جلسه هفتم حل تمرین درس ریاضی‌فیزیک پیشرفته

هندسه ریمانی

حسین محمدی

چهارشنبه ۲۶ اردیبهشت سال ۱۴۰۳

سوال اول: درباب مقدمات خمینه‌های ریمانی

خمینه‌ی ریمانی (M,g) یک خمینه‌ی nـ بعدی است. نشان دهید که:

الف) به‌ازای هر $\alpha,\beta \in T_p^\star M$ و هرپایه‌ی یکه‌متعامد $\{e_i\}_{i=1}^n$ از فضای مماسِ T_pM داریم:

$$g^{-1}(\alpha,\beta)=\sum_i \alpha(e_i)\beta(e_i)$$

$\{e^j\}_{j=1}^n$ $\langle e_j \rangle = T_p^* M$

که در آن g^{-1} متریک پادوردای مربوط به g است؛ در کاربردهای فیزیکی، منظور ما از g^{-1} همان $g^{\mu\nu}\partial_\mu\otimes\partial_\nu$ است.

ب) برای هر بردار $X\in T_pM$ همواره

$$g^{-1}(\alpha,X^\flat)=\alpha(X)=g(\alpha^\sharp,X)$$

$\alpha \in T_p^* M$

که در این عبارات، یکریختی‌های موسیقایی فضای‌مماس [1] به شکل زیر تعریف شده‌اند:

bemól / flat
diese / sharp

$$\flat: T_pM \longrightarrow T_p^*M \qquad X^\flat = g(X,.) \equiv g_{kj} x^k$$
$$\sharp: T_p^*M \longrightarrow T_pM \qquad \alpha^\sharp = g^{-1}(\alpha,.)$$

$\#$ $g^{k\ell}\alpha_k$

Riemannian geometry

× Riemannian manifold → $g_p: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}^2$
2-tensor

مرتبط × Connection and ∇

× Geodesics

× curvature & Ricci scalar

× Isometries, Killing vector.

× CKVs...

× Homogeneous Riemann manifolds.

× Constant curvature spaces.
$R=-1 \to$ hyper
$R=0 \to \mathbb{R}^n$
$R=+1 \to S^n$

× metric on Lie manifold.

× operators ($\vec{\nabla}$, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$, $\nabla^2=\Delta$, $\circledast$)

× Killing vectors (✓ / Conformal CKV / projective KV / Homothetic KV) ...

[1] Tangent space musical isomorphisms

$g^{-1}(\alpha, \beta) = \sum_i \alpha(e_i)\, \beta(e_j)$

$\underline{\underline{g_{ij}(p)}}$ is matrix in $\underline{\underline{\{e_i\}_{i=1}^{n}}}$.

$(g_{ij}(p))^{-1} \equiv g^{ij}(p)$ is a matrix $\{e^j\}_{j=1}^n$

$\langle e_1, e_2\rangle = 0$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \quad ? \quad g_{12} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$

$\underline{\underline{g}}(e_i, e_j)$

$e_i e^r = \delta_i^r$

Term

$$g_p^{-1}(\alpha, \beta) = \left(g^{ij} \underbrace{(e_i \otimes e_j)}_{p} \right) (\alpha_r e^r, \underbrace{\beta_s e^s}_{\delta_j^s})$$

$$= \underbrace{g^{ij}} \alpha_i \beta_j$$

$$= \delta^{ij} \alpha_i \beta_j = \sum_i \alpha_i \beta_i \equiv \sum_i \underbrace{\alpha(e_i)}_{\alpha_i} \underbrace{\beta(e_i)}_{\beta_i}$$

$$\rightarrow g^{-1}(\alpha, \beta) = \sum_i \alpha(e_i) \beta(e_i)$$

$$g^{-1}(\underbrace{\alpha}, X^b) = g_p^{ij} \alpha_i \underbrace{(X^b)_j}_{g(p)_{kj} X^k}$$

$$= \underbrace{g^{ij} g_{kj}}_{\delta^i_k} \alpha_i X^k = \underbrace{\alpha_i} \underbrace{X^i} = \underline{\alpha}(\underline{X})$$

$g(\alpha^\#, X) = (g_{ij}(p))(\alpha^\#)^i X^j \qquad \alpha_j X^j = \alpha(X)$

$g^{ki}(p)\,\alpha_k$

δ_j^k

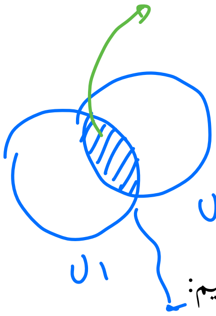
سوال دوم: درباب هموستار و مشتق هموردا

$\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$ is holomorphic

متریک g را متریک ”هرمیتی“ روی خمینه‌ی تقریبا مختلط (M,J) درنظر بگیرید.
از این اصطلاحات نترسید؛ یک ساختار تقریبا مختلط [2] روی یک خمینه، نگاشتی است از هر فضای مماس به خودش به شکل زیر:

$$\forall p\in M: \quad J(p):T_pM\longrightarrow T_pM \quad : \quad J^2=-1 \; \mathbb{1}_{n\times n}$$

