سؤال اول

الف) نشان دهید حاصل ضرب دو خمینه‌ی جهت پذیر، خود جهت پذیر است.

ب) فضای کلاف مماس روی یک خمینه‌ی دلخواه (نه لزوماً جهت پذیر)، جهت پذیر است.

الف) خمینه‌ی هموار M جهت پذیر است، اگر برای یک differentiable structure مثل $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$

روی اشتراک دو باز $U_\alpha \cap U_\beta$ (که اولی مختصات های x^μ و دومی y^ν دارد)،

دترمینان ماتریس تبدیلات، $J=\det\left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}\right)$، همواره مثبت باشد.

(توجه کنید که وجود فقط یک ساختار مثل $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ برای جهت پذیری کافی است.)

حالا M_1 , M_2 را جهت پذیر بگیرید، همچنین برای نقطه‌ی دلخواه (m_1,m_2) از $M_1\times M_2$،
می‌توانیم باز $U_1\times U_2$ را انتخاب کنیم که $U_1\subset M_1$, $U_2\subset M_2$ هستند.

بنابراین، ساختار هموار خمینه‌ی $M_1\times M_2$ را می‌توانیم به شکل $\{(U_1\times U_2)_{ij}, x_1^i, x_2^j\}_{i,j\in K}$

مختصات های خمینه‌ی M_1

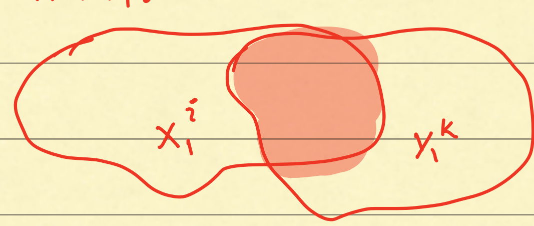
M_2 " "

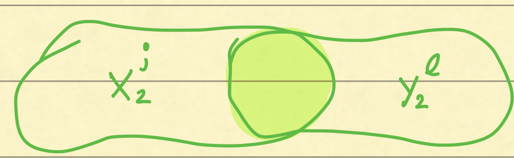
اختیار کنیم که از ساختارهای M_1 , M_2 به ارث رسیده.

حالا شرط جهت پذیری $M_1\times M_2$ را در این نقطه‌ی خاص بررسی می‌کنیم.

$$J\Big|_{x_1,x_2} = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\left(\frac{\partial X_1}{\partial Y_1}\right)_{ik}}_{n\times n} & \underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial X^1}{\partial Y_2}\right)}\ \text{صفر}}_{n\times n} \\ \hline \underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial X_2}{\partial Y_1}\right)}\ \text{صفر}}_{n\times n} & \underbrace{\left(\frac{\partial X_2}{\partial Y_2}\right)_{jl}}_{n\times n} \end{array}\right)$$

on M_1:





on M_2

دلیل صفر شدن ماتریس $\left(\frac{\partial x^1}{\partial y_2}\right)$ و $\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)$ این است که مختصات های خمینه ی $\left.\begin{matrix}\text{اول}\\ \text{دوم}\end{matrix}\right\}$ در روی تقاطع

چارت ها، هیچ ربطی به مختصات های خمینه ی $\left.\begin{matrix}\text{دوم}\\ \text{اول}\end{matrix}\right\}$ ندارد؛ هر دو خمینه از هم مستقل انتخاب شده‌اند.

$$\det(J) = \underbrace{\det\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)}_{+\ \text{چون } M_1 \text{ جهت پذیر است.}} \underbrace{\det\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right)}_{+\ \text{چون } M_2 \text{ جهت پذیر است}} > 0$$

چون $\det(J) > 0$ پس $M = M_1 \times M_2$ هم جهت می‌پذیرد.

ب) فرض کنید π نگاشت تصویر از کلاف TM به خود M باشد. پایه‌های TM را

در نقطه $x \in M$ به شکل $(x^i, y^i) = \left(x^i, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\right)$ اختیار می‌کنیم، که x^i

مختصات های نقطه ی $x \in M$ در چارت (U_i, φ_i) است که $x \in U_i$.

