سری پنجم تمرینات کیهان شناسی - پاییز ۱۴۰۰

حسین محمدی ۹۶۱۰۱۰۳۵ دکتر ابوالحسنی آقایان: سمندر و سرائر

سوال یک) الف)

$$E = \sqrt{|p|^2 + m^2}$$

چون ذرات بسیار سنگین اند پس در فعل و انفعالات، مومنتوم زیادی نمی‌گیرند و فقط گوشه‌ی عالم نشسته اند و نظاره می‌کنند.

$$\Rightarrow m^2 \ggg |p|^2$$

$$\Rightarrow E = m\sqrt{1 + \frac{|p|^2}{m^2}}$$

Identity: $$(1+\alpha)^n \underset{\alpha \to 0}{\approx} 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow E = m\left(1 + \frac{|p|^2}{2m^2} - \frac{|p|^4}{8m^4} + \cdots\right) = m + \frac{|p|^2}{2m} - \frac{|p|^4}{8m^3} + \cdots$$

که در آن m همان جرم سکون ذره است و $\frac{|p|^2}{2m}$ معادل انرژی کلاسیکی ذره است! (سایر ترم‌ها هم در مومنتوم پایین اهمیت خاصی ندارند.)

ب) چون $m \gg T$ است پس:

$$f(p) = \frac{1}{e^{\frac{E}{T}} \pm 1} = \frac{1}{e^{\frac{m + p^2/2m}{T}} \pm 1} \xrightarrow{m \gg T} e^{\frac{m}{T} + \frac{p^2}{2mT}} \ggg 1$$

پس از ± 1 در مخرج صرف نظر می‌شود کرد.

$$f(p) \simeq e^{-\frac{m}{T}} \, e^{-\frac{p^2}{2mT}}$$

می‌بینید که از ± 1 صرف نظر شده و تمایزی بین بوزون و فرمیون های سنگین نیست در حد $m \gg T$ ، آمار ذرات متفاوت نیست.

پ)

$$n = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(p) \xrightarrow{\text{تقریب بالا}} \frac{4\pi g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{m}{T}} e^{-\frac{p^2}{2mT}} \, dp$$

$e^{-\frac{m}{T}}$ که مستقل از انتگرال ده است، suppression همان است بیرون می‌آوریم و تغییر متغیر می‌دهیم.

$$\frac{p^2}{2mT} = u^2 \Rightarrow p^2 = 2mTu^2 \quad \text{و} \quad p = \sqrt{2mT}\, u \Rightarrow dp = \sqrt{2mT}\, du$$

so

$$\int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp = \int_0^\infty (2mT) u^2 e^{-u^2} \sqrt{2mT}\, du = (2mT)^{3/2} \int_0^\infty u^2 e^{-u^2} du$$

$$= (2mT)^{3/2} \times \frac{1}{2} \underbrace{\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \cancel{2\sqrt{2}}\,(mT)^{3/2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2\cancel{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(mT)^{3/2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{4\pi g}{(2\pi)^3} e^{-m/T} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(mT)^{3/2}$$

ج)

$$E(p) = m + \frac{|p|^2}{2m} + O(p^4)$$

$$\rho = \frac{4\pi g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp\, p^2 \left(m + \frac{p^2}{2m}\right) e^{-\frac{m}{T}} e^{-\frac{p^2}{2mT}} \longrightarrow \text{Mathematica}$$

$$\rho = \frac{2\pi g}{(2\pi)^3} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{m}{T}} \underbrace{(2m + 3T)(mT)^{3/2}}_{\text{در این عبارت}}$$

اگر جرم را صرف نظر کنیم $\rightarrow \propto m^{3/2} T^{5/2}$ می‌شود.

د) یافتن فشار

$$P = \frac{4\pi g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty p^2 dp \frac{p^2}{\cancel{m} + \frac{p^2}{2m}} e^{-\frac{m}{T}} e^{-\frac{p^2}{2mT}} \longrightarrow$$

در یک تقریب ← صرف نظر از m در مخرج

$$P = \frac{4\pi g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty 2m\, p^2 e^{-\frac{m}{T}} e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp = 2m\, n(T)$$

ه) از ضرایب عددی صرف نظر کنیم به دست می‌آوریم که:

$$\rho \propto T^{5/2}$$
$$P \propto n \propto T^{3/2} \Rightarrow \frac{\rho}{P} \propto T$$

