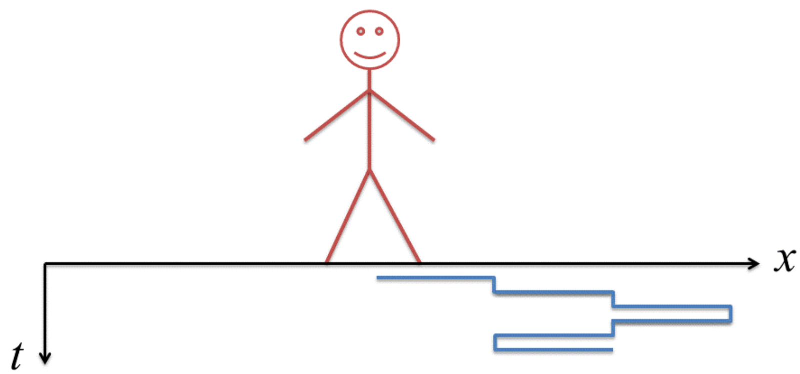
5. ول‌گشت[11]

ول گردی را در نظر بگیرید که در لحظه‌ی t_0 در مکان x_0 است. این ول گرد در بازه‌های زمانی ثابت که برابر با واحد زمان فرض می‌کنیم به طور کاملا کتره‌ای قدمی به سمت چپ یا راست بر می‌دارد. برای سادگی فرض کنید که ول گرد یک سکه دارد که در هر قدم با انداختن سکه و شیر یا خط بودن آن انتخاب می‌کند که قدم خود را در کدام جهت بردارد. برای سادگی فرض کرده‌ایم که ول گرد فقط در یک بعد قدم می‌زند ولی در ادامه مسئله را به ابعاد بالا تر تعمیم می‌دهیم. سوال این است که در زمان t ول گرد کجاست. بدیهی است که ساختار تصادفی مسئله امکان پاسخ گویی دقیق به این سوال را نمی‌دهد ولی می‌توان احتمال حضور او در هر نقطه از فضا و در هر زمان خاص را بدست آورد.



شکل 9 حرکت یک ولگرد در یک بعد

5.3. ول‌گشت یک بعدی

فرض کنید که در مثال بالا احتمال این که ول گرد در هر قدم به سمت راست برود p و احتمال رفتن به چپ $q = 1 - p$ باشد و در لحظه $t_0 = 0$ در مبدا مختصات، $x_0 = 0$ باشد. جدول زیر احتمال حضور این ولگرد در مکان‌های دیگر و در زمان‌های بعدی را می‌دهد.

جدول 2 احتمال حضور ولگرد در نقاط شبکه در زمان های متفاوت. در هر قدم ولگرد با احتمال p به سمت راست و با احتمال q به سمت چپ می‌رود.

x									t
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

[11] Random Walk

0	0	0	q	0	p	0	0	0	1
0	0	q^2	0	$2pq$	0	p^2	0	0	2
0	q^3	0	$3pq^2$	0	$3pq$	0	p^3	0	3

برای ول‌گرد یک بعدی به راحتی می‌توان این احتمال را در حالت کلی محاسبه کرد. احتمال اینکه بعد از پیمایش N قدم، N_+ قدم به سمت راست و $N_- = N - N_+$ قدم به سمت چپ بردارد از بست دوجمله ای بدست می‌آید.

$$P(N_+;N) = \frac{N!}{N_+!N_-!}\, p^{N_+}q^{N_-} \qquad (1)$$

بنابر این احتمال اینکه این ولگرد در لحظه $t = N\tau = (N_+ + N_-)\tau$ در $x = (N_+ - N_-)l$ قرار داشته باشد به راحتی با جایگزینی مقدار x و t به جای تعداد قدم‌ها بدست می‌آید. در اینجا l و τ به ترتیب طول قدم و واحد زمان برای برداشتن قدم های این گشت هستند. بنا به قضیه حد مرکزی[12] می‌دانیم که در حد N های بزرگ به یک تابع توزیع گوسی میل می‌کند. در نتیجه احتمال حضور ولگرد در زمان و مکان با رابطه‌ی

$$P(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-<x>)^2}{2\sigma^2}} \qquad (2)$$

