



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد
گروه انرژی بالا

عنوان:

جنبه‌های گرانش کوانتومی در دو و سه بعد

نگارش:

حسین محمدی

استاد راهنما:

دکتر امین فرجی آستانه

آذر ماه ۱۴۰۳

به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

عنوان: جنبه‌های گرانش کوانتومی در دو و سه بعد

نگارش: حسین محمدی

کمیته‌ی ممتحنین

استاد راهنما: دکتر امین فرجی آستانه
امضاء:

استاد ممتحن داخلی: دکتر شانت باغرام
امضاء:

استاد ممتحن خارجی: دکتر نیما خسروی
امضاء:

تاریخ: ۱۴۰۳/۰۹/۲۰

سپاس

صمیمانه از استاد بزرگوارم، آقای امین فرجی، تشکر می‌کنم. استادی که به من درس‌های ارزشمندی از دنیای فیزیک یاد داد و از اخلاق، صبر، و استقامت ایشان آموختم. از استاد ارفعی عزیز هم قدردانی می‌کنم؛ انسانی که همیشه با شور و امید، آماده و مشتاق به بحث و گفت‌وگو درباره‌ی فیزیک است و همواره انگیزه‌ای نو به من بخشید.

سپاسگزارم از دوستانی که در این مسیر همراه و یار من بودند و با همدلی و همکاری‌شان چراغ راهم شدند. از بهزاد تقوی، دوست و همکار عزیزم، به خاطر کمک‌های بی‌دریغ و حمایت‌های همه‌جانبه‌اش نهایت سپاس را دارم.

از خانم زینب ایوبی برای کمک‌های همه‌جانبه و حمایت‌های بدون چشم‌داشتش سپاسگزارم.

از دوستانی که فاصله‌ی جغرافیایی هنوز نتوانسته ما را از هم دور کند و در این مسیر همیشه احساس نزدیکی و حمایتشان را با خود داشته‌ام، سپاسگزارم: کوروش علامه، پویا فرخی، پارسا رنگریز، بهرنگ تفرشی و علی نعمتی که از دوره‌ی کارشناسی همواره مرهون لطف‌شان به خودم بوده‌ام.

و در پایان، با قلبی سرشار از عشق، از خانواده عزیزم، پدرم، عمه‌ام و به ویژه خواهرم، تشکر می‌کنم. کسانی که در با مهربانی، درکم کردند و فضایی آرام و پریار برایم فراهم ساختند تا با آسودگی خاطر مسیرم را ادامه دهم. بهویژه دوست دارم از خواهرم تشکر کنم که بعد از ازدست‌رفتن مادرم واقعاً برای ما سنگ تمام گذاشت و نگذاشت حتی کمبودی احساس کنیم.

چکیده

مدل‌های گرانش در ابعاد پایین‌تر، بهویژه در دو و سه‌بعد، ابزارهایی بسیار قدرتمند برای درک بهتر ساختار بنیادین نظریه‌های گرانشی و کوانتمی هستند. گرانش سه‌بعدی به دلیل ویژگی‌های ساده‌تر و قابل‌کنترل‌ترش، آزمایشگاهی منحصر به فرد برای بررسی خواص هندسی و توپولوژیکی سیاه‌چاله‌ها و همچنین ماهیت هولوگرافیک فضا–زمان فراهم می‌کند. از سوی دیگر، مدل‌های گرانش دو‌بعدی همچون گرانش دیلاتونی، نقش مهمی در بررسی سازوکارهای دینامیکی افق‌ها و بررسی پدیده‌های نظیر تبخیر سیاه‌چاله‌ها ایفا می‌کنند. این مدل‌ها نه تنها به ما امکان می‌دهند که پیچیدگی‌های گرانش کوانتمی را به زبانی ساده‌تر درک کنیم، بلکه راهگشای پژوهش‌های پیشرفته‌تر در چارچوب نظریه‌ی ریسمان و کاربردهای اصل تمام‌نگاری هستند.

در این پایان‌نامه، به بررسی جامع گرانش دو‌بعدی JT پرداخته‌ایم و خواص آن را هم در سطوح کلاسیک و هم کوانتمی مورد تحلیل قرار داده‌ایم تا درکی عمیق‌تر از این مدل بنیادین به دست آوریم. در زمینه‌ی گرانش سه‌بعدی، توجه ویژه‌ای به تناظر آن با نظریه‌های پیمانه‌ای داشته‌ایم؛ در این راستا، گروه‌های تقارنی مجانبی را با دقت تعریف و تبیین کرده‌ایم. برای فضازمان‌های مجانبنا پاددوسیته و تخت، به تحلیل دقیق این تقارن‌ها پرداخته‌ایم تا ارتباطات مهم آن‌ها را با ساختار هندسی و فیزیکی آشکار کنیم. سرانجام، با ورود به تحلیل تابع پارش گرانش سه‌بعدی در فضای مجانبنا پاددوسیته، نگاهی ژرف به جنبه‌های کوانتمی این مدل داشته‌ایم و نتایج و کاربردهای آن را به تفصیل بررسی کرده‌ایم.

کلیدواژه‌ها: گرانش کوانتمی، مدل‌های بعد پایین، نظریه‌ی میدان‌های کوانتمی، نظریه‌ی میدان‌های همدیس، گرانش JT، گرانش سه‌بعدی، تابع پارش گرانش سه‌بعدی

اصلاتِ محتوا

این پایان‌نامه مروری بر پیشرفت‌های گرانش کوانتومی دو و سه‌بعدی، از آغازِ این مسائل، یعنی از ۱۹۸۶ و با فهم این‌که تقارن‌های مجانبی فضای پاددوسیته معادل با دو جفت جبر ویراسورو هستند [۱]، شروع می‌شود و بخشی از پیشرفت‌های اخیر (تقریباً تا ۲۰۱۷) در گرانش دو و سه‌بعدی را بررسی می‌کند.

اما بهتر ترتیب محتوایی، این پایان‌نامه خلاصه‌ای از این منابع محسوب می‌شود.

۱. بخشِ اول این پایان‌نامه، از مقاله‌ی مروری [۲] اقتباس شده است.

۲. بخشِ ۱-۳ هم خلاصه‌ای از [۳] است.

۳. قسمت‌های مربوط به تقارن‌های مجانبی از [۴] اقتباس شده.

۴. همچنان، توابع پارش نیمه‌کلاسیکی از [۵] اقتباس شده‌اند.

۵. ضمیمه‌ی مدل SYK از [۶] است.

فهرست مطالب

۱۶	۱	مقدمه
۱۸	۲	مدل گرانش دوبعدی Jackiw–Teitelboim
۱۹	۱-۲	نگاهی به مدل‌های گرانشی دیلاتونی
۲۱	۲-۲	گرانش JT کلاسیک
۲۲	۱-۲-۲	انگیزه: سیاهچاله‌های نزدیک به فرینه
۲۵	۲-۲-۲	تناظر JT با مدل توپولوژیک BF
۳۱	۳-۲-۲	جواب‌های کلاسیک کنش JT
۴۰	۴-۲-۲	شرایط مرزی در گرانش JT
۴۵	۵-۲-۲	ارتباط بین آنتروپی و میدان دیلاتونی
۴۷	۶-۲-۲	دینامیک خم مرزی JT
۵۷	۷-۲-۲	گرانش کلاسیک در حضور ماده‌ی کوانتمی
۵۷	۳-۲	گرانش JT کوانتمی
۵۸	۱-۳-۲	تصحیحات واردہ به طیف گرانش JT
۶۴	۲-۳-۲	جفت کردن گرانش JT کوانتمی به ماده‌ی کوانتمی
۶۶	۳-۳-۲	تابع همبستگی
۷۳	۴-۳-۲	درج سایر عملگرها در گرانش JT – مقدمه‌ای بر نقایص

۷۷	۵-۳-۲ نگاهی به روش‌های متعارف یافتن دامنه‌ها	۵-۳-۲
۸۱	۴-۲ کرم‌چاله‌های سهیم در گرانش JT	۴-۲
۸۱	۱-۴-۲ انگیزه‌ی افزودن سهم‌های کرم‌چاله‌ای	۱-۴-۲
۸۴	۲-۴-۲ دامنه‌های پیچیده‌تر: رویه‌هایی با چندین مرزِ ژئودزیک و $g \geq 1$	۲-۴-۲
۸۷	۳-۴-۲ تابع پارش قرص: $Z_{0,1}(\beta)$	۳-۴-۲
۸۸	۴-۴-۲ تابع پارش استوانه‌ای: $Z_{0,2}(\beta_1, \beta_2)$	۴-۴-۲
۹۰	۵-۴-۲ تابع پارش کلی: $Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n)$	۵-۴-۲
۹۵	۳ نظریه‌ی گرانش سه‌بعدی	۳
۹۶	۱-۳ دوگانی گرانشِ مجانب‌پاددوسیتیه با نظریه میدان لیوویل	۱-۳
۹۶	۱-۱-۳ گرانش سه‌بعدی مجانب‌پاددوسیتیه به عنوان یک نظریه‌ی Chern-Simons	۱-۱-۳
۹۸	۲-۱-۳ ترجمه‌ی شرایطِ مرزی مجانب‌پاددوسیتیه روی میدان‌های پیمانه‌ای	۲-۱-۳
۱۰۱	۳-۱-۳ بهبود کش Chern-Simons	۳-۱-۳
۱۰۳	۴-۱-۳ تبدیل کنش Chern-Simons به جمع دو کنش WZW	۴-۱-۳
۱۰۷	۵-۱-۳ تبدیل به کنش غیردستیده‌ی WZW	۵-۱-۳
۱۰۸	۶-۱-۳ از مدل WZW به نظریه میدان لیوویل	۶-۱-۳
۱۱۰	۲-۳ کلیات گرانش اینشتینی سه‌بعدی	۲-۳
۱۱۱	۱-۲-۳ شرایط مرزی و جملات مرزی کنش	۱-۲-۳
۱۱۲	۲-۲-۳ آشنایی با تقارن‌های مجانبی	۲-۲-۳
۱۱۸	۳-۳ بررسی تقارن‌های مجانبی گرانش سه‌بعدی در فضای مجانب‌پاددوسیتیه	۳-۳
۱۱۸	۱-۳-۳ هندسه‌ی فضای مجانب‌پاددوسیتیه و شناخت این فضا از نزدیک‌تر	۱-۳-۳
۱۲۱	۲-۳-۳ بردارهای کیلینگ فضای پاددوسیتیه‌ی سه‌بعدی	۲-۳-۳
۱۲۳	۳-۳-۳ شرایط مرزی Brown-Henneaux	۳-۳-۳

۱۲۵	۴-۳-۳ میدان‌های برداری کیلینگ مجانبی فضای پاددوسیته‌ی سه‌بعدی
۱۲۷	۵-۳-۳ متريک‌های Brown-Henneaux
۱۲۹	۶-۳-۳ بارهای سطحی و جبر ويراسورو
۱۳۱	۷-۳-۳ حل مدهای صفر
۱۳۲	۴-۳ گرانش سه‌بعدی اينشتيني در فضای مجانبا تخت
۱۳۳	۱-۴-۳ مختصات BMS در فضای سه‌بعدی تخت
۱۳۴	۲-۴-۳ بردارهای کیلینگ فضای مينکوفسکي
۱۳۵	۳-۴-۳ تقارن پوانکاره در آينده‌ی نورگونه
۱۳۷	۴-۴-۳ تبدیلات پوانکاره در آينده‌ی نورگونه
۱۳۸	۵-۴-۳ شرط افت BMS و تقارن‌های مجانبی
۱۳۹	۶-۴-۳ بردارهای کیلینگ مجانبی فضای مجانبا تخت سه‌بعدی
۱۴۲	۷-۴-۳ متريک‌های BMS
۱۴۳	۸-۴-۳ بارهای سطحی و معرفی جبر bms_3
۱۴۴	۹-۴-۳ جبر بارهای سطحی
۱۴۵	۱۰-۴-۳ حل‌های مد صفر
۱۴۷	۴ تابع پارش گرانش سه‌بعدی مجانبا پاددوسیته
۱۵۰	۱-۴ جواب‌های کلاسيکي سهيم در انTEGRAL مسیر گرانشی
۱۵۰	۱-۱-۴ دسته‌بندی جواب‌های کلاسيک
۱۵۴	۲-۱-۴ ساخت هندسه‌های هموار نيمه کلاسيک
۱۵۶	۳-۱-۴ شناخت هندسي خمينه‌های $M_{c,d}$
۱۵۸	۲-۴ محاسبه‌ی تابع پارش روی $M_{c,d}$
۱۶۱	۱-۲-۴ استدلال مربوط به تابع پارش گرانشی $M_{0,1}$

۱۶۳	۲-۲-۴ محاسبه‌ی جمع روی هندسه‌های $M_{c,d}$
۱۶۷	۳-۲-۴ جمع روی مدهای $\hat{n} = 0$
۱۷۱	۴-۲-۴ مدهای $\hat{n} \neq 0$
۱۷۲	۳-۴ تحلیل پیشامدهای احتمالی
۱۷۲	۱-۳-۴ پیشامد اول: ریسمان‌های کیهانی
۱۷۳	۲-۳-۴ پیشامد دوم: جمع روی دو هندسه
۱۷۶	۳-۳-۴ "دیدن" هندسه‌های غیرکلاسیک
۱۷۷	۴-۴ آنتروپی سیاهچاله و تصحیحات واردۀ به آن
۱۸۰	۵ نتیجه‌گیری
۱۸۲	آ پیشنهادهایی برای بهتر خواندن این پایان‌نامه
۱۸۳	ب مقدمات ریاضی
۱۸۳	ب-۱ گروه و جبر لی
۱۸۵	ب-۲ نگاشت نمایی
۱۸۵	ب-۳ نمایش الحاقی و نمایش هم الحاقی
۱۸۶	ب-۴ ساختار پواسون
۱۸۸	ب-۵ ساختارهای همتافته
۱۸۹	ب-۶ ساختارهای Kirillov-Kostant
۱۹۱	ب-۷ فرم همتافته‌ی Kirillov-Kostant
۱۹۱	ب-۸ نگاشت‌های مومنتوم
۱۹۱	ب-۸-۱ اثرهای گروه‌های لی و مولدۀای بی‌نهایت کوچک
۱۹۲	ب-۸-۲ نگاشت مومنتوم

۱۹۳	ب-۸-۳ قضیه نوتر
۱۹۳	ب-۸-۴ نگاشتِ مومنتوم برای مدارهای هم‌الحاقی
۱۹۵	پ مقدمه‌ای بر مدل SYK
۱۹۵	پ-۱ معرفی مدل SYK
۱۹۸	پ-۲ ویژگی‌های کلی مدل SYK
۱۹۹	پ-۳ تحلیل مدل در سطح کوانتومی
۲۰۳	پ-۴ حدِ انرژی پایین و پدیداریِ تقارن همدیس
۲۰۳	پ-۵ تبدیل به کنش شوارتزی در حد $N \rightarrow \infty$
۲۰۴	ت فضای ماژولی رویه‌های ریمانی
۲۰۷	ث فرمول بندی مرتبه اول گرانش اینشتینی
۲۱۱	ج مقدمه‌ای کوتاه بر نظریه‌های Chern-Simons و WZW
۲۱۱	ج-۱ نظریه‌ی Chern-Simons
۲۱۲	ج-۲ نظریه‌ی WZW
۲۱۳	ج-۲-۱ مدل سیگمای غیرخطی
۲۱۵	ج-۲-۲ افزودن جمله‌ی Wess-Zumino
۲۱۷	ج جمله‌ی مرزی گیبونز-هاوکینگ-یورک در کنش اینشتین-هیلبرت
۲۱۸	چ-۱ وردش کنش و ساده کردن جمله مرزی
۲۲۱	چ-۲ وردش جمله گیبونز-هاوکینگ-یورک و اضافه کردن آن به کنش اصلی

فهرست تصاویر

- ۱-۲ طرح هندسی فضازمان رایسنر-نوردشتروم که به شکل همواری فضای مجانبا تخت مینکوفسکی را به گلوگاه $S^2 \times AdS_2$ نزدیک افق وصل می‌کند. در حد $M \rightarrow Q$ ، شعاع پاددوسیته به بی‌نهایت میل می‌کند. (عکس از [۲] برداشته شده.) ۲۳
- ۲-۲ نمایشی از یک برش خاص از فضای پاددوسیته دو بعدی. در این کاشی‌کاری خاصی از این فضا، جفت‌های شیطان-فرشته مساحت یکسانی دارند؛ این نقاشی از کارهای موریس اشر است. (عکس از [۲] برداشته شده.) ۳۳
- ۳-۲ نمودار پنروز فضای پاددوسیته دو بعدی به همراه نواحی مختلفی که هر مختصات می‌پوشاند. (عکس از [۲] برداشته شده.) ۳۴
- ۴-۲ اثر تزریق انرژی به گرانش کوانتمی دو بعدی: (a) در حالت اولیه (b) با خروج انرژی از سامانه، خم مرزی به داخل جمع می‌شود. (c) با تزریق انرژی، خم مرزی به سمت مرز تمام‌نگار متمایل می‌شود. (عکس از [۲] برداشته شده.) ۴۵
- ۵-۲ برش نیم صفحه بالایی پوانکاره \mathbb{Z}^+ ، برای مشخص کردن خم مرزی. (عکس از [۲] برداشته شده.) ۵۳
- ۶-۲ تصویر سمت چپ نمایش دایره‌ی مرزی در مختصات سیاه‌چاله است. تصویر سمت راست، تیک‌های ساعت مرزی را نشان می‌دهد. توجه کنید که تعداد تیک‌های ساعت با β مشخص می‌شود، اما پراکندگی آن و فواصل نسبی در روی خم بستگی به شکل خم دارد. (عکس از [۲] برداشته شده.) ۵۶
- ۷-۲ نمایش نموداری عملگر دومحلی. بعد همدیس عملگر مرزی Δ با جرم میدان نرده‌ای در تناظر است. ۶۷

- ۸-۲ تابع چهار نقطه‌ای مرزی در گرانش کوانتمی JT در کانال‌های مختلف. ۶۸
- ۹-۲ تابع چهار نقطه‌ای متقطع در گرانش JT با نمایش تصویری قرارداد شده. بعد همدیس عملگرهای روی مرز به ترتیب Δ_1 و Δ_2 است. (عکس از [۲] برداشته شده.) ۷۱
- ۱۰-۲ پربند C برای انتگرال‌گیری در بدست آوردن دامنه‌ی A_{cross} (عکس از [۲] برداشته شده.) ۷۱
- ۱۱-۲ نظریه میدان همدیس لیوویل بین دو غشای ZZ در حدود مقیاسه. عملگرهای درج شده با رنگ قرمز نشان داده شده‌اند. (عکس از [۲] برداشته شده.) ۷۹
- ۱۲-۲ ضریب شکل طیفی برای یک نظریه آشوبناک. داده‌های متوسط‌گیری شده با خط قرمز نشان داده شده‌اند. (عکس از [۲] برداشته شده.) ۸۳
- ۱۳-۲ رویه‌ای ریمانی سمت چپ قابل شکستن به رویه‌ی ریمانی سمت راست است؛ نقطه‌های قرمز روی چنبره‌ی وسطی نمایانگر سوراخ هستند. آیا فیزیک این دو رویه‌های ریمانی هم معادل است؟ ۸۴
- ۱۵-۲ رویه‌ی ریمانی شکل ۲-۴-۲ به چهار شلوار تقسیم شده که با ۶ استوانه به هم متصل می‌شوند. ۸۷
- ۱۶-۲ نمایش مختصات‌های فنچل-نیلسن در تجزیه‌ی شلواری. هر کدام از b طول ژئودزیک مرزهایی هستند که با دایره‌ی نقطه‌چین قرمز مشخص شده‌اند. پارامتر پیچش τ هم مشخص می‌کند که پیش از همسان شدن این دایره‌ها، چقدر آن‌ها را نسبت به هم بچرخانیم. ۸۸
- ۱۷-۲ دو سهم به $Z, (\beta_1, \beta_2)$ داریم. سهم غیرهمبند دو قرصی در چپ و سهم ترومپت در راست. ۸۸
- ۱۸-۲ پارامترهای یک متريک دلخواه روی یک ترومپت دوتا هستند؛ یکی b که طول مرز ژئودزیک در $r = 0$ است و ديگری پارامتر پیچش که در اين شکل با τ مشخص شده است. همچنین توجه کنید که در حد $\infty \rightarrow r$ به مرزهای ژئودزیک (يعني مرزهای تمام‌نگار فضازمان) می‌رسیم. ۸۹

- ۱۹-۲ یک ترومپت را به دو ترومپت می‌شکانیم و در قدمنهایی، باید آنها را با انتگرال‌گیری به هم بچسبانیم. انتگرال‌گیری روی پارامترهای ماثولی b و τ انجام می‌گیرد. ۸۹
- ۲۰-۲ همواره می‌توانیم خم‌های بسته‌ای متعلق به همان کلاس همولوژی مرزهای ژئودزیک پیدا کنیم. در این رویه‌ی هذلولوی با $n = 3$ و $g = 1$ ، سه دایره‌ی مشخص شده با خط‌چین در همان کلاس همولوژی مرز ژئودزیک مجاور هستند. ۹۱
- ۲۱-۲ طرحی از ژئودزیک‌های پرتاب شده از یک مرز ژئودزیک یک رویه‌ی هذلولوی. این ژئودزیک‌های پرتاب شده به ما در شناختِ خواص رویه و همچنین فضای ماثولی رویه‌های هذلولی کمک می‌کنند. ۹۲
- ۲۲-۲ انواع اتفاقاتی که ممکن است برای یک ژئودزیک که از مرز پرتاب می‌شود، بیفتند. در دو شکل سمت چپ، حالت (آ) را می‌بینیم. یعنی ژئودزیک به مرز اولیه بازگشته یا در میانه‌ی راه خود را قطع کرده است. در شکل سمت راست و بالا، حالت (ب) رخ داده، یعنی ژئودزیک با شروع از یک مرز، به مرز دیگر ختم شده. آخرین حالت هم وقتی است که ژئودزیک سرگردان باشد و در رویه‌ی هذلولی بچرخد بدون آنکه خود را قطع کند یا به مرزهای ژئودزیک برسد. ۹۳
- ۲۳-۲ شمایی از انواع تجزیه‌ای ممکن یک رویه‌ی هذلولوی به کمک ژئودزی‌هایی که از مرز ژئودزیک پرتاب می‌شوند. ۹۴
- ۱-۳ تبدیلات پیمانه‌ای به سه‌دسته تقسیم می‌شوند. تبدیلات بدیهی تبدیلاتی هستند که شرط افت میدان را برآورده می‌کنند و حالت سیستم را عوض نمی‌کنند. تبدیلات غیربدیهی، فقط شرط افت را برآورده می‌کنند و حالت سیستم را عوض می‌کنند. تبدیلات ممنوع هم شرط افت را برآورده نمی‌کنند و به همین خاطر تقارن نظریه خوانده نمی‌شوند. ۱۱۶
- ۲-۳ جانشانی فضای AdS_3 در $\mathbb{R}^{2,2}$. همانطور که می‌بینید، دایره‌های واقع شده روی صفحه‌ی $x = \text{cte}$ خم‌های بسته‌ی زمان‌گونه هستند. ۱۱۹

