سوال اول)

در تمرین‌ها آمده است:

سوال دوم:(M,d) یک فضای متریک است. نشان دهید که اگر $A \subset M$ یک مجموعه فشرده باشد، آنگاه هر پوشش باز از A یک زیرپوشش متناهی از Aرا در خود دارد.

نظر من این است که تعریف فشرده بودن یک مجموعه در کتاب درسی دقیقا همین است که هر پوشش باز از آن مجموعه، یک زیرپوشش متناهی داشته باشد. پس این سوال بدیهی است؛ یعنی اگر فرض کنیم که A مجموعه‌ای فشرده است، بدیهی است که حکم این قضیه (تقلیل هر پوشش باز به زیرپوششی متناهی) برقرار است.

سوال دوم)

سوال ششم: گروه هموتوپی بطری کلاین را در نظر بگیرید. با بازتعریف مولدهای این گروه نشان دهید که می توان این گروه را به صورت زیر نیز نشان داد:

$$\pi_1(Klein) = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\alpha^2 = \beta^2}. \qquad (۱)$$

معنای این رابطه این است که این گروه توسط مولدهای α و β تولید می شود و بین این مولدها رابطه $\alpha^2 = \beta^2$ برقرار است. با استفاده از این نشان دهید که یک عنصر کلی این گروه را می توان به شکل زیر نوشت:

$$g = \alpha^{n_1}\beta^{\pm 1}\alpha^{n_2}\beta^{\pm 1}\alpha^{n_3}\beta^{\pm}\cdots a^{\nu_k}, \qquad n_i \in Z. \qquad (۲)$$

در رابطه (۲) این سوال هم به نظر می‌رسد اشکالی وجود دارد؛ اولا بایستی توان ها β صفرو یک باشند، همچنین در آخر عبارت هم باید بعد از α^{ν_k} باید دوباره ضریب $\beta^{0\ or\ 1}$ وجود داشته باشد. اگر فکر می‌کنید این اشکالها وارد نیست و احتمالا در روش حل مشکل داریم، بفرمایید.

سوال سوم)

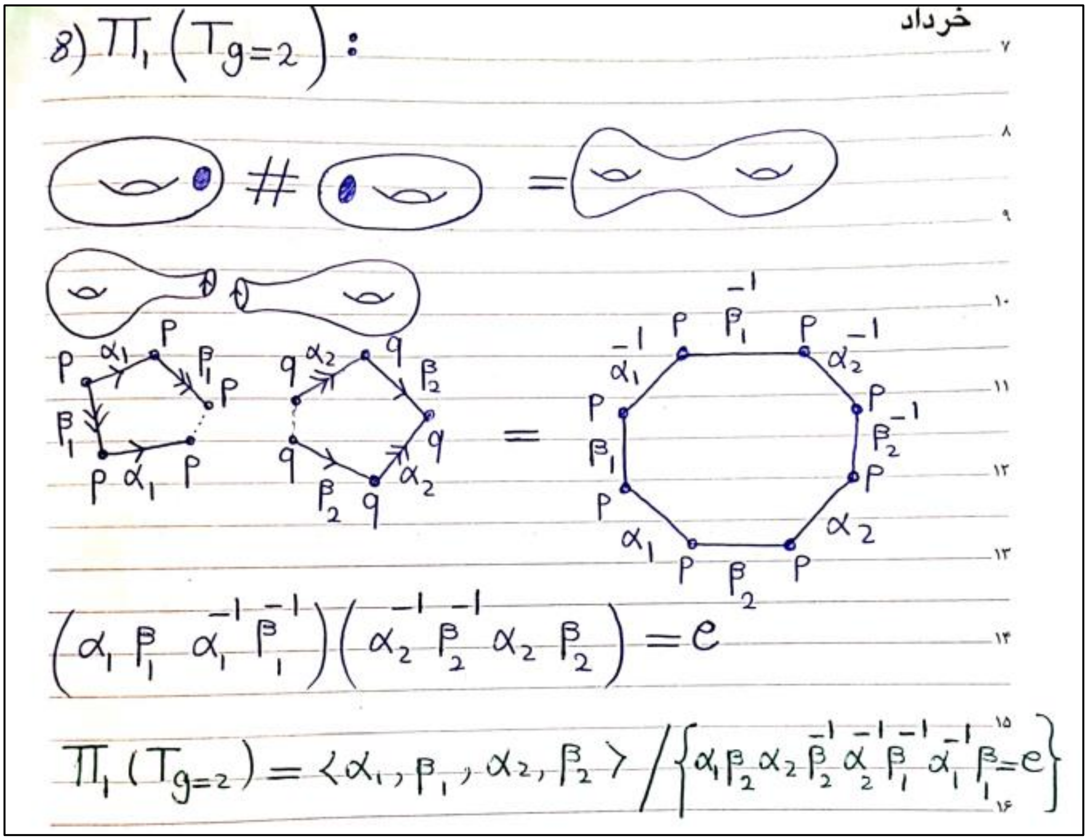
سوال اول: گروه هموتوپی اول فضاهای زیر را بدست آورید: بطری کلاین- نوار موبیوس- صفحه پروژکتیوRP^2 و S^3 .

