

تمرین سری دوم کیهان شناسی – پاییز ۱۴۰۰

مهلت تحویل : شنبه، ۸ آبان

۱ سوال اول

در این سوال قصد داریم با استفاده از مکانیک نیوتنی و فرض های همگنی و همسانگردی کیهان ، معادلات فریدمان را استخراج کنیم . ابتدا عالم را یک کره کاملاً متقارن با شعاع متغیر $r(t)$ با چگالی جرمی یکنواخت در نظر بگیرید. طبق فرض های اولیه این کره به شکل همگن و همسانگرد در حال بزرگ شدن است. حال یک جرم m را بر سطح این کره با سرعت $\dot{r}(t)$ تصور کنید . ($c = 1$)

(الف)

رابطه ی سرعت $\dot{r}(t)$ و $r(t)$ و $H(t)$ از قانون هابل میدانیم . حال انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی جنبشی جرم m را بر حسب کمیات های مسئله بنویسید.

(ب)

از قانون هابل استفاده کنید و رابطه میان $r(t)$ و فاکتور مقیاس را بدست آورید. دقت کنید رابطه ی نهایی باید شامل $a(t_0)$ و $r(t_0)$ باشد.

(ج)

در نهایت از پایستگی انرژی برای ذره به جرم m استفاده کنید و از رابطه ی $E = k + U$ و نتایجی که از بخش های قبل بدست آوردید ، معادله زیر را بدست آورید.

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) \quad k \equiv -\frac{2Ea^2(t_0)}{mr^2(t_0)}$$

به معادله ی بالا ، معادله فریدمان میگویند که یکی از مهمترین معادلات کیهانشناسی به حساب می آید.

(د)

جهان را یک سیستم ترمودینامیکی به چگالی $\rho(t)$ و شعاع $a(t)$ تصور کنید و برای آن معادله ی قانون اول ترمودینامیک را بنویسید . ($dE = TdS - PdV$) یکی از فرض های مهمی که در کیهانشناسی میکنیم آن است جهان منبسط شونده آدیاباتیک است و در نتیجه $dS = 0$. حال از رابطه ی $E = M$ استفاده کنید که در آن M جرم یک کره به چگالی $\rho(t)$ و شعاع $a(t)$ است ؛ و به معادله زیر برسید :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0$$

به معادله ی بالا ، معادله ی شاره میگویند.

هم اکنون از معادله اول فریدمان و معادله شاره استفاده کنید و به رابطه زیر برسید :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

۲ سوال دوم

معادله ی اول فریدمان را برای یک جهان بسته ی ماده غالب حل کنید. به این منظور پارامتر η را طوری تعریف کنید که،

$$d\eta = \frac{dt}{a}.$$

سپس فاکتور مقیاس را بر حسب η به دست آورید.

نمودار $a(\eta)$ بر حسب η را رسم کنید.

نشان دهید که اگر $a \rightarrow 0$ آنگاه داریم: $\dot{a} \rightarrow \infty$ ، $H \rightarrow \infty$ و $\rho \rightarrow \infty$.

۳ سوال سوم

۳ یکی از پارامترهای بدون بعد مناسب که برای توصیف انبساط به کار می رود، "پارامتر کندشوندگی"^۱ است:

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2},$$

که علامت q تعیین می کند که انبساط کند می شود یا سرعت می گیرد. ابتدا بحث کنید که علامت q چگونه می تواند به ما کمک کند. سپس یک رابطه ی کلی برای q بر حسب Ω به دست آورید و نشان دهید برای جهان تخت ماده غالب $q = \frac{1}{2}$ است.

۴ سوال چهارم

فرض کنید که شما یک موجود دو بعدی هستید که بر روی یک کره به شعاع R زندگی می کنید.

الف) فرض کنید ابزاری برای اندازه گیری طول در اختیار دارید که خطایی به اندازه ی $\pm \epsilon$ دارد. کمینه شعاع دایره ای که باید در اطرف خود رسم کنید تا با اندازه گیری محیط آن دریابید که در حال زندگی بر روی کره هستید، چقدر است؟

ب) فرض کنید که یک خط کش به طول dl در فاصله ی r از شما روی کره قرار دارد. به طوری که $dl \ll R$. شما این خط کش را تحت چه زاویه ای $d\theta$ ، خواهید دید؟ رفتار $d\theta$ را در حد $r \rightarrow \pi R$ بررسی کنید.

ج) فرض کنید که می خواهید یک سیگنال نوری به سمت این خط کش بفرستید. ابتدا معادله ژئودزیک را روی کره به دست بیاورید و نشان دهید که این سیگنال یک دایره ی عظیمه می پیماید. (اصل فرما به ما می گوید که نور همواره کوتاه ترین مسیر را طی می کند.)

^۱ deceleration parameter