- ۳-۳ فضای پوششی AdS_3 که با \mathbb{R}^2 وابسان است. مختصه‌ی زمان در راستای محور استوانه است و مختصه‌ی r در راستای شعاع استوانه تعریف شده است. همچنین، مختصه‌ی φ ، 2π -متناوب است. استوانه‌ی واقع شده در $\infty \rightarrow r$ یک استوانه‌ی زمان‌گونه است که با مختصات‌های (r, φ) تنیده می‌شود. ۱۲۱
- ۴-۳ طیف جوابهای گرانش مجانباً پاددوسیته با شرط مرزی Brown-Henneaux. می‌بینیم که فضای پاددوسیته‌ی خالی با یک شکاف جرمی از پیوستار سیاه‌چاله‌ها جداشده‌است. و نواحی $|\mathcal{J}| \geq \ell M$ سانسور کیهانی شده‌اند. ۱۳۲
- ۵-۳ نمودار پنروز مختصات BMS. x . مختصه‌ی زمانی است و \mathcal{J} مختصه‌ی عقب‌افتاده‌ی BMS هستند. ۱۳۴
- ۶-۳ نمایی از دایره‌ی سماوی در زمان u روی نمودار پنروز فضازمان مینکوفسکی. ۱۳۶
- ۷-۳ جواب‌های مDCF گرانش مجانباً تخت با شرط افت BMS. جواب مینکوفسکی خلا با نقطه‌ی قرمز رنگ مشخص شده است. نواحی $M > c_2/24$ جواب‌هایی با تفسیر کیهان‌شناختی هستند که مجانباً تخت‌اند. کاستی‌های مخروطی برای $M < c_2/24$ رخ می‌دهد و فزونی مخروطی برای $M < -c_2/24$ دارد. این شکل را می‌توانیم حد تخت شکل ۴-۳ هم بینیم، چون که در حد $\infty \rightarrow \ell$ شیب خط‌های $\mathcal{J} = \pm J$ در صفحه‌ی (J, M) صفر می‌شود. ۱۴۶
- ۱-۴ نیم‌فضای بالایی پوانکاره - در این شکل، مرز‌همدیس که کره‌ی ریمان است با مختصه‌ی مخلوط \mathcal{J} پرمایش شده است. ۱۴۸
- ۲-۴ چنبره‌ای که توصیف‌کننده‌ی مرز همدیس فضازمان است. خمینه‌ی M فضای داخلی این چنبره به همراه مرزش است. ۱۵۰
- ۳-۴ هندسه‌ی مذکور علاوه بر مرز همدیس، یک نقص دارد و بنابراین توپولوژی مرز همدیس آن مثل چنبره نیست و در حقیقت مثل صفحه است. ۱۵۴
- ۴-۴ حلقه‌هایی که در اطراف نقطه‌ی $\infty = \mathcal{J}$ هستند، می‌توانند به طول دلخواهی نزدیک به صفر برسند و این حلقه‌های زیرپلانکی، در مسئله‌ی فیزیکی بعداً مشکل‌ساز خواهند شد. ۱۵۵

۵-۴ ساخت چنبره از کاشی‌کاری صفحه‌ی مختلط w با پارامتر خشتی τ . تمام ناحیه‌های متوازی‌الاضلاعی به تحت همسان‌سازی به ناحیه‌ی آبی رنگ نگاشته می‌شوند و فلش‌های خاکستری دوسر، رنگ اضلاعی که با هم یکسان می‌شوند را نشان می‌دهد. ۱۵۶

۶-۴ ساخت خمینه‌ی $M_{c,d}$: اول در $t = 0$ و $t = 2\pi \text{Im}\tau$ ، استوانه‌ی طویل فضازمان را می‌بریم و سپس نقاط روی دایره‌های مرز را با چرخش $\theta = 2\pi \text{Re}\tau$ همسان می‌کنیم. در شکل، نقطه‌ی قرمز در دایره‌ی بالا و پایینی با هم همسان می‌شوند و پس از انجام همسان‌سازی، روی چنبره نشان داده شده‌اند. ۱۵۷

پ-۱ نمودار سمت چپ، چگالی‌حالات برای $q = 2$ است و نمودار سمت راست برای $q = 4$. هردوی این طیف‌ها برای $N = 20$ بدست آمده‌اند. ۱۹۸

پ-۲ سهم قورباغه‌ای به انتشارگر فرمیونی در مدل SYK ۲۰۰

پ-۳ سهم هندوانه‌ای به انتشارگر فرمیونی در مدل SYK ۲۰۰

پ-۴ سهم مرتبه‌ی J^4 به انتشارگر فرمیونی در مدل SYK - نوع (۱) ۲۰۱

پ-۵ سهم مرتبه‌ی J^4 به انتشارگر فرمیونی در مدل SYK - نوع (۲) ۲۰۱

ج-۱ میدان‌ها در یک مدل سیگمای غیرخطی، نگاشتهایی از فضای تخت به یک خمینه هدف هستند. ۲۱۳

ج-۱ نمایی از خمینه‌ی سه‌بعدی Σ با مرز فشرده‌ی $\partial\Sigma$ که متريک داخل توده و مرز آن به ترتيب g_{ab} و $h_{\mu\nu}$ است. ۲۱۹

فصل ۱

مقدمه

گرانش کوانتومی در ابعاد پایین، مانند دو و سه بعد، اهمیت ویژه‌ای در فیزیک نظری دارد زیرا این مدل‌ها به عنوان آزمایشگاه‌هایی ساده‌تر برای درک ویژگی‌های گرانش کوانتومی عمل می‌کنند. این مدل‌ها به ما امکان می‌دهند ساختارهای ریاضی و دینامیک‌های پیچیده نظریه گرانش کوانتومی را بررسی کنیم و مفاهیمی مانند سیاه‌چاله‌ها، انتروپی و هم‌چنین تقارن‌ها را به زبان ساده‌تر و ملموس‌تری مطالعه نماییم.

اگرچه فعلاً امیدی نمی‌رود که این نظریه‌های گرانش کوانتومی برای فهم کامل گرانش کوانتومی چهاربعدی، یعنی جهانِ واقعی ما، راهگشا باشند؛ اما یک زمینِ بازیِ مناسب برای بررسی ایده‌های گرانش کوانتومی و درس‌گرفتن از این نظریه‌ها را فراهم می‌کنند.

این پایان‌نامه‌ی ارشد، به شکل پایین ساماندهی شده است.

بررسی گرانش کوانتومی ابعاد پایین را از دو بعد آغاز می‌کنیم؛ یعنی با مدل‌های دو بعدی دیلاتونی بحث را شروع می‌کنیم. می‌دانیم که گرانش دو بعدی، در غیابِ میدانِ دیلاتون، از لحاظ ساختاری و حتی مفهومی نسبتاً بی‌محتواست. پس مدل‌های دیلاتونی، به طور خاص به مدلِ گرانشی JT می‌پردازیم. اول در سطح کلاسیک به این مدل نگاه می‌کنیم و نگاهی به انگیزه‌های بررسی این مدل، حل‌های کلاسیک و ارتباطش با نظریه‌ی مکانیک کوانتومی شوارتزی^۱ می‌کنیم. در سطح کوانتومی هم بررسی مان را پیش می‌بریم. اول از دیدگاه اختلالی و در سطح تک حلقه این نظریه را بررسی می‌کنیم و سپس توابع همبستگی دو و چهار- نقطه‌ای را صرفاً نقل می‌کنیم؛ به دست آوردن این توابع چند نقطه‌ای نیاز به ابزارهای پیشرفته‌تر دارند که به مراجع مناسب‌شان ارجاع داده‌ایم؛ سپس به بررسی گرانش JT در حضور مقایص می‌پردازیم

^۱ این نظریه، تحت تقارن $(\mathbb{R}, SL(2))$ ناورداست.

و در آخر هم نگاهی به سهم‌های کرم‌چاله‌ای می‌اندازیم و اهمیت حضورشان را درک می‌کنیم. این بحث، در زمره‌ی بحث‌های جدید است و ارتباط آن با نظریه‌ی رویه‌های ریمانی و ارتباطش با مدل‌های ماتریسی آن را به بحثی بسیار دامنه‌دار و جذاب تبدیل می‌کند. در همینجا صحبت در مورد گرانش دو بعدی را تمام می‌کنیم و گرانش سه بعدی را آغاز می‌کنیم.

بحث‌مان در مورد گرانش سه بعدی را با نگاهی به دوگانی این نظریه با نظریه‌ی میدان همدیس لیوویل آغاز می‌کنیم؛ با انجام یک سری فرآیندهای کاهش هامیلتونی و بازتعريف‌ها، خواهیم دید که در سطح کلاسیک، گرانش سه بعدی پاددوستیه با یک نظریه‌ی میدان لیوویل روی مرز همدیش معادل است. بحث را به شکل قاعده‌مندتر و با بررسی دقیق تر تقارن‌ها در نظریه‌های پیمانه‌ی آغاز می‌کنیم. در نظریه‌های پیمانه‌ای، آن‌چه که مهم است شرایط افت^۱ میدان‌های پیمانه‌ای است، چرا که این شرایط افت فیزیک مسئله را تعیین می‌کنند. با انتخاب شرایط افت^۲ Brown-Henneaux برای فضای مجانباً پاددوستیه و هم‌چنین شرط افت^۳ BMS برای فضای مجانباً تخت، به بررسی تقارن‌های مجانبی می‌پردازیم. می‌بینیم که این شرط افت برای فضای مجانباً پاددوستیه، راهنمایی به دوگانی پیمانه‌ی گرانش است؛ نتیجه‌ای که حدود ده سال پیش از بیان این دوگانی به زبان مدرن گرفته شد [۱]. همینطور می‌بینیم که گروه تقارن‌های پیمانه‌ای فضای تخت هم گروه توسعه‌ی مرکزی یافته‌ی گروه پوانکاره، یعنی گروه^۴ BMS است. در لابه‌لای این بحث‌ها، ارتباطات وسیعی بین این گرانش‌های کوانتمی و کنش‌های هندسی روی مدارهای هم‌الحاقی گروه‌های ویراسورو و $\widetilde{b_{153}}$ مشاهده می‌کنیم که از هندسی بودن این نظریه‌های کوانتمی حکایت می‌کند.

درنهایت، به بررسی توابع پارش گرانش خالی پاددوستیه می‌پردازیم و این کار را با استفاده از فرمول‌بندی انگرال مسیر گرانشی در تقریب نیمه کلاسیک انجام می‌دهیم. همچنین نقایص احتمالی طیف این نظریه‌ی گرانش کوانتمی را بر می‌شماریم. راههای احتمالی را تحت عنوان پیشنهاد برای اصلاح نظریه گرانش خالی در فضای پاددوستیه مطرح می‌کنیم. در سال‌های اخیر یکی از این راه‌ها منجر به برطرف شدن اشکال منفی بودن چگالی حالات این طیف شده است. اما همچنان جستجوها برای پاسخ دادن به سایر مشکلات این نظریه ادامه دارد.

در ضمیمه‌ها هم مقدمات ریاضی مباحث مطرح شده، ارتباط گرانش دو بعدی JT با مدل SYK در حد انرژی پایین و برخی پیش‌نیازهای مطالب داخل این پایان‌نامه را بررسی می‌کنیم.

فصل ۲

مدل گرانش دو بعدی Jackiw–Teitelboim

در اولین بخش، به بررسی مدل گرانش دو بعدی و حل پذیر Jackiw–Teitelboim می پردازیم.

در سال ۱۹۸۴، رومن جکیو و کلود تایتلبو姆^۱ [۱، ۲] به طور مستقل زمینه‌ی ظهور نظریه‌های گرانش دو بعدی و به خصوص JT را توسعه دادند. JT یک مدل نظری دو بعدی از گرانش است که اخیرا در مطالعات مربوط به گرانش کوانتمی و فیزیک سیاه‌چاله‌ها مورد توجه قرار گرفته است. با وجود سادگی و حل پذیری آن، گرانش JT ویژگی‌های اساسی دینامیک گرانشی را به تصویر می‌کشد و به همین دلیل ابزاری ارزشمند برای بررسی مفاهیم پیچیده در یک چارچوب قابل مدیریت‌تر به شمار می‌رود.

یکی دیگر از ویژگی‌های گرانش JT، کمک به پیش‌بینی رفتار سیاه‌چاله‌ها است؛ به ویژه در زمینه ترمودینامیک و ویژگی‌های کوانتمی آنها. این مدل به عنوان یک چارچوب ساده‌شده برای درک متناقض‌نمای اطلاعات و ماهیت آنتروپی در سامانه‌های شامل سیاه‌چاله استفاده می‌شود. همچنین، گرانش JT، در حد انرژی پایین، ارتباط عمیقی با مدل SYK، که مدل برهمنکنشی فرمیونی حل پذیری است، دارد و در مطالعه آشوب کوانتمی و تمام‌نگاری اهمیت زیادی دارد. این ارتباط باعث پیشرفت‌هایی در دوگانی AdS/CFT شده است و یک چارچوب پایین‌تر برای بررسی دوگانگی بین گرانش و نظریه‌های میدان کوانتمی فراهم می‌کند.

در کاربرد، گرانش JT برای بررسی دینامیک سیاه‌چاله‌های نزدیک به حالت‌های فرینه و ظهور فضا–زمان از درهم‌تنیدگی کوانتمی استفاده می‌شود. از این مدل برای آزمایش ایده‌های مربوط به تصحیحات

^۱R. Jackiw and C. Teitelboim

کوانتمی در گرانش کلاسیک و بررسی تعامل بین هندسه و مکانیک کوانتمی بهره بردہ می‌شود. افزون بر این، گرانش JT با نظریه‌ی ماتریس‌های تصادفی هم پیوندهایی دارد که پلی میان سیستم‌های گرانشی و مکانیک آماری ایجاد می‌کند. تمامی این ارتباطها و کاربردها، درک ما از فیزیک بنیادی را غنی‌تر و کامل‌تر می‌سازد.

۱-۲ نگاهی به مدل‌های گرانشی دیلاتونی

از کلی‌ترین کنش گرانشی دوبعدی تک‌میدان، که در آن حداقل مشتقات دوم میدان دیلاتونی وجود دارد، شروع می‌کنیم. در نشانگان اقلیدسی، کنش به این شکل است

$$I = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} \left(U_1(\tilde{\Phi}) R + U_2(\tilde{\Phi}) g^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\Phi} \partial_\nu \tilde{\Phi} + U_3(\tilde{\Phi}) \right), \quad (1-1-2)$$

که $g^{\mu\nu}$ متریک دوبعدی و $\tilde{\Phi}$ میدان دیلاتونی است.

اگرچه در نگاه اول، کنش $(1-1-2)$ با سه تابع $U_1(\tilde{\Phi})$, $U_2(\tilde{\Phi})$ و $U_3(\tilde{\Phi})$ پارامتریندی می‌شود، اما دو تا از این توابع اضافی هستند؛ یعنی می‌توانیم آنها را با بازتعریف میدان و بازمقیاس متریک حذف کنیم.

اول از همه، با بازتعریف $\Phi = U_1(\tilde{\Phi}) \rightarrow \tilde{\Phi}$ می‌توانیم جفتیدگی میدان دیلاتونی به اسکالر ریچی را خطی کنیم^۱. در مرحله‌ی بعد، با یک تبدیل وایل می‌توانیم $U_2(\tilde{\Phi})$ را هم کاملاً حذف کنیم؛ یعنی عمل میدان دیلاتونی را در تئوری دلخواه، بدون جمله‌ی جنبشی بنویسیم.

می‌دانیم که تحت یک بازمقیاس موضعی، اسکالر ریچی به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$g'_{\mu\nu} = e^{2\omega} g_{\mu\nu}, \quad \sqrt{g} R \rightarrow \sqrt{g'} R' = \sqrt{g} (R - 2\nabla^\nu \omega) \quad (2-1-2)$$

به سادگی و با انتخاب' $\omega(x) = \frac{1}{2} \int^{\Phi(x)} \tilde{U}_2(\Phi') d\Phi'$ می‌توانیم جمله‌ی جنبشی را در کنش $(1-1-2)$ حذف کنیم.

حذف جمله‌ی جنبشی از کنش با تبدیل وایل

^۱ توجه کنید که این بازتعریف همیشه معتبر نیست؛ تنها هنگامی این تبدیل معکوس‌پذیر است که مقدار ${}^0 \neq {}^0 \tilde{U}_1(\tilde{\Phi})$ باشد. در غیر این صورت، نمی‌توانیم جمله‌ی جنبشی را بر حسب میدان‌های جدید بازنویسی کنیم.

در اینجا، منظور ما از $\check{U}_2(\Phi)$ ، تابع اولیه‌ی $U_2(\Phi)$ است. کافی است مشتقات را روی ω اثر دهیم:

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \int^{\Phi(x)} \check{U}_2(\Phi') d\Phi' \\ \nabla_\mu \omega(x) &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu \int^{\Phi(x)} \check{U}_2(\Phi') d\Phi' = \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu \Phi \underbrace{\check{U}'_2(\Phi)}_{U_2(\Phi)} \\ \nabla^\mu \nabla_\mu \omega(x) &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla^\mu \Phi \check{U}'_2(\Phi) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla^\mu \Phi \nabla_\mu \Phi \underbrace{\check{U}''_2(\Phi)}_{U_2(\Phi)}\end{aligned}\quad (3-1-2)$$

شیوه‌ی اثردهی مشتقات، روی این انتگرال، دقیقاً مثل قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل است؛ یعنی با رابطه‌ی زیر

$$\frac{d}{dt} \int_{f(x)}^{g(x)} H(x, t) dt = g'(x)H(x, g(x)) - f'(x)H(x, f(x)) + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial H(x, t)}{\partial x} dt.$$

جمله‌ی اول (3-1-2) اگرچه به نظر اضافی است، اما با انتگرال‌گیری جزء به جزء، می‌توان مشتقات را روی پتانسیل $U_2(\Phi)$ انداخت و به آن به چشم یک جمله‌ی پتانسیل جدید نگاه کرد که در (3-1-1) جذب می‌شود. جمله‌ی دوم دقیقاً همان‌چیزی است که با جاگذاری در (2-1-2)، جمله‌ی جنبشی میدان دیلاتونی را حذف می‌کند.

درنهایت، چیزی که باقی می‌ماند، این کنش است:

$$I[g, \Phi] = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} (\Phi R + U(\Phi)), \quad (4-1-2)$$

که تنها با یک پارامتر، یعنی با پتانسیل دیلاتونی $U(\Phi)$ پارامتربرندی شده است.

برخی نکات در مورد گرانش دیلاتونی دوبعدی:

۱. این تقلیل کنش، که در بالا دیدیم، در سطح کلاسیک انجام شد؛ کاشهایی مثل این، لزوماً در سطح کوانتومی قابل انجام نیستند؛ علی‌الخصوص وقتی بعداً قرار است به ترمودینامیک مدل‌های حاصل نگاه کنیم، اغلب جملات سطحی انتگرال برایمان اثرات غیربدیهی ایجاد می‌کنند.

۲. الان مدل‌هایی که حاصل ضرب دو مشتق دیلاتون در آن حضور داشت برسی شد؛ می‌توان به کنش در حضور مشتقات بیشتر را هم نگاه کرد. با یک بررسی سطحی می‌توان فهمید که ثابت جفتیدگی این مدل‌ها باید بعد طول داشته باشد؛ یعنی این مدل‌ها بازبهنجارناپذیر هستند. البته در دو بعد که متريک هیچ درجه‌آزادی موضعی ندارد، بازبهنجارپذيری هیچ مشکلی ندارد.^۳

^۳ یادمان هست که برای رفع مشکل بازبهنجارش ناپذیری، باید جملاتی به کنش اضافه کنیم که در هر مرتبه‌ی اختلال،

۳. میدان دیلاتونی، یک ثابت نیوتون وابسته به فضازمان معرفی می‌کند:

$$G_{\text{eff}} = \frac{G_N}{\Phi(x)} \quad (5-1-2)$$

که برای توصیف فیزیکی معادلات حرکت، لازم است که این ثابت همواره مثبت بماند.

۲-۲ گرانش JT کلاسیک

مدل‌گرانشی Jackiw-Teitelboim، همان مدل (۴-۱-۲) است که در آن پتانسیل دیلاتونی خطی است؛ یعنی $U(\Phi) = -\Lambda\Phi$ انتخاب شده است.

$$I_{\text{JT}}^{\Lambda}[g, \Phi] = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g}\Phi(R - \Lambda) \quad (1-2-2)$$

در این معادله، Λ ثابت کیهان‌شناختی مدل است. برای فضازمان پاددوسیته (AdS)، ثابت کیهان‌شناختی را $\Lambda = -2/L^2$ می‌گیریم. با انتخاب $L = 1$ ، کنش مدل‌مان با اندکی اصلاحات به این شکل است:

$$I_{\text{JT}}[g, \Phi] = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g}\Phi(R + 2) - \frac{1}{\Lambda\pi G_N} \oint_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{h}\Phi(K - 1) \quad (2-2-2)$$

برای خمینه‌های مرزدار، جمله‌ی مرزی گیبونز-هاوکینگ-یورک در این کنش مستقیماً نوشته شده و همچنین پادجمله‌ی (۱-) هم برای متناهی شدن کنش در فضاهای مجانباً پاد دوسیته افزوده شده است.

همچنین در ادامه می‌بینیم که افزودن جمله‌ی توپولوژیک هم به این کنش مهم است؛ پس کنشی که در کل این بخش به بررسی اش می‌پردازیم، این است:

$$I[g, \Phi] = -S.\chi + I_{\text{JT}}[g, \Phi] \quad (3-2-2)$$

که مشخصه‌ی اویلر به شکل زیر معرفی شده است:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g}R + \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{h}K. \quad (4-2-2)$$

جمله‌ی توپولوژیک، تحت وردش متريک تغییری نمی‌کند و مقدارش دقیقاً برابر مشخصه‌ی اویلر فضاست. می‌توان آن را به چشم افزودن یک عدد ثابت به کنش نگاه کرد، یعنی میدان دیلاتونی در کنش $I_{\text{JT}}[g, \Phi]$ به شکل $(x) \rightarrow \Phi(x)$ منتقل شود، جمله‌ی توپولوژیک بدست می‌آید؛ که $S. = \frac{\Phi.}{4G_N}$. دیاگرام‌های واگرا را خنثی کند. اما به شکلی استثنایی در دو بعد، چون متريک درجه‌آزادی موضعی ندارد، کنش آن کاملاً توپولوژیک است و در دیاگرام‌ها مشکل واگرایی رخ نمی‌دهد.

۱-۲-۲ انگیزه: سیاهچاله‌های نزدیک به فرینه

یک انگیزه‌ی قوی برای مطالعه‌ی مدل دوبعدی JT این است که فیزیک نزدیک افق رویداد سیاهچاله‌های بعد بالای نزدیک به فرینه را توصیف می‌کند. بیاید برای ساده‌ترین سیاهچاله‌ی چهاربعدی، این گزاره را ببینیم؛ یعنی حد نزدیک افق سیاهچاله‌ی رایسنر-نوردشتروم در گرانش اینشتینی جفت شده به میدان الکترومغناطیسی را بررسی کنیم.

$$S = \frac{1}{16\pi G_N^{(4)}} \int d^4x \sqrt{-g} (R - F^2) + S_{\text{bdy}} \quad (5-2-2)$$

متريک فضازمان رایسنر-نوردشتروم که جواب اين معادله است، به شكل زير است.

$$ds^2 = -f(r)dr^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_3^2, \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (6-2-2)$$

آشنایی مختصر با سیاهچاله‌ی رایسنر-نوردشتروم

میدان الکترومغناطیسی حاصل از اين جواب، تنها مولفه‌ی شعاعی میدان الکتریکی دارد که متناسب با بار Q است و به شكل عکس مجددی افت می‌کند. افق‌های اين سیاهچاله در $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ واقع شده‌اند و دمای هاوکینگ آن $T = |f'(r_+)|/4\pi$ است. حد نزدیک فرینه، مربوط به وقتی است که $|Q| \sim M$ و بنابراین، افق‌های بیرونی و درونی بسیار بهم نزدیک می‌شوند.

بیاید هندسه‌ی نزدیک به افق را در سیاهچاله‌ی نزدیک به فرینه بررسی کنیم. به خاطر نزدیک بودن به حالت فرینه، کمي $\Delta M \equiv M - Q$ را بسیار کوچک می‌گيريم؛ و برای بررسی هندسه نزدیک افق، شعاع را به شكل $r = Q + Q^2 \tilde{r}$ می‌نویسيم. حالا متريک (5-2-2) را در اين دو حد بازنويسي می‌کنیم.

