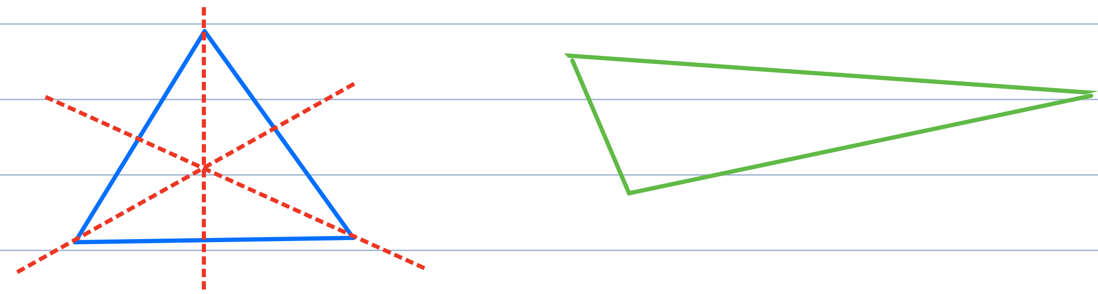
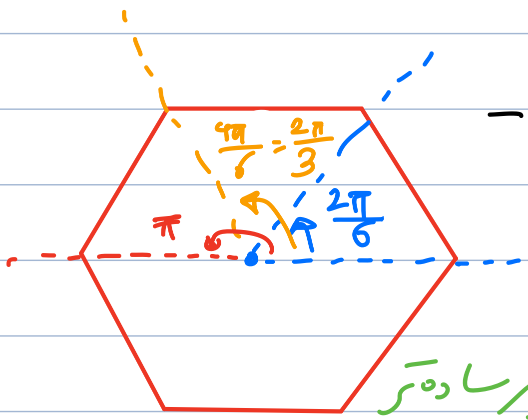
بررسی گروه ها و اهمیت شان در فیزیک

ابتدائی ترین مفهوم بندی‌ای که از تقارن داریم، بر پایه‌ی چند وجهی های منتظم است.

مثلاً مثلث متساوی الاضلاع از مثلث های با اضلاع دلخواه متقارن ترند.



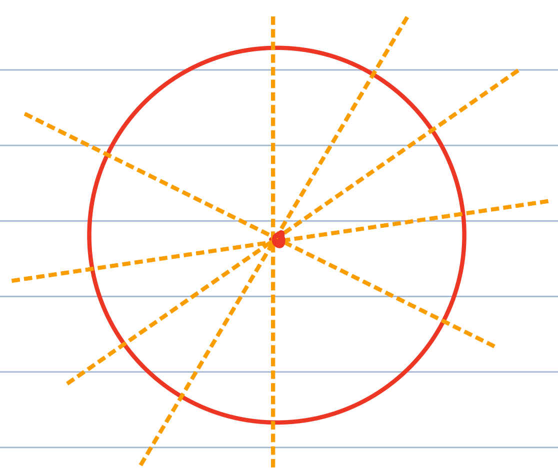
و به طور کلی، n-ضلعی های منتظم تحت چرخش های $\frac{2\pi}{n}$ به خودشان نگاشته می‌شوند:



پس هرچه تعداد اضلاع بیشتر شود، شکل هندسی حالت تقارن‌ـ های بیشتری [illegible] می‌برد!

احتمالاً هم دیده‌اید که خواص هندسی شکل های منتظم بسیار ساده‌تر از اشکال نامنتظم حاصل می‌شود.

درحد $n \to \infty$ که چیزی مثل دایره داریم، خطوط تقارن بسیار هم زیاد تر هستند!



پس هرچه شکل منتظم تری داشته باشیم،

کار کردن با شکل راحت تر است.

این مفهوم سپس را به فیزیک هم می‌شود به راحتی تعمیم داد ... ممکن است جای اشکال مدل ها و سیستم های فیزیکی را قرار دهید و به جای خطوط تقارن، تبدیلاتی که روی سیستم فیزیکی اعمال می‌شود ...

در ادامه مثال هایی را از فیزیک ذرات ـ ماده چگال و مکانیک کوانتومی بررسی می‌کنیم:

■ مکانیک کلاسیک:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

تقارنی که این جا داریم، تغییر دلخواه مکان تعمیم یافته (q) است: →

معادله حرکت را که استفاده کنیم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{q})} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{q})} = P = \text{Constant}$$

بنابراین تقارن به ما کمک می‌کند که ثوابت حرکت را پیدا کنیم.

(در حالت کلی‌تر، وجود یک تقارن پیوسته به ما یک کمیت پایستاری می‌دهد که احتمالا با آن آشنا بوده اید.)

■ مکانیک کوانتومی:

تقریباً اکثر تقارن های نظریه‌های کلاسیک به نظریه های کوانتومی هم ارث می‌رسد.

به طور خاص، نوسانگرهای هماهنگ ساده را در نظر بگیرید (در ۳ بعد.)

