• بسم ا... الرحمن الرحیم •

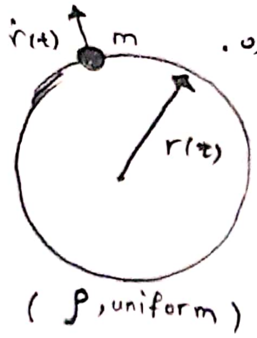
سری 2 تمرینات کیهان شناسی مقدماتی

حسین محمدی «۹۶۱۰۱۰۳۵» دکتر ابوالحسنی دستیار: آقایان سمندر و سراری.

سوال اول: چون کره به شکل همسانگرد بزرگ می‌شود ← سرعت در همه‌ی راستاها شعاعی است.

الف) قانون هابل می‌گوید: $\dot{r} = H(t)\, r(t)$

یا همان $v = Hd$ خودمان که در یک راستای معین نوشته شده.



انرژی جنبشی جسم به جرم m $\rightarrow T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m H^2(t) r^2(t)$

قضیه‌ی بیرکهوف را داریم که می‌گفت تمام تپانسیل جمع شده در کره به تپانسیل همان را می‌دهد:

$$U = -\frac{GMm}{r}$$ ← انرژی تپانسیل گرانشی

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3(t)\rho \rightarrow U = -\frac{Gm}{\cancel{r(t)}}\frac{4}{3}\pi r^{\cancel{3}\,2}(t)\,\rho$$

$$= -\frac{4}{3} G m \pi \rho r^2(t)$$

ب) در کلاس دیدیم که اگر $d_{phy}(x,y;t) = a(t)\,(\vec{X} - \vec{Y})$ بگیریم، سرعت دور شدن دو نقطه از یکدیگر، برابر با $v = Hd$ می‌شود که $H = \frac{\dot a}{a}$ است.

حال اگر در رابطه $\dot r = Hr$ قرار دهیم ←

$$\frac{\dot r}{r} = H \rightarrow \frac{\dot r}{r} = \frac{\dot a}{a} \longrightarrow$$

با شرط اولیه: $@\, t_0 \rightarrow \begin{cases} r(t_0) \\ a(t_0) \end{cases}$

انتگرال گیری می‌کنیم. $\int dt$

$$\ln\frac{r(t)}{r(t_0)} = \ln\frac{a(t)}{a(t_0)} \rightarrow$$ به توان e رساندن طرفین

$$r(t) = r(t_0) \times \frac{a(t)}{a(t_0)}$$ ∎

ج)

$$K + U = E$$

$$\frac{1}{2} m \times H^2(t)\, r^2(t) - \frac{4}{3} G m \pi \rho\, r^2(t) = E \to$$ گذاشتن $r(t)$ از صفحه‌ی قبل

$$\frac{1}{2} m \times H^2(t)\, r^2(t_0)\, \frac{a^2(t)}{a^2(t_0)} - \frac{4}{3} G m \pi \rho\, r^2(t_0)\, \frac{a^2(t)}{a^2(t_0)} = E$$

حال بر $\frac{m\, r^2(t_0)}{2 a^2(t_0)}$ تقسیم کنیم:

$$\Rightarrow H^2(t)\, a^2(t) - \frac{8}{3} G \pi \rho(t)\, a^2(t) = \underbrace{\frac{2E\, a^2(t_0)}{m r^2(t_0)}}_{-K}$$

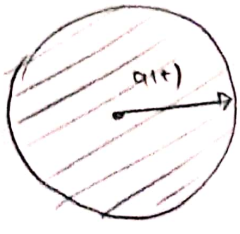
$-K \to$ بنا به تعریف

جابه‌جا و تقسیم بر $a^2(t)$

$$H^2(t) + \frac{K}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) \quad \blacksquare$$

