4. تراوش (Percolation)

فرض کنید می‌خواهید پوششِ رنگیِ رسانا داشته باشید. یک پیشنهاد ساده شاید مخلوط کردن ریز براده های فلزی یا پودر ماده رسانایی مانند گرافیت در رنگ باشد. ولی یک سوال ساده این است که «چه مقدار ماده رسانا باید در رنگ ریخت تا حاصل ماده‌ای رسانا شود؟». اگر مخلوط را خوب به هم بزنیم تا کاملا همگن شود برای مشاهده‌ی رسانش در محصول باید شبکه ای از ذرات رسانای متصل به هم در آن وجود داشته باشد که ضمن اتصال به یکدیگر در درون رنگ، بین نقاط مختلف نیز ارتباط برقرار کند. مثال‌های دیگری نیز می‌توان زد که در حقیقت فیزیکی مشابه مثال بالا داشته باشد. به طور مثال اگر جامد متخلخلی داشته باشیم که آب بتواند در درون خلل و فرج آن نفوذ کند، چه مقدار تخلخل برای اینکه آب بتواند از یک سوی این جامد به سوی دیگر آن تراوش کند نیاز است؟ اسفنج ظرفشویی مثالی از چنین جامد متخلخل و تراوایی است. این مثال دلیل انتخاب نام "تراوش" برای این پدیده را به خوبی توجیه می‌کند، هر چند که مثال‌های کاملا متفاوتی در ظاهر می‌توان یافت. حتی می‌توان مثال‌هایی از جامعه شناسی یا بهداشت زد. مثلا در یک شبکه اجتماعی یک شایعه یا لطیفه چقدر باید جذاب باشد تا در این شبکه منتشر شود؟ یا در مسئله ای بسیار مشابه ولی با عواقبی کاملا متفاوت، احتمال سرایت یک بیماری چقدر باشد تا در یک جامعه همه گیر شود؟ برای چه تراکمی از درختان در یک جنگل یک آتش سوزی کوچک می‌تواند به یک فاجعه تبدیل شود؟

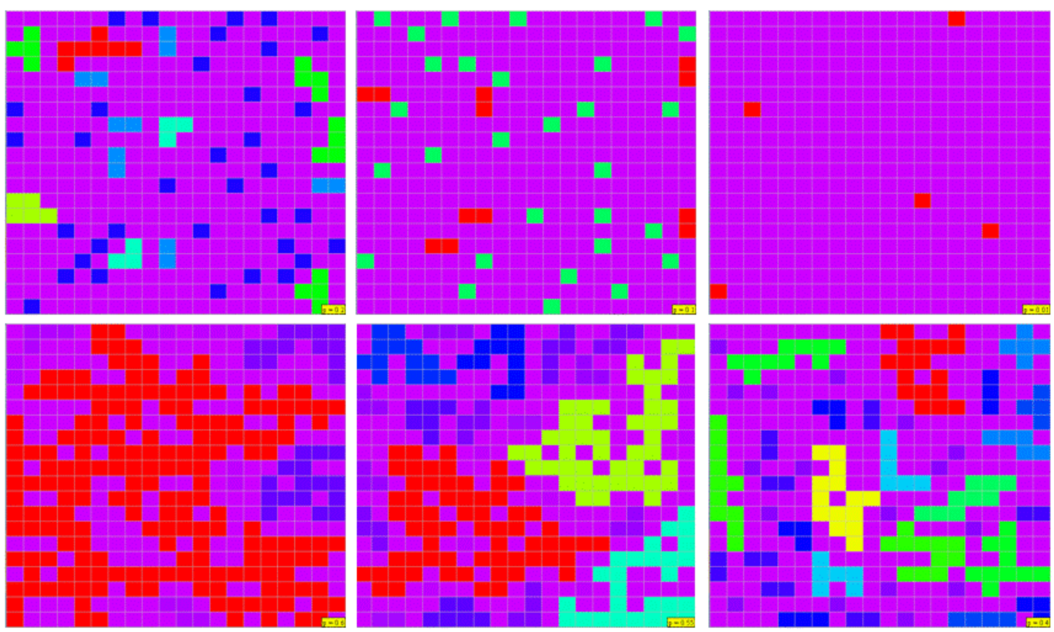
شکل 1 آتش سوزی در جنگل‌های آمریکا. عکس برگرفته از نشریه نشنال جیوگرافیک.

مستقل از اهمیت کاربردی تراوش، این مدل از نظر آماری نیز بسیار غنی است. بسیاری از مفاهیم اساسی در مبحث سیستم‌های پیچیده مانند تغییر فاز و رفتار بحرانی را می‌تواند در آن مطالعه کرد. در این بخش با شبیه سازی تراوش سعی می‌کنیم که ما هم با این مفاهیم آشنا شویم. در اینجا نه تنها با کمک این مدل با شبیه سازی تغییر فاز در سیستم‌های آماری آشنا می‌شویم، بلکه با یکی از مهم ترین محدودیت‌های شبیه سازی، مسئله‌ی ابعاد محدود، درگیر می‌شویم.

4.1 معرفی مدل

برای معرفی تراوش با یک مثال ساده بر روی یک شبکه‌ی مربعی دو بعدی شروع می‌کنیم. فرض کنید که بر روی هر یک از خانه‌های این مربع چراغی قرار دارد که با احتمال p می‌تواند روشن شود. اگر p عددی کوچک باشد فقط تعداد خیلی کمی از خانه‌ها روشن می‌شوند. برای p های بزرگتر تعداد خانه‌های رنگ شده بیشتر می‌شود. با افزایش p احتمال اینکه بعضی از این خانه‌های روشن در مجاورت هم ظاهر شوند بیشتر می‌شود. این مجموعه‌ها را خوشه (یا جزیره) می‌نامیم. کوچکترین خوشه‌ها فقط از دو خانه‌ی مجاور هم تشکیل می‌شود. در p های بزرگتر خوشه‌هایی با مساحت بیشتر دیده می‌شود. حال می‌توان سوال کرد که p باید چه مقدار باشد تا حداقل یک خوشه وجود داشته باشد که دو سمت این شبکه را به هم متصل کند. اگر پاسخ عجولانه ی شما $p = 1$ است در اشتباهید. چون حتی برای بعضی p های کوچکتر از یک نیز این واقعه می‌تواند با یقین اتفاق بیافتد.

می‌توان داستان را جور دیگری نیز تعریف کرد. از شبکه خاموش شروع می‌کنیم و یکی یکی خانه‌های خاموش را به طور کتره‌ای انتخاب می‌کنیم و آنها را روشن می‌کنیم. با ادامه این کار کم کم خوشه‌های پراکنده به هم متصل می‌شوند و خوشه های بزرگتری را تشکیل می‌دهند. حال سوال این است که بعد از روشن کردن چه تعدادی از خانه‌ها تراوش اتفاق می‌افتد. به زبان دیگر چه وقت خوشه بینهایت تشکیل می‌شود. در این جا به خوشه‌ای که دو سوی شبکه را به هم متصل می‌کند خوشه‌ی بینهایت می‌گوییم.