و متریک g هرمیتی است اگر



$$g(JX,JY)=g(X,Y), \qquad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

تانسور $(0,2)$ (یعنی تانسوری که دو ورودیِ برداری می‌گیرد) F را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(X,Y)=g(X,JY)$$

$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}\in C^\infty$

حالا ثابت کنید که:

الف) F پادمتقارن است.

ب) F به‌اصطلاح J-invariant است؛ یعنی که $F(JX,JY)=F(X,Y)$

برای ادامه‌ی سوال، فرض کنید که هموستار سازگار با متریکِ ∇ مفروض هست.

د) نشان دهید

$(\nabla g)=0$

$$(\nabla_X F)(Y,Z)=g(Y,(\nabla_X J)Z).$$

ه) نشان‌دهید

$$g((\nabla_X J)Y,Z)+g(Y,(\nabla_X J)Z)=0.$$

$$\text{(i)}\quad F(Y,X)=g(Y,JX)=g(JY,\underbrace{J^2}_{-1}X)=-g(JY,X)=-g(X,JY)=-F(X,Y)$$

$$\text{(ii)}\quad F(JX,JY)\overset{\text{def}}{\underset{F}{=}}g(JX,\underbrace{J^2}_{-\mathbb{1}}Y)=-g(JX,Y)=-g(\underbrace{J^2}_{-1}X,JY)=g(X,JY)=F(X,Y)$$

---

[2] Almost complex structure

(iii) $(\nabla_X F)(X,Y) \overset{?}{=} g(Y, (\nabla_X J) Z)$

$$\nabla_X \{F(Y,Z)\} = (\nabla_X F)(Y,Z) + F(\nabla_X Y, Z) + F(Y, \nabla_X Z)$$

$$\nabla_X \{ g(Y, JZ) \} = \cancel{\boxed{\nabla_X g}}(Y, JZ) + g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X (JZ))$$

by asumptn

$$= \underbrace{g(\nabla_X Y, JZ)}_{F(\nabla_X Y, Z)} + g(Y, (\nabla_X J) Z) + \underbrace{g(Y, J\nabla_X Z)}_{F(Y, \nabla_X Z)}$$

$$(\nabla_X F)(Y,Z) = g(Y, (\nabla_X J) Z)$$

$$g((\nabla_X J) Y, Z) + g(Y, (\nabla_X J) Z) = 0$$

$\to (\nabla_X F)$ is skew symmetric.

$$g((\nabla_X J) Y, Z) = g(Z, (\nabla_X J) Y)$$

$$= (\nabla_X F)(Z, Y)$$

$$= -\nabla_X F(Y, Z)$$

$$= -g(Y, (\nabla_X J) Z)$$

سوال سوم: محاسباتی در باب هموستار و ژئودزیک‌ها

فضای $\mathbb{R}^۳$ با متریک $ds^۲ = (۱ + x^۲)dx^۲ + dy^۲ + e^z dz^۲$ را به عنوان خمینه‌ی ریمانی معرفی می‌کنیم.

الف) تمامی هموستارهای لوی_چیویتا را پیدا کنید. ✓ Γ

ب) معادله‌ی ژئودزیک را حل کنید. ✓

ج) خم $\gamma(t) = (x = t, y = t, z = t)$ را درنظر داشته‌باشید. انتقال موازی هر بردار (a, b, c) در مبدا، در راستای این خم را پیدا کنید. (a,b,c) (ه)

د) آیا خم γ خود ژئودزیک است؟

ه)دو میدان‌برداری موازی $X(t), Y(t)$ روی γ پیداکنید که $g(X(t), Y(t))$ ثابت باشد.

$$g = \begin{pmatrix} 1+x^2 & & \\ & 1 & \\ & & e^z \end{pmatrix} \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} & & \\ & 1 & \\ & & e^{-z} \end{pmatrix}$$

$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ Carroll

$\Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} \overset{\lambda\neq\mu}{=} -\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} \partial_{\lambda} g_{\mu\mu}$ y, z

$\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = \partial_{\mu} \left(\ln \sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} \right)$

$\Gamma^{\lambda}_{\lambda\lambda} = \partial_{\lambda} \left(\ln \sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} \right)$

$\Gamma^{1}_{11} = \Gamma^{x}_{xx} = \partial_x \left(\ln \sqrt{1+x^2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$

$\Gamma^{2}_{22} = 0 = \Gamma^{y}_{yy}$

$\Gamma^{3}_{33} = \partial_3 \ln \sqrt{e^z} = \frac{1}{2}$

Γ^{3}_{32} $\quad g_{22}$ $\quad g^{-1}$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\partial_{\nu} g_{\rho\alpha} + \cancel{\partial_{\rho} g_{\nu\alpha}} - \cancel{\partial_{\alpha} g_{\nu\rho}} \right)$$

$\frac{\partial(\ldots)}{g} = \partial \ln(\ldots g)$

Repeated indices are not summed over!

