار کوچک می‌توان بسط داد:

$$E(r) \simeq E_0(1-kr) \to \frac{E}{E_0} = 1-kr$$

توجه کنید که $\frac{E}{E_0}$ همان نسبت انرژی موقع رصد شدن $(E=E_0)$ یا مشاهده شده observed و انرژی هنگام گسیل شدن $(E_0=E_e)$ است که مطابق $E \propto \frac{1}{\lambda}$ داریم:

مرتبه خطی

$$\frac{E_0}{E_e} = \frac{\lambda_e}{\lambda_0} = 1-kr \xrightarrow{\text{معکوس کردن}} \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{1}{1-kr} \simeq 1+kr$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = kr \to \frac{\lambda_0-\lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = kr$$

اما طبق تعریف $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = z$ است $\Leftarrow z = kr$

در $z \ll 1$ چون k ثابت است پس $r \ll 1$ و می‌توان اختلاف انرژی را نوشت:

$$E(r) - E(r_0) = E_0 e^{-kr} - E_0 = E_0(e^{-kr}-1) = E_0(\cancel{1}-kr-\cancel{1})$$

$$= E_0 \cdot -kr \to \frac{\Delta E}{E_0} = -kr$$

پس نرخ کاهش انرژی با فاصله برای $z \ll 1$ خطی است.

می دانیم که $v = cz$ و $v = Hd$ $\longrightarrow$ $H = z \times \dfrac{c}{d}$

از این

برای ارضای رابطه هابل بایستی

$$K\cancel{d} = z = \frac{H \times \cancel{d}}{c}$$

بدست آوردیم

پس با شرط در مورد قانون هابل هم صادق است $\longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{k = H/c}$$

سؤال دوم : همانطور که گفتید منظور از $q = 1/2$ جهان تحت ماده غالب است، چون جهان تخت $k=0$ پس متریک به متریک مینکوفسکی تقلیل می‌یابد.

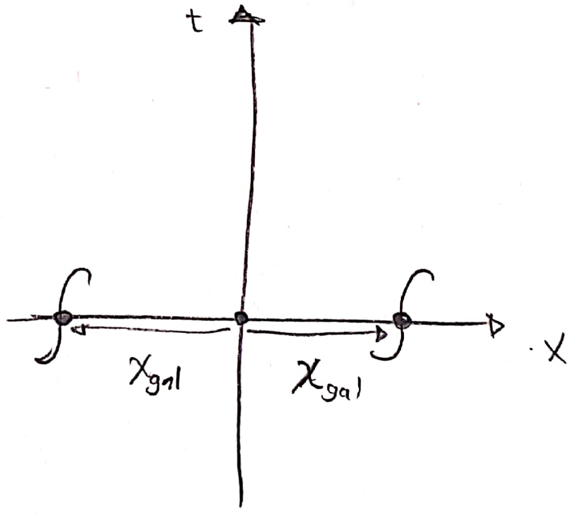
برای این که این دو کهکشان رابطه ی علی داشته باشند، باید یکی در افق ذره ی دیگری باشد و بالعکس... .
افق ذره را حساب می‌کنم و بر حسب dp بازنویسی می‌کنم:

$$\chi_{P.H} = a(t_0)\int_0^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} \longrightarrow \text{for } q = +1/2 \longrightarrow a(t) = C t^{2/3}$$

$$\rightarrow \frac{c\,a(t_0)\,t_0^{2/3}}{a(t_0)} \int_0^{t_0} t^{-2/3}\,dt = \frac{c\,\cancel{a_0}}{\cancel{a_0}}\, t_0^{2/3}\, \frac{1}{1/3}\, t_0^{1/3} = 3ct_0$$

حال می‌خواهم افق ذره را بر حسب dp بازنویسی کنم:

$$dp = a(t_0)\,\chi_{galaxy} \longrightarrow \chi_{gal} = \frac{dp}{a_0}$$



راستش هنوز هم که هنوز است من این سؤال را خوب درک نکرده‌ام و به نظرم باید یک بار بنشینم و شک هایمان را وا کنیم!

