سری چهارم تمرینات درس ریاضی‌فیزیک پیشرفته - دکتر کریمی‌پور

خمینه‌های ریمانی - عملگرهای روی خمینه‌ها

موعد تحویل پاسخ‌ها: دوشنبه ۱۴ خرداد سال ۱۴۰۳ - تا ساعت ۲۳:۵۹

از طریق سامانه درس‌افزار

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

سوال اول: ثابت‌کنید که $\frac{O(n)}{O(k)\times O(n-k)}$ یک فضای همگن است که با $G_k(\mathbb{R}^n)$ (یعنی فضای ابرصفحه‌های kـبعدی که از مرکز فضای $\mathbb{R}^n$ می‌گذرند [1]) دیفئومورفیک است. برای حالتِ خاص $k=1$ ، بررسی را مجددا انجام دهید. به کدام فضای آشنا می‌رسید؟

سوال دوم: یک هموستارِ خطی [2] مثل ∇ روی خمینه‌ی ریمانی M فرض کنید. همیوغِ این هموستار را با $\widehat{\nabla}$ نشان می‌دهیم و به شکل زیر معرفی می‌کنیم:

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X,Y]$$

الف) نشان دهید که $\widehat{\nabla}$ یک هموستار خطی است.

ب)مولفه‌های $\widehat{\Gamma}^i_{jk}$ (مربوط به هموستار $\widehat{\nabla}$) را از روی هموستارِ ∇ بدست آورید.

سوال سوم: هموستارِ خطیِ ∇ را روی $\mathbb{R}^2$ با مولفه‌های $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=1$ در نظربگیرید. سایر مولفه‌های هموستار صفرند.

الف) معادله‌ی ژئودزیک را بنویسید و حل کنید.

ب) آیا با این هموستار، خمینه یک خمینه‌یِ کامل [3] است؟

[1] همان خمینه‌های گراسمانی که در درس هم با آن آشنا شده‌اید.

[2] Linear connection

[3] Complete

ج) ژئودزیک با شرایط اولیه‌ی زیر را پیدا کنید.

$$\sigma(0) = (2,1)$$

$$\sigma'(0) = (1,1)$$

د)اگر σ و $\tilde{\sigma}$ دو ژئودزیک باشند که $\sigma(0) = \tilde{\sigma}(0)$ و $\sigma'(0) = k\tilde{\sigma}'(0)$ و $k \in \mathbb{R}$ ، ثابت کنید که برای هر t داریم . $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(kt)$.

سوال چهارم: J را ساختارِ تقریبا مختلط [۴] روی خمینه‌ی ریمانی M در نظر بگیرید [۵] . هم‌چنین ∇ هموستاری خطی است [۶] که تانسور torsion آن صفر است. به این هموستار اصطلاحا یک هموستار torsionless می‌گوییم. هموستارِخطی $\tilde{\nabla}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{4}\Big((\nabla_{JY} J)X - J(\nabla_Y J)X + 2J(\nabla_X J)Y\Big).$$

الف) نشان‌دهید که $J\nabla_X J = -(\nabla_X J)J$.

ب) تانسور $T_{\tilde{\nabla}}$، یعنی تانسور torsion هموستار $\tilde{\nabla}$، را برحسب تانسور Nijenhuis بدست آورید.

سوال پنجم: X_1 و X_2 را میدان‌های برداری مختصاتی یک خمینه‌ی ریمانی دوبعدی درنظر بگیرید. نشان‌دهید که یک مختصات isothermal با همان دامنه‌ی تعریف و همان خم‌های مختصه ثابت، وجود دارند، اگر و تنها اگر $X_2 X_1\Big(\log\Big(\frac{g_{11}}{g_{22}}\Big)\Big) = 0$ برقرار باشد.

سوال ششم: متریک روی $\mathrm{S^n}$

نگاشت $\varphi_n : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^{n+1}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^1 = \sin\theta^1 \\ x^j = \Big(\prod_{j=1}^{i-1}\cos\theta^j\Big)\sin\theta^i, \qquad i = 2,\dots,n \\ x^{n+1} = \prod_{j=1}^{n}\cos\theta^j \end{cases}$$

[4] Almost complex structure

[5] برای فهم بهتر سوال به آخرین جلسه‌ی حل تمرین نگاهی کنید.