د)

$$dE = -p\,dV \quad dS = 0$$



$\rho(t)$

$$C = 1 \to E = M = \frac{4}{3}\pi a^3(t)\, \rho$$

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3(t)$$

بگذاریم در معادله حالت:

$$\to dE = dM = \frac{4}{3}\pi \left(\dot{\rho} a^3 + 3 a^2 \dot{a} \rho\right)$$

$$و \to P\,dV = \frac{4}{3}\pi P\,(3 a^2 \dot{a}) = 4\pi P a^2 \dot{a}$$

برابر قرار دادن:

$$\frac{4}{3}\pi \dot{\rho} a^3 + 4\pi a^2 \dot{a} \rho = -4\pi P a^2 \dot{a} \to$$ بر $4\pi a^3$ تقسیم کنیم:

$$\frac{\dot\rho}{3} + \frac{\dot a}{a}\rho = -P\frac{\dot a}{a} \longrightarrow \frac{\dot\rho}{3} + \frac{\dot a}{a}(\rho + P) = 0 \longrightarrow$$

$$\dot\rho + 3\frac{\dot a}{a}(\rho + P) = 0 \qquad \blacksquare$$

هـ) از معادله‌ی فریدمان مشتق بگیریم:

$$2H(t)\dot H(t) - \frac{2k}{a^3(t)} = \frac{8\pi G}{3}\dot\rho(t) \longrightarrow$$ جایگذاری از بالا...

$$2\frac{\dot a}{a}\left(\frac{\ddot a a - \dot a^2}{a^2}\right) - \frac{2k\dot a}{a^3} = \frac{8\pi G}{3}\left(-3\frac{\dot a}{a}(\rho+P)\right)$$

$$2\frac{\dot a}{a}\left(\frac{\ddot a}{a} - \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\right) - \frac{2k\dot a}{a^3} = -8\pi G\left(\frac{\dot a}{a}\right)(\rho + P)$$

$$\frac{\ddot a}{a} - \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} = -4\pi G(\rho + P)$$

$$\frac{\ddot a}{a} = -4\pi G(\rho + P) + \underbrace{\frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}}$$

معادله فریدمان $= \frac{8\pi G}{3}\rho$

$$= -4\pi G\left(\rho + P - \frac{2}{3}\rho\right) = -4\pi G\left(\frac{\rho}{3} + P\right)$$

$$= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \qquad \blacksquare$$

سؤال دوم : در جهان تخت ماده غالب، $\rho(t) = \rho_0 a^{-3}(t)$ است :

الف)

$$\frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-3}(t) \xrightarrow{\times a^2} \dot a^2 + k = \underbrace{\frac{8\pi G}{3}\rho_0}_{c} \times a^{-1}(t)$$

$$\dot a^2 = \frac{c}{a} - k \longrightarrow \dot a = \left(\frac{c}{a} - k\right)^{1/2}$$

حال زمان همدیس را تعریف می‌کنیم و مشتق‌ها را برحسب آن تبدیل می‌کنیم :

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\bigcirc = \frac{d}{d\eta}\bigcirc \times \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{a(t)}\frac{d}{d\eta}\bigcirc \rightarrow \frac{d}{d\eta}\bigcirc = a(t)\frac{d}{dt}\bigcirc$$

حال $\rightarrow \frac{d}{d\eta}a = a(t)\frac{d}{dt}a = a(t)\,\dot a = (ca - ka^2)^{1/2}$

$$\Rightarrow \frac{da}{\sqrt{ca - ka^2}} = d\eta \longrightarrow$$

انتگرال گرفتن از طرفین را انجام دهیم ولی چون $k = \frac{-2E a^2(t_0)}{m r^2(t_0)}$ می‌توان $a(t_0)$ را طوری انتخاب کرد که $k=1$ و اصلاً بدون این آزادی قرار دهیم $k=1$.

$$\int \frac{da}{(ca - a^2)^{1/2}} = ? \longrightarrow \quad a = c\cos^2\theta$$

$$da = -2c\cos\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$= -2c\int \frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{(c^2\cos^2\theta - c^2\cos^4\theta)^{1/2}} = -2\cancel{c}\int \frac{\cancel{\sin\theta}\ \cancel{\cos\theta}}{\cancel{c\cos\theta}\,\underbrace{(1-\cos^2\theta)^{1/2}}_{\cancel{\sin\theta}}}\,d\theta$$

$$= -2\int d\theta = -2\theta \Rightarrow \eta - \eta_0 = -2(\theta - \theta_0)$$

لذا $a = c\cos^2\theta \longrightarrow \theta = \cos^{-1}\sqrt{a/c}$

$$\rightarrow \eta - \eta_0 = -2\left(\cos^{-1}\sqrt{a/c} - \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{a_0}{c}}\right)\right)$$

حال شرط اولیه را انتخاب می‌کنیم به طوری که در $\eta = 0$ ، $a_0 = 0$ باشد.

