مسائلی از کوهمولوژی De Rham به همراه حل

حسین محمدی

درس ریاضی‌فیزیک پیشرفته - دکتر کریمی‌پور

سوال اول: نشان دهید که گروه‌های کوهمولوژی $S^۱$ به شکل زیر است.

$$H^i_{\mathrm{dR}}(S^۱, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & i = ۰, ۱ \\ ۰ & i > ۱ \end{cases}$$

راه حل: می‌دانیم که مانند همولوژی، گروه صفرم کوهمولوژی با ضرایب حقیقی، جمع مستقیم $\mathbb{R}$ است به تعداد مولفه‌های همبندی خمینه‌ی اصلی. چون دایره همبند است پس $H^۰_{\mathrm{dR}}(S^۱, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
چون دایره یک خمینه‌ی یک‌بعدی است؛ بنابراین روی آن تنها حداکثر ۱ ــ فرم‌ها زندگی می‌کنند فرمهای مرتبه بالاتر نداریم. بنابراین گروه‌های Cochain و Coboundary از مرتبه‌ی ۲ به بالا بدیهی هستند و با ساختن گروه خارج‌قسمتی، گروه‌های کوهمولوژی مرتبه ۲ به بالا هم بدیهی‌اند.
ω را تحدیدِ فرمِ $\omega = \frac{-ydx+xdy}{x^۲+y^۲} \in \mathbb{R}^۲ - \{۰\}$ به دایره‌ی $S^۱$ می‌گیریم؛ به شکل موضعی، $\omega\big|_{S^۱} = d\theta$ که در آن θ تابعِ زاویه در مختصات قطبی است. همین ۱ ــ فرم را به عنوان پایه اختیار می‌کنیم و نشان می‌دهیم که هر ۱ ــ فرمِ ξ روی $S^۱$ را می‌توان به شکل $\xi = f(\theta)d\theta$ نوشت که $f(\theta)$ تابعی هموار و متناوب (با دوره‌ی ۲π) است.
برای‌این منظور، نشان می‌دهیم که ثابتی مثل c و یک تابع مشتق‌پذیر مثل g هست که

$$f(\theta)d\theta = cd\theta + dg(\theta).$$

اگر این تجزیه را ثابت کنیم، هر ۱ ــ فرمِ دلخواه روی دایره، تنها یک عدد حقیقی (c) با کامل بودن فاصله دارد؛ بنابراین گروه کوهمولوژی اول، همریخت با اعداد حقیقی است.
به‌سادگی و با انتگرال‌گیری بدست می‌آوریم:

$$c = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} f(\theta)d\theta$$

و با جایگذاری در رابطه‌ی قبلی

$$g(\theta) = \int_۰^{\theta} \big(f(t) - c\big)dt$$

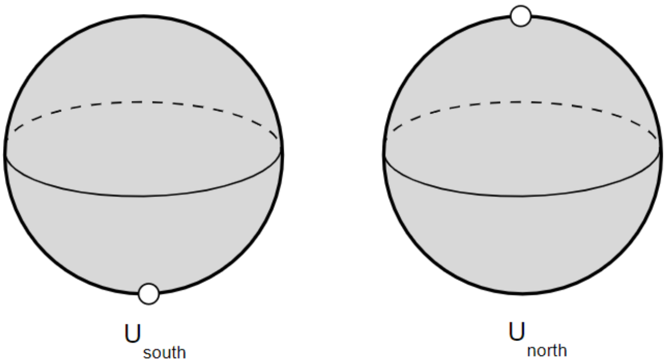
که به وضوح g مشتق‌پذیر است (چون تابع اولیه‌ی f است که خودش هموار بود)؛ همچنین

$$g(\theta + ۲\pi) = g(\theta) + \int_{\theta}^{۲\pi+\theta} \big(f(t) - c\big)dt$$
$$= g(\theta) + \int_{\theta}^{۲\pi+\theta} f(t)dt - \underbrace{\int_{۰}^{۲\pi} f(t)dt}_{c \text{ جاگذاری}} = g(\theta)$$

که حذف دوتای آخری به خاطر متناوب بودنِ f صورت می‌گیرد.