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{1+x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = 0$$

$$(\ln(f))' = \frac{f'}{f}$$

$$\frac{x''}{x'} + \frac{1}{2}\frac{2x\,(x')}{1+x^2} = 0$$

$$\ln(x') + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln A$$

$$x' = \frac{A}{\sqrt{1+x^2}} \longrightarrow dx\sqrt{1+x^2} = A\,dt$$

$$\int \qquad x = sh(\theta)$$

$$\frac{1}{2}\left\{ x\sqrt{1+x^2} + \underbrace{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}_{\sinh^{-1}(x)} \right\} = At + B$$

$$y(t) = Ct + D$$

$$z'' + \frac{1}{2}(z')^2 = 0 \qquad (z' = p)$$

$$p' + \frac{p^2}{2} = 0 \xrightarrow[\times\, dt]{\div p^2} \frac{dp}{p^2} + \frac{dt}{2} = 0$$

$$\int$$

$$-\frac{1}{p} + \frac{t}{2} = -\frac{E}{2}$$

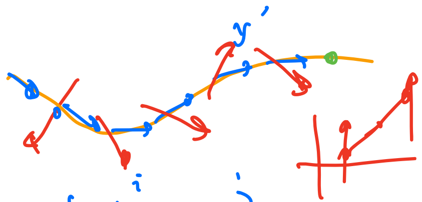
$$\rightarrow \frac{1}{p} = \frac{t+E}{2}$$

$$p = \frac{dz}{dt} = \frac{2}{t+E} \longrightarrow z = 2\log(t+E) + 2\log(F)$$

$$z(t) = \log(Ft+G)^2$$

$\nabla_{\gamma'} V = 0$ $\qquad V = (v^1, v^2, v^3)$

$\gamma = (x = t,\ y = t,\ z = t)$



$x(\gamma) = t$

$$\frac{dv^i}{dt} + \Gamma^{i}_{jk} \frac{dx^i}{dt} v^j = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dv^1}{dt} + \dfrac{x}{1+x^2}\dfrac{dx}{dt} v^1 = 0 \\[2ex] \dfrac{dv^2}{dt} = 0 \\[2ex] \dfrac{dv^3}{dt} + \dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dt} v^3 = 0 \end{array}\right.$$

$x = t$, $\quad \dfrac{dx}{dt} = 1$

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (v^1)' + \dfrac{t}{1+t^2} v^1 = 0 \\[2ex] (v^2)' = 0 \\[2ex] (v^3)' + \dfrac{v^3}{2} = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(v^1)'}{v^1} + \dfrac{t}{1+t^2} = 0 \\[2ex] \ln v^1 = -\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + \ln A \end{array}\right.$$

(a, b, c) $\qquad v^1(0) = a \longrightarrow A = a$

$$\frac{d^2 x^r}{dt^2} + \Gamma^{r}_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\rho}{dt} = 0$$

$x(\gamma) = t$

$$v^1 = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\frac{d^2 x(\gamma)}{dt^2} + \frac{t}{1+t^2}\left(\frac{dx(\gamma)}{dt}\right)^2 = 0$$

$$v^2 = b$$

$$\frac{t}{1+t^2} = 0 \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$v^3 = De^{-t/2} \xrightarrow{IC} v^3 = ce^{-t/2}$$

$$(a, b, c) \longrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{1+t^2}},\ b,\ ce^{-t/2}\right)$$

$$(1, 0, 0) \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ 0,\ 0\right) = X(t)$$

$$(0, 1, 0) \longrightarrow (0,\ 1,\ 0) = Y(t)$$

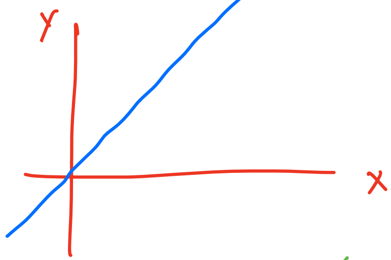
$$g(X(t), Y(t)) = 0 \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, 0, 0\right)\begin{pmatrix} 1+x^2 & & \\ & 1 & \\ & & e^{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سوال چهارم: ساده و آموزشی درباره‌ی ژئودزیک

