تمرین سری سوم درس نظریه گروه‌ها - دکتر رضاخانی

مهلت تحویل: جمعه ۱۷ فروردین ماه سال ۱۴۰۳ تا ساعت ۲۳:۵۹

از طریق سامانه درس‌افزار شریف

حسین محمدی
hossein.mohammadi.00427@gmail.com

زهرا کبیری
kabiri.zahra98@gmail.com

تمرین ۱۰ [۲۰ امتیاز] : گروه دوری

الف) یک گروه دوری [۱] از مرتبه n، چند مولد دارد؟ (می‌گوییم $b \in G$ یک مولد است و می‌نویسیم $G = \langle b \rangle$ اگر گروه دوری G ، از توان‌های عضو b ساخته شود.)

ب) گروه‌های دوری A و B را در نظر بگیرید که به ترتیب از مرتبه m و n هستند. نشان دهید که ضرب دکارتی این دو گروه ، $A \times B$ دوری است اگر و فقط اگر m و n نسبت به هم اول باشند.

تمرین ۱۱ [۲۰ امتیاز] : همدسته‌ها و خواصشان

الف) فرض کنید H زیرگروهی از یک گروه G باشد. نشان دهید هر همدسته چپ از H یک همدسته راست از زیرگروهی از G است. آیا هر همدسته چپ H، همدسته راستی از H هست؟ برای پاسخ خود دلیلی بیاورید.

ب) H یک زیرگروه از G است به طوری که حاصل ضرب هر دو همدسته راست H دوباره یک همدسته راست از H است [۲] . نشان دهید که برای هر $h \in H$ و هر $g \in G$ داریم [۳] :

$$ghg^{-1} \in H$$

تمرین ۱۲ [۱۰ امتیاز] : گروه تبدیلات خطی فضای اقلیدسی

تعریف گروه تبدیلات خطی:

مجموعه تبدیلات خطی وارون‌پذیر روی $\mathbb{R}^n$ را گروه $GL_n(\mathbb{R})$ می‌نامیم [a] . به عنوان مثال برای $n = ۲$ ماتریس $A_{۲\times۲}$ ، یک عضو از $GL_۲(\mathbb{R})$ است.

$$A_{۲\times۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

حالا اگر زیرمجموعه‌ای از این تبدیلات خطی وارون‌پذیر را در نظر بگیریم که دترمینان آن‌ها برابر با ۱ است به گروهی می‌رسیم که به آن $SL_n(\mathbb{R})$ می‌گوییم [b] .

[a] این سرواژه از General Linear group وام گرفته شده است.
[b] این سرواژه از Special Linear group وام گرفته شده است.

برای عدد حقیقی $r \neq ۰$، مجموعه A_r را این‌طور معرفی می‌کنیم:

$$A_r = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = r\}$$

[۱] Cyclic group

[۲] منظور از ضرب دو همدسته، ضرب درونی است. برای دو همدسته‌ی $Hg_۱$ و $Hg_۲$ از $G \leq H$ ضرب درونی به این شکل تعریف می‌شود:

$$Hg_۱Hg_۲ = \{h_۱g_۱h_۲g_۲ \mid \forall h_۱, h_۲ \in H\}$$

[۳] از خانم حانیه ملکی و آقای ارمیا هلالی برای تذکر دادن این اشتباه تایپی سپاسگزاریم.

الف) نشان دهید A_r یک همدسته چپ $SL_n(\mathbb{R})$ است.

ب) آیا هر همدسته چپ $SL_n(\mathbb{R})$ را می‌توان به صورت A_r نوشت؟ (برای یک $r \neq ۰$)

تمرین ۱۳ [۲۰ امتیاز] : گروه چندوجهی و مولدهایش

در این تمرین قصد داریم گروه چندوجهی را به کمک مولدهایش معرفی کنیم. در کلاس دیده‌اید که گاهی هیچ قیدی روی مولدها نیست و گروه تولید شده، «گروه آزاد» نامیده می‌شود. در اینجا روی مولدهای گروه D_n قیودی داریم.

مجموعه G را در نظر بگیرید که اعضای آن تمام $x^i y^j$هایی هستند که $i, j \in \{۰, ۱, ۲, ..., n-۱\}$. همچنین فرض می‌کنیم این خاصیت‌ها را دارند [۴]:

$$x^{۲} = y^n = e \quad ; \quad n > ۲$$
$$x^i y^j = x^{i'} y^{j'} \iff i \overset{۲}{\equiv} i', j \overset{n}{\equiv} j'$$
$$xy = y^{-۱}x$$

الف) حاصل ضرب $(x^i y^j)(x^k y^l)$ را می‌توان به صورت $x^\alpha y^\beta$ نوشت. α و β را بیابید.

ب) نشان دهید که G یک گروه ناجابه‌جایی از مرتبه $۲n$ است.