اول از همه بايستی $f(r)$ را در اين حدّها بازنويسي کرد:

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 - \frac{2}{Q} \overbrace{\frac{M}{Q}}^{Q+\Delta M} (1 + Q\tilde{r})^{-1} + \frac{Q^2}{Q^2} (1 + Q\tilde{r})^{-2} \\ &= 1 - 2 \left(1 + \frac{\Delta M}{Q}\right) \left(1 - Q\tilde{r} + Q^2 \tilde{r}^2\right) + (1 - 2Q\tilde{r} + 3Q^2 \tilde{r}^2) \\ &= 1 - 2 - 2 \frac{\Delta M}{Q} + 2Q\tilde{r} - 2Q^2 \tilde{r}^2 + 1 - 2Q\tilde{r} + 3Q^2 \tilde{r}^2 + \mathcal{O}(Q^3 \tilde{r}^3) \\ &= -2 \frac{\Delta M}{Q} + Q^2 \tilde{r}^2 = Q^2 \left(\tilde{r}^2 - \frac{2\Delta M}{Q^3}\right) \end{aligned} \quad (7-2-2)$$

از جملاتی که هم شامل \tilde{r} و هم شامل ΔM هستند، صرف نظر کردیم؛ چون هردوی این کمیت‌های بسیار کوچکند. حالا با جایگذاری در متريک (۵-۲-۲)

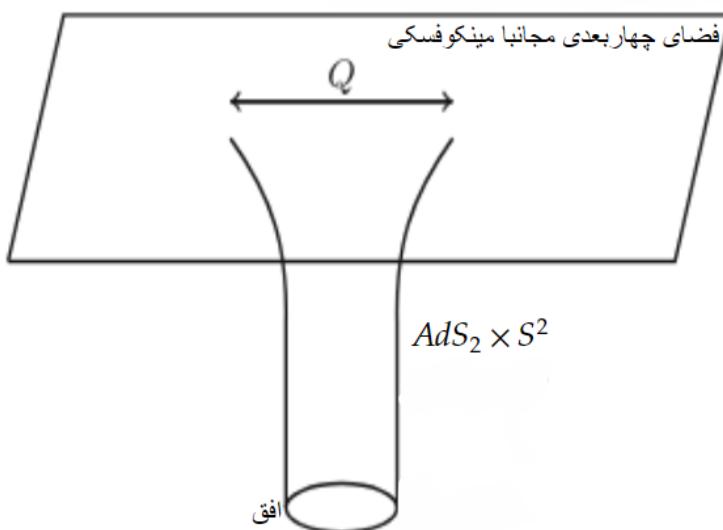
$$ds^2 \approx -Q^2 \left(\tilde{r}^2 - \frac{\Delta M}{Q^3} \right) dt^2 + \frac{Q^2 d\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2 - \frac{\Delta M}{Q^3}} + Q^2 d\Omega_2^2 \quad (8-2-2)$$

دو جمله‌ی اول اين متريک، متريک فضاي پاددوسитеه دوبعدی است؛ پس هندسه نزديک افق اين سياهچاله به شكل $AdS_2 \times S^2$ است؛ که در اين مختصات شعاع پاددوسитеه و شعاع کره دوبعدی هر دو Q هستند.

با يك بازمقياس طولي با ضريب Q^{-1} ، بدست ميآوريم که

$$Q^{-1} ds^2 \approx -(\tilde{r}^2 - r_h^2) dt^2 + \frac{d\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2 - r_h^2} + d\Omega_2^2, \quad r_h = \sqrt{\frac{2\Delta M}{Q^3}}. \quad (9-2-2)$$

طرحی اولیه از اين فضازمان در تصویر ۱-۲ آمده است.



شكل ۱-۲: طرح هندسي فضازمان رايسنر-نوردشتروم که به شكل همواري فضاي مجانبا تخت مينکوفسکي را به گلواه $AdS_2 \times S^2$ نزديک افق وصل ميکند. در حد $M \rightarrow Q$ ، شعاع پاددوسитеه به بىنهایت ميل ميکند. (عکس از [۲] برداشته شده.)

حالا اندکي هم در مورد اختلالات متريک حول حالت فرينه صحبت ميکنيم.

اختلالات متريک را به شكل زير پرمایش ميکنيم:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{\chi}} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \chi(dy^i + A_\mu^{ij} y^j dx^\mu)(dy^i + A_\nu^{ij} y^j dx^\nu) + \dots$$

كه سه متغير y^i اختلالات کره‌ی دوبعدی را پرمایش ميکند و $(t, r) = x^\mu$ زمان و شعاع را مشخص

می‌کند. جمله‌هایی که با سه نقطه نشان دادیم؛ مدهای کالوزا-کلاین هستند که به علت کم جرم بودن^۴ در اختلال‌های کوچک تاثیری ندارند^۵.

برای سادگی، در هنگرددی از سیاه‌چاله‌ها با بار ثابت و تکانه‌زاویه‌ای صفر کار می‌کنیم. با جای‌گذاری متريک فوق، کنش اينشتين-ماكسول (۵-۲-۲) به مدل ديلاتوني تقليل می‌يابد [۹] :

$$S[g, \chi] = \frac{1}{4G_N^{(4)}} \int d^4x (\chi R + U(\chi)) + \dots, \quad U(\chi) = -\frac{2Q^2}{\sqrt{\chi}} + \frac{2}{\sqrt{\chi}}$$

پس اختلالات کوچک متريک از سیاه‌چاله‌ی رایسنر-نوردشتروم همچنان یک مدل گرانش ديلاتوني است با پتانسیل $U(\chi)$.

اگر از اختلالات کره‌ی دوبعدی صرف‌نظر کنیم و فرض کنیم که مساحت کره‌ی دوبعدی ثابت است، طوری که پتانسیل ديلاتوني جديد صفر می‌شود.

$$U(\chi = \Phi_+) = 0 \longrightarrow \Phi_+ = Q^2$$

هندسه‌ی نزدیک به افق در سیاه‌چاله‌ی نزدیک به حالت فرینه بازیابی می‌شود. پس گرانش JT وقتی پدیدار می‌شود که ما اختلالات بسیار کوچک حول میدان ديلاتوني χ را نگاه می‌کنیم.

$$\chi(x) = \Phi_+ + \Phi(x), \quad \Phi \ll \Phi_+$$

پس تحت اين شرایط، نظریه اينشتین-ماكسول در چهار بعد به گرانش JT نزدیک به افق تقليل می‌يابد.

$$S[g, \Phi] = \frac{\Phi_+}{4G_N^{(4)}} \int \sqrt{-g}R + \frac{1}{4G_N^{(4)}} \int \sqrt{-g}\Phi(R + 2) + \dots$$

که در آن جملات صرف‌نظر شده، جفتیدگی گرانش JT به میدان‌های مادی حاضر در نظریه و همچنین مدهای سبک کالوزا-کلاین را نشان می‌دهد.

همچنین، در اين چارچوب، توصيف جالبي برای جملاتی که در کنش هستند ارائه می‌دهد. در کنش اولیه (۲-۲-۳)، می‌توانیم پارامتر S را با

$$S_+ = \frac{\pi\Phi_+}{G_N^{(4)}} = \frac{\pi Q^2}{G_N^{(4)}}$$

^۴از مرتبه‌ی Q در شعاع پاددوسيته
^۵اين مدهای سبک در پس‌زمینه‌های پاددوسيته مشاهده می‌شوند؛ مثلا در توصيف نظریه ریسمان نوع IIB در پس زمینه $S^5 \times S^5$ اين مدهای سبک حاضرند.

همسان کنیم. این رابطه، همان آنتروپی بکنشتاین-هاوکینگ برای سیاهچاله‌ی رایسner-نوردشتروم است. در ادامه شواهد بیشتری می‌بینیم که چرا میدان دیلاتونی با آنتروپی همسان شده است.

نکته: سیاهچاله‌ی چهاربعدی رایسner-نوردشتروم تنها سیاهچاله‌ای نیست که فیزیک نزدیک افتش در حالت نزدیک به فرینه با گرانش JT توصیف می‌شود. دسته‌ی بزرگی از سیاهچاله‌ها این ویرگی را دارند و به همین دلیل، یعنی جهان‌شمول بودن فیزیک سیاهچاله‌ها در نزدیکی افق و نزدیک به حالت فرینه، مطالعه‌ی جزئی‌تر مدل گرانش JT برای ما جالب است.

۲-۲-۲ تناظر JT با مدل توپولوژیک BF

در این بخش، فرمول‌بندی مرتبه‌اول گرانش JT را می‌بینیم. چون متريک دوبعدی، درجه‌ی آزادی موضعی ندارد؛ بنابراین نظریه گرانش دوبعدی نظریه‌ای است که درجات آزادی آن باید سرتاسری باشد، یا معادل با یک نظریه میدان توپولوژیک است. اینجا می‌بینیم که مدل‌های دوبعدی دیلاتونی، یک نظریه میدان پواسون-سیگما هستند و در مورد خاص گرانش JT، این مدل به مدل توپولوژیک BF تقلیل می‌یابد. بیایید این تناظر را برای خمینه‌های بسته بررسی کنیم. با شروع از کنش دیلاتونی (۴-۱-۲)، میدان‌های کمکی e_μ^a را به شکل متعارف می‌سازیم:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \delta_{ab} \quad (10-2-2)$$

که اندیس‌های a, b صفر و یک هستند. سپس با استفاده از این میدان‌های کمکی، هموستار اسپینی $\omega_\mu^{[ab]} = \omega_\mu^{ab}$ را می‌سازیم.

این هموستارها، با شرط بدون پیچش بودن متريک (در نمایش جدیدمان) بدست می‌آیند:

$$de^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0 \quad (11-2-2)$$

حالا در دو بعد فضازمانی، این روابط را برای تبدیل به نمایش مرتبه‌اول داریم:

$$\omega^{ab} = \epsilon^{ab} \omega,$$

$$d^\star x \sqrt{g} = e^1 \wedge e^1, \quad (12-2-2)$$

$$d^\star x \sqrt{g} R = 2d\omega$$

بررسی این روابط

اولین رابطه از معادله‌ی (۱۲-۲-۲) به‌سادگی حاصل می‌شود؛ تنها تانسور پادمتقارن در دو بعد، همان تانسور لوی‌چویتا است. بنابراین؛ تانسور هموستار اسپین باید متناسب با تانسور لوی‌چویتا باشد، ضریبی را، که این تناسب را به تساوی تبدیل می‌کند، ω می‌گذاریم.

توجه کنید که با دترمینان گرفتن از طرفین رابطه ماتریسی ۱۰-۲-۲، بدست می‌آوریم^a :

$$e = \sqrt{g}$$

می‌توانیم از این میدان‌های کمکی برای تعریف پایه‌ای برای فضای فرمها فرمای فرمها بفرمایم. تعریف می‌کنیم $e^a \equiv e_\mu^a dx^\mu$ و تانسور کاملاً پادمتقارن لوی‌چویتا با مولفه‌های فرمی را هم اینطور معرفی می‌کنیم:

$$\epsilon_{\mu\nu} \equiv e^{-1} \epsilon_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$$

$$\epsilon^{\mu\nu} \equiv e \epsilon^{ab} e_a^\mu e_b^\nu.$$

با دانستن این روابط به دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned} d^*x\sqrt{g} &= edx^*dx^1 = \frac{1}{2!}e \underbrace{\epsilon_{\mu\nu}}_{جگذاری از بالا} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2!} \epsilon_{ab} e_\mu^a dx^\mu \wedge e_\nu^b dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ab} e^a \wedge e^b = e^* \wedge e^1 \end{aligned}$$

از معادله‌ی کارتان برای اینجا^b، در نمایش مرتبه‌اول، بدست می‌آید

$$R^{ab} = \epsilon^{ab} d\omega$$

حالا توجه کنید که:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ab} R^{ab} &= \left(ee_a^\mu e_b^\nu \epsilon_{\mu\nu} \right) \left(\frac{1}{2} R^{ab}_{\rho\sigma} \underbrace{dx^\rho \wedge dx^\sigma}_{\epsilon^{\rho\sigma} dx^* dx^1} \right) = e \left(e_a^\mu e_b^\nu R^{ab}_{\rho\sigma} \right) \left(\epsilon_{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} \right) dx^* dx^1 \\ &= e R^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \left(\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho \right) dx^* dx^1 = e R dx^* dx^1 = d^*x \sqrt{g} R \end{aligned}$$

از طرفی

$$\epsilon_{ab}R^{ab} = \epsilon_{ab}\epsilon^{ab}d\omega = 2d\omega$$

و بدین ترتیب آخرین رابطه معادله (۱۲-۲) هم نتیجه می‌شود.

^aاگر در نشانگان لورنتزی بودیم، باید رابطه به شکل $e = \sqrt{-g}$ بازنویسی می‌شد.

$${}^b d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} = R^{ab}$$

کنش دیلاتونی (۱۴-۲)، در نمایش جدید ما به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$I = -\frac{1}{\Lambda\pi G_N} \int_M \left[\Phi d\omega + \frac{1}{4} U(\Phi) \epsilon^{ab} e_a \wedge e_b + X^a (de_a + e_a{}^b \omega \wedge e_b) \right] \quad (13-2-2)$$

که ضرایب لاغرانژ X^i به ما کمک می‌کنند قید بدون پیچش بودن متریک را در سطح کنش حفظ کنیم.
دو جمله‌ی اول این کنش هم صرفاً با جاگذاری از روابط (۱۲-۲) حاصل شده‌اند.

حالا می‌توانیم نشان دهیم که کنش حاصل (که همان کنش قبلی است، فقط در صورتی جدیدتر)، یک نظریه میدان پواسون-سیگما به فضای هدف سه‌بعدی است. برای این‌کار، هموستان (e_i, e_1, ω) و پارامتر بندی سه‌بعدی از فضای هدف $X^i = (X^\cdot, X^1, X^\natural) \equiv \Phi$ را در نظر بگیرید. خمینه‌های پواسون با یک برآکت پواسون ^۶ مشخص می‌شوند:

$$\{X^i, X^j\}_{\text{PB}} \equiv P^{ij}(X). \quad (14-2-2)$$

کنش مدل پواسون-سیگما این است:

$$I_{\text{PSM}} = -\frac{1}{\Lambda\pi G_N} \int_M \left(A_i \wedge dX^i + \frac{1}{4} P^{ij}(X) A_i \wedge A_j \right) \quad (15-2-2)$$

برای این که کنش (۱۳-۲) بازتولید شود؛ پواسون برآکت‌ها باید مانند زیر باشند:

$$P^{\cdot 1} = \{X^\cdot, X^1\}_{\text{PB}} = \frac{U(X^\natural)}{2}, \quad P^{a\natural} = \{X^a, X^\natural\}_{\text{PB}} = \epsilon^a{}_b X^b \quad (16-2-2)$$

بررسی این گزاره

^۶ممکن است این برآکت تبهگن باشد، اما خمینه‌های پاوون به خمینه‌های همتافته برگ‌بندی می‌شوند که هر برگ آن مجهز به یک ۲-فرم همتافته است.

با جایگذاری در معادل پواسون-سیگما می‌بینیم که

$$\begin{aligned} I_{\text{PSM}} = & -\frac{1}{\Lambda \pi G_N} \int_M \left(e_+ \wedge dX^+ + e_1 \wedge dX^1 + \Phi d\omega \right. \\ & \left. + \frac{1}{\chi} \left(\chi \times \frac{U(\Phi)}{2} \underbrace{e_+ \wedge e_1}_{\frac{1}{4}\epsilon^{ab}e_a \wedge e_b} - \chi X^1 \times e_+ \wedge \omega - \chi X^+ \times e_1 \wedge \omega \right) \right) \end{aligned}$$

انتگرال گیری جزء به جزء روی دو جمله‌ی اول به این شکل انجام می‌پذیرد:

$$\begin{aligned} d(X^i e_i) &= dX^i \wedge e_i + X^i \wedge de_i \\ \int_M d(X^i e_i) &= - \int_M e_i \wedge dX^i + \int_M X^i de_i \end{aligned}$$

که چون خمینه مرز ندارد، جمله‌ی سمت چپ با استفاده از قضیه استوکس صفر است. حالا اگر در رابطه بالا جایگذاری کنیم و جملات دارای ضریب لاغرانژ را جمع کنیم:

$$\begin{aligned} I_{\text{PSM}} = & -\frac{1}{\Lambda \pi G_N} \int_M \left(\Phi d\omega + \frac{1}{4} U(\Phi) \epsilon^{ab} e_a \wedge e_b \right. \\ & \left. + X^+ (de_+ + \omega \wedge e_1) + X^1 (de_1 + \omega \wedge e_+) \right) \end{aligned} \quad (17-2-2)$$

که دقیقاً همان کنش (۱۳-۲-۲) است. ■

با بازتعریف مولدهای جبر به شکل $H \equiv X^+ \pm X^1$ و $E^\pm \equiv -X^+ \pm X^1$ می‌توانیم جبر پواسون را به شکل جدید ببینیم:

$$\{H, E^\pm\}_{\text{PB}} = \{X^+, -X^-, \pm X^1\}_{\text{PB}} = X^1 \mp X^+ = \pm E^\pm$$

$$\begin{aligned} \{E^+, E^-\}_{\text{PB}} &= \{-X^+ + X^1, -X^+ - X^1\}_{\text{PB}} = \{X^+, X^1\}_{\text{PB}} - \{X^1, X^+\}_{\text{PB}} \\ &= U(H = \Phi) \end{aligned}$$

در مورد گرانش JT که پتانسیل دیلاتونی $\Phi = 2U(\Phi)$ است؛ این جبر به جبر لی $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ تبدیل می‌شود.

حالا گرانش JT را به مدل توپولوژیک BF تبدیل می‌کنیم. با کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء، کنش

: ^v (۱۳-۲-۲) را بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned}
 I_{\text{PSM}} &= -\frac{1}{\Lambda\pi G_N} \int_M \left\{ X^i \wedge dA_i + \frac{1}{4} P^{ij}(X) A_i \wedge A_j \right\} \\
 &= -\frac{1}{\Lambda\pi G_N} \int_M \left\{ X^\cdot \wedge dA_\cdot + X^1 \wedge dA_1 + X^2 \wedge dA_2 \right. \\
 &\quad \left. + X^3 A_\cdot \wedge A_1 + X^1 A_\cdot \wedge A_2 + X^2 A_1 \wedge A_2 \right\} \quad (18-2-2) \\
 &= -\frac{1}{\Lambda\pi G_N} \int_M \left\{ X^\cdot (dA_\cdot + A_1 \wedge A_2) \right. \\
 &\quad \left. + X^1 (dA_1 + A_2 \wedge A_\cdot) \right. \\
 &\quad \left. + X^2 (dA_2 + A_1 \wedge A_\cdot) \right\}
 \end{aligned}$$

مولدهای زیر را برای جبر لی (\mathbb{R}^2, ω) در نظر می‌گیریم:

$$\lambda_\cdot = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}. \quad (19-2-2)$$

می‌توانیم ببینیم که این پایه، پایه‌ی متعامد این جبر است، یعنی $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) \propto \delta_{ij}$

حالا ماتریسی $F = dA + A \wedge A$ را شکل می‌دهیم؛ می‌دانیم که

$$\begin{aligned}
 A &= A^i \lambda_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^\cdot & A^1 - A^2 \\ A^1 + A^2 & -A^\cdot \end{pmatrix} \\
 dA &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} dA^\cdot & dA^1 - dA^2 \\ dA^1 + dA^2 & -dA^\cdot \end{pmatrix} \quad (20-2-2)
 \end{aligned}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}
 A \wedge A &= A^i \lambda_i \wedge A^j \lambda_j = \lambda_i \lambda_j A^i \wedge A^j \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^\cdot \wedge A^2 & A^\cdot \wedge A^1 - A^\cdot \wedge A^2 \\ -A^\cdot \wedge A^1 - A^\cdot \wedge A^2 & -A^1 \wedge A^2 \end{pmatrix} \quad (21-2-2)
 \end{aligned}$$

پس:

$$dA + A \wedge A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} dA^\cdot + A^\cdot \wedge A^2 & dA^1 - dA^2 + A^\cdot \wedge A^1 - A^\cdot \wedge A^2 \\ dA^1 + dA^2 - A^\cdot \wedge A^1 - A^\cdot \wedge A^2 & -dA^\cdot - A^1 \wedge A^2 \end{pmatrix} \quad (22-2-2)$$

^۷ توجه کنید که تانسور ϵ^{ab} با کمک متریک دوبعدی لورنتزی به ϵ^{ab} تبدیل می‌شود. پس مثلا $\epsilon^{\cdot 1} = -1$.

حالا برای خواندن مولفه‌های F_i ، کافی است این ماتریس را به پایه‌های جبرلی تجزیه کنیم؛ یعنی ببینیم چه مولفه‌هایی در پایه‌ی ماتریس‌های λ_i دارد.

$$\begin{aligned} F_1 &= dA_1 + A_1 \wedge A_2 \\ F_2 &= dA_2 + A_1 \wedge A_1 \\ F_3 &= dA_3 + A_2 \wedge A_3 \end{aligned} \quad (23-2-2)$$

که همان عبارات داخل پرانتز در کنش (۱۳-۲-۲) هستند. این یعنی که می‌توانیم کنش (۱۸-۲-۲) را به شکل

$$I = -\frac{1}{\Lambda \pi G_N} \int_{\mathcal{M}} X^i F_i = -\frac{1}{4\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} \text{Tr } XF \quad (24-2-2)$$

بنویسیم که $X = X^i \lambda_i$.

صحبت‌های بالا برای خمینه‌های بدون مرز بود، چون در قضیه استوکس، به خاطر بی‌مرز بودن خمینه، توانستیم جمله‌ی مرزی را صفر کنیم.

اگرچه توصیف گرانش JT برحسب یک مدل توپولوژیک BF اگرچه در سطح کلاسیک برقرار هست، اما این تناظر در سطح موضعی برقرار هست. در سطح سرتاسری، گروه تقارنی و جوابهای معادله حرکت، با هم معادل نیستند.

۱. یک هموستار خوب مثل $A_\mu = 0$ در نظریه‌ی پیمانه‌ای BF معادل با متريک $g_{\mu\nu} = 0$ است که متريکی تکین است. متريک‌های تکینی مثل اين متريک، باید از توصیف گرانشی و انتگرال مسیر گرانشی حذف شوند.

۲. گرانش شامل وابسانی‌های بزرگ^۸ است که در تبدیلات پیمانه‌ای نظریه BF معادلی ندارند.

۳. تفسیر انتگرال مسیری گرانش شامل جمع روی توپولوژی‌های مختلف است، اما در نظریه توپولوژیک این جمع روی توپولوژی‌ها جایی ندارند.

بیشتر این جزئیات در بررسی شده‌اند، برای مشاهده جزئیات می‌توانید به مقالات [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳] رجوع کنید. همین مسائل در توصیف گرانش سه‌بعدی در فضای پاددوسیته و توصیف معادلش بر حسب

^۸ تبدیلاتی که گروه‌های هموتوپی را تغییر می‌دهد اما ساختار مختلط خمینه را عوض نمی‌کند؛ این تبدیلات به دسته‌های مختلفی تقسیم می‌شوند و در «گروه کلاس‌نگاشت» دسته‌بندی می‌شوند.

نظریه میدان توپولوژیک Chern-Simons با گروه پیمانه‌ای $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ پیش می‌آید که مقاله‌ی مروری [۱۴] آن را به خوبی بحث کرده است.

۳-۲-۲ جواب‌های کلاسیک کنش JT

در این بخش به جواب‌های کلاسیک کنش JT در حضور ماده می‌پردازیم. کنش لورنتزی این نظریه به این شکل است.

$$S = \frac{\Phi}{16\pi G_N} \left[\int \sqrt{-g} R + 2 \oint \sqrt{-h} K \right] + S_{JT}[g, \Phi] + S_m[\phi, g] \quad (25-2-2)$$

جمله‌ی اول، مربوط به میدان دیلاتونی پس‌زمینه است و جمله‌ی توپولوژیک کنش است. جمله‌ی دوم هم کنش اصلی JT در حضور میدان متغیر دیلاتونی است. جمله‌ی آخر کنش ماده است؛ که در آن فرض شده که ماده مستقیماً به میدان دیلاتونی جفت نمی‌شود؛ بلکه از طریق متريک (غیرمستقیماً) به میدان دیلاتونی جفت می‌شود^۹. برای حل معادلات حرکت، لازم نیست فرض خاصی رو کنش ماده باشد؛ این از مزایای نظریه‌های بعد پایین است که حل پذیری شان فوق العاده بالاست. هرچند با افزودنِ ماده‌ی هم‌دیس، به مدلی واقع‌گرایانه‌تر می‌رسیم که حل پذیری آن بسیار بالاست.

جواب‌های متريک

سراغ جواب‌های متريک برای کنش (۲۵-۲-۲) می‌رویم. برای رسیدن به معادلات متريک، باید میدان دیلاتونی را وردش دهیم. با قرار دادن در معادله اویلر-لاگرانژ، به علت نبودن جمله‌ی جنبشی برای میدان دیلاتونی، به معادله ساده‌ی زیر برای متريک می‌رسیم.

$$R(x) = -2 \quad (26-2-2)$$

در دو بعد، چون تانسور انحنای درجه‌ی آزادی دارد، دانستن اسکالر ریچی، دقیقاً معادل دانستن تانسور انحنایت و همین کافی است تا متريک را برایمان مشخص کند^{۱۰}. ادعا می‌کنیم که متريک، در حقیقت همان متريک فضای پاددوسيته‌ی دوبعدی است، با اين تفاوت که ممکن است خمينه‌ی فضازمان، نواحی مختلفی از فضای سرتاسری پاددوسيته‌ی دوبعدی را شامل شود.

