

به نام خدا
آشنایی با نسبیت عام
تمرین سری ششم
موعد تحویل : روز امتحان پایان ترم ساعت ۲۴

۱ نماد های کریستوفل و متریک قطری

فرض کنید یک متریک قطری $g_{\mu\nu}$ داریم نشان دهید نماد های کریستوفل به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= 0 \\ \Gamma_{\mu\mu}^{\lambda} &= \frac{-1}{2}(g_{\lambda\lambda})^{-1}\partial_{\lambda}g_{\mu\mu} \\ \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} &= \partial_{\mu}(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}) \\ \Gamma_{\lambda\lambda}^{\lambda} &= \partial_{\lambda}(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|})\end{aligned}$$

توجه کنید که در عبارت های بالا، $\mu \neq \nu \neq \lambda$ و اندیس های تکرار شده اند روی آن ها جمع زده نمی شود.

۲ دیورژانس تانسور انرژی تکانه

نشان دهید:

$$\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\nu}(\sqrt{g}T^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}T^{\lambda\nu})$$

۳ معادله انیشتین و پایستگی انرژی و تکانه

اتحاد بیانکی را ثابت کنید:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = 0$$

و از نتیجه آن استفاده کنید و نشان دهید مشتق هم وردای تانسور انرژی تکانه ظاهر شده در معادله انیشتین، صفر می شود:

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

۴ متریک شوارتزشیلد

متریک شوارتزشیلد در $\theta = \frac{\pi}{2}$ به صورت زیر داده می شود:

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_s}{r})(dt)^2 + (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2$$

معادلات ژئودزی حرکت یک ذره تست در این متریک را بدست آورید.
(ب) یک ذره در نظر بگیرید که درون افق رویداد سیاه چاله سقوط کرده است ($r < 2GM$) ، در نظر داشته باشید که ذره لزوماً روی ژئودزی حرکت نمی کند. متریک شوارتزشیلد را در مختصات (t, r, θ, ϕ) نظر بگیرید:

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_s}{r})(dt)^2 + (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

نشان دهید:

$$|\frac{dr}{d\tau}| \geq \sqrt{\frac{2GM}{r} - 1}$$

بیشینه زمان عمر ذره وقتی از $r = 2GM$ به $r = 0$ می رود را حساب کنید. این زمان را برای یک سیاه چاله به جرم خورشید بر حسب ثانیه بدست آورید. نشان دهید این ویژه زمان، در صورتی بیشینه است که ذره سقوط آزاد کند و $E \rightarrow 0$ برود.

۵ انیشتین و ثابت کیهان شناسی (امتیازی)

معادله انیشتین در خلا را در نظر بگیرید، اما با یک ثابت کیهان شناسی که با نماد Λ نشان داده می شود:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

کلی ترین متریک با تقارن کروی در مختصات (t, r) که در معادله صدق میکند را بدست آورید و نشان دهید زمانی که $\Lambda = 0$ باشد، جواب به حل شوارتز شیلد کاهش خواهد یافت.

۶ بردار Killing (امتیازی)

نشان دهید بردار Killing^۱ در معادله زیر صدق می کند:

$$\square \xi^\alpha = -R^\alpha_\beta \xi^\beta$$

راهنمایی: از اتحاد زیر استفاده کنید

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} = 0$$

لطفاً نام ، نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را بالای برگه تحویلی بنویسید.

"When forced to summarize the general theory of relativity in one sentence: Time and space and gravitation have no separate existence from matter." - Albert Einstein

^۱ Wilhelm Karl Joseph Killing (10 May 1847 – 11 February 1923) was a German mathematician who made important contributions to the theories of Lie algebras, Lie groups, and non-Euclidean geometry.