شکل 2 یک شبکه‌ی مربعی با احتمال‌های متفاوت برای روشن شدن جایگاه‌ها را نشان می‌دهد. در مقادیر کوچکِ احتمال، خوشه‌ها کوچک و پراکنده هستند. با افزایش احتمال، ابعاد خوشه‌ها رشد می‌کند وخوشه‌ی بینهایت تشکیل می‌شود.

با تصویری که اکنون بدست آوردید به مثال اول این فصل برمی‌گردیم. فرض کنید خانه‌های روشن نماینده‌ی ذرات رسانا و خانه‌های خاموش نشانگر ماده رنگی نارسانا باشد. به این ترتیب می‌توانید ببینید که تا قبل از یک زمان خاص، جسم فوق

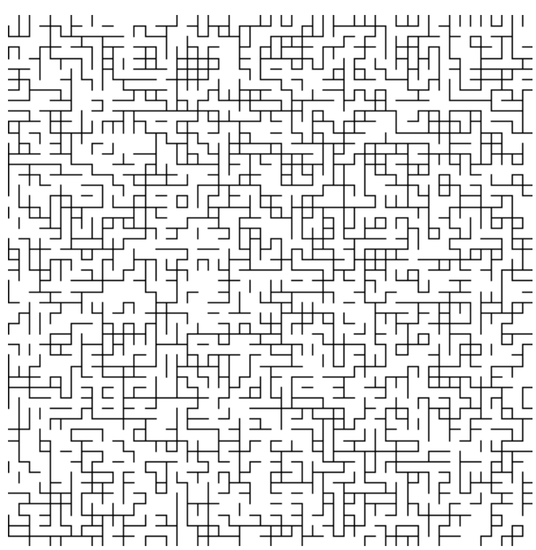
توان رسانش را ندارد ولی ناگهان و در ازای روشن شدن تعدادی جایگاه، به طور ناپیوسته به یک جسم رسانا تبدیل می‌شود. در این لحظه در ساختار ماکروسکوپی ما یک تغییر فاز ناپیوسته از نارسانا به رسانا اتفاق افتاده‌است. پارامتر کنترل در این تغییر فاز، احتمال وجود ریز ذرات رسانا در جایگاه‌ها (روشن بودن خانه‌ها) است.

پس اگر احتمال تراوش، که به معنی وجود حداقل یک خوشه بینهایت در سیستم است را با Q نشان دهیم انتظار داریم که Q در مقادیر کوچک p **صفر** و برای مقادیر بزرگ آن **یک** باشد. نکته جالب در مسئله‌ی تراوش این است که برای یک سیستم بینهایت بزرگ (حد ترمودینامیکی) یک مقدار بحرانی برای p وجود دارد که در $p = p_c$، فاز سیستم به طور ناپیوسته تغییر می کند. یعنی احتمال داشتن خوشه بینهایت برای احتمال‌های کوچکتر از مقدار بحرانی صفر، و برای بالاتر از آن یک است.

$$Q = \begin{cases} 0 & p < p_c \\ 1 & p \geq p_c \end{cases}$$

البته در شبکه محدود و غیر بینهایتِ مثال ما، این کمیت به طور پیوسته از صفر به یک تغییر می‌کند. زیرا برای یک شبکه محدود برای هر احتمال کوچکی نیز احتمال تولید خوشه بینهایت غیر صفر است. البته شیب این تغییرات در نزدیکی مقدار بحرانی شدیدتر است و این شیب با بزرگ شدن شبکه رشد می‌کند. این مثالی از تاثیر محدودیت‌های شبیه سازی بر نتایج است. در اینجا اندازه‌ی محدود سیستم رفتار فیزیکی سیستم را تحت تاثیر خود قرار می‌دهد. در ادامه‌ی این فصل خواهیم دید که چگونه باید این مشکل را کنترل کرد.

تراوش را میتوان برای پیوندهای بین جایگاه‌ها نیز تعریف کرد. فرض کنید که هر راس شبکه‌ی مربعی قابلیت اتصال به همسایگان خود به وسیله‌ی پیوندهایی را دارد. ولی در ابتدا تمام این پیوند ها قطع هستند. حال به طور تصادفی و با احتمال p آنها را متصل می‌کنیم. مجددا می‌توان انتظار داشت که برای مقادیر بزرگ p و در صورت اتصال تعداد زیادی از پیوندها، دو سوی شبکه از طریق راه‌های ارتباطی به یک دیگر متصل شوند، یا به عبارت دیگر خوشه بینهایت تشکیل شود.



شکل 3 نمایی از یک تراوش پیوندی بر روی شبکه مربعی که تصویری مانند یک هزارتو را تداعی می‌کند.

مقدار p_c نه تنها به ابعاد مدل بستگی دارد بلکه به جزئیات شبکه و مدل نیز وابسته است. به طور مثال مقدار آن برای دو شبکه‌ی دو بعدیِ مربعی و مثلثی متفاوت است. همچنین برای تراوش جایگاهی و تراوش پیوندی بر روی شبکه‌های یکسان می تواند متفاوت باشد. در نتیجه احتمال بحرانی یک کمیت جهان‌شمول نیست. در ادامه با بعضی کمیتهای‌های جهان شمول تراوش آشناه می‌شویم. این کمیتها به جزییات مدل حساس نیستند ولی به بُعد سیستم بستگی دارند. یعنی تغییر در بُعد مسئله کلاس جهانشمولی را تغییر می‌دهد. چنین حساسیتی به بعد در تمام مسائل فیزیک وجود دارد.

مسئله ی تراوش بر روی شبکه یک بعدی جواب بدیهی $p_c = 1$ دارد. چون حتی یک ناپیوستگی در کل سیستم تراوش را غیر ممکن می‌کند. حل این مسئله در شبکه‌هایی که امکان ایجاد حلقه بر روی شبکه وجود ندارد مانند درخت کایلی[5] نیز ساده است. روش‌های مختلفی هم برای حل در دو بعد پیشنهاد شده است که در بعضی از شبکه‌ها حل دقیق را می‌دهد، ولی مسئله برای بعد 3 حل دقیق ندارد. در حقیقت دقیق‌ترین نتایجی که در بعد 3 وجود دارد از شبیه سازی‌های کامپیوتری بدست آمده اند و صحت حل‌های تقریبی با مقایسه با این نتایج تایید می‌شود. این خود مثالی است که اهمیت شبیه سازی را نشان می‌دهد. در این مورد خاص با وجود اینکه حل تحلیلی مسئله بسیار مشکل است، شبیه سازی آن بسیار ساده و ابتدایی است.

