

آونگ های جفت شده

مطالعه پدیده جفت شدگی در نوسان، اولین بار با کنجکاوای دانشمند آلمانی کریستیان هویگنس^۱، مخترع ساعتپاندولی (شکل ۱) شروع شد که منجر به شناخت جدیدی در نوسان و حرکت نوسانی گردید. او در سال ۶۶۵۱ میلادیمشاهده کرد که دو ساعت آونگی که از یک میلۀ مشترک آویزان شده بودند، همیشه با یکدیگر حرکت می کنند (هم فاز هستند). وی فهمید که این به دلیل میلۀ مشترک دو آونگ است که آن دو را با یکدیگر جفت می کند. بعدها جفت شدگیبه صورت کلی تر مورد مطالعه قرار گرفت.



شکل ۱: تصویر کریستیان هویگنس. برای اطلاعات بیشتر در مورد این ریاضی دان و فیلسوف می توانید به

آدرس http://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens

مراجعه نمایید مدل و نظریه

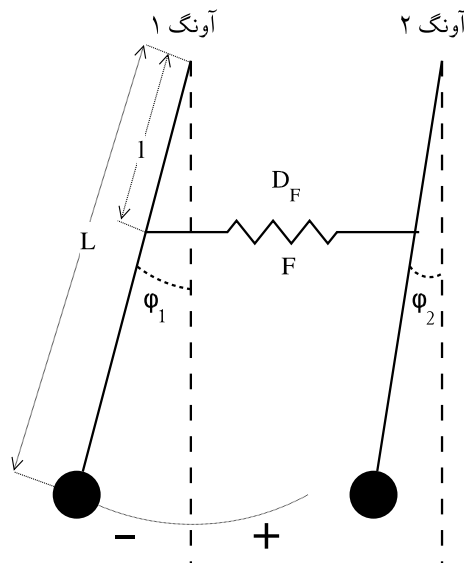
معادلۀ حرکت

فرض کنیم دو آونگ یکسان را با یک فنر به یک دیگر جفت کرده ایم (شکل ۲). برای توصیف حرکت این سیستم نیاز داریم تا معادلۀ حرکت را بنویسیم. برای این کار گشتاور وارد به هر آونگ حول تکیه گاه آن (محلی که آویزان شده است) رابه دست می آوریم. نیروهای وارد به هر آونگ شامل نیروی جاذبه، نیروی نقطۀ تکیه گاه

^۱ Christiaan Huygens

و نیروی فنر است. از آن جایی که گشتاور حول نقطه تکیه گاه محاسبه می شود، نیازی به دانستن نیروی تکیه گاه نداریم.

اگر فرض کنیم وزنه پایین آونگ عمده جرم آونگ را تشکیل می دهد، می توان گفت نیروی وزن در همان نقطه (گرانیگاه) وارد می شود. بنابراین طول بازوی نیروی جاذبه بر اساس پارامترهای شکل ۲ برابر با L است. زاویه بین



شکل ۲: دو آونگ جفت شده همسان و پارامترهای آن

بازوی نیرو و نیرو برای آونگ اول برابر با ϕ_1 (در شکل ۲، $\phi_1 > 0$) است، در نتیجه گشتاور جاذبه حول تکیه گاه

برابر با $\tau_g = -mgL\sin(\phi)$ است. فرض کنیم دامنه های نوسان کوچک بوده یعنی زاویه انحراف آونگ ۱

$\phi >> 0$ است، با این تقریب می توان به جای $\sin(\phi)$ خود ϕ را قرار داد. در نتیجه داریم $\tau_g = -mgL\phi$

برای آونگ ۲ همین رابطه را خواهیم داشت.

برای تعیین گشتاور نیروی حاصل از فنر، باید ابتدا نیروی فنر را محاسبه کرد. فرض می کنیم وقتی آونگ ها عمود

هستند فنر در طول طبیعی خودش قرار دارد،^۱ بنابراین تغییر طول فنر به اندازه $\Delta x = l \sin(\phi_2) - l \sin(\phi)$ است (شکل ۲). با فرض کوچک بودن زاویه ها و بسط تیلور، جابجایی به شکل $\Delta x = l(\phi_2 - \phi)$ است، پس اندازه نیرو

از قانون هوک با استفاده از رابطه $F = D_F l(\phi_2 - \phi)$ (ثابت نیروی فنر) به دست می آید. با توجه به اینکهنر یا فشرده می شود و یا باز می شود، نیرویی که به آونگ ها وارد می شود در خلاف جهت هم خواهد بود. زاویه بین بازوینرو و نیرو $\pi_2 \pm \phi$ است و چون بسط تیلور $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \phi_1)$ تا مرتبه اول ۱ می شود، بنابراین گشتاور وارد بر آونگ اول

برابر $\tau_1 = D_F l^2(\phi_2 - \phi)$ و گشتاور وارد بر آونگ دوم عکس این مقدار یعنی برابر با $\tau_2 = -D_F l^2(\phi_2 - \phi)$ خواهد بود. اکنون معادله های حرکت را برای این دو آونگ می نویسیم. اگر فرض کنیم لختی دورانی هر آونگ برابر با I است خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I\ddot{\phi}_1 &= -mgL\phi_1 + D_F l^2(\phi_2 - \phi_1) \\ I\ddot{\phi}_2 &= -mgL\phi_2 - D_F l^2(\phi_2 - \phi_1) \end{aligned} \quad (۲) \quad (۱)$$

بر اساس انتظارمان به دو معادله دیفرانسیل جفت شده می رسیم. اگر این گونه نبود باید در راه حل خود شک می کردیم، چون فیزیک مسأله جفت شده است. معادله های حرکت به صورت ساده شده به شکل زیر است:

$$I\ddot{\phi}_1 = -(mgL + D_F l^2)\phi_1 + D_F l^2\phi_2 \quad (۳)$$

$$I\ddot{\phi}_2 = -(mgL + D_F l^2)\phi_2 + D_F l^2\phi_1 \quad (۴)$$

^۱ در غیر این صورت هم نتیجه مشابهی به دست می آید، تنها کافی است کمیت ها مقداری انتقال پیدا کنند.

وسایل آزمایش

دستگاه Cobra3، منبع تغذیه، آونگ همراه با قسمت اتصال به دستگاه Cobra3 ۲ (عدد)، فنر، میله قلاب دار، وزنه هایشیاردار همراه با نگهدارنده، گیره میز ۲ (عدد)، میله به طول ۳۶ سانتی متر ۲ (عدد)، گیره نود درجه ۲ (عدد)، خازن $10\mu F/35V$ ۲ (عدد)، سیم رابط ۸ (عدد). روش آزمایش

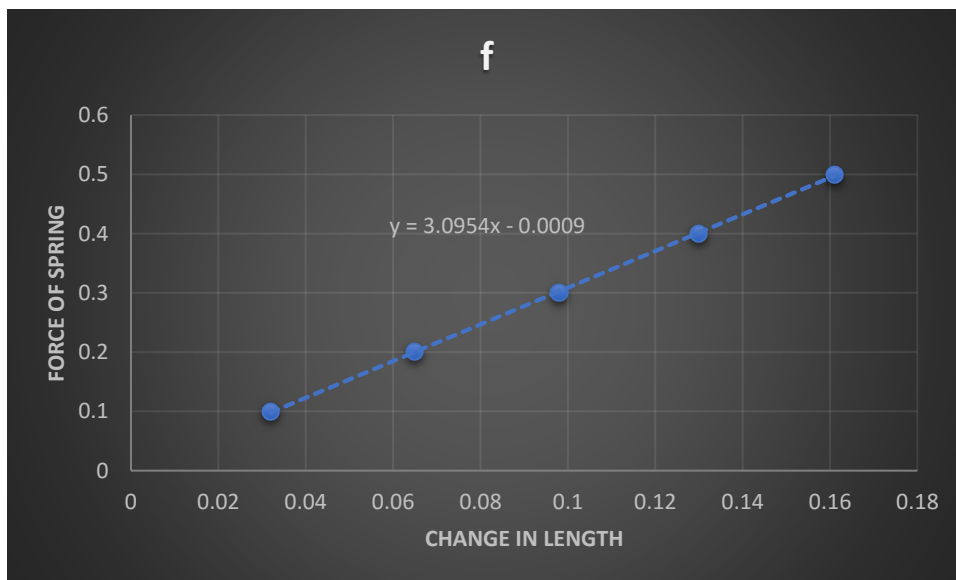
تعیین ثابت فنر

- مطابق شکل فنر را از میله کوتاه قلاب دار آویزان کنید.

۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰	۰	جرم های آویزان شده (gr)
۲۷,۶	۲۴,۵	۲۱,۳	۱۸	۱۴,۷	۱۱,۵	افزایش طول فنر (cm)

جدول ۱: تغییرات افزایش طول فنر با تغییر وزنه آویزان شده

- طول طبیعی فنر را اندازه گیری کنید. وزنه های مختلف را از آن آویزان کرده و افزایش طول فنر را در جدول یادداشت کنید. مراقب باشید تا فنر بیش از حد کشیده نشود.
- با استفاده از جدول ۱ نمودار نیرو (نیروی وزن وزنه آویزان شده) بر حسب افزایش طول فنر را با استفاده از روش کمترین مربعات رسم کنید ($g = 9.8 \frac{m}{s^2}$).



- با استفاده از شیب نمودار ثابت فنر D_F را به دست آورید.

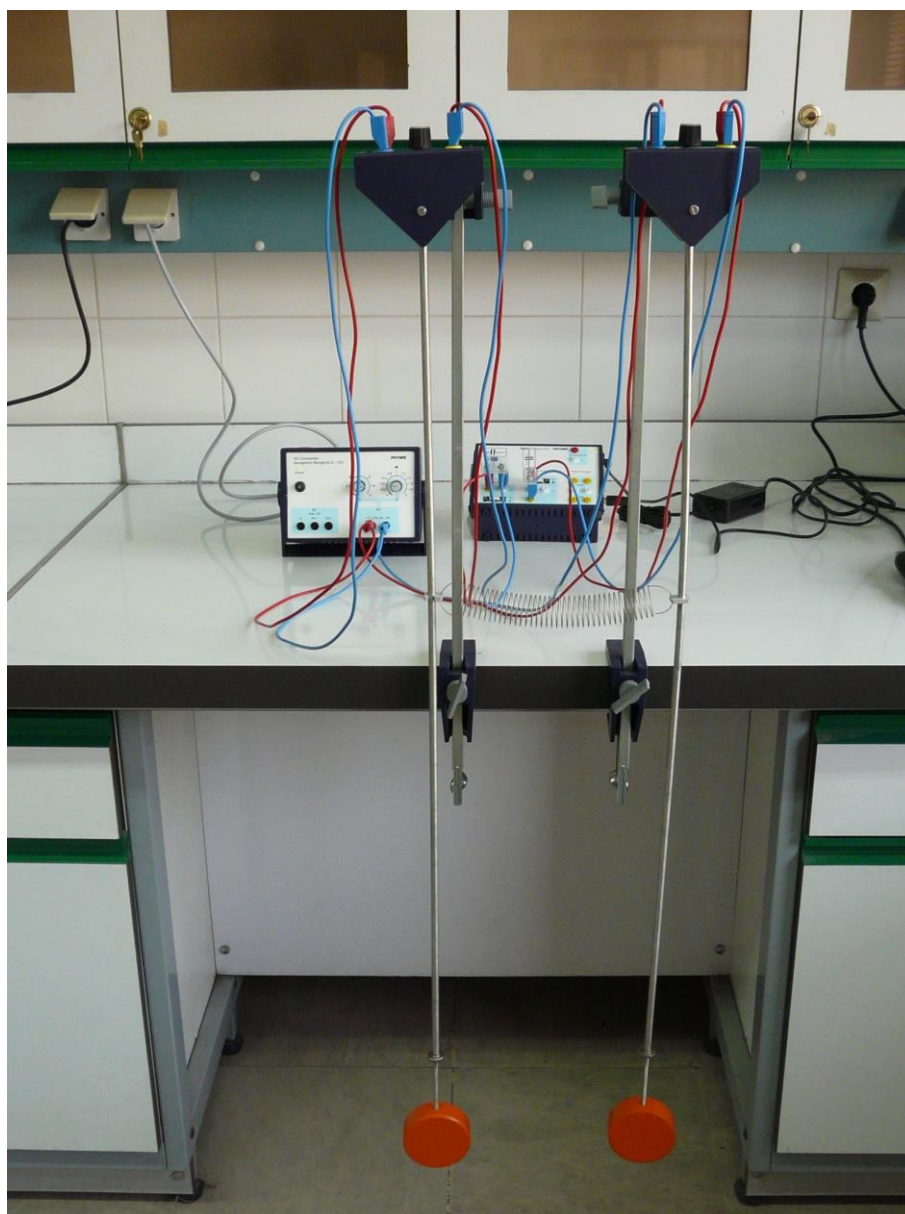
چون همه ی واحد ها را استاندارد کرده ایم، ثابت فنر همان شیب است.

$$D_F = 3.1 N / m$$

اندازه گیری زمان تناوب آونگ ها

اندازه گیری زمان تناوب آونگ ها با شمارش تعداد نوسانهای هر آونگ

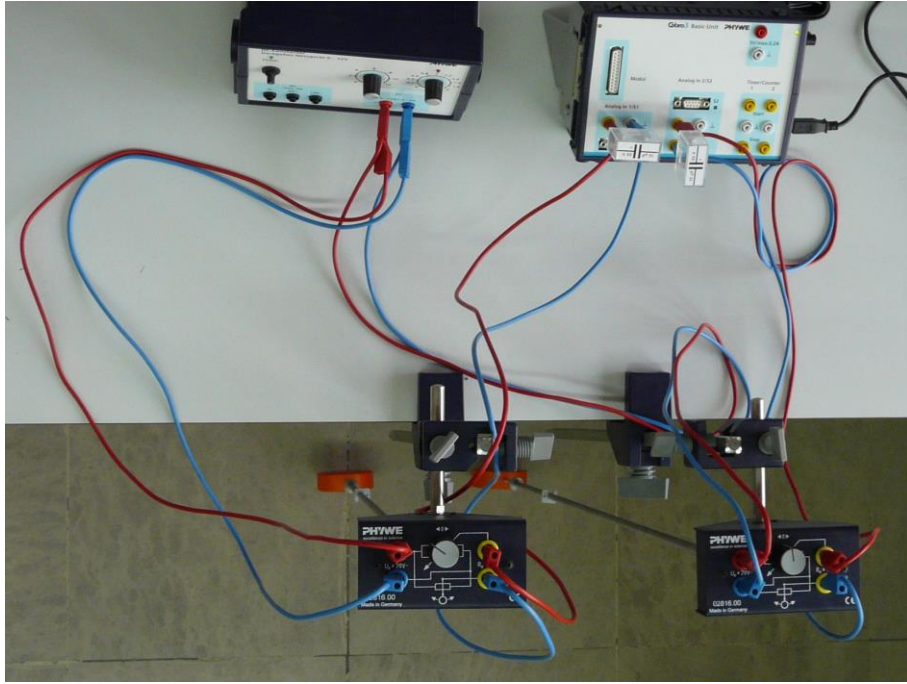
- مطابق شکل ۳ آونگ ها را از تکیه گاه آنها آویزان کنید.
- دقت کنید که طول آونگ ها (فاصله از تکیه گاه تا پایین وزنه ها) یکسان باشد. علاوه بر آن فاصله تکیه گاه تا سطحمیز برابر باشد.
- گیره های پلاستیکی فنر را روی میله های آونگ متصل کنید (فاصله گیره های پلاستیکی از تکیه گاه برای هر دو آونگیکسان باشد).
- برای به نوسان در آوردن آونگ ها، با نوک انگشت خود میله آونگ را به صورت تناوبی هل دهید تا دامنۀ آونگبه اندازه دلخواه برسد. با این کار آونگ روی خط مستقیم نوسان می کند و حرکات اعجاب انگیز انجام نخواهد داد! علاوه بر این مراقب باشید دامنۀ آونگ زیاد نباشد تا وزنه آونگ ها به یکدیگر اصابت نکند. سرمایۀ ملی ازبین می رود!
- یکی از آونگ ها را به نوسان در آورده و زمان برای ۲۰ نوسان را اندازه گیری کنید و با استفاده از آن زمان تناوبآونگ را بدست آورید. آزمایش را برای آونگ دیگر تکرار کرده و جدول ۲ را کامل کنید.