داده می‌شود که در رابطه بالا $< x >$ و σ مقادیر متوسط آنساملی مکان و انحراف میعار آن هستند و هر دو تابعی از زمان هستند. برای محاسبه می‌توان از رابطه‌ی برگشتی استفاده کرد.

$$x(t) = x(t-\tau) + al \qquad (3)$$

که در اینجا a یک متغیر کاتوره‌ای است که با احتمال p مقدار 1+ و با احتمال q مقدار $1-$ را می‌گیرد. از طرفین رابطه بالا متوسط می‌گیریم

(4)

$$\begin{aligned} < x(t) > &= < x(t-\tau) > + < a > l \\ &= < x(t-\tau) > + (p-q)l \\ &= < x(t-2\tau) > + (p-q)l + (p-q)l = \frac{l}{\tau}(p-q)\, t \end{aligned}$$

به روشی مشابه می‌توانیم انحراف میعار را نیز محاسبه کنیم که نتیجه می‌شود

[12] Central Limit Theorem

$$\sigma^2 = <x^2> - <x>^2 = \frac{4l^2}{\tau} pq\ t. \qquad (5)$$

.4.1 تمرین	رابطه 5 را اثبات کنید.

.4.2 تمرین	– یک برنامه برای ولگشت یک بعدی بنویسید و صحت روابط 5 و 4 را برای چند مقدار مختلف p بررسی کنید. یکی از این مقادیر $p = 1/2$ باشد.

5.4. معادله پخش برای ول‌گشت

مسئله‌ی ول‌گشت شاید در نگاه اول چیزی شبیه یک بازی به نظر برسد ولی در فیزیک سرو کله‌ی آن در بسیاری از مسائل دیگر پیدا می‌شود. به زبان دیگر بسیاری از مسئله‌های فیزیک و حتی در علوم دیگر در کلاس عمومی ول‌گشت می‌نشینند. یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین این مسئله‌ها، پدیده‌ی پخش است. در پخش، هر ذره به طور کاتوره‌ای و به خاطر ضربه‌های گرمایی (افت و خیز حرارتی) یک حرکت تصادفی می‌کند. پس بدیهی است که پخش را می‌توان ول‌گشتی در فضا تصور کرد. در اینجا برای بدست آوردن احتمال ذره در فضا راه دیگری را در پیش می‌گیریم و برای تابع احتمال $P(x;t)$ معادله تحولی می‌نویسیم که به معادله‌ی مادر[13] معروف است. ذره فقط در صورتی می‌تواند در لحظه‌ی t در نقطه ی x باشد که در قدم قبل در یکی از همسایگی‌های این نقطه باشد. برای سادگی فرض می‌کنیم که $p = q = \frac{1}{2}$، در این صورت

$$P(x;t) = \frac{1}{2}\Big(P(x-l;t-\tau) + P(x+l;t-\tau)\Big). \qquad (6)$$

از طرفین رابطه بالا مقدار $P(x;t-\tau)$ را کم می‌کنیم و آنرا بر $\tau\ l^2$ تقسیم می‌کنیم.

[13] Master equation

$$\frac{P(x;t)-P(x;t-\tau)}{\tau} = \frac{l^2}{2\tau}\frac{\frac{P(x+l;t-\tau)-P(x;t-\tau)}{l}-\frac{P(x;t-\tau)-P(x-l;t-\tau)}{l}}{l} \qquad (7)$$

در حد پیوسته، یعنی وقتی $\tau \to 0$ و $x \to 0$ ولی $D = l^2/2\tau$ محدود و غیر صفراست، رابطه بالا به رابطه معروف پخش تبدیل می‌شود،

$$\frac{\partial P(x;t)}{\partial t} = D\ \frac{\partial^2 P(x;t)}{\partial x^2} \qquad (8)$$

که دارای پاسخ آشنای گوسی است که در قسمت قبل بدست آوردیم. یکی از نکات آموزنده‌ی این بحث این است که حتی برای مسایلی که به طور صریح تصادف در فرآیند آن نقش دارد نیز می‌توان به معادلاتی رسید که قابل حل با روش‌های معمول عددی و بدون نیاز به استفاده از آلگوریتم‌های تصادفی باشد.

