سری ۷ تمرینات کیهان شناسی مقدماتی

حسین محمدی 96101035 دکتر ابوالحسنی آقای سمنو و سراج

۱) الف)

$$@\ t = t_{eq} \rightarrow \rho_m = \rho_\gamma \rightarrow \rho_m^{\circ} \times \frac{\cancel{a_0^3}}{a_{eq}^3} = \rho_\gamma^{\circ} \times \left(\frac{a_0^4}{a_{eq}^4}\right) \rightarrow \rho_m^{\circ} = \frac{a_0}{a_{eq}} \rho_\gamma^{\circ} \rightarrow a_{eq} = \frac{\rho_\gamma^{\circ}}{\rho_m^{\circ}} a_0$$

$$\text{since } \frac{\rho_\gamma^{\circ}}{\rho_m^{\circ}} = \frac{\rho_\gamma / \rho_c}{\rho_m / \rho_c} = \frac{\Omega_R}{\Omega_m} \rightarrow a_{eq} = \frac{\Omega_R}{\Omega_m} a_0$$

ب)

جایگذاری

$$H_{eq}^2 = H_0^2\left(\Omega_m\left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^3 + \left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^4 \Omega_R\right) = H_0^2\left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^3\left(\Omega_m + \underbrace{\frac{a_0}{a_{eq}}}_{\frac{\Omega_m}{\Omega_R}} \Omega_R\right) \Rightarrow H_0^2\left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^3 (2\Omega_m)$$

جذر گرفتن $\Rightarrow H_{eq} = H_0 \left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^{3/2} \sqrt{2\Omega_m}$

ج)

از بالا $\rightarrow H_0^2 = H_{eq}^2 \left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^3 \frac{1}{2\Omega_m}$

معادله فریدمان (1) $\rightarrow H^2 = H_{eq}^2 \left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^3 \frac{1}{2\Omega_m}\left(\Omega_m\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_R\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right) \rightarrow$

ضرب

$$H^2 = H_{eq}^2 \times \frac{1}{2} \times \left(\left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3 + \underbrace{\frac{\Omega_R}{\Omega_m}}_{\text{از الف } = \frac{a_{eq}}{a_0}} \left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^3 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right) \Rightarrow \text{جذر بگیرم}$$

$$H = \frac{H_{eq}}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^4\right)^{1/2}$$

د)

$\rightarrow$ جایگذاری $a_1, H_1 \rightarrow H_1 = \frac{H_{eq}}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{a_{eq}}{a_1}\right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a_1}\right)^4\right)^{1/2} \rightarrow$ فاکتور از $\left(\frac{a_{eq}}{a_1}\right)^4 \rightarrow$

$$\frac{H_1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a_{eq}}{a_1}\right)^2\left(1 + \frac{a_1}{a_{eq}}\right)^{1/2} \xrightarrow{a_1 \ll a_{eq} \text{ بسط}} \frac{H_1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a_{eq}}{a_1}\right)^2\left(1 + \frac{a_1}{2a_{eq}} + \cdots\right)$$

$$\rightarrow H_1 \approx \frac{H_{eq}}{\sqrt{2}}\left(\frac{a_{eq}}{a_1}\right)^2 \quad ⊛$$

هـ) از رابطه‌ی (ه)، a_1 را برحسب H_1 می‌نویسیم $\leftarrow$

$$a_1 = \frac{a_{eq}\sqrt{H_{eq}}}{2^{1/4}\sqrt{H_1}}$$

همچنین از (3) هم a_0 را برحسب H_0 می‌نویسیم $\leftarrow$

$$a_0 = \frac{a_{eq} H_{eq}^{2/3}}{2^{1/3} H_0^{2/3} \Omega_m^{1/3}}$$

حال $\frac{a_1 H_1}{a_0 H_0}$ را حساب کنیم،

$$\frac{a_1 H_1}{a_0 H_0} = \frac{a_{eq} H_{eq}^{1/2}}{2^{1/4} H_1^{1/2}} \times H_1 \times \frac{1}{H_0} \times \frac{2^{1/3} H_0^{2/3} \Omega_m^{1/3}}{a_{eq} H_{eq}^{2/3}} =$$