مثلا روش دیگری استفاده از متریک مینکوفسکی برای خواندن ΔS^2 بود،

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\,d\chi^2$$

اگر مسیری از $(t_1, \frac{dp}{a_0}, 0, 0)$ به $(t_2, -\frac{dp}{a_0}, 0, 0)$ را در نظر بگیریم ←

$$ds = \int \left[c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - a^2(t)\left(\frac{d\chi}{d\tau}\right)^2\right]^{1/2} d\tau \qquad t \in (0,1)$$

$$t = t_1 + \tau(t_2 - t_1)$$
$$\chi = \frac{dp}{a_0} + \tau\left(-\frac{2dp}{a_0}\right)$$

$$\Delta s = \int_0^1 d\tau \left(c^2(t_2-t_1)^2 - \frac{4d_p^2}{a_0^2} \times \left(t_1 + \tau(t_2-t_1)\right)^{2/3} \right)^{1/2}$$

$$\xi \Big|_{t_1}^{t_2} \longleftarrow \xi = t_1 + \tau(t_2-t_1)$$

با گرفتن این انتگرال ← تغییر متغیر

$$\Delta s^2 = \int_{t_1}^{t_2} d\xi \left(c^2 (t_2-t_1)^2 - \frac{4d_p^2}{a_0^2} \xi^{2/3} \right)^{1/2}$$

گرفتن این انتگرال هم راه به جایی نبرد ...

وقتی دو رویداد را همزمان دیده‌ایم در این صورت $t_2-t_1=0$ ، همواره $\Delta s^2<0$ است، این یعنی همواره دو کهکشان در ارتباط علّی هستند

اصلاً وقتی ما دو کهکشان را همزمان می‌بینیم، مفهوم افق ذره معنی ندارد، افق ذره تمامی رویدادهای گذشته است که (مثلاً در $t=t_{min}$) که امکان آن را داشته که در $t=t_0$ با ما رابطه علّی داشته باشد، اما ما این جا دو اندازه‌گیری را [فاصله کهکشان‌ها] همزمان انجام داده‌ایم و اصلاً مفهوم افق ذره وارد نمی‌شود.

افق ذره برای ناظر هم بستگی به t_{min} دارد و از رابطه

$$\chi_{p.H} = \int_{t_{min}}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)}$$

حاصل می‌شود.

دلیل نداشتم که روی این سوال بحث شود.

سوال سوم :

$$r_H = \frac{c}{H(t)} = \frac{ca}{\dot a}$$

تعریف $q = -\frac{\ddot a a}{\dot a^2}$

$$\dot r_H = c\left(\frac{\dot a^2 - a\ddot a}{\dot a^2}\right) = c\left(\frac{\dot a^2}{\dot a^2} - \frac{a\ddot a}{\dot a^2}\right) = c(1+q)$$

سوال 4 الف)

در جهان ماده غالب، می دانیم که از حل معادله ی فریدمان $a(t) = Ct^{2/3}$ است ←

$$d\eta = c'\frac{dt}{t^{2/3}} \to \text{انتگرال گیری} \to \eta = c' \times \frac{1}{1-2/3}\, t^{1-2/3} = 3c't^{1/3}$$

$$= 3c'(t^{2/3})^{1/2} = \frac{3c'}{C^{1/2}}(\underbrace{Ct^{2/3}}_{a(t)})^{1/2} \to \eta \propto a^{1/2}(t)$$

البته آن ضرایب c و c' چیزهای دست و پاگیرند، اصل مطلب این است که $\eta \propto a^{1/2}(t)$

در جهان تابش غالب، از حل معادله ی فریدمان :

$$\frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{C}{a^4} \quad \text{where } C: \frac{8\pi G}{3}\rho_r a_0^3$$

$$\to \dot a^2 + k = \frac{C}{a^2} \to \dot a = \sqrt{\frac{C}{a^2} - k} \to d\eta = \frac{da}{a(t)}$$

$$\to \dot a = \frac{da}{dt} = \frac{da}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{a}a' \to \text{معادله} \quad a' = \sqrt{C - ka^2} \to$$

