تمرین امتیازی ۲ - درس نظریه گروه‌ها - دکتر رضاخانی

مهلت تحویل: تا دوشنبه ۲۱ خرداد سال ۱۴۰۳ - ساعت ۲۳:۵۹

از طریق سامانه درس‌افزار شریف

حسین محمدی
hossein.mohammadi.00427@gmail.com

زهرا کبیری
kabiri.zahra98@gmail.com

برای جبران نمرات از دست رفته، به حل سوالات امتیازی بپردازید. با این شرایط که:

۱. برای کسب نمره‌ی کامل از سوالات زیر ۹ سوال انتخاب و حل کنید.

۲. در مورد سوالات چندبخشی، حل باید به ترتیب انجام بگیرد و نمی‌توان بدون حل یک قسمت، از نتیجه‌اش در قسمت‌های بعدی استفاده کرد.

تمرین ″۱۴ [- امتیاز] : لمِ Burnside

در این سوال، قصد داریم یک نتیجه‌ی مهم از اثر گروه روی مجموعه‌ها را بررسی کنیم.

گروه متناهی G رو مجموعه‌ی S اثر می‌کند. مجموعه‌ی اعضایی از S که تحت اثر یک عضوِخاص از گروه G ثابت می‌مانند، با $\mathrm{fix}(g)$ نشان می‌دهیم.

$$\mathrm{fix}(g) = \{s \in S \mid g.s = s\}$$

هم‌چنین، S/G ، نمایانگر مجموعه‌ی تمامی مدارهای این اثر است.

لمِ Burnside را ثابت کنید.

برای گروه متناهی G که روی مجموعه‌ی متناهی S اثر می‌کند:

$$|S/G| = \frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{fix}(g)|$$

(**راهنمایی:** با $\sum_{g\in G}\mathrm{fix}(g)$ شروع کنید و سعی کنید آن را برحسب جمع روی پایدارسازهای عناصر S بازنویسی کنید. در نهایت از قضیه مدار_ پایدارساز استفاده کنید.)

تمرین ″۱۵ [- امتیاز] : مسائل رنگی از اثر گروه روی مجموعه (۱)

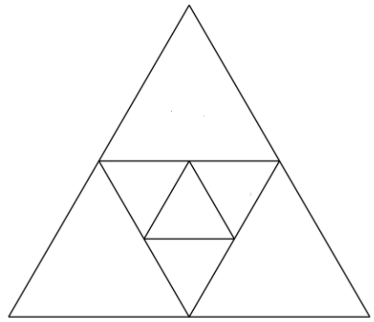
تعداد رنگ‌آمیزیِ متمایز شکلِ (۱) را (که کاشی‌کاری مثلث متساوی الاضلاع است) به‌دست بیاورید؛ یعنی به چند روشِ متمایز می‌توان هفت مثلث متساوی‌الاضلاع را رنگ کرد. توجه کنید که منظور از رنگ‌آمیزیِ متمایز، رنگ‌آمیزی‌هایی است که با دوران و بازتاب این شکل، به همدیگر تبدیل نشوند. بدیهی هست که باید فرض کنید تعداد n رنگ متمایز دارید، و بایستی با کمک لم Burnside ، رنگ آمیزیها را بشمارید.

(**راهنمایی:** حل مسئله را با اعمال کردن لم Burnside به گروه $D_۳$ که گروه تقارنی این شکل است، شروع کنید.)

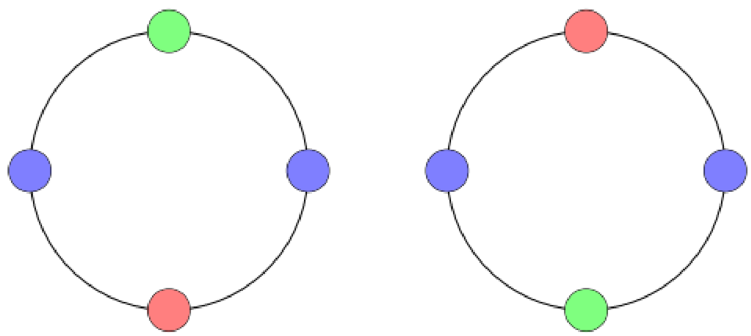
تمرین ″۱۶ [- امتیاز] : مسائل رنگی از اثر گروه روی مجموعه (۲)

