دانشگاه صنعتی شریف
زمستان ۱۴۰۲ - بهار ۱۴۰۳

تمرین سری دوم درس نظریه گروه‌ها - دکتر رضاخانی

مهلت تحویل: جمعه ۲۵ اسفند ماه سال ۱۴۰۲ تا ساعت ۲۳:۵۹

از طریق سامانه درس‌افزار شریف

حسین محمدی
hossein.mohammadi.00427@gmail.com

زهرا کبیری
kabiri.zahra98@gmail.com

تمرین ۶ [۲۰ امتیاز] : همریختی و یکریختی و خواصشان

با همریختی و یکریختی در کلاس آشنا شدید، بباید آشنایی‌مان را گسترش بدهیم. فرض کنید دوگروه $(G, .)$ و $(H, *)$ مفروض‌اند و همسانی $\phi : G \to H$ بین این دوگروه داده شده‌است.

الف) نشان دهید که ϕ عضو خنثای گروه G را به عضو خنثای گروه H می‌برد؛ یعنی $\phi(e_G) = e_H$.

ب) نشان دهید وارون هر عضو $g \in G$ به وارون تصویرش نگاشته می‌شود: $\phi(g^{-۱}) = \phi(g)^{-۱}$.

ج) در سری قبلی با مرتبه‌ی یک عضو از گروه آشنا شدید. آیا همسانی لزوما مرتبه‌ی اعضای گروه را حفظ می‌کند؟ برای حرف خود اثبات یا مثالی ارائه کنید [۱] .

د) اگر نگاشت ϕ یکسانی باشد، پاسخ شما به سوال قبل (قسمت ج) چه تغییری می‌کند؟ برای ادعای خود اثبات یا مثالی ارائه کنید.

ح) نشان دهید هسته‌ی همسانی ϕ تشکیل یک زیرگروه از G می‌دهد؛ همچنین بررسی کنید که آیا تصویر نگاشت ϕ در گروه H یک زیرگروه است.

$$\text{Ker } \phi = \{g \in G \big| \phi(g) = e_H\}$$

تمرین ۷ [۲۰ امتیاز] : مثالهایی از همریختی و یکریختی

الف) نشان دهید گروه جایگشت‌های سه شی $S_۳$ با گروه سه‌وجهی $D_۳$ (که گروه تقارنی مثلث متساوی‌الاضلاع است)، یکریخت است؛ می‌نویسیم $S_۳ \cong D_۳$. برای اینکار کافی است بگویید که نگاشت مذکور، اعضای این دو گروه را چطور به هم می‌نگارد و آیا نگاشتتان خواص یکریختی را دارد؟

ب) نشان دهید گروه $\mathbb{Z}_۴$ با گروه $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ یکریخت نیست؛ برای این کار از نتایج تمرین ۱ استفاده کنید.

ج) گروه ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ با عمل ضرب ماتریسی، $GL(n, \mathbb{R})$ و گروه اعداد حقیقی ناصفر با عمل ضرب، $(\mathbb{R} - \{۰\}, \times)$ را در نظر بگیرید. سعی کنید همریختی‌ای از $GL(n, \mathbb{R})$ به $(\mathbb{R} - \{۰\}, \times)$ تعریف کنید [۲] .

تمرین ۸ [۳۵ امتیاز] : گروه جایگشت‌ها [3]

الف) نشان دهید که گروه S_n با $(n - ۱)$ ترانهش [۴] زیر تولید می‌شود [۵] :

$$S_n = \langle (۱۲), (۱۳), \ldots, (۱n) \rangle$$

یعنی باید نشان دهید که تمامی اعضای گروه S_n به شکل حاصل ضربی از این ترانهش‌ها بازنویسی می‌شوند.

[۱] لطفا از مثالهای بدیهی برحذر باشید و به‌دنبال نمونه‌های جالب‌تر باشید.

[۲] فکر کنید به چند طریق می‌توان به یک ماتریس یک عدد نسبت داد. یادتان باشد که همریختی باید خاصیت ضرب گروهی را حفظ کند.

[3] Symmetric Group

[۴] جایگشتی است که تنها جای دو عضو را عوض می‌کند و بقیه را تغییر نمی‌دهد. ترانهش معادل Transposition است.

[۵] مقصود از نمادگذاری $G = \langle a_۱, a_۲, \ldots, a_n \rangle$ این است که گروه هر عضو $g \in G$ ، از ضرب $a_۱$ و $a_۲$ تا a_n ساخته می‌شود. توجه کنید که این اعضا می‌توانند تکرار شوند.

ب) تعداد اعضایی از S_n را که ساختار دوری [6] مشخص دارند، بشمارید.
فرض کنید در یک عضو، m دور داریم و طول هرکدام از این دورها ℓ_i است($1 \leq i \leq m$ و $\sum_{i=1}^{m} \ell_i = n$)؛ بنابراین این عضو ساختار دوری زیر را دارد:

$$(i_1^{(1)} i_2^{(1)} \dots i_{\ell_1}^{(1)})(i_1^{(2)} i_2^{(2)} \dots i_{\ell_2}^{(2)}) \dots (i_1^{(m)} i_2^{(m)} \dots i_{\ell_m}^{(m)})$$

که به جای تک‌تک نمادهای $i_j^{(k)}$ اعداد طبیعی بین ۱ تا n قرار می‌گیرند. به چند طریق می‌توان این کار را کرد و اعضای متمایز حاصل کرد؟

ج) اگر $\alpha \in S_n$ جایگشت دلخواهی باشد، نشان دهید که:

$$\alpha(i_1 i_2 \dots i_r)\alpha^{-1} = (\alpha(i_1)\alpha(i_2)\dots\alpha(i_r))$$

تمرین ۹ [۲۵ امتیاز] : گروه‌های از مرتبه‌ی ۸ و قضیه‌ی کیلی

قضیه‌ی کیلی هر گروه متناهی G با مرتبه $|G|$ را در گروه $S_{|G|}$ می‌نشاند. در این تمرین با گروه‌های از مرتبه‌ی ۸ آشنا می‌شویم و مطابق قضیه کیلی آنها را در S_8 می‌نشانیم.