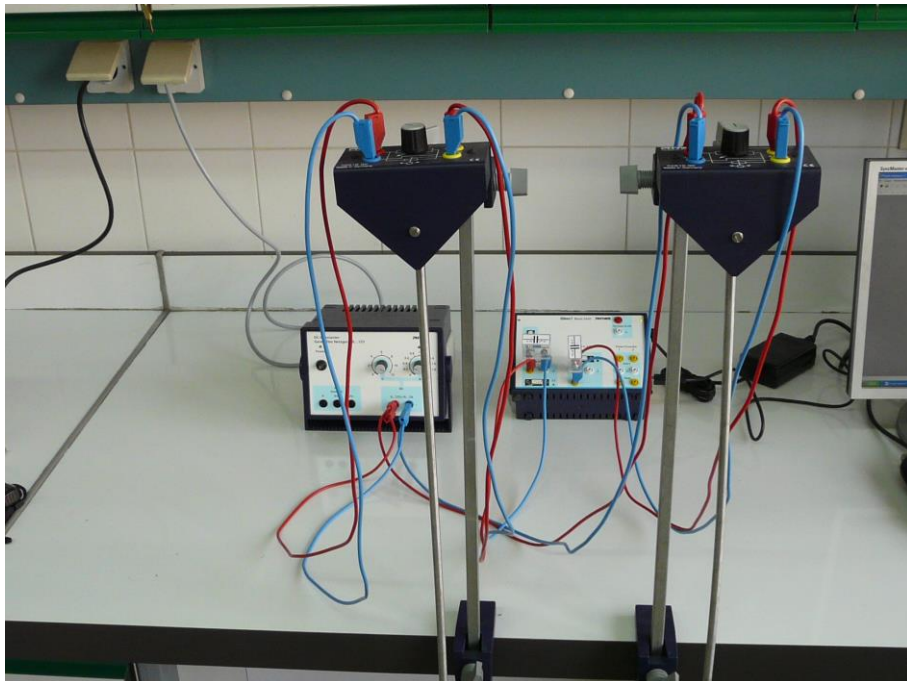
شکل ۳: آزمایش آونگ جفت شده

زمان تناوب آونگ ۱	زمان تناوب آونگ ۲	میانگین زمان تناوب دو آونگ .T	میانگین بسامد دو آونگ .v
۲,۰۴۶	۱,۹۹۵	۲,۰۲	۰,۴۹۵

جدول ۲: زمان تناوب آونگ ۱ و ۲



شکل ۴: نحوه اتصال سیم ها (از بالا)

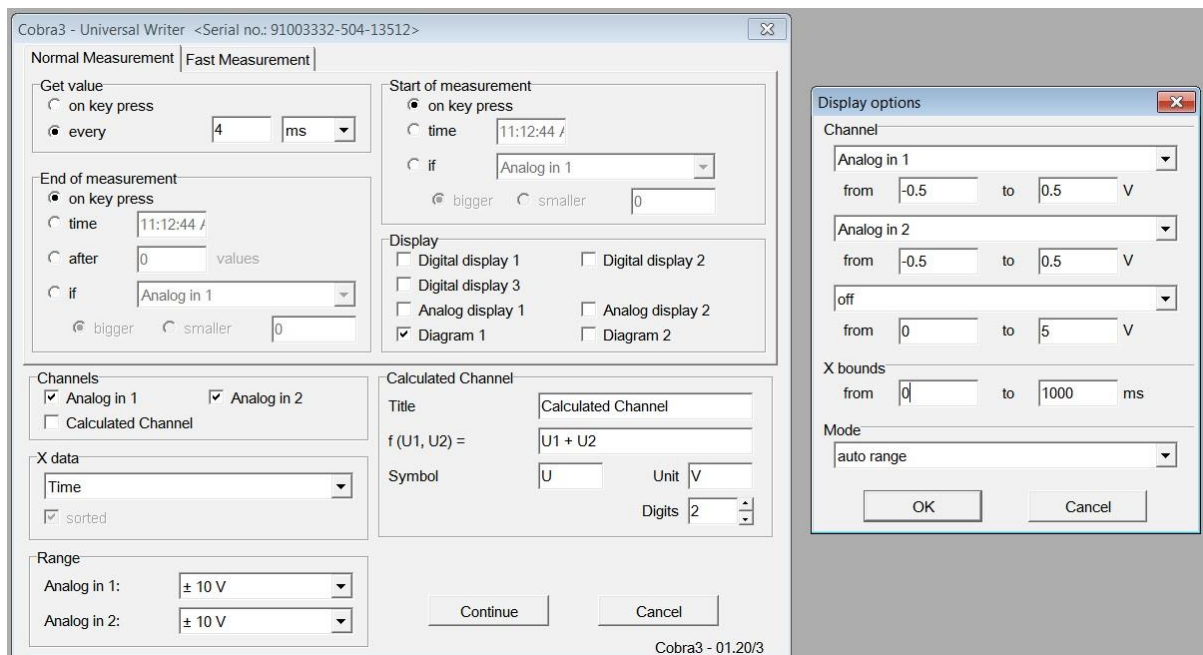


شکل ۵: نحوه اتصال سیم ها (از روبرو) اندازه گیری زمان تناوب آونگ ها با به دست آوردن تبدیل فوریه

- مطابق شکل ۴ و ۵ از خروجی DC متغیر منبع تغذیه به هر آونگ دو سیم مثبت و منفی را وصل کنید. با دوسیم دیگر هر آونگ (سوکت های زردرنگ) را به دستگاه Cobra3 متصل کنید.
- می توان از خازن ها برای کاهش نویز استفاده کرد، برای این کار خازن را بین هر ورودی دستگاه Cobra3 وصل کنید. دقت کنید تا مثبت و منفی مدار (خصوصا خازن ها در شکل ۶) را به صورت صحیح وصل کرده باشید.
- ولتاژ منبع تغذیه را روی ۱۰ ولت تنظیم کنید، کنترل کنید که محدودیت جریان باعث افت ولتاژ نشود.
- پیچ تنظیم هر آونگ را در وسط قرار دهید (در صورتی که پیچ تنظیم آونگ ها را در وسط قرار نداده باشید، مکان آونگ ها در حالت عادی صفر نیست. با استفاده از این پیچ مکان را برای آونگ ایستاده صفر کنید).
- کابل USB را به کامپیوتر متصل کرده و برنامه Measure را اجرا کنید. دستگاه Cobra3 مکان هر دو آونگ U_1 و U_2 را هر ۴ میلی ثانیه ثبت می کند و با استفاده از برنامه Measure می توان نمودار مکان آونگ ها را بر حسب زمان رسم کرد.