^۹ در دسته‌ی بزرگی از سیاهچاله‌ها در حالت نزدیک به فرینه، این فرض معقول و منطقی است.

^{۱۰} البته متريک می‌تواند در دستگاه‌های مختصات مختلفی نوشته شود؛ این وضعیت به این علت که نسبیت عام یک نظریه هموردای عام هست، از قبل قابل انتظار بود.

بررسی این ادعا

از مزایای کار در بعد پایین این است که درجات آزادی متريک کم هستند. چون متريک دقيقا سه درجه آزادی دارد، می‌توانيم با دو آزادی قابل استفاده از طريق تبديل مختصات، آن را با يك درجه آزادی مشخص کنيم.

$$ds^2 = -e^{2\omega(u,v)} dudv$$

كه مختصه‌های (u, v) ، مختصات مخروط نور هستند؛ يعني $z = t + z$ و $u = t - z$.

برای اين متريک، می‌توانيم انحنای نرده‌اي ريجچي را بخوانيم؛ حاصل $R = \Lambda e^{-2\omega} \partial_u \partial_v \omega$ است؛ پس معادله (۲-۲-۲۶) به شكل

$$4\partial_u \partial_v \omega + e^{2\omega} = 0$$

تبديل می‌شود. اين معادله، که به معادله ليوويل معروف است، جواب شناخته‌شده‌اي دارد.

$$e^{2\omega(u,v)} = \frac{\partial_u U(u) \partial_v V(v)}{(U(u) - V(v))^2} \quad (27-2-2)$$

که در آن، توابع دستيده‌ي $U(u)$ و $V(v)$ دلخواه هستند و با اعمال کردن شرایط مرزی خاصی، اين توابع مقيدتر می‌شوند.

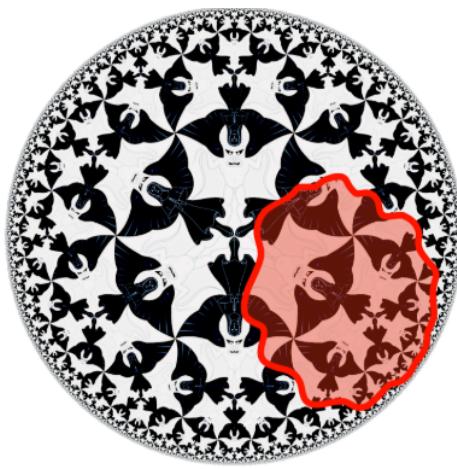
با دردست داشتن اين جواب، متريک اوليه به اين شكل بازنويسي می‌شود:

$$ds^2 = -\frac{4\partial_u U(u) \partial_v V(v) dudv}{(U(u) - V(v))^2} = -\frac{dU dV}{(U - V)^2}$$

که اين دقيقا متريک مختصات پوانکاره روی فضای پاددوسيته‌ي دوبعدی است. چون شرایط مرزی، روی محدوده‌ي متغيرهای U و V قيد خاصی اعمال می‌کنند، اين حل متريک، تمام فضای پاددوسيته‌ي دوبعدی نیست، بلکه برشي از يك ناحيه‌ي آن است (به شكل ۲-۲ نگاه کنيد).

به توابع $U(u)$ و $V(v)$ می‌توان به چشم وابسانی‌هايي نگاه کرد که متريک را در يك پيمانه‌ي همديس نگه می‌دارند و مختصه‌های مخروط نوري پوانکاره را به مختصه‌های مخروط نوري (u, v) می‌برند.

پس جواب متريک را در کنش (۲-۲-۲۵) پيدا کردیم. بد نیست که برای ادامه‌ي کارمان، نگاهی



شکل ۲-۲: نمایشی از یک برش خاص از فضای پاددوسیته دوبعدی. در این کاشی‌کاری خاصی از این فضا، جفت‌های شیطان-فرشته مساحت یکسانی دارند؛ این نقاشی از کارهای موریس اشر است.
(عکس از [۲] برداشته شده.)

به مختصات‌های مختلف روی فضای پاددوسیته دوبعدی می‌اندازیم که در ادامه اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کنند.

مختصات‌های مختلف روی فضای AdS_2

۱. مختصات پوانکاره

مختصات پوانکاره با متغیرهای (T, Z) مشخص می‌شود. این مختصه نیمی از فضای پاددوسیته دوبعدی را می‌پوشاند و متريک آن به شکل زير است.

$$ds^2 = \frac{1}{Z^2} (-dT^2 + dZ^2), \quad Z > 0 \quad (28-2-2)$$

به مختصات مخروط نوری برويم که متريک اين مختصات است. می‌توانيم با تعريف $\begin{cases} U = T + Z \\ V = T - Z \end{cases}$ به فرم زير است.

$$ds^2 = -\frac{4dUdV}{(U-V)^2}, \quad U > V \quad (29-2-2)$$

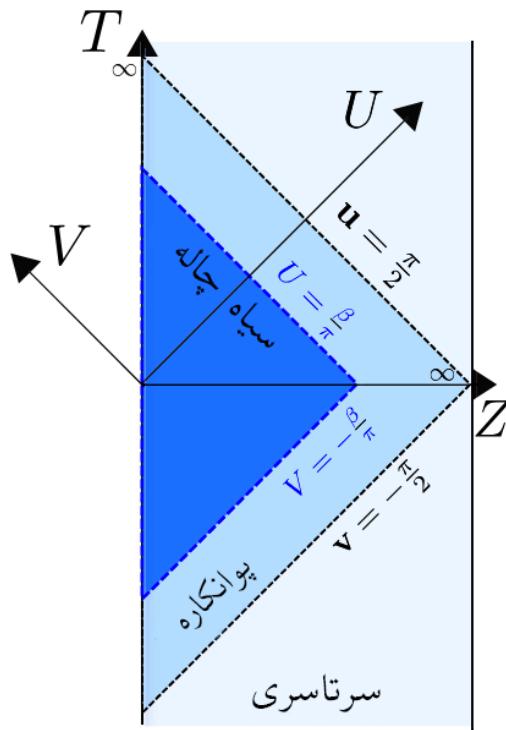
گروه طول‌پاي فضای پاددوسیته دوبعدی، گروه $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ است که با تبدیلات موبیوس رو مختصات

مخروط نوری عمل می‌کند.

$$(U, V) \longrightarrow \left(\frac{aU + b}{cU + d}, \frac{aV + b}{cV + d} \right) \quad (30-2-2)$$

در این مختصات، مرز روی $Z = 0$ است و افق آینده با حد $U \rightarrow +\infty$ و افق گذشته با حد $V \rightarrow -\infty$ مشخص می‌شوند.

برای مشاهده جزئیات بیشتر به شکل ۳-۲ نگاه کنید که این مفاهیم را روی نمودار پنروز خلاصه کرده است.



شکل ۳-۲: نمودار پنروز فضای پاددوسیته‌ی دوبعدی به همراه نواحی مختلفی که هر مختصات می‌پوشاند. (عکس از [۲] برداشته شده.)

۲. مختصات سرتاسری همانطور که از اسمش پیداست، این مختصات تمامی فضای پاددوسیته‌ی دوبعدی را می‌پوشاند. با تغییر متختصات

$$U(\mathbf{u}) = \tan(\mathbf{u}), \quad V(\mathbf{v}) = \tan(\mathbf{v}) \quad (31-2-2)$$

می‌توانیم به کل فضای پاددوسیته‌ی دوبعدی دسترسی پیدا کنیم. متریک هم به شکل زیر در می‌آید.

$$ds^2 = -\frac{4}{\sin^2(\mathbf{u} - \mathbf{v})} d\mathbf{u} d\mathbf{v} \quad (32-2-2)$$

با تعریف مختصه‌های سرتاسری زمان و مکان به شکل زیر

$$\begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(u + v) \\ z = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(u - v) \end{cases} \quad (33-2-2)$$

می‌بینیم که دو مرز برای این مختصات قابل مشاهده است.

۱. در $v = u$ یا در $z = 0$ ، که متریک آنجا تکین است.

۲. در $v = \pi$ یا در $z = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}$ یا در $u = v + \pi$

این مختصات، ناحیه‌ای نوارگونه است که تمامی ناحیه‌ی پوانکاره را شامل می‌شود. (شکل ۳-۲)

۳. مختصات سیاهچاله

با تغییر مختصات زیر

$$U(u) = \frac{\beta}{\pi} \tanh\left(\frac{\pi}{\beta}u\right), \quad V(v) = \frac{\beta}{\pi} \tanh\left(\frac{\pi}{\beta}v\right) \quad (34-2-2)$$

به مختصات سیاهچاله می‌رسیم که متریک آن به شکل زیر است.

$$ds^2 = -\frac{\pi^2}{\beta^2} \frac{4}{\sinh^4\left(\frac{\pi}{\beta}(u-v)\right)} dudv \quad (35-2-2)$$

ناحیه‌ای از فضای پاددوسیته‌ی دوبعدی که در این مختصه‌ها پوشانده می‌شود، قسمتی از ناحیه‌ی پوانکاره است، چرا که مطابق تبدیلات ۳۴-۲-۲، این مختصات ناحیه‌ی $U, V < \frac{\beta}{\pi}, V < U$ را می‌پوشاند.

افق‌های این هندسه در حد $\infty \rightarrow (u - v)$ قرار دارند، اما فاصله این افق متناهی است؛ چرا که $\int^{\infty} \frac{dz}{\sinh \frac{\pi}{\beta} z} < \infty$. همچنین، با تغییر مختصه‌ی ساعی $r = r_h \coth \frac{\pi \pi z}{\beta}$ (و $r_h = \frac{2\pi}{\beta}$) می‌توانیم به فرم آشنای سیاهچاله‌ی دوبعدی (۹-۲-۲) برسیم.

اما پارامتر β در تبدیلات ۳۴-۲-۲ یادآور معکوس دماس است؛ این انتخاب بی‌دلیل نبوده است، چرا که دمای سیاهچاله $T = \frac{r_h}{2\pi} = \beta^{-1}$ است.

جواب‌های میدان دیلاتونی

حالا کنش (۲۵-۲-۲) را نسبت به متريک وردهش می‌دهيم، حاصل معادلات حرکت میدان دیلاتونی است.

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \Phi + g_{\mu\nu} \Phi = -\Lambda \pi G_N T_{\mu\nu} \quad (36-2-2)$$

بدست آوردن معادلات میدان دیلاتونی

به اتحادهایی نیاز داریم که آن را از کتاب [۱۵] نقل می‌کنیم.

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (37-2-2)$$

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\rho\lambda} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu}) \quad (38-2-2)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \nabla_\mu (\delta \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha) \quad (39-2-2)$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\alpha (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla^\nu (\delta \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \nabla_\alpha (g^{\alpha\lambda}) (\nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu}) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla^\nu (g^{\alpha\lambda}) (\nabla_\alpha \delta g_{\nu\lambda} + \nabla_\nu \delta g_{\alpha\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\alpha\nu}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\nabla^\lambda \nabla^\nu \delta g_{\lambda\nu} + \nabla^\lambda \nabla^\mu \delta g_{\lambda\mu} - \nabla^\nu (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\nabla^\nu \nabla^\lambda \delta g_{\lambda\nu} - \nabla^\alpha \nabla^\nu \delta g_{\alpha\nu} + \nabla^\nu (g^{\alpha\lambda} \delta g_{\alpha\lambda}) \right) \\ &= -\nabla^\nu (g^{\rho\alpha} \delta g_{\alpha\nu}) + \nabla^\rho \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} = \nabla^\nu (\delta g_{\nu\rho} - g_{\nu\alpha} g_{\rho\delta} \delta g_{\alpha\delta}) \\ &= \nabla^\mu \nabla^\nu (\delta g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}) \\ &= \nabla_\mu \nabla_\nu (-\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (40-2-2)$$

در خط آخر اين رابطه، از خاصيت $\delta g_{\mu\nu} = -\delta g^{\mu\nu}$ بهره برهه ايم تا علامت‌ها را عوض کنیم.

$$\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}) = (G^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu})\sqrt{-g} \quad (41-2-2)$$

حالا، با کمک روابط بالا، وردش کنش را برحسب متريک حساب می‌کنیم تا معادله‌ی حرکت میدان ديلاتونی حاصل شود. توجه کنيد که برای شروع، از جمله‌ی توپولوژيك (که وردش آن صفر است) و همچنان جمله‌ی ماده صرف‌نظر می‌کنیم؛ بعد آنها را وارد می‌کنیم.

$$I_{JT} = -\frac{1}{16\pi G} \left[\int_M \sqrt{g} \Phi(R + 2) + 2 \int_{\partial M} \sqrt{h} \Phi_b K \right] \quad (42-2-2)$$

$$\delta I_{JT} \propto \int_M d^4x \Phi \left(\delta \sqrt{g}(R + 2) + \sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \sqrt{g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + 2\delta\sqrt{g} \right) \quad (43-2-2)$$

حالا از روابط ذکر شده جاگذاری می‌کنیم.

$$\int_M d^4x \left[\frac{1}{4} \sqrt{g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + \sqrt{g} (-\delta g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta + g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu) + \sqrt{g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right] \Phi \quad (44-2-2)$$

و تمامی جملات شامل $\delta g^{\alpha\beta}$ را جمع می‌کنیم تا به معادله‌ی حرکت برسیم.

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi - g_{\alpha\beta} \nabla^\gamma \Phi + g_{\alpha\beta} \Phi = 0 \quad (45-2-2)$$

با اضافه شدن ماده، تنها تغییر اضافه شدن تانسور انرژی-تکانه ماده در سمت راست معادله است.

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi - g_{\alpha\beta} \nabla^\gamma \Phi + g_{\alpha\beta} \Phi = -\Lambda \pi G_N T_{\alpha\beta}^{\text{matter}} \quad (46-2-2)$$

بازنویسی معادلات (۴۶-۲-۲) در پیمانه‌ی همدیس به این شکل است.

$$-e^{\gamma\omega} \partial_u (e^{-\gamma\omega} \partial_u \Phi) = \Lambda \pi G_N T_{uu}, \quad (\tilde{A}47-2-2)$$

$$-e^{\gamma\omega} \partial_v (e^{-\gamma\omega} \partial_v \Phi) = \Lambda \pi G_N T_{vv}, \quad (B47-2-2)$$

$$2\partial_u \partial_v \Phi + e^{\gamma\omega} \Phi = 16\pi G_N T_{uv} \quad (C47-2-2)$$

در اين معادلات $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه‌ی ماده هستند. توجه کنيد که تمامي پسواكنش‌های ماده روی

میدان دیلاتونی است نه روی هندسه .^{۱۱}

بیاید معادلات^(۴۷-۲-۲) را برای حالاتی خاص و قابل حل بررسی کنیم. اولین قدم، بررسی معادلات خلا است، یعنی $T_{uu} = T_{vv} = T_{uv} = 0$

کلی‌ترین جوابی که برای میدان دیلاتونی بدست می‌آید، اینطور است:

$$\Phi(u, v) = \frac{a + b(U + V) - \mu UV}{U - V} \quad (48-2-2)$$

که ثابت a, b, μ دلخواه هستند.^{۱۲}

۱. مشهودترین نکته این است که روی مرز تمام‌نگار $U = V = 0$ ، میدان دیلاتونی واگرا می‌شود.

۲. ثابت انتگرال‌گیری a بعد طول دارد و بعدا، هنگامی که شرایط مرزی را قرارداد می‌کنیم، بسیار مهم می‌شود.

۳. پارامتر μ بعد جرمی دارد و قرار است که بعدا معادل جرم سیاهچاله باشد.

۴. پارامتر b بدون بعد است و به کمک تبدیلات طول‌پا در مختصات پوانکاره^(۳۰-۲-۲)، می‌توانیم آن را حذف کنیم.

بررسی این گزاره

کافیست که تبدیلات^(۳۰-۲-۲) را در جوابهای^(۴۸-۲-۲) جاگذاری کنیم. خواهیم دید که جمله‌ی صورت که متناسب با $(U + V)$ باشد، ضریب $\mu ab + ad + bc$ است. با صفر کردن این ضریب (که تنها یکی از چهارثابت a, b, c, d را مقید می‌کند)، می‌توانیم بی‌تأثیر بودن ضریب b در فیزیک را ببینیم.

حالا سراغ حالت غیربدیهی می‌رویم. برای سادگی، فرض می‌کنیم که ماده یک نظریه میدان همدیس دوبعدی است (که برای بررسی تبخیر و تشکیل سیاهچاله‌ها، مناسب است [۱۶]). توجه کنید که به درنظر داشته باشید که این گفته با حد نیمه-کلاسیک تفاوت دارد؛ در حد نیمه-کلاسیک، میدان‌های ماده به شکل کوانتمی وارد نظریه می‌شوند و فقط گرانش کلاسیک می‌ماند.^{۱۱}

^{۱۲} توجه کنید که در این رابطه، ورودی‌های میدان دیلاتونی، توابعی از مختصات‌های متريک همدیس هستند؛ اما سمت راست بر حسب $U(v), V(u)$ نوشته شده است، یعنی همان تبدیلات مختصاتی که از پیمانه‌ی همدیس ما را به ناحیه‌ی پوانکاره می‌برند.

خاطر همدیس بودن این نظریه، $T_{uv} = 0$ است و مولفه‌های قطری دستیده هستند:

$$\begin{cases} T_{uu} = T_{uu}(u) \\ T_{vv} = T_{vv}(v) \end{cases} \quad (49-2-2)$$

جواب میدان دیلاتونی [۱۷] به شکل زیر است:

$$\Phi(u, v) = \frac{a}{U - V} \left(1 - \frac{\mu}{a} UV - \frac{\Lambda \pi G_N}{a} (I_+ + I_-) \right) \quad (50-2-2)$$

$$I_+(u, v) = \int_U^\infty ds (s - U)(s - V) T_{UU}(s), \quad (50-2-2)$$

$$I_-(u, v) = \int_{-\infty}^V ds (s - U)(s - V) T_{VV}(s) \quad (50-2-2)$$

در این معادلات، تانسور تنش به شکل عادی تبدیل می‌شود؛ یعنی $T_{VV}dV^u = T_{uu}du^u$ و $T_{UU}dU^u = T_{vv}dv^u$.

بررسی مثالی ساده

یک تپ انرژی با انرژی $E > 0$ که به درون ناحیه‌ی پوانکاره سقوط می‌کند؛ با تانسور تنش $T_{VV}(V) = E\delta(V)$ مدل می‌شود.

جایگذاری در معادله‌ی (۵۰-۲-۲-۲) و (۵۰-۲-۲-۲-۲) بی‌درنگ نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} I_+ = 0 \\ I_- = EUV\theta(V) \end{cases}$$

پس نمایه‌ی میدان دیلاتونی (معادله (۵۰-۲-۲)) به این شکل است:

$$\Phi = \frac{a - \Lambda \pi G_N EUV\theta(V)}{U - V}$$

مقایسه با (۴۸-۲-۲) تفسیر جالبی دارد: پس از عبور تپ انرژی، حالت خلا حاکم می‌شود. در این محدوده، پارامترها به شکل $\mu = \Lambda \pi G_N E$ با هم رابطه دارند.

بعدها که به سیاه‌چاله بر می‌گردیم، همین نمایه را در مختصات سیاه‌چاله برای دیلاتون داریم.

خوب است که همینجا تبدیلات را بیینیم:

$$\Phi = \frac{a - \mu U(u)V(v)}{U(u) - V(v)} = \sqrt{a\mu} \coth \left(2\sqrt{\frac{\mu}{a}} z \right) \quad (51-2-2)$$

۴-۲-۲ شرایط مرزی در گرانش JT

اهمیت تعیین شرایط مرزی

مثال قبلی برایمان وضعیت و شرایط نظریه را روشن‌تر می‌کند و اهمیت شرایط مرزی را برجسته‌تر می‌کند.

میدان دیلاتونی (با انتخاب $a = 0$ در پس‌زمینه خالی پاددوسیته) متعدد با صفر است. حالا مطابق

مثال بالا، یک تپ انرژی به سامانه تزریق می‌کنیم و این باعث می‌شود میدان Φ روی مرز نامتناهی شود

۱۳

راه حل این است که میدان دیلاتونی از اول صفر نباشد و همواره مقدار پس‌زمینه‌ی Φ را داشته باشد، به گونه‌ای که روی مرز همواره واگرا شود. در ادامه می‌بینیم که این شرایط مرزی چطور تفسیر می‌شود.

نکته‌ی مهم دیگر ارتباط میدان دیلاتونی و آنتروپی است. در [۱۸، ۱۹] مشاهده شده که کمیت‌هایی که در (۴-۲-۵۰) مشخص شده‌اند، چیزی به جز هامیلتونی خشتی یک نظریه میدان همدیس دو بعدی در بازه‌ی (U, V) نیستند؛ پس نتیجه‌گیری این است که میدان دیلاتونی به عنوان کمیتی کمکی در محاسبه‌ی آنتروپی میدان‌های همدیس پدیدار می‌شود.

شرایط مرزی متعارف گرانش JT

برای اینکه بتوانیم پیشروی کنیم، نیاز است که شرایط مرزی روی $z = 0$ را معین کنیم. در اینجا ما رهیافت [۲۰] را دنبال می‌کنیم و روش هندسی بیان شده در [۲۱] را هم بررسی می‌کنیم.

دو شرط مرزی انتخاب می‌کنیم که آزادی ما در تغییر مختصات اعمال شده در مرز را محدود می‌کند:

۱. هندسه مجانباً پاددوسیته است.

تقاضا می‌کنیم که متریک در پیمانه ففرمن-گرام در مرتبه‌ی اول به شکل زیر باشد:

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + dz^2}{z^2} + (z \rightarrow 0). \quad (52-2-2)$$

این انتخاب، تبدیلات مختصات این نظریه را به شکل زیر مقید می‌کند.

۱۳ این جواب فراری روی مرز، استدلال حد و احتیاجتیگی برای دوگانی AdS/CFT را خراب می‌کند و یکی از نشانه‌هایی است که به ما یادآوری می‌کند که دوگانی AdS₂/CFT به راحتی سایر تناظرهای AdS/CFT در ابعاد بالاتر، قابل تفسیر و کارکردن نیست.

یک تبدیل مختصات (کاملاً دلخواه و غیردستیده) به شکل $(U(u, v), V(u, v))$ انتخاب می‌کنیم. تبدیل پیمانه‌ای متریک باید به شرط بالا احترام بگذارد. اول، تبدیل یافته‌ی متریک را ببینیم:

$$ds^2 \Big|_{\text{Poincare}} \longrightarrow \frac{-4(\partial_u U du + \partial_v U dv)(\partial_u V du + \partial_v V dv)}{(U(u, v) - V(u, v))^2}$$

برای حفظ کردن فرم مجانبی (۵۲-۲-۲)، بایستی که در مرتبه‌ی اول $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \partial_u V &= 0 = \partial_v U \\ U(u, v) &= V(u, v) \end{aligned} \tag{۵۳-۲-۲}$$

رابطه‌ی اول (۵۳-۲-۲)، دستسان بودن این توابع تبدیل مختصات (در حد $z \rightarrow 0$) را نتیجه می‌دهد و دومی برابری این دوتابع در حد مذکور.

بازنویسی این مختصه‌ها در مولفه‌های زمانی و شعاعی جدید به شکل $U \equiv F + Z$ و $V \equiv F - Z$ انجام می‌شود؛ در این مختصات‌ها، شرایط مرزی شکل ساده‌ی زیر را می‌گیرند.

$$F(t) \equiv \frac{1}{\epsilon}(U(t + \epsilon) + V(t - \epsilon)) = U(t) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{۵۴-۲-۲}$$

$$Z(t) \equiv \frac{1}{\epsilon}(U(t + \epsilon) - V(t - \epsilon)) = \epsilon F'(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{۵۴-۲-۲ ب}$$

که ϵ یک برش نزدیک مرکز تمام‌نگار است. $\epsilon \approx z$ مرز نظریه را از $z = 0$ به یک مقدار متناهی می‌برد.

در مختصه‌های پوانکاره، این شرط مرزی منجر به تعریف یک مسیر برای مرز می‌شود که خم در مختصات پوانکاره با مولفه‌های $(T = F(t), Z = \epsilon F'(t))$ مشخص می‌شود.