$\mathbb{R}^2$

صفحه‌ی حقیقی با متریک اقلیدسی را به عنوان خمینه‌ی ریمانی معرفی می‌کنیم. آیا خم $\gamma(t) = (t^3, t^3)$ یک ژئودزیک است؟

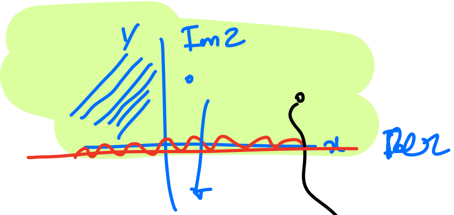
از این تمرین چه درسی می‌توان گرفت؟



$$\boxed{\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0}$$

$D =$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(t^3\partial_x + t^3\partial_y\right) = 6t\,\partial_x \quad 6t\,\partial_y \neq 0$$



$z = x + iy$

سوال پنجم: درباب ایزومتری‌ها

نیم‌صفحه بالایی اعداد مختلط ($\mathbb{H}$) به همراه متریک پوانکاره $ds^{۲}_{\text{Poincare}} = \frac{dz\wedge d\bar{z}}{\text{Im}^{۲}(z)}$ یک خمینه‌ی ریمانی است. گروه $\text{SL}(۲,\mathbb{R})$ به شکل زیر روی نقاط این خمینه‌ی ریمانی اثر می‌کند.

$ad - bc = 1$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(۲,\mathbb{R}), \qquad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

نشان‌دهید که $\text{SL}(۲,\mathbb{R})$ گروه ایزومتری‌های خمینه‌ی $(\mathbb{H}, ds^{۲}_{\text{Poincare}})$ است.

$z \to w = Az = \frac{az+b}{cz+d}$ $\qquad \text{Im}(w)$?

$$= \frac{ax + iay + b}{cx + icy + d} \times \frac{(cx+d) - icy}{(cx+d) - icy}$$

$$\cancel{aycx} + ayd - \cancel{cyax} - cyb = y(ad-bc)$$

$$\text{Im}(\;) = \frac{i\left(ay(cx+d) - cy(ax+b)\right)}{(cx+d)^2 + (cy)^2}$$

$$\text{Im}(w) = \frac{y}{(cx+d)^2 + (cy)^2} = \frac{\text{Im}(z) = y}{|cz+d|^2}$$

$\text{Im}(z) = y > 0 \qquad \text{Im}\, w > 0$ ✓

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y)$$

$w, \bar{w} \qquad z, \bar{z}$

$$g = \frac{dz\wedge d\bar{z}}{\text{Im}^2(z)} \to w = \frac{az+b}{cz+d} \to dw = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}dz = \frac{dz}{(cz+d)^2}$$

$$\bar{w} = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \to \dots \quad d\bar{w} = \frac{d\bar{z}}{(c\bar{z}+d)^2}$$

$z \to w$

$$g \to \frac{\cancel{(cz+d)^2}\, dw \wedge \cancel{(c\bar{z}+d)^2}\, d\bar{w}}{\text{Im}^2(w)\, \underbrace{|cz+d|^4}_{\cancel{(cz+d)^2}\,\cancel{(c\bar{z}+d)^2}}} = \frac{dw\wedge d\bar{w}}{\text{Im}^2(w)}$$

SL(2,ℝ) is isometry group of $(\mathbb{H}, ds^2/mm)$

سوال ششم: فضاهای انحنا ثابت

خمینه‌ی (M, g_M) را خمینه‌ای ریمانی با انحنای‌ثابت (Maximally symmetric space) بگیرید. روی خمینه‌ی حاصل‌ضربی $M \times M$ متریک $\tilde{g}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{g}((X_1, Y_1), (X_2, Y_2)) = g_M(X_1, X_2) + g_M(Y_1, Y_2), \quad X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$$

یعنی متریک به شکل زیر است:

$$\tilde{g}_{AB} = g_M \oplus g_M = \begin{pmatrix} g_M & \cdot \\ \cdot & g_M \end{pmatrix}$$

آیا خمینه‌ی $M \times M$ یک فضای انحنا ثابت است؟

A Riemannian manifold, which possesses the maximum number of KVF, is called maximally symmetric space MSS.

$\frac{n(n+1)}{2}$.

$\partial_{x_1}, \partial_{y_1}, \partial_z$

$x\partial_y - y\partial_x$ ...

