

به نام خدا
آشنایی با نسبیت عام
تمرین سری چهارم
موعد تحویل : جمعه ۱۷ آذر ۱۴۰۲ ساعت ۲۴

۱ سازگاری متریک

نشان دهید با انتخاب هموستار به صورت زیر:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}[g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}]$$

رابطه زیر برقرار است:

$$\nabla_{\beta}g_{\alpha\sigma} = 0$$

۲ نمادهای کریستوفل

نمادهای کریستوفل به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \mathbf{e}^{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\nu}}{\partial x^{\sigma}}$$

اثبات کنید این نمادها در حالت کلی تانسور نیستند. همچنین شرایطی را بدست آورید که تحت آن شرایط، این نمادها تانسور شوند. راهنمایی: \mathbf{e}^{μ} و \mathbf{e}_{ν} به ترتیب بردارهای پایه فضای مماس و فضای دوگان آن هستند. بنابراین برای این بردارها داریم:

$$\mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu} = g_{\mu\nu}$$

۳ پایه های فضای تانژانت و کتانژانت

معادله پارامتری زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{r} = (u+v)\hat{i} + (u-v)\hat{j} + (2uv+w)\hat{k}$$

پایه های (e_u, e_v, e_w) را بدست آورید. همچنین پایه های دوگان این فضا را حساب کنید.

۴ کره ۲ بعدی

برای متریک $ds^2 = d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2$ موارد زیر را حساب کنید:
الف) نمادهای کریستوفل را حساب کرده و معادلات ژئودزی را در دو راستای θ و ϕ بنویسید
ب) معادله ی ژئودزی را با استفاده از معادلات اوایلر-لاگرانژ بدست آورید

لطفاً نام، نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را بالای برگه تحویلی بنویسید.

“The effort to understand the universe is one of the very few things that lifts human life a little above the level of farce, and gives it some of the grace of tragedy.” - Steven Weinberg