

خلاصه‌ای از مباحث کلاس حل تمرین

استاد درس: دکتر کریمی‌پور

جلسه‌ی سوم

دستیار درس: حسین محمدی

گردآوری: حانیه ملکی

۱۷ فروردین ۱۴۰۳

در این جلسه به سؤالات زیر پاسخ دادیم:

۱. بررسی گروه‌های همولوژی فضاهای مختلف
 ۲. بعد فضای خارج قسمت
 ۳. گروه هوموتوپی اول فضاهای مختلف و حذف کردن یک نقطه از آن‌ها
 ۴. گروه هوموتوپی اول فضاهای مختلف و حذف کردن چند نقطه از آن‌ها
 ۵. چند مثال از Retract و $\text{Deformation Retract}$
 ۶. ارتباط کاراکتر اویلر یک سطح ریمانی با جینس g و کاراکتر اویلر d -fold کاور آن.
- همچنین در مورد مباحث زیر بحث کردیم:
۱. قضیه ون کمپن^۱
 ۲. Algebraic sequences
 ۳. Brouwer fixed-point theorem: منبع ۱
 ۴. به دست آوردن گروه همولوژی نوار موبیوس به روش غیراستاندارد (Cell-complex): منبع ۱

^۱Van Kampen Theorem

^۲این قضیه به صورت کامل در فصل ۱۰ کتاب زیر آمده است:

Lee, J. M. (2010). Introduction to Topological Manifolds (2nd ed.). Springer.

سؤالات زیر را به دقت مورد بررسی قرار دادیم:

۱. فضای برداری \mathbb{R}^3 را در نظر بگیرید. یک زیرفضای یک بعدی از این فضا را در نظر بگیرید. این زیرفضا را با \mathbb{R}^1 نشان می‌دهیم. یک رابطه هم‌ارزی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \sim y \in \mathbb{R}^3 \text{ if } x - y \in \mathbb{R}^1.$$

نشان دهید که $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}^1$ یک فضای دوبعدی است. هم چنین یک زیرفضای دوبعدی از این فضا را در نظر بگیرید که آن را با \mathbb{R}^2 نشان می‌دهیم. با تعریف مشابه نشان دهید که $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}^2$ یک فضای برداری یک‌بعدی است. این تناظرها را به شکل خیلی ملموس در فضای سه بعدی دکارتی نشان دهید.

۲. با در نظر گرفتن ساده‌ترین مثلث‌بندی برای نوار موبیوس، گروه‌های همولوژی آن را به دست بیاورید؛ یعنی گروه‌های زیر را:

$$H_0(\text{Mobius}), \quad H_1(\text{Mobius}), \quad H_2(\text{Mobius}).$$

۳. با انجام ساده‌ترین مثلث‌بندی، گروه‌های همولوژی یک کره توپر (یعنی دیسک سه‌بعدی یا D_3) را به دست آورید؛ یعنی گروه‌های زیر را:

$$H_0(D_3), \quad H_1(D_3), \quad H_2(D_3), \quad H_3(D_3).$$

۴. فرض کنید \mathcal{M} یک فضای تولوژیک همبند با بعد ۳ است. نشان دهید:

$$\forall x \in \mathcal{M}, \quad \pi_1(\mathcal{M}) \cong \pi_1(\mathcal{M} \setminus \{x\})$$

$\pi_1(\mathcal{M} \setminus \{x\})$ یعنی یک نقطه را از \mathcal{M} حذف کرده‌ایم.

۵. نشان دهید که S^{n-1} یک retract برای D^n نیست. ۳

۶. فرض کنید Σ یک سطح ریمانی با جنس g است و $\tilde{\Sigma}$ یک d -fold کاور آن است. نشان دهید:

$$\chi(\tilde{\Sigma}) = d\chi(\Sigma) \quad \bar{1}$$

$$\tilde{g} = dg - d + 1 \quad \text{ب.}$$

۷. گروه هوموتوپی اول فضای $\mathbb{R}^n - \{k \text{ نقطه}\}$ را با شرط $n \geq 2$ و $k \geq 0$ به دست آورید.

۳ برای حل این سوال از قضیه Brouwer fixed-point بهره بردیم.