

# آمار کوانتومی ذرات در دو بعد و ابعاد بالاتر: چرا فضای دو بعدی این قدر عجیب است؟

حسین محمدی \*

دانشگاه صنعتی شریف

پاییز سال ۱۴۰۱

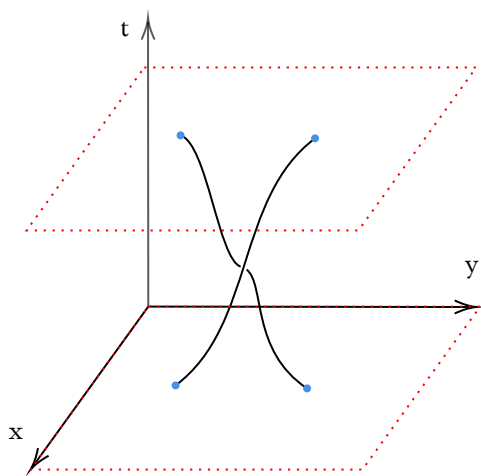
## فهرست مطالب

۳	۱ فضای پیکربندی ذرات یکسان
۳	۱.۱ تعاریف اولیه
۴	۲.۱ یافتن گروه هموتپی اول فضای پیکربندی
۶	۳.۱ بررسی یک حالت خاص، دو ذره در ابعاد مختلف فضایی
۷	۱.۳.۱ بررسی فضای پیکربندی دو ذره ای برای ابعاد فضایی بالاتر از ۲
۸	۲.۳.۱ بررسی فضای پیکربندی دو ذره ای برای دو بعد فضایی
۹	۴.۱ بحث در مورد تعمیم به فضای پیکربندی $N$ - ذره ای
۱۰	۲ انتگرال مسیر فضاهای غیر همبند ساده
۱۰	۱.۲ انتگرال مسیر ذره ی اسپین - ۱ و اولین شواهد قضیه هموتپی برای انتگرال مسیر
۱۱	۲.۲ قضیه هموتپی برای انتگرال مسیر
۱۴	۳ نتیجه گیری نهایی
۱۵	۱.۳ در سه بعد فضایی و بالاتر
۱۵	۲.۳ در دو بعد فضایی

## مقدمه

در این نوشته می خواهیم به این سوال پاسخ دهیم: «چرا در سه بعد فضایی، ذرات دو نوع رفتار آماری بیشتر ندارند (بوزون یا فرمیون)، اما در دو بعد ذرات می توانند رفتاری آماری بسیار متنوعی داشته باشند؟» (که این رفتارهای آماری خاص با یک فاز خالص توصیف می شود.)  
حتما استدلالی را که شکل ۱ نشانگر آن است، تا به حال شنیده اید. هدف ما در این نوشته این است که این استدلال را دقیق تر کنیم و صورت بندی ریاضی آن را بهتر بشناسیم.  
استدلالی که اکثرا از شکل ۱ شنیده ایم این است: اگر جای دو ذره را در فضای (دو بعدی) عوض کنیم، جهان خط ذرات تشکیل دو خم بسته می دهد که درهم پیچیده شده اند و به هیچ طریقی نمی توان این پیچیده شدن را باز کرد. به شکل ۲ نگاه کنید.

\*hossein.mohammadi.00427@gmail.com



شکل ۱: شکلی که برای استدلال در مورد آمار عجیب ذرات در دو بعد فضایی استفاده می شود.



شکل ۲: در دو بعدی فضایی، با ثابت نگاه داشتن مکان ذرات و تنها با اعمال پیوسته روی خمها، نمی توان تاب این خم را باز کرد؛ اما در سه بعد و بالاتر، می توان از بعد اضافه به شکلی هوشمندانه استفاده کرد تا این تاب را باز کرد.

این استدلال، صورت نهایی آن چیزی است که در دهه ی ۷۰ به طور دقیق بررسی شد و اگرچه برای شهود دادن خیلی مناسب است، سوالات خیلی زیادی را در ذهن متبادر می کند. سوالاتی از این قبیل:

- اگر اینطور است، چطور این گره ها در فضای سه بعدی از هم باز می شوند؟
- چطور این مسیرها می توانند باعث ایجاد فازهای مختلف در تابع موج کوانتومی شوند؟
- فرمالیسم دقیق تر ریاضی و فیزیکی که این شواهد از آن منتج می شوند، چیست؟

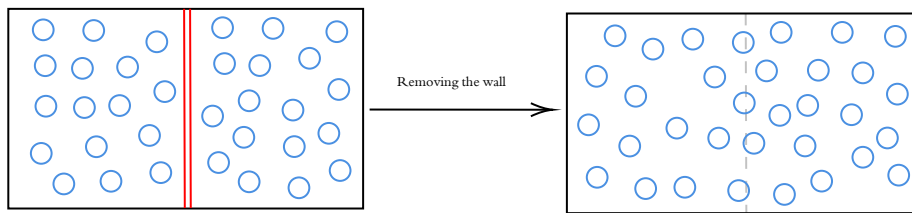
برای پیش بردن بحث، چند بخش کلی داریم: اول نگاهی به توپولوژی فضای پیکربندی ذرات یکسان می اندازیم و در مرحله ی دوم انتگرال مسیر را برای فضاهای غیرهمبند ساده بررسی می کنیم و با نمایش های گروه های جایگشت و گیسو<sup>۱</sup> آشنا می شویم. در مرحله ی آخر همه ی آنچه را که یاد گرفتیم سرهم بندی می کنیم تا بتوانیم سوالی را که در ابتدا آن را پرسیدیم، با دقت پاسخ دهیم.

<sup>۱</sup>Braid

## ۱ فضای پیکربندی ذرات یکسان

عدم تشخیص پذیری ذرات یکسان، از اصول مهم فیزیک کوانتومی (و کلاسیک) است، که بیان می دارد هر پیکربندی ذرات یکسان (در فضای مکان)، یک حالت «فیزیکی» است و باید در برچسب زدن ذرات به منظور تمییز آنها از یکدیگر دقت به خرج دهیم.

مسئله ی قدیمی تر که راه حل آن استفاده از مفهوم ذرات یکسان است، مسئله ی متناقض نمای گیس ۲ است (شکل ۳). بیان آن به این صورت است: «اگر دو طرف یک جداره گاز با مشخصات یکسان داشته باشیم و جداره را برداریم تا با هم مخلوط شوند، محاسبات مکانیک آماری نشان می دهد که باید آنتروپی افزایش یابد.» و حل آن اینطور است: «در محاسبه ی حجم فضای فاز اشتباه کرده اید، حجم فضای فاز ذرات یکسان را باید بر  $N!$  تقسیم کنید تا مسئله به درستی حل شود.»