$$\Rightarrow \eta = -2\left(\cos^{-1}\sqrt{\tfrac{a}{c}} - \tfrac{\pi}{2}\right) \rightarrow -\tfrac{\eta}{2} + \tfrac{\pi}{2} = \cos^{-1}\sqrt{\tfrac{a}{c}} \rightarrow$$

$$\sqrt{\tfrac{a}{c}} = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\eta}{2}\right) = \sin\tfrac{\eta}{2} \longrightarrow a(\eta) = c\sin^2\tfrac{\eta}{2}$$

$$= c\left(\frac{1-\cos\eta}{2}\right)$$

حال a را برحسب η داریم، باید t را هم برحسب η بیابیم تا پارامتری خم را بیابیم:

$$d\eta = \frac{dt}{a} \rightarrow dt = a(\eta)\,d\eta \xrightarrow{\text{انتگرال}}$$

شرط $\eta = 0 \rightarrow t = 0$

$$t - \cancel{t_0} = \int c\left(\frac{1-\cos\eta}{2}\right)d\eta = c\left(\tfrac{\eta}{2} - \tfrac{1}{2}\sin\eta\right)$$

$$\Rightarrow t = \tfrac{c}{2}(\eta - \sin\eta) \rightarrow$$ این معادله‌ی خم چرخزاد است.

پس هم a و هم t را برحسب η داریم، به بیان دیگر a را برحسب t داریم.

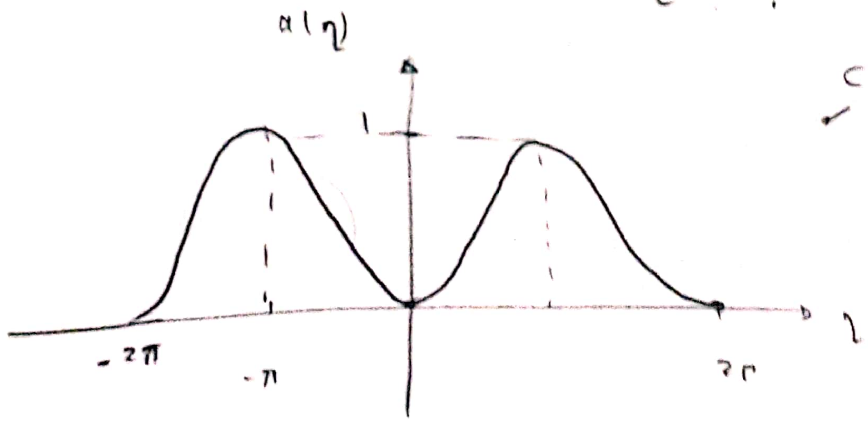
ب)

نمودار $a(t)$ هم خم چرخزاد است ولی $a(\eta)$ برحسب η ساده‌تر است.

$$a(\eta) = c\,\frac{1-\cos\eta}{2}$$

$$t(\eta) = \tfrac{c}{2}(\eta - \sin\eta)$$

$c = 1$



ج)

$a(\eta) = \frac{C}{2}(1-\cos\eta)$

$t(\eta) = \frac{C}{2}(\eta - \sin\eta)$

اگر $a(t) \to 0$ در آن صورت

$\dot a = \frac{da}{dt} =$ از روابط اول سوال $= \frac{1}{a(t)}\frac{d}{d\eta}a(\eta) = \frac{\frac{C}{2}\sin\eta}{a(t)}$

پس $\dot a \to \infty$ چرا که مخرج که خود a است به صفر میل می‌کند [توجه کنید که صورت صفر نمی‌شود چون شرط میل کردن $a(\eta) \to 0$ این است که $\eta = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\sin\eta$ در این η ها ± 1 می‌شود $\neq 0$]

اما $H = \frac{\dot a}{a}$ و چون $\dot a \to \infty$, $a \to 0$ پس $H \to \infty$ [صدا(ها) انفجار.]

اما وقتی که ضریب مقیاس صفر شود: انگار تمام مواد عالم در یک نقطه جمع شده و چون حجم نقطه به صفر میل می‌کند پس چگالی که نسبت جرم به حجم است هم ∞ می‌شود.

از روی معادلات هم:

$$\frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) \xrightarrow{\times a^2} \dot a^2 + k = \frac{8\pi G}{3}a^2(t)\rho(t)$$ ← فریدمن

وقتی $\dot a \to \infty$, k ثابت پس طرف چپ به بی‌نهایت میل می‌کند

اما در همین حال $a^2 \to 0$ و طرف راست هم به صفر میل می‌کند ← برای برقراری تساوی باید $\rho \to \infty$ برود.