<table>
<tr><td>4.1.</td><td rowspan="2">تراوش:
– یک شبکه‌ی دوبعدی و مربعی $L \times L$ (با قابلیت انتخاب L در ورودی) تولید کنید.
– با احتمال p خانه‌های شبکه را روشن کنید.
برای این کار کافی است که برای هر خانه یک عدد کاتوره ای بین صفر و یک تولید کنید. درصورتی که این عدد از p کوچکتر بود آن حانه را روشن کنید. در این جا اشکالی ندارد که این کار را با ترتیب خاصی از یک خانه شروع کنید و یک به یک جلو بروید.
– برای برنامه یک خروجی عددی دوگانی[6] (0 و 1) اختصاص دهید که در صورت وجود خوشه‌ی بینهایتی که دو ضلع چپ و راست شبکه را به هم متصل کند (تراوش عرضی)، عدد 1 ودر غیر این صورت عدد 0 را گزارش کند.</td></tr>
<tr><td>تمرین</td></tr>
</table>

4.2. *آلگوریتمی برای تشخیص تراوش*

با انجام تمرین قبلی متوجه می‌شوید که شبیه سازی تراوش بسیار ساده است. در حقیقت آن چیزی که مشکل است و در مسئله‌ی بالا بسیار زمان‌بر است، نه قسمت تولید شبکه تراوشی بلکه آخرین قسمت مسئله یعنی **تشخیص تراوش** است. برای تولید یک شبکه تراوش با یک احتمال مشخص $N{\sim}L^d$ محاسبه برای تشخیص روشن یا خاموش بودن پیوندها (یا جایگاه‌ها) نیاز است. در اینجا L اندازه‌ی شبکه و d بُعد مسئله است. ضریب تناسب رابطه بالا بستگی به جزئیات شبکه دارد. به طور مثال در

[5] Cayley tree
[6] Binary

یک شبکه 2 بعدی مربعی این ضریب برای تراوشِ جایگاهی 1 و برای تراوش پیوندی 2 است. به این ترتیب کُد تولید یک شبکه تراوشی یک کُد مرتبه‌ی L^d است.

برای تشخیص وجود خوشه‌ی بینهایتی که چپ و راست شبکه را به هم وصل می‌کند شاید ساده‌ترین روشی که بنظر برسد این است که نقطه‌ای بر روی ضلع چپ انتخاب شود و سعی شود که از روی مسیرهای تولید شده به سمت دیگر رسید. در این راه اگر راه برایمان باز باشد و از سوی دیگر شبکه سر در آوریم که جای خوشبختی است و مسئله تمام است، ولی در صورتی که به بن بستی مواجه شویم باید برگردیم و از آخرین نقطه‌ای که حق انتخاب در مسیر (دوراهی یا چند راهی) داشتیم مسیر دیگری را انتخاب کنیم. این کار باید آنقدر ادامه یابد یا به سوی دیگر برسیم ویا مطمئن شویم که راهی برای عبور از نقطه‌ای که شروع کردیم وجود ندارد. در این صورت باید نقطه دیگری در سمت چپ را برداشته و کار را به همین روش تکرار کنیم. شاید این روش برای مقادیر خیلی بزرگ p که احتمال برخورد با بن بست کم است و یا مقادیر خیر کوچک p که خوشه ها بسیار کوچک است راه بدی نباشد ولی برای بازه‌ی وسیعی از مقادیر p روشی بسیار وقت‌گیر است. فرض کنید در نزدیکی مقدار بحرانی p باشیم و خوشه‌ی بینهایت تشکیل شده باشد. در این روش باید تمام راه‌های ممکن عبور از شبکه برای یافتن تعداد محدودی راه عبور کنترل شود. این مانند یافتن سوزنی در انبار کاهی است. اگر در جستجوی خود برای راه‌های ممکن در هر نقطه شبکه b انتخاب وجود داشته باشد، تعداد راه‌های ممکن از مرتبه b^{N} است. b عددی است که به بعد و نوع شبکه بستگی دارد و در ابعاد بالاتر از 1 مطمئنا بزرگتر از واحد است. در نتیجه تعداد راه‌های ممکن بسیار سریع با N رشد می‌کند. برای درکی از بزرگی این عدد مثالی می‌زنیم. برای یک شبکه نسبتا محدود 100×100 و با فرض $\mathrm{b} \approx \sqrt{10}$ تعداد راه های ممکن از مرتبه 10^{5000} است. اگر بررسی تمام این راه‌ها برای سریع‌ترین ابرکامپیوترهای دنیا نیز بسیار بیشتر از عمر جهان ($\sim 10^{17}\ \mathrm{s}$) وقت می‌گیرد. به این گونه برنامه‌ها که زمان اجرای آن با نمایی از N رشد میکند NP-پیچیده می‌گویند. به زبان ساده اینها مسائلی هستند که از نظر محاسباتی غیر قابل حل هستند.

این مثال خوبی است که نشان می‌دهد که در یک برنامه کامپیوتری قسمت‌های مختلف برنامه از نظر وقت گیری می توانند بسیار متفاوت باشد. بدیهی است که زمان اجرای نهایی برنامه را کندترین قسمت آن تعیین می‌کند. مشکلاتی مانند مثال بالا با تغییرات جزیی قابل حل نیستند ونیازمند آلگوریتم‌های جدید هستند. معمولا مرتبه‌ی کُد را به آلگوریتم آن اختصاص می دهند. برای مثال آلگوریتمی که در اینجا برای ساختن شبکه تراوشی معرفی شد یک آلگروتیم مرتبه 1 ($\sim \mathrm{N}^1$) است ولی الگوریتمی که برای تشخیص تراوش معرفی شد یک آلگوریتم NP-پیچیده است. به این ترتیب ترکیب بالا کمکی به حل مسئله تراوش نمی‌کند.

خوشبختانه مشکل بالا با معرفی یک آلگوریتم مبتکرانه حل شده است. این الگوریتم به الگوریتم رنگ آمیزی معروف است. در زیر این الگوریتم برای مسئله‌ی تراوش پیوندی[7] معرفی می‌شود.

[7] کافی است که عبارت های "پیوند" به "جایگاه" تبدیل شود تا از الگوریتم برای شبیه‌سازی تراوش جایگاهی استفاده شود.

آلگوریتم رنگ آمیزی

1. به تمام خانه‌ها یک حافظه با مقدار اولیه 0 اختصاص دهید. (عدد صفر به معنی خاموش بودن خانه است.)
2. تمام خانه‌های روی مرز چپ را با دادن مقدار 1 روشن کنید.
3. تمام خانه‌های روی مرز راست را نیز با اختصاص یک عدد صحیح خیلی بزرگ، int_max، روشن کنید.
4. (شروع حلقه‌ی اصلی) پیوندها را یک به یک انتخاب کنید.

4.1. با احتمال p به آن یک عدد غیر صفر کوچکتر از int_max که قبلا استفاده نشده باشد اختصاص دهید.