هم چنین گروه هموتوپی فضاهای زیر را بدست آورید:

$$T_g \oplus MobiusStrip, \qquad T_g \oplus KleinBottle, \qquad KleinBottle \oplus S^2$$

که در آن علامت $\oplus$ را برای نشان دادن جمع متصل connected sum دو فضا بکار برده ایم.

در این سوال هم برای بدست آوردن گروهی هموتوپی اول سه فضایی که از جمع متصل بدست آمده اند، تنها می‌توانیم به روشی که شما خودتان برای g=2 حل کردید، عمل کنیم؛ یعنی دقیقا کاری که در شکل زیر انجام شده است:



اگرچه این روش خیلی ساختار گروه هموتوپی را مشخص نمی‌کند، اما با ابزارهایی که در درس یادگرفته اند قابل انجام هست. حتما می‌دانید روش کلی تر بدست آوردن گروه‌های هموتوپی چنین فضاهایی (که با جمع متصل ساخته شده‌اند) به کمک قضیه Van Kampen هست؛ البته برای این که بچه‌ها این قضیه را یادبگیرند نیاز به مقداری جبرهمولوژی هست. من این روش را بهشان یاد ندادم و نیازی هم ندیدم که یاد بگیرند.

فقط خواستم بدانم منظورتان از بدست آوردن گروه هموتوپی در سوال، انجام همین روند برای آن فضاها بود؟

سوال چهارم)

سوال چهارم : کلی ترین سطح دوبعدی جهت پذیر که دارای مرز باشد، یک کره است که دارای g دسته و q سوراخ است. منظور این است که کلی ترین سطح دوبعدی جهت پذیر یک چنبره با جینس g است که در q نقطه آن دایره هایی از چنبره بریده شده اند. گروه های همولوژی این سطح را بدست آورید. مشخصه اویلر آن را نیز محاسبه کنید.

بدست آوردن گروه‌همولوژی این سطح ریمانی با جینس g و q-puncture هم با روش استاندارد (یعنی مثلث بندی و معین کردن cycleها و boundaryها) کار بسیار دشواری است، محاسبات جبری آن نیاز به این دارد که یک ماتریس $gq \times gq$ را کاهش سطری بدهیم ... روش استانداردی برای این کار در توپولوژی جبری هست ... بازهم به کمک Mayer-Vietoris Sequencesها؛ که یک exact sequence برای گروه‌های همولوژی به دست می‌دهد؛ البته تمامی مفاهیم این قضیه برحسب cell-complexهاست نه chain-complexها ... خلاصه روش استاندارد با روشی که در کتاب معرفی شده فرق دارد.

روش کتاب طاقت فرساست ... خواستم بدانم راهی که شما برای حل این سوال در نظر دارید همان روش استاندارد و طاقت فرساست؟ (یعنی گروه chain ها و boundaryها را مشخص کنیم و گروه خارج قسمتی بسازیم؟)