- R is constant
- $R_{\mu\nu} = \frac{1}{n} R\, g_{\mu\nu}$
- $R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\sigma\mu} g_{\rho\nu})$

K

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Lorentzian signature

$$\text{MSS} \begin{cases} R > 0 \longrightarrow dS \\ R = 0 \longrightarrow \text{Minkowski} \\ R < 0 \longrightarrow AdS \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$R > 0 \longrightarrow S^n$

$R = 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ اقلیدسی

$R < 0 \longrightarrow$ hyperbolic manifold

$(p,q) \in M \times M$

$$\begin{cases} p \in U & x^1, \dots, x^n \\ q \in V & " \quad x^{n+1}, \dots, x^{2n} \end{cases}$$

$U \times V \subseteq_{\text{open}} M \times M$

$(x^1, \dots, x^{2n})$

$$\tilde{g}_{AB}(x,y) \quad \begin{pmatrix} g_{ij}(x) & \\ & g_{ij}(y) \end{pmatrix}$$

$A,B \in \{1, \dots, 2n\}$

$$\tilde{\Gamma}^A_{BC} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{AD} \left(\partial_C \tilde{g}_{DB} + \partial_B \tilde{g}_{DC} - \partial_D \tilde{g}_{BC} \right)$$

$M \times M \quad \tilde{\Gamma}^i_{jk}(x,y) = \Gamma^i_{jk}(x)$

$$\tilde{\Gamma}^{i+n}_{j+n,k+n}(x,y) = \Gamma^i_{jk}(y)$$

$$\tilde{R}^i_{jkl}(x,y) = R^i_{jkl}(x)$$

$M \times M$

$n+1 < - < 2n$

$$\tilde{R}^{i+n}_{j+n,k+n,l+n}(x,y) = R^i_{jkl}(y)$$

If $M \times M$ is to be MSS (Constant curvature space)

$$\tilde{R}^i_{jkl} = \tilde{K} \left(\tilde{g}^i{}_k \tilde{g}_{jl} - \tilde{g}^i{}_l \tilde{g}_{jk} \right)$$

$\tilde{\delta}^i{}_k \qquad \tilde{\delta}^i{}_l$

$$g^{\alpha\beta} g_\beta{}^\delta = g^{\alpha\delta}$$

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S & \\ & S \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$n+1 \quad 2n \qquad$ non-zero

$K = 0$

$$\tilde{R}^{k+n}_{\ j, (k+n)(i)} = K \left(\tilde{g}_{ji} \right) \equiv 0$$

$\ker ij$ $\quad \tilde{C} = K_1 \times K_2$

$n+1 \quad 2n$

سوال هفتم: درباب متریک روی خمینه‌های لی

گروه هایزنبرگ را به خاطر آورید.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \longrightarrow (x,y,z)$$

الف) متریک چپ‌ناوردای g را روی گروهِ لی H حاصل کنید؛ برای این کار از پایه‌های دوگان به میدان‌های برداری چپ‌ناوردا استفاده کنید.

ب) هموستار لوی‌–چیویتا را روی این خمینه پیدا کنید.

ج) آیا (H,g) یک فضای انحنا ثابت است؟

left-invariant Vector Field on $H \to \left\{ \overset{X_1}{\frac{\partial}{\partial x}},\ \overset{X_2}{\frac{\partial}{\partial y}},\ \overset{X_3}{x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}} \right\}$

$\downarrow$ dual base

Subtlities!

semi-simple / simple

$$\beta_i = A_i\, dx + B_i\, dy + C_i\, dz$$

$(\beta_1(\frac{\partial}{\partial x}) = 1$

$\beta_2(\frac{\partial}{\partial y}) = 1$

$\beta_1 = dx$

$\beta_2 = dy - x\,dz \longrightarrow ds^2 = dx^2 + (dy - x\,dz)^2 + dz^2$

$\beta_3 = dz$

Koszul identity:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g(\cancel{[X,Y]}, Z) - g([Y,Z], X)$$

$\nabla_{X_1} X_3$

$g(Z,Z)\, X_2 \quad X_1 + g(\cancel{[Z,X]}, Y)$

$[X_1, X_3] = -[X_3, X_1]$

$= X_2$

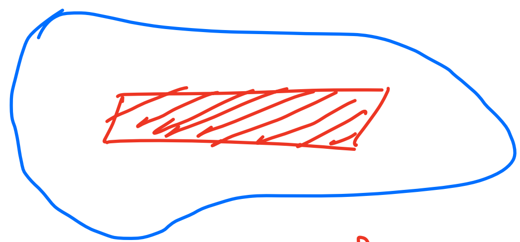
$X = X_1 \quad Y, X_3 \quad Z = X_2 \quad \ldots$

$\nabla_{X_1} X_1 = 0$ $\qquad$ $\nabla_{X_1} X_3 = -\nabla_{X_3} X_1 = \frac{1}{2} X$

$\nabla_{X_1} X_2 = -\frac{X_3}{2}$ $\qquad$ $\nabla_{X_2} X_3 = -\nabla_{X_3} X_2 = -\frac{1}{2} X_1$

$\nabla_{X_2} X_1 = +\frac{X_3}{2}$

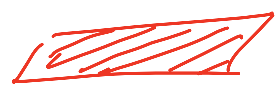
sectional curvature ?!