شکل ۳: شکل بیانگر متناقض نمای گیس؛ فشار، دما و حجم دو طرف جداره (قبل از برداشتن جداره) یکسان است.

در این بخش ما قصد داریم که با فضای فاز ذرات یکسان و یک سری از مشخصه های این فضا آشنا شویم. (برای بحث کامل تر به [۱] رجوع کنید.)

### ۱.۱ تعاریف اولیه

سیستمی متشکل از  $N$  ذره در  $d$  بعد فضایی را در نظر بگیرید، مطابق مقدمه ای که داشتیم، فضای پیکربندی این ذرات به شکل زیر است:

$$\mathcal{X} = \left\{ \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\} \mid \vec{x}_i \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq N \right\} \quad (۱)$$

توجه کنید که هر عضو این مجموعه خودش، مجموعه ای از  $N$  نقطه در  $\mathbb{R}^d$  است و چون مجموعه های ترتیبی ندارند، پس هیچ ترتیبی روی ذرات اعمال نشده است؛ اگر در تعریف از چندتایی های مرتب استفاده می کردیم، یعنی  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ ، در این صورت ترتیبی روی ذرات اعمال شده بود و برای یک پیکربندی فیزیکی، چندین و چند نمایش می داشتیم.

حال می خواهیم حلقه های بسته ی این فضا را بشناسیم و آنها را بررسی کنیم. حلقه ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\alpha_{ij}(t) = \{\vec{x}_1^0, \dots, \vec{x}_i(t), \dots, \vec{x}_j(t), \dots, \vec{x}_N^0\} \quad (۲)$$

که در آن خم های  $\vec{x}_i(t)$  و  $\vec{x}_j(t)$  دارای شرایط زیرند:

$$\begin{cases} \vec{x}_i(0) = \vec{x}_i^0 \\ \vec{x}_i(1) = \vec{x}_j^0 \end{cases}$$

Gibbs paradox<sup>۲</sup>

$$\begin{cases} \vec{x}_j(0) = \vec{x}_j^0 \\ \vec{x}_j(1) = \vec{x}_i^0 \end{cases}$$

این خم ها بسته هستند، چرا که ترتیب قرارگیری نقاط در یک مجموعه اهمیت ندارد.

## ۲.۱ یافتن گروه هموتوپی اول فضای پیکربندی

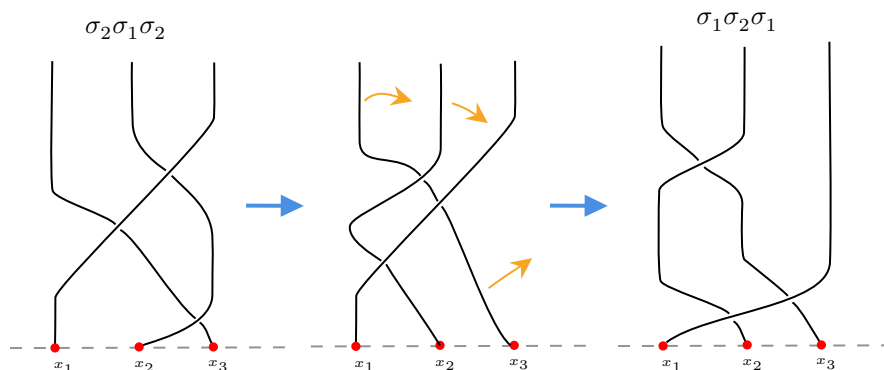
با روش حلقه های بسته مولد، گروه هموتوپی اول این فضا را پیدا می کنیم:  
حلقه ی  $\alpha_{ij}(t)$  جای ذرات  $i$  و  $j$  را عوض می کند. حال ضرب دو حلقه ی دلخواه  $\alpha(t)$  و  $\beta(t)$  در گروه هموتوپی اول،  $\pi_1(\mathcal{X}, x)$ ، را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\alpha \circ \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

معرفی می کنیم که  $\sigma_i = \alpha_{i,i+1}$  که در این رابطه  $1 \leq i \leq N-1$  برای  $d \geq 3$  این رابطه بین حلقه های مختلف برقرار است:

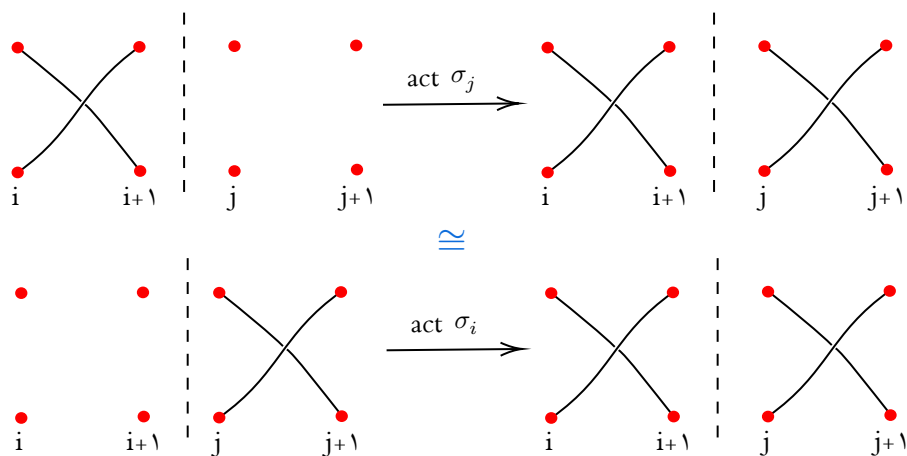
$$\begin{aligned} (i) \quad & \sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i = \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1} \\ (ii) \quad & \sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i \quad |i-j| \geq 2 \\ (iii) \quad & \sigma_i \circ \sigma_i = e \end{aligned} \quad (3)$$

رابطه (i) از معادله ی (۳) برای  $i=1$  بیان می دارد که: اگر جای ذره ی ۱ و ۲ را عوض کنیم و سپس جای ۲ و ۳ را عوض کنیم و در نهایت جای ۱ و ۲ را عوض کنیم، معادل با این است که جای ۲ و ۳، سپس ۱ و ۲ و در نهایت ۳ و ۲ را عوض کنیم. توجه کنید این دو حلقه ای که به این ترتیب حاصل می کنیم با یکدیگر هموتوپ هستند، می توانید درستی آن را در شکل ۴ و ۴ تحقیق کنید. البته این شکل در دو بعد فضایی ترسیم شده است، اما برای ابعاد بالاتر هم می توانیم خود را قانع کنیم که رابطه ی فوق برقرار است.



