قضایایی هستند که «وجود» زیرگروهی از مرتبه‌ی خاص را ضمانت می‌کنند،
این قضایا، به طور کلی تحت عنوان قضایای سیلو (sylow) شناخته می‌شوند.

به معنایی، این قضایا عکس قضیه‌ی لاگرانژ هستند؛

لاگرانژ: (order of subgroup) | (order of group)

آیا زیرگروهی از مرتبه‌ی k هست؟ $\longrightarrow$ $k|n$, $n=O(G)$:سیلو

قضیه (۱): اگر p عددی اول باشد، $p^\alpha | O(G)$، گروه G زیرگروهی با مرتبه‌ی p^α دارد.

• مثلاً گروه مرتبه‌ی $12=2^2\times 3$ حتماً زیرگروه‌های دو عضوی، سه عضوی و چهار عضوی دارد!

قضیه (۱)': اگر p عددی اول باشد که $p \,|\, O(G)$، عضوی با مرتبه‌ی p در G وجود دارد.

• در گروه ۱۲ عضوی اعضا با مرتبه‌ی 2 و 3 حتماً موجودند.

تعریف زیرگروه sylow: اگر $p^m | O(G)$, $p^{m+1} \nmid O(G)$، آنگاه زیرگروهی از G که دقیقاً p^m عضو دارد یک p-سیلو زیرگروه خوانده می‌شود.

قضیه (۲): تمامی p-سیلو زیرگروه‌ها با هم همیوغ اند.

H, K are p-sylow subgroups $\longrightarrow \exists g\in G: gHg^{-1}=K$

... p-sylow subgroups ... G ...

وحتی قوی‌تر، برای هر زیرگروه S با مرتبه‌ی p^β $(\beta \leqslant m)$، همواره می‌توان $g \in G$ یافت که gSg^{-1} یک زیرگروه از زیرگروه p-sylow باشد.

از کاربرد های قضیه‌ی sylow، تجزیه‌ی گروه های گروه‌های آبلی متناهی است.

فرض کنید مرتبه‌ی گروه آبلی G به این شکل تجزیه شود:

$$|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

طبق قضیه سیلو، زیرگروه H_i با مرتبه‌ی $o(H_i) = p_i^{\alpha_i}$ موجوداست.

مطابق قضیه‌ی (2)، این زیرگروه ها با هم‌یوغ کردن با هم برابر می‌شوند، پس این زیرگروه ها یکتا هستند.

همانی $f: H_1 \times \dots \times H_r \longrightarrow G$ را به شکل

$$f(h_1, h_2, \dots, h_r) = h_1 h_2 \dots h_r$$

در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که یکسانی است.

① همانی: به سادگی چک می‌شود. (کل $\prod H_i$ یک گروه است ... به خاطر آبلی بودن کار ساده می‌شود.)

② در $|\mathrm{im}\, f|$ یک کپی از هر H_i هست؛ پس $p_i^{r_i} \mid |\mathrm{im}(f)|$ و چون p_iها نسبت به هم اولند $\prod p_i^{r_i} \mid |\mathrm{im} f| \Longleftarrow$ پس $|\mathrm{im}(f)|$ حداقل به اندازه‌ی (و دقیقاً)

به اندازه‌ی $\prod_{j=1}^{r} p_j^{r_j}$ است.

③ یک به یک هم هست ✓

پس یک‌ریختی است $\Longleftarrow$ $G \simeq H_1 \times H_2 \times \dots \times H_r$

قضیه‌ی سوم سیلو هم در مورد تعداد زیرگروه‌های p-sylow حرف می‌زند؛ اما برای مهم آن نیاز به داشتن زیرگروه نرمال و قضیه‌ی لاگرانژ داریم ... بیان آن را به زمان دیگری موکول می‌کنیم. (تنها بدانیم که تعداد زیرگروه‌های p-سیلو اگر n_p باشد، آنگاه $n_p \overset{p}{\equiv} 1$)

(?) تعداد تمامی 5-، 7-، 11- سیلو زیرگروه‌های یک گروه از مرتبه‌ی $5^2 \times 7 \times 11$ را بیابید.

$$\underbrace{5k+1}_{n_5} \mid 5^2 \times 7 \times 11 \quad \text{and} \quad (5k+1, 5^2) = 1 \Longrightarrow 5k+1 \mid 7 \times 11$$

که فقط برای $k=0$، $k=2$ رخ می‌دهد.

پس یا تنها یک 5-سیلو داریم یا 11 تا.

$$7k'+1 \mid 5^2 \times 7 \times 11 \Longrightarrow 7k'+1 \mid 5^2 \times 11$$

فقط $k'=0$ جواب است. $\Longleftarrow$ فقط یک زیرگروه 7-سیلو داریم.

$11k'' + 1 \mid 5^2 \times 7 \times 11 \longrightarrow 11k'' + 1 \mid 5^2 \times 7 \Longrightarrow k'' = 0$

پس دقیقاً یک زیرگروه ۱۱ـ سیلو داریم.

سؤالات پایتخته‌ای :

اگر H و K دو زیرگروه از G باشند $H \times K \cong K \times H$

define : $\phi : H \times K \longrightarrow K \times H \qquad \phi(h,k) = (k,h)$

به وضوح ۱ـ۱ و پوشاست و

$\phi((h_1,k_1)(h_2,k_2)) = \phi((h_1h_2, k_1k_2)) = (k_1k_2, h_1h_2) = (k_1,h_1)(k_2,h_2)$

. ⟵ درمورد تعمیم این سوال فکر کنید...

به وضوح اگر $H_1 \subset G_1$ زیرگروه و $H_2 \subset G_2$ زیرگروه $\Longleftarrow H_1 \times H_2 \subset G_1 \times G_2$

اما آیا هر زیرگروه $G_1 \times G_2$ به شکل $H_1 \times H_2$ است ؟ برای زیرگروه‌های H_1, H_2 از G_1 و G_2 ؟

خیر، مثلاً $G = G_1 = G_2$ دلخواه باشد،

زیرگروه $\{(g,g) \mid g \in G\}$ از $G \times G$ را درنظر بگیرید (مطمئناً زیرگروهه)

اما به شکل $H_1 \times H_2$ نیست !

مثلاً $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ و زیرگروه $\{(0,0), (1,1), (2,2)\}$ را درنظر بگیرید.

این زیرگروه به شکل $H_1 \times H_2$ نیست. چرا که اگر چنین بود:

$|H_1| \times |H_2| = 3 \Rightarrow$ WLOG $|H_1| = 1$
$|H_2| = 3$

So $H_1 = \{e\}$
$H_2 = \{e, O, \Delta\}$ $\rightarrow H_1 \times H_2 = \{(e,e), (e,O), (e,\Delta)\}$

که این طور نیست! ✗