4.2. تمام پیوندهای همسایه ی این پیوند را بررسی کنید. سه امکان وجود دارد:

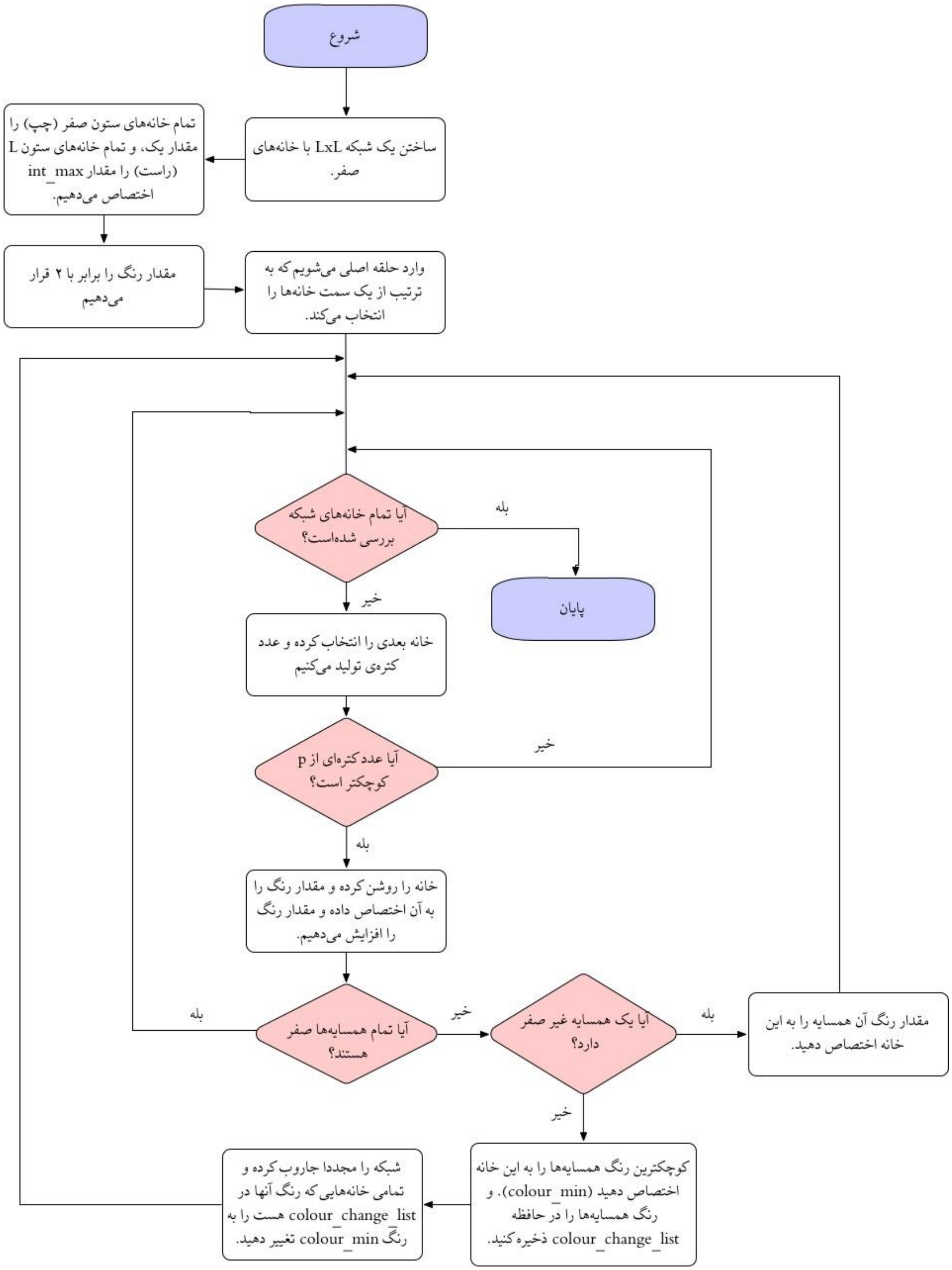
a) تمام همسایه ها 0 هستند: به (4) برگردید.

b) فقط یک همسایه غیر 0 دارد: مقدار آن همسایه را به این پیوند بدهید و به (4) برگردید.

c) بیش از یک همسایه غیر 0 دارد: کوچک ترین این اعداد را به این پیوند و تمام پیوندهایی که در کل شبکه شماره ای برابر با عددهای بزرگتر دارند بدهید و به (4) برگردید

5. مقدار عددی یکی از پیوندهای مرز راست را کنترل کنید. اگر مقدار 1 را دارد، تراوش اتفاق افتاده است.

در آلگوریتم بالا می‌توانید از عددهای اختصاص داده شده به خانه‌ها به عنوان کد رنگ در نمایش شبکه استفاده کنید. برای همین به آن "الگوریتم رنگ آمیزی" می‌گویند. در این الگوریتم زمان‌گیرترین قسمت بند (C) در (4.2) است که باید به کمک یک حلقه‌ی شرطی تمام پیوندهایی که قبلا مقدار خاصی به آنها اختصاص داده شده است را یافته و مقدار عددی آنها را جایگزین کنیم. ولی توجه کنید با وجودی که در این فرآیند باید تمام نقاط شبکه کنترل شوند، بازهم فرآیندی از مرتبه‌ی $\mathrm{N} \sim \mathrm{L}^{\mathrm{d}}$ است. چون این قسمت خودش در درون حلقه‌ای با هزینه محاسباتی از مرتبه L^d نشسته است پس مرتبه الگوریتم نهایی L^{2d} می شود.



نمودار شناور 2 آلگوریتم رنگ آمیزی جهت تشخیص تراوش در شبکه را نشان می‌دهد.

4.2.	الگوریتم رنگ آمیزی:
تمرین	– کُدی که برای تمرین 4.1 نوشتید را به آلگوریتم رنگ آمیزی برای تشخیص تراوش مجهز کنید.

	– شبکه تراوش را نمایش بدهید.

4.3. آلگوریتم هُشِن-کُپِلمَن (Hoshen-Keoplman)

پس از پیاده سازی آلگوریتم رنگ آمیزی می‌توان پیش بینی کرد که برای تشخیص تراوش در شبکه‌های بزرگ‌تر به آلگوریتم بهینه‌تر نیاز است. الگوریتمی که در پایین معرفی شده‌است را هشن و کپلمن برای تشخیص تراوش در شبکه‌های مربعی معرفی کرده‌اند. از مزایای مهم این الگوریتم این است که برخلاف آلگوریتم رنک آمیزی نیازی به بازنگری و تصحیح رنگ‌های خانه‌های همسایه نیست. در این آلگوریتم کل شبکه در یکه مرحله ساخته و تراوش آن مشخص می‌شود.

هنگام پایان این آلگوریتم تمامی خانه‌ها در یک بار بررسی شبکه برچسب گذاری شده و اندازه تمامی خوشه‌ها مشخص شده است. لازم به تاکید است که برای تشخیص تراوش نیازی به بررسی شبکه برای بار دوم نیست ولی می‌توان شبکه را برای بار دوم بررسی کرد و رنگ خانه‌ها را طبق برچسب گذاری تغییر داد. این کار تنها در زمانی انجام می‌شود که نیاز به نمایش شبکه است و با بررسی مجدد شبکه می‌توانیم رنگ خانه‌ها را نمایش دهیم یا برای عیب یابی کُد خروجی حاصل از بررسی مجدد شبکه مطالعه می‌شود.