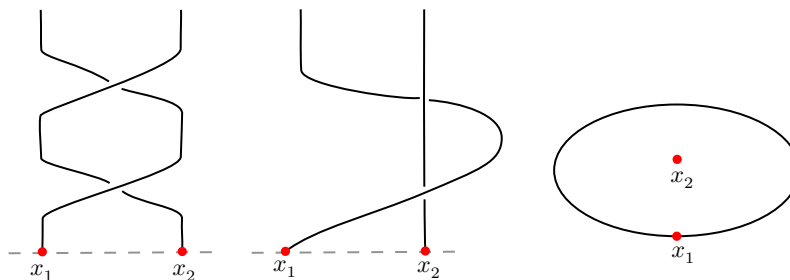
شکل ۴: حلقه ی  $x_1$  از روی تمامی طنابهای دیگر رد شده است؛ حلقه ی  $x_3$  از زیر تمامی طنابها رد شده است و حلقه ی  $x_2$  از روی  $x_3$  و زیر  $x_1$  رد شده است. می توان دید که با جابه جا کردن این رشته نخ ها و فقط با اعمال پیوسته، می توان این رشته نخ ها را در شکل به هم تبدیل کرد، پس این عضو از گروه هموتوپی، عضو جدید نیست.

رابطه (ii) از معادله ی (۳) بیان می دارد که: اگر جای  $i$  و  $i+1$  را عوض کنیم و سپس جای  $j$  و  $j+1$  را عوض کنیم، معادل با این است که اول جای دو ذره ی  $j$  و  $j+1$  را عوض کنیم و سپس جای  $i$  و  $i+1$  را عوض کنیم که در شکل ۵ هم ملاحظه می شود.



شکل ۵: خاصیت (ii) برای گروه هموتوپی اول فضای پیکربندی

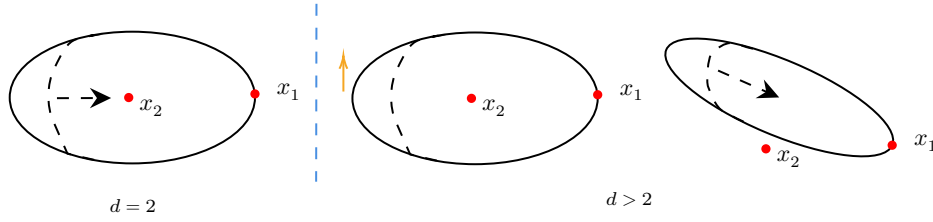
اما قسمت جالب ماجرا (iii) است، این قسمت می گوید که اگر دوبار جای ذره ی  $i$  ام را عوض کنیم، انگار که هیچ کاری نکرده ایم و حلقه ی حاصل از دوبار ترکیب این حلقه، حلقه ی بدیهی است. به شکل ۶ نگاه کنید.



شکل ۶: خاصیت (iii) برای گروه هموتوپی اول فضای پیکربندی

عمل دوبار عوض کردن جای دو ذره متوالی، مثل ثابت نگه داشتن یکی و چرخاندن دیگری دور آن است. (به شکل ۶ توجه کنید.) حال اگر دو بعد فضایی داشته باشیم، نمی توانیم حلقه ی  $x_1(t)$  را به یک نقطه تبدیل کنیم چرا که همواره در  $x_2$  مانعی است که نمی گذارد خم تبدیل به نقطه شود؛ این یعنی که برای دو بعد فضایی، رابطه ی (iii) برقرار نیست. اما اگر بعد فضایی بیشتر از دو باشد، می توانیم از بعد اضافه استفاده کنیم و خم را به یک نقطه تبدیل کنیم پس در این صورت رابطه ی (iii) برقرار خواهد بود. (به شکل ۷ توجه کنید.)

به این ترتیب گروه هموتوپی فضای پیکربندی در دو بعد فضایی متفاوت با بعدهای بالاتر از دو است. برای  $d \geq 3$ ، هر سه رابطه ی معادله ی (۳) برقرارند، و این سه رابطه، مولد گروه جایگشت  $S_N$



شکل ۷: خاصیت (iii) برای گروه هموتوپی اول فضای پیکربندی؛ در دو بعد فضایی، گره به نقطه ی تکین گیر می کند، اما در سه بعد و بالاتر می توانیم این نقطه را دور بزنیم.

هستند. اما در  $d = 2$  فقط دو رابطه ی اول برقرار است و گروهی که مولدش این روابط را ارضا کند، گروه گیسو  $B_N$  است. پس خلاصه ی کل این بحث این است که:

$$\begin{aligned}\pi_1^{d \geq 3}(\mathcal{X}, x) &\cong S_N \\ \pi_1^{d=2}(\mathcal{X}, x) &\cong B_N\end{aligned}\quad (۴)$$

### ۳.۱ بررسی یک حالت خاص، دو ذره در ابعاد مختلف فضایی

حال در این قسمت می خواهیم به عنوان یک حالت خاص، به طور کامل فضای پیکربندی یک سیستم دو ذره ای در ابعاد مختلف را بشناسیم.

به این منظور قرار می دهیم  $X = \mathbb{R}^d$  پس فضای پیکربندی مان باید به شکل  $X^N = X \times X \times \dots \times X$  باشد، اما توجه کنید که در ضرب دکارتی ترتیب چینش دو ذره مهم است پس باید به نحوی این ترتیب را از بین ببریم، رابطه ی هم ارزی زیر را روی اعضای  $X^N$  تعریف می کنیم:

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) \sim (\vec{x}_{P(1)}, \vec{x}_{P(2)}, \dots, \vec{x}_{P(N)})$$

که در آن  $P \in S_N$  یک عضو دلخواه از گروه جایگشت است. به این ترتیب فضای حالت های فیزیکی ما  $\frac{X^N}{\sim} = \frac{X^N}{S_N}$  است.

از لحاظ هندسی این فضا با identify کردن نقاطی از فضا که با یک عضو گروه جایگشت مرتبط می شوند، بدست می آید، این نوع تشکیل فضای خارج قسمتی (یعنی تقسیم کردن یک خمینه هموار بر یک گروه متناهی) اغلب باعث بوجود آمدن خمینه هایی می شود که دارای نقاط تکینه هستند و در اصطلاح به آن ها orbifold گفته می شود.

