تمرین سری چهارم درس نظریه گروه‌ها - دکتر رضاخانی

مهلت تحویل: شنبه ۲۵ فروردین ماه سال ۱۴۰۳ تا ساعت ۲۳:۵۹

از طریق سامانه درس‌افزار شریف

حسین محمدی
hossein.mohammadi.00427@gmail.com

زهرا کبیری
kabiri.zahra98@gmail.com

تمرین ۱۵ [۲۰ امتیاز] : قضیه اساسی همریختی

حالا که با زیرگروه بهنجار آشنا شدید؛ می‌توانیم قضیه‌ای اساسی و مهم را بیان و اثبات کنیم.

قضیه اول همریختی: دو گروه $(G_1, \times_1)$ و $(G_2, \times_2)$ با همریختی $\varphi : G_1 \longmapsto G_2$ بین آنها مفروض‌اند. آنگاه

$$\frac{G}{\ker \varphi} \simeq \operatorname{im} \varphi$$

که $\ker \varphi$ و $\operatorname{im} \varphi$ به‌ترتیب هسته و تصویر همریختی φ هستند.

الف) اول نشان دهید که هسته‌ی همریختی یک زیرگروه بهنجار از G است؛ یعنی $\ker \varphi \trianglelefteq G$.

ب) نگاشت $\Phi : \frac{G}{\ker \varphi} \longmapsto \operatorname{im} \varphi$ که اعضای گروه خارج قسمتی را به تصویر نگاشت φ می‌نگارد، اینطور معرفی می‌کنیم:

$$\Phi(g \ker \varphi) := \varphi(g).$$

خوش تعریفی این نگاشت را نشان دهید؛ یعنی اگر $g \ker \varphi = g' \ker \varphi$ یک عضو از گروه خارج‌قسمتی باشد که با نماینده‌های متفاوتی نشان داده شده‌است، تحت نگاشت Φ به یک عضو از تصویر نگاشته می‌شوند.

ج) ثابت کنید که Φ همریختی گروهی است. همچنین نشان دهید که این نگاشت یک‌به‌یک و پوشاست.

بنابراین Φ یکریختی است و نتیجه می‌شود که گروه مبدا و مقصد با هم یکریخت هستند.

تمرین ۱۶ [۱۵ امتیاز] : زیرگروه‌های بهنجار تودرتو [1]

با ذکر یک مثال نشان دهید که می‌توانیم زیرگروه‌های تودرتوی $E \leq F \leq G$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که $E \trianglelefteq F$ و $F \trianglelefteq G$ اما $E \ntrianglelefteq G$.[2]

تمرین ۱۷ [۱۵ امتیاز] : گروه G را که از ماتریس‌های ۲ × ۲ به صورت $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \;,\; ad \neq 0 \right\}$ تشکیل شده با ضرب ماتریسی در نظر بگیرید. مجموعه‌ی $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$ را نیز در نظر بگیرید. نشان دهید:

الف) N یک زیرگروه بهنجار G است.

ب) گروه خارج قسمتی G/N جابه‌جایی [3] است.

تمرین ۱۸ [۲۵ امتیاز] : فرض کنید H و K دو زیرگروه بهنجار از گروه G باشند به طوری که $H \cap K = \{e\}$.

الف) نشان دهید برای هر $h \in H$ و هر $k \in K$ داریم $hk = kh$.

ب)اول مطابق مطالبی که در کلاس حل تمرین دیدید؛ استدلال کنید که HK یک زیرگروه از G است؛ سپس نشان دهید حاصل ضرب دکارتی $H \times K$ با گروه HK یکریخت است.

$$HK = \{hk | \forall h \in H \;,\; \forall k \in K\}$$

---

[1] Nested normal subgroups

[2] مقصود از نمادگذاری $G_1 \trianglelefteq G_2$ این است که زیرگروه G_1 در گروه G_2 بهنجار است. همچنین $G_1 \ntrianglelefteq G_2$ یعنی زیرگروه G_1 در گروه G_2 بهنجار نیست.