۲. رفتار مجانبی میدان دیلاتونی

همانطور که بحث کردیم، میدان دیلاتونی لاجرم باید در مرز تمام‌نگار واگرا باشد. برای میدان دیلاتونی در مرز، شرایط مجانبی زیر را تقاضا می‌کنیم.

$$\Phi = \frac{a}{2z} + (z \rightarrow 0). \tag{۵۵-۲-۲}$$

که پارامتر بعددار a ، مدلی را که بررسی می‌کنیم مشخص می‌کند. حالا چون در شرط مرزی قبلی، مرز ما از $z = 0$ به مرز منحرف شده شده تبدیل شد، این شرط مرزی را روی مرز جدید تقاضا می‌کنیم. با

جایگذاری این شرط در کلی‌ترین جواب میدان دیلاتون (۲-۵۰-آ)، به معادله‌ی دیفرانسیل-انتگرالی زیر برای $F(t)$ منجر می‌شود:

$$(56-2-2) \quad F'(t) = 1 - \frac{\Lambda\pi G_N}{a} \left(\int_{F(t)}^{\infty} ds(s - F(t))^{\gamma} T_{UU}(s) + \int_{-\infty}^{F(t)} ds(s - F(t))^{\gamma} T_{VV}(s) \right)$$

که در بالا، $\mu = 0$ قرار داده شده است؛ چرا که با کوچکترین تپ انرژی، این پارامتر خود وارد مسئله می‌شود. (همانطور که در مثالی ساده دیدیم)

بدست آوردن این شرط مرزی

کافی است مولفه‌های X مرزی را در جواب میدان (۲-۵۰-آ) جاگذاری کنیم و تقاضا کنیم که فرم مجانبی‌اش مثل (۵۵-۲-۲) شود.

$$\underbrace{\Phi(u, v)}_{\frac{a}{2z} \approx \frac{a}{2\epsilon}} = \frac{a}{U - V} \left(1 - \frac{\mu}{a} \cancel{UV} - \frac{\Lambda\pi G_N}{a} (I_+ + I_-) \right)$$

توجه کنید که باید کمیت‌های $V - U$ و I_+ و I_- را هم بر حسب X مرز بنویسیم.

در مرتبه‌ی صفرم ϵ هردو مختصات U, V همان $F(t)$ می‌شوند؛ چرا که مختصه‌ی Z در پارامتر ϵ مرتبه اولی است. اما $V - U$ مرتبه‌ی صفرم ندارد و مرتبه‌ی اولش مطابق روابط تبدیل مخروط نوری به شکل $(U - V = Z = \epsilon F'(t))$ داریم:

$$I_+ = \int_{F(t)}^{\infty} ds(s - F(t))^{\gamma} T_{UU}(s)$$

$$I_- = \int_{-\infty}^{F(t)} ds(s - F(t))^{\gamma} T_{VV}(s).$$

با جایگذاری در معادله اولیه و صرفاً جایه‌جا کردن $F'(t)$ به معادله دیفرانسیل-انتگرالی (۵۶-۲-۲) می‌رسیم.

اما این معادله که برایمان X مرزی را مشخص می‌کند، بسیار پیچیده است. در ادامه راهی پیدا می‌کنیم تا این رابطه را به چشم پایستگی انرژی-تکانه نگاه کنیم. اما حالا بباید بینم چه چیزهای جدیدی از این معادله فهمیده می‌شود.

۱. این معادله، یک دستگاه مختصات مرجح $F(t)$ را برایمان برمی‌گزیند؛ اما تقارن‌های مرز قرار

است گروه همدیس^{۱۴} یک بعدی یا بازپرمایش‌های مختصه‌ی زمانی باشند. بنابراین، در چارچوب دوگانی^{۱۵} AdS_۲/CFT_۱، تقارن‌های همدیس شکسته می‌شوند^{۱۶}.

۲. این معادله به تنش‌های تفسیر_۱ AdS_۲/CFT_۱ پایان می‌دهد؛ شکل درست نگاه کردن به این تناظر NAdS_۲/NCFT_۱ است. یعنی گرانش کوانتمی در فضای تقریباً پاددوسیته‌ی دوبعدی^{۱۵} با یک نظریه تقریباً همدیس^{۱۶} معادل است.

ادامه‌ی مثال ۳-۲-۲

حالا بباید معادله‌ی فوق را برای مثال ۳-۲-۲ حل کنیم.
به خاطر ظاهر تناسور تنش این نظریه، می‌توانیم ببینیم که برای $0 < F$ هر دوی I_{\pm} صفرند و معادله به شکل $1 = F'$ بازنویسی می‌شود.
اما برای $0 > F$ داریم.

$$I_- = \int_{-\infty}^{F(t)} ds (s - F(t))^\gamma \underbrace{T_{VV}(s)}_{E\delta(s)} = EF^\gamma(t)$$

بنابراین، معادله به شکل

$$F > 0 \longrightarrow F' = 1 - \frac{\mu}{a} F^\gamma$$

تبدیل می‌شود.

جواب‌های این معادله به شکل زیر است:

$$\begin{cases} t < 0 \rightarrow \begin{cases} F(t) = t \\ Z(t) = \epsilon F'(t) = \epsilon \end{cases} \\ t > 0 \rightarrow \begin{cases} F(t) = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \tanh(\sqrt{\frac{\mu}{a}} t) \\ Z(t) = \epsilon F'(t) = \frac{\epsilon}{\cosh^2(\sqrt{\frac{\mu}{a}} t)} \end{cases} \end{cases} \quad (57-2-2)$$

با کمی دقت می‌فهمیم این همان تبدیل مختصات سیاهچاله است که قبلاً بحث کردیم؛ با این شرط که $\sqrt{\frac{\mu}{a}} = \frac{\pi}{\beta}$

^{۱۴} البته همچنان تقارن‌های باقی‌مانده‌ای هستند که تبدیلات PSL(۲, ℝ) روی $F(t)$ هستند: $F(t) \rightarrow \frac{aF(t)+b}{cF(t)+d}$

^{۱۵} به خاطر محدود شدن تقارن‌های فضا و نوع ماده‌ی به کار رفته در نظریه

^{۱۶} چون قسمتی از تقارن همدیس شکسته شده و فقط یک زیرگروه از آن همچنان تقارن نظریه است.

بازنویسی شرایط مرزی با تانسور تنش تمام‌نگار

برای ساده‌تر کردن شرط (۵۶-۲-۲) نیاز داریم با کمیتی جدید آشنا بشویم. تانسور تنش تمام‌نگار که در [۲۲، ۲۳، ۲۴] معرفی و بحث شده. اینجا وارد جزئیات نمی‌شویم، اما تانسور تنش تمام‌نگار تفسیر انرژی تزریق شده به سامانه در زمان t را دارد. در نظریه‌های $+0$ -بعدی، این کمیت با مشتق شوارتزی نوشته می‌شود.

$$E(t) = -\frac{a}{16\pi G_N} \{F, t\}, \quad \{F, t\} = \frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 \quad (58-2-2)$$

ضریب $\frac{16\pi G_N}{a}$ که مکررا ظاهر می‌شود، جفتیدگی گرانشی است. چون این ضریب بعد جرمی دارد، پس نظریه فرابازبینجاش‌پذیر است. از این به بعد $C \equiv \frac{a}{16\pi G_N}$ قرارداد می‌کنیم.

حالا برویم سراغ ساده کردن معادله (۵۶-۲-۲). با مجهز بودن به تعریف تانسور تنش تمام‌نگار، کافی است کمی با معادله (۵۶-۲-۲) دستوری کنیم تا بتوانیم به صورت ساده‌ی زیر بررسیم:

$$\frac{dE(t)}{dt} = (T_{VV}(t) - T_{UU}(t)) F' \Big|_{\partial\mathcal{M}} = (T_{vv}(t) - T_{uu}(t)) \Big|_{\partial\mathcal{M}} \quad (59-2-2)$$

محاسبات رابطه‌ی پیشین

این اعمال را به ترتیب دنبال می‌کنیم: مشتق - تقسیم به F' - مشتق - تقسیم به F' - مشتق - ضرب در F' .

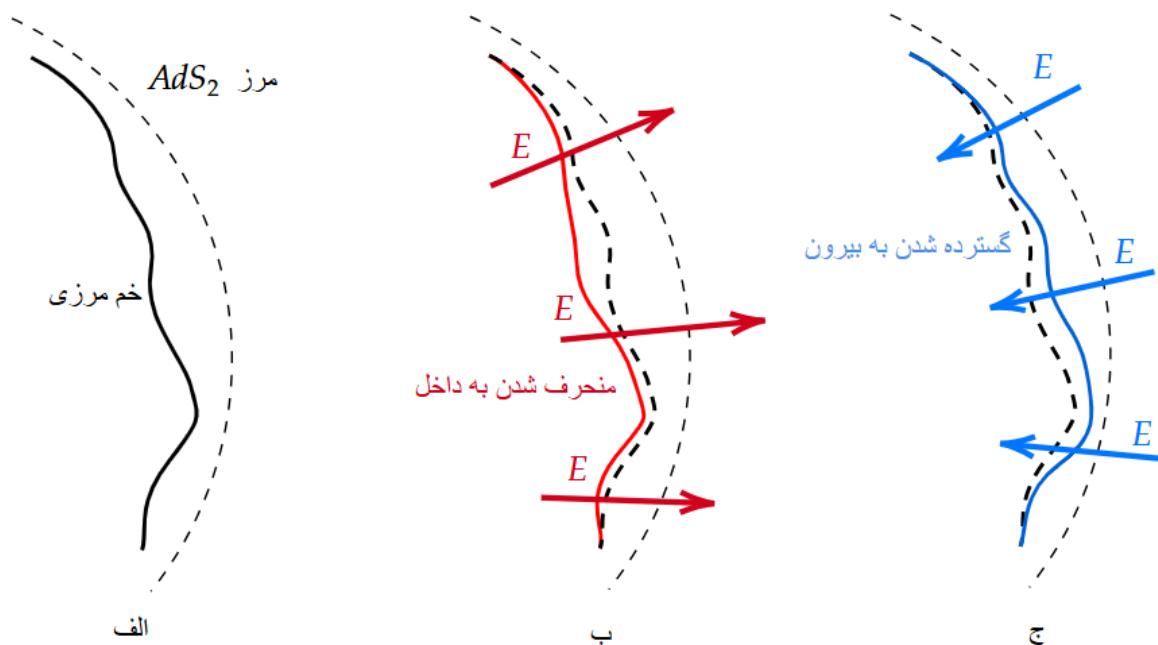
$$\begin{aligned} F'(t) &= 1 - \frac{\lambda\pi G_N}{a} \left(\int_{F(t)}^{\infty} ds(s - F(t))^4 T_{UU}(s) + \int_{-\infty}^{F(t)} ds(s - F(t))^4 T_{VV}(s) \right) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \\ F''(t) &= \frac{16\pi G_N}{a} \left(\int_{F(t)}^{\infty} ds \textcolor{red}{F'(t)}(s - F(t)) T_{UU}(s) + \int_{-\infty}^{F(t)} ds \textcolor{red}{F'(t)}(s - F(t)) T_{VV}(s) \right) \\ \frac{F''}{F'} &= \frac{16\pi G_N}{a} \left(\int_{F(t)}^{\infty} ds(s - F(t)) T_{UU}(s) + \int_{-\infty}^{F(t)} ds(s - F(t)) T_{VV}(s) \right) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \\ \left(\frac{F''}{F'} \right)' &= -\frac{16\pi G_N}{a} \left(\int_{F(t)}^{\infty} ds \textcolor{red}{F'(t)} T_{UU}(s) + \int_{-\infty}^{F(t)} ds \textcolor{red}{F'(t)} T_{VV}(s) \right) \\ \frac{1}{F'} \left(\frac{F''}{F'} \right)' &= -\frac{16\pi G_N}{a} \left(\int_{F(t)}^{\infty} ds T_{UU}(s) + \int_{-\infty}^{F(t)} ds T_{VV}(s) \right) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \\ \left(\frac{1}{F'} \left(\frac{F''}{F'} \right)' \right)' &= (T_{VV}(t) - T_{UU}(t)) F'(t) \\ F' \left(\frac{1}{F'} \left(\frac{F''}{F'} \right)' \right)' &= (T_{VV}(t) - T_{UU}(t)) F'^2(t) \end{aligned}$$

اما به راحتی می‌توان دید که سمت چپ، $F' \left(\frac{1}{F'} \left(\frac{F''}{F'} \right)' \right)'$ چیزی به جز $\{F, t\}$ نیست.

بنابراین با استفاده از رابطه تانسور تنش هولوگرافیک (۵۸-۲-۲) به رابطه ۵۹-۲-۲ می‌رسیم.

■

پس معادله‌ای که چارچوب $F(t)$ را مشخص می‌کند، چیزی به جز بقای انرژی نیست. یعنی خم مرزی ($F(t), \epsilon F'(t)$) به تزریق انرژی در سامانه واکنش نشان می‌دهد: با تزریق انرژی مثبت، خم به سمت مرز تمام‌نگار نزدیک‌تر می‌شود و با کاستن انرژی (تزریق منفی) خم از مرز تمام‌نگار دور می‌شود. (شکل ۴-۲) به علاوه، این رابطه به سادگی قابل تعمیم به ماده‌ی غیرهمدیس (یعنی کنش ماده‌ی غیر همدیس)



شکل ۴-۲: اثر تزریق انرژی به گرانش کوانتومی دو بعدی: (a) در حالت اولیه (b) با خروج انرژی از سامانه، خم مرزی به داخل جمع می‌شود. (c) با تزریق انرژی، خم مرزی به سمت مرز تمام‌نگار متمایل می‌شود. (عکس از [۲] برداشته شده.)
است.

۴-۲-۵ ارتباط بین آنتروپی و میدان دیلاتونی

این ارتباط را قبلاً با ارجاع به آنتروپی نظریه میدان همدیس دوبعدی بررسی کرده بودیم. حالا با یک مثال ساده، این ارتباط را بهتر درک می‌کنیم. خم مرزی مختصات سیاه‌چاله‌ی پاددوسیته دوبعدی،

(۵۷-۲-۲) را به خاطر آورید. با قراردادن در رابطه تانسور تنش تمام‌نگار (۵۸-۲-۲) بدست می‌آوریم که $E(t) = \frac{\mu}{\lambda\pi G_N}$. از اینجا با کمک روابط ترمودینامیکی دما را می‌خوانیم.

$$T = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{E}{2C}} \longrightarrow E(T) = 2\pi^2 C T^2 \quad (60-2-2)$$

و با رابطه $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$ و با قراردادن S . به عنوان آنتروپی در دمای صفر، بدست می‌آید:

$$S = S_0 + \frac{\sqrt{a\mu}}{4G_N} \quad (61-2-2)$$

اگر آنتروپی را بر حسب دما بنویسیم:

$$S(T) = S_0 + 4\pi^2 C T \quad (62-2-2)$$

از طرف دیگر، رابطه‌ی بکنشتاین-هاوکینگ برای آنتروپی را نگاه کنیم. این رابطه، $S_{BH} = A/4G_N$ نیاز به اصلاح دارد. در دو بعد فضا-زمانی، مساحت افق یا ۱ است یا ۲. (بسته به این که افق تک یا جفت داشته باشیم). همچنین در مدل دیلاتونی، همانطور که در (۲-۱-۵) دیدیم، ثابت گرانشی موثر به میدان دیلاتونی ارتباط دارد. با اضافه کردن مقدار زمینه‌ی میدان دیلاتونی، رابطه آنتروپی به این شکل نوشته می‌شود.

$$S_{BH} = \frac{\Phi_0 + \Phi_h}{4G_N} \quad (63-2-2)$$

حال نمایه‌ی میدان دیلاتونی در مختصات سیاه‌چاله (۵۱-۲-۲) را نگاه کنید. در افق سیاه‌چاله $\rightarrow z$ مقدار آن $\Phi_h = \sqrt{a\mu}$ است. می‌بینیم که آنتروپی حاصل شده با این روش، در توافق کامل با (۶۱-۲-۲) است، که از روابط ترمودینامیکی بدست آمده.

حتی بهتر، می‌توانیم ببینیم که آنتروپی در دو بعد از تعمیم رابطه ریو-تاکایاناگی [۲۵] بدست آمده.

$$S = \min_z \frac{\Phi_0 + \Phi(z)}{4G_N}$$

که کمینه این تابع در افق سیاه‌چاله حاصل می‌شود.

۶-۲-۲ دینامیک خم مرزی JT

کنش شوارتزی

معادله‌ی دینامیک خم مرزی (۵۹-۲-۲) در غیاب ماده به معادله شوارتزی تبدیل می‌شود.

$$\frac{d}{dt}\{F, t\} = 0 \quad (64-2-2)$$

این معادله را می‌توانیم از یک کنش هم استخراج کنیم؛ یعنی کنش شوارتزی.

$$S = -C \int dt\{F, t\} \quad (65-2-2)$$

این کنش، مشتق مرتبه‌سوم در خود دارد، به همین دلیل کار کردن با آن کمی با کنش‌های معمول تفاوت دارد. برای رسیدن به معادله‌ی حرکت باید وردش $F \rightarrow F + \delta F$ را روش کنش اعمال کنیم و تغییرات مرتبه اول کنش نسبت δF را پیدا کنیم. به کمک رابطه‌ی $\int dt\delta\{F, t\} = -\int dt\frac{\{F, t\}'}{F'}\delta F$ به سادگی می‌توانیم به معادله‌ی حرکت برسیم.

بررسی این گزاره

بیایید وردش کنش شوارتزی را حساب کنیم و رابطه‌ی پیشین را نشان دهیم.

$$\begin{aligned} \{F + \delta F, t\} &= \frac{(F + \delta F)'''}{(F + \delta F)'} - \frac{3}{2} \left(\frac{(F + \delta F)''}{(F + \delta F)'} \right)^2 \\ &= \frac{F'''}{F'} \left(1 + \frac{\delta F'''}{F'''} \right) \left(1 - \frac{\delta F'}{F'} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 \left(1 + \frac{\delta F''}{F''} \right)^2 \left(1 + \frac{\delta F'}{F'} \right)^{-2} \\ &= \{F, t\} + \frac{\delta F'''}{F'} - \frac{F'''\delta F'}{(F')^2} - \frac{3}{2} \frac{F''\delta F''}{(F')^2} + \frac{3}{2} \frac{(F'')^2\delta F'}{(F')^3} + \mathcal{O}(\delta^4) \end{aligned}$$

این جملات در کنش قرار می‌گیرند؛ پس جملات را با انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توانیم ساده می‌کنیم. جمله‌ی اول نیاز به سه بار انتگرال‌گیری نتیجه می‌دهد ^a :

$$\begin{aligned} \int dt \frac{\delta F'''}{F'} &= - \int dt \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{1}{F'} \right) \delta F \\ &= - \int dt \delta F \left(\frac{-6(F'')^2}{(F')^4} + \frac{6F''F'''}{(F')^3} - \frac{F^{(4)}}{(F')^2} \right) \end{aligned}$$

جمله‌ی دوم هم

$$\begin{aligned} - \int dt \frac{F''' \delta F'}{(F')^2} &= \int dt \delta F \frac{d}{dt} \left(\frac{F'''}{(F')^2} \right) \\ &= \int dt \delta F \left(\frac{F^{(4)}}{(F')^2} - \frac{2F'' F'''}{(F')^3} \right) \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری متوالی، جمله‌ی سوم بدست می‌آید.

$$-3 \int dt \delta F \left(\frac{F^{(4)}}{(F')^2} - \frac{4F'' F'''}{(F')^3} + \frac{6(F'')^3}{(F')^4} \right)$$

و جمله‌ی چهارم

$$-3 \int dt \delta F \left(\frac{2F'' F'''}{(F')^3} - \frac{3(F'')^3}{(F')^4} \right)$$

با جمع کردن همه‌ی این مشتقات، بدست می‌آوریم:

$$\int dt \delta \{F, t\} = \int dt \left[-\frac{F^{(4)}}{(F')^2} + \frac{4F'' F'''}{(F')^3} - \frac{3(F'')^3}{(F')^4} \right] \quad (66-2-2)$$

از طرف دیگر، با محاسبات سرراست بدست می‌آوریم:

$$\frac{\{F, t\}'}{F'} = \frac{F^{(4)}}{(F')^2} - \frac{4F'' F'''}{(F')^3} + \frac{3(F'')^3}{(F')^4}$$

$$\cdot \int dt \delta \{F, t\} = - \int dt \frac{\{F, t\}'}{F'} \delta F$$

^a توجه کنید که جملات مرزی صفر هستند، چون در دو انتهای مسیر مقدار F و تمامی مشتقاتش صفرند.

حالا جفت‌کردن کنش به ماده آسان است؛ تنها کافی است لاغرانژی ماده $\mathcal{L}_m(\phi, \partial_F \phi)$ را به شکل کمینه به کنش شوارتزی جفت کنیم. کنش لورنتزی نظریه‌ی شوارتزی جفت‌شده به ماده را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم.

$$\begin{aligned} S &= -C \int dt \{F, t\} + \int dF dZ \mathcal{L}_m(\phi, \partial_F \phi) \\ &= -C \int dt \{F, t\} + \int dt dZ F' \mathcal{L}_m(\phi, \frac{1}{F'} \partial_t \phi) \end{aligned} \quad (67-2-2)$$

در خط دوم، وابستگی لاغرانژی ماده به به F را تاحدی مشخص کردہ‌ایم. حالا اگر این کنش را نسبت به F وردش دهیم، به معادله‌ی پایین می‌رسیم.

$$\delta S = \int dt \left[C \frac{\{F, t\}'}{F'} \delta F - \int dZ \left(\partial_F \phi \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \partial_F \phi} - \mathcal{L}_m \right) \delta F' \right] \quad (68-2-2)$$

اما پرانتر دوم چیزی به جز هامیلتونی ماده نیست. یعنی

بررسی این معادله حرکت

به کمک گزاره‌ای که در جعبه‌ی قبلی بدست آمد، می‌توانیم وردش کنش را بنویسیم.

(۶۹-۲-۲)

$$\begin{aligned}\delta S &= -C \int dt \delta\{F, t\} + \int dt dZ \delta\left(F' \mathcal{L}_m(\Phi, \partial_t \Phi / F')\right) \\ &= -C \int dt \frac{\{F, t\}'}{F'} \delta F + \int dt dZ \delta F' \mathcal{L}_m + \int dt dZ \underbrace{F' \partial_t \Phi}_{\partial_F \Phi} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial (\partial_F \Phi)} \delta F'\end{aligned}$$

که دقیقاً همان رابطه‌ی (۶۸-۲-۲) است.

بنابراین معادلات حرکت در حضور ماده به شکل

$$-C\{F, t\}' = F'^* \frac{dH_m}{dF}, H_m = \int dZ \mathcal{H}_m \quad (70-2-2)$$

این معادله‌ی حرکت هم تفسیری برحسب بقای انرژی دارد؛ کمیت سمت راست، تغییر در انرژی ماده است، به خاطر پایستگی انرژی، این کمیت باید متناسب با تانسور تنش تمام‌نگار باشد، از طرفی در معادله‌ی (۵۹-۲-۲) دیدیم که تانسور تنش با مشتق‌گیری از مشتق شوارتزی F بدست می‌آید. حالا برای آشنایی بیشتر با این کنش، بهتر است ابتدا کمی در مورد خواص مشتق شوارتزی بدانیم.

مشتق شوارتزی و خواصش

۱. با محاسبات مستقیم و حدگیری با کمک قاعده هوپیتل، می‌توانیم نشان دهیم که

$$\frac{1}{\epsilon} \{F, t\} = \lim_{t' \rightarrow t} \left(\frac{F'(t') F'(t)}{(F(t') - F(t))^2} - \frac{1}{(t' - t)^2} \right) \quad (71-2-2)$$

۲. قاعده‌ی زنجیره‌ای به شکل زیر برای مشتق شوارتزی برقرار است.

$$\{F(G(t)), t\} = \{G(t), t\} + G'(t)^* \{F(G), G\}(t) \quad (72-2-2)$$

که با محاسبات ساده از روی عبارت مشتق شوارتزی قابل استدلال است.