برای این که اثر گروه جایگشت را روی این فضا به خوبی بشناسیم، فضا را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

مختصات مرکز جرم با تعریف

$$\vec{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \in \mathbb{R}^d$$

را در نظر بگیرید، به راحتی می شود دید که تحت اثر گروه جایگشت، این مختصات ناورد است، پس فضای  $X^N$  به شکل  $X_{CM} \times X^{N-1}$  تجزیه می شود، چون اثر گروه جایگشت روی زیرفضای ناوردای  $X_{CM}$  آن را تغییری نمی دهد پس  $\frac{X^N}{S_N} \cong \mathbb{R}^d \times r(d, N)$  و در آن  $r(d, N)$  همان فضای  $\frac{\mathbb{R}^{Nd-d}}{S_N}$  است.

حالا پس از این حرفهای کلی، قرار می دهیم  $N = 2$  و سعی می کنیم ساختار فضای پیکربندی را به طور کامل بفهمیم.

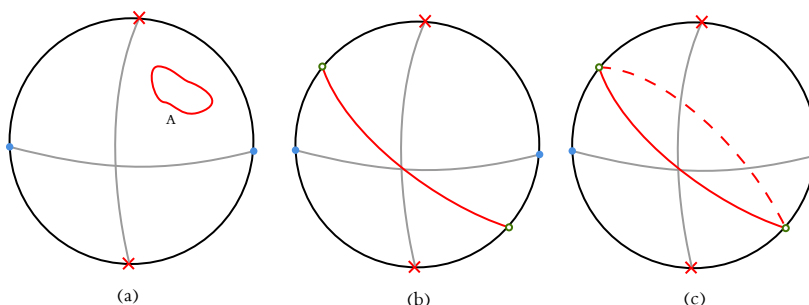
برای  $N = 2$  فضای  $r(d, 2)$  از identify کردن نقطه ی  $\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$  با  $-\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$  در فضای  $\mathbb{R}^d$  بدست می آید، که در آن نقطه ی  $\vec{x} = 0$  نقطه ی تکین است، چرا که این نقطه مربوط به حالتی است که این دو ذره دقیقاً روی یکدیگر قرار گرفته اند، پس باید این نقطه را از فضا حذف کنیم؛ پس به دست می آوریم:

$$r(d, 2) \cong \mathbb{R}^+ \times \frac{\mathbb{R} - \{0\}}{Z_2} \cong (0, \infty) \times \mathbb{R}P^{d-1}$$

$\mathbb{R}^+$  همان فاصله شعاعی تا مرکز مبدا است و برای نشان دادن فاصله ی دو ذره ی جدا شده از هم به کار می رود، و  $\mathbb{R}P^{d-1}$  فضای projective حقیقی است. در این جا تفاوت بین دو بعد فضایی با سایر ابعاد مشخص می شود.

### ۱.۳.۱ بررسی فضای پیکربندی دو ذره ای برای ابعاد فضایی بالاتر از ۲

در این حالت، قسمت  $\mathbb{R}P^{d-1}$  از فضای پیکربندی نسبی به این شکل تعریف می شود: یک کره ی  $d-1$  بعدی که در فضای  $d$  بعدی جانشانی شده است و نقاطی که دو سر یک قطر هستند با هم identify شده اند. در دسته بندی خمهای بسته ی این فضا به سه دسته خم (شکل ۸) بر می خوریم:



شکل ۸: سه دسته خم در فضای  $r(d \geq 3, N = 2)$ . نقاطی که با خط چین وصل شده اند، نشانگر نقاط یکسان شده هستند و خمی که با خط قرمز کشیده شده است، همان خم های بسته ای است که بررسی می کنیم.

۱. شکل (a) از تصویر ۸ را ملاحظه کنید، این خم بسته، تعویض جای ذرات را نشان نمی دهد، فقط یک ذره از جایش برداشته شده و روی یک مسیر بسته دور زده شده و سپس سر جایش برگشته است، بدون این که دور هیچ ذره ی دیگری بچرخد. این خم به سادگی قابل کوچک شدن به یک نقطه است، پس این خم در دسته حلقه های بدیهی گروه هموتوپی است.

۲. شکل (b) از تصویر ۸ نشانگر یک خم بسته است (چون نقاط روبرویی این فضا identify شده اند، پس این خم در حقیقت بسته است.) و همچنین نشانگر تعویض جای دو ذره در فضا است. اگر دو سر این خم را ثابت نگه داریم، نمی توانیم این خم را به یک نقطه ی کوچک تبدیل کنیم، زیرا به هیچ شکلی نمی شود طول خم را از محیط دایره عظیمه کوچکتر کرد، در غیر این صورت خم از فضا خارج می شود. پس این خم، عضو غیربدیهی گروه هموتوپی است.

۳. شکل (c) از تصویر ۸ نشانگر یک خم بسته است و دوبار تعویض جای دو ذره را نشان می دهد. این خم قابل کوچک سازی به یک نقطه است، کافی است یکی از پاره خط ها را به سمت دیگر کره بیاوریم تا در روی یکدیگر بروند و چون جهت دو پاره خط مخالف یکدیگر است، همدیگر را خنثی می کنند و حلقه ی بسته ی بدیهی باقی می ماند.

پس این یعنی که  $\pi_1^{d \geq 3}(\mathbb{R}P^{d-1}, x) \cong Z_2 \cong S_2$ .  
حال برای این که گروه هموتوپی کل فضای پیکربندی را به دست آوریم، به یک قضیه نیاز داریم.

**قضیه :** اگر  $X, Y$  دو فضای همبند باشند، در این صورت

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

و چون گروه های هموتوپی  $\mathbb{R}^d$  و  $\mathbb{R}^+$  همگی بدیهی هستند پس نتیجه می گیریم:

$$\pi_1\left(\frac{X^2}{S_2}, x\right) \cong Z_2 \cong S_2$$

که با رابطه ی (۴) همخوانی دارد.

### ۲.۳.۱ بررسی فضای پیکربندی دو ذره ای برای دو بعد فضایی

در این حالت فضای نسبی ما حاصل ضرب  $\mathbb{R}^+$  با  $\mathbb{R}P^1$  است و این فضا به شکل یک صفحه است که مرکز آن حذف شده و نقاطی که نسبت به مبدا قرینه هستند، identify شده اند. این فضا را می توانیم با برش نسبت به یک خط و قرار دادن دو نیم دایره ی حاصل روی یکدیگر و سپس identify کردن قطر این نیم دایره بسازیم که شکل حاصل یک مخروط است. زاویه ی راس این مخروط ۳۰ درجه است و در شکل ۹ این فضا آورده شده است. حال به بررسی خمهای بسته ای که در این فضا هست می پردازیم. (شکل ۱۰)

۱. در شکل (a) از تصویر ۱۰ خم A را می بینیم که این خم نشانگر تغییر جای ذرات نیست. این خم به سادگی قابل کوچک شدن به نقطه است و همان خم بدیهی گروه اول هموتوپی است.