$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$ هم که پایه‌های فضای مماس هستند.

حالا فرض کنید $U_i' \subset M$ باز دیگری از خمینه M است که $U_i \cap U_i' \neq \emptyset$، نقطه ی

$x_i \in U_i'$ را معروف بگیرید... تبدیل مختصات $x'^i = x'^i(x^j)$ روی $U_i \cap U_i'$،

به شکل زیر پایه‌های فضای TM را هم عوض می‌کند.

تبدیل پایه روی چارت القایی $\pi(U_i \cap U_i')$ به شکل زیر است:

$$x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n), \qquad \partial'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\,\partial_j$$

همان رابطه زنجیره‌ای مشتق

حالا برای بررسی جهت پذیری، ژاکوبین را می‌خواهیم.

مختصات نقاط

$$J = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} & \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)_{jk} \\ \hline \frac{\partial^2 x'^i}{\dots}\, y^k & \frac{\partial x'^i}{\dots} \end{array}\right)$$

صفر ← مختصات نقاط خمینه با عوض کردن پایه‌های فضای مماس عوض نمی‌شود

مجموعه پایه فضای مماس $\quad \frac{\partial^2 x'}{\partial x^k \partial x^j} y^k \quad \Big| \quad \frac{\partial x'}{\partial x^j} \quad \longrightarrow$ تغییرات مولفه‌های بردار تبدیل یافت

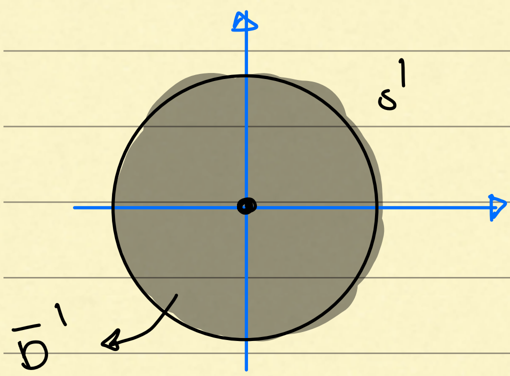
$$\Rightarrow \det(J) = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)^2 > 0$$

پس مستقل از جهت پذیر بودنِ M ، کلاف مماس جهت پذیر است.

سؤال دوم) انتگرالِ فرم $\omega = (x - y^3)\,dx + x^3\,dy$ را روی دایره‌ی S^1 حساب کنید.

راه حل: از قضیه stokes کمک می‌گیریم:

$$\int_{S^1} \omega = \int_{\partial \bar{D}^1} \omega = \int_{\bar{D}^1} d\omega$$



$$d\omega = -3y^2\, dy \wedge dx + 3x^2\, dx \wedge dy$$
$$= 3(x^2 + y^2)\, dx \wedge dy$$

یادآوری: اگر $\omega = f_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

$$\Downarrow$$

$$d\omega = \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^l}\, dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$\Rightarrow \int_{\bar{D}_1} 3(x^2 + y^2)\, dx \wedge dy$$

از مختصات قطبی استفاده کنیم $\quad \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$

$$= \int 3\rho^3 \, d\rho \wedge d\theta = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{3\pi}{2}$$

مسائلی که در سری سوم به آن برخی فوریه مشابه همین اند اگر قضیه‌ی استوکس را ندیده‌اید، نگران نباشید!
به آن هم در درس پرداخته می‌شود.

سؤال سوم) گروه ماتریس‌های G به فرم $\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x > 0$ را در نظر بگیرید --
که یک خمینه است، ساختار هموار آن از $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ به ارث می‌برد.

الف) آیا G یک زیرگروه لی از $GL(3, \mathbb{R})$ است؟

ب) نشان دهید که

$$\{X = x\partial_x ,\ Y = x\partial_y ,\ Z = x\partial_z\}$$

پایه‌هایی برای میدان های برداری چپ ـ ناوردا هستند.