به‌عنوان کاربردی دیگر، مسئله‌ی «رنگ‌آمیزی گردن‌بند» را حل می‌کنیم. نخی به شکل حلقه داریم که به تعداد دلخواه مهره در آن هست، در این مسئله می‌خواهیم ببینیم که با رنگ‌های مجزا، به چند روش می‌توان این گردن‌بند را رنگ‌آمیزی کرد. مثل بالا، تحت دوران و چرخش گردن‌بند، رنگ‌آمیزی‌های متمایز، با هم معادل نیستند. (مثلا در رنگ‌آمیزی‌های شکل ۲ ، به دو گردن‌بند معادل می‌رسیم؛ چون با دوران (یا بازتاب) این دو گردن‌بند به همدیگر تبدیل می‌شوند.)

حالا تعداد رنگ‌آمیزی‌های متمایز یک گردن‌بند ۶ مهره‌ای، با n رنگ را بدست بیاورید. این رابطه را به m مهره هم تعمیم دهید.



شکل ۱: مثلث متساوی‌الاضلاع کاشی شده برای مسئله‌ی رنگ‌آمیزی



شکل ۲: رنگ‌آمیزیِ معادل دو گردن‌بند با چهار مهره و سه رنگ.

تمرین ۱۷″ [- امتیاز] : پیوستگی با دو معنای متفاوت

در درس با مفهوم فضای توپولوژیک و همچنین ظرایف آن آشنا شدید؛ حالا می‌خواهیم یک تمرین نسبتا معروف و ساده را با هم بررسی کنیم.

نشان دهید که تعریف آنالیزی پیوستگی با تعریف توپولوژیکی آن معادل است.

تعریف توپولوژیک پیوستگی: می‌گوییم تابع $f : X \mapsto Y$ یک تابع پیوسته است، اگر برای هر مجموعه‌ی باز از فضای مقصد، $U \subset Y$ ، پیش‌تصویر [a] آن در مبدا باز باشد. [b] یعنی $V \equiv f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ با توپولوژی فضای مبدا یک فضای باز محسوب شود.

تعریف آنالیزی پیوستگی: تابع $f : X \mapsto Y$ پیوسته است اگر برای هر نقطه‌ی $p \in X$ گزاره‌ی زیر برقرار باشد.

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in X, \exists \delta > 0 : d_X(x,p) < \delta \longrightarrow d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$$

که در آن d_X و d_Y به‌ترتیب متریک‌های روی فضای مبدا و مقصد هستند.

[a] Preimage

[b] از آقای آرشا نیک‌سا بابت توجه‌شان و نشان دادن اشتباه تایپی این بخش متشکریم.

تمرین ۱۸″ [- امتیاز] : یک‌ریختی جبرهایِ لی

الف) نشان دهید جبر لی گروه‌های $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ و $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ یک‌ریخت هستند.

ب) نشان دهید $SU(1,1,\mathbb{C})$ با $SL(2,\mathbb{R})$ یک‌ریخت است.

تمرین ″۱۹ [- امتیاز] : گروه $S^۱ = \{(x_۱, x_۲) \mid x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱\}$ را در نظر بگیرید [۱]. فضایی را که از دیفیومورفیسم‌هایی [۲] تشکیل شده که جهت زاویه‌ای را حفظ می‌کند $\mathrm{Diff}^+(S^۱)$ می‌نامیم. ضرب این گروه از ترکیب این دیفیومورفیسم‌ها به دست می‌آید. در نهایت یک گروه لی بینهایت بعدی خواهیم داشت. جبر لی مربوط به آن فضای میدان‌های برداری روی $S^۱$ است. یک زیرجبر [۳] لی از ترکیب جبر لی $\mathrm{Diff}^+(S^۱)$ چنین است:

$$L = \left\{ f(z)\frac{d}{dz} \ : \ f(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-۱}] \right\}$$

این یک زیرفضا از فضای میدان‌های برداری روی $S^۱$ است با توجه به اینکه $S^۱$ دایره واحد در $\mathbb{C}$ است. پایه $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ برای این جبر را اینطور انتخاب می‌کنیم:

$$L_n := -z^{n+۱}\frac{d}{dz}$$

جابه‌جاگر $[L_n, L_m]$ را بیابید.