مقایسه ی روابطه 5 و 8 می‌تواند ظریب پخش ول گشت را تعریف کند.

$$\sigma^2 = 2Dt \qquad (9)$$

معادله 8 معادله پخش است که نه تنها در توصیف پدیده‌های فیزیکی بسیار معادله‌ی مهمی است بلکه در علوم اجتماعی و اقتصادی نیز بسیار پر کاربرد است. سرعت پخش بیماری یا شایعه در یک اجتماع یا پخش ثروت در یک مجموعه تنها چند مثال ساده از کاربرد این رابطه است. می‌توانیم مثالی ملموس‌تر را بررسی کنیم. فرض کنید که در یک بعد حرکت ول گشت انجام می‌دهید. اگر در هر ثانیه یک متر قدم بردارید، پس از گذشت یک ساعت شما 3600 قدم برداشته‌اید و طبق رابطه‌ی 9 احتمالا در فاصله 60 متری مکان اولیه خود قرار گرفته‌اید. در صورتی که جهتمند به سمت این نقطه حرکت می‌کردید کافی بود که یک دقیقه به سمت نقطه‌ی مورد نظر قدم بر می‌داشتید.

5.5. ولگشت با تله

فرض کنید که در یک مسئله ساده‌ی یک بعدی ولگشت، شرایط مرزی جاذب باشند. یعنی اینکه درصورت رسیدن ولگرد به مرزها، در آنجا متوقت می‌شود. دراین مدل می‌توان مرزها را تله‌هایی فرض کرد که باعث نابودی ولگرد می‌شوند.

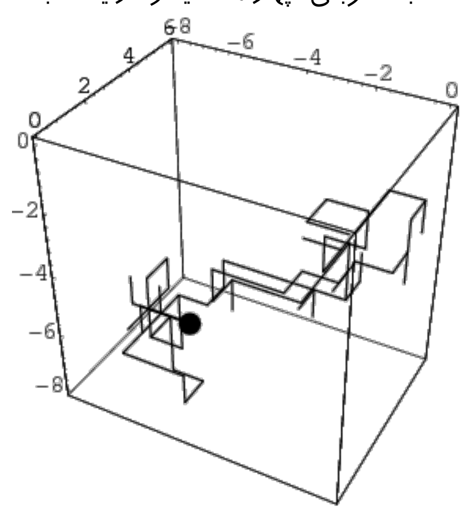
4.3.	
تمرین	– شرایط مرزی جاذب برای مسئله قبل قرار دهید و برنامه را تا زمان به دام افتادن ولگرد در تله ها ادامه دهید. زمان متوسط زندگی ولگرد در این شبکه را با متوسط گیری بر روی تعدا د زیادی اجرا محاسبه کنید. فرض کنید که شبکه دارای 20 خانه است. – بستگی متوسط عمر ولگرد به مکان اولیه آنرا نشان دهید.

یک راه برای حل مسئله بالا استفاده از الگوریتم سرشماری به جای شبیه سازی تصادفی است. جدولی مانند جدول (1) را برای محاسبه‌ی احتمال حضور در نقاط مختلف تولید کنید. به دلیل وجود داشتن تله در انتهای شبکه احتمال‌هایی که به این خانه‌ها وارد می‌شوند دیگر در سیستم منتشر نمی‌شوند. در هر زمان مجموع کل احتمال‌ها باید برابر واحد باشد و مجموع احتمال‌ها بدون در نظر گرفتن مقادیر مربوط به تله‌ها احتمال زنده ماندن ولگرد تا آن زمان را می‌دهد. همچنین جمع احتمال‌های دوخانه‌ی تله احتمال مرگ را می‌دهد. با توجه به داشتن این مقدار می‌توان متوسط عمر ولگرد را محاسبه کرد.

.4.4	با استفاده از روش سرشماری مسئله قبل را حل کنید و نتیجه دو روش را با هم مقایسه کنید.
تمرین	

5.6. ول‌گشت در ابعاد بالاتر

مشابه حرکت در یک بعد می‌توان ول‌گشت را در ابعاد بالاتر نیز تعریف کرد. در این حالت متحرک در هر قدم تعداد بیشتری حق انتخاب دارد. البته تعداد همسایگان نه تنها به بعد فضایی که به نوع شبکه نیز بستگی دارد. برای سادگی یک شبکه ساده مربعی d را فرض کنیم. بطور مثال در یک شبکه مربعی، چهار همسایه و در یک شبکه مکعبی ساده 6 همسایه وجود دارد.