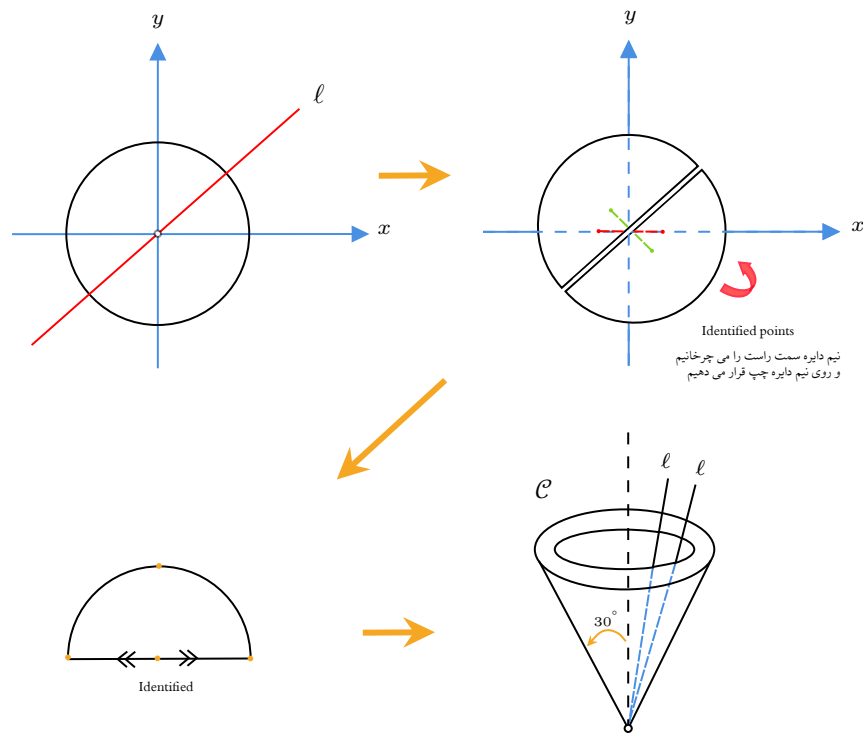
۲. در شکل (b) از تصویر ۱۰ خم B را داریم که نشانگر تعویض جای دو ذره است؛ این خم قابل کوچک شدن به نقطه نیست، چرا که اصلاً طول آن را نمی توان از آن چیزی که هست کم تر کرد بدون آن که از فضا خارج شود. پس این خم یک عضو نابدیهی گروه هموتوپی اول است.

۳. اما شگفتی واقعی اینجا رخ می دهد؛ در شکل (c) از تصویر ۱۰ خم C را می بینیم که نشانگر دوبار تعویض متوالی جای دو ذره است. این خم قابل کوچک شدن به نقطه نیست، چرا که اگر خم را به انتهای مخروط شکل ۹ ببریم، چون نقطه ی  $(0, 0)$  از فضا حذف شده است و به هیچ شکلی نمی توانیم این خم را به یک نقطه تبدیل کنیم. حال اگر خم C به جای یکبار،  $n, 2, 3, 4, \dots$  بار هم چرخیده باشد، باز هم این خم قابل کوچک شدن به نقطه نیست.

به سادگی هم می توانیم ببینیم که خم هایی که  $n$  دور زده اند؛ هموتوپ هستند.

بازهم تاکید می کنیم که تفاوت اصلی دو بعد با بالاتر این است که نقطه ی مرکزی آن حذف شده است و همین باعث می شود که خم های C با عددهای چرخش متفاوت، هموتوپ نشوند.





شکل ۹: شیوه ی ساختن فضای  $\mathbb{R}P^1$  با بریدن و یکسان کردن نقاط

پس نتیجه می گیریم که خمهای متفاوت این فضا، با یک عدد صحیح دسته بندی می شوند. (طبق قرارداد اعداد منفی نشانگر خم هایی هستند که به شکل ساعتگرد چرخیده اند.)

$$\pi_1^{d=3}(\mathbb{R}P^1, x) \cong Z \cong B_2$$

و مطابق با قضیه ای که در جعبه ذکر شد:

$$\pi_1\left(\frac{X^2}{S_2}, x\right) \cong Z \cong B_2 \quad (5)$$

که با رابطه ی (۴) در توافق کامل است.

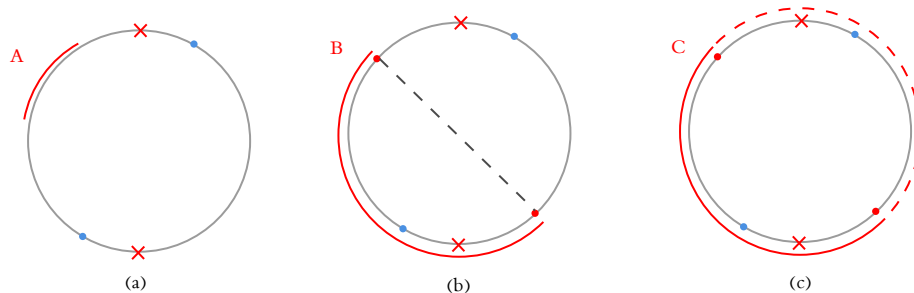
#### ۴.۱ بحث در مورد تعمیم به فضای پیکربندی $N$ - ذره ای

در حالت  $N$  - ذره ای، فضای پیکربندی به شکل زیر است:

$$\frac{X^N}{S_N} = \frac{(\mathbb{R}^d)^N - \Delta}{S_N}$$

که

$$\Delta = \{(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) | \vec{r}_I = \vec{r}_J \text{ for some } I \neq J\}$$



شکل ۱۰: سه دسته خم در فضای  $r(d=2, N=2)$ . نقاطی که روی روی هم هستند، نشانگر نقاط یکسان شده هستند و خمی که با خط قرمز کشیده شده است، همان خم های بسته ای است که بررسی می کنیم.

