خلاصه‌ای از مباحث کلاس حل تمرین

استاد درس: دکتر کریمی‌پور

جلسه‌ی هفتم: هندسه‌ی ریمانی

دستیار درس: حسین محمدی

گردآوری: حانیه ملکی

۲۶ اردیبهشت ۱۴۰۳

در این جلسه به سؤالات زیر پاسخ دادیم:

۱. یکسانی‌های موسیقیایی [1]

۲. خمینه‌ی تقریباً مختلط [2]

۳. محاسبه‌ی هموستارها، معادله‌ی ژئودزی و انتقال موازی بردارها برای خمینه‌ای مشخص

۴. گروه ایزومتری‌های خمینه‌ی نیم‌صفحه‌ی بالایی اعداد مختلط با متریک پوانکاره

۵. شرط انحناثابت‌بودنِ خمینه‌ی حاصل‌ضرب دو خمینه‌ی انحناثابت

۶. تعیین متریک روی خمینه‌ی گروه هایزنبرگ و محاسبه‌ی هموستارهای لوی-چویتا

۷. بررسی اپراتورِ codifferential و اپراتور Hodge star

۸. شرط لازم و کافی برای میدانِ برداری کیلینگ بودن

۹. میدان‌های برداریِ کیلینگِ $\mathbb{R}^3$

۱۰. الحاقیِ عملگرِ مشتق خارجی

همچنین در مورد مباحث زیر بحث کردیم:

۱. خمینه‌های مختلط

[1] Musical isomorphisms
[2] Almost complex manifold

سؤالات زیر را به دقت مورد بررسی قرار دادیم:
سوال اول: درباب مقدمات خمینه‌های ریمانی

خمینه‌ی ریمانی (M, g) یک خمینه‌ی nـ‌بعدی است. نشان دهید که:

الف) به‌ازای هر $\alpha, \beta \in T_p^\star M$ و هرپایه‌ی یکه‌متعامد $\{e_i\}_{i=1}^n$ از فضای مماسِ T_pM داریم:

$$g^{-1}(\alpha, \beta) = \sum_i \alpha(e_i)\beta(e_i)$$

که در آن g^{-1} متریک پادوردای مربوط به g است؛ در کاربردهای فیزیکی، منظور ما از g^{-1} همان $g^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu$ است.

ب) برای هر بردار $X \in T_pM$ همواره

$$g^{-1}(\alpha, X^\flat) = \alpha(X) = g(\alpha^\sharp, X)$$

که در این عبارات، یک‌ریختی‌های موسیقایی فضای‌مماس [۳] [۴] به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} \flat : T_pM \longrightarrow T_p^*M \qquad & X^\flat = g(X, .) \\ \sharp : T_p^*M \longrightarrow T_pM \qquad & \alpha^\sharp = g^{-1}(\alpha, .) \end{aligned}$$

سوال دوم: درباب هموستار و مشتق هموردا

متریک g را متریک ”هرمیتی“ روی خمینه‌ی تقریبا مختلط [۵] (M, J) درنظر بگیرید.
از این اصطلاحات نترسید؛ یک ساختار تقریبا مختلط [۶] روی یک خمینه، نگاشتی است از هر فضای مماس به خودش به شکل زیر:

$$\forall p \in M : \quad J(p) : T_pM \longrightarrow T_pM \quad : \quad J^2 = -I_{n\times n}.$$

و متریک g هرمیتی است اگر

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

تانسور $(0, 2)$ (یعنی تانسوری که دو ورودیِ برداری می‌گیرد) F را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(X, Y) = g(X, JY)$$

حالا ثابت کنید که:

الف) F پادمتقارن است.
ب) F به‌اصطلاح J-invariant است؛ یعنی که $F(JX, JY) = F(X, Y)$
برای ادامه‌ی سوال، فرض کنید که هموستار سازگار با متریکِ ∇ مفروض هست.
ج) نشان دهید

$$(\nabla_X F)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X J)Z).$$

د) نشان‌دهید

$$g((\nabla_X J)Y, Z) + g(Y, (\nabla_X J)Z) = 0.$$

---

[3] Tangent space musical isomorphisms
[۴] یکریختی فضاهای برداری را با یکریختی‌گروهی اشتباه نکنید؛ اینجا منظورمان یک‌ریختی فضای برداری است
[5] Almost complex manifold
[6] Almost complex structure

سوال سوم: محاسباتی در باب هموستار و ژئودزیک‌ها

فضای $\mathbb{R}^3$ با متریک $ds^2 = (1+x^2)dx^2 + dy^2 + e^z dz^2$ را به عنوان خمینه‌ی ریمانی معرفی می‌کنیم.