توان H_{eq} $= 1/2 - 2/3 = \frac{3-4}{6} = -\frac{1}{6}$

توان H_1 $= 1 - 1/2 = 1$

توان H_0 $= 2/3 - 1 = -1/3$

$$= \frac{2^{1/12} \sqrt{H_1}\, \Omega_m^{1/3}}{H_0^{1/3} H_{eq}^{1/6}} = 2^{1/12} \times \sqrt{\frac{H_1}{H_0}}\, \Omega_m^{1/3} \times \underbrace{\left(\frac{H_0}{H_{eq}}\right)^{1/6}}$$

$H_0^{-1/6} H_0^{+1/2}$ این را بنویسید

دوباره از معادله ی (۱۳) این را می خوانیم

$$\frac{H_0}{H_{eq}} = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_m}} \times \left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^{3/2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{H_0}{H_{eq}}\right)^{1/6} = \frac{1}{2^{1/12}\, \Omega_m^{1/12}} \left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^{\frac{1}{4}}$$

جایگذاری شود

$$\cancel{2^{1/12}} \times \left(\frac{H_1}{H_0}\right)^{1/2} \times \Omega_m^{1/3} \times \frac{1}{\cancel{2^{1/12}}\, \Omega_m^{1/12}} \left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{H_1}{H_0}} \Big(\underbrace{\frac{a_{eq}}{a_0}\, \Omega_m}_{\Omega_R} \Big)^{\frac{1}{4}}$$

$1/3 - 1/12 = \frac{1}{4} = \Omega_m$ توان

$$= \left(\Omega_R \frac{H_1^2}{H_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \xlongequal{\text{معادله فریدمان}} \left(\Omega_R \frac{\rho_1}{\rho_{0,crit}}\right)^{1/4}$$

$$\Longrightarrow \text{طبق شرط حل مسئله } 24 \rightarrow e^N > \left(\Omega_R \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{1/4}$$

(ز) ρ_0 را می توانیم صریح کنیم و داریم ← $\rho_0 = (3 \times 10^{-3}\, eV)^4 h^2$ و با قرار دادن $h \simeq 0.7$ داریم: ($\Omega_r h^2 = 2.47 \times 10^{-5}$)

$$e^N > \left(\Omega_R \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{4}} = (\text{معلوم}) \quad \dots \longrightarrow N > \ln\left[\left(\frac{2.47 \times 10^{-5}}{0.7^2} \times \frac{(2 \times 10^{25})^4}{(3 \times 10^{-3})^4 \times 0.7^2}\right)^{1/4}\right]$$

$$\Longrightarrow N > 61.77 \Longrightarrow N \geq 62$$

سوال ۲) الف)

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

ازآنجایی که تانسور δ در هر مختصاتی برابر قطری است پس هر نوع diffeomorphism که با δ آن را نشان می‌دهیم آن را تغییر نمی‌دهد پس $\delta(\delta^\mu{}_\nu)$ یعنی تغییر تانسور دلتا تحت یک وارسانی صفر است.

متقارن

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \delta_\mu{}^\mu = 1 \Rightarrow g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 1 \quad \text{چون}$$

$$\Rightarrow \delta(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = 0 \longrightarrow (\delta g^{\mu\nu}) g_{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad \text{or} \quad g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

ب) قواعد وردش با تبدیل مثل مشتق گرفتن است دقیقاً پس:

$$\ln(\det M) = \operatorname{Tr}(\ln M) \longrightarrow$$

$$\frac{\delta \det M}{\det M} = \operatorname{Tr}\left(\frac{\delta M}{M}\right) = \operatorname{Tr}(M^{-1}\delta M)$$

البته این کار خیلی بی ملاحظگی است ولی می‌توان دقیق‌تر نشان داد که این رابطه درست است:

در مرجع Jacobi's Formula در ویکی‌پدیا نگاه کنید، با روش های ساده‌ی جبر خطی ثابت می‌کند که

$$\delta(\det A) = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(A)\,\delta A) \longrightarrow \quad \text{اما} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)$$

$$\Rightarrow \delta(\det A) \times \frac{1}{\det A} = \operatorname{tr}(A^{-1}\delta A)$$

این دقیق‌شده رابطه بالاست و می‌توانید اثبات آن را در مرجع گفته شده ببینید:

پس پاسخ نهایی این است که ←

$$\delta(\det M) = \det M \operatorname{tr}(M^{-1}\delta M)$$

ج) حال M را ساده قرار می‌دهیم که

$$M = g_{\mu\nu} \qquad M^{-1} = g^{\mu\nu}$$

$$\delta g = g \operatorname{tr}(g^{\alpha\mu}\delta g_{\mu\beta}) \xrightarrow{\text{با گرفتن تریس اندیس‌های اول و آخر را یکی کنید}} = g\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$$

$$\delta g = g\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad \leftarrow \text{از قسمت الف می‌شود استفاده کرد و نوشت}$$

د)

$$\cancel{\sqrt{-g}} \times \sqrt{-g}$$

$$\delta\sqrt{-g} \xRightarrow{\text{قاعده مشتق‌گیری عادی}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cancel{\sqrt{-g}}}\left((-g) g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

ه)

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g}\left(-\tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - V(\phi)\right)$$

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}}$$

محاسبه: $\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left[\left(\sqrt{-g}\right)\left(-\tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \phi)(\partial_\beta \phi) - V(\phi)\right)\right]$

$$= \left(-\tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha\phi\, \partial_\beta \phi - V(\phi)\right) \underbrace{\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}}_{*} + \left(\sqrt{-g}\right)\left(-\tfrac{1}{2} \partial_\mu\phi\, \partial_\nu\phi\right)$$

$$* = \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\; g_{\rho\sigma} \frac{\delta g^{\rho\sigma}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\; g_{\mu\nu}$$

دقت که $\mu = \rho$ و $\sigma = \nu$ باشد غیر صفر است

یا $g^{\rho}_{\mu} g^{\sigma}_{\nu}$ است.

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\; g_{\mu\nu}\left(-\tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\, \partial_\beta\phi - V(\phi)\right) + \sqrt{-g}\left(-\tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\, \partial_\nu\phi\right)$$

با ترانهش $\alpha \leftrightarrow \beta$، $\beta \leftrightarrow \alpha$

$$\Rightarrow T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu\phi\, \partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha \phi\, \partial_\beta\phi + V(\phi)\right)$$

به شکل معادله (۱۶) می‌رسیم ■

و) در حد میدان همگن $\phi(x,t) = \bar{\phi}(t)$ پس مشتقات مکانی صفر می‌شوند داریم:

$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$ and since $\phi = \bar{\phi}(t)$

and $g^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, a^2, a^2, a^2)$

فقط مولفه g^{00} می‌ماند چون مشتقات مکانی میدان صفرند.

$$T_{00} = \partial_0\phi\, \partial_0\phi - g_{00}\left(\tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\, \partial_\beta\phi + V(\phi)\right) \rightarrow$$

$$= \dot{\phi}^2 - (-1)\left(\tfrac{1}{2}(-1)\dot{\phi}\dot{\phi} + V(\phi)\right) = \dot{\phi}^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) = \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad ■$$

ز)

$i, j \neq 0$ (Latin indices)

$$T_{ij} = \underbrace{\partial_i\phi\, \partial_j\phi}_{\text{صفر چون } \phi \text{ تابع } t \text{ است.}} - \underbrace{g_{ij}}_{\delta^{ij} \times a^2(t)}\Big(\tfrac{1}{2}\underbrace{g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\, \partial_\beta\phi}_{\text{مثل قبل همان } \left(-\tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) \text{ می‌شود}} + V(\phi)\Big) = -a^2\delta^{ij}\left(-\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)\right)$$

$$= a^2\delta^{ij}\left(\tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right)$$

با به اجزای مشترک نگاه کنید.

پس با شباهت با (۱۸)، $P(t) = \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ می‌شود. ■

ح) معادله دوم فریدمان: $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \Rightarrow$ for $\ddot{a} > 0 \rightarrow \rho + 3P < 0 \Rightarrow \frac{P}{\rho} < -\frac{1}{3}$ ∎

ط)

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} < -\frac{1}{3}$$

توجه کنید که اگر ترم جنبشی غالب باشد، حاصل $\frac{P}{\rho}$ می‌شود عدد 1، نامساوی برقرار نیست

ولی اگر $V(\phi) \ggg \dot{\phi}^2$ پس $\frac{P}{\rho} = -1$، نامساوی برقرار است پس شرط غلبه کردن $V(\phi)$ باعث می‌شود که میدان در دوره‌ی انبساط شتاب‌دار را تحقق ببخشد. ∎

