

بسم الله الرحمن الرحيم

سری هفتم تمرینات درس شبیه سازی فیزیک

حسین محمدی - ۹۶۱۰۱۰۳۵

توجه: با کمک متغیرهای اولیه ی کد، گام ها و تعداد خانه ها و... را کنترل کنید، کد برای اجرای کد به کتابخانه های numpy و matplotlib نیاز مند است. تمامی نمودارها با کپشن و لیبل رسم شده اند. برای نمایش شکل در اولین اجرا کد را دو بار ران کنید.

در سوال فرض شده که چگالی جرمی از پایین به بالا زیاد می شود و در پایین کره این چگالی می نیمم است و در بالای آن دو برابر آن است.

محاسبات مرکز جرم را انجام می دهیم، اول رابطه ی چگالی کره را بر حسب Z محاسبه می کنیم:

$$\rho(z) = \frac{3}{2}\rho_0 + \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{R}z$$

حال برای محاسبه مرکز جرم، از تقارن می فهمیم که مرکز جرم باید روی محور Z باشد، پس انتگرال مرکز جرم را فقط برای راستای Z می گیریم:

$$z_{CM} = \frac{1}{M} \int z dM = \frac{1}{M} \int z \rho(z) dV = \frac{1}{M} \int \left( \frac{3}{2}\rho_0 z + \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{R} z^2 \right) dV$$

اما برای محاسبه این انتگرال چون باید روی کره محاسبه کنیم، بهتر است که تغییر مختصات کروی بدهیم:

$$\begin{aligned} & \int \left( \frac{3}{2}\rho_0 (r \cos\theta) + \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{R} (r \cos\theta)^2 \right) dV = \\ & \frac{3}{2}\rho_0 \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta + \\ & \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{R} \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2(\theta)\sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

اما حاصل انتگرال اول صفر است زیرا تابع  $\sin(x)\cos(x)$  متناوب است با دوره تناوب  $\pi$  و باید انتگرال اول را محاسبه کنیم:

$$\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{R} * \frac{R^5}{5} * 2\pi * \frac{2}{3} = \frac{2\rho_0 \pi R^4}{15}$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M} \int z \, dM = \frac{3}{\rho \cdot 4\pi R^3} * \frac{2\rho \cdot \pi R^4}{15} = \frac{R}{10}$$

پس مرکز جرم به اندازه یک دهم R از محور Z بالاتر است.

حال برای مقادیر دلخواه R، خروجی های کد را می گیریم:

```
R = 13
Rho 0 = 1
Numeric value of zCM 1.275089
Real value of zCM: 1.3
Elapsed Time: 2.3986
```

```
R = 8
Rho 0 = 3.4
Numeric value of zCM 0.786882
Real value of zCM: 0.8
Elapsed Time: 2.1844
```

```
R = 47
Rho 0 = 11.8
Numeric value of zCM 4.985161
Real value of zCM: 4.7
Elapsed Time: 3.1266
```

خب، برای ۱۰۰۰۰ اجرا، خروجی های ما خطای خیلی کمی دارند، خطاها به ترتیب برابر با ۶٪ و ۱/۷۵٪ و ۱/۹۲٪ است.