سوال سوم : توجه شود که

$$q = -\frac{\ddot a}{aH^2} = -\frac{\ddot a}{a\frac{\dot a^2}{a^2}} = -\frac{\ddot a a}{\dot a^2}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d(\dot a/a)}{dt} = \frac{\ddot a a - \dot a^2}{a^2}$$

می‌دانیم که پارامتر هابل سرعت انبساط را می‌دهد $v = Hd$ و باید $\dot H$ را حساب کنیم و تغییر علامت بسنجیم:

$\dot H > 0 \to \frac{\ddot a a}{\dot a^2} > 0 \to q < 0 \to$ انبساط تند شونده

$\dot H < 0 \to \frac{\ddot a a}{\dot a^2} < 0 \to q > 0 \to$ انبساط کند شونده

از روابط زیر استفاده کنیم:

$$H^2 = H_0^2\left[\frac{\Omega_k}{a^2} + \frac{\Omega_m}{a^3}\right] \to \dot a^2 = H_0^2\left[\frac{\Omega_k}{1} + \frac{\Omega_m}{a}\right] \to$$

$$2\cancel{\dot a}\ddot a = H_0^2\left[-\frac{\Omega_m}{a^2}\cancel{\dot a}\right] \to \ddot a = -H_0^2\frac{\Omega_m}{2a^2}$$

حالا:

$$q = -\frac{\ddot a a}{\dot a^2} = +\frac{H_0^2\,\Omega_m}{2a^2}\times a\times\frac{1}{\dot a^2} = +\frac{H_0^2\,\Omega_m}{2a\,\dot a^2} \longrightarrow$$ صادر بالا

$$= +\frac{\cancel{H_0^2}\,\Omega_m}{2a\cancel{H_0^2}(\Omega_k + \Omega_m/a)} = +\frac{\Omega_m}{2(\Omega_m + a\Omega_k)}$$

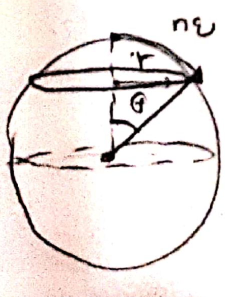
برای جهان مادهٔ غالب. $\Omega_k = 0$, $\Omega_m = 1$ $\longrightarrow$

$$q = +\frac{\Omega_m}{2(\Omega_m + 0)} = +1/2$$

باید می‌توان گفت که در این جهان چون $a \propto t^{2/3}$

$$q = -\frac{2/3\times(-1/3)\,\cancel{t^{-4/3}}\,\cancel{t^{2/3}}}{4/9\,\cancel{t^{-2/3}}} = +\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

سؤال ۴ الف) از ایده‌ی اعضای کادس استفاده می‌کنم اگر موجود دوبعدی ساکن بر سطح کره خط‌کشی به طول ε داشته باشد (خطای اندازه‌گیری آنم $\pm\varepsilon$ باشد) در این صورت اگر دایره‌ای به شعاع $n\varepsilon$ رسم کند، از دید آن موجود دوبعدی محیط دایره $2\pi n\varepsilon$ است اما اگر این موجودات باهوش باشند و بدانند که در ۳ بعد محیط دایره $2\pi R\sin\left(\frac{n\varepsilon}{R}\right)$ است (مطابق شکل زیر)



$$\theta = \frac{n\varepsilon}{R} \to r = R\sin\left(\frac{n\varepsilon}{R}\right) \to \text{محیط} = 2\pi R\sin\left(\frac{n\varepsilon}{R}\right)$$

و تفاضل این دو را تا مرتبه اول می‌خوانند:

$$2\pi n\epsilon - 2\pi R\sin\left(\frac{n\epsilon}{R}\right) = 2\pi n\epsilon - 2\pi R\left(\frac{n\epsilon}{R} - \frac{n^3\epsilon^3}{6R^3} + O(\epsilon^5)\right)$$

$$= \cancel{2\pi n\epsilon} - \cancel{2\pi n\epsilon} + \frac{\pi n^3\epsilon^3}{3R^2}$$