سوال ۳) الف)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)\right)$$

$$E\text{-}L: \quad \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \text{و} \quad \mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - V(\phi)\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\right) = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\partial_\nu\phi\right) = \sqrt{-g}\,\partial_\nu\phi$$

and $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\sqrt{-g}\,\frac{\partial V}{\partial \phi} \rightarrow$ در معادله اویلر - لاگرانژ قرار می‌دهیم:

$$\partial_\nu\left(\sqrt{-g}\,\partial^\nu\phi\right) + \sqrt{-g}\,\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \xrightarrow{\sqrt{-g}\ \text{تقسیم بر}} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}\,\partial^\nu\phi\right) + V_{,\phi} = 0$$

ب) $g_{\mu\nu} = (-1, a^2, a^2, a^2)$ پس:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-(-1)^3 a^6} = a^3$$

$$\frac{1}{a^3}\partial_\mu\left(a^3\,\partial^\mu\phi\right) + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \Rightarrow \frac{1}{a^3}\left(a^3\,\Box\phi + \partial_\mu(a^3)\,\partial^\mu\phi\right) + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$

But: $\partial_\mu(a^3) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}a^3 = 3\times a^2 \times \frac{\partial a}{\partial x^\mu} \rightarrow$ چون a تابع x نیست پس این ۴ بردار تنها مولفه‌ی صفرم مقدار دارد و داریم

$$(\partial_\mu a^3)(\partial^\mu\phi) = \left(3a^2 \times \frac{\partial a}{\partial t}\right)\left(\dot{\phi}\right) = 3a^2\dot{a}\dot{\phi}$$

$$\Rightarrow \Box\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$

ج) ابتدا $\phi(t,x) = \bar{\Phi}(t) + \delta\phi(t,x)$ را باید در معادله قرار دهیم و بخش همگن را جدا کنیم و اضلاعات را بدست آوریم و معادله حرکت $\delta\phi$ را بخواهیم:

بیاید ببینیم که تک تک جملات معادله‌ی بالا چه تغییری می‌کنند:

چون فقط تابع زمان است!

$$\Box\Phi(t,x) = \ddot{\bar{\phi}}(t) + \Box\,\delta\phi$$

اما $\Box = g^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu \longrightarrow$ چون $g^{\mu\nu}$ قطری است پس $g^{ii} = -\frac{1}{a^2}$ $\Rightarrow \Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{\nabla^2}{a^2}$

$$\Rightarrow \Box\phi(x,t) = \ddot{\bar\phi} + \delta\ddot\phi - \left(\frac{\nabla^2}{a^2}\right)\delta\phi$$

و قسمت $\partial H\dot\phi$ به سادگی به صورت $3H(\dot{\bar\phi} + \delta\dot\phi)$ تبدیل می‌شود و

در مورد پتانسیل هم باید گفت چون آنگونه که با اندازه $|\delta\phi| <<< \bar\phi$ اختلال می‌خورد پس $V(\phi)$ را بسط تیلور می‌دهیم:

$$V(\phi) = V(\bar\phi) + \frac{\partial V}{\partial\bar\phi}\delta\phi \longrightarrow$$

اما چیزی که در معادله نیاز داریم $\frac{\partial V(\phi)}{\partial\bar\phi}$ است پس مستقیم مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial\bar\phi} = \frac{\partial V(\bar\phi)}{\partial\bar\phi} + \frac{\partial^2 V}{\partial\bar\phi^2}\delta\phi$$

حال همه‌ی ترم‌ها را جمع کنیم:

$$\underbrace{\ddot{\bar\phi} + 3H\dot{\bar\phi} + \frac{\partial V(\bar\phi)}{\partial\bar\phi}} + \delta\ddot\phi - \left(\frac{\nabla^2}{a^2}\right)\delta\phi + 3H\delta\dot\phi + \frac{\partial^2 V}{\partial\bar\phi^2}\delta\phi = 0$$

چون میدان پس‌زمینه در نبود اختلال (در معادله) $\ddot\phi + 3H\dot\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$ صدق می‌کند پس این قسمت همان معادله حرکت پس‌زمینه است و صفر می‌شود

$$\Rightarrow \delta\ddot\phi - \left(\frac{\nabla^2}{a^2}\right)\delta\phi + 3H\delta\dot\phi + \frac{\partial^2 V}{\partial\bar\phi^2}\delta\phi = 0$$