شکل ۶: نحوه اتصال خازن ها، لطفا به جهت خازن ها دقت کنید. در صورت اشتباه قرار دادن، ممکن است به خازن ها آسیب برسانید.



شکل ۷: تنظیمات نرم افزار برای اندازه گیری

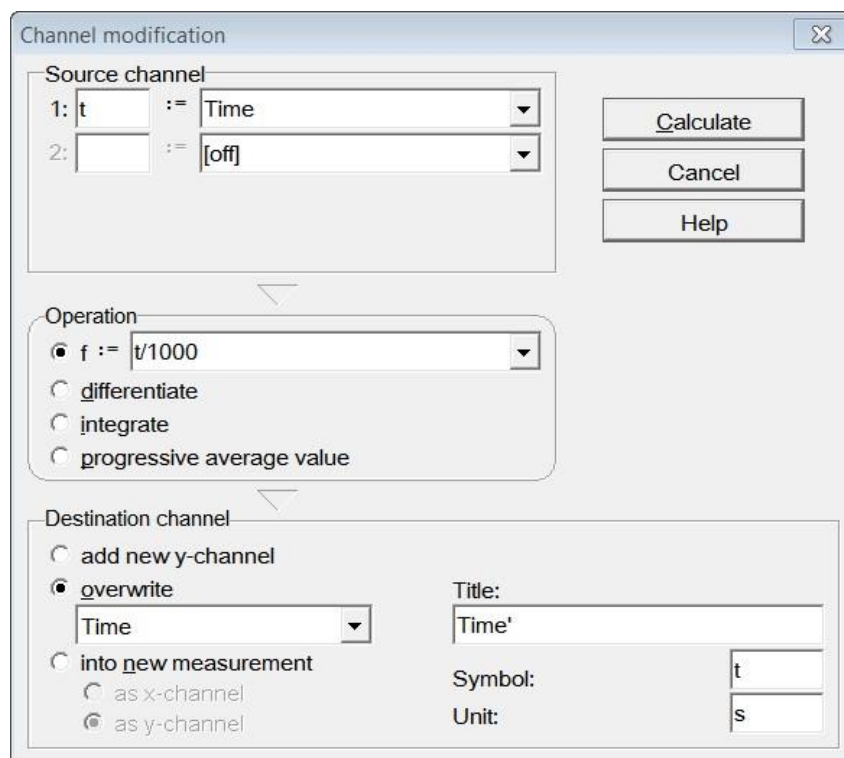
- از نوار بالا روی Gauge کلیک کرده و گزینه Cobra3 Universal Writer را انتخاب کنید. صفحه ای مانند شکل

۷ باز خواهد شد. پارامترهای این صفحه را درست مانند شکل ۷ تنظیم کنید. آونگ ها را به نوسان در آورید و روی Continue کلیک کنید تا پنجره اندازه گیری باز شود. در صورت حرکت هر کدام از آونگ ها نمودار مکان بر حسب زمان آن ها رسم خواهد شد. برای هر اندازه گیری، حداقل ۳ دقیقه داده بگیرید.

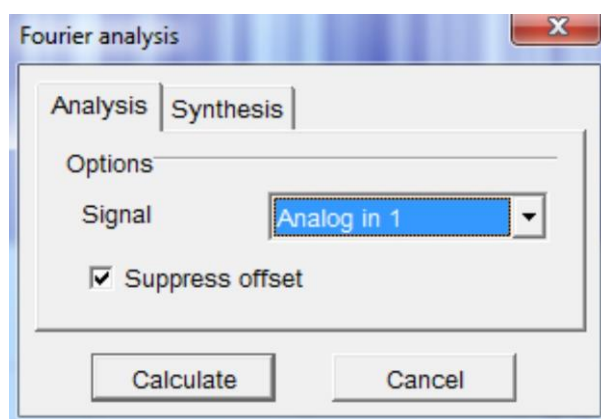
- گزینه Analysis->Channel Modification را از نوار بالای برنامه انتخاب کنید. پنجره ای مانند شکل ۸ باز خواهد شد. در این پنجره واحدهای نمودار را از میلی ثانیه به ثانیه تبدیل می کنیم تا نمودارهای قابل فهم تری داشته باشیم. پارامترها را دقیقا مانند شکل ۸ تنظیم کرده و روی Calculate کلیک کنید. بعد از هر اندازه گیری واحدهای نمودار را از میلی ثانیه به ثانیه تبدیل کنید.

- گزینه Analysis->Fourier Analysis را از نوار بالای برنامه انتخاب کنید. پنجره ای مانند شکل ۹ باز خواهد

شد. در این پنجره تبدیل فوریه^۱ نمودار را به دست می آوریم. پارامترها را دقیقا مانند شکل ۹ تنظیم کرده و روی

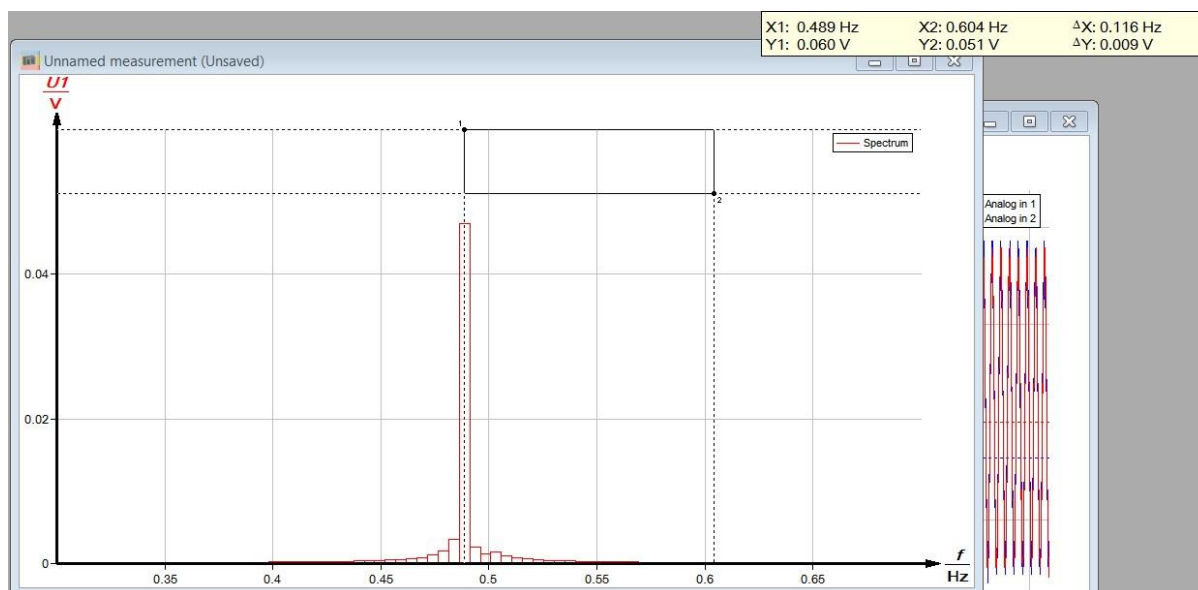


شکل ۸: تنظیمات نرم افزار برای تغییر واحد زمان



^۱ تبدیل فوریه تبدیلی است که میزان فراوانی هر بسامد را در یک نمودار (برای مثال نمودار مکان بر حسب زمان) نشان می دهد. مثلا اگر یک نوسان کاملا هماهنگ ایده آل داشته باشیم، تبدیل فوریه آن در همه جا به غیر از یک نقطه صفر است. مقدار شدت بسامد غیر صفر هم بسیار زیاد است. این بسامدی که شدت زیادی دارد همان بسامد نوسانگر است. با استفاده از تبدیل فوریه گرفتن از نمودار مکان بر حسب زمان، بسامد یا بسامدهای آن را می توان به دست آورد.