شکل 10 حرکت ولگشت در فضای سه بعدی و بر روی شبکه مکعبی ساده

حرکت در این شرایط را می‌توان به d حرکت یک بعدی تجزیه کرد. هر کدام از این حرکت‌ها دقیقا یک حرکت ولگشت یک بعدی هستند. باز هم برای سادگی فرض می‌کنیم که احتمال رفتن به هر یک از جهات برابر باشد. پس برای حالت سه بعدی برای حرکت بر روی هر بُعد داریم:

$$< x^2 > = < y^2 > = < z^2 > = 2\,Dt \qquad (10)$$

$$< r^2 > = < x^2 + y^2 + z^2 > = 3 \times 2\,Dt \qquad (11)$$

در حالت کلی می‌توان رابطه را برای هر بُعد به صورت

$$< r^2 > = 2d\,Dt \qquad (12)$$

نوشت. این رابطه نشان می‌دهد که رفتار مقیاسی شعاع ژیراسیون با زمان برای ول گشت ساده بستگی به بُعد ندارد و همواره داریم

$$R_g = \sqrt{< r^2 >} \sim t^{\nu} \qquad (13)$$

که ν نمای بحرانی ولگشت است و در ولگشت ساده مستقل از بُعد است و همواره برابر با $\frac{1}{2}$ است.

4.5. تمرین	– یک برنامه برای ولگشت دو بعدی بر روی شبکه مربعی بنویسید. فرض کنید که احتمال قدم بر داشتن در تمام جهت‌ها برابر است. – صحت رابطه‌ی 12 را برای این ولگرد بررسی کنید.

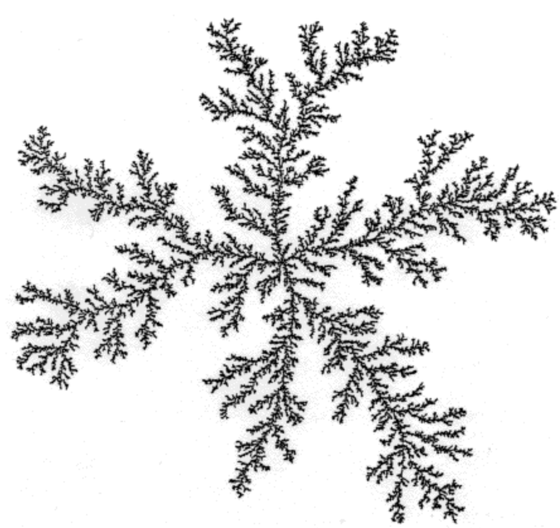
5.7. تجمع پخش محدود[14]

در اینجا به موضوع رشد که در فصل قبل با آن آشنا شدیم بر می‌گردیم. دسته گسترده‌ای از فرآیندهای رشد به فرآیندهای تجمعی معروف هستند. در این گونه فرآیندها، رشد از یک بذر اولیه شروع می‌شود و با تجمع ذرات در اطراف آن یک خوشه تشکیل می‌شود. این خوشه با ادامه فرآیند رشد می‌کند. شکل خوشه و خواص هندسی و فیزیکی آن بستگی به نوع فرآیند رشد دارد.

[14] Diffusion limited Aggregation (DLA)

دسته‌ی خیلی مهمی از این گونه فرآیندهای رشد به فرآیندهای "تجمع با پخش محدود" معروف هستند. در این گونه فرآیندها ذرات در محیط یک حرکت پخشی یا ولگشت آزاد دارند. این ذرات در صورتی که طی حرکت پخشی خود به بذر اولیه یا خوشه‌ی تشکیل شده برسند به آن می‌چسبند و متوقف می‌شوند. این پدیده را می‌توان مشابه ولگشت در حضور تله فرض کرد با این تفاوت که تله دراینجا خود دینامیک دارد.
برای شبیه سازی این فرآیند می‌توان از برنامه‌ای که برای ولگشت تولید کردید استفاده کرد.