بلی، در دماهای بالاتر، باید چگالی انرژی برتری و غلبه داشته باشد، در دماهای پایین ($T \downarrow$) نسبت $\frac{\rho}{P}$ کمتر است. در دماهای پایین‌تر است که فشارها در سهم می‌شوند و نسبت به ρ قابل توجه اند. (البته هم ذرات جرم دارند)

در مورد گاز بوزونی و فرمیونی هم $\rho \propto T^4$, $p \propto T^3$ بود و می‌بینیم که همین رابطه برای ذرات جرم‌دار هم برقرار است فقط یک suppression نمایی $e^{-\frac{m}{T}}$ هم داریم.

$$U = TS - PV \quad \text{or} \quad dU = TdS - PdV$$ و)

$U = uV$ که $u \to$ چگالی انرژی داخلی. & $S = sV$ where s is density of entropy.

$$u\cancel{V} + P\cancel{V} = Ts\cancel{V} \longrightarrow u + P = Ts \Rightarrow s = \frac{u+P}{T}$$

$$d(s\bar{V}) = \frac{d(\rho V) + P\,dV}{T},$$ ز)

توجه شود $\longrightarrow$ $d(sV) = s\,dV + V\,ds$

$$ds = d\left(\frac{\rho + P}{T}\right) = \frac{T(d\rho + dP) - dT(\rho + P)}{T^2}$$

جایگذاری کردن در تساوی بالا :

$$T\left(\frac{\rho+P}{T}\right)dV + TV \times \frac{T(d\rho + dP) - dT(\rho + P)}{T^2} = \rho\,dV + V\,d\rho + P\,dV$$

$$\cancel{\rho\,dV} + \cancel{P\,dV} + \cancel{V\,d\rho} + V\,dP - \frac{dT}{T}V\rho - \frac{dT}{T}VP = \cancel{\rho\,dV} + \cancel{V\,d\rho} + \cancel{P\,dV}$$

$$V\left(dP - \frac{dT}{T}\rho - \frac{dT}{T}P\right) = 0 \longrightarrow \frac{dP}{dT} = \frac{\rho + P}{T} \Rightarrow T\frac{dP}{dT} = \rho + P$$

ج) اگر در نوشتن چگالی انرژی از جرم سکون صرف نظر کنیم و آنتروپی را بنویسیم داریم :

$$s = \frac{\rho + P}{T} =$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{m}{T}} (1+2m)(mT)^{3/2} \propto T^{3/2}$$

پیامد نمی‌دانم یعنی چه !

چگالی آنتروپی $\times\ a^3 =$ ثابت است چراکه از جهان اول زمان این بود که چیزی در عالم گرما (آنتروپی) اضافه نمی‌کند !

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d(s\,a^3(t))}{dt} = 0$$

سوال 2) ذکر شده است که میدانیم که نوترینوها فرمیون و فوتون‌ها بوزونند و باید تابع توزیع فرمی-دیراک و بوز-انیشتین را در هر مورد شکل دهیم.

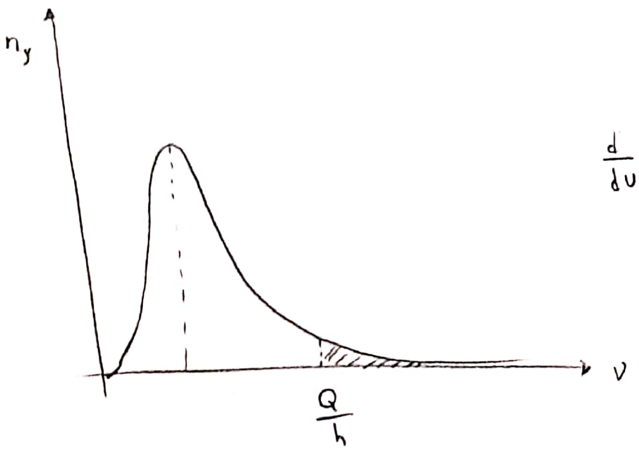
$$n_{B.E} = \int \frac{8\pi}{c^3} \frac{\upsilon^2 d\upsilon}{e^{\frac{h\upsilon}{kT}} - 1} = \frac{8\pi}{c^3} \times 2 \times \zeta(3) (kT)^3$$

$$n_{F.D} = \int \frac{8\pi}{c^3} \frac{\upsilon^2 d\upsilon}{e^{h\upsilon/kT} + 1} = \frac{8\pi}{c^3} \times 3/2 \; \zeta(3) \; (kT)^3$$

$$\Rightarrow \frac{n_\gamma}{n_\nu} = \frac{2}{3/2} \times \left(\frac{T_\gamma}{T_\nu}\right)^3 \longrightarrow \frac{4}{3} \times \left(\frac{11}{4}\right)^{3/3} = \frac{11}{3} \rightarrow \frac{n_\nu}{n_\gamma} = \frac{3}{11}$$

