سوالات کلاسی:

آیا همیشه $\frac{G}{H}\times H \cong G$ ؟

نه لزوماً ... مثال نقض ببینیم:

در یادداشت های مکمل دیدید که گروه خارج قسمتی کواترنیون ها را چطور می سازیم:

$$\frac{Q}{H} = \frac{Q}{\{\pm 1\}} \simeq \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$$

پس $\frac{Q}{H}\times H \simeq (\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\times\mathbb{Z}_2$ ، بنابراین گروه $\frac{Q}{H}\times H$ با خود کواترنیون ها یکریخت نیست.

یادتان هست که تعداد گروه های متمایز از مرتبه ۸ را شماردیم؟ گروه کواترنیون ها و گروه $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ متمایز بودند چون مثلاً گروه آخری عنصر مرتبه 4 ندارد، درحالی که $Q$ عنصر مرتبه ۴ دارد.

اگر $A$ و $B$ دو زیرگروه نرمال از $G$ باشند که $A\simeq B$ آیا لزوماً $\frac{G}{A}\simeq\frac{G}{B}$ ؟

بازهم نه!

گروه $G = V\times Q$ را در نظر بگیرید ( $V$ گروه $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ با اعضای $\{e,a,b,c\}$ است.)

$$A=\{(e,1),(a,1),(b,1),(c,1)\}$$

$$B=\{(e,1),(e,-1),(a,1),(a,-1)\}$$

اول نشان دهیم که یکریختند: همانطور که می توانید ببینید که در $A$ عنصر $(e,1)$ یکه است و در $B$ هم همین عنصر یکه است.

می‌توانیم نشان دهیم که عناصر غیربدیهی‌ی $A$ و $B$، همگی مرتبه‌ی ۲ هستند، پس

هر دو گروه $A$ و $B$ با گروه $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ یکریخت‌اند $\Leftarrow$ $A\simeq B$

نرمال بودن این دو هم با تعریف و به سادگی بررسی می‌شود.

گروه خارج قسمتی $\frac{V\times Q}{A}$ را تشکیل دهیم، مطابق قضیه‌ی لاگرانژ، $\frac{۳۲}{۴}=۸$ همدسته دارد.

$$\frac{V\times Q}{A}=\Big\{\overset{(e,1)A}{\{(e,1),(a,1),(b,1),(c,1)\}},\ \overset{(e,-1)A}{\{(e,-1),(a,-1),(b,-1),(c,-1)\}},$$
$$\overset{(e,i)A}{\{(e,i),(a,i),(b,i),(c,i)\}}\ \overset{(e,-i)A}{\{(e,-i),(a,-i),(b,-i),(c,-i)\}}$$
$$\overset{(e,j)A}{\{(e,j),(a,j),(b,j),(c,j)\}}\ \overset{(e,-j)A}{\{(e,-j),(a,-j),(b,-j),(c,-j)\}}$$
$$\overset{(e,k)A}{\{(e,k),(a,k),(b,k),(c,k)\}}\ \overset{(e,-k)A}{\{(e,-k),(a,-k),(b,-k),(c,-k)\}}\Big\}$$

اعضای اول زوج مرتب‌ها، تماشاچی هستند و اصلاً در ضرب همدسته‌ها تأثیری ندارند.

می‌توانید ببینید که این گروه دقیقاً با گروه $Q$ همریخت است:

$$\Phi:\frac{V\times Q}{A}\longrightarrow Q\ ,\qquad \Phi\big((\alpha,\beta)A\big)=\beta$$

این رابطه مستقل از نماینده‌ی همدسته است، همریختی است و ۱-۱ و پوشاست $\Leftarrow$ پس $\frac{V\times Q}{A}\cong Q$ ،

حالا $\frac{V\times Q}{B}$ را بسازیم:

$$\frac{V\times Q}{B}=\Big\{\overset{(e,1)B}{\{(e,1),(e,-1),(a,1),(a,-1)\}},\ \overset{(e,i)B}{\{(e,i),(e,-i),(a,i),(a,-i)\}},$$
$$\overset{(e,j)B}{\{(e,j),(e,-j),(a,j),(a,-j)\}},\ \overset{(e,k)B}{\{(e,k),(e,-k),(a,k),(a,-k)\}},$$

$$\{\underbrace{\{(b,1),(b,-1),(c,1),(c,-1)\}}_{(b,1)B},\underbrace{\{(b,i),(b,-i),(c,i),(c,-i)\}}_{(b,i)B},$$
$$\underbrace{\{(b,j),(b,-j),(c,j),(c,-j)\}}_{(b,j)B},\underbrace{\{(b,k),(b,-k),(c,k),(c,-k)\}}_{(b,k)B}\}$$

بیایید مرتبه عناصر را معلوم کنیم تا فرم گروه معلوم شود:

$\sigma((e,1)B) \to$ عنصر یک : مرتبه $1$

$\sigma((e,i)B) = \sigma((e,j)B) = \sigma((e,k)B) = 2 \to$ $(e,i)B \times (e,i)B = \underbrace{(e,-1)}_{\in B} B = B$

$\sigma((b,1)B) = 2$

$\sigma((b,i)B) = \sigma((b,j)B) = \sigma((b,k)B) = 2 \to$ $(b,i)B \times (b,i)B$ $\underbrace{(e,-1)}_{\in B} B = B$

کدام گروه مرتبه $8$ است که مرتبه‌ی تمام عناصر غیر بدیهی اش $2$ است؟ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ !

پس $\frac{V \times Q}{B} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

پس $\frac{V \times Q}{B} \simeq \frac{V \times Q}{A}$ ... حتی با اینکه $A \not\simeq B$ ! گروه ها خیلی عجیب اند!

مقضیه ی تناظر (Correspondence) : اگر $N \trianglelefteq G$ ، یک تناظر دوسوی بین زیرگروه های $A \leqslant G$ که شامل $N$ هستند و زیرگروه های $\frac{G}{N}$ وجود دارد.

اثبات دقیق آن را می توانید در منابع پیدا کنید ، اما حرفی که قضیه می زند با قضیه اول هم‌ریختی خیلی مشابه است.

اگر نگاشت $\phi : G \to G'$ همریختی باشد؛ در تمرین ها دیدید که $Im\,\phi$ زیرگروهی از $G'$ است.

پس نگاشت $\phi$، نگاشتی از زیرگروه های $G$ به زیرگروه های $G'$ هم هست.

برای هر زیرگروه $N \trianglelefteq G$ می‌توان نگاشت مربوطه $\varphi_N$ را این طور ساخت:

$$\varphi_N : G \to \frac{G}{N} \qquad \varphi_N(g) = gN$$

می‌توانید ببینید که $\varphi_N$ همریختی است و هسته اش خود $N$ است ... اگر $\varphi_N$ به زیرگروه $H \leqslant G$ محدود شود که شامل $G$ است، در این صورت، نگاشت بین $\varphi_N : H \to \frac{G}{N}$ این تناظر بین

زیرگروه های $G$ (شامل $N$) و $\frac{G}{N}$ را می‌دهد. [توجه کنید که وقتی $H$ شامل $N$ نباشد، زیرگروه

حاصل از نگاشت $\varphi_N$ چه خواهد بود!}.