اما در جهان تابش غالب چون تقریباً k را می شود صفر در نظر گرفت ←

$$\frac{da}{d\eta} = \sqrt{C} \to$$

$$da = \sqrt{C}\,d\eta \to \text{انتگرال گیری} \to a(t) - a(0) = \sqrt{C}(\eta) \to \eta \propto a(t)$$

ب) با صرف نظر از Ω_k و Ω_Λ در معادلات فریدمان :

$$\frac{\dot a^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\rho_{0m} a_0^3}{a^3} + \frac{\rho_{0r} a_0^4}{a^4}\right) \to$$

در H_0^2 ضرب و تقسیم کنیم :

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \to H_0^2 = \frac{8\pi G \rho_c}{3}$$

$$\frac{\dot a^2}{a^2} = H_0^2 \left(\cancel{\frac{8\pi G}{3}}\right)\left(\frac{\rho_m^0 a_0^3}{a^3} \times \frac{\rho_\gamma^0 a_0^4}{a^4}\right) \times \cancel{\frac{3}{8\pi G \rho_c}} = H_0^2\left[\frac{\Omega_m^0}{a^3} + \frac{\Omega_\gamma^0}{a^4}\right]$$

طبق تعریف، در زمان برابری ←

$$\rho_m(t_{eq}) = \rho_\gamma(t_{eq}) \Rightarrow \frac{\rho_m^0 a_0^3}{a^3(t_{eq})} = \frac{\rho_\gamma^0 a_0^4}{a^4(t_{eq})} \to a(t_{eq}) = \frac{\rho_\gamma^0 a_0^4}{\rho_m^0 a_0^3}$$

صورت و مخرج را بر ρ_c تقسیم کنیم

$$\to a(t_{eq}) = \frac{\Omega_\gamma^0}{\Omega_m^0}$$

حال معادله فریدمان را حل کنیم ← اول تغییر متغیر زمان همدیس :

$$\dot a^2 = H_0^2(\Omega_m^0 \times a^{-1} + \Omega_\gamma^0 a^{-2}) \to \dot a = H_0\left(\frac{\Omega_m^0}{a}+\frac{\Omega_\gamma^0}{a^2}\right)^{1/2} \to$$

$$\to \frac{1}{a} a' = H_0\left(\Omega_{0m}/a + \frac{\Omega_\gamma^0}{a^2}\right)^{1/2} \to a' = H_0(a\Omega_m^0+\Omega_\gamma^0)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{da}{H_0(a\Omega_m^0+\Omega_\gamma^0)^{1/2}} = d\eta \to$$ انتگرال بگیریم $\to$ @ $\eta=0 \to a=0$

شرط اولیه مان

$$\eta - \eta_0 = \frac{1}{H_0}\times 2 \times \frac{1}{\Omega_m^0}\sqrt{a\Omega_m^0+\Omega_\gamma^0} - \frac{2}{H_0\Omega_m^0}\sqrt{\Omega_\gamma^0}$$

$$\eta = \frac{2}{H_0\Omega_m^0}\left(\sqrt{a\Omega_m^0+\Omega_\gamma^0} - \sqrt{\Omega_\gamma^0}\right)$$ یک $\sqrt{\Omega_m^0}$ بیرون بکشیم...

این همان a_{eq} است

$$\eta = \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_m^0}}\left(\sqrt{a+\frac{\Omega_\gamma^0}{\Omega_m^0}} - \sqrt{\frac{\Omega_\gamma^0}{\Omega_m^0}}\right) \to \eta = \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_m^0}}\left(\sqrt{a+a_{eq}}-\sqrt{a_{eq}}\right)$$

سوال۲_ نوشته سوال ۳ اما ما می‌نویسیم ۲.