۳. به سادگی می‌توان دید که مشتق شوارتزی $\text{PSL}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ناوردادست؛ یعنی با تبدیل

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

۴. جواب معادله‌ی $\{F, t\} = 0$ به شکل زیر است.

$$F(t) = \frac{at + b}{ct + d} \quad (73-2-2)$$

برای این که مطمئن باشیم تنها جواب‌های شوارتزی همین‌ها هستند کافی است دقت کنیم که معادله‌ی شوارتزی معادله‌ی دیفرانسیل درجه سه است و حداکثر سه جواب مستقل خطی دارد. از طرفی جواب پیشنهادی در معادله صدق می‌کند و دقیقاً سه پارامتر آزاد دارد.

۵. بر عکس، اگر دو تابع F و G در معادله‌ی شوارتزی صدق کنند؛ این دو تابع حداکثر در یک تبدیل موبیوس با هم تفاوت دارند^{۱۷}؛ یعنی $F = \frac{aG+b}{cG+d}$.

تقارن‌های کنش شوارتزی

پس با کمک قسمت قبلی، می‌توانیم جواب‌های معادله‌ی (۶۵-۲-۲) را بدست آوریم.

توجه کنید که کنش شوارتزی (۶۵-۲-۲) تقارن پیوسته و سرتاسری (\mathbb{R}, \mathbb{R}) دارد؛ پس متناظر با هر تقارن، باید بار پایسته‌ای داشته باشد.

$$\begin{aligned} Q_- &= C \left[\frac{F'''}{F'^2} - \frac{F''^2}{F'^3} \right] \\ Q_0 &= C \left[\frac{F'''F}{F'^2} - \frac{FF''^2}{F'^3} - \frac{F''}{F'} \right] \\ Q_+ &= C \left[\frac{F'''F^2}{F'^2} - \frac{F^2F''^2}{F'^3} - \frac{2FF''}{F'} + \frac{2F'}{F} \right] \end{aligned} \quad (74-2-2)$$

که بار $-Q_-$ مربوط به زیرگروه تولید شده با پارامتر b است. بار Q_0 مربوط به زیرگروه تولید شده با است و بار Q_+ از زیرگروه تولیدی با پارامتر c بدست می‌آید. a, d

جريان و بار نوتری کنش شوارتزی

همانطور که می‌دانیم، کنش شوارتزی، تبدیلی پیوسته و سرتاسری با سه پارامتر دارد؛ یعنی پارامترهای گروه تقارنی (\mathbb{R}, \mathbb{R}) .

قضیه‌ی نوتر، برای تبدیل $\phi + \delta\phi \rightarrow \phi$ ، جريان نوتری J^μ با رابطه‌ی زیر داده می‌شود؛ توجه کنید

^{۱۷} توجه دارید که مشتق شوارتزی خطی نیست.

که وقتی کنش به مشتقات مرتبه بالاتر میدان ربط داشته باشد، قضیه نوتر جملات اصلاحی می‌گیرد.

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\phi)}\partial_\nu(\delta\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho)}\partial_\nu\partial_\rho(\delta\phi) - K^\mu, \quad (75-2-2)$$

که K^μ یک جمله‌ی مشتق کامل است که در وردش لاگرانژی بدست آمده؛ به شکل زیر:

$$K^\mu = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) + \partial_\nu\partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\lambda\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right). \quad (76-2-2)$$

حالا زیرگروه تولید شده با انتقال F را در نظر بگیرید.

$$F \rightarrow F + \delta F : \quad \delta F = b \quad (77-2-2)$$

برای $-K$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} K_- &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\{F, t\}}{\partial(F'')} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{F'''}{(F')^2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{F'} \right) \\ &= \frac{\Delta(F'')^2}{(F')^3} - \frac{4F^{(3)}}{(F')^2} \end{aligned} \quad (78-2-2)$$

همچنین داریم:

$$J_- = \frac{\partial\{F, t\}}{\partial F'} - K_- = \frac{3(F'')^2}{(F')^3} - \frac{F'''}{(F')^2} - K_- = \frac{3F'''}{(F')^2} - \frac{5(F'')^2}{(F')^3} \quad (79-2-2)$$

این عبارت، جریان پایستار است که با انتگرال‌گیری، بار پایستار $-Q$ در (74-2-2) را بدست می‌دهد.

باید تقارن مقیاس را هم نگاه کنیم:

$$F \rightarrow (1 + \epsilon)F \quad \rightarrow \quad \delta F = \epsilon F \quad (80-2-2)$$

$$\begin{aligned} K_{\cdot} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \{F, t\}}{\partial F''} F \right) + \frac{d^{\star}}{dt^{\star}} \left(\frac{\partial \{F, t\}}{\partial F'''} F \right) \\ &= - \frac{2F'(t)^{\star} F''(t) + F(t) F^{(\star)}(t) F'(t) - 3F(t) F''(t)^{\star}}{F'(t)^{\star}} \end{aligned} \quad (81-2-2)$$

$$J_{\cdot} = \frac{\partial \{F, t\}}{\partial F'} F + \frac{\partial \{F, t\}}{\partial F''} F' + \frac{\partial \{F, t\}}{\partial F'''} F'' - K_{\cdot} \quad (82-2-2)$$

این محاسبات را می‌توانیم به شکل نمادین در متمتیکا انجام بدهیم و با انتگرال‌گیری روی dt به بار پایسته‌ی Q . در (74-2-2) بررسیم.

می‌توان بررسی کرد که بارهای بدست آمده با عملگر مشتق شوارتزی، تشکیل یک جبر لی $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ می‌دهند و هامیلتونی کنش شوارتزی، کسیمیر این جبر است.

$$H \equiv -C\{F, t\} = \frac{1}{2C} \left[Q_{\cdot}^{\star} - \frac{1}{2} \{Q_+, Q_-\} \right] \quad (83-2-2)$$

خود هامیلتونی، بار نوتر مربوط به انتقال در زمان $t \rightarrow t + c$ است.

به عنوان نکات پایانی، توجه کنیم که در تفسیر گرانشی کنش شوارتزی، تمامی F ‌هایی که با تبدیل موبیوس $(H = PSL(2, \mathbb{R}))$ به هم تبدیل می‌شوند، باید پیکربندی‌های معادل در نظر گرفته شوند. اگر فضای توابعی را که F از آن انتخاب می‌شوند، G بنامیم^{۱۸}؛ انتگرال مسیر روی فضای G/H گرفته می‌شود.

برای اولین بار (به زبان شکست تقارنی)، کنش شوارتزی در مدل SYK مطرح شد. این مدل در انرژی‌های پایین یک تقارن بازپرمایش خودبُخودی دارد و کنش این مدل در انرژی‌های پایین به مدل شوارتزی تبدیل می‌شود (در ضمیمه‌ی پ به بررسی این مدل و ارتباطش با گرانش دوبعدی JT پرداختیم.).

استخراج کنش شوارتزی به شکل هندسی

راه سریعتری برای بدست آوردن کنش شوارتزی (65-2-2) هست که ذاتاً هندسی‌تر است و در سطح کنش انجام می‌پذیرد. با شروع از کنش اقلیدسی گرانش JT، اول کنش را نسبت به

^{۱۸} در حقیقت این فضا، فضای تمامی وابسازی‌های دایره است که با $\text{Diff}(S^1)$ نشان می‌دهیم.

میدان دیلاتونی وردش می‌دهیم و به $R = -2$ می‌رسیم. همانطور که دیدیم جواب‌های این معادله فقط ناحیه‌هایی از فضای پاددوسیته‌ی دوبعدی هستند که مجهرز به متريک پوانکاره هستند.

حالا تمامی ديناميک مدل به جمله‌ی مرزی انتقال پیدا می‌کند که روی خم مرزی تعریف شده است. می‌توانیم این خم مرزی که فاصله‌ی اندکی با مرز تمام‌نگار دارد، با برش دادن ناحیه‌ی پوانکاره بدست آوریم. (شکل ۵-۲)



شکل ۲-۵: برش نیم صفحه بالایی پوانکاره $Z^+ > 0$ ، برای مشخص کردن خم مرزی. (عکس از [۲] برداشته شده.)

خم مرزی را با متغیر τ پرمایش می‌کنیم، ($T = F(\tau), Z(\tau)$). حالا دترمینان متريک القايی روی اين خم را قيد می‌کنیم؛ يعني $\frac{1}{\epsilon} \sqrt{h} = 1$.

با جایگذاری خم در متريک اقليدسی $ds^2 = dT^2 + dZ^2/Z^2$ بدست می‌آوریم:

$$\sqrt{h} = \frac{1}{Z(\tau)} \sqrt{F'(\tau)^2 + Z'(\tau)^2}$$

که با انتخاب $Z(\tau) = \epsilon F'(\tau)$ شرط مرزی را در مرتبه‌ی صفرم ϵ برآورده می‌کند. حالا با داشتن متريک و خم مرزی، می‌توانیم جمله‌ی مرزی کنش اقلیدسی (۲-۲-۲) را حساب کنیم.

کمی درمورد محاسبات انحنای خارجی

برای محاسبه‌ی جمله‌ی مرزی کنش JT به این شکل عمل می‌کنیم.

با بررسی دقیق متریک $ds^2 = \frac{dT^2 + dZ^2}{Z^2}$ می‌توانیم ببینیم که تنها نمادهای کریستوفل زیر ناصرف هستند:

$$\Gamma_{ZZ}^Z = -\Gamma_{TT}^Z = -\Gamma_{TZ}^T = \frac{1}{Z}. \quad (84-2-2)$$

انحنای خارجی از رابطه‌ی $K = h^{tt} M_t^\mu M_t^\nu \nabla_\mu n_\nu$ بدست می‌آید که در آن، $M_t^\mu = \partial_t x^\mu$ عملگر تصویری است، h متریک القایی روی مرز است و برداریکه‌ی عمود بر خم به شکل زیر هست:

$$n_\mu = \left(\frac{Z'(t)}{Z(t)\sqrt{F'(t)^2 + Z'(t)^2}}, \frac{-F'(t)}{Z(t)\sqrt{F'(t)^2 + Z'(t)^2}} \right). \quad (85-2-2)$$

متریک القایی روی خم هم به شکل زیر دست می‌آید.

$$ds_{\text{ind}}^2 = \frac{(F')^2 + \epsilon^2(F'')^2}{\epsilon^2(F')^2} dt^2 = \left(\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{(F'')^2}{(F')^2} \right) dt^2 \quad (86-2-2)$$

$$M_t^t = \partial_t F = F', \quad M_t^1 = \partial_t Z = Z' \quad (87-2-2)$$

$$h_{tt} = M_t^t M_t^t g_{..} + M_t^1 M_t^1 g_{\perp\perp} = \frac{(F')^2 + (Z')^2}{Z^2} \quad (88-2-2)$$

$$\nabla_\nu n_\mu = \partial_\nu n_\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\kappa n_\kappa \quad (89-2-2)$$

برای تبدیل مشتقهای از Z به مشتق بر حسب t از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial F'} = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{F''} \frac{\partial}{\partial t} \quad (90-2-2)$$

حالا باید تک‌تک این مولفه‌ها را ببینیم:

$$\nabla_\nu n_\mu = \frac{1}{F'(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Z'(t)}{Z(t)\sqrt{F'(t)^2 + Z'(t)^2}} \right) - \frac{F'(t)}{Z(t)(Z(t)\sqrt{F'(t)^2 + Z'(t)^2})} \quad (91-2-2)$$

$$\nabla_{\parallel} n_{\parallel} = \frac{1}{F'(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{F'(t)}{Z(t) \sqrt{F'(t)^2 + Z'(t)^2}} \right) - \frac{Z'(t)}{Z(t) (Z(t) \sqrt{F'(t)^2 + Z'(t)^2})} \quad (92-2-2)$$

$$\nabla_{\perp} n_{\perp} = \frac{1}{\epsilon F''(t)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{Z'(t)}{Z(t) \sqrt{F'(t)^2 + Z'(t)^2}} - \frac{Z'(t)}{Z(t) (Z(t) \sqrt{F'(t)^2 + Z'(t)^2})} \quad (93-2-2)$$

$$\nabla_{\parallel} n_{\parallel} = \frac{1}{\epsilon F''(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{F'(t)}{Z(t) \sqrt{F'(t)^2 + Z'(t)^2}} \right) - \frac{F'(t)}{Z(t) (Z(t) \sqrt{F'(t)^2 + Z'(t)^2})} \quad (94-2-2)$$

حالا اگر تمامی این‌ها را در رابطه انحنای خارجی قرار دهیم و تا مرتبه ϵ^2 بسط دهیم؛ به انحنای خارجی می‌رسیم که در مرتبه دوم متناسب با مشتق شوارتزی است.

$$K = \frac{F'(F'^2 + Z'^2 + ZZ'') - ZZ'F''}{(F'^2 + Z'^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 + \epsilon^2 \{F, \tau\} + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

همچنین میدان دیلاتونی روی این خم‌مرزی را هم ثابت می‌کنیم، حالا با جاگذاری این کمیت‌ها در کنش اقلیدسی (۲-۲-۲)، کنش جدید بدست می‌آید.

$$I_{JT}[F] = -C \int d\tau \{F, \tau\}$$

تا اینجا، ما بازپرمایش‌ها را در نمایش پوانکاره نشان دادیم. البته که لزومی ندارد خودمان را به مختصات پوانکاره محدود کنیم و حتی در سامانه‌هایی مثل سیاهچاله‌ها، خیلی طبیعی‌تر است که در مختصات دیگری کار کنیم. مثلاً تبدیل مختصات زیر را درنظر بگیرید:

$$F(\tau) \equiv \tan \frac{\pi}{\beta} f(\tau) \quad (95-2-2)$$

$$f(\tau + \beta) = f(\tau) + \beta, \quad f'(\tau) \geq 0$$

می‌توانیم مشاهده کنیم که شرط مرزی اول، (۵۲-۲-۲) به طول این خم‌مرزی را مقدار ثابت ϵ/β حفظ می‌کند. تصویر ۶-۲ به درک بهتر کمک می‌کند.

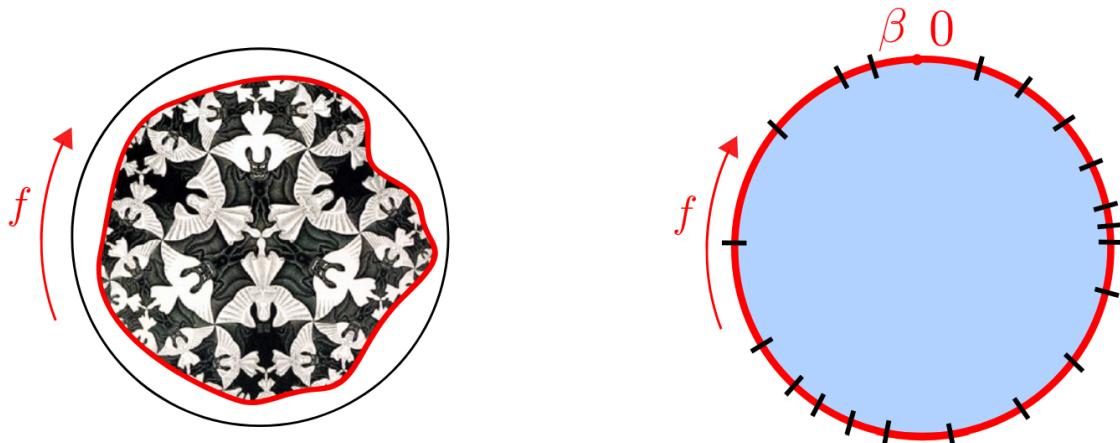
طول خم در مختصات جدید

به علت این‌که فرم مجانبی متريک ثابت هست، پس طول خم که در ناحيه‌ی مجانبی واقع شده، ثابت می‌شود. مطابق شکل مجانبی متريک القايی روی خم

$$ds_{\text{ind}}^2 = \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{(F'')^2}{(F')^2} \right) dt^2 \quad (96-2-2)$$

سهم غالب طول خم از جمله‌ی اول می‌آيد؛ پس:

$$\ell_{\text{bdy}} = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\beta d\tau = \frac{\beta}{\epsilon} \quad (97-2-2)$$



شکل ۲-۶: تصویر سمت چپ نمایش دایره‌ی مرزی در مختصات سیاه‌چاله است. تصویر سمت راست، تیک‌های ساعت‌مرزی را نشان می‌دهد. توجه کنید که تعداد تیک‌های ساعت با β مشخص می‌شود، اما پراکندگی آن و فواصل نسبی در روی خم بستگی به شکل خم دارد. (عکس از [۲] برداشته شده.) حالا بیایید جوابهای معادله‌ی حرکت را در این مختصات بررسی کنیم؛ مطابق (۲-۲-۶۵) باید معادله‌ی دیفرانسیل ثابت $\{F, \tau\}$ را حل کنیم. این ثابت، مطابق رابطه تانسور تنش تمام‌نگار، چیزی به جز انرژی کل سیاه‌چاله نیست.

$$\{\tan \frac{\pi}{\beta} f(\tau), \tau\} = \frac{2\pi^2 f'(\tau)}{\beta^2} + \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \equiv \text{ثابت} \quad (98-2-2)$$

جواب این معادله، تابع ثابت $\tau = f(\tau)$ است (با ابهام $\cdot \text{PSL}(2, \mathbb{R})$)

۷-۲-۲ گرانش کلاسیک در حضور ماده‌ی کوانتومی

یک مدل نسبتاً واقع‌گرایانه‌تر از گرانش کوانتومی، درنظر گرفتن ماده به شکل کوانتومی است؛ این مدل‌ها اصطلاحاً در «حد نیمه کلاسیک» بررسی می‌شوند. این تقریب تا هنگامی معتبر است که آثار کوانتومی گرانش از آثار کوانتومی ماده خیلی کوچکتر باشند. وقتی نظریه میدان همدیس به عنوان ماده درنظر گرفته می‌شود؛ در حد ۱ $\gg c$ این تقریب معتبر است.

معادلات حاکم بر مقدار چشم‌داشتی تansور تنش، در یک نظریه میدان همدیس، به این شکل است:

$$\begin{aligned}\langle T_{uu} \rangle &= -\frac{c}{12\pi} ((\partial_u \omega)^2 - \partial_u^2 \omega) + \langle :T_{uu}(u): \rangle, \\ \langle T_{vv} \rangle &= -\frac{c}{12\pi} ((\partial_v \omega)^2 - \partial_v^2 \omega) + \langle :T_{vv}(v): \rangle, \\ \langle T_{uv} \rangle &= -\frac{c}{12\pi} \partial_u \partial_v \omega.\end{aligned}\quad (۹۹-۲-۲)$$

بیینیم اثر این تansور تنش، روی معادلات حاکم بر میدان دیلاتونی، (۴۷-۲-۲)، چیست. جملات مرتب‌شده‌ی عادی اثراشان روی معادلات حرکت در حد انتقال میدان دیلاتونی است، پس روی شرایط مرزی اثری ندارد. همچنین به خاطر ظاهر ω در فضای پاددوستیه‌ی دوبعدی، یعنی (۲۷-۲-۲)، می‌توانیم بیینیم که دو جمله‌ای اول در $\langle T_{vv} \rangle$ و $\langle T_{uu} \rangle$ ، هر دو دستسان باقی می‌مانند و در نهایت، با استفاده از شرایط مرزی، به همان معادله‌ی حرکت (۵۹-۲-۲) منجر می‌شوند.

$$\frac{dE}{dt} = \langle T_{vv}(t) \rangle - \langle T_{uu}(t) \rangle \Big|_{\partial\mathcal{M}} = \langle :T_{vv}(t): \rangle - \langle :T_{uu}(t): \rangle \Big|_{\partial\mathcal{M}}$$

۳-۲ گرانش JT کوانتومی

از مزایای نظریه‌های بعدپایین، حل‌پذیری آنهاست. در گرانش JT هم همین اتفاق می‌افتد و اثرات کوانتومی را می‌توانیم تا به طور دقیق در تمامی مراتب بررسی کنیم. اول تصحیحات کوانتومی به طیف گرانش JT را می‌بینیم و چگالی‌حالات را نگاه بررسی می‌کنیم. سپس میدان‌های ماده را به گرانش JT اضافه می‌کنیم و توابع چند نقطه‌ای روی مرز را دقیق و به شکل حدی بررسی می‌کنیم. سپس به سراغ افزودن نقایص به گرانش JT می‌رویم و درنهایت سهم کرم‌چاله‌ها و تفسیرشان را بررسی می‌کنیم.

۱-۳-۲ تصحیحات واردہ به طیف گرانش JT

انتگرال مسیر گرانشی در نشانگانِ اقلیدسی، که تابع پارش را حساب می‌کند، انتگرال‌گیری روی تمامی هندسه‌های هموار با شرایط مرزی مشخص است. هنگامی که در مختصات سیاه‌چاله هستیم، تابع پارش سیاه‌چاله، مانند زیر بدست می‌آید:

$$(1-3-2) \quad Z(\beta) = e^{S} \cdot \int [Dg_{\mu\nu}] [D\Phi] \exp \left(\frac{1}{16\pi G_N} \left[\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} \Phi (R + 2) + 2 \oint_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{h} \Phi (K - 1) \right] \right)$$

با طی مراحلی، می‌توانیم این انتگرال مسیر را به شکل شوارتزی بنویسیم، دقیقاً مشابه کنشی که در سطح کلاسیک بدست آوردهیم. اول باید انتگرال روی میدان دیلاتونی را بگیریم^{۱۹}. چون کنش شامل مشتق میدان دیلاتونی نیست، کار راحت تر است. فرم این کنش، ما را یاد دلتای دیراک تابعی می‌اندازد^{۲۰}؛ تنها با این تفاوت که باید نما مختلط باشد. به همین دلیل باید پربند انتگرال‌گیری را اندکی به سمت نیم صفحه‌ی بالایی مختلط منحرف کنیم تا قسمتِ موهومنی کوچکی ظاهر شود و دلتای دیراک ظاهرشود. این تابع دلتای دیراک جدید، اجبار می‌کند که $R(x) = -2$ باشد؛ یعنی انتگرال‌گیری باید روی متريک‌های هذلولی انجام شود. آزادی باقی‌مانده هم، آزادی در بریدن قطعه‌ای از فضای پاددوسيته دوبعدی با محیط منتظم شده‌ی $\frac{\beta}{\epsilon}$ است. همانطور که در بخش ۶-۲-۲ دیدیم، می‌توانیم با انتخاب خم مرزی دلخواه، جمله‌ی مرزی را به شکل کنش شوارتزی بنویسیم و با یک تغییر متغير به مختصات سیاه‌چاله، انتگرال‌گیری روی تمام متريک‌های هذلولی عملاً به انتگرال‌گیری روی خم‌های مرز کاسته می‌شود. بنابراین، انتگرال مسیر گرانشی به این رابطه منتهی می‌شود:

$$(2-3-2) \quad Z(\beta) = e^{S} \cdot \int_{\frac{\text{Diff}(S^1)}{\text{SL}(\mathbb{C}, \mathbb{R})}} [Df] \exp \left(C \int_{-}^{\beta} d\tau \left\{ \tan \frac{\pi f(\tau)}{\beta}, \tau \right\} \right)$$

که در بخش ۶-۲-۲ دیدیم که چرا در مختصات سیاه‌چاله، باید تابع انتگرال‌گیری از فضای خارج قسمتی انتخاب شود تا هم اضافه‌شماری نداشته باشد و هم تمامی پیکربندی‌های معتبر گرانشی را دربرگیرد.

^{۱۹} توجه کنید که انتگرال دوم در نمای عبارت (۱-۳-۲) در انتگرال مسیر دخالتی ندارد، چرا که رفتار میدان دیلاتونی روی مرز فیکس شده و عملای انتگرال اول است که نیاز به محاسبه شدن دارد.^{۲۰} در دو بعد به شکل زیر است.

$$\delta(f - g) = \int [D\xi] \exp \left(i \int d^4x \sqrt{g} \xi (f - g) \right)$$

در نهایت، علاوه بر فرم‌نهایی انتگرال مسیر، (۲-۳-۲)، نیاز به یک اندازه برای انتگرال‌گیری صحیح داریم. یک راه شهودی و منطقی این است که همان ۲-فرم همتافته‌ی نظریه BF دوگان با JT را به عنوان اندازه‌ی انتگرال‌گیری معرفی کنیم؛ این حدس در [۲۶] بررسی شده و به نتیجه‌ی $[Df] = \Pi_\tau df(\tau)/f'(\tau)$ رسیده است. پس شکل نهایی اندازه انتگرال‌گیری هم مشخص است.