شکل ۹: تنظیمات نرم افزار برای تبدیل فوریه



شکل ۱۰: تبدیل فوریه نمودار مکان بر حسب زمان یک آونگ

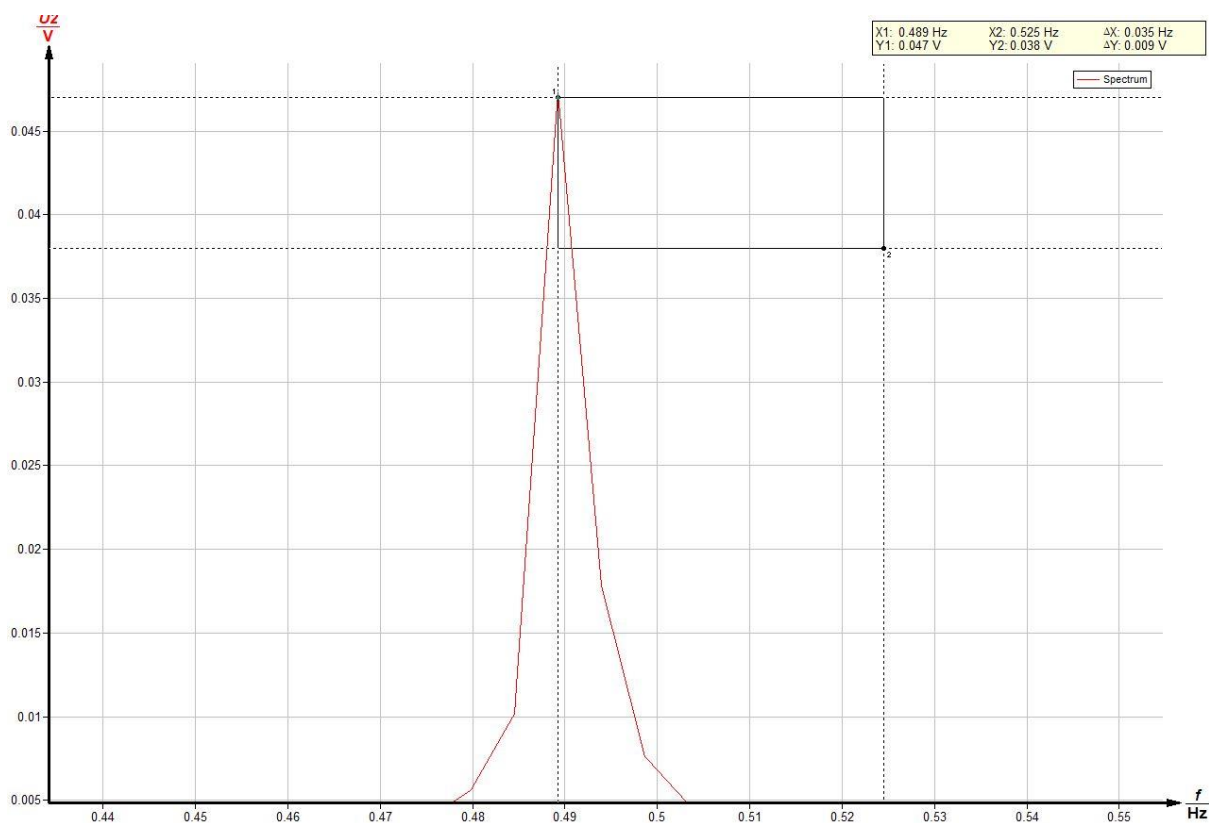
OK کلیک کنید، بعد از کمی صبر و حوصله تبدیل فوریه گرفته خواهد شد. نتیجه کار مانند شکل ۱۰ می گردد. اگر شکلتان به این تمیزی نیست، باید زمان بیش تری داده گیری کنید.

- برای تنظیم بازه اعداد محور افقی یا عمودی، روی نمودار دکمه سمت راست موس کلیک کنید و گزینه Display options را انتخاب نمایید. سپس در زیرپنجره x_Data مقدار Displayed Area را تغییر دهید. برای مثال در شکل ۱۰ مقدار Displayed Area بین ۳۰,۰ Hz و ۶۵,۰ Hz تنظیم شده است.

- با استفاده از گزینه Survey می توانید دو نقطه بر روی نمودار بگذارید و مختصات این دو نقطه به همراه اختلافشان در گوشه سمت راست (شکل ۱۰) نشان داده می شود. با توجه به شکل بسامد آونگ ۴۸۹,۰ Hz است.

بسامد به دست آمده v. را یادداشت کنید و نمودار تبدیل فوریه را ذخیره کنید. آیا این بسامد با بسامد به دست آمده در قسمت قبل برابر است برابر است؟

فرکانس بدست آمده دقیقا ۰,۴۸۹ هرتز بود که با فرکانس قسمت قبل ۰,۴۹۵ اختلاف دارد و درصد خطا حدود ۱,۲ درصد است اما از رابطه ی تئوری هم میتوان فرکانس را حاصل کرد.(طول آونگ را ۱,۰۵ متر بدست آوردیم.)



