خلاصه‌ای از مباحث کلاس حل تمرین

استاد درس: دکتر کریمی‌پور

جلسه‌ی اول: به‌دست آوردن گروه همولوژی فضاهای مختلف و بحث‌های درسی

دستیار درس: حسین محمدی

گردآوری: حانیه ملکی

۱۸ اسفند ۱۴۰۲

در این جلسه به سوالات زیر پاسخ دادیم:

۱. گروه همولوژی کره‌ی دو بعدی : ساختار بحث طوری است که می‌توانیم روند بدست آوردن $H_n(S^k)$ را به هر simplical complex تعمیم دهیم.

۲. بررسی کردن مفاهیم روند بدست آوردن $H_n(S^k)$:

- گروه‌های آبلی آزاد و مقید
- گروه خارج قسمتی
- عملگر مرز ∂_r عملگرخطی است روی فضای برداری r-chain ها.

۳. بحث در مورد «تنها پنج چندوجهی منتظم وجود دارند.»

همچنین در مورد موارد زیر بحث کردیم:

۱. قضیه هورویچ [1]

۲. راه‌های به‌دست آوردن گروه‌های همولوژی و هموتوپی

۳. آبلی بودن گروه‌های هموتوپی با مرتبه بالا.

منابعی که در حین جلسه به آنها اشاره شد:

۱. تنها پنج چندوجهی منتظم داریم: منبع ۱ ، منبع ۲ ، منبع ۳.

۲. گروه هموتوپی‌های مختلف کره‌ها

۳. گروه همولوژی‌های مختلف کره

۴. قضیه هورویچ: منبع اول ، منبع دوم

۵. آبلی بودن گروه‌های هموتوپی بالا [2]: منبع

[1] Hurewicz theorem

[2] منظورمان $n > 1$ است در گروه $\pi_n(X, x_0)$.

به طور خلاصه، دقیقا این سوالات را بررسی کردیم:

۱. گروه‌های H_0، H_1 و H_2 فضای S^2 را بررسی کردیم. همچنین همانندسازی زیر را به‌عنوان روشی آسان‌تر برای محاسبه بررسی کردیم:

free abelian group + manipulations $\longleftrightarrow$ vector space + linear operator

---

۲. محاسبه‌ی گروه هومولوژی اولِ فضای $\mathbb{R}P^2$.

---

۳. نکته‌ای خارج از درس در مورد گروه هومولوژی چنبره
تصویر بازشده‌ی یک چنبره در صفحه‌ی مختلط (UHP[۳]) و با متریک پوانکاره که انحنای منفی دارد قرار دارد.
نمی‌توان از صفحه‌ی حقیقی، چنبره با $g \leq 2$ به دست آورد.

---

۴. قضیه‌ی هوروویچ را تا حد پایین بررسی کردیم.
قضیه‌ی هوروویچ[۴] این قضیه، توسط نگاشتی به نام هومومورفیسمِ هوروویچ، تحت شرایط خاصی گروه‌های هوموتوپی و هومولوژی را به یکدیگر ربط می‌دهد.
قضیه: برای هر فضای X که همبند مسیری باشد، همواره می‌توان هومومورفیسمی بین $\pi_n(X)$ و $H_n(X)$ که پیدا کرد که n یک عدد طبیعی است.

$$h_\star : \pi_n(X) \;\to\; H_n(X)$$

برای $n = 1$ نگاشت هوروویچ را می‌توان به صورت یک ایزومورفیسم تعریف کرد. برای این کار کافی است بدانیم که آبلی‌شده‌ی $\pi_1(X)$ همان $H_1(X)$ است.

$$\tilde{h_\star} = \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]} \;\to\; H_1(X)$$

فرایند آبلی‌کردن به این صورت است که یک جابه‌جاگر تعریف کنیم که به جای آنکه ab ساخته شده باشد، از $aba^{-1}b^{-1}$ ساخته شده است.

برای گروه‌های مرتبه‌ی بالاتر، اگر فضا (n-1)-connected باشد، نگاشت هوروویچ ایزومورفیسم خواهد بود. به صورت نادقیق، (n-1)-connected به این معناست که بتوان از تمام نقاط آن (n-1)-dimensional hyper-surface رد کرد. می‌دانیم فضای T^n اینگونه نیست. یک مثال دیگر:

$$H_k(S^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2 \\ \{e\} & \text{else} \end{cases}$$

[3] Upper half plane

[۴] برای دیدن منابع، صفحه‌ی اول را ببینید.