

سری دوم تمرینات درس ریاضی فیزیک پیشرفته - دکتر کریمی پور توپولوژی، همولوژی و هموتوپي

موعد تحویل پاسخها: دوشنبه ۱۷ اردیبهشت سال ۱۴۰۳ - تا ساعت ۲۳:۵۹

از طریق سامانه درس افزار

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

سوال اول: نشان دهید زیرمجموعه A از فضای متریک کامل (M, d) فشرده است، اگر و تنها اگر بسته و تماماً کراندار^۱ باشد.

تعریف تماماً کرانداری: زیرفضای A از فضای متریک (M, d) تماماً کراندار است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه‌ای متناهی از گوی‌های باز با شعاع ε باشد که:

۱. مرکز گوی‌ها در A باشد.

۲. اجتماع تمامی این گوی‌های باز شامل کل A شود.

سوال دوم: دو فضای متریک (M, d_M) و (N, d_N) مفروض هستند. اگر نگاشت $f: M \rightarrow N$ پیوسته باشد و A زیرمجموعه‌ای فشرده از M باشد؛ نشان دهید که تصویر A ، یعنی $f(A)$ ، زیرمجموعه‌ای فشرده از N است. نتیجه بگیرید که نگاشت Homeomorphism بین دو فضای متریک، وضعیت فشردگی را حفظ می‌کند.

سوال سوم: ساده‌ترین نگاشت بین فضاهای متریک یک/ایزومتري است؛ یعنی یک تابع دوسویی $f: M \rightarrow N$ که فاصله‌نگهدار است؛ یعنی برای هر دو عضو $p, q \in M$ داریم:

$$d_N(f(p), f(q)) = d_M(p, q)$$

¹Toatally bounded

همچنین به فضاهایی که بینشان نگاشت ایزومتري موجود باشد، فضاهای ایزومتريک می‌گوییم.

الف) نشان دهید که نگاشت ایزومتري، پیوسته است.

ب) استدلال کنید که هر نگاشت ایزومتري یک Homeomorphism است.

ج) نشان دهید که بازه حقيقي $[0, 1]$ با بازه $[0, 2]$ ایزومتريک نیست.

سوال چهارم: اگر M و N دو فضای متريک ناتهي باشند. نشان دهید که اگر هر دو همبند Connected باشند، فضای متريک $M \times N$ هم همبند است. در مورد عکس اين گزاره استدلال يا مثال نقضي بياوريد.

سوال پنجم: به کمک تعاريف، گزاره‌های زیر را برای یک زیرفضای S از فضای متريک M نشان دهید.

الف) $S^\circ = S \setminus \partial S$

ب) $(S^\circ)^\circ = S^\circ$

ج) $\partial S = \partial \bar{S}$

د) $\partial \partial S \subset \partial S$

سوال ششم: فرض کنید $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ یک نگاشت پوششی باشد که برای هر $x \in X$ ، $\pi^{-1}(x)$ ناتهي و متاهي باشد. نشان دهید که فضای توپولوژیک \tilde{X} هاسدورف^۲ است اگر و فقط اگر فضای توپولوژیک X هاسدورف باشد.

سوال هفتم: گروه‌های همولوژی نوار موبیوسی که یک نقطه از آن حذف شده را پیدا کنید.

²Hausdorff

سوال هشتم: $\pi_1(\Sigma_{g,n})$ ، یعنی گروه هموتوپی اول یک رویه‌ی ریمانی با جنس g که n نقطه‌ی آن حذف شده‌اند، پیدا کنید. آیا می‌توانید با آبدلی کردن گروه بدست‌آمده، به گروه همولوژی اول برسید؟

سوال نهم: نشان دهید که بین فضاها‌ی زیر، Deformation Retraction وجود ندارد.

الف) \mathbb{R}^2 و S^1 .

ب) $S_1 \times D_1$ و $S_1 \times S_1$. (یعنی از یک چنبره‌ی توپر به مرزش)

ج) نوار موبیوس و مرزش.

سوال دهم: مجموعه‌ی X را متشکل از n خط مبدأگذر در \mathbb{R}^3 بگیرید. گروه $\pi_1(\mathbb{R}^3 - X)$ را بدست آورید.