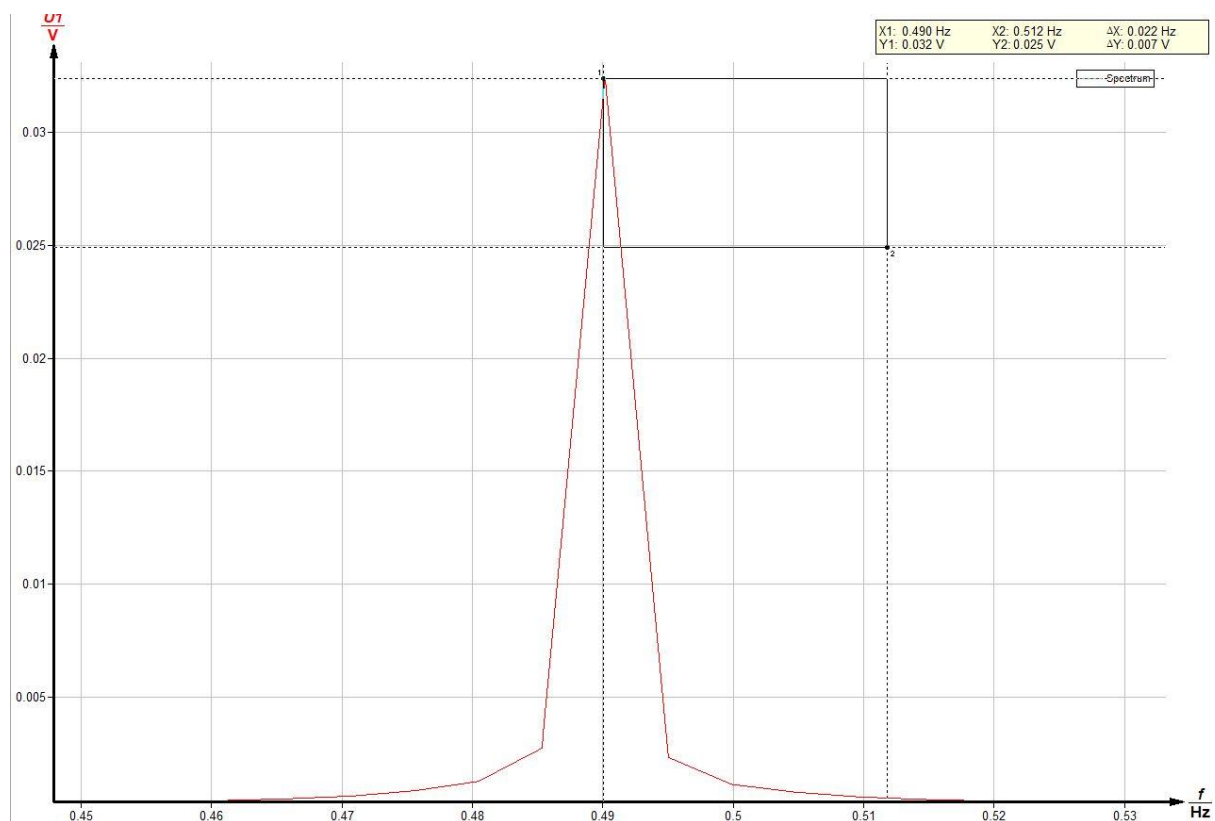
فرکانس از رابطه تئوری	فرکانس از برنامه ی رایانه ای	فرکانس از اندازه گیری با کرنومتر
۰,۴۸۷	۰,۴۸۹	۰,۴۹۵

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.8}{1.05}} = 0.487 \text{ Hz}$$

درصد خطای مقدار برنامه ی رایانه ای ۰,۴% است و درصد خطا برای مقدار اندازه گیری شده آزمایشگرها از مقدار تئوری برابر ۱,۶% است.

اندازه گیری زمان تناوب آونگ های جفت شده (هم فاز)

- فنر را بین دو آونگ متصل کنید. فنر باید به گیره های پلاستیکی روی میلۀ آونگ متصل شود. مطمئن شوید اینگیره ها در فاصلۀ مساوی از تکیه گاه هستند. این فاصله را که l است یادداشت کنید.
- آونگ ها را به صورت هم فاز به نوسان در آورید. یعنی آونگ ها با یکدیگر به سمت راست و با یک دیگر به سمت چپ بروند. نوسان باید به همین صورت باقی بماند و اختلاف فازی بین دو آونگ ایجاد نگردد.
- مانند قسمت قبل تبدیل فوریه نوسان را بدست آورید و نمودار را ذخیره کنید.
- با استفاده از نمودار بسامد حرکت را به دست آورید و با مقدار نظری (بسامد ν) مقایسه کنید.

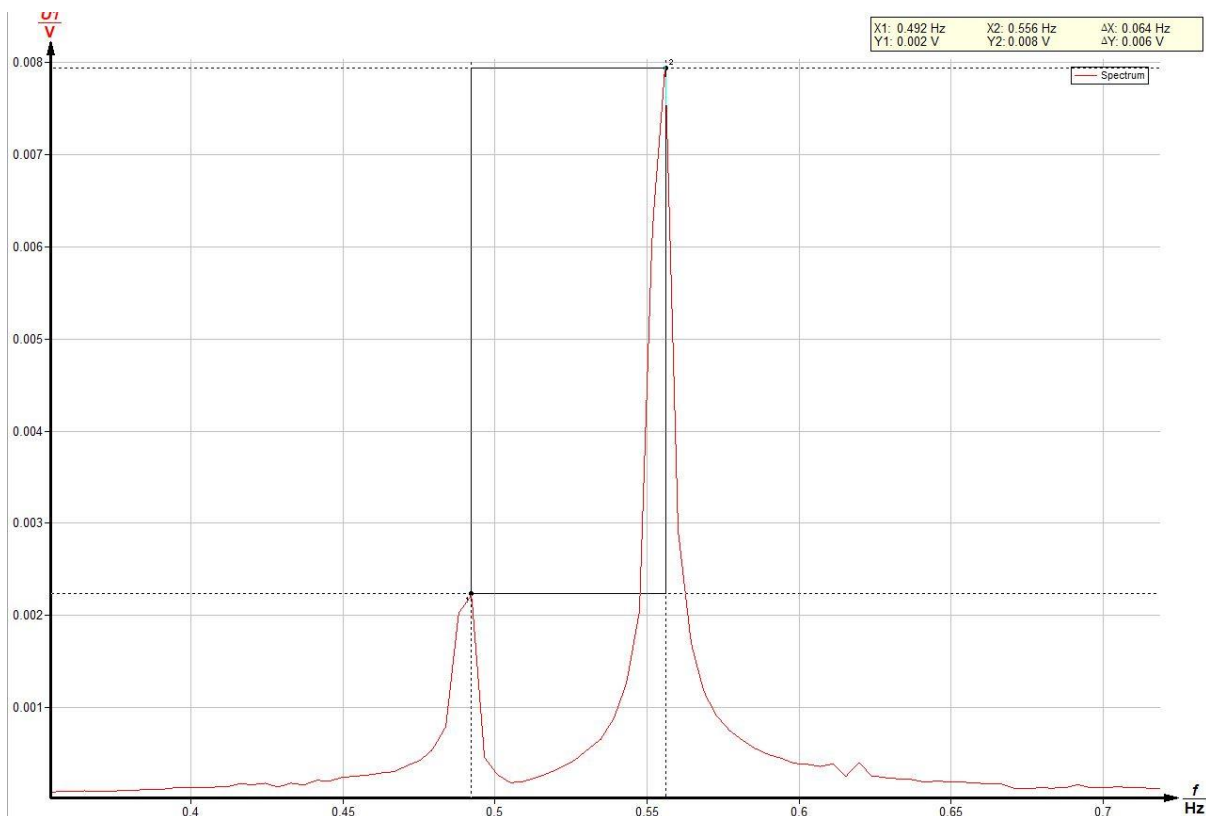


بسامد حرکت آونگها در حالت همفاز برابر با ۰,۴۹۰ هرتز بود كه با ۰,۴۸۷ اندكى تفاوت دارد و درصد خطاى نسبى ۰,۶% است.

اندازه گيرى زمان تناوب آونگ هاى جفت شده (با فاز مخالف)

- بدون جابجايى فتر، آونگ ها را مخالف يكدیگر نوسان دهيد. يعنى آونگ ها يا از هم دور مى شوند يا به يكدیگرنزدیك مى شوند.
- مانند قسمت قبل تبديل فوريه نوسان را بدست آوريد و نمودار را ذخيره كنيد.
- با استفاده از نمودار بسامد حرکت را به دست آوريد

بسامد برابر با ۰,۵۵۶ هرتز است.



- با اندازه گيرى طولهاى L و l و بازای $m = ۱\text{ kg}$ بسامد ν_c را به دست آوريد و با مقدار به دست آمده از تبديلفوريه مقايسه كنيد.

و با مقدار نظرى مقايسه كنيد.

