درس نامه‌ی همریختی و یک‌ریختی (همانی و یکسانی)

با مبانی همسانی و یکسانی که آشنا هستیم،

قضیه اساسی همسانی ها (قضیه اول)

$\phi: G \to G'$ is a homomorphism

$$\frac{G}{\ker\phi} \simeq \operatorname{Im}\phi$$

قضیه‌ی سوم همسانی ها : G گروه مفروض باشد و دو زیرگروه $H, K \triangleleft G$ مفروض‌اند به طوری که

$K \subseteq$ (subset) H ← $\frac{H}{K} \triangleleft \frac{G}{K}$, $\frac{G/K}{H/K} \simeq \frac{G}{H}$

اثبات : اول نرمال بودن $\frac{H}{K} \triangleleft \frac{G}{K}$.

اعضای نوعی gK و hK در دو گروه $\frac{G}{K}$ و $\frac{H}{K}$ را در نظر بگیرید، طبق تعریف:

$$(gK)(hK)(gK)^{-1} \in \frac{H}{K}$$

توجه کنید که چون $h \in H$ به طریق اولی $h \in G$

پس ضرب روبرو ضرب نماینده‌ی همدسته‌های گروه $\frac{G}{H}$ است که خوش تعریف است.

خواص ضرب

$$= \underbrace{(ghg^{-1})}_{\in H}K$$

چون $H \triangleleft G$

$\Longrightarrow$ پس $(gK)(hK)(gK)^{-1}$ خود عضو $\frac{H}{K}$ است و اثبات کامل است

حال همریختی روبرو را تعریف کنید:

$$\varphi: \frac{G}{K} \to \frac{G}{H}$$

$$\varphi(gK) = gH$$

well-definedness: $g_1K = g_2K \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in K \xrightarrow{K \subseteq H} g_2^{-1}g_1 \in H \Rightarrow g_2H = g_1H$

Homomorphism: $\varphi(\underbrace{g_1K\, g_2K}) \overset{?}{=} \varphi(g_1K)\, \varphi(g_2K)$

$\varphi(g_1g_2K) \qquad\qquad g_1H \cdot g_2H$

$\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$

$g_1g_2H \quad = \quad g_1g_2H$

$\operatorname{Im}\varphi \rightarrow$ since we can choose gK as the input (for all $g \in G$)

, owing to well-definedness, $\operatorname{Im}\varphi$ will be gH for all $g \in G$,

so $\operatorname{Im}\varphi = \frac{G}{H}$

$\operatorname{Ker}\varphi = \{gK : \varphi(gK) = eH\}$

$\{gK : gH = eH\}$

$\{gK : g \in H\} = \frac{H}{K}$

First homomorphism theorem : $\frac{G/K}{H/K} \simeq \frac{G}{H}$ ■

$\frac{H}{H \cap N} \simeq \frac{HN}{N} \Longleftarrow N \trianglelefteq G,\ H \leqslant G$: قضیه‌ی دوم همسانی

First: $H \cap N \trianglelefteq H$ since $\alpha \in H \cap N \begin{cases} \alpha \in H \\ \alpha \in N \end{cases} \rightarrow$ check for $h \in H$ $h\alpha h^{-1} \in H \cap N$

1. since $\alpha \in H \Rightarrow h\alpha h^{-1} \in H$
2. since $h \in H \subset G$, $N \trianglelefteq G$ so $h\alpha h^{-1} \in N$

$\Big\}\ h\alpha h^{-1} \in H \cap N$

Second : $N \trianglelefteq NH$, since $n \in N$, for all $\tilde{n}\tilde{h} \in NH$

(NH is subgroup since

1. Associative
2. Inverse $\quad nh \in NH \longrightarrow (nh)^{-1} = h^{-1}n^{-1} \times e$

$$= \underbrace{h^{-1}n^{-1}h}_{N \trianglelefteq G}h^{-1} = n'h^{-1} \in NH$$

3. closed ?

$$(n_1h_1)(n_2h_2) = n_1\underbrace{(h_1n_2h_1^{-1})}_{n'}h_1h_2$$

$$= \underbrace{n_1n'}_{\in N}\ \underbrace{h_1h_2}_{\in H} \in NH$$

4. unit element ? ✓)

$N \trianglelefteq G$

$$(\tilde{n}\tilde{h})\,n\,(\tilde{n}\tilde{h})^{-1} = \tilde{n}\underbrace{\tilde{h}\,n\,\tilde{h}^{-1}}_{\in N}\tilde{n}^{-1} \in N$$

Define $\phi : H \longrightarrow \underbrace{\frac{HN}{N}}$ by $\qquad \phi(h) = hN$

در کل معتبر نیست!

$$nHN = HnN$$
$$nH = Hn \qquad \| $$
$$HN$$

$N \trianglelefteq H \leq G$

Homomorphism : $\phi(xy) = xyN = (xN)(yN) = \phi(x)\phi(y)$

$$\ker\phi = \{h \in H : \phi(h) = e_{\text{مقسم}}\} = \{h \in H : hN = N\}$$

$$= \{h \in H : h \in N\} = H \cap N$$

φ is also surjection $\Longrightarrow$ First theorem:

$$\frac{H}{H\cap N} \simeq \frac{HN}{N} \qquad \blacksquare$$

A simple Application!

