تمرین سری هفتم درس نظریه گروه‌ها - دکتر رضاخانی

مهلت تحویل: چهارشنبه ۲ خرداد ماه سال ۱۴۰۳ تا ساعت ۲۳:۵۹

از طریق سامانه درس‌افزار شریف

حسین محمدی
hossein.mohammadi.00427@gmail.com

زهرا کبیری
kabiri.zahra98@gmail.com

تمرین ۲۹ [۴۰ امتیاز] : زیرگروه ویژه‌ی لورنتز

زیرمجموعه ای از $O(1,3)$ که در زیر معرفی شده است، زیرگروه ویژه لورنتز نام دارد.

$$O^+_\uparrow(1,3) = \{\Lambda \in O(1,3) |\, \det(\Lambda) = 1, \Lambda_{00} \geq 1\}$$

نشان دهید که این زیرمجموعه یک زیرگروه از $O(1,3)$ است و همچنین این زیرگروه بهنجار است.

تمرین ۳۰ [۳۰ امتیاز] : گروه $\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$

ساده‌ترین گروه گسسته، متناهی و غیرآبلی، گروه $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ است. این گروه متشکل از ماتریس‌های ۲ در ۲ با دترمینان یک است که درایه‌هایش اعداد صحیح هستند. نامِ ویژه‌ی Modular group به علت اهمیت فراوان این گروه در تبدیلات خشتی چنبره [1] داده شده است؛ بعدها که نظریه ریسمان یا نظریه میدان همدیس آشنا شدید، به این گروه و اهمیتش در فیزیک بیشتر پی خواهید برد. اما چیزی که از شما می‌خواهیم خیلی ساده است:

نشان دهید که این گروه با دو عضو

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تولید می‌شود؛ یعنی هر عضو دلخواهی از این گروه را به شکل ضرب این دو عضو بنویسید.

تمرین ۳۱ [۳۰ امتیاز] : یک نوسانگر هماهنگ یک بعدی داخل میدان الکتریکی E در نظر بگیرید.

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - eEx$$

که در آن m جرم، ω بسامد، e بار الکتریکی نوسانگر است.

الف) تبدیل خطی از x پیدا کنید که پتانسیل $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - eEx$ را به $\tilde{V} = \frac{1}{2}m\omega^2\tilde{x}^2 + V.$ برساند.

ب) نشان دهید این تبدیل یک تبدیل هم تافته [2] است.

ج) دوباره به نوسانگر هماهنگ ساده بر می گردیم. فرض کنید کمیت های m و ω به گونه ای است که همیلتونی آن چنین است:

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + x^2)$$

بررسی کنید آیا تبدیل زیر یک تبدیل هم تافته است؟

$$\tilde{x} = \frac{1+i}{2}(x + iP) \quad , \quad \tilde{P} = \frac{1+i}{2}(x - iP)$$

[1] Modular trnasformations of torus
[2] Symplectic

معرفی تعمیمی از گروه‌های متعامد

با گروه‌های متعامد [a] در درس آشنا شده‌اید؛ تعمیمی از این گروه‌ها وجود دارند که از قضا در فیزیک این تعمیم‌ها جالب توجه هستند.
اول دو عدد طبیعی p و q را در نظر بگیرید. ماتریس g را که ماتریسی $(p+q)\times(p+q)$ است اینطور می‌سازیم: روی p درایه‌ی اول قطر اصلی، عدد یک را قرار دهید و روی q درایه‌ی بعدی، عدد ۱- را بگذارید؛ یعنی

$$g = \mathrm{diag}(\underbrace{۱,\dots,۱}_{p},\underbrace{-۱,\dots,-۱}_{q})$$

حالا آماده‌ایم که «گروه‌های متعامد غیرمعیّن» را تعریف کنیم [b] [c].

$$O(p,q) = \{A \in M_{p+q}(\mathbb{R}) \mid A^t g A = g\}$$

برای یادآوری، g به ازای $p = ۱$ و $q = ۳$ به متریک مینکوفسکی [d] تبدیل می‌شود و گروه $O(۱,۳)$ هم همان گروه لورنتز است. تعریف معادلِ این گروه اینطور است: $O(p,q)$ شامل اعضایی است که ضرب برداری تعمیم‌یافته [e] با متریک g را ناوردا نگه‌دارند؛ برای اطلاع بیشتر به این صفحه از ویکی‌پدیا مراجعه کنید.

$$O(p,q) = \{A \in M_{p+q}(\mathbb{R}) \mid \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \quad , \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^{p+q}\}$$

[a] Orthogonal groups

[b] منظور از $M_{p+q}(\mathbb{R})$ ، مجموعه‌ی تمامی ماتریس‌های $(p+q)\times(p+q)$ است که درایه‌های آن حقیقی هستند.

[c] از خانم حانیه ملکی برای یادآوردن شدن اشکالات این بخش متشکریم.

[d] Minkowski

[e] منظورمان از ضرب برداری تعمیم یافته این است:

$$\langle x,y\rangle = x_۱y_۱ + \dots x_p y_p - x_{p+۱}y_{p+۱} - \dots - x_{p+q}y_{p+q}$$

که مشابه با ضرب چاربردارها از فضای میکوفسکی، با استفاده از متریک g تعریف شده است.