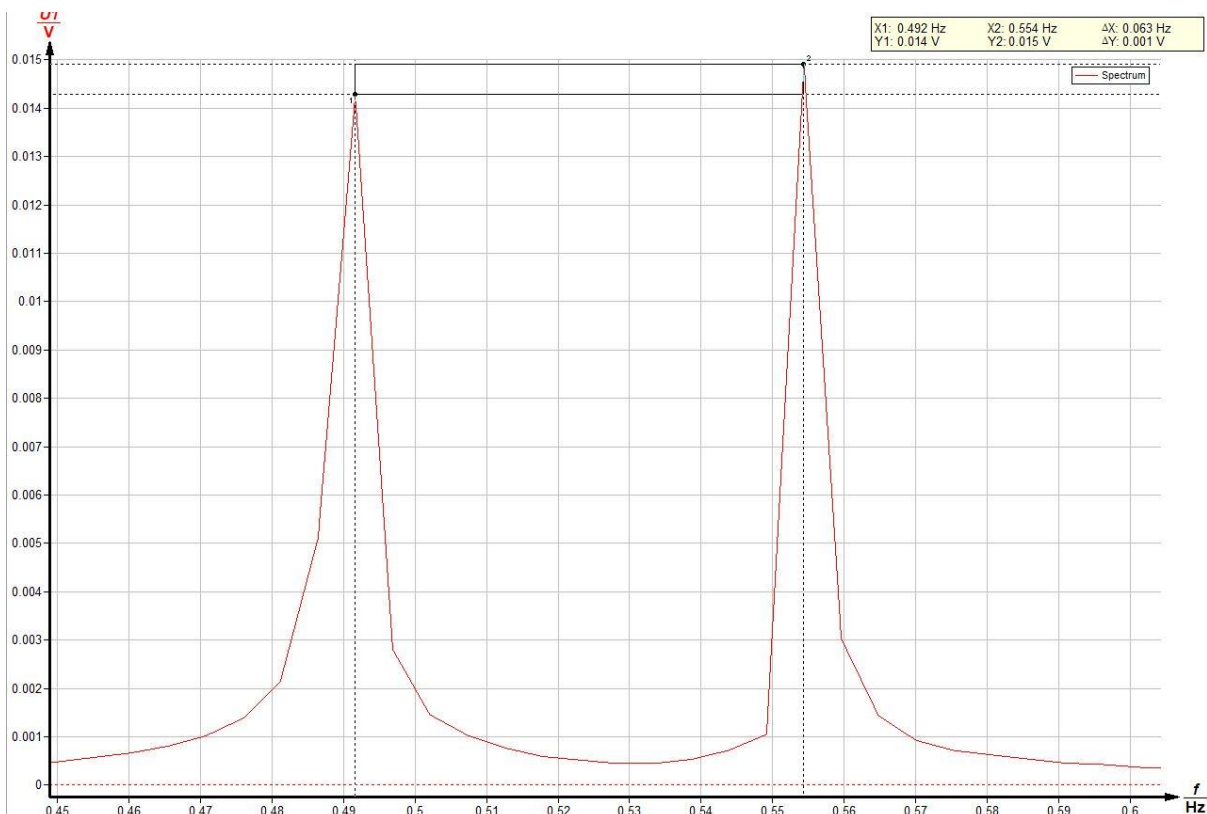
ما ابتدا فاصله ی l را برابر ۳۰ سانتی متر قرار دادیم اما مطابق دستور شما آنرا پایینتر آوردیم و در فاصله ی $l = 68\text{cm}$ قرار دادیم.

$$\nu_c = \nu_0 \left(1 + \frac{D_F}{mgL} l^2 \right) \xrightarrow{so} \nu_c = 0.487 \left(1 + \frac{3.1}{1 * 9.8 * 1.05} * 0.68^2 \right) \approx 0.555 \text{ Hz}$$

مقدار درصد خطا برابر ۰.۱٪ است.

اندازه گیری زمان تناوب آونگ های جفت شده (زنش آونگها)

- بدون جابجایی فنر، یک آونگ را ثابت نگه داشته و آونگ دیگر را به نوسان در بیاورید.
- مانند قسمت قبل تبدیل فوریه نوسان را بدست آورید و نمودار را ذخیره کنید.
- با استفاده از نمودار بسامد حرکت را به دست آورید در تبدیل فوریه دو بسامد ν و ν_c دارای peak هستند. بسامداین دو نقطه را یادداشت کرده و با مقدار نظری مقایسه کنید.



مقادیر گرفته شده به شکل زیرند:

$$\nu_0 = 0.492 \text{ Hz}, \nu_c = 0.554$$

خطای فرکانس صفر برابر ۱,۶% و خطای فرکانس فاز مخالف برابر ۰,۱% است.

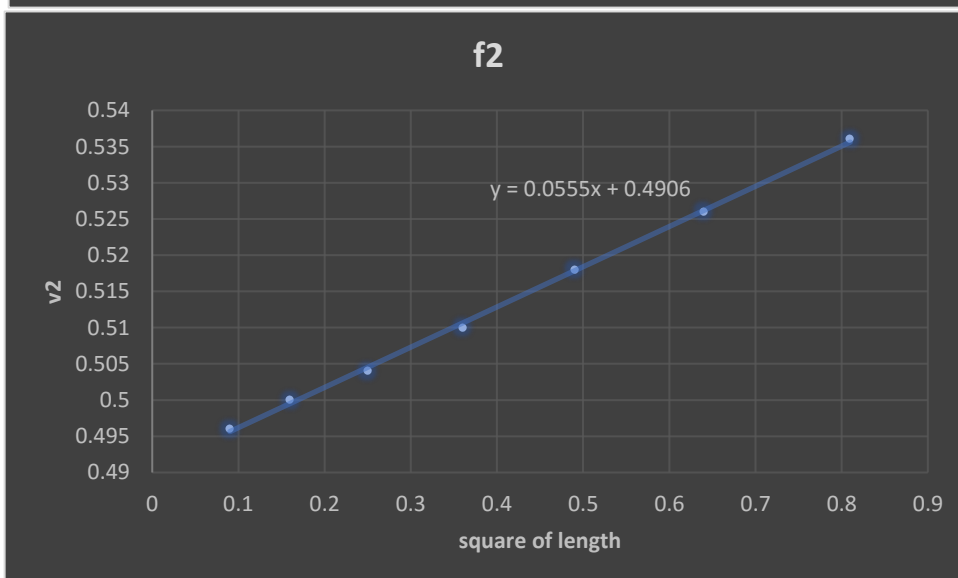
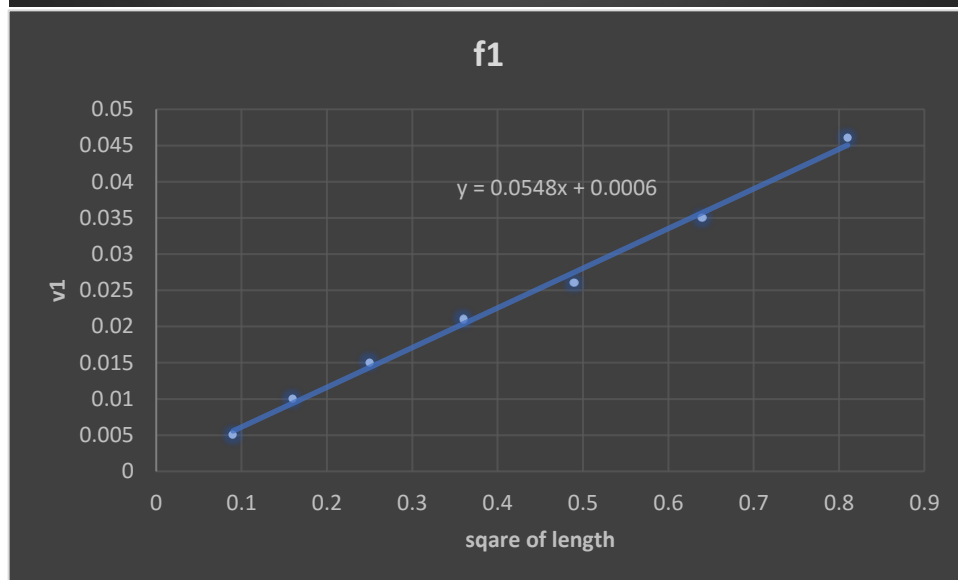
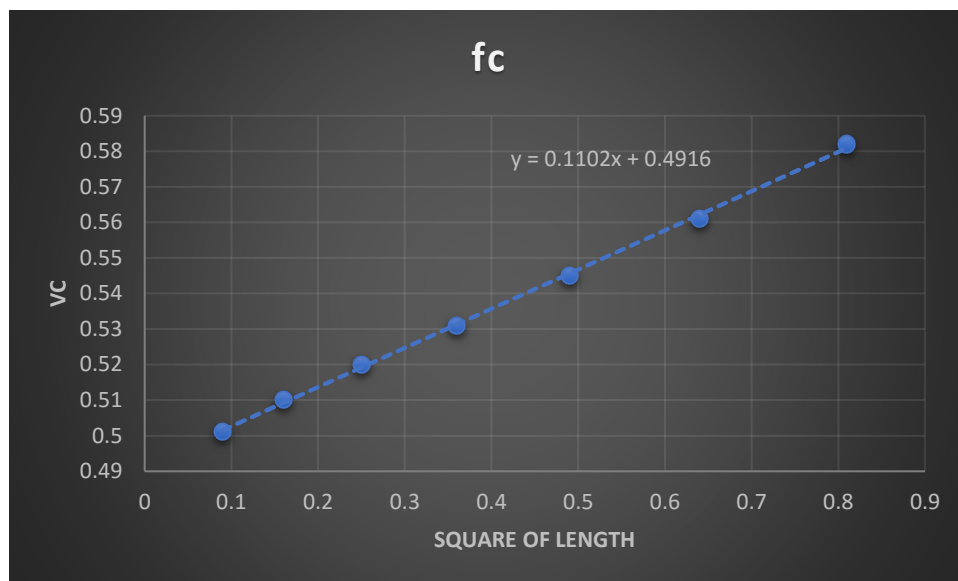
بستگی بسامدها به فاصله محل اتصال فنر تا تکیه گاه

