سری سوم تمرینات درس ریاضی‌فیزیک پیشرفته - دکتر کریمی‌پور
خمینه‌ها (جهت‌پذیری و انتگرال‌گیری فرمها) - گروه‌های لی

موعد تحویل پاسخ‌ها: دوشنبه ۳۱ اردیبهشت سال ۱۴۰۳ - تا ساعت ۲۳:۵۹

از طریق سامانه درس‌افزار

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

تمرینات کلاسی:

۱) اتحادهای ضرب خارجی

(در این روابط $\alpha \in \Lambda^p(\mathcal{M})$ و $\beta \in \Lambda^q(\mathcal{M})$ و دیفئومورفیسم $f : \mathcal{N} \longmapsto \mathcal{M}$ مفروض‌اند.)

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}\beta \\ &f_*(\alpha \wedge \beta) = f_*(\alpha) \wedge f_*(\beta) \\ &\mathrm{d}(f_*(\alpha)) = f_*(\mathrm{d}\alpha) \end{aligned} \tag{1}$$

---

۲) اتحادهای ضرب داخلی

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_X \omega = \mathrm{d}(\iota_X \omega) + \iota_X \mathrm{d}\omega \\ &\iota_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \iota_Y] \end{aligned} \tag{2}$$

سوال اول: با مطالعه‌ی تبدیلات بی‌نهایت کوچک گروه‌های زیر، تعداد پارامترها و پایه‌های جبر لی را پیدا کنید.

$$O(n),\ SO(n),\ U(n),\ SU(n),\ \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),\ \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}),\ \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$$

سوال دوم:

Homeomorphism بین خمینه‌های زیر را ثابت کنید

$$\frac{\mathrm{SO}(3)}{\mathrm{SO}(2)} \cong S^2$$
$$\frac{\mathrm{SO}(n+1)}{\mathrm{SO}(n)} \cong S^n$$
$$\frac{U(n+1)}{U(n)} \cong S^{2n+1}$$
$$\frac{\mathrm{SU}(n+1)}{\mathrm{SU}(n)} \cong S^{2n+1}$$
$$\frac{O(n+1)}{O(1)\times O(n)} \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^n$$

سوال سوم: اگر $0 < k < \min(m,n)$ باشد، نشان دهید مجموعه ماتریس‌های $m \times n$ با رتبه‌ی حداقل k یک زیرخمینه از $M(m\times n, \mathbb{R})$ است [1] . نشان دهید اگر قید "حداقل" با "مساوی" جایگزین شود، خمینه‌ی حاصل زیرخمینه‌ی $M(m\times n,\mathbb{R})$ نیست.

سوال چهارم: نشان دهید که موارد زیر گروه لی هستند.

الف) هر فضای برداری حقیقی متناهی بعد با عمل جمع میان بردارها.

ب) فضای $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ بار}}$. (راهنمایی: آیا حاصل ضرب گروه‌های لی، یک گروه لی است؟)

ج) $\mathrm{Aut}(V)$ که V فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است [2] . (عمل ضرب گروه، ترکیب است.)

د) $K = \mathbb{R}^n \times GL(n,\mathbb{R}), n > 1$ با ضرب نیمه‌مستقیم گروهی [3] ؛ یعنی $x, x' \in \mathbb{R}^n \quad \forall A, A' \in GL(n,\mathbb{R}),$

$$(x,A)(x',A') = (x + Ax', AA')$$

---

[1] منظور از $M(m\times n,\mathbb{R})$ ، مجموعه‌ی تمامی ماتریس‌های $m\times n$ با درایه‌های حقیقی است.
[2] منظور از $\mathrm{Aut}(V)$ ، تمامی خودریختی‌های (Automorphism) فضای برداری V است؛ یعنی نگاشت‌های دوسویی فضای برداری که مبدا و مقصد آن خود V است.
[3] مشابه این ضرب را در ساختن گروه پوانکاره از گروه لورنتز می‌بینیم.

سوال پنجم: $\psi : G \mapsto G$ یک دیفیومورفیسم از گروه لی G به خودش است. طوری که

$$\forall a \in G, \quad \psi(a) = a^{-1}$$

نشان دهید ω فرم چپ‌ـناورداست اگر و تنها اگر $\psi_* \omega$ فرم راست‌ـناوردا باشد.

سوال ششم:

فرم دیفرانسیل زیر را در فضای $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید:

$$\omega = (z - x^2 - xy)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

هم‌چنین دیسک دوبعدی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

و نگاشت شمول [۴]، $i : D \longmapsto \mathbb{R}^3$ مفروض است (این نگاشت شمول، دیسک دو بعدی را روی صفحه‌ی $z = 0$ می‌نشاند.)

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_D i_* \omega$$

سوال هفتم: ۲ ـ فرم زیر را درنظر بگیرید.

$$\alpha = \frac{x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3 - \{0\})$$

الف) نشان دهید α فرم بسته است [۵] .

ب) انتگرال زیر را محاسبه کنید و بگویید چطور این پاسخ نشان می‌دهد که α کامل [۶] نیست [۷] .

$$\int_{S^2} \alpha$$

---

[4] Inclusion

[۵] فرم ω، طبق تعریف، بسته (closed) است اگر $\mathrm{d}\omega = 0$.

[۶] فرم ω، طبق تعریف، کامل (exact) است اگر فرم مرتبه پایین‌تری مثل ξ موجود باشد که $\omega = \mathrm{d}\xi$.

[۷] انتگرال‌گیری روی کره‌ی واحد به مرکز مبدا مختصات صورت می‌گیرد.

سوال هشتم: قرار دهید

$$H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

الف) نشان دهید که H ساختار یک خمینه‌ی هموار را دارد که با $\mathbb{R}^3$ دیفئومورفیک است.

ب) نشان دهید که H با عمل ضرب ماتریسی یک گروه لی است. (به این گروه، گروه هایزنبرگ می‌گوییم.)

ج)نشان دهید که مجموعه‌ی $L = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ پایه‌ای برای جبرلی $\mathfrak{h}$ (جبر لی گروه H) است.