

آیا گروه خارج قسمتی با زیرگروهی از گروه اولیه یکریخت است؟

حسین محمدی

۲۲ فروردین ۱۴۰۳

برخی از شما نکته‌ای را به من تذکر دادید که به اشتباه در کلاس درس گفته شد. این جا سعی می‌کنیم آن را تصحیح کنیم.

آیا برای زیرگروه بهنجار $H \trianglelefteq G$ ، گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ با زیرگروهی از خود G یکریخت است؟ نه لزوماً. مثلاً گروه Q یا کواترنیون‌ها را در نظر بگیرید و زیرگروه $H = \{1, -1\}$ از آن که یک زیرگروه بهنجار است. می‌دانیم که گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ از همدسته‌های این زیرگروه تشکیل شده است؛ پس داریم:

$$\frac{Q}{H} = \{\{1, -1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}\}$$

جدول ضرب آن در پایین آمده است. همانطور که می‌بینید این گروه چهار عضوی، هیچ عضو مرتبه‌چهارمی ندارد و یکریخت با گروه کلاین، یعنی $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ است.

	$\{1, -1\}$	$\{i, -i\}$	$\{j, -j\}$	$\{k, -k\}$
$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	$\{i, -i\}$	$\{j, -j\}$	$\{k, -k\}$
$\{i, -i\}$	$\{i, -i\}$	$\{1, -1\}$	$\{k, -k\}$	$\{j, -j\}$
$\{j, -j\}$	$\{j, -j\}$	$\{k, -k\}$	$\{1, -1\}$	$\{i, -i\}$
$\{k, -k\}$	$\{k, -k\}$	$\{j, -j\}$	$\{i, -i\}$	$\{1, -1\}$

جدول ضرب گروه خارج قسمتی

این در حالی است که تمام زیرگروه‌های چهارعضوی گروه کواترنیون به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}K_1 &= \{1, -1, i, -i\} = \langle i \rangle \\K_2 &= \{1, -1, j, -j\} = \langle j \rangle \\K_3 &= \{1, -1, k, -k\} = \langle k \rangle\end{aligned}$$

یعنی همگی دوری از مرتبه چهار هستند. پس لزوماً زیرگروه K وجود ندارد که $\frac{G}{H} \simeq K$.

یا حتی مثالی ساده‌تر هم وجود دارد. گروه $G = \mathbb{Z}$ با عمل جمع و زیرگروه $H = 2\mathbb{Z} \trianglelefteq G$ متشکل از اعداد زوج را در نظر بگیرید. می‌دانیم که

$$\frac{G}{H} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2$$

اما هیچ زیرگروه دوعضوی‌ای از گروه \mathbb{Z} نداریم؛ چون هیچ عضوی با مرتبه‌ی دو در این گروه نیست.

تبصره

به سادگی می‌توانید نشان دهید وقتی که گروه G آبلی و متناهی باشد؛ هر زیرگروه خارج قسمتی از آن همریخت با یک زیرگروه از گروه اولیه است.