تمرین ″۲۰ [- امتیاز] : الف) عضوی از گروه لی $GL(۲, \mathbb{R})$ را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(۲, \mathbb{R})$$

در نتیجه $\det A \neq ۰$. تبدیل موبیوس [۴] اینطور عمل می‌کند:

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

الف)نشان دهید اگر تبدیل موبیوس را روی صفحه مختلط توسعه داده شده [۵] $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ اثر دهیم یک گروه تحت ترکیب توابع خواهد ساخت.

ب) نشان دهید این گروه با گروه خارج قسمت $GL(۲, \mathbb{R})/Z_{GL(۲,\mathbb{R})}$ یکریخت است. Z مرکز گروه $GL(۲, \mathbb{R})$ است.

تمرین ″۲۱ [- امتیاز] : جبر لی $\mathfrak{su}(۵)$ از تمام ماتریس‌های ۵×۵ای تشکیل شده که:

$$X^\dagger = -X \qquad trX = ۰$$

یک پایه متعامد برای $\mathfrak{su}(۵)$ معرفی کنید. ضرب داخلی فضای ماتریسی را چنین در نظر بگیرید:

$$\langle X_j, X_k \rangle = \mathrm{Tr}(X_j X_k^\dagger)$$

تمرین ″۲۲ [- امتیاز] : گروه‌های تقارنی در نظریه‌ی میدان

با کاربردهای گروه‌ها در نظریه‌های فیزیکی آشناتر شویم و ساده‌ترین مدلی را که تقارن $\mathrm{U}(۱)$ دارد، بررسی می‌کنیم.لاگرانژی این کنش را در زیر می‌بینیم.

$$\mathcal{L}_\phi = (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - \frac{۱}{۲}M^۲\phi^*\phi,$$

الف) اول نشان دهید که این لاگرانژی تحت تبدیل $e^{i\varphi} \in \mathrm{U}(۱)$ به شکل زیر، ناورداست.

$$\phi \longrightarrow e^{i\varphi}\phi$$

ب) جریان و بار نوتر مربوط به این تقارن پیوسته‌ی سرتاسری را پیدا کنید.

[۱] می‌دانیم هر نقطه روی دایره‌ی واحد را با عددی مختلط که فازِخالص است می‌توان نشان داد؛ عمل ضرب گروهی، همان ضرب اعداد مختلط است.

[2] Diffeomorphism : $S^1 \to S^1$

[3] Subalgebra

[4] Möbius

[5] در حقیقت این فضا همان کره ریمان است؛ که شامل تمامی اعداد مختلط است که با فشرده‌سازی تک‌نقطه‌ای، بی‌نهایت هم جزئی از فضاست.

ج) نشان‌دهید که تحت تبدیل موضعی، $\phi \longrightarrow e^{i\varphi(x)}\phi$ ، کنش ناوردا نمی‌ماند.

د) حالا تقارن سرتاسری را پیمانه‌ای می‌کنیم. یعنی کنش را طوری اصلاح می‌کنیم که تحت تبدیلِ تقارنی با پارامترهای وابسته به فضازمان، همچنان ناوردا باشد. برای ارتقای تقارن‌ها به تقارن موضعی، مشتق‌های عادی را به مشتق هموردا تبدیل می‌کنیم:

$$\partial_\mu\phi \longrightarrow D_\mu\phi = (\partial_\mu + \frac{i}{e}A_\mu)\phi$$

که در این روابط، e ثابتی است که قوت برهمکنش را مشخص می‌کند. همچنین میدان‌های جدید A_μ را معرفی کرده‌ایم؛ بنابراین لازم است جمله‌ی جنبشی مربوط به آن را هم در لاگرانژی وارد کنیم. این‌جمله‌ی جنبشی به شکل زیر است [۶].