ج) $Z(G)$ ، مرکز [۵] گروه G را این‌طور معرفی می‌کنیم:

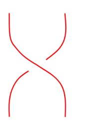
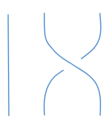
$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \quad , \quad \forall g \in G\}$$

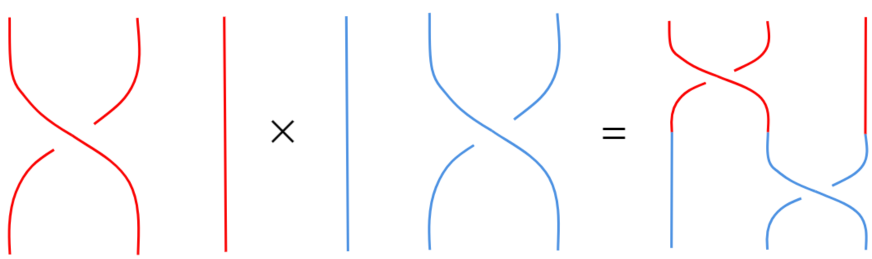
اگر n فرد باشد نشان دهید که مرکز G، بدیهی است؛ یعنی $Z(G) = \{e\}$.
همچنین نشان دهید اگر n زوج باشد مرکز این گروه نابدیهی است؛ یعنی اعضایی به غیر از e دارد.
یک گروه با این ویژگی‌ها یک گروه چندوجهی [۶] نام دارد. می‌توانیم آن را به روش هندسی این‌طور توصیف کنیم.

عضو y را یک دوران به زاویه $\frac{۲\pi}{n}$ حول مبدا مختصات در نظر می‌گیریم. عضو x را نیز یک انعکاس نسبت به محور عمودی در نظر می‌گیریم. گروهی که از حاصل ضرب این مولدها با قیدهای داده شده به دست می‌آید همان گروه D_n است.

تمرین ۱۴ [۳۰ امتیاز] : بافتن گیسوها!

در این تمرین با گیسوها، ضربشان و خواص گروهی‌شان بیشتر آشنا می‌شویم.

حتما تا الان با نمایش تصویری اعضای گروه گیسو آشنا شده‌اید. دو عضو  $= \sigma_۱$ و  $= \sigma_۲$ از گروه $B_۳$ را در نظر بگیرید؛ ضرب آنها با در امتداد هم قرار دادن این دو گیسو ساخته می‌شود.



شکل ۱: نحوه ضرب کردن دو عضو از گروه گیسو

[۴] در مورد خاصیت دوم، می توانیم با شرط $۰ \leq i, i' < ۲$ و $۰ \leq j, j' < n$ آن را به شکل $i = i'$ و $j = j'$ بنویسیم.
منظور از $a \overset{n}{\equiv} b$ این است که $n|(a-b)$ یا a و b در تقسیم بر n هم‌باقی‌مانده هستند.
از آقای پویا حسینی برای تذکر این نکته ممنونیم. با هرکدام از این قراردادها که راحت‌تر هستید کار کنید.

[5] Center

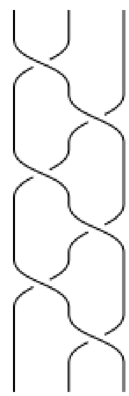
[6] Dihedral group

الف) گروه‌گیسو تعمیمی از گروه جایگشت است. یک همریختی بین گروه گیسو B_n و گروه جایگشت‌ها S_n تعریف کنید و همچنین هسته‌ی این همریختی را نشان دهید. (در تعریف و معرفی هسته‌ی همریختی، نمایش تصویری بالا بهره ببرید و خیلی برای اثبات‌ها به خود زحمت ندهید؛ بسیاری از خواص گروه B_N هنوز هم که هنوز است اثبات نشده‌اند.)

ب) به شکل تصویری نشان دهید که دو عضو $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ مولدهای گروه $B_۳$ هستند.

ج) گروه گیسوی مرتبه‌ی سه، گروه آزاد نیست. بین مولدهایش قیدی وجود دارد. این قید را به‌دست آورید. (راهنمایی: ضرب‌های سه‌تایی مولدها را در نظر بگیرید و ببینید که کدام دو ضرب سه‌مولدی با هم برابرند.)

د) در این بخش به سراغ مرکز گروه می‌رویم. نشان دهید که گیسوی شکل ۲ با چند عضو نوعی (حداقل سه عضو) از گروه $B_۳$ جابه‌جا می‌شود.



شکل ۲: گیسوی $(\sigma_۱\sigma_۲)^۳$ که با تمامی گیسوهای دیگر جابه‌جا می‌شود.

به طور کلی می‌شود نشان داد که مرکز گروه B_N به شکل زیر است:

$$Z(B_N) = \left\langle (\sigma_۱ \dots \sigma_{N-۱})^N \right\rangle$$

گروه گیسو در فیزیک دوبعدی بسیارمهم است و در جعبه‌ی صفحه‌ی بعد به اهمیت آن پرداخته‌ایم.

