خلاصه‌ای از مباحث کلاس حل تمرین

استاد درس: دکتر کریمی‌پور

جلسه‌ی دوم: سؤالات مربوط به مبحث هوموتوپی

دستیار درس: حسین محمدی

گردآوری: حانیه ملکی

۲۷ اسفند ۱۴۰۲

در این جلسه به سؤالات زیر پاسخ دادیم:

۱. گروه هوموتوپی اول فضاهای مختلف

۲. از یک نوع هوموتوپی بودنِ دو فضا

۳. پیدا کردن هوموتوپی بین دو نگاشت

همچنین در مورد مباحث زیر بحث کردیم:

۱. کاراکتر اویلرِ فضایی که از جمع مستقیم دو فضای دیگر به دست آمده است.

۲. قضیه‌ی ون کمپن [1]، منبع ۱، منبع ۲

۳. universal cover و ارتباط آن با گروه هوموتوپی اول فضا، منبع ۱

۴. ارتباط گروه‌های هوموتوپی دو فضای همریخت

۵. به دست آوردن صفحه‌ی $\mathbb{R}P^2$ از صفحه‌ی اقلیدسی، منبع ۱

۶. روشی سیستماتیک برای به دست آوردن گروه هوموتوپی اول فضاهای مختلف [۲]

۷. کلاس‌بندی سطوح، منبع ۱، منبع ۲

۸. گروه‌های Baumslag–Solitar، منبع ۱

[1] Seifert–Van Kampen theorem

[۲] فایل این مبحث روی CW درس قرار دارد.

سؤالات زیر را به دقت مورد بررسی قرار دادیم:

۱. گروه هوموتوپی اول فضاهای زیر را به دست آورید:
بطری کلاین، نوار موبیوس، صفحه‌ی $\mathbb{R}P^2$ ،S^2 ،$T_g\#KleinBottle$.

---

۲. نشان دهید که $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ با دایره از یک نوع هوموتوپی هستند ولی این دو فضا با هم همریخت نیستند.

---

۳. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 1], \qquad f(x) = \begin{cases} sin(x) & x \in [0, \pi] \\ 0 & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

این تابع را به طور پیوسته به تابع زیر تبدیل کند. یعنی یک هوموتوپی بین آن‌ها پیدا کنید:

$$g : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 1], \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \pi] \\ -sin(x) & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

---

۴. نشان دهید که هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد، با $X \times \mathbb{R}$ از یک نوع هوموتوپی است.

---

۵. گروه هوموتوپی بطری کلاین را در نظر بگیرید. با بازتعریف مولدهای این گروه نشان دهید که می‌توان این گروه را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\pi_1(Klien) = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\alpha^2 = \beta^2}$$

معنای این رابطه این است که این گروه توسط مولدهای α و β تولید می‌شود و بین این مولدها رابطه‌ی $\alpha^2 = \beta^2$ برقرار است. با استفاده از این نشان دهید که یک عنصر کلی این گروه را می‌توان به شکل زیر نوشت [۳] :

$$g = \alpha^{n_1}\beta^{\pm 1}\alpha^{n_2}\beta^{\pm 1}...\alpha^{n_k}, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

[۳] برای این سؤال به مشکل خوردیم؛ طبق بحثی که در کلاس صورت گرفت انتها حتما باید β باشد و توان‌ها نیز باید صفر و یک باشند.