سری اول تمرینات درس ریاضی‌فیزیک پیشرفته - دکتر کریمی‌پور
خمینه‌ها - قسمت‌اول

موعد تحویل پاسخ‌ها: سوم اردیبهشت سال ۱۴۰۳ - تا ساعت ۲۳:۵۹

از طریق سامانه درس‌افزار

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

سوال اول: در فضای $\mathbb{R}^n$ شار زیر را در نظر بگیرید:

$$\alpha(t) : \mathbf{x} \longmapsto t\mathbf{x}.$$

میدان برداری وابسته به این شار را پیدا کنید.

سوال دوم: در فضای $\mathbb{R}^2$ با مختصات موضعی (x, y) میدان‌های برداری زیر را در نظر بگیرید:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Z = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}.$$

الف) شارهای مربوط به این میدان‌های برداری را حساب کنید.

ب)جابه‌جاگرهای میدان‌های برداری فوق را بیابید.

ج) مشتقات لی زیر را حساب کنید:

$$\mathcal{L}_X Y, \quad \mathcal{L}_X Z, \quad \mathcal{L}_Y Z$$

سوال سوم: در صفحه $\mathbb{R}^2$ نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$R : (x^1, x^2) \longrightarrow (x^1 \cos\theta + x^2 \sin\theta, -x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta)$$

تحت این نگاشت حساب کنید که بردار $X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ به چه برداری تبدیل می‌شود.

از نظری شهودی، رابطه بردار جدیدی که بدست آمده با بردار اولیه چیست؟ همین سوال را برای یک فرم دیفرانسیل نیز پاسخ دهید.

سوال چهارم: در فضای سه بعدی دکارتی تانسور زیر تعریف شده است:

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

تحت نگاشت

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta,$$

تبدیل تانسور فوق را بدست آورید. به عبارت دیگر Pullback تانسور g را بدست آورید. به چه چیزی می‌رسید؟

این کار را برای فرم دیفرانسیل زیر نیز انجام دهید:

$$\omega = dx \wedge dy \wedge dz.$$

سوال پنجم: در فضای $\mathbb{R}^3$ میدان‌های برداری زیر را در نظر بگیرید:

$$L_x = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \qquad L_y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad L_z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}.$$

الف)نشان دهید که این سه میدان برداری تحت حابه‌جاگر یک جبربسته تشکیل می‌دهند. شار مربوط به هر میدان برداری را بدست آورید. نتیجه را از نظر شهودی تعبیر کنید.

ب) به میدان‌های قسمت قبل میدان‌های زیر را اضافه کنید:

$$P_x = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad P_y = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad P_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

نشان دهید که مجموعه‌ی میدان‌های L_i و P_j تحت جابه‌جاگر یک جبر بسته تشکیل می‌دهند.

سوال ششم: روابط زیر را برای میدان‌های برداری و مشتق لی ثابت کنید.

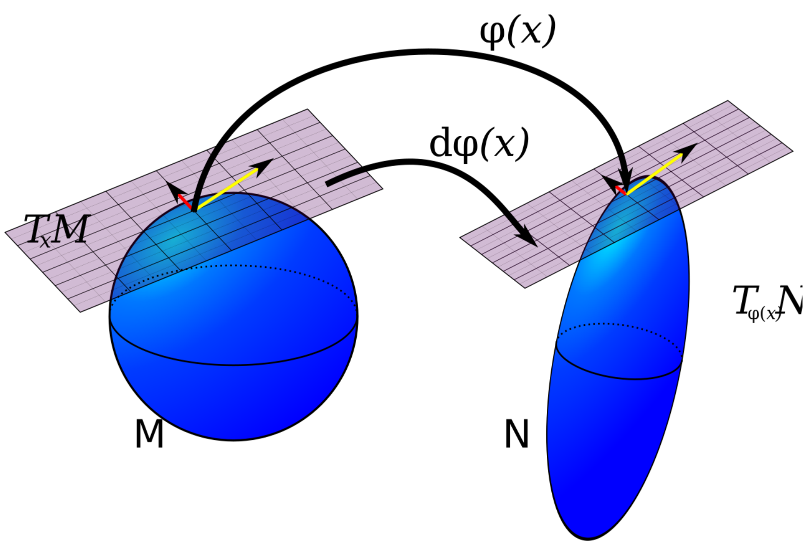
$$\mathcal{L}_{fX}Y = f[X,Y] - Y[f]X,$$
$$\mathcal{L}_X(fY) = f[X,Y] + X[f]Y.$$

که در آن $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ و $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ به ترتیب میدان‌های بردای و تابع هموار روی خمینه M هستند.

تمرین‌های کلاسی:

الف) با نگاشت Pushforward (گاه به آن نگاشت دیفرانسیل می‌گویند و با $d\varphi$ نشان می‌دهند.) در کلاس آشنا شدید. اگر نگاشت φ بین دو خمینه هموار موجود باشد، آنگاه نگاشت Pushforward وظیفه‌ی نگاشتن کلاف‌های مماس را بین این دو خمینه به عهده می‌گیرد.

$$\varphi^* : T_pM \longmapsto T_{\varphi(p)}N$$



شکل ۱: نگاشت بین خمینه‌های هموار و نگاشت Pushforward

گزاره‌هایی را که در کلاس به عنوان تمرین به شما واگذار شده است، حل کنید.

۱. ثابت کنید $\varphi^*(X)$ یک بردار است.

۲. با کمک تعریف ذاتی

$$\Big(\underbrace{\varphi^*(\overbrace{X}^{\in T_pM})}_{\in T_{\varphi(p)}N}\Big)[\overbrace{f}^{\in C^\infty(N)}] := X(\underbrace{f\circ\varphi}_{\in \mathcal{C}^\infty(M)})$$

مولفه‌های $\varphi^*(X)$ در $T_{\varphi(p)}N$ را حاصل کنید.

۳. خطی بودن نگاشت Pushforward را نشان دهید.

ب) تمرین‌قبل را برای نگاشت Pullback انجام دهید.

نگاشت Pullback، هم‌بردارها و فرم‌های فضای مقصد را به هم‌بردارها و فرمهای فضای مبدا می‌نگارد:

$$\Big(\overbrace{\varphi_*(\underbrace{\omega}_{\in T^*_{\varphi(p)}N})}^{\in T^*_pM}\Big)[\overbrace{X}^{\in T_pM}] := \omega(\underbrace{\varphi^*(X)}_{\in T_{\varphi(p)}N})$$

ج) رابطه‌ی زیر برای براکت لی را هم ثابت کنید [۱] .

$$\varphi^*[X,Y] = [\varphi^*X, \varphi^*Y]$$

[۱] ممنون از آقای پوربهرامی بابت تذکر نکته به‌جایشان.