$P_1 = \langle X_1|_p, X_2|_p \rangle$

$K(P_1) = \underline{\underline{R}}(X_1, X_2, X_1, X_2)$ $\qquad$ $\frac{1}{4} X_1$ $\qquad$ $\mathbb{R}^3$ $\quad$ $z = 0$

$+\frac{1}{2} X_3$



$= g\Big(\underbrace{\cancel{\nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_2}^{\,0} + \cancel{\nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_2}}$

$- \underbrace{\cancel{\nabla_{\overset{x_3}{[X_1, X_2]}} X_2}}_{0},\ \underbrace{X_1}\Big)$

$g\left(\underbrace{\frac{1}{4} X_1, X_1} \right) = \frac{1}{4}$

$P_2 = \langle X_1|_p, X_3|_p \rangle$

$\vdots$

$K(P_2) = -\frac{1}{4}$!

سوال هشتم: باغ‌وحش عملگرها روی خمینه‌ریمانی

یکریختی‌های موسیقایی را به خاطر آورید.

$$\flat: T_pM \longrightarrow T_p^*M, \qquad X \longrightarrow X^\flat$$
$$X^\flat(Y) = g(X, Y)$$
$$\sharp: T_p^*M \longrightarrow T_pM, \qquad \omega \longrightarrow \omega^\sharp$$
$$\omega^\sharp(\xi) = g^{-1}(\omega, \xi)$$

همچنین گرادیان تابع را به شکل $\mathrm{grad} f = (df)^\sharp$ تعریف می‌کنیم. موارد زیر را پیدا کنید.

الف) $g(\mathrm{grad} f, X) = X[f]$

ب) $(\frac{\partial}{\partial x^i})^\flat$

ج) $(dx^i)^\sharp$

د) گرادیان تابع f را در مختصات موضعی بنویسید.

ه) نشان‌دهید که در فضای تخت سه‌بعدی، همان عبارت آشنای گرادیان بدست می‌آید.

$$g(\mathrm{grad}\, f, X) = g((df)^\sharp, X) =$$
$$((df)^\sharp)^\flat(X)$$
$$= df(X) = X(f)$$

$$(X^\flat)^\sharp \overset{?}{=}$$

$$X^\flat \xrightarrow{\sharp} (X^\flat)^j e_j = x^j e_j = X$$

$$(X^\flat)^j = X^j$$

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})^\flat(\frac{\partial}{\partial x_j}) = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = g_{ij} = g_{ik}\, dx^k(\frac{\partial}{\partial x_j})$$
$$\delta^k_j$$

$$\rightarrow (\frac{\partial}{\partial x^i})^\flat = g_{ik}\, dx^k$$
$$\downarrow \sharp$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = g_{ik} (dx^k)^\# \longrightarrow \cdots \quad (dx^j)^\# = g^{ji} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$(df)^\# = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right)^\# = \frac{\partial f}{\partial x^i} (dx^i)^\#$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^i} \, g^{ji} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$= \underline{g^{ji}} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\mathrm{grad}\, f = (df)^\# = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla f$$

سوال نهم: Operator Gymnastics

فضای $\mathbb{R}^n$ با متریک اقلیدسی یک خمینه‌ی ریمانی است. فرمِ حجم $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ است.

الف) نشان دهید برای هر $\Omega_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$، تنها یک $(n-k)$ـفرم $\star\Omega_k$ وجود دارد که:

$$\star\Omega_k(X_1, \dots, X_{n-k})\,\omega = \Omega_k \wedge X_1^\flat \wedge \dots \wedge X_{n-k}^\flat \quad n\text{-for}$$

$*$

ب) عملگر Hodge star

$$\star : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \longmapsto \Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n)$$

مطابق قسمت قبلی تعریف می‌شود. نشان‌دهید که:

ب۱) $\star^2 = (-1)^{k(n-k)}$

ب۲) $\cancel{\star^{-1} = (-1)^{k(n-k)}\star}$

ب۳) $\Omega_k \wedge (\star\Theta_k) = \Theta_k \wedge (\star\Omega_k)$

ج) عملگر Codifferential ($\delta : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^n)$) به‌شکل زیر معرفی می‌شود:

$$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} \star d \star$$

نشان‌دهید که $\delta^2 = 0$، این یعنی که عملگرفوق می‌تواند یک Cohomological complex برایمان بسازد.

