آیا زیرگروه HK آبلی است؟

مربوط به تمرین کلاسی

در کلاس دیدیم که اگر H و G دو زیرگروه از گروه G باشند، در این صورت مجموعه‌ی HK با تعریف

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

زیرگروهی از G است، اگر و تنها اگر $HK = KH$.
سوالی که در کلاس مطرح شد این بود که با فرض زیرگروه بودن HK ، آیا زیرگروه آبلی است؟ (چون شرط $HK = KH$ ناخودآگاه آبلی بودن را به خاطر می‌آورد.)

اولا: توجه کنید که معنای شرط $HK = KH$ این است که به ازای هر عضو $hk \in HK$ حتما اعضایی مثل $\tilde{k} \in K, \tilde{h} \in H$ هستند که:

$$\tilde{k}\tilde{h} = hk$$

در حقیقت لزومی ندارد که $\tilde{k}$ و $\tilde{h}$ همان k و h باشند. پس انگار شرط ضعیفتری نسبت به آبلی بودن هست.

مثال نقض: گروه S_3 را که همگی با آن آشنا هستید، یک مثال نقض ارائه می‌کند. بگیرید:

$$H = \{e, (12)\}$$
$$K = \{e, (123), (132)\}$$

با تعریف ضرب در گروه S_3 می‌توانید ببینید که هر دو زیرگروه هستند و داریم:

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\} = \{e, (12), (123), (132), (13), (23)\} = S_3$$

علت اضافه شدن اعضای (23) ,(13) به خاطر ضربهای

$$(12)(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23)$$
$$(12)(132) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)$$

است. پس می‌بینید که $HK = S_3$ آبلی نیست.

برای آشنایی بیشتر با گروه S_3 زیرگروه‌ها، کلاس‌های تزویجی و جدول ضربش، به این و این صفحه مراجعه کنید.