[3] Abelian

تعریف شاخص یک زیرگروه

شاخص [a] یک زیرگروه $H \leq G$ را با $[G:H]$ نشان می‌دهیم و مقدارش تعداد هم‌مجموعه‌های H در G است
.

$$[G:H] = \frac{|G|}{|H|}$$

در تعریف بالا، تفاوتی نمی‌کند که منظورمان از هم‌مجموعه، هم‌مجموعه‌ی راست باشد یا هم‌مجموعه‌ی چپ [b].

استدلال: اگر تعداد هم‌مجموعه‌های راست و چپ را به ترتیب با $[G:H]_r$ و $[G:H]_l$ نشان بدهیم؛ باید ثابت کنیم که این‌دو باهم برابرند. نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$f(X) = X^{-1}$$

این نگاشت روی هم‌مجموعه‌های چپ اثر می‌کند و آن‌ها را به هم‌مجموعه‌ی راست می‌نگارد.
می‌توانیم ببینیم که

$$f(g_iH) = Hg_i^{-1}$$

از این مشاهده، به سادگی نتیجه می‌شود که این نگاشت، یک‌به یک و پوشاست (به عنوان تمرینی ساده دست به قلم شوید.)؛ بنابراین، تعداد هم‌مجموعه‌های چپ و راست با هم برابرند. □

یک رابطه‌ی جالب دیگر برای شاخص گروه‌ها وجود دارد که تحت عنوان «رابطه برج [c]» شناخته می‌شود.

قضیه برج [d] **:** اگر $K \leq H \leq G$ زیرگروه‌هایی با اندیس متناهی باشند؛ آنگاه $[G:K] = [G:H][H:K]$.

[a] Index of a subgroup

[b] توجه کنید که تعداد هم‌مجموعه‌های راست و چپ با هم برابرند؛ این لزوما به این معنی نیست که هر هم‌مجموعه‌ی راست با یک هم‌مجموعه‌ی چپ برابر است.

[c] Tower Law

[d] برای اثبات به این صفحه رجوع کنید.

تمرین ۱۹ [۱۰ امتیاز] : شرط‌های بهنجاری یک زیرگروه

الف) فرض کنید H تنها زیرگروه با مرتبه $\mathscr{O}(H)$ از گروه متناهی G است. نشان دهید که H یک زیرگروه بهنجار از G است.

ب) اگر G یک گروه باشد و H یک زیرگروه با شاخص ۲ در G باشد. نشان دهید که H یک زیرگروه بهنجار G است.

(**راهنمایی:** از تعاریف دیگر زیرگروه بهنجار استفاده کنید؛ تعریفی از زیرگروه بهنجار هست که حل این سوال را بسیار ساده می‌کند.)

تمرین ۲۰ [۱۵ امتیاز] : دو زیر گروه H_1 و H_2 از گروه G را در نظر بگیرید. نشان دهید هر هم‌مجموعه راست نسبت به $H_1 \cap H_2$ خود اشتراک یک هم‌مجموعه راست H_1 با هم‌مجموعه راست دیگری از H_2 است. از این نتیجه استفاده کنید تا قضیه پوانکاره را اثبات کنید.

قضیه پوانکاره: اگر زیرگروه‌های H_1 و H_2 شاخص متناهی در G داشته باشند، آنگاه اشتراک آن‌ها $(H_1 \cap H_2)$ نیز شاخص متناهی دارد.

گروه جایگشت‌ها را بهتر بشناسیم.

در این جعبه، با خواص گروه جایگشت و اعضایش بیشتر آشنا می‌شویم.

ماتریس‌های جایگشت

می‌توانیم جایگشت‌ها را با ماتریس ها هم نمایش دهیم. برای هر عضو $\sigma \in S_n$، مطابق دستور زیر، ماتریس متناظر با این عضو، $(M_\sigma)_{n\times n}$، را پیدا می‌کنیم.

$$(M_\sigma)_{ij} = \begin{cases} ۱ & \sigma(j) = i \\ ۰ & otherwise. \end{cases}$$

به عنوان مثال، ماتریس منتاظر با عضو

$$\sigma = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۱ & ۲ & ۵ & ۴ \end{pmatrix}$$

به شکل زیر است:

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

می‌توانید با تعریف بالا مشاهده کنید که ترکیب جایگشت ها معادل با ضرب ماتریسی است. پس می‌توانید یک یکریختی بین گروه جایگشت و یک گروه از ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های $\{۰, ۱\}$ تعریف کنیم.