د) لاپلاسی هم عملگری است که $\Delta : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ و تعریف می‌شود:

$$\Delta = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d$$

نشان‌دهید برای هرتابع همواری مثل f داریم:

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}$$

work on bases of extr algebr

$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$

$\{x^1, \dots, x^n\} \;/\; \{\theta^1, \dots, \theta^n\}$

$i_1 < \dots < i_k \qquad j_1 < \dots < j_{n-k}$

$(X_{j_1})^b = \theta^{j_1}$

$\star\,(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k})\,(X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}})\,\omega =$

$$(\underbrace{\theta^{i_1}\wedge\dots\wedge\theta^{i_k}}_{k}\wedge\theta^{j_1}\wedge\dots\wedge\theta^{j_{n-k}})$$

$$k \quad + \quad n-k = n$$

$$*f(\theta^{i_1}\wedge\dots\theta^{i_k}) = \mathrm{sgn}(i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_{n-k})\, f\,\theta^{j_1}\wedge\dots\wedge\theta^{j_{n-k}}$$

$$\Lambda^k \simeq \Lambda^{n-k}$$

$$*\{\underbrace{*\{\theta^{i_1}\wedge\dots\wedge\theta^{i_k}\}}\} =$$

$$\{\mathrm{sgn}(\vec{i},\vec{j})\;\underbrace{\theta^{j_1}\wedge\dots\wedge\theta^{j_{n-k}}}\}$$

$$*^2 \not\propto id$$

$$\underbrace{\mathrm{sgn}(\vec{j},\vec{i})\;\mathrm{sgn}(\vec{i},\vec{j})}_{(-1)^{k(n-k)}}\;\theta^{i_1}\wedge\dots\wedge\theta^{i_k}$$

$$*^2 \propto Id$$

$$*^2 = (-1)^{k(n-k)} \xrightarrow{*^{-1}} *^{-1}(-1)^{k(n-k)} = *$$

$$*^{-1} = (-1)^{kn}\,\cancel{*}$$

$$\Omega_k = \theta^{i_1}\wedge\dots\wedge\theta^{i_k}$$

$$\Theta_k = \theta^{j_1}\wedge\dots\wedge\theta^{j_k}$$

$$\Omega_k\wedge(*\Theta_k) = \begin{cases} 0 & \{i_1,\dots,i_k\}\neq\{j_1,\dots,j_k\} \\ \omega & \quad = \end{cases}$$

$$\Theta_k\wedge(*\Omega_k) = \begin{cases} 0 & \neq \\ \omega & = \end{cases}$$

$\delta^2 \alpha \quad * d \underbrace{* \quad *}_{\alpha \ \text{id}} d *$

$\# \ * \underbrace{d d}_{d^2=0} * \leftarrow \Lambda^k$

$= 0$

$\Lambda^{n-k} = 0$

$\Delta = (d+\delta)^2 = \cancel{d^2} + \cancel{\delta^2} + d\delta + \delta d = d\delta + \delta d$

$f \in \Lambda(M) \longrightarrow \quad * = n\text{-form}$

$\delta f \propto \cancel{*} d \underbrace{* f}_{n} \propto \omega \qquad \delta f = 0$

$d(n)$

$\Delta f = (\cancel{d\delta} + \delta d) f = \delta d f$

$= - \underbrace{* d *}_{\delta} \underbrace{d f}_{\frac{\partial f}{\partial x^i}} \quad dx^i$

$- * \underline{d} \left\{ (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n \right\}$

$- * \left\{ (-1)^{i-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \quad dx^j \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots dx^n \right.$

$(-1)^{i-1}$

$- * \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2} \times \omega$

$= - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}$

سوال دهم: تعریف بردار کیلینگ[۳]

میدان‌برداری هموارِ $X \in \mathfrak{X}(M)$ بردار کیلینگ است، اگر و فقط اگر $\mathcal{L}_X g = 0$. تعریف

باین تعریف شروع کنید:
بردار X یک بردار کیلینگ است اگر متریک g تحت نگاشت pullback در راستای Integral curve این بردار، ثابت بماند.

def

KVF $\longrightarrow$ $\mathcal{L}_X g = 0$

x

$g|_{t=0}$

$$\mathcal{L}_X g = \lim_{t \to 0} \frac{\phi^t_* g - g|_{t=0}}{t} = 0 \quad \checkmark$$

ϕ is integral curve of X

K an arbitrary tensor field.

$$\phi^*_s (\underbrace{\mathcal{L}_X g}_{=0}) = -\left(\frac{d}{dt}(\phi^*_t g)\right)_{t=s}$$

$(\phi^*_t g) = \text{constant}$

$\phi^*_{t=0} g = g$

$\phi^*_t g = g$

Killing

[۳] این اسم منسوب به آقای «ویلهلم کارل جوزف کیلینگ» است.