سوال دوم: هر ۱ــفرم بسته روی $S^۲$ یک فرمِ کامل است.

راه حل: فرض کنید ω یک‌ــفرمِ بسته روی کره‌ی $S^۲$ باشد. همچنین U_{north} و U_{south} بازهایی هستند که با حذف‌کردن کردن قطب شمال و جنوب از روی کره حاصل می‌شوند. (به شکل ۱ نگاه کنید.) به خاطر Stereographic projection هر کدام از این دو باز را می‌توانیم با



شکل ۱: بازهای U_{north} و U_{south} از خمینه‌ی $S^۲$

صفحه‌ی حقیقی homeomorphic بدانیم. مطابق لمِ پوانکاره، تحدیدِ فرمِ ω به هرکدام از این بازها، خود یک فرمِ کامل است.

$$\omega_i = \omega\big|_{U_i} = df_i, \qquad i = ۱, ۲$$

روی اشتراک این دو باز (که کره منهای دو نقطه‌یِ قطب شمال و جنوب است) تعریف فرمهای تحدید شده باید با هم همخوانی داشته باشد.

$$\omega_۱\big|_{U_۱\cap U_۲} = \omega_۲\big|_{U_۱\cap U_۲} \longrightarrow df_۱ = df_۲$$

حالا، چون که $U_۱ \cap U_۲$ یک زیرمجموعه‌ی همبند است، نتیجه می‌شود که [۱] $f_۱ = f_۲ + \lambda$. بنابراین، تابع $f : S^۲ \longmapsto \mathbb{R}$ که $f\big|_{U_۱} = f_۱$ و $f\big|_{U_۲} = f_۲ + \lambda$ یک تابعِ هموار و تک‌مقداری است و داریم $\omega = df$ ؛ بنابراین، هر یک‌ــفرمِ بسته روی کره، کامل است.

[۱] روندِ کار یافتن تابع اولیه است. اما نکته این است که اگر این معادله دیفرانسیل روی ناحیه‌ای بود که مثلا m مولفه‌ی همبندی داشت، باید تعداد m ثابت تعریف می‌کردیم که $\lambda_i \in \mathbb{R}$ و در هر ناحیه‌ی همبندی، $f_۱ = f_۲ + \lambda_i$ جواب این معادله می‌شد.

سوال سوم: G گروهِ لیِ همبند و فشرده‌ای است که روی خمینه‌ی M اثر می‌کند.

الف) برای هر k، اول تعریف kـ فرم‌های چپ‌ناوردا را بنویسید، سپس kـ امین گروه کوهمولوژی چپ‌ناوردا را ، $H_L^k(M)$ ، تعریف کنید.
ب) نشان‌دهید که $H_L^k(M) \cong H_{\mathrm{dR}}^k(M)$. برای این‌کار، نشان‌دهید که نگاشت القایی از جانشانی، روی گروه‌های کوهمولوژی یک‌به‌یک و پوشاست.

راه حل:
الف) قرار بدهید $\omega \in \Omega^k(M)$. فرمِ ω برای هر $g \in G, p \in M$ یک فرمِ چپـ ناوردا نامیده می‌شود اگر داشته باشیم: $\omega_p = \omega_{\tau_g p}\left((d\tau_g)_p^*\right)^{-1}$. یا به طور معادل $\tau_g^*\omega = \omega$ برای هر $g \in G$. فضای تمامی این فرم‌های چپـ ناوردا روی M را با $\Omega_L^k(M)$ نشان دهید. قرار بدهید

$$Z_L^k(M) = \left\{\omega \in \Omega_L^k(M) \mid d\omega = ۰\right\}$$

و

$$B_L^k(M) = \left\{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega = d\eta \text{ for some } \eta \in \Omega_L^{k-۱}(M)\right\}$$

مطابق تعریف می‌دانیم $Z_L^k(M)$ یک زیرفضای خطی از $\Omega^k(M)$، و $B_L^k(M) \subset Z_L^k(M)$ یک زیرفضای خطی است. حالا تعریف کنید $H_L^k(M) = Z_L^k(M)/B_L^k(M)$. این تعریف گروه‌کوهمولوژی چپـ ناورداست.