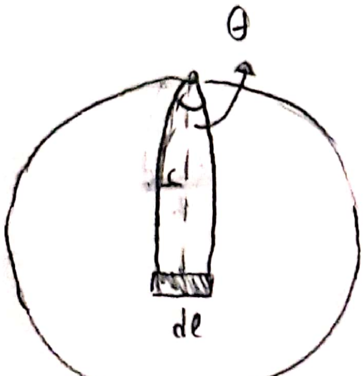
حال اگر این اختلاف طول از دقت ϵ فراتر باشد در این صورت موجودات دوبعدی نتیجه می‌گیرند که فضاشان انحنا دارد!

$$\frac{\pi}{3}\frac{n^3\epsilon^{\cancel{3}\,2}}{R^2} > \cancel{\epsilon} \rightarrow n^3 > \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^2 \times \frac{3}{\pi}$$

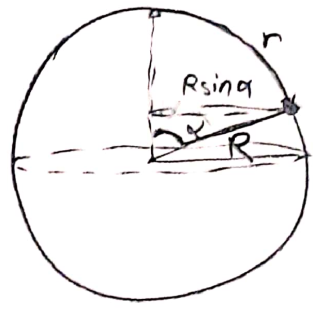
$$\Rightarrow n \geq \left[\left(\left(\frac{R}{\epsilon}\right)^2 \frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\right] + 1$$

مثلاً اگر $R = 100\,\epsilon$ باشد باید $n \geq [100^{2}\times\frac{3}{\pi}] + 1$ باشد یعنی شعاع دایره‌ی ترسیمی باید تقریباً $9550\,\epsilon$ برسد تا به انحنای پی ببرند. بدیهی است که هرچه $\frac{R}{\epsilon}$ بیشتر باشد یعنی شعاع کره نسبت به خطای ما بزرگتر باشد باید شعاع کره را بزرگ کنیم تا به انحنا پی ببریم.

ب)



$dl \ll R$



$$\alpha = \frac{r}{R}$$

اگر یک سر خط‌کش در مختصات (R, ϕ_0, α) باشد سر دیگر در $(R, \phi_0+\delta\phi, \theta)$ است که در آن ←

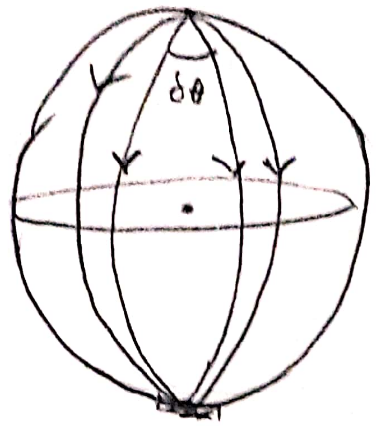
$\delta l = R\sin\alpha\,\delta\phi$ ← $\delta\phi = \dfrac{\delta l}{R\sin\alpha}$ است.

در دستگاه دوبعدی θ و ϕ $(R = \text{fixed})$ آنچه موجودات 2بعدی به عنوان $\delta\theta$ گزارش می‌دهند همان $\delta\phi$ دستگاه 3بعدی است ←

$$\delta\theta_{2D} = \frac{\delta l}{R\sin\alpha}$$

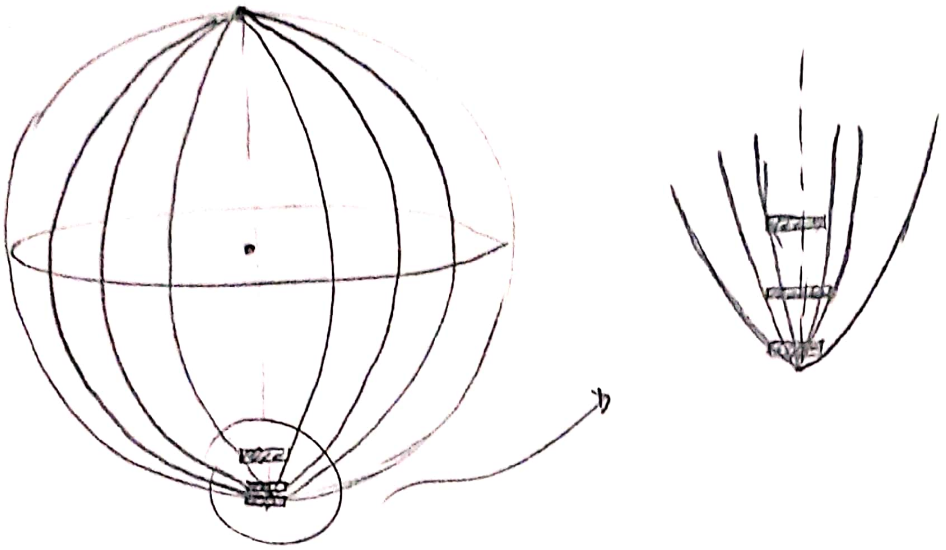
در حد $r \rightarrow \pi R$ آنگاه $\alpha \rightarrow \pi$ پس $\delta\theta_{2D} \rightarrow \infty$ ، اما چرا این اتفاق می‌افتد؟