نکته: ماتریس M_σ در هر سطر یا در هر ستونش، دقیقا یک درایه ۱ دارد. با جابه‌جا کردن سطرهای ماتریس M_σ می‌توانیم به ماتریس همانی برسیم، بنابراین دترمینان این ماتریس ۱$\pm$ است. به طور خاص، در مورد ترانهش‌ها، که تنها جای دوسطر با هم عوض شده‌اند؛ دترمینانِ ماتریسِ متناظر با یک ترانهش، همواره منفی یک است.

تعریف نگاشت sgn

حتما تا به حال اسم جایگشت‌های زوج یا فرد به گوش‌تان خورده است. در این بخش سعی می‌کنیم این اصطلاحات را دقیق‌تر بشناسیم. اول به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه: *اگر $\sigma \in S_n$ دارای دو تجزیه‌ی*

$$\sigma = \alpha_۱ \dots \alpha_r$$
$$\sigma = \beta_۱ \dots \beta_s$$

به حاصل‌ضرب ترانهش‌ها باشد؛ آنگاه $r \overset{۲}{\equiv} s$.

اثبات: مطابق بخش قبلی، کافی است که فقط ماتریس‌های متناظر با این دو تجزیه را تشکیل دهیم:

$$A_\sigma = A_{\alpha_۱} \dots A_{\alpha_r}$$
$$A_\sigma = A_{\beta_۱} \dots A_{\beta_s}$$

پس دترمینان این نمایش‌های ماتریسی بدست می‌آید:

$$\det A_\sigma = \det(A_{\alpha_۱}) \dots \det(A_{\alpha_r})$$
$$\det A_\sigma = \det(A_{\beta_۱}) \dots \det(A_{\beta_s})$$

حالا، چون α_i و β_j ها ترانهش هستند؛ پس دترمینان نمایش ماتریسی‌شان منفی یک است، بنابراین:

$$\det(A_\sigma) = (-۱)^r$$
$$\det(A_\sigma) = (-۱)^s$$

پس شرط $(-۱)^s = (-۱)^r$ حاصل می‌شود که نتیجه‌ی $r \overset{۲}{\equiv} s$ را به دست می‌دهد. □

گروه جایگشت‌ها را بهتر بشناسیم.

علامت یک جایگشت را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} ۱ & \text{حاصل‌ضرب تعداد زوجی ترانهش باشد.}\ \sigma \\ -۱ & \text{حاصل‌ضرب تعداد فردی ترانهش باشد.}\ \sigma \end{cases}$$

قضیه‌ی فوق، خوش تعریفی نگاشت sgn را نتیجه می‌دهد؛ اگر تجزیه یک جایگشت به ترانهش‌ها پاریته یکسان نداشته باشد، تحت این نگاشت باید به ± ۱ برود.
حال بحث می‌دهیم که تعریف بالا، یک به‌روریختی [a] از گروه جایگشت‌ها به گروه $\{۱, -۱\}$ با عمل ضرب (یعنی همان گروه دوری از مرتبه ۲) است. دلیل آن ساده است؛ اگر دو عضو زوج از گروه جایگشت برداریم، تحت نگاشت sgn هر دو به یک نگاشته می‌شوند. پس حاصل‌ضربشان این دو عضو (که به شکل تعداد زوجی ترانهش نوشته می‌شود) به عضو ۱×۱ نگاشته می‌شود. بقیه موارد هم به طور مشابه استدلال می‌شوند. همچنین این نگاشت پوشاست چون این نگاشت یک ترانهش را به عضو -۱ می‌نگارد.