[6] از آقای هومن ساوه برای یادآوری اشکالات در صورت سوال سپاسگزارم.

که در آن $\frac{\pi}{2} \leq \theta^i \leq \frac{\pi}{2}-$ ، $-\pi \leq \theta^n \leq \pi$.

نشان دهید که:

الف) تصویر این نگاشت کره‌ی nـ‌بعدی است.

ب) تحدید کردن این نگاشت به $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n$ یک دیفئومورفیسم به یک زیرمجموعه‌ی باز از کره به‌دست می‌دهد.

ج) با pullback کردن متریک اقلیدسیِ $\mathbb{R}^n$ ، متریک استاندارد کره، $g^{(n)}_{\text{Sphere}}$ ، بدست می‌آید.

$$g^{(n)}_{\text{Sphere}} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{j=1}^{i-1} \cos^2 \theta^j \Big) (d\theta^i)^2, \qquad \forall n \geq 1,$$

(با شرط $\prod_{j=1}^{k} \cos^2 \theta^j = 1$ وقتی که $k < 1$.)

سوال هفتم: خمینه‌ی ریمانی M و هموستار لوی‌ـچیویتا را درنظربگیرید. اتحادِ Koszul را ثابت کنید.

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)$$

که در آن $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

سوال هشتم: با مثالی نشان‌دهید که خمینه‌ای ریمانی وجود دارد که فاصله‌ی بین نقاطش کراندار باشد [۷] ؛ اما ژئودزیکی با طول بی‌نهایت داشته باشد که خودش را قطع نکند.

سوال نهم: در کلاسِ حل‌تمرین دیدیم که نیم‌صفحه بالایی اعداد مختلط با متریک پوانکاره یک خمینه ریمانی (و حتی مختلط) است و همچنین گروه ایزومتری‌های این خمینه را شناختیم.

الف) اول از همه، نشان‌دهید که ژئودزیک‌های این خمینه، نیم‌دایره‌های عمود بر محور حقیقی، یا خط‌های موازی با محور موهومی هستند.

ب)نشان‌دهید که تحت اثر گروه $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ، ژئودزیک‌های این فضا به ژئودزیک‌ها نگاشته می‌شوند.

[۷] یعنی برای هر دونقطه‌ی $p, q \in M$ ، فاصله‌ی این دونقطه، $d(p,q)$ ، از عدد حقیقی و مثبت $r \in \mathbb{R}$ کوچکتر باشد.

راهنمایی: هرماتریس از گروه $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ را می‌توانیم به شکل حاصل‌ضرب سه ماتریس KAN بنویسیم که $K\in \mathrm{SO}(2)$ ، A ماتریسی قطری با دترمینان یک است و همچنین N هم ماتریسی بالا قطری است. برای اطلاع بیشتر به این صفحه مراجعه کنید.

سوال دهم:

خمینه‌ی M را یک خمینه‌ی ریمانی بگیرد.

الف) اگر f یک ایزومتری این خمینه باشد و ∇ هموستار لوی_چیویتا، نشان‌دهید که

$$f^*\nabla_{e_j}\beta = \nabla_{f^{-1}.e_j} f^*\beta, \qquad \beta\in \Lambda^1 M$$

ب) نشان‌دهید که عملگر Codifferential [۸] با ایزومتری‌ها جابه‌جا می‌شود؛ یعنی $f^*\delta\beta = \delta f^*\beta$

(تعریف $\delta\beta = -\sum_k i_{e_k}\nabla_{e_k}\beta$ برای حل این سوال مناسب‌تر است.)

سوال یازدهم: گروه لیِ

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & y\end{pmatrix}\;\middle|\; x,y\in\mathbb{R}, y>0\right\}$$

را در نظر بگیرید.

الف) مولدهای جبرلیِ این گروه را پیدا کنید.

ب)متریک چپ‌ناوردای این گروه را که از پایه‌های دوگانِ میدان‌های برداری چپ‌ناوردا ساخته می‌شود، بسازید [۹] .

ج) هموستارِ لوی_چیویتا را به کمک اتحاد Koszul بدست آورید.

د) آیا این فضا، یک فضای انحنا ثابت است؟

سوال دوازدهم: روی خمینه‌ی $\mathbb{R}^3$ با متریک اقلیدسی، تعاریف زیر را ببینید [۱۰] . این تعاریف تعمیم عملگرهای Curl و Divergence هستند.

