

زیرگروه‌های بهنجار گروه S_4

حسین محمدی
زهرا کبیری

به کمک آقای اشتری فهمیدم که یک تمرین را برای شما اشتباه حل کردم. حالا اینجا سعی می‌کنم آن را دقیق و کامل بررسی کنم.

هدف دسته‌بندی تمام زیرگروه‌های بهنجار گروه S_4 است. در کلاس دیدید که یک زیرگروه بهنجار است اگر و تنها اگر تمامی اعضای یک کلاس تزویجی را دربربگیرد. مطابق رابطه‌ی

$$\sigma(i_1 i_2 \dots i_r) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_r))$$

که در آن $\sigma \in S_n$ است؛ می‌توانیم ببینیم که عمل همیوخ کردن، ساختار دوری را عوض نمی‌کند. بنابراین، کلاس‌های تزویجی یک گروه، در حقیقت متشکل از دورهای با ساختار دوری مشخص هستند. بیایید کلاس‌های تزویجی گروه S_4 را پیدا کنیم.

۱. دورهای به طول ۴ که ساختار $(ijkl)$ دارند. توجه کنید که دقیقاً ۶ عنصر از S_4 دور به طول چهار هستند.

$$C_1 = \{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}$$

۲. دورهایی که طول سه دارند و به شکل $(ijk)(l)$ هستند^۱. این کلاس تزویجی ۸ عضو دارد.

$$C_2 = \{(123), (132), (124), (142), (234), (243), (134), (143)\}$$

۳. سومین کلاس تزویجی مربوط به حاصل ضرب دو ترانهش مجزاست؛ این کلاس هم شامل ۳ عضو است.

$$C_3 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

۴. همچنین ترانهش‌های تکی هم یک کلاس تزویجی هستند که شش عضو دارد.

$$C_4 = \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$$

^۱ مقصود از (l) جایگشتی است که هر عضو را به خودش می‌برد و ما معمولاً در نوشته‌هایمان آن را نمی‌نویسیم.

۵. آخرین کلاس هم کلاس تزویجی بدیهی است که شامل عضو بدیهی است.

$$C_5 = \{e\}$$

حالا احتمالا به یاد دارید که ترانهش‌های تکی کل گروه را می‌سازند؛ بنابراین در زیرگروه بهنجارمان (که باید تمامی اعضای کلاس تزویجی را شامل شود) نمی‌توان ترانهش تکی داشت؛ چون اگر تنها یک ترانهش در زیرگروه H باشد، با ضرب ترانهش‌ها می‌توان کل گروه را ساخت. ($H = S_4$) مطابق قضیه لاگرانژ، مرتبه‌ی هر زیرگروهی (از جمله زیرگروه‌های بهنجار) باید مرتبه‌ی گروه اصلی را بشمارد. این یعنی مرتبه‌ی هر زیرگروهی باید ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۶ یا ۱۲ باشد؛ زیرگروه مرتبه ۲۴ دقیقا خود گروه S_4 است که در خودش به شکلی بدیهی بهنجار است. همچنین به خاطر قضیه‌ای که در کلاس دیدید؛ مرتبه‌ی زیرگروه بهنجار باید جمع تعداد اعضای کلاس‌های تزویجی باشد که در آن حاضرند. یعنی مرتبه‌ی زیرگروه بهنجار باید از جمع ۱ و ۳ و ۶ و ۸ حاصل شود و همچنین چون عضو بدیهی در هرگروه‌ی هست، باید ۱ حتما در این جمع باشد.

۱. یک حالت این است که فقط کلاس تزویجی بدیهی را در H بگنجانیم؛ در این حالت زیرگروهی بدیهی را خواهیم داشت که به وضوح در S_4 بهنجار است.

۲. حالت دیگر این است که کلاس بدیهی به همراه کلاس تزویجی C_3 را در زیرگروه H بگنجانیم. در این صورت مرتبه‌ی گروه ۴ است و همچنین خواص گروه را هم خواهد داشت (چرا؟).

$$H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

۳. حالت دیگر این است که کلاس بدیهی، کلاس C_2 به همراه کلاس C_1 را در نظر بگیریم. در این صورت زیرگروه حاصل ۱۲ عضوی خواهد شد. این زیرگروه دقیقا همان زیرگروه A_4 بدست می‌آید که هسته‌ی نگاشت sgn است که در تمرین‌ها با آن آشنا شدیم.

۴. در حالت آخر هم اگر تمامی کلاس‌های تزویجی را در نظر بگیریم، کل گروه حاصل می‌شود و به شکلی بدیهی S_4 در خودش بهنجار است.

پس تعداد زیرگروه‌های بهنجار گروه S_4 دقیقا چهارتا است؛ خودش، زیرگروه بدیهی، زیرگروه A_4 و همچنین زیرگروه H با تعریف بالا.