دانشگاه صنعتی شریف
زمستان ۱۴۰۲ - بهار ۱۴۰۳

تمرین امتیازی ۱ - درس نظریه گروه‌ها - دکتر رضاخانی

مهلت تحویل: نزدیک‌ترین زمان از بین پایان‌کلاس‌ها و موعد آخرین سری تمرین‌ها

از طریق سامانه درس‌افزار شریف

حسین محمدی
hossein.mohammadi.00427@gmail.com

زهرا کبیری
kabiri.zahra98@gmail.com

برای جبران نمرات از دست رفته، به حل سوالات امتیازی بپردازید. با این شرایط که:

۱. برای کسب نمره‌ی کامل، دو سوال را از دسته‌ی اول و چهار سوال را از دسته‌ی دوم انتخاب و حل کنید.

۲. در مورد سوالات چندبخشی، حل باید به ترتیب انجام بگیرد و نمی‌توان بدون حل یک قسمت، از نتیجه‌اش در قسمت‌های بعدی استفاده کرد.

دسته‌ی اول

تمرین ″۱ [۲۰ امتیاز] : قضیه‌ی کوشی و قضیه کوچک فرما

الف) فرض کنید G گروهی مرتبه n باشد و p عددی اول باشد. زیرمجموعه‌ی S از مجموعه‌ی $\underbrace{G \times \cdots \times G}_{p \text{ times}}$ را به این شکل تعریف کنید:

$$S = \{(g_1, \ldots, g_p) \mid g_1 \ldots g_p = e\}$$

نشان دهید که [1]

$$|S| = n^{p-1}$$

ب) با کمک قسمت قبل قضیه کوشی [2] را ثابت کنید.

> اگر G گروهی متناهی باشد و p عددی اول که $p \mid |G|$ ، آنگاه گروه G عضوی از مرتبه p دارد.

ج) قضیه کوچک فرما را نیز ثابت کنید.

تمرین ″۲ [- امتیاز] :

گروهی متناهی، G، و زیرگروه بهنجاری از آن H، مثال بزنید که

$$|\text{Aut }(H)| > |\text{Aut }(G)|$$

تعریف نیم‌گروه و تکواره

یک نیم‌گروه [a] ، مجموعه‌ای چون S با عملی دوتایی شرکت پذیر است. لازم نیست سایر شرایط گروه در تعریف نیم‌گروه برقرار باشند.
هم‌چنین تکواره [b] ، یک نیم‌گروه است که عضو خنثای چپ و راست هم دارد.

[a] Semigroup
[b] Monoid

تمرین ″۳ [- امتیاز] :

فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. نشان دهید شرایط زیر معادلند:

[1] از آقای طالبی برای تذکر اشکال در سوال ممنونیم.

[2] Cauchy's Theorem

۱. برای هر $a,b \in S$ معادلات $ax=b$ و $ya=b$ با متغیرهای $x,y \in S$ دارای جواب هستند.

۲. S دارای عضو خنثی است و هر عضو آن وارون‌پذیر است.

۳. برای هر $a,b \in S$ معادلات $ax=b$ و $ya=b$ با متغیرهای $x,y \in S$ دارای جواب یگانه هستند.

۴. توابع ضرب از چپ $\lambda_s : S \longmapsto S$ و ضرب از راست $\rho_s : S \longmapsto S$ که با روابط $\lambda_s(x) = sx$ و $\rho_s(x) = xs$ معرفی شده‌اند؛ برای هر $s \in S$ دوسویی اند.

تمرین $''$۴ [- امتیاز] :

الف) فرض کنید $\phi : G \longmapsto G'$ همریختی گروهی باشد و به علاوه زیرگروه‌های بهنجار $N \trianglelefteq G$ و $N' \trianglelefteq G'$ مفروض‌اند. قرار دهید $H = \phi^{-1}(N')$. نشان‌دهید که

$$G/NH \simeq \mathrm{im}(\phi)N'/\phi(N)N'$$

ب) فرض کنید H و K دو زیرگروه بهنجار از G باشند. ثابت کنید:

۱. $G/H \cap K$ در $G/H \times G/K$ می‌نشیند.