ج) ثوابت ساختار گروه G را با پایه‌های (ب) بدست آورید.

الف) اولاً G تشکیل گروه می‌دهد؛ برای ضرب دو عضو دلخواه:

$$\begin{pmatrix} x & & y \\ & x & z \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & & b \\ & a & c \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & & xb+y \\ & xa & xc+z \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G$$

since $\left.\begin{matrix} x>0 \\ a>0 \end{matrix}\right\} ax>0$

$xb+y ,\ xc+z \in \mathbb{R}$

عضو معکوس:

$$\begin{pmatrix} x & & y \\ & x & z \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1} & & -y/x \\ & x^{-1} & -z/x \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G$$

چون $x>0$ پس x^{-1} موجود است.

عضو همانی هم I_3 است و شرکت پذیری ضرب ماتریسی هم که داریم.

نگاشت های ضرب $G\times G \longrightarrow G$ ، وارون $G \longrightarrow G$ به شکل

$$\times\left((x,y,z),\ (a,b,c)\right) = (xa,\ xb+y,\ xc+z)$$

$$(\ )^{-1} : \left((x,y,z)\right) = \left(x^{-1},\ -y/x,\ -z/x\right)$$

تعریف شده‌اند که هر دو هموار و از هر مرتبه‌ای مشتق پذیرند. $(x\neq 0)$

پس طبق تعریف G گروه لی است.

جانشانی $G \longrightarrow GL(3,\mathbb{R})$ یک immersion است که

$$(x,y,z)\in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{pmatrix} x & & y \\ & x & z \\ & & 1 \end{pmatrix} \in GL(3,\mathbb{R})$$

و رتبه‌ی این immersion ، ۳ است. پس مطابق تعریف ، این جنینه، زیرمنیفلدهای از $GL(3,\mathbb{R})$ است $\Leftarrow$ G زیرگروه لی $GL(3,\mathbb{R})$ است.

ب) انتقال به راست در G مطابق ترتیب به شکل زیر است:

$(a,b,c)\in G$

$\forall (x,y,z)\in G$

$$L_{(a,b,c)}(x,y,z) = (a,b,c)\times_G (x,y,z) = (ax,\ ay+b,\ az+c)$$

پس $(L_{(a,b,c)})_*$ چیزی به جز مشتق این میدان جدید نسبت به مولفه‌ها نیست، یعنی

$$(L_{(a,b,c)})_* = \frac{\partial L_{(a,b,c)}(x,y,z)}{\partial (x,y,z)} = \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}$$

حال اگر یکه‌ی گروه G با $e=(1,0,0)$ معرفی شود:

$$X_e = \partial_x|_e$$
$$Y_e = \partial_y|_e \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L_{(a,b,c)*} X_e = X_{(a,b,c)}}$$
$$Z_e = \partial_z|_e$$

so $\longrightarrow$ $\begin{cases} X = x\partial_x \\ Y = x\partial_y \\ Z = x\partial_z \end{cases}$ are C^∞ left-invariant vector fields.

چون جبری ۳ پارامتری داریم، تعداد میدان‌های برداری چپ ـ ناوردا دقیقاً ۳ تاست، لذا همین‌ها .

ج)

$$[X,Y] = [x\partial_x, x\partial_y] = x\partial_x(x\partial_y) - x\partial_y(x\partial_x)$$
$$= x\partial_y + \cancel{x^2\partial_x\partial_y} - \cancel{x^2\partial_y\partial_x}$$
$$= x\partial_y = Y$$

مشابهاً :

$$[X,Z] = Z$$
$$[Y,Z] = 0$$

پس ثوابت ساختار، به ترتیب $(X,Y,Z) = (X^1,X^2,X^3)$ باید از رابطه‌ی زیر حاصل شوند:

$$[X^i, X^j] = C^{ij}_k X^k$$

$$\Longrightarrow +C^{12}_2 = -C^{21}_1 = +C^{13}_3 = -C^{31}_3 = 1 \quad \blacksquare$$

سؤال چهارم: جبر لی $so(3)$ هیچ زیرجبر ۲ بعدی ندارد.