توجه شود که اگر ما دو سیگنال نوری را تحت هر زاویه‌ای بفرستیم هر دو این دو سیگنال در محل قطب جنوب تقاطع می‌کنند و ما همواره وسط خط‌کش را می‌بینیم و هیچ گاه قادر نیستیم دو سر آن را ببینیم!



این $\delta\theta \longrightarrow \infty$ یعنی هر چقدر هم زاویه‌ی نورها را زیاد کنید باز هم نمی‌توانید دو سر خط‌کش را مشاهده کنید.

در حالت صد درصد نزدیک قطب جنوب $\longrightarrow$ خط‌کش شکل زیر را می‌بیند:



ج) معادله ژئودزیک:

$$L_{AB} = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \xrightarrow{\text{پارامتری کردن}} \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2} = L_{AB}$$

باید برای یافتن فاصله دو نقطه‌ی دلخواه A و B روی کره، L_{AB} را کمینه کنیم:

$$\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\phi \\ y &= R\sin\theta\sin\phi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned} \longrightarrow \partial_\tau \begin{cases} x = (R\cos\theta\cos\phi)\dfrac{d\theta}{d\tau} + (-R\sin\theta\sin\phi)\dfrac{d\phi}{d\tau} \\ y = (R\cos\theta\sin\phi)\dfrac{d\theta}{d\tau} + R\sin\theta\cos\phi\dfrac{d\phi}{d\tau} \\ z = -R\sin\theta\dfrac{d\theta}{d\tau} \end{cases}$$

$$(\partial_\tau x)^2 + (\partial_\tau y)^2 + (\partial_\tau z)^2 = R^2\cos^2\theta\cos^2\phi(d_\tau\theta)^2 + R^2\sin^2\theta\sin^2\phi\left(d_\tau\phi\right)^2$$

$$\cancel{-2R^2\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi\, d_\tau\theta\, d_\tau\phi} + R^2\cos^2\theta\sin^2\phi(d_\tau\theta)^2$$

$$+R^2\sin^2\theta\cos^2\phi(d_\tau\phi)^2 + \cancel{2R^2\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi\, d_\tau\phi\, d_\tau\theta} + R^2\sin^2\theta(d_\tau\theta)^2$$

$$= \underbrace{R^2\cos^2\theta \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2} + R^2\sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \underbrace{+R^2\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2}$$

$$= R^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + R^2\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

می‌خواهیم $\phi(\tau)$, $\theta(\tau)$ طوری بیابیم که این انتگرال کمینه شود ← معادلات $\mathcal{E}-\mathcal{L}$ مناسبند:

$$L_{AB} = \int d\tau \left(R^2(\partial_\tau\theta)^2 + R^2\sin^2\theta\,(\partial_\tau\phi)^2\right)^{1/2}$$

$$\mathcal{E}-\mathcal{L}: \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau\phi)} = 0$$

ϕ: وابستگی به ϕ نداریم $\rightarrow \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau\phi)} = \text{Const} \rightarrow 2R^2\sin^2\theta\,(\partial_\tau\phi) = C_1$

دات = مشتق نسبت به τ $\rightarrow \dot{\phi} = \dfrac{C_1}{2R^2\sin^2\theta}$

$$\theta \rightarrow \quad \frac{\cancel{2}R^2\cos\theta\sin\theta\,(\partial_\tau\phi)^2}{\cancel{2}(\text{انتگرال ده})} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{2R^2\,\partial_\tau\theta}{2(\text{انتگرال ده})}\right).$$

