بدست آوردن سیستماتیک گروه هموتوپی اول فضاهای توپولوژیک

حسین محمدی

شیوه‌ای که در کلاس برای بدست آوردن گروه هموتوپی اول پی گرفتیم، به نظر گنگ بود و حتی جاهایی من به اشکال خوردم. اما روش کامل‌تر و سیستماتیک‌تر کتاب درسی به ما کمک می‌کند که با به کار بستن چند قانون، گروه هموتوپی رو بدست بیاریم.
روش کار به این صورته:

۱. مثلث‌بندی معتبرK از فضای توپولوژیک ارائه کنید.

۲. از مثلث بندی K یک زیرقسمت [1] L جدا کنید به طوری که:

- L شامل تمامی راس‌های مثلث‌بندی K بشود.
- چندوجهی $|L|$ همبند ساده و مسیری باشد.

۳. به هر 1-simplex به شکل (v_i, v_j) از $K - L$ یک مولد گروه به فرم g_{ij} نسبت بدهید.

۴. اگر یک 2-simplex به فرم (v_i, v_j, v_k) و $(i < j < k)$ در K هست؛ قید $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ را به مولدها اعمال کنید.

۵. به هر 1-simplex از زیرقسمت L، مولد بدیهی رو نسبت بدید.

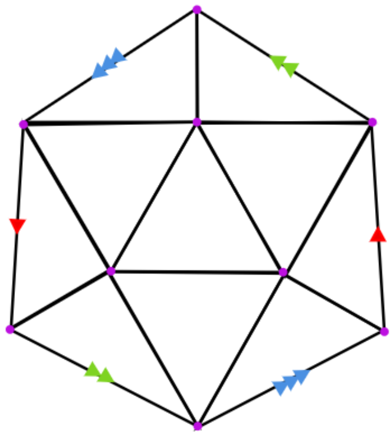
۶. گروه هموتوپی فضاتون، همان گروهی است که با مولدهای بالا و قیدهای بالا تولید میشه.

به عنوان مثال بیایید فضای $\mathbb{R}P^2$ رو بررسی کنیم که توی کلاس در بدست آوردن گروهی هموتوپیش ناموفق بودیم.
اول مثلث بندی شکل ۱ رو براش در نظر می‌گیریم.
در مرحله دوم، نقاط این مثلث بندی رو نام‌گذاری می‌کنیم؛ توجه کنید که نقاطی که تحت عمل Identification یکسان می‌شوند، باید با یک شماره نام‌گذاری بشوند. (شکل ۲)
بعد بیایید زیرقسمت L رو مشخص کنیم، این زیرقسمت باید شامل تمامی نقاط غیریکسان بشه و همچنین باید همبند ساده و مسیری باشه. (شکل ۳ و قسمت خاکستری رنگ.)
حالا بیایید دونه به دونه قوانین ۴ تا ۶ رو روی این مثلث‌بندی اعمال کنیم. اسم مولد مسیر 23 رو می‌گذاریم x (شکل ۴) و مطابق قانون ۴ برای 3-simplex متشکل از (234) خواهیم داشت:

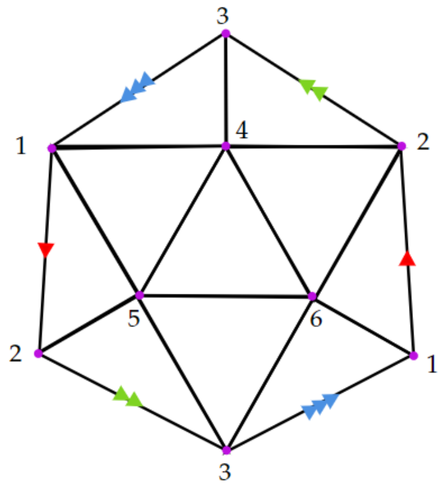
$$g_{23}g_{34} = g_{24}$$

توجه‌کنید که چون یال (34) خودش بخشی از L هست پس مولدش بدیهیه، پس نتیجه میشه که $g_{24} = x.e = x$.

[1] Subcomplex



شکل ۱: مثلث بندی از $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$



شکل ۲: شماره‌گذاری نقاط مثلث‌بندی

همین کار رو برای وجه‌های $(365), (316), (126), (246)$ انجام بدیم، مشابها نتیجه میشه که:

$$g_{26} = g_{16} = g_{36} = g_{35} = x$$

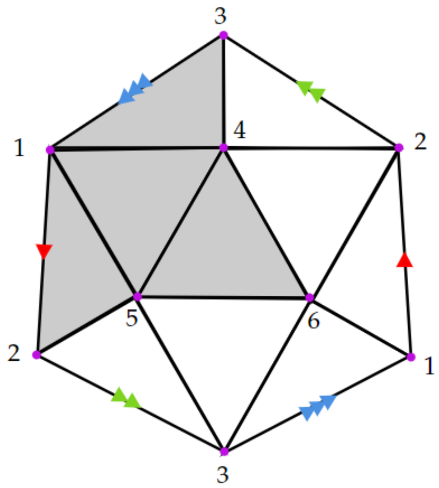
اما در مورد وجه (235) توجه کنید که شرایط یک کم خاص تره.

$$g_{23}g_{35} = g_{25}$$

چون $(25) \in L$ پس $g_{25} = e$ همچنین داشتیم $g_{23} = g_{35} = x$ ، پس قید آخر نتیجه میده که $x^2 = e$.
پس گروه هموتوپی اول فضای $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ با تک عضو x تولید میشه که مرتبه‌اش دو هست. این دقیقا همون گروه دوری مرتبه ۲ یا $\mathbb{Z}_2$ هستش.

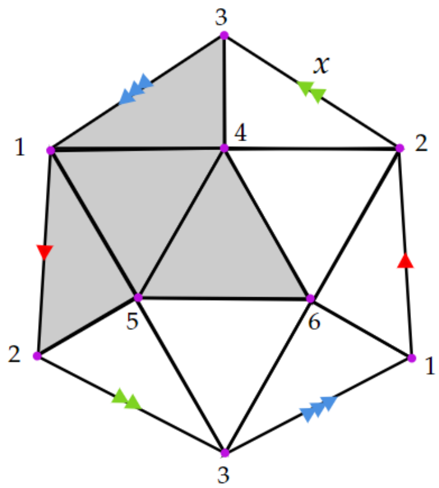
$$\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \langle x; x^2 \rangle = \mathbb{Z}_2$$

به این روش می‌تونید گروه هموتوپی فضاهای دیگه رو به شکل کاملا استاندارد بدست بیارید؛ مثلا گروه هموتوپی کره دو و سه بعدی که توی کلاس به مشکل خورد، به این روش قابل حل کردنه. مثلث‌بندیهایی که توی کلاس حل تمرین دیدیم در حقیقت به معنای درست مثلث بندی نبودند، ولی کار رو فوق العاده ساده‌تر می‌کردند.



شکل ۳: بدست آوردن زیرقسمت L

در آخر هم دعوتتون می‌کنم تا شکل ۱۶.۴ کتاب رو ببینید و متوجه بشید که چرا گروه هموتوپی فضای $\mathbb{RP}^2$ تنها دو عضو داره.



شکل ۴: مثلث‌بندی نهایی