پنج گروه متمایز [7] از مرتبه هشت داریم:

۱. گروه $\mathbb{Z}_8$
۲. گروه $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
۳. گروه $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
۴. گروه D_4 یا همان گروه چهاروجهی (تقارن‌های یک مربع)
۵. گروه کواترنیون‌ها [8]

اعضای این گروه‌ها را بنویسید. سپس به کمک اثباتی که از قضیه کیلی بلدید این گروه‌ها را در S_8 بنشانید. توجه کنید که فرآیند نشاندن این گروه‌ها در S_8 و این که هر عضو متناظر با چه عضوی در S_8 می‌شود باید به صراحت نوشته شده باشد.

---

[6] Cycle Structure

[7] حالا با دانستن یکریختی می‌توانیم منظورمان از «متمایز» را دقیق‌تر کنیم. دو گروه متمایزند اگر بین آن‌ها یکریختی وجود نداشته باشد.

[8] برای اطلاع بیشتر از گروه کواترنیون ها به این صفحه ویکی‌پدیا مراجعه کنید.

راهنمایی در مورد نام‌گذاری نگاشت‌ها:

حتما به نگاشت‌های بین ساختارهای مختلف برخورده‌اید و شاید اسامی مشابهشان شما را سردرگم کرده باشد.
یکریختی [a]، همریختی [b]، همسان‌ریختی [c]، تکریختی [d]، به‌روریختی [e] درون‌ریختی [f]، خودریختی [g]
، هموارریختی [h] (گاهی وابرسانی) از مکررترین نوع نگاشت‌هاست. اینجا سعی می‌کنیم کمی این واژگان را روشن‌تر کنیم [i].

همانطور که معلوم هست، تمامی این واژگان در ریشه‌ی "morph" و پسوند "ism" مشترکند. ریشه‌ی "morph" که از یونانی به زبان‌های لاتین راه‌یافته، به معنای «شکل و ریخت» است.
کلمه‌ی "Homomorphism" با پیشوند "homo" ساخته‌شده است؛ این پیشوندِ اصالتا یونانی، معنای «همسان و هم‌سنگ» دارد؛ پس می‌توانیم این کلمه را «هم‌سانی یا همریختی» ترجمه کنیم.
اما "Isomorphism" از پیشوند لاتین "isos" به معنای «معادل و یکسان» استفاده شده؛ پس ترجمه‌ی مناسب این واژه «یکریختی یا یکسانی» است.
به همین ترتیب در سایر واژه‌ها هم از پیشوندهای مناسب برای رساندن مفهوم استفاده شده؛ اما چیزی که برای ما مهم است، تعریف فنی پنج واژه‌ای است که با آن بیشتر سروکار خواهیم داشت. [j]
تصور کنید دو گروه $(G,.)$ و $(H,*)$ را داریم.

۱. همریختی گروهی: نگاشتی بین دو گروه است به طوری که ساختارِ عمل گروه را حفظ کند.

$$\phi : G \to G \quad : \quad \forall g_1, g_2 \in G \qquad \phi(g_1.g_2) = \phi(g_1) * \phi(g_2)$$

۲. تکریختی گروهی: اگر نگاشت ϕ علاوه بر همریختی، یک‌به‌یک هم باشد؛ در آن صورت آن را یک نگاشت تک‌ریخت می‌نامیم.

۳. به‌روریختی گروهی: اگر نگاشت ϕ علاوه بر همریختی، به‌رو(پوشا) هم باشد؛ در آن صورت آن را یک نگاشت به‌روریخت می‌نامیم.

۴. یکریختی گروهی: اگر نگاشت ϕ در آن واحد همریختی، تکریختی و به‌روریختی باشد [k]، آن را یکریختی می‌گوییم.

۵. خودریختی گروهی: اگر نگاشت $\phi : G \to G$ در آن واحد همریختی، تکریختی و به‌روریختی باشد ، آن را خودریختی می‌گوییم.

خودریختی‌ها هم به دو دسته‌ی درونی و بیرونی تقسیم می‌شوند. نگاشت

$$\varphi_g(x) : G \to G \quad , \quad \varphi_g(x) = g^{-1}xg \tag{1}$$

یک خودریختی دورنی است. هر خودریختی دیگری که به این فرم نوشته نشود، خودریختی بیرونی است [l].

---

[a] Isomorphism
[b] Homomorphism
[c] Homeomorphism
[d] Monomorphism
[e] Epimorphism
[f] Endomorphism
[g] Automorphism
[h] Diffeomorphism
[i] البته این لیست همچنان ادامه دارد. حدود پنجاه واژه تخصصی هست که از ریشه "morph" مشتق شده. شاید آشناترین آن برای ما holomorphism و heteromorphism باشد.
[j] این واژه‌ها را در ارتباط با گروه‌ها تعریف می‌کنیم؛ در ارتباط با سایر ساختارهای جبری، اصلاحات جزئی در تعریف صورت می‌گیرد.
[k] گاه نگاشت‌هایی را که یک‌به‌یک و پوشا هستند، دوسویی می‌گوییم.
[l] مثلا در گروه اعداد صحیح با عمل جمع، نگاشت $\varphi(m) = -m$ یک خودریختی خارجی است. توجه کنید که چون گروه اعداد صحیح آبلی است، خودریختی‌های داخلی‌اش بدیهی می‌شود.