الف)

$$1+z = \frac{a_0}{a_e}$$

$a(t_e) \longrightarrow$ expanding around $t_0 \rightarrow |t_0 - t_e| \ll H_0^{-1}$ or t_e

$$a(t_e) = a(t_0) + \dot{a}_0 (t_e - t_0) + \tfrac{1}{2}\ddot{a}_0 (t_e - t_0)^2 + O(3).$$

Note: $\begin{cases} H_0 = \dfrac{\dot{a}_0}{a_0} \longrightarrow \dot{a}_0 = H_0 a_0 \\ +q_0 = -\dfrac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2} \rightarrow \ddot{a} = -q_0 H_0^2 a_0 \end{cases} \rightarrow$ plug and play

$$a(t_e) = a(t_0) + H_0(t_e - t_0) - \tfrac{1}{2}(t_e - t_0)^2\, q_0 H_0^2 a_0 + O(3) \ldots$$

Now $\rightarrow \dfrac{a_0}{a_e} \rightarrow \dfrac{a_0}{a_0 + a_0 H_0 (t_e - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 a_0 (t_e - t_0)^2 + O(3)} \rightarrow$ تقسیم صورت و مخرج بر a_0

$$= \frac{1}{1 + \underbrace{H_0(t_e - t_0) - \tfrac{1}{2} q_0 H_0^2 (t_e - t_0)^2}_{\text{Call it } \Gamma}}$$

Note: $\dfrac{1}{1+\Gamma} = 1 - \Gamma + \Gamma^2 - \Gamma^3 + \cdots$

چون تا مرتبه‌ی دوم $(t_e - t_0)^2$ نگه می‌داریم پس جمله‌ی Γ^2 هم سهم دارد:

$$= 1 \underbrace{- H_0(t_e - t_0) + \tfrac{1}{2} q_0 H_0^2 (t_e - t_0)^2}_{\text{This is } -\Gamma} + \underbrace{H_0^2 (t_e - t_0)^2}_{\text{From } \Gamma^2} + \cdots$$

عوض کردن جای t_0 و t_e

$$= 1 + H_0(t_0 - t_e) + \tfrac{1}{2} H_0^2 (q_0 + 2)(t_0 - t_e)^2 \rightarrow$$ این را برابر $z+1$ قرار دهیم

$$z = H_0(t_0 - t_e) + \frac{H_0^2}{2}(q_0 + 2)(t_0 - t_e)^2 + \cdots$$ مراتب بالا

$(A=1)$

حال اصلاح می‌کنیم بگیریم که $Az + Bz^2 = H_0(t_0 - t_e)$ حال قرار دهیم در بالا:

$$z = \underbrace{Az + Bz^2}_{\text{تنها مرتبه‌ی اول}} + \tfrac{1}{2}(q_0 + 2)\left[A^2 z^2 + B^2 z^4 + 2AB z^3\right]$$

حال بیایید که ضریب z^2 را در طرف راست مساوی صفر قرار دهیم:

$$B + \tfrac{1}{2}(q_0+2)A^2 = 0 \implies A=1 \rightarrow B = -\tfrac{1}{2}(q_0+2)$$

$$\Rightarrow H_0(t_0-t_e) = Az + Bz^2 = z - \tfrac{1}{2}(q_0+2)z^2 + \dots$$

ب)

$$\chi = \int_{t_e}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} \Rightarrow \frac{c\,a(t_0)}{a(t_0)} \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\frac{a(t_e)}{a(t)} \simeq 1 + H_0(t-t_e) + \tfrac{1}{2}H_0^2 q_0 (t-t_e)^2 + \dots$$

اما چون انتگرال می‌گیریم جملات مرتبه‌ی سوم $(t-t_e)^3$ ظاهر می‌شوند پس همان دو جمله‌ی اول کافی اند.

$$= \frac{c}{a(t_0)} \int_{t_e}^{t_0} (1 + H_0(t-t_e))\,dt = \frac{c}{a_0}\left(t + \frac{H_0}{2}t^2 - H_0 t_e t\right)\Big|_{t_e}^{t_0}$$

$$= \frac{c}{a_0}\left((t_0-t_e) + \frac{H_0}{2}(t^2 - 2t\,t_e)\Big|_{t_e}^{t_0}\right) =$$

$$\frac{c}{a_0}\Big((t_0-t_e) + \frac{H_0}{2}\underbrace{(t_0^2 - 2t_e t_0 \underbrace{-(t_e^2 - 2t_e^2)}_{+t_e^2}}_{(t_0-t_e)^2})\Big)$$

$$= \frac{c}{a_0}(t_0-t_e) + \frac{cH_0}{2a_0}(t_0-t_e)^2 + \dots$$

حل شد.