$$R^2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot\theta}{\sqrt{R^2\dot\theta^2+R^2\sin^2\theta\,\dot\phi^2}}\right) = R^2\,\frac{\ddot\theta\sqrt{\cdots} - \dot\theta\,\dfrac{2R^2\dot\theta\ddot\theta + R^2(\dot\phi^2\dot\theta\sin2\theta + \sin^2\theta\times2\dot\phi\ddot\phi)}{2\sqrt{\cdots\ \cdots}}}{R^2\dot\theta^2 + R^2\sin^2\theta\,\dot\phi^2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta\sin\theta\,(\dot\phi)^2 = \ddot\theta - \dot\theta\,\frac{2R^2\dot\theta\ddot\theta + R^2\dot\phi^2\dot\theta\sin2\theta + 2R^2\dot\phi\ddot\phi\sin^2\theta}{R^2\dot\theta^2 + R^2\sin^2\theta\,\dot\phi^2}$$

این معادلات چیز خوبی نیستند! ببینیم روش ساده‌تری داریم!

اگر از اول پارامتر t را وارد نکنیم و $\frac{d\phi}{d\theta}$ را حساب کنیم در انتگرال داریم:

$$\rightarrow \int_A^B R\,d\theta \left(\sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 + 1 \right)^{1/2}$$

حالا معادله E-L بنویسیم:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial L}{\partial (\phi_\theta)} = 0 \rightarrow$$

خوشبختانه اولی صفر است و

مشتق ϕ نسبت به θ

$$\frac{\partial L}{\partial \phi'} = C \rightarrow \frac{\sin^2\theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta}}{\sqrt{1+\sin^2\theta \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)^2}} = C \rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

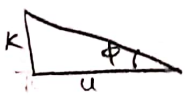
حل برحسب

$$(\sin^4\theta)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)^2 = k^2 + k^2\sin^2\theta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)^2 \rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{k}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - k^2}}$$

انتگرال‌گیری با یک تغییر متغیر دهیم

$$\int \frac{k}{\sin\theta(\sin^2\theta - k^2)^{1/2}}\,d\theta$$

درستش



$$\rightarrow \sin\theta = \frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}}$$

$$u = k\cot\theta \Rightarrow$$

$$du = -k(1+\cot^2\theta) = -k\frac{1}{\sin^2\theta} = -k\csc^2\theta\,d\theta$$

قرار دهیم در انتگرال (اول یک k^2 بیرون بکشیم)

$$\int \frac{\cancel{k}}{(\sin\theta)(\cancel{k})\left(\frac{\sin^2\theta}{k^2} - 1\right)^{1/2}}\,d\theta = \int \frac{\sqrt{u^2+k^2}}{k\left(\frac{1}{u^2+k^2} - \frac{u^2+k^2}{u^2+k^2}\right)^{1/2}}\,d\theta =$$

$$= -\frac{k}{\sin^2\theta}\,du$$

$$= \int \frac{(u^2+k^2)}{k(1-u^2-k^2)^{1/2}}\,d\theta = -\int \frac{du}{(\underbrace{1-k^2}_{\alpha^2}-u^2)^{1/2}}$$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}\,du \rightarrow$$

از جدول انتگرال: $\phi = \cos^{-1}\left(\frac{u}{\alpha}\right) + \phi_0$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{k}{1-k^2}\cot\phi\right) + \theta_0$$

انتگرال گیری سخت بود!

این معادله ژئودزیک است! دایره‌ی عظیمه!

چرا؟ باید معادله‌ی خط را در دستگاه کروی بنویسیم:

$$Ax + By + Cz = 0 \longrightarrow A\cos\theta\sin\phi + B\sin\theta\sin\phi + C\cos\phi = 0$$

تقسیم بر $\sin\phi$

$$= A\cos\theta + B\sin\theta = -C\cot\phi$$

طرفین را بر $\sqrt{A^2+B^2}$ تقسیم کنید و بگیرید $\cos\theta_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\sqrt{A^2+B^2}\left(\cos\theta_0\cos\theta + \sin\theta_0\sin\theta\right) = -C\cot\phi$$

$$\sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta-\theta_0) = -C\cos\phi \Rightarrow$$

$$\theta - \theta_0 = \cos^{-1}\left[\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}\cot\phi\right] \longrightarrow$$

پس تقاطع صفحه با کره است که این معادله را دارد، اما این صفحه شامل دو نقطه هم هست ⟵ تعریف دایره‌ی عظیمه!

تو چرا ژئودزیک کوتاه‌ترین مسیر را می‌دهد، در دایره‌ی عظیمه حل واقع می‌کند.