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{۱}{۴}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)^۲$$

بنابراین لاگرانژی جدید که تحت تقارن موضعی $\mathrm{SU}(۲)$ ناورداست، به شکل زیر است:

$$\mathcal{L}_{\text{Tot}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_\phi[\partial \longrightarrow D]$$

که منظور از جمله‌ی آخری، تبدیل مشتق‌های عادی به هموردا‌ست.

تا اینجا همه‌اش مقدمات بود، حالا سوال اصلی این است: نشان دهید که لاگرانژی $\mathcal{L}_{\text{Tot}}$ تحت تبدیلات بی‌نهایت کوچکِ زیر ناورداست.

$$\phi \longrightarrow \phi + i\varphi(x)\phi$$
$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + ie\partial_\mu\varphi(x).$$

که در آن، پارامتر تبدیلِ بی‌نهایت کوچک ،$\varphi(x)$، وابسته به فضازمان هستند.

تمرین ″۲۳ [- امتیاز] : براکت مویال [۷] (که به آن براکت سینوس هم گفته می‌شود) اینطور تعریف می‌شود [۸] :

$$[f(\mathbf{p},\mathbf{q}), g(\mathbf{p},\mathbf{q})]_{\mathrm{M}} := \frac{۲}{\hbar} f(\mathbf{p},\mathbf{q}) \sin\left(\frac{\hbar}{۲}\left(\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{q}}.\overrightarrow{\partial}_{\mathbf{p}} - \overleftarrow{\partial}_{\mathbf{p}}.\overrightarrow{\partial}_{\mathbf{q}}\right)\right) g(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

که در آن

$$\partial_{\mathbf{q}}.\partial_{\mathbf{p}} := \sum_{j=۱}^{n} \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}, \qquad \partial_{\mathbf{p}}.\partial_{\mathbf{q}} := \sum_{j=۱}^{n} \frac{\partial}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j}$$

همانطور که می‌بینید در حد $\hbar \to ۰$ براکت مویال همان براکت پواسون می‌شود. چند ویژگی براکت مویال این است که:

۱. نسبت به ورودی‌های f و g پادمتقارن است.

۲. در اتحاد جاکوبی صدق می‌کند.

براکت مویال یک جبر لی بی‌نهایت بعدی را مشخص می‌کند.
همیلتونی زیر را در نظر بگیرید:

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{۱}{۲}p_۱^۲ + \frac{۱}{۲}p_۲^۲ + \frac{۱۶}{۳}q_۲^۳ + q_۱q_۲^۲ + \mu q_۱^{-۲}$$

تابع $I(\mathbf{p},\mathbf{q})$ را این بگیرید:

$$I(\mathbf{p},\mathbf{q}) = p_۱^۴ + ۴(q_۱^۲q_۲ + \mu q_۱^{-۲})p_۱^۲ - \frac{۴}{۳}q_۱^۳p_۱p_۲ - \frac{۴}{۳}q_۱^۴q_۲^۲ + \frac{۸}{۳}\mu q_۲ - \frac{۲}{۹}q_۱^۶ + ۴\mu^۲q_۱^{-۴}$$

براکت مویال $[I,H]_{\mathrm{M}}$ را به دست آورید و نتیجه‌را در قیاس با براکت پواسون به بحث بگذارید.

تمرین ″۲۴ [- امتیاز] : تبدیلات هم‌تافته در حل مسائل مکانیک کلاسیک

در این سوال، تبدیلی کانونیک به ما در حل یک مسئله‌ی خاص از مکانیک کلاسیک کمک می‌کند.

[۶] منظور از توان دو رساندن این است که اندیس‌های پایین μ,ν با اندیس‌های بالای μ,ν contract شوند.