حل: اگر E_1, E_2, E_3 پایه‌های استاندارد جبر باشند،

$[E_1, E_2] = E_3.$

$[E_2, E_3] = E_1.$

$[E_3, E_1] = E_2.$

فرض کنید زیرجبر دوبعدی $\begin{cases} v = v^i E_i \\ u = u^i E_i \end{cases}$ داشته باشیم.

پس رتبه‌ی ماتریس $\begin{pmatrix} v^1 & u^1 \\ v^2 & u^2 \\ v^3 & u^3 \end{pmatrix}$ دقیقاً ۲ است، پس می‌توانیم فرض کنیم $\det\begin{pmatrix} v^1 & u^1 \\ v^2 & u^2 \end{pmatrix} \neq 0$

پس با عملیات سطری مقدماتی می‌توانیم ماتریس را به شکل $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \tilde{v}^3 & \tilde{u}^3 \end{pmatrix}$ درآوریم.

$$\Rightarrow v = E_1 + \tilde{v}^3 E_3$$

$$\Rightarrow u = E_2 + \tilde{u}^3 E_3$$

حالا چون $\{v, u\}$ زیرجبر دوبعدی‌اند، پس $[u, v] = \alpha u + \beta v$

$$[E_1 + \tilde{v}^3 E_3, E_2 + \tilde{u}^3 E_3] = E_3 - \tilde{v}^3 E_1 - \tilde{u}^3 E_2$$

$$= \alpha E_2 + \alpha \tilde{u}^3 E_3 + \beta E_1 + \beta \tilde{v}^3 E_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \tilde{u}^3 + \beta \tilde{v}^3 = 1 \\ \beta = -\tilde{v}^3 \\ \alpha = -\tilde{u}^3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} (\tilde{u}^3)^2 + (\tilde{v}^3)^2 = -1$$

تناقض

منرایب $\tilde{u}^3$ و $\tilde{v}^3$ حقیقی هستند و ممکن نیست مجموع مربعات آن منفی شود!

سؤال پنجم: نشان دهید نگاشت

$$\theta : \mathbb{R}^{\times} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (a,x) \longmapsto ax$$

یک اثر هموار از گروه $\mathbb{R}^{+}$ روی $\mathbb{R}$ است. آیا این اثر آزاد است؟

*) این اثر رابطه‌ی هم ارزی $x \sim y \longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^{+} : ax = y$ را القا می‌کند.

نشان دهید $\dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}^{+}}$ یک همنشینی خارج قسمتی نیست.

اولاً $\theta(1,x) = 1x = x$

همین طور $\theta(a, \theta(a',x)) = \theta(a, a'x) = a(a'x)$

$= (aa')x = \theta(aa', x)$

پس گروه $\mathbb{R}^{+}$ با عمل ضرب روی $\mathbb{R}$ اثر می‌کند.

این اثر C^{∞} است چراکه طبق تعریف:

$$\left(id_{\mathbb{R}} \circ \theta \circ (id_{\mathbb{R}^{+}} \times id_{\mathbb{R}})^{-1} \right) (a, s) = as$$

و تمامی مشتق ها ی دلخواه موجودند.

اما اثر آزاد نیست چراکه برای $0 \in \mathbb{R}$ و هر $a \in \mathbb{R}^{+}$، $a x = 0$!

(*) شرط لازم برای هموار بودن فضای خارج قسمتی این است که نگاشت

$$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{R}^{+} \qquad \pi(x) = [x] \rightarrow \text{کلاس هم ارزی}$$

π، یک submersion باشد.

می‌توان به‌راحتی دید که $\mathbb{R}/\mathbb{R}^+ = \{[0],[-1],[1]\}$ است.

چون فضای مقصد نگاشت π گسسته است، طبق تعریف π باید پوشا هم باشد. پس π لزوماً ناپیوسته است! اما submersion باید پیوسته باشد.

پس فضای خارج قسمتی چنین نیست! $\blacksquare$