

بسم الله الرحمن الرحيم

سری هفتم تمرینات درس شبیه سازی فیزیک

حسین محمدی - ۹۶۱۰۱۰۳۵

توجه: با کمک متغیرهای اولیه ی کد، گام ها و تعداد خانه ها و... را کنترل کنید، کد برای اجرای کد به کتابخانه های numpy و matplotlib نیاز مند است. تمامی نمودارها با کپشن و لیبل رسم شده اند. برای نمایش شکل در اولین اجرا کد را دو بار ران کنید.

دو روش نمونه برداری را برای محاسبه انتگرال داریم، یکی ساده و دیگری هوشمند و مقادیر انتگرال زیر را برای آن محاسبه می کنیم:

$$I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

ابتدا با متمتیکا مقدار دقیق آن را می خوانیم (تا هشت رقم اعشار):

$$I \approx 0.88208139$$

برای روش نمونه برداری ساده، این انتگرال را با ۱۰۰۰۰۰۰ نمونه یعنی یک میلیون نمونه اجرا می کنیم و مقدار زیر را دریافت می کنیم:

```
Simple Sampling
Integral value is: 0.881384634
Time elapsed: 8.0957 s
```

برای روش نمونه برداری هوشمند، این انتگرال را با ۱۰۰۰۰۰۰ نمونه یعنی یک میلیون نمونه اجرا می کنیم و مقدار زیر را دریافت می کنیم:

```
Smart Sampling
Integral value is: 0.882368595
Time elapsed: 31.40864 s
```

زمان اجرای نمونه برداری هوشمند تقریبا ۴ برابر شده است و می توان این مشاهده را اینطور توجیه کرد که بایستی برای تولید اعداد تصادفی، از تابع نمایی استفاده کرد که این تابع باید یک میلیون بار برای نمونه گیری فراخوانی شود، این در حالی است که مولد اعداد تصادفی خود پایتون نیاز با یک محاسبه ی ساده، عدد تصادفی را تولید می کند.

اما درصد خطا ها را بررسی کنیم: برای نمونه گیری ساده درصد خطا 0.07% درصد است و برای نمونه گیری هوشمند 0.03% درصد خطاست، توجه کنید که در نمونه برداری ها زیاد، انتظار داریم مقدار انتگرال توسط هر دو کد به مقدار واقعی نزدیک شود و در تعداد نمونه برداری های پایین بایستی اختلاف مقدار درصد خطا ها بیشتر باشد، زیرا با نمونه برداری هوشمند، ما می توانیم با تعداد نمونه ی مساوی، مقدار میانگین تابع را با دقت بهتری نسبت به نمونه برداری ساده محاسبه کنیم.

حال بیایید خروجی های بیشتری بر حسب تعداد نمونه ها ببینیم:

برای ۱۰۰ نمونه

| تعداد نمونه | ساده | هوشمند |
|-------------|--|---|
| ۱۰۰ | Simple Sampling Integral value is: 0.791793833 Time elapsed: 0.00099 s | Smart Sampling Integral value is: 0.832275778 Time elapsed: 0.00496 s |
| ۱۰۰۰ | Simple Sampling Integral value is: 0.866905244 Time elapsed: 0.00894 s | Smart Sampling Integral value is: 0.88604834 Time elapsed: 0.03576 s |
| ۱۰۰۰۰ | Simple Sampling Integral value is: 0.875751527 Time elapsed: 0.16986 s | Smart Sampling Integral value is: 0.884049606 Time elapsed: 0.44407 s |
| ۱۰۰۰۰۰ | Simple Sampling Integral value is: 0.882573712 Time elapsed: 1.12545 s | Smart Sampling Integral value is: 0.881202473 Time elapsed: 4.16296 s |

در جدول به خوبی مشاهده می شود که زمان اجرای هوشمند، تقریباً ۴ برابر ساده است.

| تعداد نمونه | خطای ساده | خطای هوشمند |
|-------------|-----------|-------------|
| ۱۰۰ | ۱۰٪ | ۵/۶۴٪ |
| ۱۰۰۰ | ۱/۷۲٪ | ۰/۴۴۹٪ |
| ۱۰۰۰۰ | ۰/۷۱۷٪ | ۰/۲۲۳٪ |
| ۱۰۰۰۰۰ | ۰/۰۵۵٪ | ۰/۰۰۹٪ |

حال خطای آماری کد را هم می توانیم با چندین بار اجرا بخوانیم، به طور متوسط خطای آماری نمونه برداری ساده برابر با 0.12% است و برای نمونه برداری هوشمند، 0.18% است. (برای $N=10000$) و این خبر نیکویی است زیرا کد هوشمند تقریباً صد برابر داده های قابل اطمینانتری به ما می دهد.