[۸] که در کلاسِ حل‌تمرین هم به دقت بررسی شد.

[۹] نمونه همین سوال در کلاس حل‌تمرین بررسی شده، برای یادگرفتن مفاهیم این سوال به آخرین جلسه حل تمرین رجوع کنید.

[۱۰] در مورد عملگرهای موسیقایی، $\flat, \sharp$ در کلاس حل‌تمرین حرف‌زده‌ایم.

$$\mathrm{div}X = \mathrm{div}X^\flat = -\delta X^\flat = \star d \star X^\flat, \quad X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$$

$$\mathrm{curl}X = (\star dX^\flat)^\sharp.$$

اتحادهای زیر را ثابت کنید [۱۱] .

الف [۱۲]) $\mathrm{curl\ grad}\ f = 0$

ب) $\mathrm{div\ curl}\ X = 0$

ج) $\varDelta\omega = -(\text{ grad div } \omega^\sharp + \text{ curl curl } \omega^\sharp)^\flat, \quad \omega \in \varLambda^1\mathbb{R}^3$

د [۱۳]) $\mathrm{curl}\ (fX) = (\mathrm{grad}\ f) \times X + f\ \mathrm{curl}\ X$.

ه) $\mathrm{div}\ (fX) = (\mathrm{grad} f).X + f\ \mathrm{div}X$

و [۱۴]) $\mathrm{div}(X \times Y) = X.\ \mathrm{curl}\ Y + (\mathrm{curl}\ X).Y$

سوال سیزدهم: نشان‌دهید که عملگر $\varDelta = d\delta + \delta d$ و عملگر $\star$ [۱۵] با هم جابه‌جا می‌شوند. آیا محاسبات شما به جهت‌پذیر بودن خمینه حساس است [۱۶] [۱۷] ؟

---

[۱۱] از خانم زینب ایوبی برای یادآوری اشتباهات در ترتیب نوشتن عملگرها، سپاسگزاری می‌کنم.

[۱۲] برای تعریف گرادیان به آخرین جلسه‌ی حل تمرین رجوع کنید.

[۱۳] در اینجا منظور از $\times$، همان ضرب خارجی بردارهاست.

[۱۴] منظور از نقطه، ضرب داخلی دوبردار است.

[15] Hodge star

[۱۶] برای فهمِ تعریف عملگر لاپلاسی برحسب عملگر های d و δ به آخرین کلاس حل تمرین رجوع کنید. در کلاس، شما عملگر δرا با نمادِ $d^\dagger$ شناختید، که همیوغ بودن این عملگر(تحت ضربِ فرمهای هم‌رتبه با هم) با d را بهتر می‌رساند.

[۱۷] محاسبات ساده‌یِ این سوال به جهت‌پذیری خمینه بستگی ندارد، تنها دلیلی که جهت‌پذیری خمینه در این سوال قید شده، این است که جهت‌پذیری خمینه، به ما کمک می‌کند که برای چینش فرمها در کنار هم یک انتخاب طبیعی داشته باشیم. در غیراین‌صورت، تغییری در حل سوال حاصل نمی‌شود، اما باید تغییراتی در تعریف عملگر ستاره‌یِ Hodge ایجاد شود که این تغییر به گروه Holonomy خمینه بستگی دارد. از خانم زینب ایوبی برای توجه به این نکته سپاسگزارم.

سوال چهاردهم: خمینه‌ی ریمانی M را مجهز به متریک زیر بگیرید.

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j + g_{nn}dx^n \otimes dx^n, \quad i,j = 1,2,\ldots,n-1.$$

هم‌چنین $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n} = 0$ و g_{nn} عددی ثابت است [۱۸] . نشان‌دهید که هر ژئودزیک ابررویه‌ی $x^n = 0$، ژئودزیکی از M هم هست [۱۹] .

---

[۱۸] باز هم از خانم زینب ایوبی ممنون برای تذکرشون.

[۱۹] این دقیقا همان چیزی است که مختصات تعمیم یافته‌ی Fefferman-Graham را برای محاسبات هولوگرافیک مناسب می‌کند. یعنی می‌توانیم خمینه‌مان را به برگ‌های ژئودزیک Geodesic leafs ، برگ‌بندی کنیم.