[7] Moyal Bracket

[۸] از آقایان شهمیری و اشتری برای تذکرشان ممنونیم.

الف) نشان‌دهید که تبدیلات زیر از مختصه‌های مکان و تکانه (q^1, q^2, p_1, p_2) به (Q^1, Q^2, P_1, P_2) ، یک تبدیل هم‌تافته است.

$$Q^1 = q^1 \cos\alpha - \frac{p_2}{\beta}\sin\alpha, \quad P_1 = \beta q^2 \sin\alpha + p_1 \cos\alpha$$
$$Q^2 = q^2 \cos\alpha - \frac{p_1}{\beta}\sin\alpha, \quad P_2 = \beta q^1 \sin\alpha + p_2 \cos\alpha$$

ب) ذره‌ای به جرمِ m و بارِ e تحت اثر پتانسیل نوسانگر هماهنگ $\frac{1}{2}m\omega^2\left[(q^1)^2 + (q^2)^2\right]$ و میدان مغناطیسی با پتانسیلِ برداری $\mathbf{A} = (0, hq^1, 0)$ (h ثابت است.) حرکت می‌کند. از تبدیلات کانونیک بالا استفاده کنید و با تعریف $\tan 2\alpha = \frac{2m\omega}{eh}$ و انتخابِ مناسبِ β ، مسیر حرکت این ذره را پیدا کنید برای دو حد $h = 0$ و $h \to \infty$ این مسیر را توصیف کنید [9] .

تمرین ″۲۵ [- امتیاز] : در فیزیک نسبیت خاص، کنش یک ذره متحرک را با طول ویژه جهان‌خط آن نشان می‌دهیم. از انگیزه‌های این کار این بوده که فضازمان روشی برای نگاه کردن به مکان و زمان از یک عینک است، به طوری که نمی‌توان مکان و زمان را مستقل و جداگانه از هم بررسی کرد. در نتیجه انتظار داریم کنش یک اسکالر لورنتزی باشد که در نهایت ما را به عبارت زیر می‌رساند:

$$S \propto \int_b^a ds = \int_b^a \sqrt{c^2dt^2 - dx^2}$$

اما مشکلی وجود دارد که بعد کنش و طول ویژه متفاوت است. یک ثابت mc برای یکی شدن دو طرف تساوی در انتگرال ضرب می‌کنیم.

$$S = -mc\int_b^a \sqrt{c^2dt^2 - dx^2}$$

علامت منفی برای همخوانی کنش با حد کلاسیک $\frac{v}{c} \ll 1$ است.

الف) فرم این عبارت را به حالت آشنای $S = \int_b Ldt$ در بیاورید و لاگرانژی نسبیتی به دست آمده را بنویسید.
ب) نشان دهید این لاگرانژی تحت انتقال در مکان $x \to x + \delta x$ متقارن است. بار نوتر مربوط به این تقارن را به دست آورید.
ج) نشان دهید این لاگرانژی تحت انتقال در زمان $t \to t + \delta t$ متقارن است. بار نوتر مربوط به آن را به دست آورید.
ارتباط کمیت‌هایی که در بخش ب و ج به دست آوردید را با چهاربردار تکانه نسبیتی توضیح دهید.
د) آیا در حد $\frac{v}{c} \ll 1$ عبارت‌هایی که به دست آوردید به مقدار کلاسیکی نظیرشان می‌رسند؟ [10]

تمرین ″۲۶ [- امتیاز] : مولدهای گروه همدیس [11] (که خود جبرِلی هستند) در فضازمان dــ بعدی از این قرارند:

$$\begin{array}{lr}
\text{(Translation)} & P_\mu = -i\,\partial_\mu \\
\text{(Dilation)} & D = -i\,x^\mu\partial_\mu \\
\text{(Rotation)} & L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\
\text{(Special Conformal Transformation)} & K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu)
\end{array}$$

الف) نشان دهید رابطه‌های جابه‌جاگری زیر برای این مولدها برقرار است:

$$\begin{aligned}
[D, P_\mu] &= iP_\mu \\
[D, K_\mu] &= -iK_\mu \\
[K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}) \\
[K_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu) \\
[P_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \\
[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho})
\end{aligned}$$

[9] از آقای طالبی برای یادآوری اشتباه تایپی ممنونیم.

