

آزمونک دوم - درس نظریه گروه‌ها

استاد درس: دکتر رضاخانی

دستیارهای درس: حسین محمدی، زهرا کبیری

۲۰ فروردین ماه سال ۱۴۰۳

سوال زیر با هدف مرور مفاهیم اولیه و با تاکید بیشتر روی هم‌مجموعه‌ها و زیرگروه‌های بهنجار طراحی شده است.

سوال: گروه D_6 را در نظر بگیرید.

$$D_6 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, y, xy, x^2y, x^3y, x^4y, x^5y \mid x^6 = 1, y^2 = 1, yx = x^5y\}$$

الف) زیرگروه‌های از مرتبه ۲، ۳ و ۶ را مشخص کنید.
(راهنمایی: ۷ زیرگروه مرتبه ۲، یک زیرگروه مرتبه ۳ و یک زیرگروه مرتبه ۶ داریم.)
ب) هم‌دسته‌های چپ زیرگروه مرتبه ۳، H ، را بسازید؛ مطابق رابطه‌ی اندیس گروه می‌دانید که

$$[D_6 : H] = 4,$$

پس باید ۴ هم‌دسته‌ی سه‌عضوی پیدا کنید.
ج) حالا هم‌دسته‌های راست زیرگروه H را بیابید. باز هم باید چهار هم‌دسته‌ی سه‌عضوی پیدا کنید.
د) تعریفی از بهنجاری برحسب هم‌دسته‌ها وجود دارد؛ آن تعریف را به خاطر آورید و معین کنید که آیا زیرگروه H در گروه D_6 بهنجار است؟
ه) زیرگروه چهارعضوی $I = \{1, x^3, y, x^3y\}$ را در نظر بگیرید و مراحل (ب) و (ج) و (د) را برای این زیرگروه تکرار کنید.
و) نشان دهید ضرب هم‌دسته‌ها با تعریف

$$xI.x^2I \stackrel{?}{=} (x.x^2)I = x^3I$$

برقرار نیست. (راهنمایی: عضوی از ضرب درونی $xI.x^2I$ بیابید که در x^3I نباشد.)
این یکی از آزمون‌هایی است که نشان می‌دهد زیرگروه I بهنجار نیست.