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}_x^2}{2m} + \frac{\hat{P}_y^2}{2m} + \frac{\hat{P}_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{X}^2+\hat{Y}^2+\hat{Z}^2)$$

از مکانیک کوانتومی می‌دانیم که تحت تبدیل ،

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} \to e^{i\theta J_z} e^{i\theta_y J_y} e^{i\theta_z J_z} \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix}$$

H ناوردا است ؛

$$J_z = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad J_y = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & 1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

پس یک تقارن پیدا کرده ایم ! از فضا سه پارامتر پیوسته‌ی $(\theta_1, \theta_y, \theta_z \in (0, 2\pi)$

برای همین یک سیستم را تبدیل می سازند که H را ناوردا نگه می دارد ...

باز هم این تقارن های پیوسته برای مان کمیتی پایستار می سازند که تکانه‌ی زاویه‌ای است !

تقارن گسسته هم در مکانیک کوانتومی داریم ؟

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x)$$

که $V(x)$ تابع زوج است ، تقارنی گسسته دارد ؛

تحت تبدیل $x \to -x$. هامیلتونی ثابت می ماند .

آیا این سیستم کمیت پایسته ای دارد ؟؟؟

کمیت پایسته‌ای هست ! پاریته‌ی تابع موج تحت تحول عوض نمی‌شود !

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,\psi(x,0)$$

پس اگر $\psi(x,0)$ تابع زوج (فرد) باشد، در هر لحظه $\psi(x,t)$ زوج (فرد) است.

حالا گروه چیست و چه ارتباطی با تبدیلات تقارنی دارد؟!

تبدیلات تقارنی تشکیل دسته ای می‌دهند که گروه نام دارد و دارای خواص زیر است.

مجموعه‌ی G گروه است اگر روی اعضای آن ضربی با خواص زیر باشد:

$$\cdot : G \times G \to G$$

۱ بسته بودن $\quad a,b \in G \to a\cdot b \in G$

۲ انجمنی $\quad a,b,c \in G \to (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

۳ وجود عضو خنثی $\quad \exists e \in G : ae = a \quad \forall a \in G$

۴ وجود عضو وارون $\quad \forall a \in G \quad a^{-1} \in G : aa^{-1} = a^{-1}a = e$

حالا در مورد تقارن های بالا می‌توانید ببینید که این شرایط صدق می‌کنند!

مثال های ساده:

$(\mathbb{Z}, +)$ forms a group.

$(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \times)$

$(\{e^{2\pi i \frac{m}{N}}\}_{m=0}^{N-1}, \times)$

مجموعه‌ی تمام ماتریس های وارون پذیر $n\times n$ خودش گروه است.

جایگشت های n شی تشکیل گروه می دهد!

(اتفاقاً به گروه جایگشت های ذرات در مسئله‌ی تمیزپذیری ذرات برخورده ایم!)

■ مثال از ذرات: الکترودینامیک کوانتومی

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) + \bar{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi - e\bar{\psi}\not{A}\psi$$

تحت تبدیلات پیمانه‌ای
$$\begin{cases}\psi \to e^{i\theta}\psi \\ \bar{\psi} \to e^{-i\theta}\bar{\psi}\end{cases}$$
ناورداست.

می توان این مدل را طوری اصلاح کرد که تحت
$$\begin{cases}\psi \to e^{i\theta(x)}\psi \\ \bar{\psi} \to e^{-i\theta(x)}\bar{\psi} \\ A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu\theta(x)\end{cases}$$
هم ناوردا شود!

همان تبدیل سرتاسری $U(1)$، به ما پایستگی را می دهد!

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot J = 0 \qquad J^\mu = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

از دیگر برکات تقارن این است که به ما اجازه‌ی دسته‌بندی حالات سیستم را می‌دهد.

$$H_{\text{هیدروژن}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}-\frac{e^2}{r}$$

می‌دانید که تحت دوران‌های ۳ بعدی که $r \longrightarrow r$ می‌رود، هامیلتونی ناوردا است.

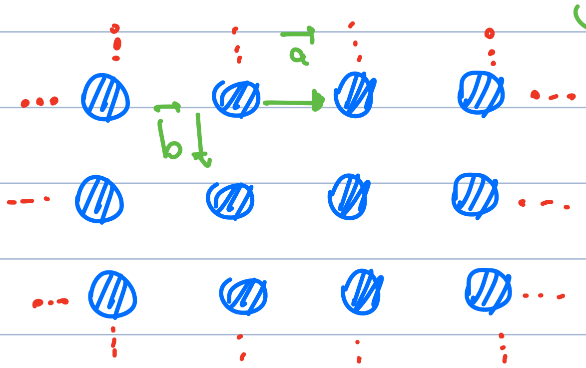
هم‌چنین دیده‌اید که حالات سیستم با سه برچسب ψ_{nlm} مشخص می‌شوند.

برچسب‌های l و m ویژه‌مقادیر عملگر $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$ هستند و این عملگرها دوران

درفضا را برای ما تولید می‌کنند.

پس به نوعی (!) تقارن‌های سیستم موجب شده‌اند که حالات را برحسب ویژه‌مقادیر مولدهای‌شان دسته‌بندی کنیم.