ب) اول از همه، چون $Z^k(M) \subset i\left(Z_L^k(M)\right)$ و $B^k(M) \subset i\left(B_L^k(M)\right)$، بنابراین نگاشت i یک نگاشت خطی به شکلِ زیر القا می‌کند.

$$i_* : H_L^k(M) = Z_L^k(M)/B_L^k(M) \to Z^k(M)/B^k(M) = H_{dR}^k(M).$$

همچنین dg را مژرِ هار [۲] بهنجار شده رویِ گروهِ G بگیرید. ، می‌دانیم که dg مژرِ مربوط به فرمِ حجم α روی G است که راستـ ناوردا و چپـ ناورداست و داریم $\int_G \alpha = ۱$. برای هر $\omega \in \Omega^k(M)$ متوسطِ ω نسبت به G را تعریف کنید:

$$A(\omega) = \int_G \tau_g^*\omega dg$$

اول از همه نشان می‌دهیم که $A(\omega) \in \Omega_L^k(M)$. در حقیقت، برای هر $h \in G, p \in M$ و

[2] Haar Measure

هر میدان برداری هموارِ $X_1, \ldots, X_k$ داریم:

$$\begin{aligned}
\left(\tau_h^* A(\omega)\right)_p (X_1, \ldots, X_k) &= A(\omega)_{\tau_h p} \left((d\tau_h)_p X_1, \ldots, (d\tau_h)_p X_k \right) \\
&= \int_G \left(\tau_g^* \omega\right)_{\tau_h p} \left((d\tau_h)_p X_1, \ldots, (d\tau_h)_p X_k \right) dg \\
&= \int_G \omega_{\tau_{gh} p} \left((d\tau_{gh})_p X_1, \ldots, (d\tau_{gh})_p X_k \right) dg \\
&= \int_G \left(\tau_{gh}^* \omega\right)_p (X_1, \ldots, X_k)\, dg \\
&= \int_G \left(\tau_{gh}^* \omega\right)_p (X_1, \ldots, X_k)\, d(gh) dg \quad \text{چون } dg \text{ راست‌ناوردا است.} \\
&= A(\omega)_p (X_1, \ldots, X_k)
\end{aligned}$$

بنابراین $\tau_h^* A(\omega) = A(\omega)$، و $A(\omega) \in \Omega_L^k(M)$. آسان است که بررسی کنیم A خطی است. همچنین توجه کنید برای هر $\omega \in \Omega_L^k(M)$،

$$A(\omega) = \int_G \tau_g^* \omega dg = \omega \int_G \alpha = \omega$$

بنابراین $A : \Omega^k(M) \to \Omega_L^k(M)$ یک تصویرگر [3] است.
به وضوح $A\left(Z^k(M)\right) = Z_L^k(M)$، و $A\left(B^k(M)\right) = B_L^k(M)$ چون اگر $\omega = d\eta$، آنگاه $A(\omega) = A(d\eta) = dA(\eta)$ (تساوی آخر از تعریف حاصل می‌شود، تنهای کافی است یک برداری رویِ آن اثر کند.) بنابراین A یک نگاشت خطی $A_* : H_{dR}^k(M) \to H_L^k(M)$ القا می‌کند و $A_* \circ i_* = Id$، نتیجه می‌دهد که i_* یک‌به‌یک است.
برای پوشایی کافیست ثابت کنیم $[A(\omega)] = [\omega]$ برای هر $[\omega] \in H_{dR}^k(M)$. اولا نگاشتِ A که در بالا تعریف شده، به شکلِ

