سری پنجم(آخر) تمرینات درس ریاضی‌فیزیک پیشرفته - دکتر کریمی‌پور
گروه‌های کوهمولوژی و کوهمولوژی De-Rham

موعد تحویل پاسخ‌ها: یک‌هفته پس از مهلت آخرین سری تمرین‌ها - تا ساعت ۲۳:۵۹

از طریق سامانه درس‌افزار

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

دقیقا به دو سوال از سوال‌های زیر پاسخ بدهید.

سوال اول: زیرمجموعه‌یِ بازِ $U \subset \mathbb{R}^n$ ستاره‌ای-شکل [۱] است که صفر را در بر دارد. p-فرمِ بسته‌ی $\omega = \sum \omega_I dx^I$ روی U تعریف شده است [۲]. نشان‌دهید $(p-1)$- فرمِ η در رابطه $d\eta = \omega$ صدق می‌کند.

$$\sum_I \sum_{q=1}^{p} (-1)^{q-1} \Big(\int_0^1 t^{p-1} \omega_I(tx) dt \Big) x^{i_q} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_q}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

درحقیقت، با این‌کار قضیه پوانکاره را نشان می‌دهید؛ یعنی هر فرمِ بسته روی زیرفضایِ بازِ $\mathbb{R}^n$ (با گروه‌های همولوژی بدیهی) یک فرمِ کامل است.

سوال دوم: خمینه‌های هموار M_1و M_2 را خمینه‌هایی همبند، فشرده و جهت‌پذیر با بعدِ $n \geq 2$ درنظر بگیرید. نشان‌دهید که

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M_1 \# M_2) = H^k_{\mathrm{dR}}(M_1) \oplus H^k_{\mathrm{dR}}(M_2).$$

(برای $0 < k < n$.)

سوال سوم: M را خمینه‌ای هموار بگیرید و فرم‌های $\omega \in \Lambda^p(M)$ و $\eta \in \Lambda^q(M)$ مفروض هستند. اول نشان‌دهید که کلاسِ کوهمولوژیِ فرم $\omega \wedge \eta$ تنها به کلاسِ کوهمولوژیِ η وω بستگی دارد. بنابراین نگاشتِ $H^p_{\mathrm{dR}}(M_1) \times H^q_{\mathrm{dR}}(M_1) \longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(M_1)$:⌣ با تعریفِ

[1] Star-shaped

[۲] I مجموعه‌ای از p اندیس است که به دلخواه مرتب شده است.

$$[\omega] \smile [\eta] = [\omega \wedge \eta]$$

خوش‌تعریف است. به این ضرب، Cup product گفته می‌شود.

سوال چهارم: بدست آوردن گروه‌های کوهمولوژی

الف) تمامی گروه‌های کوهمولوژی فضای $\mathbb{R}^2 - \{p_1, p_2\}$ را حساب کنید. (یعنی صفحه‌ی حقیقی که دو نقطه‌ی دلخواه از آن حذف شده اند.)

ب) گروه‌های کوهمولوژی ناحیه‌ی

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\right\}$$

را بدست بیاورید.(از این نکته استفاده کنید که اگر بین دو خمینه‌ی هموار یک هموتوپی باشد، آن‌گاه تحت pullback کردن کلاس‌های کوهمولوژی با هموتوپی بین این دو خمینه، گروه‌های کوهمولوژی دو خمینه یک‌ریخت هستند. سپس، یک هموتوپی بین ناحیه‌ی حلقوی بالا و صفحه با یک سوراخ معرفی کنید.)

سوال پنجم: با فضای $\mathbb{C}P^n$ آشنا هستید و مختصات‌های روی آن را دیده‌اید. اما به عنوان یادآوری نگاهی به آن بیندازیم:

> بازِ U_α را که با مختصات $z_i \neq 0$ برای $i = \alpha$ تعریف می‌شود، به یاد آورید. مختصات‌های بهنجارِ $u^j = z^j/z^\alpha$ و $v^j = z^j/z^\beta$ روی دو بازِ (U_α, U_β) تعریف کنید.
>
> رویِ U_α و U_β ، دو‌ـفرم‌های زیر را تعریف می‌کنیم:
>
> $$\omega_\alpha = -i\Big(\frac{\sum_j du^j \wedge d\bar{u}^j}{\varphi} - \frac{\sum_{j,k} u^j \bar{u}^k du^k \wedge d\bar{u}^j}{\varphi^2}\Big)$$
> $$\omega_\beta = -i\Big(\frac{\sum_j dv^j \wedge d\bar{v}^j}{\psi} - \frac{\sum_{j,k} v^j \bar{v}^k dv^k \wedge d\bar{v}^j}{\psi^2}\Big),$$
>
> که در آن‌ها $\varphi = \sum_{j=0}^n u^j \bar{u}^j$ و $\psi = \sum_{j=0}^n v^j \bar{v}^j$.

الف) نشان‌دهید که تحدید این دو‌ـفرم‌ها به ناحیه‌ی اشتراک، یکسان است.

$$\omega_\alpha\Big|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \omega_\beta\Big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

ب) یک ۲ـفرمِ یکتا رویِ $\mathbb{C}P^n$ هست، که آن را ω می‌نامیم. با این خاصیت که $\omega_\alpha = \omega\Big|_{U_\alpha}$.

ج) $d\omega = 0$

د) $\wedge_n \omega$ یک فرمِ حجم است.

ه) ω یک فرمِ کامل نیست.