## کلاس های تزویجی چند گروه مختلف:

گروه $S_n$: دو عضو $\alpha$ و $\beta$ متعلق به یک دسته هستند اگر $\sigma \in S_n$ باشد که $\alpha = \sigma \beta \sigma^{-1}$

اما شما خواندید که عمل همیوغ کردن، ساختار دوری را حفظ می‌کند، یعنی که

$$\sigma (i_1 \dots i_r) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \dots\ \sigma(i_r))$$

مثال: بیایید همیوغ چند عضو از $S_6$ را بسازیم:

$$\alpha = (12)(345) \in S_6$$

بگیرید که:

$$\sigma_1 = (23) \longrightarrow \sigma_1^{-1} = (23)$$

حال همیوغ $\alpha$ را تشکیل می‌دهیم

$$\sigma_1 \alpha \sigma_1^{-1} = (23)(12)(345)(23) =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (13)(245)$$

دقیقاً عین این است که در $\alpha = (12)(345)$ ، من جای نماد ۲ را با ۳ عوض کنم.

به طور مشابه :

$$(1234)\,(13)(2465)\,\overbrace{(4321)}^{(1234)^{-1}} = (24)\,(3165)$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{matrix}$$

پس کلاس های تزویجی گروه $S_n$ دقیقاً متشکل از دورهای با ساختار مشابه است.

مثلاً در $S_7$ :

$C_1 = \{e\} \rightarrow$ ساختار دوری $(1,1,1,1,1,1,1)$

$C_2 = \{(12), (13), (14), \ldots$ سایر ترانهش‌ها$\}$ ساختار دوری : $(2,1,1,1,1,1)$

$C_3 = \{(123), (124), (125), \ldots$ سایر دورها به طول 3$\}$ ساختار دوری : $(3,1,1,1,1)$

$C_4 = \{(1234), (1235), \ldots$ سایر دورها به طول 4$\}$ ساختار دوری : $(4,1,1,1)$

$\vdots$

$C_7 = \{(1234567), (1234576), \ldots$ سایر دورها به طول 7$\}$ ساختار دوری : $(7)$

$C_8 = \{(12)(34), (12)(35), \ldots$ سایر دورهای مشابه$\}$ ساختار دوری : $(2,2,1,1,1)$

$C_9 = \{(12)(34)(56), (12)(35)(46),$ سایر دورهای مشابه$\}$ " " : $(2,2,2,1)$

$C_{10} = \{(123)(45), (124)(35), \ldots$ سایر دورهای مشابه$\}$ ساختار دوری $= (3,2,1,1)$

$C_{11} = \{(123)(45)(67), (124)(35)(67), \ldots$ " $\}$ " $= (3,2,2)$

$C_{12} = \{(123)(456), (123)(457), \ldots$ " $\}$ ساختار دوری $= (3,3,1)$

$C_{13} = \{(1234)(56), (1235)(67), \ldots$ " $\}$ ساختار دوری $= (4,2,1)$

$C_{14} = \{(1234)(567), (1235)(467), \ldots$ " $\}$ " $= (4,3)$

$C_{15} = \{(12345)(67), (12347)(56), \ldots \text{ "}\}$ " $= (۵،۲)$

ازاین تمرین نتیجه می‌گیریم که تعداد کلاس های تزویجی گروه $S_N$ برابر تعداد راه هایی است
که می‌توانیم عدد $N$ را به شکل جمع اعداد طبیعی بنویسیم ( یا $P(N)$ )

تعداد کلاسهای تزویجی $S_3$ $\quad (0+3, 1+2, 1+1+1) \quad P(N=3) = 3$

$S_4$ " " " $\quad (1+1+1+1, 1+1+2, 1+3, 2+2, 4+0) \quad P(N=4) = 5$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

---

درمورد هنجارساز ومرکزساز : با تعریف از درسنامه آشنا هستید ✓

x اولاً همواره $C_G(S) \subseteq N_G(S)$ چون اگر $g \in C_G(S)$ با اعضای $S$ جابه‌جا شود،
به طریق اولی $gsg^{-1} = s \in S$ پس $g \in N_G(S)$.

x حتی جالب‌تر، $C_G(S) \triangleleft N_G(S)$.