آلگوریتم هشن-کپلمن

1. به تمام خانه‌ها یک حافظه با مقدار اولیه 0 اختصاص دهید.
2. تمام خانه‌های روی مرز چپ را با دادن مقدار 1 روشن کنید.
3. از خانه بالا سمت چپ شروع کرده و به صورت ستونی (بالا به پایین) خانه‌های شبکه را بررسی می‌کنیم.
4. هر خانه را با احتمال p روشن کرده و با توجه به آرایه یک بعدی L به شکل زیر برچسب گذاری می‌کنیم. رنگ هر برچسب، k است به طوری که L(k)=k.

4.1. اگر همسایه بالا و چپ خاموش بود، خانه برچسب L را اختیار می‌کند (که در ابتدا برابر با 1 است).

4.2. در صورتی که یکی از همسایه‌ها روشن بود برچسب آن همسایه اختیار می‌شود.

4.3. در صورتی که دو همسایه روشن بود، خانه و همسایه بالا (k2) برچسب همسایه چپ (k1) را همزمان اختیار می‌کنند. یعنی L(k2)=k1 و L(k1)=k1.

5. همچنین اندازه خوشه‌ها نیز در آرایه یک بعدی S زخیره می‌شود.

5.1. هر بار که خانه‌ای برچسب گذاری می‌شود اندازه خوشه آن برچسب به اضافه 1 می شود.

5.2. اگر دو همسایه غیر صفر بود اندازه خوشه‌ها با یکدیگر جمع زده و به اضافه 1 (برای خانه جدید) می‌شود.

برای فهم بهتر آلگوریتم معرفی شده قسمتی از شبکه زیر را به کمک این آلگوریتم بررسی می‌کنیم. فرض کنید شبکه الف در اختیار ماست. از خانه بالا سمت چپ شروع می‌کنیم. رنگ اولین خانه روشن برابر با 1 است پس L(1)=1 قرار می‌دهیم. از آنجایی که اولین عضو این خوشه مشخص شده‌است پس اندازه خوشه نیز برابر با 1 است، S(1)=1. دو خانه روشن بعد هم رنگ یک دارند چون دارای یک همسایه در بالا هستند. پس تا به اینجا S(1)=3 شده‌است. به همین ترتیب خانه روشن چهارم و و پنجم اولین خانه با رنگ جدید 2 و 3 است پس L(2)=2، S(2)=1، L(3)=3 و S(3)=1. در ستون دوم با ستون اولین خانه روشن برچسب رنگ سمت چپ خود را اختیار می‌کند پس L(1)=1 و S(1)=4. دو خانه روشن بعدی نیز به همین ترتیب برچسب رنگ 2 را اختیار کرده S(2)=3. حال به خانه آخر از ستون دوم می‌رسیم. اول از همه رنگ این خانه را برچسب رنگ خانه سمت چپ آن قرار می‌دهیم، یعنی L(3)=3. حال برای تعیین اندازه خوشه‌ها S(L(3))=S(L(3))+S(L(2))+1=5 و S(L(2))=0. سپس برچسب رنگ همسایه بالا را برابر با برچسب رنگ همسایه چپ قرار می‌دهیم، پس L(2)=3. در شکل زیر این کار برای تمامی خانه‌ها انجام شده. تغییرات حاصل از یک بار بررسی شبکه در شکل ب و رنگ‌ها پس از بررسی مجدد در شکل ج نشان داده شده است.

الف

1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1

ب

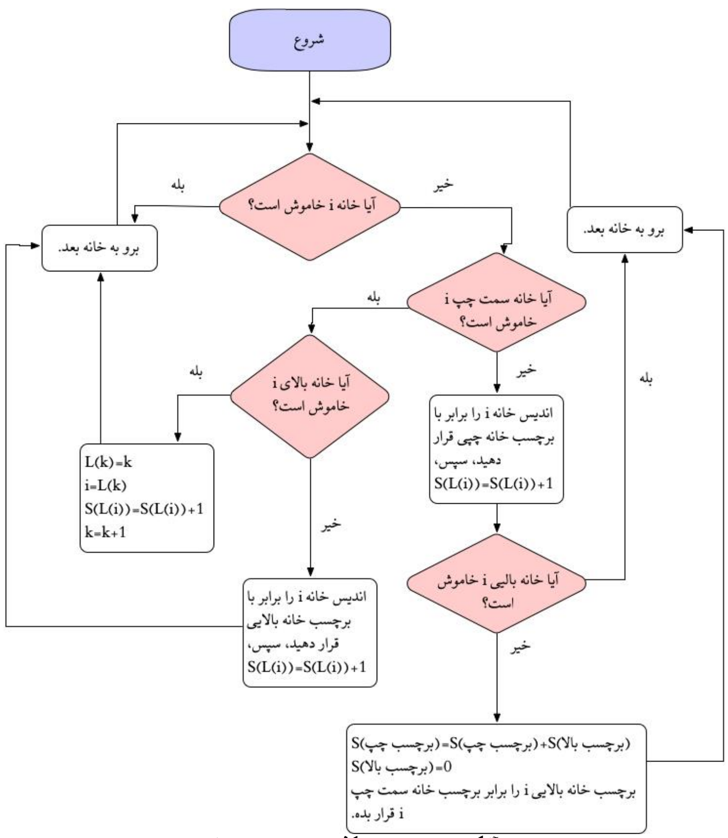
1	1	0	0	7	0	9
1	0	4	0	0	8	8
1	0	0	6	6	0	0
0	0	5	0	0	0	0
2	2	3	3	3	0	10
0	2	0	3	3	3	0
3	3	3	3	0	3	3

ج

1	1	0	0	7	0	8
1	0	4	0	0	8	8
1	0	0	6	6	0	0
0	0	3	0	0	0	0
3	3	3	3	3	0	10
0	3	0	3	3	3	0
3	3	3	3	0	3	3

شکل5 الف) یک شبکه 7 در 7 را نشان می دهد که با احتمال p روشن است. ب) شبکه‌ی الف را نشان می‌دهد که با آلگوریتم هوشن-کوپلمن برچسب گذاری شده‌است. ج) در صورتی که نیاز به نمایش شبکه باشد می توان برچسب‌های شبکه را با رنگ هر برچسب نمایش داد.

نمودار شناور الگوریتم هشن کپلمن به صورت زیر خواهد بود.



نمودار شناور 3 آلگوریتم برچسب گذاری هوشن-کوپلمن را نمایش می‌دهد.

4.4. مکانیک آماری تراوش و تصحیحات اندازه‌ی محدود

همانطور که قبلا اشاره شد پدیده‌ی تراوش به دلیل سادگی برای درک مفاهیم آماری بسیار بکار برده میشود. برای ورود به این بحث لازم است که کمیت‌های مورد نظر را معرفی کنیم.

احتمال وجود شاخه بینهایت Q

این کمیت قبلا معرفی شد. در حد ترمودینامیکی شبکه تراوش یک تغییر فاز ناپیوسته از نارسانا به رسانا در $p = p_c$ نشان می دهد. با سیستم های با اندازه محدود این تغییرفاز نرم‌تر می‌شود. برای بدست آوردن این مقدار در شبیه سازی لازم است که برای هر مقدار p شبیه سازی تکرار شود و مقدار Q با متوسط گیری بر روی نتایج بدست می‌آید.