۲. اگر $HK = G$ آنگاه $G/H \cap K \simeq G/H \times G/K$.

۳. اگر $[G:H]$ و $[G:K]$ متناهی و نسبت به‌هم اول باشند، آنگاه $G/H \cap K \simeq G/H \times G/K$.

تمرین $''$۵ [- امتیاز] :

الف) در گروه‌های $S_{۱۲}$ و $A_{۱۷}$ بیشینه مرتبه اعضا چیست؟

ب)نشان دهید که $A_۵$ زیرگروه‌هایی با شاخص ۱۰ و ۶ دارد؛ اما زیرگروه با شاخص ۳و۴ ندارد.

دسته‌ی دوم

تمرین $''$۶ [۲۰ امتیاز] : ثابت کنید که برای $n > ۱$، گروه S_n با هیچ زیرگروهی از $A_{n+۱}$ یکریخت نیست.

تمرین $''$۷ [۲۰ امتیاز] : نشان دهید که یک گروه متناهی دوری است اگر و فقط اگر از تمامی مراتبی که مقسوم‌علیه مرتبه‌ی آن هستند، یک زیرگروه یکتا داشته باشد. نتیجه بگیرید که برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$n = \sum_{d|n} \phi(d)$$

تمرین $''$۸ [- امتیاز] : فرض کنید M, N زیرگروه‌های بهنجارِ یک گروه متناهی G هستند و $G/N \simeq M$. نشان دهید که اگر N ساده باشد، آنگاه $G/M \simeq N$.

تمرین $''$۹ [۲۰ امتیاز] : قرار دهید

$$\theta : G \longmapsto G$$

یک همریختی از گروه G به خودش باشد. نشان دهید اگر $g \longmapsto g^۲\theta(g)$ و $g \longmapsto g^۴\theta(g)$ هم همریختی باشند، آنگاه گروه G جابه‌جایی است.

تمرین $''$۱۰ [۲۰ امتیاز] :

G را گروهی از مرتبه n بگیرید که $(n, \phi(n)) = ۱$ باشد [۳]. نشان دهید G آبلی است.

تمرین $''$۱۱ [- امتیاز] :

الف) نشان دهید زیرمجموعه‌ی A متشکل از تمامی خودریختی‌های گروه G که اعضای همیوغ را به هم می‌نگارد؛ یک زیرگروه بهنجار از $\mathrm{Aut}(G)$ است.

ب) نشان دهید اگر G گروه متناهی باشد، مرتبه‌ی A تنها بر اعداد اولی که در تجزیه $|G|$ موجودند، قابل قسمت است.

تمرین $''$۱۲ [- امتیاز] :

مجموعه‌ی G را متناهی بگیرید که مجهز به یک عمل دوتایی است و عنصر یکه هم دارد. نشان دهید G گروه است اگر و فقط اگر جدول ضرب آن دو شرط زیر را دارد باشد:

[۳] $\phi(n)$ تابع اویلر است که تعداد اعدادی را که نسبت به n اولند و از آن کوچکترند می‌شمارد.

۱. هر سطر و ستون از جدول ضرب، شامل تمامی اعضای مجموعه‌ی G باشد.

۲. برای هر جفت (x,y) از اعضای مجموعه‌ی G که $e \neq x,y$، $R_{x,y}$ را مستطیلی بگیرید که اینطور ساخته می‌شود: عضو e یکی از راس‌های آن است، x راسی دیگر از مستطیل است که در همان سطری قرار دارد که e هست. همچنین y هم راس دیگری از مستطیل است که در همان ستونی قرار دارد که e هست. آنگاه چهارمین راس این مستطیل تنها به جفت (x,y) بستگی دارد و به موقعیت e در جدول ضرب بستگی ندارد.

تمرین ۱۳″ [- امتیاز] :

اگر G از مرتبه‌ی p^2q باشد که هر دوی p و q اولند؛ نشان دهید که p-sylow زیرگروه‌ها یا q-sylow زیرگروه‌ها در G بهنجارند [4] .

[4] یعنی حداقل یکی از این دو در G بهنجار است.