[10] دیدن عبارت $E = mc^2$ معروف خالی از لطف نیست! یعنی حتی در حد کلاسیک هم می‌توان گفت جرم باید شکلی از انرژی باشد و در نتیجه می‌تواند به شکل‌های دیگر انرژی از جمله انرژی جنبشی تبدیل شود. یکی از نتایج این نوع نگاه کردن به جرم در گرانش خودش را نشان می‌دهد. در گرانش نیوتونی تنها اجسام جرم‌دار گرانش را حس می‌کنند. اما از آن‌جا که در نسبیت خاص جرم هم شکلی از انرژی است، احتمالا این تصور دور از انتظار نیست که شکل‌های دیگر انرژی نیز بتوانند از گرانش اثر بگیرند یا روی آن اثر بگذارند. به عنوان مثال فوتون‌های بدون جرم (اما پرانرژی) تحت تاثیر گرانش قرار می‌گیرند و گرانش نیوتونی هیچ توضیحی برای آن نمی‌تواند ارائه کند. تئوری کامل‌تری که می‌تواند این ارتباط را توضیح دهد نسبیت عام است.

[11] conformal group

که در آن $\eta_{\mu\nu}$ متریک فضازمان است.
ب) نشان دهید جبر گروه همدیس با $SO(d+۱,۱)$ یکریخت است.
راهنمایی: مولدهای گروه همدیس را چنین بنویسید

$$\begin{array}{ll} J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} & J_{-۱,\mu} = \frac{۱}{۲}(P_\mu - K_\mu) \\ J_{-۱,۰} = D & J_{۰,\mu} = \frac{۱}{۲}(P_\mu + K_\mu) \end{array}$$

که در آن $J_{ab} = -J_{ba}$ و $a,b \in \{-۱,۰,۱,...,d\}$.

تمرین ″۲۷ [- امتیاز]: نشان دهید هر یکی از موارد زیر گروه لی هستند:

۱ هر فضای برداری متناهی بعد که ساختار گروه جمع‌پذیر [۱۲] دارد، به خصوص $\mathbb{R}^n$.

۲ مجموعه اعداد مختلط غیر صفر $\mathbb{C}^*$ با ضرب اعداد مختلط.

۳ $G \times H$ که در آن G و H گروه لی هستند و ضرب اعضای آن‌ها اینطور تعریف شده:

$$(g,h)(g',h') = (gg',hh') \quad : g,g' \in G, \quad h,h' \in H$$

تعمیم این حالت به تعداد دلخواه گروه‌های لی چنین است که اگر G_i به ازای $i \in \{۱,...,n\}$ گروه لی باشند آن‌گاه $G_۱ \times ... \times G_n$ یک گروه لی است.

۴ گروهِ Toral یا $T^n = \underbrace{S^۱ \times \cdots \times S^۱}_{n \text{ times}}$ برای $n \geq ۱$.

۵ خودریختی‌های [۱۳] فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ ($\mathrm{Aut}(V)$)، به خصوص $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{Aut}_\mathbb{R}\mathbb{R}^n$ و $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}_\mathbb{C}\mathbb{C}^n$.

۶ $K = \mathbb{R}^n \times GL(n,\mathbb{R})$ برای $n > ۱$ که ساختار گروه این طور تعریف شده:

$$(x,A)(x',A') = (x + Ax', AA')$$

تمرین ″۲۸ [- امتیاز]: X عضوی از جبر لی $\mathfrak{sl}(۲,\mathbb{R})$ از گروه تبدیلات خطی حقیقی ویژه $SL(۲,\mathbb{R})$ است. $\exp(X)$ را به دست آورید.