الف) تمامی هموستارهای لوی_چیویتا را پیدا کنید.
ب) معادله‌ی ژئودزیک را حل کنید.
ج) خم $\gamma(t) = (x=t, y=t, z=t)$ را درنظر داشته‌باشید. انتقالِ موازی هر بردار (a,b,c) در مبدا، در راستای این خم را پیدا کنید.
د) آیا خم γ خود ژئودزیک است؟
ه)دو میدان‌برداری موازی $X(t), Y(t)$ روی γ پیداکنید که $g(X(t), Y(t))$ ثابت باشد.

سوال چهارم: ساده و آموزشی درباره‌ی ژئودزیک

صفحه‌ی حقیقی با متریک اقلیدسی را به عنوان خمینه‌ی ریمانی معرفی می‌کنیم. آیا خم $\gamma(t) = (t^3, t^3)$ یک ژئودزیک است؟
از این تمرین چه درسی می‌توان گرفت؟

سوال پنجم: درباب ایزومتری‌ها

نیم‌صفحه بالایی اعداد مختلط ($\mathbb{H}$) به همراه متریک پوانکاره $ds^2_{\text{Poincare}} = \frac{dz\wedge d\bar{z}}{\text{Im}^2(z)}$ یک خمینه‌ی ریمانی است. گروه $\text{SL}(2,\mathbb{R})$ به شکل زیر روی نقاط این خمینه‌ی مختلط [۷] اثر می‌کند.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2,\mathbb{R}), \qquad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

نشان‌دهید که $\text{SL}(2,\mathbb{R})$ گروه ایزومتری‌های خمینه‌ی $(\mathbb{H}, ds^2_{\text{Poincare}})$ است.

سوال ششم: فضاهای انحنا ثابت

خمینه‌ی (M, g_M) را خمینه‌ای ریمانی با انحنای‌ثابت (Maximally symmetric space) بگیرید. روی خمینه‌ی حاصل‌ضربی $M \times M$ متریک $\tilde{g}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{g}((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)) = g_M(X_1,X_2) + g_M(Y_1,Y_2), \quad X_1,X_2,Y_1,Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$$

یعنی متریک به شکل زیر است:

$$\tilde{g}_{AB} = g_M \oplus g_M = \begin{pmatrix} g_M & 0 \\ 0 & g_M \end{pmatrix}$$

آیا خمینه‌ی $M \times M$ یک فضای انحنا ثابت است؟

---

[۷] خمینه‌های مختلط با حفظِ سمت، ریمانی هم هستند. بیشتر کارهایی که در خمینه‌های ریمانی انجام می‌دهیم تفاوت خاص و معناداری با خمینه‌های مختلط ندارد.

سوال هفتم: درباب متریک روی خمینه‌های لی

گروهِ لیِ هایزنبرگ را به خاطر آورید.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Big|\; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

الف) متریک چپ‌ناوردای g را روی گروهِ لی H حاصل کنید؛ برای این کار از پایه‌های دوگان به میدان‌های برداری چپ‌ناوردا استفاده کنید.
ب) هموستار لوی‌ـ‌چیویتا را روی این خمینه پیدا کنید.
ج) آیا (H,g) یک فضای انحنا ثابت است؟

سوال هشتم: باغ‌وحش عملگرها روی خمینه‌ی ریمانی

یک‌ریختی‌های موسیقایی را به خاطر آورید.

$$\flat : T_pM \longrightarrow T_p^*M, \qquad X \longrightarrow X^\flat$$
$$X^\flat(Y) = g(X,Y)$$

$$\sharp : T_p^*M \longrightarrow T_pM, \qquad \omega \longrightarrow \omega^\sharp$$
$$\omega^\sharp(\xi) = g^{-1}(\omega,\xi)$$