4.3.	احتمال ایجاد خوشه بینهایت برای شبکه‌ی محدود: – برنامه آماده شده در تمرین 4.2 را برای طول $L = 10$ آماده کنید. – در داخل برنامه حلقه ای بسازید که بازه ی $0 \le p \le 1$ را با قدم‌های $\Delta p = 0.05$ جارو کند و برای هر مقدار p برنامه را 100 بار اجرا کند و با متوسط گیری بر روی دفعاتی که تراوش اتفاق می‌افتد مقدار Q را بدست آورید. – همین کار را مجددا برای $L = 100$ و $L = 200$ اجرا کنید – نتایج بدست آمده برای Q را برای هر سه شبکه بر روی یک منحنی بر حسب p رسم کنید.
تمرین	

احتمال اتصال به خوشه بینهایت Q_∞

اگر به طور تصادفی یک خانه روشن انتخاب شود چه قدر احتمال دارد که این خانه به یک خوشه بینهایت متصل باشد. بدیهی است که Q_∞ تا قبل از تشکیل خوشه بینهایت بنا به تعریف صفر است. بعد از تراوش این کمیت با افزایش p به یک نزدیک می‌شود.

4.4.	احتمال اتصال به خوشه بینهایت: – برنامه آماده شده در تمرین 4.3 را به گونه ای تکمیل کنید که Q_∞ را در هر اجرا محاسبه کند و مقدار متوسط آن را گزارش کند. – این کار را برای $L = 10$، $L = 100$ و $L = 200$ اجرا کنید. – نتایج بدست آمده برای Q_∞ را برای هر سه شبکه بر روی یک منحنی بر حسب p رسم کنید.
تمرین	

طول همبستگی ξ

شعاع ژیراسیون هر خوشه را می‌توان به عنوان معیاری از اندازه‌ی هر خوشه در نظر گرفت. متوسط اندازه ی تمام خوشه های **غیر بینهایت** "طول متوسط اتصال" یا طول همبستگی نامیده می‌شود. شعاع ژیراسیون مشابه مکانیک تحلیلی تعریف می شود و مساوی با جذر متوسط مجذور فواصل عناصر خوشه از مرکز جرم خوشه است. در حد ترمو دینامیکی انتظار می‌رود

که طول **همبستگی** در نقطه تغییر فاز واگرا شود. ولی برای مدل با اندازه محدود به یک مقدار بیشینه می‌رسد. در قبل از نقطه‌ی بحرانی هیچ خوشه بینهایتی در شبکه مشاهده نمی‌شود. با بزرگ شدن احتمال روشن شدن خانه‌ها و نزدیک شدن سیستم به نقطه‌ی تراوش، متوسط اندازه خوشه‌ها بزرگتر و بزرگتر می‌شود. به طور متوسط نزدیکی نقطه‌ی بحرانی انتظار داریم که خوشه‌های بزرگ شبکه تبدیل به خوشه بینهات شوند. در نتیجه بعد از نقطه‌ی بحرانی خوشه‌های بزرگ اکثرا به خوشه بینهایت می‌پیوندند و هرچقدر احتمال روشن شدن خانه‌ها بیشتر شود، اندازه خوشه‌های غیر بینهایت کوچکتر و کوچکتر می‌شود. این رفتاری است که در شکل 6 مشاهده می‌کنید. با افزایش اندازه شبکه قله‌ی این منحنی تیزتر و تیزتر خواهد شد تا در حد شبکه با طول بینهایت این تابع بسیار تیز و واگرا خواهد بود.

4.5	طول همبستگی :
تمرین	– برنامه آماده شده در تمرین 4.4 را به گونه ای تکمیل کنید که ξ را در هر اجرا محاسبه کند و مقدار متوسط آن را گزارش کند. – این کار را برای $L = \{10, 20, 40, 80, 160\}$ اجرا کنید. – نتایج بدست آمده برای ξ را برای هر سه شبکه بر روی یک منحنی بر حسب p رسم کنید. – در نزدیکی نقطه بحرانی برنامه را برای گام های کوچکتر p تکرار کنید تا دقت منحنی در اطراف این نقطه افزایش یابد. – قلعه ی منحنی ξ مقدار بحرانی احتمال نشان میدهد. همانطور که نتایج میبینید این مقدار به طول شبکه بستگی دارد، $p_c(L)$. آیا میتوانید با برون یابی مقدار $p_c(\infty)$ را بیابید؟

واگرایی ξ در نزدیکی نقطه بحرانی یک رفتار نمایی با نمای $-\nu$ دارد.

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$$

در شبکه‌های کوچک تروانش در احتمال‌های کوچک نیز اتفاق می‌افتد. مثلا در یک شبکه 2 در 2 با p=0.5 نیز می‌توان شاهد تراوش بود. پس قلهای که در شکل 6 مشاهده میکنید با بزرگتر شدن اندازه شبکه به سمت راست منتقل خواهد شد. از طرفی در یک سیستم با اندازه محدود این مقدار هیچگاه نمی‌تواند از L بزرگتر شود در نتیجه رفتار واگرایی تابعی از اندازه شبکه خواهد بود. به این وسیله می‌توان اثر اندازه محدود در شبیه سازی را اصلاح کنیم. این به این معنی است که

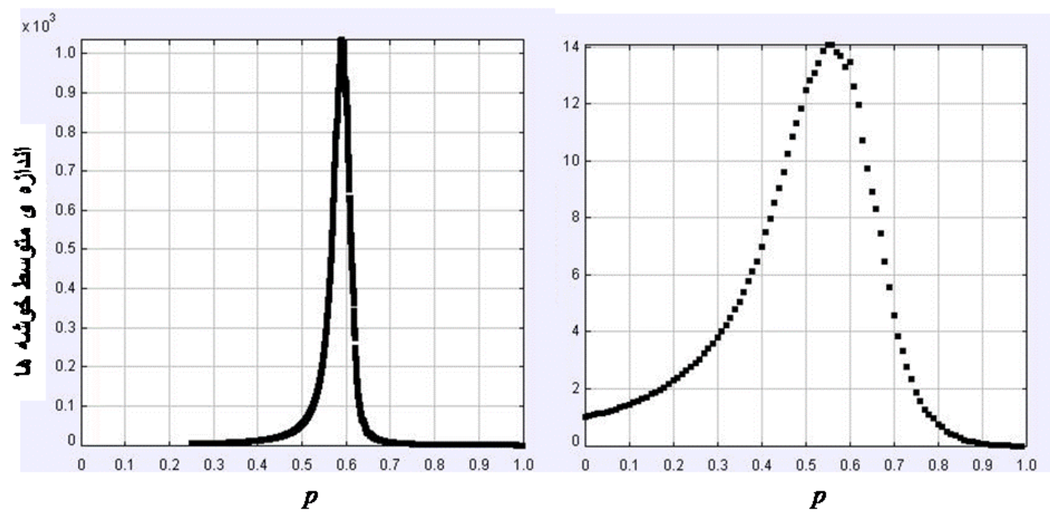
$$|p_c(L) - P_c(\infty)| \sim L^{-\frac{1}{\nu}}$$

در حد ترمودینامیکی، یعنی اندازه سیستم به سمت بینهایت میل می‌کند، در نقطه‌ی بحرانی اندازه طول همبستگی به سمت بینهایت میل می‌کند. زمانی که این اتفاق میافتد مقیاس طول سیستم از دست رفته است. فرض کنید که در سیستمی طول همبستگی مشخصی وجود داشته باشد. تا زمانی که این طول مشخص باشد می‌توان کوچکی یا بزرگی آن را نسبت به ابعاد

سیستم اندازه گرفت. در نقطه‌ی بحرانی هنگامی که این طول واگرا می‌شود در سیستم رفتار خود تشابه‌ی ایجاد می‌شود. یعنی با نگاه کردن به سیستم در مقیاس‌های مختلف نمی‌توان اندازه‌ی شبکه را تشخیص داد.