$$A(\omega) = \int_G \tau^* \omega \wedge \pi^* \alpha$$

قابل بازنویسی است که $\tau : G \times M \to M$ اثرِ G رویِ M، و $\pi : G \times M \to G$ یک عملگر تصویر است و فرمِ $\tau^* \omega \wedge \pi^* \alpha$ یک top-form رویِ G است.
همسایگیِ U contractible از e در G، و فرمِ β رویِ G که رویِ U support دارد و در شرط $\int_G \beta = 1$ صدق می‌کند، در نظر داشته باشید. توجه کنید که G فشرده و جهت‌دار است، بنابراین $\int_G \alpha - \beta = 0$ و نتیجه می‌شود $\alpha - \beta$ کامل است، یعنی فرمی مثل γ رویِ G هست که $\alpha - \beta = d\gamma$.
قرار دهید $\tau_U : U \times M \to M$ تحدیدِ τ باشد. آنگاه $\tau^* \omega \wedge \pi^* \beta = \tau_U^* \omega \wedge \pi^* \beta$، چراکه β رویِ U Support دارد. همچنین $\pi_M : U \times M \to M$ تصویرگر است چون که U قابل انقباضِ به e, τ_U است و π_M هموتوپیک است، پس $\tau_U^* \omega - \pi_M^* \omega$ روی $U \times M$ کامل است

[3] Projection

یعنی فرمِ η روی $U \times M$ هست که $\tau_U^*\omega = \pi_M^*\omega + d\eta$. نهایتا، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \int_G \tau^*\omega \wedge \pi^*\alpha \\ &= \int_G \tau^*\omega \wedge \pi^*\beta + \int_G \tau^*\omega \wedge d\pi^*\gamma \\ &= \int_G \tau_U^*\omega \wedge \pi^*\beta + \int_G \tau^*\omega \wedge d\pi^*\gamma \\ &= \int_G \pi_M^*\omega \wedge \pi^*\beta + \int_G d\eta \wedge \pi^*\beta + \int_G \tau^*\omega \wedge d\pi^*\gamma \\ &= \omega + d\int_G \eta \wedge \pi^*\beta \end{aligned}$$

حاصل انتگرالِ خطِ یکی‌مانده به آخر با قضیه استوکس صفر می‌شود $[A(\omega)] = [\omega]$ و i_* پوشاست.

سوالات جالب توجه:
اگر M یَک خمینه‌ی هموار باشد، نشان‌دهید که برای هر k

$$H^k_{\mathrm{dR}}(X \times \mathbb{R}) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(X).$$

اگرچه مشابه این سوال در بخش هموتوپی به سادگی حل شد، اما برای حلِ این سوال، نیاز به دانستن ابزارهای پیشرفته تری مثلِ Spectral sequence و همچنین Mayer-Vietoris sequence داریم. کلا محاسبات کوهمولوژی تکنیکی تر از محاسبات همولوژی و هموتوپی است و برای فهم بهتر آن نیاز هست که «توپولوژی جبری» یاد بگیریم. البته که در سطح این درس نیاز به یادگرفتن چنین مباحثی نیست و حل سوالات ساده‌ای مثل دو سوال اول، برای مقاصد ما کافی هست. سوال سوم هم خیلی متکی به مفاهیم و قضایای اصلی گروه‌هایِ لی بود و به همین خاطر می‌توانید به آن به چشمِ یک سوالِ آموزشی نگاه کنید (نه سوالی که از شما انتظار برود خودتان به تنهایی حل کنید.)

نشان‌دهید که اگر یک خمینه‌ی ریمانی فشرده‌ی M، یک متریک با انحنای ثابت مثبت داشته باشد؛ آنگاه گروه‌های کوهمولوژی زیر صفرند.

$$H^r_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R}) = ۰, \quad r = ۱, \ldots, n - ۱$$

این هم سوالی ساده و قابل فهم است که از ابزارهای آنالیز هارمونیک و رابطه‌ی معروفِ Weitzenbock برای فرم‌های هارمونیک در حل آن استفاده می‌شود.
در کل، سوالاتی که می‌شود با این ابزارهای در دسترسمان حل کنیم، سوالهایی نسبتا ساده اند و نیاز نیست برای امتحان خیلی نگران سوالات این بخش باشید.