تمرین ″۲۹ [- امتیاز]: G یک زیرگروه کاهش‌ناپذیر از $GL(\mathcal{V},\mathbb{C})$ است. اگر $c \in GL(\mathcal{V})$ مرکزساز G باشد، نشان دهید وجود دارد $\gamma \in \mathbb{C}$ که $c = \gamma ۱$. به خصوص بخش‌های کاهش‌ناپذیر یک گروه آبلی کاملا کاهش‌پذیر $A \subseteq GL(\mathcal{V})$ همگی از درجه‌ی ۱ هستند. در نتیجه A مربوط به یک گروه قطری است اگر پایه مناسبی برای $\mathcal{V}$ بگیریم.
راهنمایی: نشان دهید برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ قسمت $\mathcal{V}(c - \alpha ۱)$ یک زیرفضای ناوردا برای G است.

تمرین ″۳۰ [- امتیاز]: نشان‌دهید اگر G یک زیرگروه کاهش‌ناپذیر از گروهِ‌خطی روی فضایِ برداری $\mathcal{V}$ باشد؛ هر زیرگروه بهنجار از G یک زیرگروه کاملا کاهش‌پذیراست. همچنین نشان‌دهید که تعداد مولفه‌های کاهش‌پذیری این زیرگروهِ بهنجار، مرتبه‌ی گروه G را می‌شمارد.

---

[12] Additive group
[13] Automorphism

آشنایی با برخی اصطلاحات در گروه‌های خطی

با برخی اصطلاحات در گروه‌های خطی آشنا می‌شویم؛ بعدها که با نمایش آشنا شدید، می‌بینید که نمایش چیزی جز یک همریختی بین گروه‌ها و گروهِ خطی نیست؛ بنابراین این اصطلاحات به طور طبیعی در آنجا هم استفاده خواهند شد.

گروهِ خطی $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ روی فضایِ برداری $\mathcal{V}$ که فضایی $n-$بعدی است اثر می‌کند؛ در اصطلاح می‌گوییم که اعضای گروه خطی (یا هر زیرگروهی از آن) از **درجه‌ی n** [a] هستند.

حالا فرض کنید گروه G، زیرگروهی از این گروهِ‌خطی باشد. در این‌صورت زیرفضایِ خطیِ $\mathcal{W}$ از فضای $\mathcal{V}$ یک **زیرفضای ناوردای گروه G** [b] نامیده می‌شود اگر $g\mathcal{W} = \mathcal{W}$ [c] برای هر $g \in G$. در این حالت، تحدیدکردن اثر اعضای گروهِ G به $\mathcal{W}$ به ما زیرگروهی از $\mathrm{GL}(m, \mathcal{W})$ می‌دهد؛ که در آن $m = \dim(\mathcal{W})$.

می‌گوییم زیرگروه G یک **زیرگروهِ کاهش‌ناپذیر** [d] است اگر به جز $\mathcal{V}$ و زیرفضایِ بدیهی ، $\{\}$ ، زیرفضایِ ناوردای دیگری نداشته باشد. در غیراین‌صورت، به این زیرگروه، **زیرگروهِ کاهش‌پذیر** [e] می‌گوییم.

به زیرگروهِ G یک **زیرگروهِ کاملاکاهش‌پذیر** [f] می‌گوییم اگر بتوان فضایِ برداری $\mathcal{V}$ را به‌شکل جمع مستقیم زیرفضاهایِ ناوردای آن نوشت.

$$\mathcal{V} = \oplus_{i=1}^{k} \mathcal{W}_i$$

مشخصا، یک زیرگروهِ کاهش‌ناپذیر، کاملا کاهش‌پذیر هم هست. به تحدیدِ هر کدام از اعضای گروه G به زیرفضاهای $\mathcal{W}_i$، یک **مولفه‌های کاهش‌ناپذیرِ زیرگروه G** [g] می‌گوییم.

[a] Degree
[b] Invariant subspace of subgroup G
[c] $g\mathcal{W} = \{gw \mid w \in \mathcal{W}\}$
[d] Irreducible subgroup
[e] Reducible subgroup
[f] Compeletely reducible subgroup
[g] Irreducible components of subgroup G