4.6.	نمای بحرانی ν:
تمرین	– میدانیم که مقدار p_c برای تراوش پیوندی بر روی شبکه مربعی $\frac{1}{2}$ است. با این اطلاعات و با استفاده از نتایج تمرین 4.5 مقدار ν را بدست آورید.

رد پای واگرایی متوسط طول **همبستگی** را می‌توان در کمیت‌های دیگری نیز مشاهده کرد. یکی از کمیت‌هایی که به راحتی می‌توان واگرایی را در آن مشاهده کرد اندازه‌ی (مساحت یا جرم) متوسط خوشه‌های محدود است. در این متوسط گیری مانند کمیت متوسط طول اتصال باید خوشه ی بینهایت را مستثنی کرد.



شکل 6 اندازه متوسط خوشه ها برای تراوش جایگاهی در یک شبکه مربعی دوبعدی. شکل سمت چپ برای یک شبکه به ضلع 128 و شکل سمت راست برای شبکه ای به ضلع 10 است. بیشینه منحنی برای شبکه بزرگتر دو مرتبه بزرگی بلندتر است و قله پهنای کمتری دارد.

در جدول زیر برخی از نماهای بحرانی برای شبکه‌های مربعی در 2 و 3 بعد گزارش شده است.

جدول 1 نماهای بحرانی در شبکه‌ی مربعی در 2 و 3 بعد

کمیّت در زمان تراوش	رفتار بحرانی	نمای بحرانی	d=2	**d=3**
انرژی آزاد	$F\sim\lvert p-p_c\rvert^{2-\alpha}$	α	-2/3	
پارامتر نظم	$P_\infty\sim\lvert p-p_c\rvert^{\beta}$	β	5/36	**0.4**
اندازه متوسط خوشه‌های غیر بینهایت، S	$S\sim\lvert p-p_c\rvert^{-\gamma}$	γ	43/18	**1.8**
طول اتصالی	$\xi(p)\sim\lvert p-p_c\rvert^{-\nu}$	ν	4/3	**0.9**
تعداد خوشه‌ها	$n_s(p)\sim S^{-\tau}$	τ	187/91	**2.2**

4.5 آلگوریتم رشد خوشه

برای بررسی خصوصیات خوشه های تراوش یک راه استخراج این خوشه ها از درون شبیه سازی هایی مشابه آنچه در تمرین های قبلی انجام دادید میباشد. ولی در اینجا آلگوریتمی برای تولید یک تک خوشه ی تراوش جایگاهی معرفی میشود.

آلگوریتم رشد خوشه ی تراوش

1. یک جایگاه روشن را در نظر بگیرید.
2. تمام همسایه های این جایگاه را (چهار جایگاه در شبکه مربعی دوبعدی) به ترتیب انتخاب کنید. با احتمال p آنها را روشن کنید و در غیر اینصورت آنها را مسدود کنید.
3. در صورت روشن شدن جایگاه جدیدی همسایه های جدید به خوشه نیز معرفی میشود. درصورتی که این همسایگان قبلا مسدود نشده باشند مشابه (2) به آنها شانس روشن شدن بدهید.
4. قدم (3) را تا زمانی که تمام همسایگان خوشه مسدود باشند یا اندازه خوشه به یک حد بالا برسد ادامه دهید.

4.7.	بعد جرمی (فراکتالی) خوشه های تراوش: – با استفاده از آلگوریتم بالا کُدی برای تولید خوشه های تراوش در یک شبکه دوبعدی مربعی آماده کنید. – برای سه مقدار $p = \{0.5, 0.55, 0.59\}$ خوشه هایی تولید کنید و مقدار ξ و مساحت آنها، s، را برای این خوشه بدست آورید. – در یک نمودار مقدار $\log(s)$ را بر حسب $\log(\xi)$ برای این خوشه ها رسم کنید. – آیا میتوان خطی بر این نقاط عبور داد؟
تمرین	

4.6. تراوش در ابعاد بالاتر

بعد فضایی در مسئله تراوش بسیار در رفتار آن تاثیر میگذارد. از دید نظری حل مسئله در بعد 3 بسیار پیچیده تر از ابعاد پایینتر است. در حقیقت این مسئله در بعد 3 حل دقیق ندارد. ولی در روش شبیه سازی این مسئله اختلاف زیادی بین بعد 2 و 3 وجود ندارد. بیشتر اطلاعاتی که ما از تراوش در بعد 3 داریم از شبیه سازی های کامپیوتری بدست امده است.

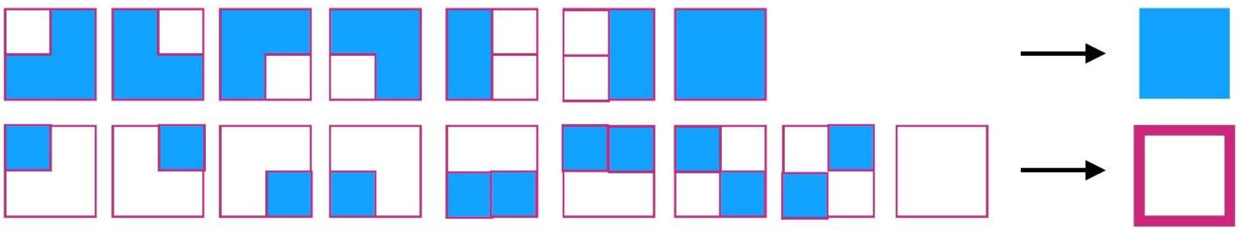
یکی از اختلافهای مهم در تراوش در بعد 3 با تراوش در بعد 2 این است که مقدار بحرانی احتمال کوچکتر از $\frac{1}{2}$ است. این به این معنی است که هم جایگاه های روشن و هم خاموش همزمان میتوانند تراوش کنند و خوشه ی بینهایت داشته باشند. به مثال اول این فصل برگردیم، اگر رنگ رسانا را بخواهیم در دو بعد بسازیم سیستم متلاشی میشود. به محض تشکیل خوشه ی بینهایت شبکه به دو قسمت پاره خواهد شد. ولی در بعد 3 هم ذرات رسانا و هم رنگ میتوانند به طور همزمان خوشه بینهایت داشته باشند و این امکان داشتن رنگ رسانا را میدهد.