$dx^2+dy^2+dz^2$

سوال یازدهم: میدان‌های برداری کیلینگ $\mathbb{R}^۳$

نشان‌دهید که جبرلی حقیقیِ تولید شده با

$$\langle \partial_x, \partial_y, \partial_z, x\partial_y - y\partial_x, -y\partial_z + z\partial_y, z\partial_x - x\partial_z\rangle$$

میدان‌های برداری کیلینگ فضای $\mathbb{R}^۳$ هستند.

$x^i = (x, y, z)$

$\mathcal{L}_X g = 0 \qquad X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$\mathcal{L}_X g = 0 \rightarrow \sum_{ij} \left(\frac{\partial \lambda^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \lambda^i}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes dx^j$

$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^2} = \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^3} = 0$

$\underbrace{\frac{\partial \lambda^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \lambda^2}{\partial x^1}}_{} = 0 = \frac{\partial \lambda^2}{\partial x^3} + \frac{\partial \lambda^3}{\partial x^2} = \frac{\partial \lambda^1}{\partial y^3} + \frac{\partial \lambda^3}{\partial x^1}$

$\lambda_1(y,z), \quad \lambda_2(x,z), \quad \lambda_3(x,y)$

$\frac{\partial^2 \lambda^1}{\partial (x_2)^2} = 0 = \frac{\partial^2 \lambda^1}{\partial (x^3)^2}$

$\partial (y)^2$

$\lambda^1 = \cancel{A_1 yz} + B_1 y + C_1 z + D_1$

$\lambda^2 = A_2 xz + B_2 z + C_2 x + D_2$

$\lambda^3 = A_3 xy + B_3 x + C_3 y + D_3$

$\mathcal{L}_{(x,y)} =$

$[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y]$

L_x, L_2

$\boxed{-y\,\partial x + z\,\partial x}$

$\lambda^1 = -C_2 y + C_1 z + D_1$

$\lambda^2 = -\cancel{C_3} z + \cancel{C_2} x + D_2$

$X = \lambda^i \partial_i$

∂_1

$\begin{Bmatrix} P_x, P_y, P_z \\ L_1, L_2, L_3 \end{Bmatrix}$

$\lambda_3 = -C_1 x + C_3 y + D_3$

$X = 1\partial_z = \partial_y$

L_x, L_y, L_z

$-y\partial_x + z\partial_x$

$-z\partial_y + x\partial_y$

$-x\partial_z + y\partial_z$

سوال دوازدهم: کمی درباره‌ی عملگرهای الحاقی

خمینه‌ی ریمانی (M, g) را فشرده فرض کنید.

δ

الف) نشان‌دهید که عملگر codifferential که در سوال نهم معرفی شده بود، الحاقیِ عملگر d (مشتق خارجی) است، تحت ضرب‌داخلی القا شده با انتگرال‌گیری.

$$\langle d\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, \delta\beta\rangle\,, \qquad \alpha, \beta \in \Lambda^r(M)$$

ب) عملگر لاپلاسی $\Delta = d\delta + \delta d$ تحت این ضرب‌داخلی، خودالحاقی است.

$$\boxed{\langle \Delta\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, \Delta\beta\rangle}$$

ضرب‌داخلی فرم‌ها با کمک انتگرال‌گیری چنین تعریف می‌شود:

$$\langle \alpha, \beta\rangle = \int_M (\alpha \wedge \star\beta), \qquad \alpha, \beta \in \Lambda^r(M)$$

آیا می‌توانید بگویید شرط فشرده بودن خمینه‌ی M کجا لازم است؟

$(-1)^n$

$$0 = \int_{\partial M = \phi} (\alpha \wedge *\beta) = \int_M d(\alpha \wedge *\beta)$$

$*^{-1}\delta\alpha \qquad d*$

$$= \int_M \left(\underbrace{d\alpha \wedge *\beta} + (-1)^r \alpha \wedge d(*\beta) \right)$$

$\alpha \; *\delta$

$$\langle d\alpha, \beta\rangle - \int_M \underbrace{\alpha \wedge * \delta\beta}_{\langle \alpha, \delta\beta\rangle} = 0$$

$$\langle d\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, \delta\beta\rangle$$

$$\langle \Delta\alpha, \beta\rangle =$$

$$\langle d\delta\alpha + \delta d\alpha, \beta\rangle$$

(adj)

$$\langle d\delta\alpha, \beta\rangle + \langle \delta d\alpha, \beta\rangle$$

$$\langle \delta\alpha, \delta\beta\rangle + \langle d\alpha, d\beta\rangle$$

$$\langle \alpha, d\delta\beta\rangle + \langle \alpha, \delta d\beta\rangle$$

$$= \langle \alpha, (d\delta + \delta d)\beta\rangle$$

$$= \langle \alpha, \Delta\beta\rangle \ !$$