پیدا کردن گروه اول هموتوپیی این فضا، یک مسئله ی کلاسیک در توپولوژی جبری است. ([۲] و [۳]) جالب است بدانیم که ریاضیدان ها همان موقعی به حل این مسئله علاقه مند بودند که فیزیکدان ها داشتند فرمالیسم بالا را بررسی می کردند. نتیجه نهایی ای که از ریاضیدان ها به دست آوردند، این بود که:

$$\pi_1\left(\frac{X^N}{S_N}\right) = \begin{cases} B_N & d=2 \\ S_N & d \geq 3 \end{cases}$$

که  $B_N$  گروه گیسو برای  $N$  - شی است و  $S_N$  گروه جای گشت برای  $N$  - شی است.

## ۲ انتگرال مسیر فضاهای غیرهمبند ساده

اما مسئله ی انتگرال مسیر در فضاهای غیرهمبند ساده. مسئله ی انتگرال مسیر در کتابهای درسی روی فضاهای اقلیدسی و حداکثر مینکوفسکی بررسی می شود که این فضاها گروه هموتوپیی اول شان بدیهی است. حال می خواهیم بررسی کنیم که در مورد فضاهایی که گروه اول هموتوپیی شان بدیهی نیست؛ انتگرال مسیر چطور اصلاح می شود؟

### ۱.۲ انتگرال مسیر ذره ی اسپین - ۱ و اولین شواهد قضیه هموتوپیی برای انتگرال مسیر

اولین کسی که به این مسئله پرداخت، آقای Schulman بود [۴]. ایشان فضای پیکربندی یک ذره ی اسپین یک را یکبار  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$  در نظر گرفتند و با بدست آوردن ویژه توابع این مسئله، انتشارگر را بدست آوردند و سپس باردیگر فضای پیکربندی را  $\mathbb{R}^3 \times SU(2)$  در نظر گرفتند و با یافتن ویژه توابع، انتشارگر را بدست آوردند؛ نتیجه حل این مسئله جالب توجه بود.

$$2K_{SU(2)}(\text{integer } j) = K_{SO(3)}^{II} - K_{SO(3)}^I$$

$$2K_{SU(2)}(\text{half-integer } j) = K_{SO(3)}^{II} + K_{SO(3)}^I$$

توجه کنید که  $SU(2)$  گروه هموتوپیی اش  $Z_2$  است و دو دسته مسیر هم ارز (هموتوپ) در آن وجود دارد.

منظور از  $K_{SO(3)}^{II}$  انتگرال مسیر روی مسیرهایی است که با خم بدیهی هموتوپ هستند و منظور از  $K_{SO(3)}^I$  انتگرال مسیر روی مسیرهایی است که عضو غیربدیهی گروه هموتوپ هستند. به طور خلاصه، نتیجه بالا یعنی این که انتگرال مسیر برای بوزون ها و فرمیون ها (یعنی نمایش های با  $J$ -صحیح و  $J$ -نیمه صحیح گروه  $SU(2)$ ) با انتگرال گیری روی تمامی مسیره با دست می آید؛ با این قید که مسیرهایی که هموتوپ متفاوتی دارند، در حاصل نهایی علامت متفاوتی خواهند داشت. برای کسب اطلاع بیشتر از این محاسبات می توانید به فصل هشتم [۵] رجوع کنید.

## ۲.۲ قضیه هموتوپ برای انتگرال مسیر

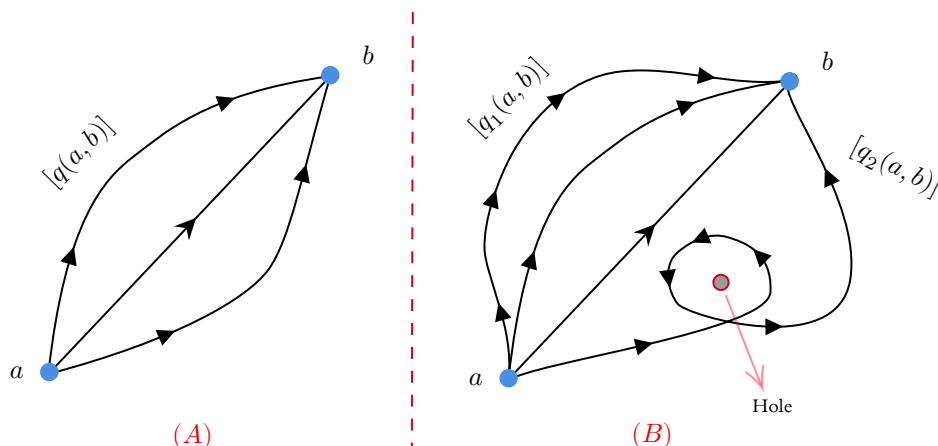
سپس Laidlaw و DeWitt این مسئله را برای فضاهای کلی تری بررسی کردند و یک نتیجه ی جالب توجه به دست آوردند که آن را اینجا بیان و اثبات می کنیم [۶].

**قضیه ی هموتوپ برای انتگرال مسیر روی فضاهای غیر همبند ساده [۶]:** قرار دهید که  $X$  فضای پیکربندی یک سیستم فیزیکی باشد. در این صورت دامنه ی احتمال، یک ترکیب خطی (با حداکثر یک فاز) از دامنه های احتمال جزئی  $K^\alpha$  است که این دامنه های احتمال جزئی از انتگرال گیری روی مسیرهایی که در یک کلاس هموتوپ  $\pi_1(X, x)$  هستند به دست می آید.

$$K = \sum_{\alpha \in \pi_1(X, x)} \chi(\alpha) K^\alpha \quad (۶)$$

که در آن  $\chi(\alpha)$  نمایش یک بعدی یکانی از گروه هموتوپ اول فضای  $X$  است.

به شکل ۱۱ توجه کنید تا متوجه منظور از کلاس های هموتوپ متفاوت بشوید. در تصویر (A) همه ی مسیر ها از  $a$  به  $b$  هموتوپ هستند، چرا که با یک تبدیل پیوسته، این مسیر ها به هم تبدیل می شوند، اما در شکل (B) اینطور نیست و مسیر  $q_1(a, b)$  را با هیچ تبدیلی نمی توان به مسیر  $q_2(a, b)$  تبدیل کرد، به همین شکل می توان به تعداد مختلفی دور نقطه ای که از وسط صفحه حذف شده، چرخید و خمهای جدیدی بدست آورد که قابل تبدیل به یکدیگر نیستند.



شکل ۱۱: هموتوپ های متفاوت مسیرهایی که از  $a$  آغاز و به  $b$  ختم می شوند در دو فضای مختلف.