محاسبات اختلالی تصحیحات

حالا وقت آن است که تابع پارش دیسک گرانش JT را اختلالی حساب کنیم. برای این‌کار، متغیر انتگرال‌گیری یعنی $(\tau) f$ را حول فرینه (جواب کلاسیکی) بسط می‌دهیم. دیدیم که فرینه کنش شوارتزی $f(\tau) = \tau$ است. بسط را به شکل $f(\tau + \epsilon) = \tau + \epsilon f'(\tau) + \epsilon^2 f''(\tau) + \dots$ می‌نویسیم و برای برقراری شرایط مرزی در پایین معادله‌ی (۹۵-۲-۲)، باید $\epsilon(\tau + \beta) = \epsilon(\tau) + \beta$ باشد.

واضح است که در مرتبه‌ی صفرم اختلال، کنش همان کنش شوارتزی است و کنش اقلیدسی حاصل به فرم $I_{\text{Sch}} = \frac{2\pi^2 C}{\beta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ است. یعنی با خاموش کردن افت‌وخیزهای کوانتمی حول مقدار کلاسیک، کنش اقلیدسی همان انرژی آزاد کلاسیکی می‌شود.

حالا سراغ مرحله‌ی بعدی اختلال برویم، که معادل با محاسبه‌ی دترمینان تک‌حلقه حول نقطه‌ی زینی است. اول پارامتر $(\tau) \epsilon$ را بسط فوریه می‌دهیم، فقط توجه می‌کنیم که به علت تقارن $(\mathbb{R}, SL(2))$ ، باید سهتا از مدهای بسط را صفر بگذاریم.

$$\epsilon(\tau) = \frac{\beta}{2\pi} \sum_{n \neq 0, \pm 1} \exp\left(-\frac{2\pi}{\beta} in\tau\right) \epsilon_n \quad (3-3-2)$$

حالا با جای‌گذاری این پارامتر در کنش، کنش را تا مرتبه‌ی دوم می‌خوانیم:

$$I_{\text{Sch}} = \frac{2\pi^2 C}{\beta} + \frac{4\pi^2 C}{\beta} \sum_{n > 1} n^2 (n^2 - 1) \bar{\epsilon}_n \epsilon_n + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (4-3-2)$$

محاسبات اختلالی

برای محاسبه‌ی کنش، بایستی بسط بالا را در کنش اقلیدسی جا‌گذاری کنیم؛ اما کنش شوارتزی در مختصات سیاه‌چاله، (۹۵-۲-۲) مشتق شوارتزی از تائزانت است، بنابراین اول باید فرم‌ساده‌تری برای آن پیدا کنیم.

برای محاسبه‌ی ناچاریم محاسبات را مستقیماً انجام دهیم.

$$(\tan f)' = f'(\mathbf{1} + \tan^2 f)$$

$$(\tan f)'' = f''(\mathbf{1} + \tan^2 f) + 2(f')^2 \tan f(\mathbf{1} + \tan^2 f)$$

$$(\tan f)''' = f'''(\mathbf{1} + \tan^2 f) + 6f'f'' \tan f(\mathbf{1} + \tan^2 f)$$

$$+ 2(f')^3(\mathbf{1} + \tan^2 f)^2 + 4(f')^2 \tan^2 f(\mathbf{1} + \tan^2 f)$$

با جاگذاری در مشتق شوارتزی

$$\begin{aligned} \{\tan f, t\} &= \frac{f'''}{f'} + 6f'' \tan f + 2(f')^2(\mathbf{1} + \tan^2 f) + 4(f')^2 \tan^2 f \\ &\quad - \frac{2}{\beta} \left(\frac{f''}{f'} + 2f' \tan f \right)^2 \\ &= \frac{f'''}{f'} + 6f'' \cancel{\tan f} + 2(f')^2(\mathbf{1} + \cancel{\tan^2 f}) + 4(f')^2 \cancel{\tan^2 f} \quad (5-3-2) \\ &\quad - \frac{2}{\beta} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 - 2(f')^2 \cancel{\tan^2 f} - 6f'' \cancel{\tan f} \\ &= \{f, t\} + 2(f')^2 \end{aligned}$$

حالا مشتقات مختلف ϵ را از رابطه‌ی (۳-۳-۲) بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \epsilon'(\tau) &= -i \sum_{n \neq 0, \pm 1} ne^{-\frac{i\pi}{\beta} in\tau} \epsilon_n \\ \epsilon''(\tau) &= -\frac{2\pi}{\beta} \sum_{n \neq 0, \pm 1} n^2 e^{-\frac{i\pi}{\beta} in\tau} \epsilon_n \quad (6-3-2) \\ \epsilon'''(\tau) &= i \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 \sum_{n \neq 0, \pm 1} n^3 e^{-\frac{i\pi}{\beta} in\tau} \epsilon_n \end{aligned}$$

حالا وقت آن است که بسط را در مشتق شوارتزی بگذاریم و جداسازی مرتبه‌به‌مرتبه کنیم.

(7-3-2)

$$\begin{aligned} \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{\beta} (\tau + \epsilon(\tau)) \right), \tau \right\} &= \frac{\epsilon'''}{1 + \epsilon'} - \frac{2}{\beta} \left(\frac{\epsilon''}{1 + \epsilon'} \right)^2 + \frac{2\pi^2}{\beta^2} (1 + \epsilon')^2 \\ &= \epsilon'''(1 - \epsilon' + (\epsilon')^2) - \frac{2}{\beta} (\epsilon'')^2 (1 + \epsilon')^{-2} + \frac{2\pi^2}{\beta^2} (1 + 2\epsilon' + (\epsilon')^2) \\ &\approx \epsilon''' - \epsilon' \epsilon''' - \frac{2}{\beta} (\epsilon'')^2 + \frac{2\pi^2}{\beta^2} + \frac{4\pi^2}{\beta^2} \epsilon' + \frac{2\pi^2}{\beta^2} (\epsilon')^2 \end{aligned}$$

که از جملات مرتبه سه به بالا در ϵ صرف نظر کردہایم. حالا پارامترهای بسط را جایگذاری می‌کنیم. می‌توانیم مرتبه‌ی اول ϵ را هم بررسی نکنیم، چرا که در انتگرال‌گیری کنش \int_0^β ، به علت حضور عامل نمایی $e^{-\frac{4\pi}{\beta}in\tau}$ ، انتگرال روی یک دوره صفر می‌شود. بنابراین جملات ϵ''' و ϵ'' هم در حاصل نهایی موثر نیستند.

$$\begin{aligned}\epsilon'\epsilon''' &= \frac{4\pi^2}{\beta^2} \sum_{(m,n)'} m^2 n e^{-\frac{4\pi}{\beta}i\tau(m+n)} \epsilon_m \epsilon_n \\ (\epsilon'')^2 &= \frac{4\pi^2}{\beta^2} \sum_{(m,n)'} m^2 n^2 e^{-\frac{4\pi}{\beta}i\tau(m+n)} \epsilon_m \epsilon_n \\ \frac{2\pi^2}{\beta^2} (\epsilon')^2 &= -\frac{2\pi^2}{\beta^2} \sum_{(m,n)'} m n e^{-\frac{4\pi}{\beta}i\tau(m+n)} \epsilon_m \epsilon_n\end{aligned}\quad (8-3-2)$$

در عبارات بالا منظور از (m, n) این است که روی تمامی اعداد صحیح که مخالف صفر و ± 1 هستند، جمع زدهایم. حالا وقت انتگرال‌گیری کنش است؛ انتگرال‌گیری روی مدهای فوریه بسیار آسان است.^a

$$\begin{aligned}-C \int_0^\beta d\tau \epsilon'\epsilon''' &= -\frac{4\pi^2 C}{\beta} \left(\sum_{(m,n)'} m^2 n \epsilon_m \epsilon_n \delta_{m+n,0} \right) \\ &= -\frac{4\pi^2 C}{\beta} \left(- \sum_{m \neq 0, \pm 1} m^2 (\epsilon_m \epsilon_{-m}) \right) \\ -\frac{2\pi^2 C}{\beta} \int_0^\beta d\tau (\epsilon'')^2 &= -\frac{2\pi^2 C}{\beta} \left(\sum_{(m,n)'} m^2 n^2 \epsilon_m \epsilon_n \delta_{n+m,0} \right) \\ &= -\frac{2\pi^2 C}{\beta} \left(\sum_{m \neq 0, \pm 1} m^2 (\epsilon_m \epsilon_{-m}) \right) \\ \frac{2\pi^2 C}{\beta^2} \int_0^\beta d\tau (\epsilon')^2 &= -\frac{2\pi^2}{\beta} \left(\sum_{(m,n)'} m n \epsilon_m \epsilon_n \delta_{m+n,0} \right) \\ &= -\frac{2\pi^2}{\beta} \left(- \sum_{m \neq 0, \pm 1} m^2 \epsilon_m \epsilon_{-m} \right)\end{aligned}\quad (9-3-2)$$

پس از جمع‌کردن تمامی این عبارات، به فرم (۴-۳-۲) برای کنش اقلیدسی می‌رسیم.

$$\int_{-a}^{\beta} d\tau e^{\pm \frac{i\pi}{\beta} i\tau(m+n)} = \beta \delta_{m,-n}$$

همچنین با استی اندازه‌ی انتگرال مسیر را هم به شکل اختلالی حاصل کنیم. با توجه به فرم پیشنهاد شده در قسمت قبلی، $[Df] = \prod_{n \geq 2} 4\pi(n^3 - n)d\epsilon_n d\bar{\epsilon}_n$ [۲۷] بدست می‌آید.

حالا با ترکیب کنش مرتبه‌ی دو و اندازه‌ی انتگرال مسیر گاووسی به سادگی قابل انجام است.

$$Z(\beta) = \exp^{S. + \frac{2\pi^2 C}{\beta}} \prod_{n \geq 2} \frac{\beta}{Cn} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2\pi C}{\beta} \right)^{\frac{2}{3}} \exp^{S. + \frac{2\pi^2 C}{\beta}} \quad (10-3-2)$$

محاسبه‌ی انتگرال مسیر گاووسی

با اندازه‌ی گفته شده در بالا، انتگرال مسیر (۲-۳-۲) به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$Z(\beta) = \int \prod_{n \geq 2} 4\pi(n^3 - n)d\epsilon_n d\bar{\epsilon}_n \exp \left(\frac{2\pi^2 C}{\beta} + \frac{4\pi^2 C}{\beta} n^2 (n^2 - 1) \bar{\epsilon}_n \epsilon_n + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right) \quad (11-3-2)$$

این انتگرال گاووسی به سادگی محاسبه می‌شود؛ رابطه‌ی انتگرال مسیر گاووسی به شکل زیر است:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx}_{\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n} e^{-\frac{1}{2} \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} + \vec{J}^T \vec{x}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(\mathbf{A})}} e^{\frac{1}{2} \vec{J}^T \mathbf{A}^{-1} \vec{J}}$$

پس:

$$e^{\frac{2\pi^2 C}{\beta}} \prod_{n \geq 2} 4\pi(n^3 - n) \int d\epsilon_n d\bar{\epsilon}_n e^{-\frac{2\pi^2 C}{\beta} n^2 (n^2 - 1) \bar{\epsilon}_n \epsilon_n}$$

$$= 4\pi n(n^2 - 1) \times \frac{\pi \beta}{4\pi^2 C n^2 (n^2 - 1)} = \prod_{n \geq 2} \frac{\beta}{Cn}$$

و به عبارت (۱۰-۳-۲) می‌رسیم.

حالا با در دست داشتن این نتیجه، مشاهدات زیر حاصل می‌شوند.

۱. چون تنها یک فرینه دارد، پس اختلالات حول آن پایدار است.^{۲۱} این یعنی حل کلاسیک کمینه‌ی سرتاسری کنش است. در تعمیم‌های این مدل می‌بینیم که با افزودن نقص به گرانش JT، جواب کلاسیک کمینه‌ی سرتاسری نیست.

۲. در منظم‌سازی تابع پارش (۱۰-۳-۲)، از منظم‌سازی تابع زتا، به روش معمول، استفاده کردہ‌ایم. هر انتخاب دیگری که ثابت متفاوتی دارد، می‌تواند در S جذب شود. همچنین نمای β برای تعییر مدهای حذف شده از کنش را دارد؛ چون در منظم‌سازی تابع زتا، $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ با 0 جایگزین می‌شود؛ اگر تمامی مدها حاضر بودند، تابع پارش مستقل از β بود؛ اما حالا که سه مد را به علت تقارن $(\mathbb{R}, 2)$ ، حذف کردیم؛ این وابستگی به تابع بتا ظاهر می‌شود.

حالا با داشتن تابع پارش، به کمک روابط ترمودینامیکی در کنش اقلیدسی، تصحیحات به طیف سیاه‌چاله را بررسی می‌کنیم. مطابق روابط ترمودینامیکی، لگاریتم تابع پارش متناسب با انرژی‌آزاد است.

$$-\beta F \equiv \log Z(\beta) = S_* + \frac{2\pi^2 C}{\beta} + \frac{3}{2} \log\left(\frac{2\pi C}{\beta}\right) + \dots \quad (12-3-2)$$

دو جمله‌ی اول در رابطه‌ی (۱۲-۳-۲) انرژی‌آزاد، مربوط به سهم‌های کلاسیک هستند، اما جمله‌ی آخری تصحیح تک‌حلقه کوانتموی است. می‌بینیم که تصحیحات کوانتموی با کاهش دما ($\beta \gtrsim C$) رشد می‌کنند. حتی در سیاه‌چاله‌های نزدیک به حالت فرینه، تصحیحات کوانتموی بسیار بیشترهم هست.

حالا باید از منظر تمام‌نگاری نتیجه‌مان را تفسیر کنیم. یک بیان تمام‌نگاری این است:

«سیاه‌چاله می‌تواند با یک سیستم کوانتموی با آنتروپی متناهی (بعد فضای هیلبرت متناهی) توصیف شود.»

در چنین سیستمی که، چگالی حالات به شکل $E_n \rho(E) = \sum_n \delta(E - E_n) \rho$ است؛ که E_n ویژه‌انرژی‌های این سیستم کوانتموی هستند. از طرفی می‌دانیم که چگالی حالات، تبدیل معکوس لابلس تابع پارش است. می‌توانیم این تبدیل را بگیریم تا ببینیم که آیا طیف حاصل گستته است یا نه.

^{۲۱} در غیر این صورت، نظریه به شکل کلاسیک هم جواب نخواهد داشت.

تبديل معکوس لابلس از تابع پارش (۱۰-۳-۲) طيف زير را مي دهد.

$$\rho_{JT}(E) = \frac{C}{2\pi^2} e^{S_+} \sinh(2\pi\sqrt{2CE}) \quad (13-3-2)$$

مي بینيم که طيف پيوسته است!

۱. چون سيسitem کوانتم مکانيکي در $1 + 0$ -بعد (که قسمت فضائي آن يك نقطه است و فشرده است)، طيف گستته دارد؛ به سادگي نمی توانيم مدلی متصور شويم که طيفش با گرانش JT يكی شود.

۲. اثرات کوانتمي در انرژي هاي پاين هم چشم گيرند؛ چگالي حالات در انرژي پاين مناسب با \sqrt{E} است. اين نشان مي دهد که تفسير S_+ به عنوان انرژي حالت پايه نادرست است؛ چون چگالي حالات در حالت پايه به صفر ميل مي کند.

۲-۳-۲ جفت کردن گرانش JT کوانتمي به ماده کوانتمي

در اين بخش، سراغ جفت کردن گرانش JT به ميدان نردهای جرم دار ϕ مي رويم ^{۲۲}. کنش اقليدسي ماده به شكل زير است:

$$I_{matter}[\phi, g] = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} [(\partial\phi)^2 + m^2 \phi^2]. \quad (14-3-2)$$

بنابراین، انتگرال مسیر گرانشی (يا همان تابع پارش) کل نظریه به شکل زير نوشته مي شود.

$$Z(\beta; \phi_b) = e^{S_+} \int [Dg][D\Phi] \exp \left[\frac{1}{16\pi G_N} \left(\int_M \Phi(R + 2) + 2 \oint_{\partial M} \Phi(K - 1) \right) \right] \\ \times \int [D\phi] \exp [-I_{matter}[\phi, g]] \quad (15-3-2)$$

بعد از انتگرال گيري روی ديلاتون با چرخاندن مختصراً پربند انتگرال گيري مختلط ($\Phi \rightarrow i\Phi$) ، مثل قبل به معادله $R = -2\phi$ رسيم و کنش را بر حسب مدهای شوارتزی بازنويسي مي کنيم؛ حاصل چيزی نیست به جز:

$$Z(\beta; \phi_b) = e^{S_+} \int [Df] e^{-I_{Sch}[f]} Z_{matter}[\phi_b, f] \quad (16-3-2)$$

^{۲۲} توجه كنيد که ميدان ديلاتوني را با Φ و ميدان نردهای را با ϕ نشان مي دهيم.

در رابطه‌ی فوق، مقدار میدان نرده‌ای روی χ_m با نماد ϕ نمادگذاری شده است و منظورمان از $Z_{\text{matter}}[\phi_b, f]$ ، انتگرال مسیر روی میدان مادی با شرط مرزی مشخص است، یعنی:

$$Z_{\text{matter}}[\phi_b, f] \equiv \int_{\phi|_{\partial}=\phi_b} [D\phi] e^{-I_{\text{matter}}[\phi, g]} \quad (17-3-2)$$

ترتیب انتگرال‌گیری در رابطه (۱۶-۳-۲) مهم است. انتگرال روی میدان دیلاتونی که حذف شده؛ پس اول روی میدان مادی انتگرال می‌گیریم (چون مد شوارتزی در آن دخالت دارد) و بعد از آن روی مدهای شوارتزی انتگرال‌گیری می‌کنیم.

حالا به دو حالت خاص از این تئوری نگاه می‌کنیم:

۱. اول در حد $\epsilon \rightarrow 0$ را بررسی می‌کنیم. در این حالت $Z_{\text{matter}}[\phi_b, f]$ در مرتبه‌ی اول، مستقل از مد شوارتزی است، بنابراین چون انتگرال مسیر ماده از مد شوارتزی مستقل است؛ اصلاح خاصی به طیف سیاه‌چاله وارد نمی‌شود.^{۲۳}

۲. وقتی میدان ماده روی مرز روشن می‌شود، اوضاع متفاوت است؛ مطابق تناظر^{۲۴} AdS/CFT ، میدان ϕ بایستی با یک عملگر مثل \mathcal{O}_ϕ روی نظریه‌ی کوانتم مرز دوگان باشد، که بعد هم دیس این عملگر، $\Delta_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon} + m^2}$ است. همچنین منع ϕ_r روی χ_m هم باید از مختصات پوانکاره، به مختصات خم مرز آورده شود:

$$\phi|_{\partial} = Z^{1-\Delta} \tilde{\phi}_r(T) = \epsilon^{1-\Delta} F'^{1-\Delta} \tilde{\phi}_r(T) = \epsilon^{1-\Delta} \phi_r(\tau) \quad (18-3-2)$$

در رابطه‌ی بالا، $\tilde{\phi}_r$ میدان مرز در مختصات پوانکاره است. پس از این تبدیل، انتگرال مسیر، همان رابطه‌ی آشنای تابعی مولد برای میدان آزاد است، با این تفاوت که در مختصات خم مرزی بازنویسی شده است.^{۲۵}

$$Z_{\text{matter}}[\phi_r, f] = \exp \left[\frac{D}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \left(\frac{f'(\tau_1) f'(\tau_2)}{\frac{\beta}{\pi^\gamma} \sin^\gamma |f(\tau_1) - f(\tau_2)|} \right)^\Delta \phi_r(\tau_1) \phi_r(\tau_2) \right] \quad (19-3-2)$$

که در آن $D = \frac{(\Delta - \frac{1}{\epsilon}) \Gamma(\Delta)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\Delta - \frac{1}{\epsilon})}$ است؛ می‌توانیم میدان‌های منبع را با $\phi_r \rightarrow \frac{1}{\sqrt{D}} \phi_r$ بازمقیاس کنیم تا این ثابت حذف شود. همچنین e^S هم در این رابطه پنهان است که می‌توان در بهنجارش میدان جذب شود.

^{۲۳} این حرف به طور کلی درست نیست، به [۲۴] نگاه کنید.
^{۲۴} نتوانستم این گفته را بدست بیارم، مطابق این گفته، باید فقط تابعی مولد میدان آزاد را در متريک سیاه‌چاله بنویسیم؛ اما توان Δ و همچنین عبارت مخرج را درک نمی‌کنم از کجا آمده اند.

۳-۳-۲ توابع همبستگی

در قدم بعدی، توابع همبستگی ماده، روی مرز، را نگاه می‌کنیم. جواب کامل برای اولین بار در [۲۸] با استفاده از حدگیری‌های خاصی از کنش لیوویل در حضور غشاها_i ZZ انجام شد. رهیافت‌های متعددی برای بدست آوردن این توابع همبستگی هست که در یک بخش مجزا آنها را مرور می‌کنیم و به منابع مربوطه‌شان ارجاع می‌دهیم.

اما راهی ساده برای یافتن این توابع همبستگی داریم؛ با داشتن تابعی مولد (۱۶-۳-۲)؛ می‌توانیم با مشتق‌گیری تابعی از این رابطه و سپس قراردادن $\phi_r \rightarrow 0$ به توابع چند نقطه‌ای برسیم.

$$\langle \mathcal{O}(\tau_1) \dots \mathcal{O}(\tau_n) \rangle = \frac{\delta}{\delta \phi_r(\tau_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_r(\tau_n)} Z(\beta; \phi_r) \Big|_{\phi_r \rightarrow 0}. \quad (20-3-2)$$

که تابعی مولد کامل با جایگذاری (۱۶-۳-۲) در (۱۹-۳-۲) به شکل زیر است:

$$Z(\beta; \phi_r) = e^S \cdot \int [Df] e^{-I_{\text{Sch}}[f]} \exp \left(\int d\tau_1 d\tau_2 \left(\frac{f'(\tau_1) f'(\tau_2)}{\frac{\beta^\gamma}{\pi^\gamma} \sin^\gamma |f(\tau_1) - f(\tau_2)|} \right)^\Delta \phi_r(\tau_1) \phi_r(\tau_2) \right) \quad (21-3-2)$$

نگاه اولیه به توابع همبستگی دونقطه‌ای و چهار نقطه‌ای

اول، تابع دونقطه‌ای را حساب می‌کنیم. مطابق دستور (۲۰-۳-۲)، با دوبار مشتق‌گیری تابعی می‌رسیم به:

$$\langle \mathcal{O}(\tau_1) \mathcal{O}(\tau_2) \rangle = e^S \cdot \int [Df] e^{C \int^{\beta} \{\tan \frac{\pi}{\beta} f, \tau\}} \left(\frac{f'(\tau_1) f'(\tau_2)}{\frac{\beta^\gamma}{\pi^\gamma} \sin^\gamma |f(\tau_1) - f(\tau_2)|} \right)^\Delta \quad (22-3-2)$$

محاسبه کردن این انتگرال مسیر به شکل دستی، عملاً غیرممکن است؛ پس خیلی منطقی است که فقط حد نیمه-کلاسیک آن را نگاه کنیم؛ یعنی حالتی که $C \rightarrow \infty$. می‌دانستیم که کنش شوارتزی یک جواب زینی $\tau = f(\tau)$ دارد و تابع دونقطه‌ای با جایگذاری این پاسخ، در حد نیمه کلاسیک به شکل

$$\langle \mathcal{O}(\tau_1) \mathcal{O}(\tau_2) \rangle = Z(\beta) \left(\frac{\pi^\gamma}{\beta^\gamma \sin^\gamma \frac{\pi}{\beta} \tau_{12}} \right)^\Delta \quad (23-3-2)$$

نوشته می‌شود. بعده که جواب کامل کوانتموی را دیدیم، خواهیم دید که تصحیحات کوانتموی در حد نیمه کلاسیک ($C \ll \beta, |\tau_{12}|$) ناچیزند.

معرفی عملگر دومحلی شوارتزی

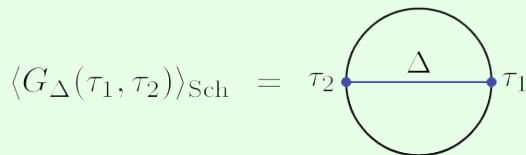
چون به عباراتی مشابه (۲-۳-۲۳) مکررا برمی‌خوریم برای آن نام و نمادی قرارداد می‌کنیم. به این عملگر، عملگر دومحلی شوارتزی می‌گوییم و به شکل زیر نمایش می‌دهیم.

$$G_{\Delta}(\tau_1, \tau_2) = \left(\frac{f'(\tau_1)f'(\tau_2)}{\frac{\beta}{\pi} \sin^2 |f(\tau_1) - f(\tau_2)|} \right)^{\Delta}$$

این عملگر تحت تبدیلات $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ناورداست. به سادگی با تعمیم تبدیل $F \rightarrow \frac{aF+b}{cF+d}$ به مختصات سیاهچاله، یعنی

$$f \rightarrow \frac{\beta}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{a \tan\left(\frac{\pi}{\beta}f\right) + b}{c \tan\left(\frac{\pi}{\beta}f\right) + d} \right)$$

می‌توانیم ناوردآیی عملگر دومحلی شوارتزی را بینیم.
یک نمایش نموداری برای این عملگر وضع می‌کنیم.