Consider $a\mathbb{Z}$, $b\mathbb{Z}$, then $\overset{\text{ضرب درونی}}{(a\mathbb{Z}\cdot b\mathbb{Z})} = (a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}) = \gcd(a,b)\,\mathbb{Z}$

اثبات هم‌ارزی با عضوگیری + قضیه بزو

مثال $(6\mathbb{Z}+9\mathbb{Z}) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$

$6\mathbb{Z}$	$9\mathbb{Z}$
-12	-18
-6	-9
0	0
$+6$	$+9$
$+12$	$+18$

Take $N = b\mathbb{Z}$ and $H = a\mathbb{Z}$ and notice that $N \trianglelefteq G = \mathbb{Z}$

Also $a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z} = \operatorname{lcm}(a,b)\,\mathbb{Z}$

مثال $6\mathbb{Z}\cap 9\mathbb{Z} = \{0, \pm 18, \pm 36, \dots\}$

$$\frac{H}{H\cap N} = \frac{NH}{N} \longleftrightarrow \frac{a\mathbb{Z}}{\operatorname{lcm}(a,b)\,\mathbb{Z}} \simeq \frac{\gcd(a,b)\,\mathbb{Z}}{b\mathbb{Z}}$$

Taking orders as quotient group $= \dfrac{a}{\operatorname{lcm}(a,b)} = \dfrac{\gcd(a,b)}{b} \rightarrow$ کمم $\times$ بمم $= ab$

$|A\mathbb{Z}|$ $\quad A$

$B \mid A \longrightarrow \left| B\mathbb{Z} \right| = \frac{\ }{B}$

problem TBD in home : $\begin{cases} M, N, S \leqslant G \\ M \trianglelefteq N \\ N/M \text{ is Abelian} \end{cases}$ $\rightarrow$ show that $\dfrac{N \cap S}{M \cap S}$ is Abelian!

problem : $O(2n+1)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(2n+1)$

Define $\phi : O(2n+1) \longrightarrow SO(2n+1)$ by

$$\phi(O) = \frac{O}{(\det(O))^{\frac{1}{2n+1}}}$$ check it's homomorphism

$\rightarrow \ker \phi = \{ O \in O(2n+1) \mid O = (\det O)^{\frac{1}{2n+1}} \mathbb{1} \}$

$$O^{2n+1} = \det O \, \mathbb{1}$$

since $OO^T = \mathbb{1} \rightarrow \det O = \pm 1 \Rightarrow (\det O)^{2n+1} = (\pm 1)^{2n+1} = \pm 1$ ✓

so $\ker \phi = \{ \pm \mathbb{1} \}$

$\Rightarrow \ker \phi = \mathbb{Z}_2$ use first theorem ✓

why the same argument won't work for $O(2n)$?

Final problem: Let G be finite Abelian group, and $(n, |G|) = 1$

show that $\forall g \in G \quad \exists x \in G : g = x^n$.

$\phi : G \longrightarrow G$

$\phi(y) = y^n$

It's an isomorphism $\rightarrow$ homo. $\rightarrow \phi(y_1 y_2) = (y_1 y_2)^n \xrightarrow{G \text{ is Abelian}} y_1^n y_2^n = \phi(y_1)\phi(y_2)$

$\rightarrow$ 1-1 $\rightarrow$ Find kernel!

$\ker\phi = \{ x \in G \mid x^n = e \}$

since $(n, o(G)) = 1 \xrightarrow[\exists s,t]{\text{بزو}} ns + t\,o(G) = 1$

$\rightarrow \quad x = x^1 = \underbrace{(x^n)^s}_{e} \cdot \underbrace{x^{t\,o(G)}}_{\text{مرتبه } x \,\mid\, o(G)} = e$

$\Rightarrow \quad x = e$!

$\ker\phi = \{e\}$

onto:

since $\ker = \{e\}$ and $\phi : G \longrightarrow G$

it must be onto, otherwise ...

$\rightarrow \quad \phi$ is isomorphism!

$\Rightarrow$ for all $g \in G$ (by surjectivity) $\exists x \in g : x^n = g$ $\boxtimes$