

آزمونک سوم - درس نظریه گروه‌ها

استاد درس: دکتر رضاخانی

دستیارهای درس: حسین محمدی، زهرا کبیری

۱۰ اردیبهشت ماه سال ۱۴۰۳

سوال زیر با هدف مرور مفاهیم اثر گروه روی مجموعه طراحی شده است.

سوال: مجموعه‌ی

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

را با عمل ضرب ماتریسی در نظر بگیرید. این مجموعه یک زیرگروه متناهی از گروه $GL_2(\mathbb{R})$ را تشکیل می‌دهد. همانطور که می‌دانیم؛ این گروه با ضرب ماتریسی روی بردارهای صفحه عمل می‌کند.

مدارهای اثر این گروه روی بردارها را دسته بندی کنید. یعنی اثر اعضای G روی اعضای

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

با شرط $(x \neq y \text{ و } x, y \neq 0)$ بدست آورید و سپس مجموعه $O_G(e_i)$ را برای بردارهای بالا بسازید. استدلال کنید که مدارها، مجموعه‌ی بردارهای دوبعدی را افراز می‌کنند.