

خلاصه‌ای از مباحث کلاس حل تمرین

استاد درس: دکتر کریمی‌پور

جلسه ۶: جهت‌پذیری، گروه و جبر لی و خمینه‌ی خارج‌قسمتی

دستیار درس: حسین محمدی

گردآوری: حانیه ملکی

۱۸ اردیبهشت ۱۴۰۳

در این جلسه به سؤالات زیر پاسخ دادیم:

۱. جهت‌پذیری منیفلد ضربی و جهت‌پذیری فضای مماس

۲. مثال از انتگرال‌گیری فرم‌ها

۳. مثال از گروه‌های لی ماتریسی

۴. جبر لی گروه $SO(3)$

۵. اثر گروه \mathbb{R}^+ بر روی مجموعه‌ی \mathbb{R}

همچنین در مورد مباحث زیر بحث کردیم:

۱. قضیه‌ی استوکس

۲. نگاشت immersion

۳. نگاشت submersion

سؤالات زیر را به دقت مورد بررسی قرار دادیم:

۱. گزاره‌های زیر را نشان دهید:

- آ. حاصل ضرب دکارتی دو خمینه‌ی جهت‌پذیر، خود جهت‌پذیر است.
ب. فضای کلاف مماس روی یک خمینه‌ی دلخواه (نه لزوماً جهت‌پذیر) جهت‌پذیر است.

۲. انتگرال فرم $\omega = (x - y^3)dx + x^3dy$ را روی دایره‌ی S^1 حساب کنید.

۳. گروه ماتریس‌های به فرم $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x > 0 \right\}$ را که یک خمینه است و ساختار هموار آن از $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ به ارث می‌رسد را در نظر بگیرید.

- آ. آیا G یک زیرگروه لی از $GL(3, \mathbb{R})$ است؟
ب. نشان دهید که $\{X = x\partial_x, Y = x\partial_y, Z = x\partial_z\}$ پایه‌ای برای میدان‌های برداری چپ‌ناوردا هستند.
ج. ثوابت ساختار گروه G را با پایه‌های (ب) به دست آورید.

۴. نشان دهید جبر لی $\mathfrak{so}(3)$ هیچ زیرجبر ۲-بعدی ندارد.

۵. نگاشت

$$\theta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad (a, x) \mapsto ax$$

را در نظر بگیرید.

- آ. نشان دهید یک اثر هموار از گروه \mathbb{R}^+ روی \mathbb{R} است. آیا این اثر آزاد است؟
ب. نشان دهید \mathbb{R}/\mathbb{R}^+ یک خمینه‌ی خارج‌قسمتی نیست.