4.7. گروه باز به هنجارش(Renormalization Group)

در بخش‌های قبل مشاهده کردیم که مقدار احتمال بحرانی تراوش، p_c و همچنین محل واگرایی طول همبستگی با بزرگ شدن ابعاد شبکه تغییر می‌کند. حالا می‌خواهیم با استفاده از گروه باز به هنجارش خواص مقیاسی شبکه‌ها را بررسی کنیم. برای این کار فرض کنید که از یک فاصله‌ی دور به یک شبکه نگاه می‌کنید. در فاصبه دور تشخیص خانههای مجزا از یکدیگر کمی دشوار می‌شود و تنها مشاهده دسته‌های از خانه‌های چسبیده به هم ممکن خواهد بود. اگر جایگاه‌های این شبکه با احتمالی کمتر از احتمال بحرانی، $p < p_c$ روشن شده باشد هر چه از شبکه دورتر می‌شویم تشخیص روشن و یا خاموش بودن خانه‌های نزدیک به هم دشوارتر خواهد شد. در فواصل خیلی دور تنها اطلاعاتی که برای ما اهمیت خواهد داشت دسته‌ی خانه‌هایی است که به

یکدیگر متصل هستند. خوشه‌های کوچک نیز به شکل یک نقطه‌ی روشن دیده می‌شوند و اهمیت خود را ازدست می‌دهند. به طور مشابه زمانی که به یک شبکه‌ی دارای تراوش از دور نگاه کنیم، خوشه‌های بینهایت حتما مشخص‌تر دیده می‌شوند و در فواصل حتی دورتر شبکه به شکل یک خانه‌ی پردیده خواهد شد.

این مثال شما را با روش باز به هنجار کردن فضای حقیقی[8] آشنا کرد. میخواهیم دگرگونی[9] مقیاسی را بررسی کنیم که احتمال روشن و خاموش بودن جایگاه‌های شبکه را به طور موضعی تغییر ندهد. برای این کار فرض می‌کنیم زمانی که از دور به شبکه نگاه می‌کنیم هر b در b خانه کنار هم را به شکل یک جایگاه روشن یا خاموش می‌بینیم. در شکل 7 دسته‌ای از قوانین را نشان می‌دهد که مجموعه‌های مربع‌های 2 در 2 را به یک خانه روشن یا خاموش تبدیل می‌کند.

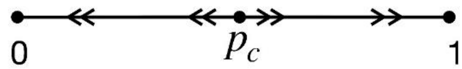


شکل 7 این دسته از قوانین برای شبکه‌های مربعی طراحی شده که خواص تراوش شبکه را در جهت عمودی حفظ می‌کند.

در واقع هرگاه در شبکه‌های کوچکتر 2 در 2 تراوش در جهت عمودی اتفاق بیافتد آنرا با یک خانه روشن و هنگامی که تراوش نباشد آنرا با خانه خاموش جایگذین می‌کنیم. اگر یک شبکه‌ی L در L که در جهت عمودی تراوش دارد را با این قانون به یک شبکه‌ی (L-b) در (L-b) تبدیل کنیم همچنان در جهت عمودی تراوش خواهد داشت. البته این جمله همیشه صحیح نیست. فرض کنید ک یک شبکه دارای دو خوشه‌ی بسیار بزرگ است که در صورتی که با یک خوشه‌ی افقی به یکدیگر متصل می‌شوند تشکیل خوشه بینهایت می‌دهند. این شبکه تحت این تبدیل ممکن است ارتباط حاصل از خوشه افقی و درنتیجه خاصیت تراوش را از دست بدهد. مثالهای دیگری نیز میتوان در نظر گرفت که با این قوانین خوشهی بینهایتی تولید شود که در شبکهای اصلی وجود نداشته است. اما در شبکه‌های بسیار بزرگ و در تقریب ترمودینامیک این اثرات بسیار موضعی است و مقدار بحرانی تراوش قابل محاسبه است.

اگر دسته قوانین نشان داده شده در شکل 7 را پشت سر هم بر روی شبکه‌های مختلف اعمال کنیم، شبکه‌هایی که تراوش دارند در نهایت به یک خانه روشن و شکبه‌هایی که تراوش ندارند به یک خانه خاموش تبدیل می‌شود. به شکل 8 نگاه کنید. در صورتی که از نقطه‌ای کمتر از حد بحرانی تراوش باز به هنجارش را شروع کنیم حتما به خانه خاموش یا احتمال 0 می‌رسیم و در صورتی که از نقطه‌ای بالاتر از یا برابر با حد بحرانی تراوش باز به هنجارش را شروع کنیم حتما به خانه‌ی روشن یا احتمال 1 می‌رسیم. به رفتاری که شکل 8 نمایش می‌دهد جریان باز به هنجارش گفته می‌شود که با این قوانین دارای 3 نقطه ثابت[10] است که دو تا از آنها یعنی 0 و 1 جاذب هستند.

[8] Real Space Renormalization Group
[9] Transformation
[10] Fixed point



شکل 8 جریان باز به هنجارش را برای قانون باز به هنجارش شبکه مربعی نشان میدهد. در این باز به هنجارش 3 نقطهی ثابت وجود دارد که دوتای آن جاذب هستند یعنی 0 و 1.

بیشتر بدانیم:

شکلهای این بخش با استفاده از کُد های موجود در وب گاه http://openscourcephysics.org تولید شده است. در این وب گاه کدهای بسیار جالبی برای شبیه سازی مسایل مختلف فیزیک یافت میشود.

برای آشنایی بیشتر با مبحث تراوش کتاب "Introduction to percolation theory" نوشته ی Dietrich Stauffer و Ammon Aharony مرجعی بسیار کامل و مناسب است. زبان کتاب بسیار روان و آلوده به طنز است که باعث جذابیت بیشتر کتاب میشود با این وجود چیزی از گفتار علمی و دقیق کتاب نمیکاهد. روند پیشرفت کتاب بسیار با دقت انتخاب شده است و خواننده را به آرامی از دنیای زیبا و ساده ی تراوش به محاسبات پیچیده ی آن میبرد. با وجود اینکه کتاب کمی قدیمی است و بیش از 20 سال از چاپ اول آن میگذرد ولی به دلیل پوشش وسیع موضوع به مرجعی برای این مبحث تبدیل شده است.

برای آشنایی بیشتر با آلگوریتم هوشن-کوپلمن می‌توانید مقالات زیر را مطالعه کنین:

[1] “Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm”, J. Hoshen and R. Kopelman, Phys. Rev. B 14, 3438 – Published 15 October 1976. DOI:https://doi.org/10.1103/PhysRevB.14.3438

[2] “Percolation and cluster distribution. II. layers, variable-range interactions, and exciton cluster model”, J. Hoshen, R. Kopelman, and E. M. Monberg, 1978-09. DOI:http://dx.doi.org/10.1007/BF01011724