حالا بیایید قضیه اساسی همریختی که در بالا ذکر شد را به کار ببریم. می‌دانیم که هسته‌ی این نگاشت، اعضایی هستند که به ۱ نگاشته می‌شوند، یعنی تمامی جایگشت‌های زوج هسته‌ی این نگاشت هستند.

$$\ker \operatorname{sgn} := A_n = \{\sigma \in S_n \big| \operatorname{sgn}(\sigma) = ۱\}$$

پس مطابق قضیه اول همریختی:

$$\frac{S_n}{A_n} \simeq \mathbb{Z}_۲$$

این رابطه نتیجه می‌دهد که $|A_n| = \frac{|S_n|}{۲}$ ؛ یعنی نیمی از اعضای S_n زوجند، پس نیمه‌ی دیگر فرد هستند.

نکته: حتی جالب‌تر این که مطابق تمرین «قضیه اساسی همریختی»، نتیجه گرفتیم که $A_n \trianglelefteq S_n$. به زیرگروه A_n ، زیرگروه متناوب [b] از گروه S_n می‌گوییم [c]
.
در آخر هم «آزمون اندیس» برای وجود زیرگروه بهنجار در یک گروه را ببینیم.

آزمون اندیس: اگر G یک گروه متناهی باشد و $H \leq G$ به طوری که $|G| \nmid [G:H]!$ ؛ آنگاه G دارای یک زیرگروه بهنجار نابدیهی است که در H قرار دارد.

اثبات: فرض کنید $[G:H] = m$ و $\{g_۱H, g_۲H, \dots, g_mH\}$ مجموعه هم‌مجموعه‌های چپ زیرگروه H باشد. نگاشت $\phi : G \longmapsto S_m$ را اینطور در نظر بگیرید:

$$g \longmapsto \begin{pmatrix} g_۱H & g_۲H & \dots & g_mH \\ gg_۱H & gg_۲H & \dots & gg_mH \end{pmatrix}$$

به سادگی تحقیق می‌شود که این نگاشت همریختی گروهی است [d] . حال از قضیه اول همریختی داریم:

$$|G| = |\operatorname{im} \phi||\ker \phi| \to |\operatorname{im} \phi| \mid |S_m| = m! \qquad (۱)$$

چون مطابق با فرض سوال، $|G| \nmid m!$ ؛ با در کنار هم قرار دادن این رابطه و عبارت (۱) نتیجه می‌گیریم که $\ker \phi > ۱$. حالا

[a] یعنی یک همریختی که پوشاست.

[b] Alternating subgroup of S_n

[c] آیا می‌توانید با تعریف

$$\sigma\theta\sigma^{-۱} \in A_n\ , \quad \forall \theta \in A_n\ ,\ \forall \sigma \in S_n$$

بهنجار بودن A_n در S_n را ثابت کنید؟

[d] دقیقا مشابه با قضیه کیلی.

گروه جایگشت‌ها را بهتر بشناسیم.

$$\begin{aligned}\ker\phi &= \left\{g\in G \;\middle|\; \begin{pmatrix} g_1H & g_2H & \dots & g_mH\\ gg_1H & gg_2H & \dots & gg_mH\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1H & g_2H & \dots & g_mH\\ g_1H & g_2H & \dots & g_mH\end{pmatrix}\right\}\\ &= \left\{g\in G \;\middle|\; gg_1H=g_1H,\dots,gg_mH=g_mH\right\}\\ &= \left\{g\in G \;\middle|\; g\in g_1Hg_1^{-1},\dots,g_mHg_m^{-1}\right\}\\ &= g_1Hg_1^{-1}\cap\dots\cap g_mHg_m^{-1}\subset H\end{aligned}$$

علت این‌که $\cap_{j=1}^{m} g_jHg_j^{-1}\subset H$ این است که یکی از این هم‌مجموعه‌ها، هم‌مجموعه‌ی بدیهی یا eH است؛ پس اشتراک همه‌ی این هم‌مجموعه‌ها لاجرم زیرمجموعه‌ی خود H هم هست.

پس زیرگروهی نابدیهی از H یافتیم که در G بهنجار است. □

تمرین اختیاری

نشان دهید که هر گروه از مرتبه‌ی p^2 (که p عددی اول است) آبلی است.
(راهنمایی: از قضیه لاگرانژ، آزمون اندیس و نتایج تمرین‌هایی که در این سری حل کردید استفاده کنید تا این تمرین را حل کنید.)