حال به فضای فوریه می‌رویم و معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\delta\phi(t,x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}(\delta\phi_k)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

توجه کنید که چون مشتق‌گیری های زمانی با تبدیل فوریه کاری ندارند و از آن بیرون می‌آیند پس به راحتی می‌توان نوشت:

$$\delta\dot\phi(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(\delta\phi(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}(\delta\phi_k)\underbrace{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}_{\text{تابع t نیست!}}\right) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\delta\dot\phi_k e^{-ik\cdot x}$$

طرفین را در $e^{ik'\cdot x}$ ضرب کرده و انتگرال d^3x می‌گیریم $\rightarrow$

$$\int\delta\dot\phi(x,t)e^{ik'\cdot x}d^3x = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\int\delta\dot\phi_k \underbrace{e^{ix(k-k')}d^3x}_{\delta(k-k')}$$

$$\Rightarrow \delta\dot\phi_{k'} = \int\delta\dot\phi(x,t)e^{ik'\cdot x}d^3x$$

پس می‌بینیم که تبدیل فوریه $\delta\dot\phi_x$ همان $\delta\dot\phi_{k'}$ می‌شود

برای $\delta\ddot\phi(x)$، $\delta\ddot\phi_k$ هم به طور مشابه استدلال می‌شود، تنها چیزی که باقی می‌ماند ترم ∇^2 دار است:

تبدیل فوریه می‌گیریم $\rightarrow \int d^3x\, e^{ik\cdot x}\left(-\frac{\nabla^2}{a^2(t)}\delta\phi(x,t)\right) = -\frac{1}{a^2(t)}\int d^3x\, e^{ik\cdot x}\nabla^2\delta\phi(x,t)$

از انتگرال بیرون می‌آید...

بیایید یکی از مولفه‌های انتگرال مثل $\int dx_1$ را در نظر بگیریم.

$$\int d^3x_1\, e^{ik_1x_1}\partial_{x_1}\partial_{x_1}\delta\phi(x,t) \xrightarrow{\text{جزء به جزء بزنیم}} \underbrace{e^{ik_1x_1}\partial_{x_1}\delta\phi(\vec{x},t)}_{0} - \int d^3x_1\left(\partial_{x_1}e^{ik_1x_1}\right)\partial_{x_1}\delta\phi(\vec{x},t)$$

یک حلقه برای مرز این هست
$x_1 \to x_1+2\epsilon$ و در نهایت پس از صفر شدن

با جایگذاری کران ۰ ← ε میل می‌دهیم ← برای این حلقه که نامتناهی ... تبدیل فوریه مادر را برقرار کند حلقه نامتناهی ...

$$= -\int d^3x_1\,(ik_1)\,e^{ik_1x_1}\partial_{x_1}(\delta\phi(\vec{x},t)) \xrightarrow{\text{جزء به جزء بعد}} +\int d^3x_1\,(-k_1^2)\,e^{ik_1x_1}\,\delta\phi(\vec{x},t)$$

اگر برای تمام مولفه های انتگرال این کار را تکرار کنیم:

$$\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \delta\phi(x,t) = \underbrace{\int d^3x}_{\text{ببریم بیرون}}(-\vec{k}^2)\overbrace{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\delta\phi(\vec{x},t)}^{\text{تعریف } \delta\phi_k} = -k^2\,\delta\phi_k$$

حال اگر فاکتور $\frac{1}{a^2}$ - را هم لحاظ کنیم می‌توانیم معادله قسمت قبلی (ج) را به شکل زیر بنویسیم:

$$\ddot{\delta\phi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k + 3H\dot{\delta\phi}_k + \frac{\partial^2 V(\bar{\phi})}{\partial\bar{\phi}^2}\delta\phi_k = 0$$

ه) شرط دوم این است که $\eta_\epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2}\left(\frac{V''}{V}\right) \ll 1$ حالا ترم $\frac{\partial^2 V(\bar\phi)}{\partial\bar\phi^2}$ همین V'' است پس می‌توانیم از آن صرف نظر کنیم