4.6.	برنامه ای برای تولید خوشه‌های تجمع پخش محدود در دو بعد و با یک بذر خطی تهیه کنید. – شرایط اولیه خوشه (بذر) را خطی افقی به طول 200 در نظر بگیرید. – ولگردی را از فاصله‌ای بالاتر از خوشه رها کنید و اجازه دهید که در صفحه گشت کند و در صورت اتصال به خوشه به آن بچسبد. – فرآیند را بر روی نمایشگر نمایش دهید. از کد رنگ برای تصویر کردن دینامیک فرآیند استفاده کنید.
تمرین	



شکل 11 یک خوشه تولید شده در فرآیند تجمع با پخش محدود

یکی از مشخصه‌های مهم فرآیند تجمع پخش محدود رفتار رقابتی در رشد خوشه‌هاست. این رقابت کاملا نا پایدار است. در ابتدا تمام نقاط (بذر خطی) با هم یکسان هستند و هم ارتفاع. به محض اینکه یک ذره به نقطه‌ای بچسبد و ارتفاع آن نقطه بیشتر شود، شانس این نقطه برای جذب ذرات دیگر از نقاط دیگر بذر بیشتر خواهد شد.

شکل 12 خوشه تجمع با پخش محدود با بذر خطی. شکل سمت راست: شبه فسیل‌های اکسید منیزیم بر روی سنگی از کوهستان درکه در شمال تهران.

شکل سمت چپ: خوشه تولید شده با شبیه سازی کامپیوتری

شکل بالا عکسی از یک خوشه واقعی که بر شکاف سنگ‌ها تولید می‌شود را با تصویری شبیه سازی شده از این فرآیند مقایسه می‌کند. در تصویر شبیه سازی می‌بینید که حتی در مراحل نهایی شبیه سازی نیز این امکان برای ذرات پخشی وجود دارد که از بین درختچه‌های بزرگتر عبور کرده و خود را به درختچه‌های کوچک‌تر برسانند، هر چند این اتفاق نادر و با احتمال کمی صورت می‌گیرد. این خاصیت رقابتی در تولید درختچه‌ها در این فرآیند دلیل اصلی رفتار مقیاسی درختچه‌ها و ساختار فراکتالی آنهاست.

5.8. ول گشت خود پرهیز[15]

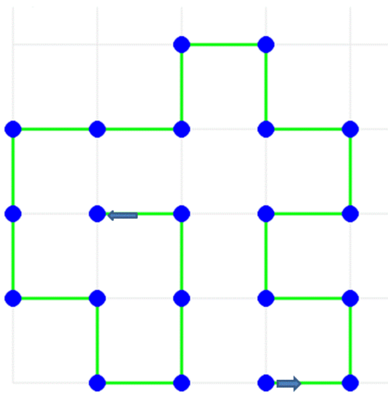
تغییرات جزیی رفتار مقیاسی ول گشت را تغییر نمی‌دهد. به طور مثال تغییر نوع شبکه یا حتی بعد می‌تواند هندسه‌ی ولگشت را تغییر دهد ولی مقدار ν تحت تاثیر این گونه تغییرا ت ناوردا است. ولی وجود دارد تغییراتی که می‌توانند رفتار مقیاسی را تحت تاثیر قرار دهند. در این میان یکی از مهم‌ترین تغییرات اختصاص حافظه‌ای بلند برد برای ولگرد است که اجازه ورود به خانه هایی که قبلا دیده‌است را به او ندهد. به این ترتیب ول گرد در طی مسیر تمام نقاطی که می‌گذرد را به خاطر می‌سپارد و از ورود به آنها اجتناب می‌کند.

این تغییر به ظاهر جزیی تاثیر زیادی در رفتار مقیاسی ولگشت می‌گذارد. از سوی دیگر خواهیم دید که از نظر محاسباتی نیز شبیه سازی را بسیار پیچیده و مشکل می‌کند.

