تمرین سری پنجم درس نظریه گروه‌ها - دکتر رضاخانی

مهلت تحویل اولیه: پنج‌شنبه ۶ اردیبهشت ماه سال ۱۴۰۳ تا ساعت ۲۳:۵۹
به علت مشغله‌های درسی دانشجویان تا روز سه‌شنبه ۱۱ اردیبهشت‌ماه تمدید شد.

از طریق سامانه درس‌افزار شریف

حسین محمدی
hossein.mohammadi.imp@gmail.com

زهرا کبیری
kabiri.zahra98@gmail.com

تعاریف

با اثر گروه روی مجموعه‌ها آشنا شدید. اینجا با هم یک سری تعاریف را مرور می‌کنیم؛ تعاریفی که احتمالا در درس هم خواهید دید. اول فرض کنید گروه G، از چپ روی مجموعه‌ی S اثر کند [*] .

پایدارساز [†]: برای هر عضو $s \in S$ مجموعه‌ی پایدارساز این عضو را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Stab}_g(s) = \{g \in G \mid g.s = s\}$$

یا به طور کلی‌تر، برای هر زیرمجموعه‌ی T از مجموعه‌ی S، می‌توانیم تعریف کنیم

$$\mathrm{Fix}_G(T) = \{g \in G \mid g.x = x \ \text{ for all } x \in T\}$$

همانطور که از اسمشان هم پیداست، اعضای پایدارساز یک عضو خاص از مجموعه را ثابت نگه می‌دارند.

مدار [‡] : عنصر $s \in S$ را معین کنید؛ مدار s تحت اثر گروه G به شکل زیر تعریف می‌شود [§]

$$\mathrm{Orb}_G(s) = \{g.s \mid g \in G\}$$

با این تعاریف، می‌توانید به دسته‌های تزویجی با کمک «اثر گروه روی خودش»، از منظری جدید نگاه کنید. هر گروه G به شکل زیر روی خودش اثر می‌کند:

$$g \in G, s \in G \quad , \quad g.s = gsg^{-۱}$$

آن‌وقت کلاس‌های تزویجی چیزی جز مدار این اثر نیستند.

[*] مشابها این مفاهیم را برای اثر از راست هم می‌توانید تعریف کنید.

[†] Stabilizer

[‡] Orbit

[§] از آقای محمد قوهستانی و خانم مژده محمودیان برای تذکرشان ممنونیم.

تمرین ۲۱ [۲۵ امتیاز] : میدان $\mathbb{F}_p$ ، که در آن p عددی اول است، درنظر بگیرید. گروه $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ را گروه متشکل از ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$ با درایه‌های عضو میدان $\mathbb{F}_p$ فرض کنید.

می‌دانیم که اعضای این گروه با ضرب ماتریسی روی فضای برداری $\mathbb{F}_p^n$ ، یعنی فضای برداری nــ بعدی با ضرایب از میدان $\mathbb{F}_p$ اثر می‌کنند. حالا بردار $e_۱$ از این فضای برداری را به شکل زیر بگیرید [۱] :

$$e_۱ = (۱, \underbrace{۰, \ldots, ۰}_{\text{n-1 بار}})$$

مدار این عضو را (تحت اثر گروه G) پیدا کنید و اعضایش را بشمارید. همچنین مرتبه‌ی $\mathrm{Stab}_G(e_۱)$ را هم پیدا کنید.

[۱] از آقای ارمیا هلالی برای تذکر اشتباه تایپی ممنونیم.

تمرین ۲۲ [۳۵ امتیاز] : قضیه مدارـ پایدارساز

فرض کنید گروه متناهی G، از چپ روی مجموعه‌ی S اثر کند. نشان دهید که برای هر $s \in S$ داریم:

$$|G| = |\mathrm{Orb}_G(s)|.|\mathrm{Stab}_G(s)|.$$

یادآوری تعریف بهنجارساز و پایدارساز

بهنجارساز یک زیرمجموعه از گروه، مجموعه‌ی تمام اعضایی از گروه است که شرط بهنجاری را با تمام اعضای زیرمجموعه دارد.

$$N_G(S) = \{g \in G \mid gsg^{-1} \in S,\ \forall s \in S\}$$

همچنین؛ مرکزساز یک مجموعه، مجموعه‌ی تمامی اعضایی از گروه است که با تمامی اعضای زیرمجموعه‌ی مذکور جابه‌جا می‌شوند.

$$C_G(S) = \{g \in G \mid gs = sg,\ \forall s \in S\}$$

تمرین ۲۳ [۱۵ امتیاز] :

اگر H زیرگروهی مرتبه دو از گروه G باشد، نشان دهید که $C_G(H) = N_G(H)$.

تمرین ۲۴ [۲۵ امتیاز] :

کلاس‌های تزویجی گروه D_5 را به‌دست آورید.

پیشنهاد مطالب برای مطالعه بیشتر

از قضایای بسیار مهمی که خوب هست بدانیم؛ معادله کلاس * است. وقتی گروه G مطابق جعبه‌ی «تعریف» روی خودش اثر می‌کند:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{s \in \text{disjoint nontrivial orbits}} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(s)|}$$

در مسائل مربوط به رنگ‌آمیزی گرافها و ترکیبیات، معادله کلاس بسیار راهگشاست. احتمالا در این موارد حرف نزنم و سوالی هم حل نکنم؛ اما با یک جستجوی ساده می‌تواند این مسائل را پیدا کنید و راه‌حلشان را ببینید.
همچنین استفاده از قضایایی که در تمرین دیدید، چارچوب خوبی را برای فهم و استفاده از قضایای سیلو فراهم می‌کند.

*Class equation