آمار ذرات و ارتباط با گروه‌های جایگشت و گیسو

یکی از جالب‌ترین و فیزیکی‌ترین ارتباط‌ها بین ذرات و نظریه‌گروه‌ها، ارتباط بین اسپین ذرات و آمار آنهاست [a] . علت این‌که گروه جایگشت در مکانیک کوانتومی (و حتی کلاسیک، در پارادوکس گیبس) مهم است، تمییزناپذیری ذرات است.
حتما از درس مکانیک کوانتومی ۲ می‌دانید که فضای پیکربندی $N-$ذره در $d-$بعد فضایی،

$$X^N = \underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{\text{N times}}$$

نیست؛ بلکه تمییزناپذیری ذرات قیدی روی این فضا می‌گذارد.
عضو $\sigma \in S_N$ از گروه جایگشت N شی را در نظر بگیرید. مطابق توقع فیزیکی ما، دو نقطه‌ی زیر از فضای پیکربندی معادلند:

$$(\vec{\mathbf{x}}_۱, \vec{\mathbf{x}}_۲, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_N) \sim (\vec{\mathbf{x}}_{\sigma(۱)}, \vec{\mathbf{x}}_{\sigma(۲)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_{\sigma(N)})$$

پس باید نقاطی از فضا را که با اعضای گروه جایگشت به هم مرتبط می‌شوند، یکسان در نظر بگیریم. بنابراین فضای پیکربندی فیزیکی

$$\mathfrak{X} = \frac{X^N}{S_N}$$

است.
ارتباط بین آمار ذرات و گروه جایگشت و گیسو از همین فضای پیکربندی نشات می‌گیرد، اما نیاز به کمی فرمالیسم هست که این رابطه شفاف‌تر شود.
برای مطالعه بیشتر: ارتباط آمار ذرات به فضای پیکربندیشان از طریق فرمول‌بندی انتگرال‌مسیر تک‌ذره‌ای روشن می‌شود. برای محاسبه‌ی انتگرال‌مسیر تک‌ذره‌ای، نیاز است که روی همه‌ی مسیرهای غیرهم‌ارز [b] با وزن خاصی جمع زده شود:

$$K = \sum_{\alpha \in \pi_۱(\mathfrak{X})} \chi(\alpha) K^\alpha$$

در رابطه‌ی بالا، K انتشارگر ذره، K^α انتشارگر با مسیرهای در کلاس هموتوپی α و χ نمایش یک‌بعدی [c] گروه $\pi_۱(\mathfrak{X})$ است.
می‌شود دید که گروه‌هموتوپی فضای $\frac{X^N}{S_N}$ برای ابعاد فضایی سه به بالا، گروه S_N و برای فضاهای دوبعدی B_N (گروه گیسو) است.

$$\pi_۱(\mathfrak{X}) = \pi_۱\left(\frac{X^N}{S_N}\right) = \begin{cases} B_N & d = ۲ \\ S_N & d > ۲ \end{cases}$$

همچنین نمایش‌های یکانی و یک‌بعدی گروه جایگشت، تنها χ^+ (برای بوزون) و χ^- (برای فرمیون) است [d] . اما گروه گیسو نمایش‌های یک بعدی بسیار متنوع‌تری دارد [e] .
این تفاوت در گروه هموتوپی، آمارهای متنوعی در دو بعد را به همراه دارد که به طور کلی نام Anyon به آنها اطلاق می‌شود. برای سه‌بعد فضایی یا بالاتر، تنها دو آمار بوزونی و فرمیونی وجود دارد.
من قبلا یادداشتی در این مورد نوشته بودم، آن را روی سامانه بارگذاری می‌کنم تا برای مطالعه بیشتر آن را بخوانید.

[a] ارتباط جالب توجه دیگر، ارتباط بین اسپین و نمایش‌های گروه پوانکاره است. همچنین در قضیه‌ی CPT هم نقش گروه‌ها و نمایش‌ها به شکل خیره‌کننده‌ای قابل ملاحظه است.
[b] منظور مسیرهایی است که با یک نگاشت پیوسته به هم تبدیل نمی‌شوند.
[c] با نمایش گروه‌ها در آینده آشنا می‌شوید.
[d] منظور از χ^+ نمایش بدیهی است که برای هر عضو از S_N مقدارش یک است. همچنین نمایش χ^- به ازای جایگشت‌های زوج مقدارش $+۱$ و برای جایگشت‌های فرد مقدارش -۱ است.
[e] مثلا چون گروه $B_۲$ (مربوط به فضای پیکربندی دوذره‌ای در دو بعد) با گروه $\mathbb{Z}$ یکریخت است؛ یک نمایش یک‌بعدی و یکانی به شکل $\rho(n) = e^{in\theta}$ برای هر $\theta \in \mathbb{R}$ دارد.