- محل اتصال فنر به آونگها را در فاصله های مختلف از تکیه گاه قرار دهید. آونگ ها را در حالت زنش گذاشته و بسامدهای ۷. و ν_c را به دست آورید. نتایج را در جدول ۳ نوشته و جدول را کامل کنید.
- با استفاده از جدول ۳، با روش کمترین مربعات نمودارهای ν_c بر حسب l ، نمودار ν_7 بر حسب l و ν_7 بر حسب l را رسم کنید.

۱۴

$T_7 = \nu_7$ (s)	$\nu_7 = \frac{\nu_c + \nu_7}{2}(s^{-1})$	$T_1 = \nu_1$ (s)	$\nu_1 = \frac{\nu_c - \nu_1}{2}(s^{-1})$	$T_c = \frac{1}{\nu_c}(s)$	$\nu_c(s^{-1})$	$\nu_7(s^{-1})$	$l(m)$
۲,۰۱۶	۰,۴۹۶	۲۰۰,۰	۰,۰۰۵	۱,۹۹۶	۰,۵۰۱	۰,۴۹۱	۰,۳
۲,۰۰۰	۰,۵۰۰	۱۰۰,۰	۰,۰۱	۱,۹۶۱	۰,۵۱۰	۰,۴۹۰	۰,۴
۱,۹۸۲	۰,۵۰۴	۶۴,۵۱	۰,۰۱۵	۱,۹۲۳	۰,۵۲۰	۰,۴۸۹	۰,۵
۱,۹۶۱	۰,۵۱	۴۷,۶۲	۰,۰۲۱	۱,۸۸۳	۰,۵۳۱	۰,۴۸۹	۰,۶
۱,۹۳۱	۰,۵۱۸	۳۷,۷۴	۰,۰۲۶	۱,۸۳۵	۰,۵۴۵	۰,۴۹۲	۰,۷
۱,۹۰۱	۰,۵۲۶	۲۸,۵۷	۰,۰۳۵	۱,۷۸۳	۰,۵۶۱	۰,۴۹۱	۰,۸
۱,۸۶۶	۰,۵۳۶	۲۱,۷۴	۰,۰۴۶	۱,۷۱۸	۰,۵۸۲	۰,۴۹۰	۰,۹

جدول ۳: کمیت های اندازه گیری شده حاصل از تغییر فاصله اتصال فنر l



- با استفاده از عرض از مبدأ نمودارهای v_c بر حسب l^2 و v بر حسب l^2 بسامد v را به دست آورید.

بسامدها روی نمودار نوشته شده اند در نمودار ν_0 بر حسب l^2 ، عرض از مبدا برابر 0.492 است و در دیگری 0.491 است.

- به خاطر داشته باشید که رابطه این بسامدهای زاویه ای با l به شکل زیر است

$$\nu_c = \nu_0 \frac{D_F}{mgL} l^2 + \nu_0 \quad \nu_1 = \nu_0 \frac{D_F}{2mgL} l^2 \quad \nu_2 = \nu_0 \frac{D_F}{2mgL} l^2 + \nu_0 \quad (22)$$

بستگی ثابت جفت شدگی به بسامدها

- با استفاده از ثابت فنر D_F ، جرم وزنه آونگ ($m = 1\text{ kg}$)، طول آونگ L و $l = 0.5\text{ m}$ ثابت جفت شدگی (معادله ۵) را به دست آورید.

$$K = \frac{D_F l^2}{mgL + D_F l^2} = \frac{3.1 \times 0.5^2}{1 \times 9.8 \times 1.05 + 3.1 \times 0.5^2} \approx 0.07$$

- ثابت جفت شدگی را به صورت تابعی از ω و ω_c به دست آورید و با استفاده از سطر سوم جدول ۳ ($l = 0.5\text{ m}$) مقدار عددی ثابت جفت شدگی را حساب کنید و با مقدار به دست آمده در قسمت قبل مقایسه کنید.

$$K = 1 - \frac{\omega_0}{\omega_c} = 1 - \frac{\nu_0}{\nu_c} = 1 - \frac{0.489}{0.520} \approx 0.06$$

این مقدار درصد خطای قابل توجه ۱۴٪ را داراست.

- برای جفت شدگی ضعیف $\omega \ll \Omega$ ، ثابت جفت شدگی را به صورت تابعی از ω و ω_c به دست آورید و با استفاده از سطر سوم جدول ۳ ($l = 0.5\text{ m}$) مقدار عددی ثابت جفت شدگی را حساب کنید و با مقدار به دست آمده در قسمت های قبل مقایسه کنید.

$$K = 1 - \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1} = 1 - \frac{0.504 - 0.015}{0.504 + 0.015} \approx 0.06$$

این مقدار هم همانند خطای قسمت قبلی دارای درصد خطایی مشابه و دورتر از مقدار حقیقی ثابت جفت شدگی است.