[15] Self-Avoiding Random Walk (SAW)

یکی از تفاوت‌های آشکار بین ولگشت معمولی و خود پرهیز وابستگی شدید به بُعد در مدل خود پرهیز است. برای مثال اگر یک سیستم یک بعدی شروع کنیم کاملا بدیهی است ولگرد فقط در قدم اول امکان انتخاب جهت را دارد. بعد از اولین انتخاب، قید خود پرهیزی راهی به جز ادامه مسیر در همان جهت را به ولگرد نمی‌دهد. در نتیجه در بعد $d = 1$، $\nu = 1$ است. ولی داستان در $d = 2$ کار به این سادگی نیست. اینجا مسیرهای بیشماری برای ولگرد وجود دارد.

اگر به برنامه‌ای که در قسمت قبل برای ول گشت تهیه کرده‌اید حافظه‌ای برای نقاطی که قبلا ولگرد از آن عبور کرده اختصاص دهید می‌توانید از آن برای تولید گشت‌های خود پرهیز استفاده کنید. ولی به دلیل محدودیت خود پرهیزی تعداد مسیرها خود پرهیز بسیار کمتر از ولگشت ساده است. به همین دلیل در این برنامه تولید مسیرهای با طول های بزرگ تقریبا ناممکن است. ولگرد به کرات در مسیرهایی گیر می افتد که امکان پیش روی ندارد.



شکل 13 یک مسیر نوعی برای ول گشت خود پرهیز که بعد از 12 قدم به بن بست رسیده است.

به این دلیل امکان تولید تعداد قابل توجهی گشت در طول‌های بلند با روش گشت تصادفی وجود ندارد و به این طریق نمی شود مقدار دقیقی برای ν بدست آورد. یکی از روش‌هایی که می‌توان به عنوان جایگزین پیشنهاد داد روش سرشماری تمام مسیرهاست. در این روش متحرک بعد از رسیدن به بن بست تعدادی قدم به عقب برگشته تا راه جدیدی پیدا کند. با تکرار این روش متحرک می‌تواند مسیر خود را به انجام برساند. این درست است که تعداد مسیرهای گشت خود پرهیز بسیار کمتر از ولگشت ساده است، ولی این تعداد هنوز آنقدر زیاد است که آلکوریتم سرشماری را یک آلکوریتم NP- پیچیده کند و امکان حل مسئله به این طریق را سلب کند.

<table>
<tr><td>4.7.</td><td rowspan="2">– برنامه‌ای برای تولید تمامی گشت‌های خود پرهیز بر روی یک شبکه مربعی دو بعدی تهیه کنید.
– منحنی تعداد گشت‌های ممکن بر حسب N را رسم کنید.
– برای یک ولگشت آزاد به طول N بر روی این شبکه تعداد راه‌های ممکن 4^N است. نسبت گشت های خودپرهیز بر گشت های آزاد را بر حسب N رسم کنید.</td></tr>
<tr><td>تمرین</td></tr>
</table>

اختلاف اصلی ولگشت خود پرهیز با گشت‌های آزاد عدم وجود حلقه بسته در این گشت‌هاست. در نتیجه حل این مسئله معادل با امکان شماردن تعداد حلقه‌های بسته در شبکه است. این مسئله در دو بُعد حل دقیق دارد. به این دلیل در $d=2$ مسئله حل دقیق دارد و مقدار $\nu = 3/4$ است. در ابعاد بالاتر از چهار هم به دلیل پایین بودن احتمال برخورد گشت با خودش نقش این حلقه ها خیلی مهم نیست و اختلاف زیادی میان ولگرد خود پرهیز و ساده وجود ندارد و در حد ترمودینامیکی می‌توان نشان داد که برای $d \geq 4$ مقدار ν برابر با مقدار آن برای ولگشت ساده، $\nu = 1/2$ است. اما در $d=3$ مسئله حل دقیقی ندارد و تمام اطلاعات ما از شبیه سازی‌های کامپیوتری و یا روش های تقریبی می آید. به طور مثال تقریبی که به تقریب فلوری[۱۶] معروف است

$$\nu = \frac{3}{d+2} \tag{14}$$

مقدار $\nu = 0.6$ را به ازای $d=3$ می‌دهد که خیلی به مقدار بدست آمده از شبیه سازی ها $\nu = 0.58$ نزدیک است.

5.9 حذف حلقه ها

این بخش باید اضافه شود. در حال حاضر تمرین زیر فقط برای یاد اوری به شخص خود من است نه برای انجام توسط دانشجو.

