سوالات اضافی عید - درس نظریه گروه‌ها - دکتر رضاخانی

برای تمرین بیشتر و تسلط روی مفاهیم

تحویل (اجباری نیست) از طریق سامانه درس‌افزار شریف

حسین محمدی
hossein.mohammadi.00427@gmail.com

زهرا کبیری
kabiri.zahra98@gmail.com

تمرین ۱′ [- امتیاز]: فرض کنید H و K دو زیرگروه از یک گروه G باشند.

الف) نشان دهید که $H \cup K$ **فقط و فقط** وقتی یک زیرگروه از G است که یکی از H یا K مشمول در دیگری باشد.

ب) نتیجه بگیرید که هیچ گروهی اجتماع دو زیرگروه سره خود نیست.

تمرین ۲′ [- امتیاز]: نشان دهید تعداد زیرگروه‌های یک گروه نامتناهی، نامتناهی است.

تمرین ۳′ [- امتیاز]: گروه G را یک گروه متناهی درنظر بگیرید که A و B دو زیرمجموعه‌ی ناتهی از آن هستند به گونه‌ای که $|A| + |B| > |G|$. نشان دهید [1] $AB = G$. همچنین با مثالی نشان دهید که اگر $|A| + |B| = |G|$ این نتیجه‌گیری ممکن است نادرست باشد.

تمرین ۴′ [- امتیاز]: فرض کنید aو b دو عنصر از مرتبه‌ی متناهی در گروه G باشند که $ab = ba$. صحت یا سقم احکام زیر را بررسی کنید.

الف) اگر $\langle a \rangle \cup \langle b \rangle = e$ آنگاه [2] $o(ab) = [o(a), o(b)]$.

ب) اگر $o(ab) = [o(a), o(b)]$ آنگاه $\langle a \rangle \cup \langle b \rangle = e$.

ج) گروه G دارای یک عضو c است به طوری‌که $o(c) = [o(a), o(b)]$.

تمرین ۵′ [- امتیاز]: فرض کنید گروه G یک گروه متناهی باشد که مرتبه‌اش بر ۳ بخش‌پذیر نیست و همچنین به ازای هر دو عضو a و b از گروه G داشته باشیم: $(ab)^۳ = a^۳b^۳$. نشان دهید که گروه G باید آبلی باشد.

تمرین ۶′ [- امتیاز]: فرض کنید گروه G گروه آبلی باشد و اعضای a و b به ترتیب دارای مرتبه‌های m و n باشند. نشان دهید که G عضوی دارد که مرتبه‌اش ک.م.م. m و n است.

تمرین ۷′ [- امتیاز]: فرض کنید گروه G گروه آبلی متناهی‌ای باشد که تعداد حل‌های معادله $x^n = e$ (برای هر عدد طبیعی n) در G، حداکثر n باشد. نشان دهید که G گروه دوری است.

تمرین ۸′ [- امتیاز]: اگر $a^۵ = e$ و $aba^{-۱} = b^۲$ باشد، مرتبه‌ی عضو b چه اعدادی می‌تواند باشد؟ (نیاز نیست روی گروه G که اعضای aو b از آن اختیار می‌شوند، فرض خاصی کنیم.)

تمرین ۹′ [- امتیاز]: گروه G به گونه‌ای است که اشتراک تمامی زیرگروه‌های غیربدیهی‌اش، نابدیهی است [3]. نشان دهید که هر عضو از گروه G مرتبه‌ی متناهی دارد.

[1] $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$

[2] مقصود از $o(a)$ مرتبه‌ی عضو a از گروه است. همچنین نماد $[x, y]$ ک.م.م. دو عدد صحیح x و yرا نشان می‌دهد.

[3] منظور از زیرگروه‌های بدیهی، کل گروه و زیرگروه $\{e\}$ است.

تمرین ۱۰′ [– امتیاز] : گروه G را گروه آبلی متناهی از مرتبه‌ی $o(G)$ در نظر بگیرید. فرض کنید عدد طبیعی n نسبت به مرتبه‌ی گروه اول باشد. نشان دهید که هر عضو $g \in G$ می‌تواند به شکل $g = x^n$ نوشته شود، برای یک عضو مشخص $x \in G$.

تمرین ۱۱′ [– امتیاز] : نشان دهید که هر گروه از مرتبه‌ی ۹ حتما آبلی است.

تمرین ۱۲′ [– امتیاز] : مثالی از یک گروه غیرآبلی بزنید که برای تمامی اعضای $a, b \in G$ داشته باشیم: $(ab)^۳ = a^۳b^۳$

تمرین ۱۳′ [– امتیاز] : کار با جایگشت‌ها و دورها

الف) نشان دهید که

$$(۱, ۲, ۳, \dots, n)^{-۱} = (n, n-۱, \dots, ۳, ۲, ۱)$$

ب) برای چه عدد طبیعی m، دورهای به طول m زوج هستند؟

ج) نشان دهید کوچکترین زیرگروهی که شامل دو عضو (۱۲) و $(۱۲۳\dots n)$ باشد، خود گروه S_n است.

تمرین ۱۴′ [– امتیاز] : نشان دهید مجموعه‌ی تمام جایگشت‌های زوج از گروه S_n، خود تشکیل یک گروه می‌دهد؛ این گروه را A_n می‌نامیم.

تمرین ۱۵′ [– امتیاز] : نشان دهید گروه A_n با دورهای به طول سه تولید می‌شود.