استدلال : $h \in C_G(S)$ , $g \in N_G(S)$

تعریف را بررسی کنیم : $ghg^{-1}$ is in $C_G(S)$ ?

$\forall s \in S, (ghg^{-1}s) = gh(g^{-1}s) \rightarrow$ چون $g \in N_G(S)$ پس $g^{-1}sg = s' \in S$

پس یعنی $g^{-1}s = s'g^{-1}$ جایگذاری

$= gh(s'g^{-1})$

حالا چون $h \in C_G(S)$ پس $s'$ جابه‌جا می‌شود

$= (gs')hg^{-1}$

$sg = qs'$ ← حالا رابطه‌ی را در و ضرب بشینداز چپ ←
جابگذاری

$$= (sg)hg^{-1} = s(ghg^{-1})$$

پس دیدیم که هرعضو $S$ با $ghg^{-1}$ جابه جا می‌شود ⟸ $ghg^{-1} \in C_G(S)$

پس حکم ثابت است.

تمرین: نشان دهید $C_G(C_G(S))$ شامل خود $S$ است:

توجه کنید $C_G(C_G(S))$ مجموعه‌ی اعضایی از $G$ است که با $C_G(S)$ جابه جا می‌شود.

$g \in C_G(C_G(S))$ : $\forall q \in C_G(S)$ we have $qg = gq$

اما طبق تعریف، $q$ با هر عضو $S$ جابه جا می‌شود، یعنی $qs = sq$.

بنابراین $s \in C_G(C_G(S))$.

$\blacksquare$

تمرین: $C_{S_4}((12)(34))$ را پیدا کنید:

$$C_{S_4}((12)(34)) = \{\sigma \in S_4 : \sigma (12)(34) \sigma^{-1} = (12)(34)\}$$

مطابق رابطه: $\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4))$ باید داشته باشیم:

$$\underbrace{(12)(12)}_{e}(34)(12) = (34)(12) = (12)(34) \Rightarrow (12) \in C_{S_4}((12)(34))$$

به طور مشابه داریم $(34) \in C_{S_4}((12)(34))$.

اما چطور جای نمادهای $(12)(34)$ را عوض کنیم که جای ترانهاده حاصل عوض نشود؟

$$(12)(34) \equiv (13)(24) \in C_{S_4}((12)(34))$$

معادل

با این تغییرها خود عضو عوض نمی‌شود.

$$(12)(34) \overset{\text{معادل}}{\equiv} (1324)$$

$$(12)(34) \equiv (1423)$$

$$(12)\quad(34) \equiv (12)(34)$$

$$(12)\quad(34) \equiv (14)(23)$$

این هفت عضو به همراه عضو بدیهی $(e)$ ، مرکز ساز $(12)(34)$ هستند.

---

گروه های ماتریسی: درمورد $U(2)$ در کلاس مطالب آموختید؛ ماتریس های یکانی $2\times2$.

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1$$

می خواهیم قضیه اول همریختی را روی $U(N)$ اعمال کنیم.

قضیه اول همریختی: اگر $\phi: G \to G'$ همریختی باشد: $\dfrac{G}{\operatorname{Ker}\phi} \cong \operatorname{Im}\phi$

چون $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$ پس با دترمینان گرفتن دو طرف داریم

$$\det(UU^\dagger) = \det(U)\det(U^\dagger) = |\det U|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det(U) = e^{i\varphi} \qquad \varphi \in \mathbb{R}$$

توجه کنید که $\det(U^\dagger)$ همان $\det(U^T)^*$ است پس $\det(U^\dagger) = (\det(U))^*$ .

در تمرین هاد دیدیم که det همریختی است:

$$\det : U(N) \longrightarrow U(1)$$

مطابق قضیه اول همریختی:

$$\frac{U(N)}{\ker \det} \cong U(1)$$

عضو بدیهی گروه $U(1)$، عنصر 1 است پس هسته‌ی همریختی ماتریس های هستند که دترمینان آن ها 1 است. این ماتریس ها تشکیل زیرگروه نرمال $SU(N)$ را می‌دهند.

$$\Rightarrow \frac{U(N)}{SU(N)} \cong U(1)$$

همین کار را می‌توانید با $Gl_n$, $Sl_n$ انجام دهید.