تمرین: تعداد حلقه های که برای رسیدن به یک گشت N قدمی باید حذف کنید را بر حسب N بیابید.

5.10 ول گشت جهت دار[۱۷]

قطره بارانی را در نظر بگیرید که در حال سقوط است. در حین سقوط تحت تاثیر ضربه‌های تصادفی از مولکول‌های هوا و افت و خیزهای جریان هوا این قطره حرکات تصادفی عرضی دارد. این گونه جابجایی‌ها که در یک راستا حرکت جهت دار و بدون امکان بازگشت است و در جهت‌های دیگر تصادفی است. این گونه گشت‌ها بنا به تعریف امکان قطع خود را ندارد و خود پرهیز می‌باشند ولی اگر بیشتر دقت شود می‌توان آنرا به دو حرکت قاعده‌مند رو به جلو و یک حرکت ول گشت ساده در راستای عمود بر جهت محور سقوط تجزیه کرد.

اگر مکان یک ولگشت ساده را بر حسب زمان رسم کنیم نموداری که حاصل می‌شود با توجه به جهت دار بودن حرکت در زمان یک ولگشت جهت دار است. این گشت یک فراکتال خود آفین است. به این معنی که برای دیدن رفتار خود تشابهی در این فراکتال باید تابع مقیاسی دارای ضرایب مقیاس متفاوت در راستاهای مکان و زمان باشد.

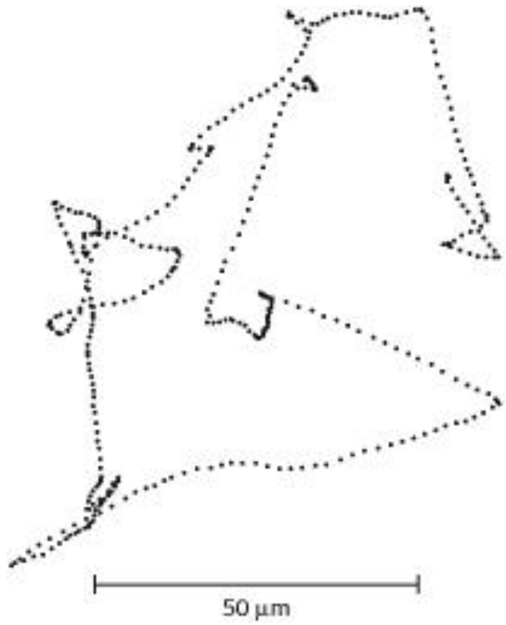
5.11 ول گشت محافظه کار[۱۸]

16 Flory
17 Directed Random Path
18 Persistent Random Walk

ول گشت ساده و پرهیز کار دو سوی طیف گسترده‌ای از گشت‌های با حافظه محدود هستند. نکته مهم این است که هر گونه گشتی با حافظه محدود در طول‌هایی قابل مقایسه با حافظه شاید رفتاری مشابه ولگشت خود پرهیز داشته باشد یا حتی رفتار تصادفی آن قابل مشاهده نباشد ولی در حد طول‌های بسیار بلند حتما در کلاس جهانشمولی ول گشت ساده خواهد بود. یک مثال ساده ول گشت با تمایل بر ادامه مسیر در قدم قبل است. این ولگشت را محافظه کار می‌نامیم. به این معنی که هر گاه قدمی در راستای خاصی برداشت احتمال ادامه مسیر در همین راستا بیش از دیگر مسیرهاست. هرچند این تمایل بیشتر باشد ولگرد مسیرهای مستقیم طولانی تری را طی خواهد کرد تا شانس تغییر مسیر بیابد. هرچه این تمایل کمتر باشد رفتار گشت تصادفی‌تر است. پس می‌توان برای گشت طولی به نام طول پایسته تعریف کرد که معیاری از متوسط تداوم مسیر توسط ولگرد است. در طول‌های بسیار بلند تر از طول پایسته ولگشت مشابه ولگشتی ساده با قدم‌هایی با طول پایسته است.