همچنین گرادیان تابع را به شکل $\mathrm{grad} f = (df)^\sharp$ تعریف می‌کنیم. موارد زیر را پیدا کنید.
الف) $g(\mathrm{grad} f, X) = X[f]$
ب) $(\frac{\partial}{\partial x^i})^\flat$
ج) $(dx^i)^\sharp$
د) گرادیان تابع f را در مختصات موضعی بنویسید.
ه) نشان‌دهید که در فضای تخت سه‌بعدی، همان عبارت آشنای گرادیان بدست می‌آید.

سوال نهم: Operator Gymnastics

فضای $\mathbb{R}^n$ با متریک اقلیدسی یک خمینه‌ی ریمانی است. فرمِ حجم $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ است.

الف) نشان دهید برای هر $\Omega_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ ، تنها یک $(n-k)$ـ‌فرم $\star\Omega_k$ وجود دارد که:

$$\star\Omega_k(X_1,\ldots,X_{n-k})\omega = \Omega_k \wedge X_1^\flat \wedge \cdots \wedge X_{n-k}^\flat$$

ب) عملگر Hodge star
$$\star : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \longmapsto \Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n)$$
مطابق قسمت قبلی تعریف می‌شود. نشان‌دهید که:
ب۱) $\star^2 = (-1)^{k(n-k)}$
ب۲) $\star^{-1} = (-1)^{k(n-k)}\star$
ب۳) $\Omega_k \wedge (\star\Theta_k) = \Theta_k \wedge (\star\Omega_k)$
ج) عملگر Codifferential ($\delta : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^n)$) به‌شکل زیر معرفی می‌شود:

$$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} \star d \star$$

نشان‌دهید که $\delta^2 = 0$، این یعنی که عملگرفوق می‌تواند یک Cohomological complex برایمان بسازد.

د) لاپلاسی هم عملگری است که $\Delta : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ و تعریف می‌شود:

$$\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$$

نشان‌دهید برای هرتابع همواری مثل f داریم:

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}$$

سوال دهم: تعریف بردار کیلینگ [۸]

میدان‌برداری هموارِ $X \in \mathfrak{X}(M)$ بردار کیلینگ است، اگر و فقط اگر $\mathcal{L}_X g = 0$.

بااین تعریف شروع کنید: بردار X یک بردار کیلینگ است اگر متریک g تحت نگاشت pullback در راستای Integral curve این بردار، ثابت بماند.

سوال یازدهم: میدان‌های برداری کیلینگ $\mathbb{R}^3$

نشان‌دهید که جبرلی حقیقیِ تولید شده با

$$\langle \partial_x, \partial_y, \partial_z, x\partial_y - y\partial_x, -y\partial_z + z\partial_y, z\partial_x - x\partial_z \rangle$$

میدان‌های برداری کیلینگ فضای $\mathbb{R}^3$ هستند.

سوال دوازدهم: کمی درباره‌ی عملگرهای الحاقی

خمینه‌ی ریمانی (M, g) را فشرده فرض کنید.

الف) نشان‌دهید که عملگر codifferential که در سوال نهم معرفی شده بود، الحاقیِ [۹] عملگر d (مشتق خارجی) است، تحت ضربِ‌داخلی القا شده با انتگرال‌گیری.

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle, \qquad \alpha, \beta \in \Lambda^r(M)$$

ب) عملگر لاپلاسی $\Delta = d\delta + \delta d$ تحت این ضرب‌داخلی، خودالحاقی [۱۰] است.

$$\langle \Delta\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle$$

ضرب‌داخلی فرم‌ها با کمک انتگرال‌گیری چنین تعریف می‌شود: $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M (\alpha \wedge \star\beta), \qquad \alpha, \beta \in \Lambda^r(M)$ آیا می‌توانید بگویید شرط فشرده بودن خمینه‌ی M کجا لازم است؟

[۸] این اسم منسوب به آقای «ویلهلم کارل جوزف کیلینگ» است.

[9] Adjoint

[10] Self-adjoint