در بالا درست آمده..

ج) می‌دانیم که $d_L = (1+z)\,d_{phy}$ که $d_{phy} = a_0 \chi$، $H_0(t_e-t_0)$ را در قسمت الف برحسب z حساب کردیم پس

همه چیز موجود است!

$$d_{phy} = c(t_0-t_e) + \frac{cH_0}{2}(t_0-t_e)^2 = \frac{c}{H_0}\left((t_0-t_e)H_0 + \tfrac{1}{2}H_0^2(t_0-t_e)^2\right)$$

جایگذاری از الف)

$$= \frac{c}{H_0}\left[(Az+Bz^2) + \tfrac{1}{2}(A^2z^2 + O(z^3))\right] = \frac{c}{H_0}\left(z + (B+\tfrac{1}{2})z^2\right) = \frac{c}{H_0}\left(z - \tfrac{1}{2}(1+q_0)z^2\right)$$

$$B + \tfrac{1}{2}A^2 = B + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{q_0}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{q_0}{2} = -\tfrac{1}{2}(1+q_0)$$

حالا → $d_L = (1+z)\left(\frac{c}{H_0}\right)\left(z - \frac{1}{2}(1+q_0)z^2\right)$ → تا مرتبه z^2

$$d_L = \frac{c}{H_0}\left(z + z^2\left(1 - \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} - \frac{q_0}{2}\right)\right) = \frac{c}{H_0}\left(z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2\right)$$

د) درجهان ماده غالب تخت می‌دانم که $q_0 = 1/2$ است ، برای جهان تخت با ثابت کیهان شناسی چون $a \propto e^{\frac{t}{\tau}}$

برای جهان تهی ، $x=1$ که $a(t) = t$

$q_{تخت} = 1/2$

$$q_\Lambda = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\frac{1}{\tau^2}\cancel{e^{\frac{t}{\tau}}}\,\cancel{e^{\frac{t}{\tau}}}}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2\cancel{e^{\frac{2t}{\tau}}}} = -1$$

$$q_{تهی} = -\frac{\overset{\text{صفر است}}{\ddot{a}}a}{\dot{a}^2} = \text{صفر}$$

$$\text{تخت} : D_L^F = \frac{c}{H_0}\left(z + \frac{1}{4}z^2\right)$$

$$\Lambda : D_L^\Lambda = \frac{c}{H_0}\left(z + z^2\right)$$

$$\text{تهی} : D_L^\phi = \frac{c}{H_0}\left(z + \frac{1}{2}z^2\right)$$

ه) اختلاف این سه فاصله درخشندگی (مثلاً درجهان تهی و جهان دارای Λ) از مرتبه‌ی $\frac{c}{2H_0} \times z^2$ است پس اگر فاصله سنجی مان انقدر دقت داشته باشد می‌توانیم این دو مدل را تمایز دهیم.

برای دو جهان تهی و تخت هم این دقت باید حدوداً $\frac{c}{4H_0}z^2$ است ،

اگر بخواهیم بین این سه مدل تفکیک قائل شویم باید به اندازه کمترین این دو مقدار حفظ داشته باشیم (خطامان کمتر باشد).

$$\Delta D_L \sim \frac{c}{4H_0}z^2 = \frac{3\times10^8}{4\times 2^2} \times 10\ \text{Gyr} \times \pi\times10^7 \times 10^9 \sim 6\times10^{24}\ \text{m}$$

$$\sim \frac{6\times10^{24}\ \text{m}}{3\times10^{16}\times10^6} = 200\ \text{Mpc}$$

زیاد نیست؟ نمی‌دانم!