5.12. مدلهای پیوسته

تا کنون فرض کرده‌ایم که ول گشت محدود به نقاط یک شبکه است. این نکته هم می‌تواند به دلایل شباهت با بعضی از مسایل باشد و هم می‌تواند ناشی از تمایل ما به گسسته سازی باشد که در فصل ؟؟ قبل توضیح داده شد. ولی در واقعیت این امکان برای ولگشت وجود دارد که در محیطی پیوسته اتفاق بیافتد. این پیوستگی هم می‌تواند در راستای حرکت باشد یا در طول قدم‌ها و یا هردو. حتی فاصله زمانی قدم برداشتن ها هم می‌تواند پیوسته باشد و از یک تابع توزیع تبعیت کند. نکته جالب توجه این است که چنین تعمیمی رفتار مقیاسی ولگرد را عوض نمیکند و فقط کافی است در تمام روابط بالا در این فصل هرجا که از طول قدم یا زمان قدم استفاده شده مقدار متوسط این کمیت‌ها را قرار دهیم.



شکل 14 حرکت یک باکتری ای-کلای[19] در محیط آبی مثالی از یک گشت پیوسته است

5.13. مثالهایی از ولگشت

1- پخش

یکی از آشناترین مثال‌ها برای ول گشت، پدیده‌ی پخش است. در بالا تصویری از حرکت پخشی یک باکتری نشان داده شده است. این گونه حرکت‌ها بخوبی در کلاس ول گشت می‌نشینند. ولی مثال‌های جالب دیگری نیز برای ولگشت وجود دارد.

2- بازارسهام

رفتار قیمت‌ها در بازار سهام یک گشت تصادفی را تداعی می‌کند. در حقیقت رفتار سهام با ولگشتی که تا کنون با آن آشنا شدید یک تفاوت اساسی دارد. در این فرآیند طول قدم‌های با مقدار آنها متناسب است. احتمال آنکه قیمت کالایی به ارزش 100 تومان جهشی در قیمت به اندازه 10 تومان (بالا یا پایین) داشته باشد با احتمال تغییر قیمت کالای با ارزش 100 هزار تومان به اندازه ی 10 هزار تومان برابر است. این گونه ولگشت را ولگشت هندسی [۲۰] می‌نامند.

3- فیزیک پلیمرها

یکی از پرکابردترین و جالب ترین مثال‌ها برای ولگشت خود پرهیز ساختار هندسی پلیمرها است. یک پلیمر از زنجیره‌ای از اتم های مشابه که بطور تناوبی در کنار هم قرار گرفته‌اند تشکیل می‌شود. این زنجیره‌ها در محیط محلول و در دمای غیر صفر ساختارهای تصادفی به خود می‌گیرند. اگر یک ساختار را در یک لحظه نگاه کنید این ساختار به مشابه یک گشت در زمان است. لازم به توجه است که در اینجا این گشت در زمان انجام نشده بلکه در مکان وجود دارد. یعنی به جای اینکه مکان یک ولگرد در

[19] e-colie
[20] Geometrical Random Walk

زمان به یک گشت تعبیر شود، کل ساختار پلیمر مشابه این گشت است. به دلیل عدم امکان قرار گرفتن دو اتم به طور هم زمان در یک مکان این گشت را خود پرهیز می‌کند.
در حقیقت تقریبی که در بالا برای نمای ν در ولگشت خود پرهیز معرفی شد، اولین بار توسط فلوری برای بررسی خواص مقیاسی پلیمرها ارایه شده است. در این تقریب او عبارت‌هایی برای انرژی و آنتروپی یک پلیمر در محلول ارایه می‌کند و کمینه کردن انرژی آزاد رابطه بین طول ژیراسیون و طول پلیمر بدست می‌آورد.

بیشتر بدانیم:

در مورد ول گشت منابع بسیار وجود دارد. تقریبا هیچ کتاب آماری پیدا نمی‌کنید که در این باره صحبت نکرده باشد. برای آشنایی با بعضی کاربردهای آن در بیوفیزیک و یا فیزیک پلیمرها نیز می‌توانید به کتاب Random Walks in Biology نوشته ی Howard C. Berg یا کتاب Scaling concepts in polymer physics نوشته‌ی P.G. de Gennes مراجعه کنید. کتاب Biological Physics نوشته‌ی Philip Nelson به موضوع پخش و مثال‌های آن تمرکز خوبی دارد.