

# خلاصه‌ای از مباحث کلاس حل تمرین

استاد درس: دکتر کریمی‌پور

جلسه ۵: منیفلد

دستیار درس: حسین محمدی

گردآوری: حانیه ملکی

۷ اردیبهشت ۱۴۰۲

در این جلسه به سؤالات زیر پاسخ دادیم:

۱. جهت‌ناپذیری نوار موبیوس: منبع ۱

۲. Wedge product of an exact and a closed forms

۳. اتحادهای مشتق‌لی

۴. pushforward یک مشتق‌لی

۵. ارتباط دو میدان برداری جابه‌جایی و شارهای آنها

همچنین در مورد مباحث زیر بحث کردیم:

۱. جهت‌پذیر بودن تمام منیفلدهای مختلط

۲. منیفلدهای مختلط، هولومورفیسم و شرط کوشی-ریمان

۳. بررسی جهت‌پذیری فضاهای دوبعدی توسط مثلث‌بندی

سؤالات زیر را به دقت مورد بررسی قرار دادیم:

۱. نشان دهید نوار مویوس یک منیفلد جهت پذیر نیست.

---

۲. اگر  $r \in \Lambda^k(X)$  یک فرم exact و  $\omega \in \Lambda^l(X)$  یک فرم closed باشند، نشان دهید  $r \wedge \omega$  یک فرم exact است.

---

۳. اتحادهای زیر را در مورد مشتق لی ثابت کنید.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{fX}Y &= f\mathcal{L}_XY - df(Y)X \\ \mathcal{L}_{fX}\omega &= f\mathcal{L}_X\omega + \omega(X)df\end{aligned}$$

---

۴. اگر  $X$  و  $Y$  دو میدان برداری باشند و  $\phi_t$  شار مربوط به میدان  $X$  باشد، نشان دهید:

$$\phi_s^* \left( (\mathcal{L}_XY)_{\phi_s^{-1}(p)} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_s^* Y_{\phi_s^{-1}(p)} - \phi_{s+t}^* Y_{\phi_{s+t}^{-1}(p)}).$$

سپس نشان دهید اگر دو میدان برداری جابه‌جا شوند، اثر متوالی شارهای آنها نیز جابه‌جا خواهند شد و برعکس:

$$[X, Y] = 0 \quad \text{iff} \quad \phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$$

که  $\phi_t$  شار مربوط به میدان برداری  $X$  و  $\psi_s$  شار مربوط به میدان برداری  $Y$  هستند.

---