در می‌رسیم:

$$\ddot{\delta\phi}_k + 3H\dot{\delta\phi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k = 0$$

و)

$$v_k = a\,\delta\phi_k \qquad ; \qquad d\eta = \frac{dt}{a} \Rightarrow \frac{d\,\bigcirc}{dt} = \frac{d\,\bigcirc}{d\eta}\times\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}\bigcirc$$

ابتدا برحسب η می‌نویسیم معادلات را:

$$\frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}(\delta\phi_k)\right) + 3H\frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}(\delta\phi_k) + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k = 0$$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}(\delta\phi_k)'' - \frac{a'}{a^2}\delta\phi_k'\right) + 3\underbrace{\frac{a'}{a^2}}_{H}\times\frac{1}{a}(\delta\phi_k)' + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k = 0 \longrightarrow \times a^2 \text{ کردن}$$

$$\delta\phi_k'' + 2\frac{a'}{a}(\delta\phi_k)' + k^2\,\delta\phi_k = 0 \qquad \text{Now put} \qquad \delta\phi_k = \frac{v_k}{a}$$

$$\left(\frac{v_k}{a}\right)'' + \frac{2a'}{a}\left(\frac{v_k}{a}\right)' + k^2\frac{v_k}{a} = 0$$

تک تک مشتق ها را حساب کنیم:

$$\left(\frac{v_k}{a}\right)'' = \left(\frac{a'v_k - v_k'a}{a^2}\right)' = \frac{v_k''}{a} - \frac{a'v_k'}{a^2} - \frac{a''v_k}{a^2} + \frac{a'v_k'}{a^2} + \frac{2(a')^2v_k}{a^3}$$

صحیح: $-\frac{2a'v_k'}{a^2}$ *

$$\frac{2a'}{a}\left(\frac{v_k}{a}\right)' = \frac{2a'v_k'}{a^2} - \frac{2(a')^2v_k}{a^3}$$

حذف می‌شوند

دو تا ترم * هم حذف می‌شوند و می‌ماند ⟵ طرفین را در a ضرب کنیم ⟵ $v_k'' - \frac{a''v_k}{a} + k^2v_k = 0$

$$\Rightarrow \quad v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) v_k = 0$$

ج) $k \gg aH$ در مقیاس های عمیقاً داخل افق است که فضا زمان موضعاً تخت است!

در حد k ها بسیار بزرگ، انگار مدهای با طول موج بسیار بسیار کوتاه را می‌بینیم و چون در فواصل کوتاه، فضاهای مینکوفسکی است پس $a''=0$ و معادله به $v_k'' + k^2 v_k = 0$ تقلیل می‌یابد و این معادله نوسانگرهای هماهنگ ساده است.

یعنی مدهایی که در ابعادهای کوچک هستند، مثل نوسانگر هماهنگ رفتار می‌کنند و معادله‌ی موج عادی دارند.

b) $k \ll aH$ می‌توانیم در معادله از k صرف نظر کنیم و بنویسیم:

$$v_k'' - \frac{a''}{a} v_k = 0 \longrightarrow a v_k'' = a'' v_k \quad \text{یا} \quad \frac{a''}{a} = \frac{v_k''}{v_k}$$

But $\frac{a''}{a} = \frac{2}{\tau^2}$ where $\tau = \frac{1}{aH}$ is Conformal time :

$$\Rightarrow v_k'' = \frac{2}{\tau^2} v_k \longrightarrow \text{حل معادله} \longrightarrow v_k(\tau) = \frac{c_1}{\tau} + c_2 \tau^2$$

$$\Rightarrow v_k(a) = c_1 \times a \times H + \frac{c_2}{a^2 H^2}$$

پس اگر تغییر متغیر را برگردانیم که $v_k = a\,\delta\phi_k$ بود پس:

$$\delta\phi_k = v_k \times \frac{1}{a} = c_1 \times H + \frac{c_2}{a^3 H^2}$$

پس یکی از جواب ها ثابت است و یکی هم متناسب با $\frac{1}{a^3}$ است که چون $a = e^{Ht}$ پس به سرعت افت می‌کند، $\propto e^{-3Ht}$ است، پس نشان دادیم که افت و خیزهای فراافقی یا ثابت‌اند یا به شکل نمایی افت می‌کنند.