در فیزیک حالت جامد: جابجایی‌های گسسته روی یک شبکه، تقارن هستند.



پتانسیل

$$V(r+R) = V(r)$$

$$R = m\vec{a} + n\vec{b} \quad , \{m,n\} \in \mathbb{Z}^2$$

Bloch's Theorem :

$$\psi_k(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, u_k(\vec{r})$$

$$\text{with } u_k(\vec{R}+\vec{r}) = u_k(\vec{r})$$

$k \in$ First Brillouin Zone .

تقارن‌های فراوانی در نظریه‌های فیزیکی هستند که زندگی را راحت می‌کنند.

$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$

Conservation of P_μ + ← تقارن پوانکاره ← تقارن لورنتز

super currents $(x^\mu T_{\mu\nu})$

n_currents

n-form symmetries / ابرتقارن / تقارن همدیسی

(Diffeomorphism) هموردایی عام / تقارن وایل

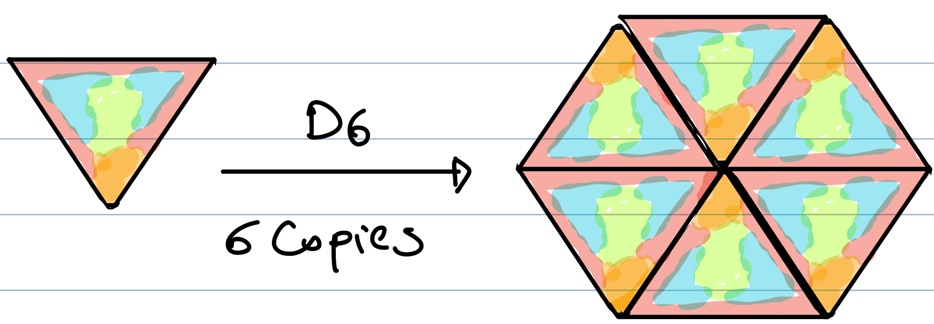
$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ $\quad T_\mu{}^\mu = 0$

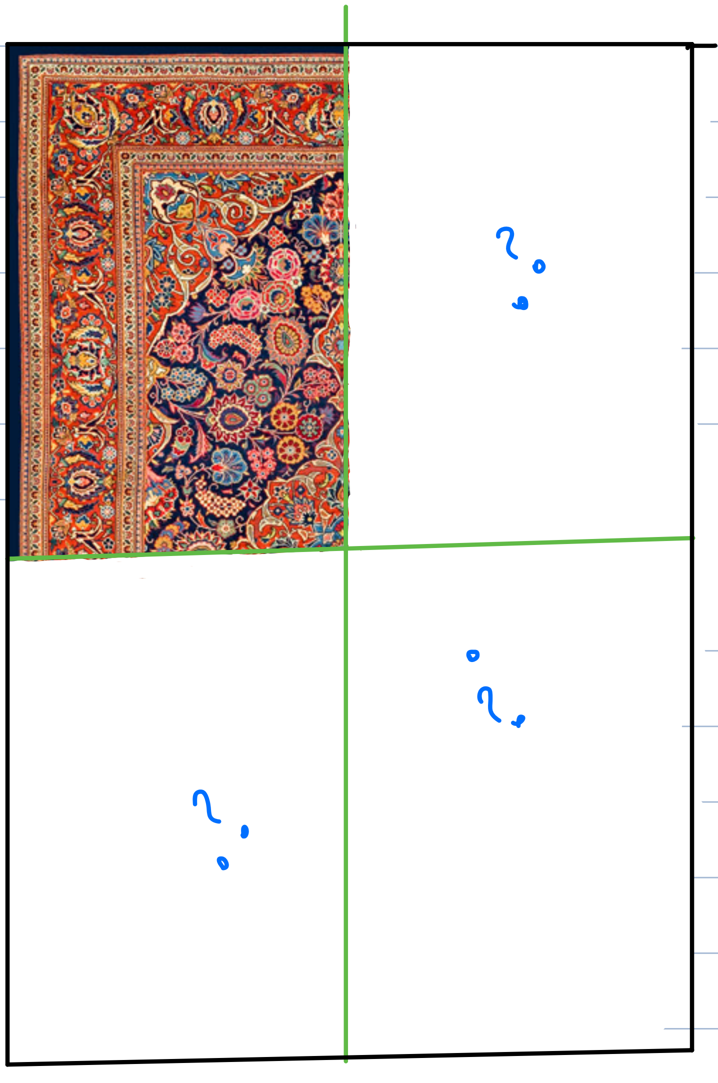
هریک از این تقارن‌ها، منجر به پایستگی خاصی می‌شوند.

اتحادهایی هستند که به ما کمک می‌کنند بین دانسته‌های فیزیکی‌مان قید بگذاریم

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle j^\mu X\rangle = -i\sum_j \delta(x-x_j)\, G(x_j)\langle X\rangle$$

اگر بخواهیم تقارن را شهودی درک کنیم، از چندضلعی‌های منتظم با گروه تقارنی D_n بهره می‌بریم :





$Z_2 \times Z_2$

symmetry