تمرین سری اول درس نظریه گروه‌ها - دکتر رضاخانی

مهلت تحویل: شنبه ۱۲ اسفند ماه سال ۱۴۰۲ تا ساعت ۵۹:۲۳

از طریق سامانه درس‌افزار شریف

حسین محمدی
hossein.mohammadi.00427@gmail.com

زهرا کبیری
kabiri.zahra98@gmail.com

تمرین ۱ [۱۵ امتیاز]: مجموعه‌ی G را متشکل از زوج‌مرتب‌های حقیقی (a, b) در نظر بگیرید که $a \neq ۰$. نشان دهید که با عمل دوتایی زیر، این مجموعه تشکیل یک گروه می‌دهد.

$$. : G \times G \to G \qquad : \qquad (a, b).(c, d) = (ac, ad + b)$$

تمرین ۲ [۲۰ امتیاز] : زیرگروه مرکزی

زیرگروه مرکزی یک گروه G ، مجموعه‌ی اعضائی از G است که با تمامی اعضای گروه G جابه‌جا می‌شوند.

$$Z(G) = \{z \in G | zg = gz \ , \ \forall g \in G\}$$

نشان دهید که $Z(G)$ با عمل ضرب روی G خود تشکیل یک گروه جابه‌جایی می‌دهد [۱] .

تعریف گروه آبلی یا گروه جابه‌جایی:

عمل‌دوتایی روی گروه **لازم** است که خاصیت انجمنی [a] داشته باشد، یعنی برای هر سه عضو $g_۱, g_۲, g_۳ \in G$ داشته باشیم:

$$g_۱.(g_۲.g_۳) = (g_۱.g_۲).g_۳$$

اگر علاوه براین، خاصیت جابه‌جایی هم داشته باشد؛ یعنی برای هر دو عضو $g_۱, g_۲ \in G$ داشته باشیم

$$g_۱.g_۲ = g_۲.g_۱$$

آنگاه این گروه، گروه جابه‌جایی یا گروه آبلی نامیده می‌شوند.
فکرکنید که آیا تعریف جابه‌جایی و تعریف انجمنی کاملا از هم مستقل اند؟ آیا می‌توانید عملی دوتایی تعریف کنید که جابه‌جایی باشد اما انجمنی نباشد؟

[a] Associative

تمرین ۳ [۱۵ امتیاز]: نشان دهید که اگر در یک گروه، هرعضو وارون خودش باشد، آن گروه حتما جابه‌جایی است.

تمرین ۴ [۳۵ امتیاز]: فرض کنید S یک مجموعه با عمل دوتایی شرکت‌پذیر باشد و دو شرط زیر در آن برقرار باشند:

۱. عنصر $e \in S$ موجود باشد به طوری که برای هر $s \in S$ داشته باشیم $s = se$ [۲].

۲. برای هر $s \in S$ عنصر s' موجود باشد به طوری که $ss' = e$.

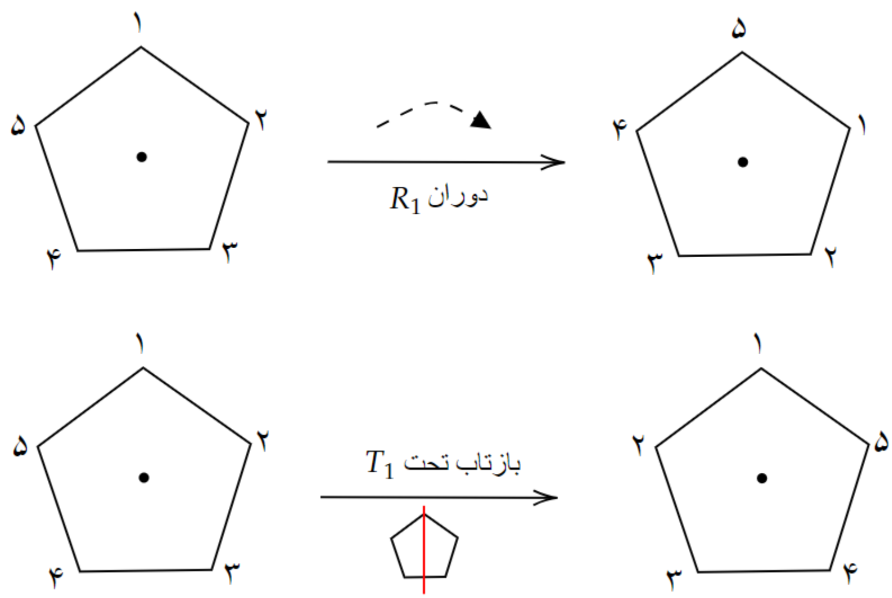
نشان دهید که e عضو خنثای S است و هر عضو S وارون‌پذیر است.

تمرین ۵ [۱۵ امتیاز]: گروه چندوجهی $D_۵$

گروه $D_۵$ که گروه تقارنی پنج‌وجهی منتظم است، متشکل از دوران هایی با زاویه‌ی ۷۲ درجه نسبت به مرکز، و بازتاب نسبت به محورهای تقارن است؛ در شکل زیر عمل اعضای گروه را روی پنج وجهی می‌بینید. پس این گروه حداقل ۱۰ عضو دارد (هنوز مطمئن نیستیم که حاصل ضرب اعضا بسته باشد.)

[۱] Abelian subgroup

[۲] با تشکر از آقای آرشا نیک‌سا.



تصویر ۱: اثر گروه D_5 روی پنج وجهی منتظم.

دوران‌ها را R_i و بازتابها را T_i بنامید و جدول ضرب اعضای این مجموعه را بنویسید. یعنی جدولی مانند شکل ۲ درست کنید و تک‌تک حاصل‌ضرب‌ها را در آن وارد کنید.

	R_1	R_2	$\cdots$	T_4	T_5
R_1	R_2	$\cdots$			
R_2	$\vdots$	$\ddots$			
$\vdots$					
T_4					
T_5					

تصویر ۲: جدول‌ضرب گروه D_5.

آیا نیاز هست که عضوی اضافه شود تا مجموعه تحت عمل ضرب بسته باشد و تشکیل یک گروه بدهد؟ آیا گروه حاصل جابه‌جایی است؟ مرتبه‌ی هریک از اعضا را بنویسید.

مرتبه‌ی یک عضو از گروه:

مقصود از مرتبه‌ی یک عضو $a \in G$، کوچکترین عددی طبیعی N است که $\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{بار } N} = e$ که در آن e عضو خنثی گروه است .

مثلا در گروه $\mathbb{Z}_5$ که متشکل از اعداد $\{0,1,2,3,4\}$ با عمل جمع به پیمانه‌ی ۵ است؛ مرتبه‌ی تمامی اعضا (به غیر صفر) پنج است. گاهی مرتبه تعریف نمی‌شود؛ مثلا در گروه اعداد صحیح با عمل جمع، مرتبه تعریف نمی‌شود چرا که حاصل جمع هر عدد غیر صفر با خودش، هرگز صفر نمی‌شود.