در این جا یک اثبات که مبتنی بر خواص انتگرال مسیر و گروه های هموتوپي است، ارائه می کنیم. **برهان:** توجه کنید که چون انتگرال مسیر برای یک دسته مشخص از خم ها تعریف شده (خمهای هموتوپ) ما در اینجا فرض می کنیم که انتشارگر کلی از جمع روی انتشارگرهای جزئی با یک ضریب به دست می آید، یعنی فرم همان معادله ی (۶) را فرض می گیریم و ثابت می کنیم که  $\chi(\alpha)$  یک نمایش یک بعدی یکانی از گروه اول هموتوپي هستند<sup>۳</sup>.

دو نقطه ی دلخواه  $a$  و  $b$  را در فضا مفروض بگیرید و خم  $q(a, b)$  را بین این دو نقطه مد نظر بگیرید. حال یک سری نمادگذاری تعریف می کنیم:

- منظور از  $[q(a, b)]$  تمام مسیر هایی هستند که با مسیر  $q(a, b)$  هم ارز هستند؛ که منظور از هم ارزی همان هموتوپ بودن است.

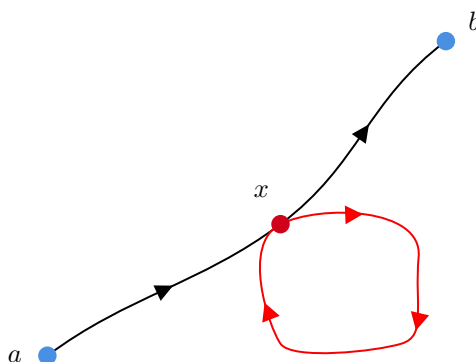
- نماد  $\pi(X, a, b)$  برای نشان دادن تمامی کلاس های هم ارزی مسیرهای بین  $a$  و  $b$  استفاده می شود.

- همچنین نماد  $\pi_1(X, x)$  برای نشان دادن تمامی کلاسهای هموتوپي حلقه های بسته ای را از نقطه ی  $x$  شروع می شوند و به آن ختم می شوند، به کار می رود.

تابع  $f : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi(X, a, b)$  را تعریف می کنیم:

$$f_{ab}(\alpha) = [C^{-1}(a)]\alpha[C(b)]$$

که در آن  $C(a)$  یک خم دلخواه است که از  $x$  به  $a$  وصل می شود. (شکل ۱۲) حال اگر  $a, b, c \in X$

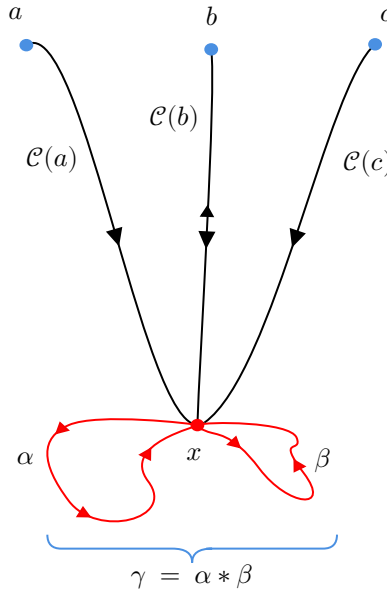


شکل ۱۲: یک خم دلخواه که از نقطه ی  $a$  به  $b$  وصل شده است و در نقطه ی  $x \in X$  یک حلقه ی بسته دارد.

باشند، می توانیم هر خم از  $a$  به  $c$  را به خمی بین  $a$  به  $b$  و خمی از  $b$  به  $c$  بشکافیم که در آن  $\gamma = \alpha * \beta$  (شکل ۱۳).

$$f_{ac}(\gamma) = [C^{-1}(a)]\gamma[C(a)][C^{-1}(a)]\alpha[C(b)][C^{-1}(b)]\beta[C(c)]$$

<sup>۳</sup> البته همچنان این سوال وارد است که فرم کلی این انتشارگر را از کجا می شود حدس زد؟ پاسخی که می توان داد این است که آقایان DeWitt و Laidlaw با نگاهی به کارهای پیشین آقای Schulman این حدس را زدند: همان طور که در بالا ذکر شده بود، آقای Schulman بدست آورد که انتشارگر یک چرخنده با درجات آزادی داخلی را از دو روش مختلف محاسبه کرده بود و دیده بود که انتشارگرهای با یک هموتوپي خاص به شیوه ی خاصی با هم جمع می شوند (یعنی دقیقاً با فازهای واحد). نتیجه ی کار ایشان راه را برای دیگران هموار کرد تا این حدس را بزنند.



شکل ۱۳: تجزیه ی یک خم دلخواه: مسیری که از  $a$  به  $x$  می رود و در حلقه ی  $\alpha$  می چرخد و سپس حلقه ی  $\beta$  را دور می زند و در نهایت به  $c$  می رسد. این مسیر معادل با خمی است که این مسیر را می پیماید:  $a \rightarrow x \xrightarrow{\alpha} x \rightarrow b \rightarrow x \xrightarrow{\beta} c$

حال از قانون شکستن در انتگرال مسیر استفاده می کنیم:

$$K(c, t_c; a, t_a) = \int dx_b K(c, t_c; b, t_b) K(b, t_b; a, t_a)$$

اگر  $t_a < t_b < t_c$ . حال اگر از تعاریف بالا قرار دهیم (توجه کنید که فقط مجازیم روی مسیرهای یک کلاس هموتوپی انتگرال مسیر بگیریم).

$$\sum_{\gamma \in \pi_1(X, x)} \chi(\gamma) K^\gamma(c, t_c; a, t_a) = \sum_{\alpha, \beta \in \pi_1(X, x)} \chi(\alpha) \chi(\beta) \int dx_b K^\beta(c, t_c; b, t_b) K^\alpha(b, t_b; a, t_a)$$

