

# تعریف استثنایی عضو خنثای جمع\* در تعریف میدان

## سوال کلاسی

### سوال

یکی از دوستان پرسید که این خیلی عجیب است که در تعریف میدان، عضو خنثای عمل جمع را از داشتن وارون ضربی معاف می‌کنیم و آیا ساختاری وجود دارد که عضو وارون برای صفر جمعی وجود داشته باشد؟

ساختارهای جبری ای هستند که در آنها صفر هم وارون‌پذیری ضربی داشته باشد، در اصطلاح به آنها Wheel می‌گوییم. البته این ساختارها به اصطلاح Universal covering algebra هستند، یعنی با توسعه دادن یک جبر بدست می‌آیند. برای مطالعه بیشتر در مورد ساختار Wheel می‌توانید به صفحه‌ی ویکی‌پدیای این ساختار رجوع کنید. در مورد این ساختارها از زبان یک ریاضی‌دان هم می‌شود شنید که:

”Wheels are fine and all, they’re just not as deep, interesting, useful, ubiquitous, profound and rich as fields.”

همچنین این خاصیت (یعنی تنها عنصری که وارون ضربی ندارد، عضوی خنثای عمل جمع است.) در بسیاری از اثبات‌های میدان به کار می‌رود؛ مثلاً اثبات این که وارون ضربی سایر عناصر یکتا هستند، کاملاً روی این خاصیت بنا شده.

در موارد معدودی هم می‌شود اعداد را توسعه داد وارون ضربی صفر را در جبر گنجاند<sup>۱</sup>. به عنوان مثال، کره‌ی ریمن،  $\hat{\mathbb{C}}$  از تمام اعداد مختلط به همراه نقطه‌ی بی‌نهایت ساخته شده.

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$$

و همچنین جبر هم اینطور توسعه داده می‌شود:

۱. صفر وارون ضربی بی‌نهایت است، به این معنی که

$$\frac{z}{0} = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0$$

۲. جمع و تفریق با بی‌نهایت به این شکل تعریف می‌شود:

$$z \pm \infty = \infty$$

---

\* به این معنی که نیاز نیست وارون ضربی داشته باشد.  
۱ با این پیش‌ساده که وارون ضربی صفر لزوماً یکتا نخواهد بود.

۳. البته این عضو جدید وارون جمعی ندارد.

می بینید که وارد کردن این وارون ضربی با مشکلاتی همراه بوده است. به دلیل ناسازگار شدن axiom هاست که نمی توان تعریف میدان را مستقیما توسعه داد.

#### توصیف بهتر کره ی ریمان:

این ساختار  $\hat{\mathbb{C}}$  در حقیقت از روی یک complex-structure روی کره القا می شود که نقطه ی بی نهایت از فشرده سازی تک نقطه ای حاصل می شود. برای توصیف دقیقتر کره ی ریمان باید خمینه ی  $S^2$  را با دو چارت بپوشانیم. یکی از چارت های متداول، چارت Stereographic است که فقط قطب شمال کره را نمی پوشاند. برای مقاصد محاسباتی، معمولا قطب شمال را با نماد  $\infty$  وارد همان چارت می کنند. برای درک بهتر به اینجا مراجعه کنید.