سوال 3) در دمای T، باید تعداد فوتون‌هایی که فرکانس آن‌ها از $\frac{Q}{h} = \nu$ بیشتر است را حساب کنیم و نسبتش به کل تعداد فوتون‌ها بدانیم.

$$n_\nu d\nu = \frac{8\pi \nu^2 d\nu}{c^3} \times \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$



در دمای T، این تابع توزیع به این شکل است:

یافتن ماکسیمم آن:

$$\frac{d}{d\nu}\left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right) = 0$$

$$2\nu\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right) - \frac{h\nu^2}{kT}\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right) = \frac{h\nu}{kT}\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}\right)$$

$\rightarrow$ طرفین را در $e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ ضرب کنیم

$$\Rightarrow 2\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) = \frac{h\nu}{kT}$$

$\rightarrow$ عبارت‌های نمایی را تا تقریب جمله اول بزنیم $\rightarrow 2\left(\frac{h\nu}{kT}\right) = \frac{h\nu}{kT}$

این مرتبه جواب بدیهی است

میدهیم برای مرتبه بعد:

$$2\left(\frac{h\nu}{kT} - \frac{h^2\nu^2}{2k^2T^2}\right) = \frac{h\nu}{kT} \rightarrow \frac{\cancel{h}\nu}{\cancel{k}\cancel{T}} = \frac{h^{\cancel{2}}\nu^{\cancel{2}}}{k^{\cancel{2}}T^{\cancel{2}}} \rightarrow \nu \simeq \frac{kT}{h}$$

پس ماکسیمم فرکانس توزیع جایی است که فرکانس برابر فرکانس انرژی KT شود و قابل انتظار هم بود.

حالا چون ما در حد KT ≪ Q کار می‌کنیم، فوتون‌هایی که قابلیت یونیزه کردن اتم هیدروژن را دارند، در انتها (دم) نمودار قرار دارند. (شکل را ببینید.)

در انتهای نمودار، می‌توانیم آن را با سمت نمایی تابع تقریب بزنیم چون که $e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$ است پس

$$n_\nu \simeq \frac{8\pi\nu^2}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

پس چگالی عددی فوتون‌هایی که می‌توانند اتم H را یونیزه کنند:

$$n_\gamma^I = \int_{\frac{Q}{h}}^{\infty} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu = \frac{8\pi}{h^3c^3} e^{-\frac{Q}{kT}} \times kT\left(Q^2 + 2kQT + 2k^2T^2\right)$$

و چون چگالی عددی کل فوتون‌ها $\frac{16k^3\pi T^3\zeta(3)}{c^3h^3}$ است، با تقسیم این دو خواهیم داشت:

$$\rho = \frac{\text{فوتون‌های یونیزه کننده}}{\text{کل فوتون‌ها}} = \frac{\frac{8\pi}{h^3c^3}\, e^{-\frac{Q}{kT}}\left(Q^2+2kQT+2k^2T^2\right)}{\frac{16k^3T^3\pi\,\zeta(3)}{c^3h^3}} = \frac{e^{-\frac{Q}{kT}}\left(Q^2+2kQT+2k^2T^2\right)}{2k^2T^2\,\zeta(3)}$$

در دمای $T = 3740^\circ K$ این را می‌توانیم حساب کنیم (فایل متلب را ضمیمه کرده‌ام)

$$\rho = 3.8\times10^{-16} \rightarrow$$

می‌بینیم در دماهای خیلی پایین‌تر از T_H که T_H دمای متناظر با $Q = 13.6$ است باز هم امکان دارد که هیدروژن‌ها شکسته شوند و این به خاطر خیلی بالا بودن چگالی عددی فوتون‌ها است.

اما در دمای بازترکیب که e^- و p^+ ترکیب می‌شوند نسبت فوتون‌هایی که هیدروژن را می‌شکنند قابل صرف‌نظر است.

این هم تمرین خیلی جالبی بود!