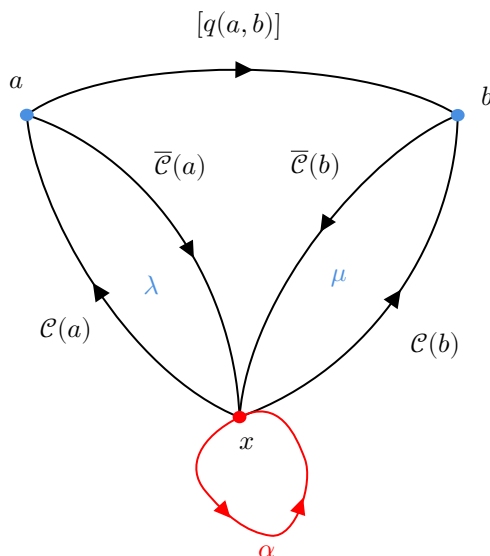
و استفاده از قانون شکستن انتگرال مسیر بی درنگ نتیجه می دهد:

$$\chi(\gamma) = \chi(\alpha) \chi(\beta)$$

تنها چیزی که باقی می ماند این است که نشان دهیم این نمایش های واقعا یکانی هستند که در حالت نمایش های یک بعدی، باید نشان دهیم که این نمایش های یک بعدی در حقیقت فازهای خالص هستند. حال  $\bar{C}(a)$  را خمی دلخواه در نظر بگیرید که از  $x$  به  $a$  وصل می شود و با  $C(a)$  متفاوت است، داریم:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{ab}(\alpha) &= [\bar{C}^{-1}(a)] \alpha [\bar{C}(b)] = [C^{-1}(a)] [C(a)] [\bar{C}^{-1}(a)] \alpha [\bar{C}(b)] [C^{-1}(b)] [C(b)] \\ &= [C^{-1}(a)] \lambda \alpha \mu [C(b)] = f_{ab}(\lambda \alpha \mu) \end{aligned}$$

که در آن  $\lambda = [C(a)\bar{C}^{-1}(a)]$  حلقه ای در نقطه  $a$  است و  $\mu = [\bar{C}(b)C^{-1}(b)]$  حلقه ای در نقطه  $b$  است. تمام آن چه که رابطه ی بالا می گوید را می توانید در شکل ۱۴ ملاحظه کنید.



شکل ۱۴: شکلی که بیانگر تغییر نماینده ی یک دسته هم ارزی است؛  $\bar{f}_{ab}(\alpha) = f_{ab}(\lambda\alpha\mu)$

نکته ای که می فهمیم این است که تغییر دادن نماینده های یک کلاس هم ارزی نباید در محاسبه ی انتگرال مسیر موثر باشد؛ اگر این را به زبان انتگرال مسیر ترجمه کنیم بایستی اندازه ی انتشارگر تحت این تبدیل تغییری نکند تا احتمال های گذار ثابت بمانند، پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |K(b, t_b; a, t_a)| &= \left| \sum_{\alpha \in \pi_1(X, x)} \chi(\alpha) K^\alpha(b, t_b; a, t_a) \right| \\ &= \left| \sum_{\lambda\alpha\mu \in \pi_1(X, x)} \chi(\lambda\alpha\mu) K^\alpha(b, t_b; a, t_a) \right| \\ &= \left| \sum_{\lambda\alpha\mu \in \pi_1(X, x)} \chi(\alpha) \chi(\lambda\mu) K^\alpha(b, t_b; a, t_a) \right| \end{aligned}$$

که نتیجه می دهد که  $|\chi(\alpha)| = 1$ . پس  $\chi(\alpha)$  ها یک نمایش یک بعدی یکانی از گروه هموتوبی اول فضای پیکربندی را می سازند و در این جا اثبات پایان می پذیرد.  $\square$

### ۳ نتیجه گیری نهایی

اما حالا که با نقش گروه هموتوبی مسیرهای فضای پیکربندی در انتگرال مسیر آشنا شدیم؛ می خواهیم به بررسی آمار عجیب در دو بعد بپردازیم.

### ۱.۳ در سه بعد فضایی و بالاتر

بایستی نمایش های یک بعدی و یکانی گروه هموتوپای فضای پیکربندی را بشناسیم، یعنی نمایش های  $S_N$  را پیدا کنیم. اما این یک نتیجه ی ریاضی مشهور است (حتی به عنوان تمرین ساده هم می تواند تلقی شود) که نمایش های یک بعدی گروه جایگشت، دو تا هستند و به فرم زیرند:

$$\chi^B(\sigma) = +1 \quad \text{for all } \sigma \in S_N$$

که نمایش بدیهی است و

$$\chi^F(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{for even permutation } \sigma \in S_N \\ -1 & \text{for odd permutations } \sigma \in S_N \end{cases}$$

که نمایشی غیربدیهی است.

حال انتشارگرهای بوزون و فرمیون به شکل زیر تعریف می شوند:

$$K_{\text{Boson}} = \sum_{\alpha \in \pi_1(X, x_0)} \chi^B(\alpha) K^\alpha$$

$$K_{\text{Fermion}} = \sum_{\alpha \in \pi_1(X, x_0)} \chi^F(\alpha) K^\alpha$$

توجه کنید که فرمالیسم بالا این امکان را پیش بینی می کند که در طبیعت چنین آمارهایی می توانند وجود داشته باشند و ما هم با آزمایش های فراوانی وجود ذراتی با چنین آماری را دیده ایم.

### ۲.۳ در دو بعد فضایی

بایستی نمایش های یک بعدی و یکانی گروه  $B_N$  را پیدا کنیم؛ مسئله ی کمی سختی است.

به عنوان یک حالت خیلی ساده به رابطه ی (۵) دقت کنید؛ گروه هموتوپای فضای پیکربندی دو ذره در دو بعد همان  $\mathbb{Z}$  است و این گروه نمایش های یکانی ای به شکل  $\rho(n \in \mathbb{Z}) = e^{i\theta n}$  دارد که در آن  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

در حالت های خیلی کلی تر، یعنی برای  $B_N$  هم نمایش های یکانی به همین شکل هستند، روش اثبات کمی دشوار است ولی نمایش های  $N -$  بعدی گروه  $B_N$  شناخته شده هستند و با ردگیری روی این نمایش ها، نمایش یک بعدی ای بدست می آید که معادل با نمایش ذکر شده، می شود.

توجه کنید که باز هم فرمالیسم بالا امکان وجود Fractional statistics در بعد دو را مطرح می کند؛ این که آیا چنین ذراتی وجود دارند یا نه باید در آزمایش بررسی شود.

## مراجع

- [1] Leinaas, J. M. and Myrheim, J. "On the theory of identical particles" *Nuovo Cim. B* 37 p1-23 1977.
- [2] R. Fox and L. Neuwirth *Math. Scand.* 10 (1962) 119.
- [3] E. Fadell and L. Neuwirth *Math. Scand.* 10 (1962) 111 E. Fadell and J. Van Buskirk *Duke Math. J.* 29 (1962)
- [4] L. S. Schulman 'A path integral for spin,' *Phys. Rev.* 176, 1558-1569 (1968).
- [5] P. Cartier and C. M. DeWitt *Functional integration: action and symmetries* Cambridge University Press, (2006).
- [6] M. G. G. Laidlaw and C. M. DeWitt 'Feynman functional integrals for systems of indistinguishable particles, *Phys. Rev. D* 3 , 1375-1378 (1971).