شکل ۲-۷: نمایش نموداری عملگر دومحلی. بعد همدیسِ عملگر مرزی Δ با جرم میدان نرده‌ای در تناظر است.

در این نمایش، خم مرزی را با دایره نشان داده‌ایم و خط آبی، نشانگر درج عملگر دومحلی روی دوسر خط، یعنی روی τ_1 و τ_2 است.

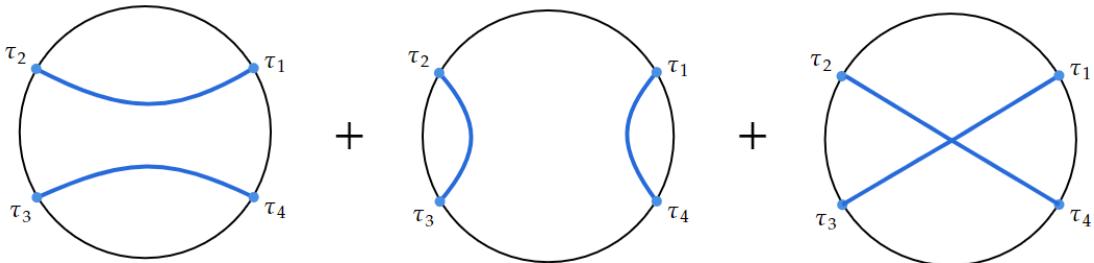
در مورد توابع چهار نقطه‌ای، با فرض $\tau_4 < \tau_3 < \tau_2 < \tau_1$ ، تابع چهار نقطه‌ای میدان مادی روی مرز، به شکل مجموعی از حاصل ضرب توابع دونقطه‌ای است؛ تقریبا مشابه آن‌چه در نظریه میدان کوانتمویی ϕ^4 می‌بینیم. چون برهم‌کنش، مطابق رابطه‌ی (۲-۳-۱۹) درجه دو است، پس توابع چهار نقطه‌ای آن در حضور یک مخصوص شوارتزی، مثل نمودارهای فایمن است. وقتی سهم انتگرال مسیر ماده را در رابطه (۲-۳-۱۶) می‌گذاریم، مدهای شوارتزی هم روشن می‌شوند و توابع دونقطه‌ای عملگر دومحلی در خلا

شوارتزی محاسبه می‌شود. این یعنی که

(۲۴-۳-۲)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(\tau_1) \mathcal{O}(\tau_2) \mathcal{O}(\tau_3) \mathcal{O}(\tau_4) \rangle &= \langle G_{\Delta}(\tau_1, \tau_2) G_{\Delta}(\tau_3, \tau_4) \rangle_{\text{Sch}} \\ &\quad + \langle G_{\Delta}(\tau_1, \tau_4) G_{\Delta}(\tau_2, \tau_3) \rangle_{\text{Sch}} + \langle G_{\Delta}(\tau_1, \tau_2) G_{\Delta}(\tau_3, \tau_4) \rangle_{\text{Sch}} \end{aligned}$$

به شکل نموداری هم مشابه کانال‌های مختلف s و t را می‌بینیم. دو جمله‌ی اول عبارت (۲۴-۳-۲)



شکل ۲-۸: تابع چهار نقطه‌ای مرزی در گرانش کوانتومی JT در کانال‌های مختلف.

محاسبات آسانی دارند؛ تنها حاصل ضرب توابع دونقطه‌ای هستند، با نگاه کردن در ویژه‌پایه‌های انرژی می‌توان این نکته را درک کرد. اما جمله‌ی سوم این عبارت به خاطر برخورد عملگرهای دو محلی و همچنین مسئله‌ی مرتب‌سازی زمانی، پیچیده‌تر است و صرفاً از ضرب توابع دونقطه‌ای شوارتزی بدست نمی‌آید.

صورتِ دقیق تابع همبستگی دونقطه‌ای

برای بدست آوردن تابع چند نقطه‌ای، یک راه ساده استفاده از اختلال در انتگرال مسیر است. مثلاً برای محاسبه‌ی تابع دونقطه‌ای (چون می‌دانیم نظریه‌ی شوارتزی در تک حلقه دقیق است)، کافی است مثل بخش ۱-۳-۲ تابع بازپرماش (τ) f را حول نقطه‌ی زینی‌اش بسط دهیم. در نهایت تابع دونقطه‌ای بدست آمده برای اختلالات حول نقطه‌ی زینی به شکل زیر است ($u = 2\pi\tau/\beta$).

$$\langle \epsilon(\tau) \epsilon(\cdot) \rangle = \frac{1}{2\pi C} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^3 \left[1 - \frac{1}{2}(u - \pi)^2 + \frac{\pi^2}{6} + \frac{5}{2} \cos u + (\tau - u) \sin u \right] \quad (25-3-2)$$

و بسط عملگر دوم محلی هم به شکل پایین است.

$$\frac{(1 + \epsilon'_1)^{\Delta} (1 + \epsilon'_2)^{\Delta}}{\left(\frac{\beta}{\pi} \sin \frac{\pi}{\beta} (\tau_{12} + \epsilon_1 - \epsilon_2) \right)^{\Delta}} \quad (26-3-2)$$

با قرار دادن این دو عبارت مختل شده در انتگرال مسیر مربوط به تابع دونقطه‌ای، می‌توانیم تابع دونقطه‌ای را حساب کنیم.

عبارت‌های فوق، نشان می‌دهد که هر انتشارگر یک ضریب $\frac{1}{C}$ سهم دارد و هر راس برهمنکنشی ضریب C . بنابراین پارامتر بسط اختلالی حاصل $\frac{1}{C}$ است که در حد نیمه‌کلاسیک، $\infty \rightarrow C$ ، پارامتر اختلال کوچک است و استفاده از روش اختلالی موجه است.

حالا به سراغ حل دقیق این نظریه می‌رویم. اینجا صرفا نتایج را نقل می‌کنیم و در ادامه به راه‌های متفاوت یافتن این نتایج اشاره می‌کنیم. معروف‌ترین راه‌های رسیدن به این توابع همبستگی، استفاده از چارچوب بوتسسترپ همدیس و توصیف دوگان نظریه‌ی توپولوژیک BF و حدگیری از کنش لیوویل در حضور غشاهای FZZT است.

تابع دونقطه‌ای بهنجارنشده این است:

$$\langle \mathcal{O}(\tau_1) \mathcal{O}(\tau_2) \rangle = e^{S} \int_{\cdot}^{\infty} \prod_{i=1,2} (dk_i \sinh 2\pi k_i) e^{-\tau \frac{k_1}{\gamma C} - (\beta - \tau) \frac{k_2}{\gamma C}} \frac{\Gamma(\Delta \pm ik_1 \pm ik_2)}{8\pi^4 (2C)^{\Delta} \Gamma(2\Delta)} \quad (27-3-2)$$

که در آن $|\tau_1 - \tau_2| = \tau$ است. البته این عبارت نیاز به توضیح بیشتری دارد. هرجا \pm در تابع گاما ظاهر شد، منظورمان این است که ضرب تابع گاما با دوعلامت را بنویسید. مثلا $\Gamma(x \pm y)$; بنابراین دامنه‌ی (27-3-2) شامل ضرب چهار تابع گاماست. می‌توانیم به شکل حدی بررسی کنیم که وقتی $0 \rightarrow \Delta$ این تابع همبستگی به تابع پارش شوارتزی تبدیل می‌شود.^{۲۵}.

صورتِ دقیق تابع همبستگی چهار نقطه‌ای

حالا با صورتِ دقیق ساده‌ترین توابع همبستگی چهار نقطه‌ای آشنا می‌شویم. برای روشن‌تر شدن موضوع، دو عملگر \mathcal{O}_1 و \mathcal{O}_2 را در تئوری مرز در نظر می‌گیریم که به ترتیب بعدمقياسي آنها Δ_1 و Δ_2 است. تابع چهار نقطه‌ای به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(\tau_1) \mathcal{O}_{\Delta_1}(\tau_2) \mathcal{O}_{\Delta_2}(\tau_3) \mathcal{O}_{\Delta_2}(\tau_4) \rangle. \quad (28-3-2)$$

^{۲۵} از دو اتحاد $\Gamma(\pm 2ik) = \frac{\pi}{2k \sinh(2\pi k)}$ و $\lim_{\Delta \rightarrow \cdot} \frac{\Gamma(\Delta \pm ix)}{\Gamma(2\Delta)} = 2\pi \delta(x)$ برای حدگیری استفاده می‌شود.

که با فرض $\tau_4 < \tau_3 < \tau_2 < \tau_1$ ، تابع همبستگی فوق، با اعمال مرتب‌سازی زمانی به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(\tau_1) \mathcal{O}_{\Delta_1}(\tau_2) \mathcal{O}_{\Delta_2}(\tau_3) \mathcal{O}_{\Delta_2}(\tau_4) \rangle = \text{Diagram showing two intersecting circles representing spacetime regions. The top circle has points } \tau_2 \text{ and } \tau_1 \text{ on its right boundary, and } \Delta_1 \text{ inside. The bottom circle has points } \tau_3 \text{ and } \tau_4 \text{ on its right boundary, and } \Delta_2 \text{ inside. The two circles intersect at two points. A blue arc connects } \tau_2 \text{ to } \tau_1 \text{ through the intersection point. A red arc connects } \tau_3 \text{ to } \tau_4 \text{ through the same intersection point. The regions } \Delta_1 \text{ and } \Delta_2 \text{ are shaded in blue and red respectively.}$$
(۲۹-۳-۲)

این تابع چهار نقطه‌ای، چیزی به جز حاصل ضرب دو عملگر دومحلی شوارتزی $\langle G_{\Delta_1}(\tau_1, \tau_2) G_{\Delta_2}(\tau_3, \tau_4) \rangle_{\text{Sch}}$ نیست. می‌توانیم حاصل این دامنه را بر حسب دامنه‌های با انرژی ثابت، $\mathcal{A}(k_1, \dots, k_4)$ ، بنویسیم:

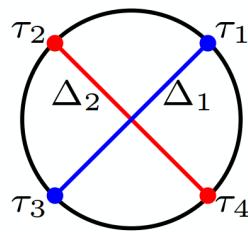
$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(\tau_1) \mathcal{O}_{\Delta_1}(\tau_2) \mathcal{O}_{\Delta_2}(\tau_3) \mathcal{O}_{\Delta_2}(\tau_4) \rangle &= \frac{e^{S_*}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty d\mu(k_1) d\mu(k_2) d\mu(k_3) d\mu(k_4) \\ &\times e^{-\frac{k_1^2}{4C}\tau_{21}-\frac{k_2^2}{4C}\tau_{32}-\frac{k_3^2}{4C}\tau_{43}-\frac{k_4^2}{4C}(\beta-\tau_{41})} \mathcal{A}(k_1, k_2, k_3, k_4), \end{aligned} \quad (30-3-2)$$

که در این عبارت، $d\mu(k) = \frac{1}{\pi} k \sinh(2\pi k) dk$ اندازه‌ی انتگرال‌گیری است. عبارات نما که به شکل $\frac{k_i^2}{4C}$ هستند، بیانگر انرژی مبادله‌شده بین نقاط مرزی هستند. k_1 انرژی مبادله‌شده بین راس اول و دوم را نشان می‌دهد؛ k_2 انرژی مبادله‌شده بین راس دوم و سوم را نشان می‌دهد؛ k_3 انرژی مبادله‌شده بین راس سوم و چهارم را نشان می‌دهد؛ k_4 انرژی مبادله‌شده بین راس چهارم و اول را نشان می‌دهد.

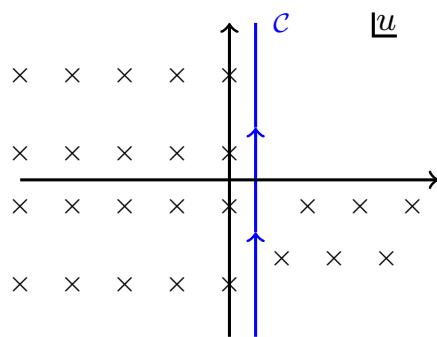
با اعمال انتگرال‌گیری‌ها، تابع همبستگی چهار نقطه‌ای غیرمتقطع به شکل زیر حاصل می‌شود [۲۸]

$$\mathcal{A}_{\text{uncross.}} = \frac{\Gamma(\Delta_1 \pm ik_1 \pm ik_2)}{(2C)^{\Delta_1} \Gamma(2\Delta_1)} \frac{\Gamma(\Delta_2 \pm ik_3 \pm ik_4)}{(2C)^{\Delta_2} \Gamma(2\Delta_2)} \frac{\pi^2 \delta(k_4 - k_2)}{k_4 \sinh 2\pi k_4}. \quad (31-3-2)$$

در این عبارت پیچیده، حضور تابع دلتای دیراک به خاطر ناوردایی $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ دامنه است و بقیه‌ی فاکتورهای ضربی، حاصل ضرب دو عملگر دومحلی شوارتزی است. پس انتظار ما مبنی بر این که این دامنه حاصل ضرب دو انتشارگر شوارتزی است، برآورده می‌شود. به غیر از این، نمودارهای دیگری هم هستند که به تابع همبستگی چهار نقطه‌ای سهم می‌دهند. مثلا $\langle G_{\Delta_1}(\tau_1, \tau_3) G_{\Delta_2}(\tau_2, \tau_4) \rangle_{\text{Sch}}$ که در شکل ۹-۲ نشان داده شده است. این سهم به نسبت ظاهر و تحلیل پیچیده‌تری از سهم پیشین دارد و تعبیر فیزیکی آن، موجی شوکی در تصویر تمام‌گاری معادلش است [۲۹، ۲۱]. این نمودار در [۲۸] حساب



شکل ۲-۹: تابع چهار نقطه‌ای متقطع در گرانش JT با نمایش تصویری قرارداد شده. بعد هم دیس عملگرهای روی مرز به ترتیب Δ_1 و Δ_2 است. (عکس از [۲] برداشته شده.)



شکل ۲-۱۰: پربند C برای انتگرال‌گیری در بدست آوردن دامنه‌ی A_{cross} . (عکس از [۲] برداشته شده.)

شده است و دامنه‌ی آن به شکل زیر است.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{cross.}} &= \frac{\Gamma(\Delta_1 + ik_1 \pm ik_4)\Gamma(\Delta_1 - ik_1 \pm ik_4)}{(2C)^{\Delta_1}\Gamma(2\Delta_1)} \frac{\Gamma(\Delta_2 - ik_2 \pm ik_4)\Gamma(\Delta_2 + ik_2 \pm ik_4)}{(2C)^{\Delta_2}\Gamma(2\Delta_2)} \\
 &\times \int_C \frac{du}{2\pi i} \frac{\Gamma(u \pm ik_4)\Gamma(u + ik_1 + ik_4 \pm ik_4)\Gamma(\Delta_1 - ik_1 - u)\Gamma(\Delta_2 - ik_2 - u)}{\Gamma(u + \Delta_1 + ik_1)\Gamma(u + \Delta_2 + ik_2)}.
 \end{aligned} \tag{۳۲-۳-۲}$$

در این عبارات، پربند C در صفحه‌ی مختلط u است و در شکل ۱۰-۲ داده شده است. این پربند از مجاورت قطب‌های توابع گاما در صورت و مخرج انتگرال‌ده عبارت (۳۲-۳-۲) عبور می‌کند. با این انتخاب از پربند، دامنه‌ی A_{crossed} به شکل حاصل‌ضربی از توابع فراهننسی گاووسی نوشته می‌شود.

بدست آوردن صورت دقیق توابع همبستگی دلخواه

همانطور که برای محاسبه‌ی دامنه‌ی یک فرایند در نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی قوانین فاینمن را داریم که یک فرایند را به اجزای مختلف تجزیه می‌کنند و با جاگذاری سهم هر جزء از نمودار (راس، انتشارگر، حلقه‌ها و...) می‌توان دامنه‌ی یک نمودار را حساب کرد؛ می‌توانیم چنین روابطی را برای توابع همبستگی مرزی گرانش JT بنویسیم [۲۹]. توجه کنید که این قوانین برای محاسبه‌ی دامنه‌ی هر نموداری که شامل درج عملگرهای مرزی باشد مناسب است و تمامی اثرات گرانش کوانتومی را در خود می‌گنجاند.

برای شروع، فرض کنید که نموداری مشابه با آنچه قبلاً دیده بودیم، داده شده است. آن را به اجزای زیر می‌شکنیم و سهم هریک را در دامنه وارد می‌کنیم.

۱. به هر ناحیه‌ی که درون دایره‌ی گرمایی ایجاد شده است، یک تکانه k_i نسبت می‌دهیم. این تکانه‌ها متغیرهایی هستند که قرار است با اندازه‌ی چگالی تکانه‌ی شوارتزی، $d\mu(k_i)$ ، انتگرال‌گیری شوند.

۲. برای هر پاره‌خطی که روی دایره‌ی گرمایی است و ناحیه‌ای که تکانه‌ی k دارد را محدود می‌کند؛ یک عامل نمایی به شکل زیر وارد رابطه‌ی دامنه می‌کنیم.

$$\text{Diagram: Two points } \tau_2 \text{ and } \tau_1 \text{ connected by a curved arc labeled } k. \quad = \quad e^{-\frac{k^2}{2C}(\tau_2 - \tau_1)} \quad (33-3-2)$$

۳. برای هر نقطه‌ای که محل تقاطع یک انتشارگر دومحلی شوارتزی با بعد همدیس Δ است و همچنین ناحیه‌ی دوطرف آن تکانه‌های k_1 و k_2 دارند؛ یک فاکتور مانند زیر در عبارت مربوط به دامنه وارد می‌کنیم. این قانون مشابه با قانون راس در نمودارهای فاینمن است.

$$\text{Diagram: A horizontal line segment with a vertical bracket above it labeled } \Delta. \quad \equiv \quad \gamma_\Delta(k_1, k_2) \quad = \quad \sqrt{\frac{\Gamma(\Delta \pm ik_1 \pm ik_2)}{(2C)^{2\Delta} \Gamma(2\Delta)}}. \quad (34-3-2)$$

۴. در نهایت، برای تقاطع دو انتشارگر دومحلی شوارتزی در داخل دایره‌ی گرمایی، عامل زیر را در

دامنه درج می‌کنیم.

$$\begin{array}{c} \text{Diagram showing a cross-like structure with vertices labeled } k_1, k_2, k_3, k_4 \text{ and internal nodes labeled } \Delta_1, \Delta_2? \\ \text{The diagram consists of four lines meeting at a central point. Two lines extend upwards, one labeled } k_1 \text{ and the other } k_2. \text{ Two lines extend downwards, one labeled } k_3 \text{ and the other } k_4. \text{ Between the upper lines, there is a node labeled } \Delta_1. \text{ Between the lower lines, there is a node labeled } \Delta_2. \end{array} = \left\{ \begin{matrix} \Delta_1 & k_1 & k_2 \\ \Delta_2 & k_3 & k_4 \end{matrix} \right\}$$

(۳۵-۳-۲)

این کمیت که به شش متغیر مربوط است؛ نمادهای j_6 برای گروه $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ نامیده می‌شود.
این نمادهای پیچیده از رابطه‌ی زیر حساب می‌شوند.

$$\left\{ \begin{matrix} \Delta_1 & k_1 & k_2 \\ \Delta_2 & k_3 & k_4 \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{\Gamma(\Delta_1 + ik_1 \pm ik_\gamma) \Gamma(\Delta_2 - ik_1 \pm ik_\gamma) \Gamma(\Delta_1 - ik_\gamma \pm ik_\gamma) \Gamma(\Delta_2 + ik_\gamma \pm ik_\gamma)}{\Gamma(\Delta_1 - ik_1 \pm ik_\gamma) \Gamma(\Delta_2 + ik_1 \pm ik_\gamma) \Gamma(\Delta_1 + ik_\gamma \pm ik_\gamma) \Gamma(\Delta_2 - ik_\gamma \pm ik_\gamma)}} \\
 \times \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{du}{2\pi i} \frac{\Gamma(u \pm ik_\gamma) \Gamma(u + ik_1 + ik_\gamma \pm ik_\gamma) \Gamma(\Delta_1 - ik_1 - u) \Gamma(\Delta_2 - ik_\gamma - u)}{\Gamma(u + \Delta_1 + ik_1) \Gamma(u + \Delta_2 + ik_\gamma)}. \quad (36-3-2)$$

۵. قدمنهایی این است که عبارت بدستآمده برای دامنه را در $\frac{e^{S_i}}{2}$ ضرب کنیم.

توجه داشته باشید که این روش، توابع همبستگی کوانتومی را بدون بهنجارش به تابع پارش $Z(\beta)$ ، می‌دهد. برای دیدن کاربرد این قوانین در عمل می‌توانید به [۲۹] رجوع کنید.

۴-۳-۲ درج سایر عملگرهای در گرانش JT - مقدمه‌ای بر نقایص

ساده‌ترین عملگر ناورداری $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ همان عملگر انرژی است که $E(t) = -C\{F, t\}$ است. درج چنین عملگری تنها باعث اضافه شدن فاکتورهایی مثل $k^2/2C$ در دامنه می‌شود. برای بررسی کامل‌تر این عملگرهای می‌توانید به [۲۸، ۳۰] رجوع کنید.

اما دسته‌ی دیگری از عملگرهای که هم اهمیت فیزیکی بالایی دارند و هم از نظر ریاضی جالب توجه هستند، عملگرهای نقص هستند و در این بخش می‌خواهیم کمی در موردشان صحبت کنیم.

قبل دیدیم که کنش گرانش JT. به شکل ۱۶-۳-۲ نوشته می‌شود. انتگرال مسیر گرانشی روی توابع $f(\tau) \in \mathrm{Diff}(S^1)/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ گرفته می‌شود. این ناحیه‌ی انتگرال‌گیری، یک خمینه‌ی همتافته است و دقیقاً مدار هم‌الحاقی عنصر یکه در گروه ویراسورو است. مشاهده‌ای که شده این است که با تغییر

ناحیه‌ی انتگرال‌گیری رو سایر مدارهای هم‌الحقیقی گروه ویراسورو، می‌توانیم مدل‌های مختلف گرانشی که اصلاح‌شده‌ی مدل JT هستند، بدست آوریم که تمامی این مدل‌ها، تعبیر فیزیکی و خواصِ جالب‌توجهی دارند.

در تمامی این مدل‌ها، کنش به شکل

$$S_H[f] = -C \int_0^\beta d\tau \{F \circ_H f(\tau), \tau\} \quad (37-3-2)$$

نوشته می‌شود. مدل‌های مختلف با ماتریس مونو درمی متفاوت دسته‌بندی می‌شوند که این ماتریس، خاصیت تناوبی تابع $F(\tau)$ را به‌نوعی تعیین می‌دهند.

$$F(\tau + \beta) = M \cdot F(\tau) = \frac{aF(\tau) + b}{cF(\tau) + d} \quad (38-3-2)$$

ما مدل‌های اصلاح‌شده را با کلاس‌های تزویجی ماتریس M نام‌گذاری می‌کنیم و زیرگروه پایدارساز H متشکل از تمامی اعضایی است که با ماتریس مونو درمی جابه‌جا می‌شوند.

چهار دسته مدل با نقص داریم که آنها را اجمالاً بررسی می‌کنیم و نتایج مهمش را نقل می‌کنیم.

۱. **نقایص بیضوی:** این مدل با ماتریس مونو درمی زیر مشخص می‌شوند.

$$F \circ_\theta f = \tan \frac{\pi}{\beta} \theta f, \quad M = \begin{pmatrix} \cos(\pi\theta) & \sin(\pi\theta) \\ -\sin(\pi\theta) & \cos(\pi\theta) \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}). \quad (39-3-2)$$

همچنین زیرگروه پایدارساز $U(1)_\theta$ است.

با انتخاب پیمانه‌ی همدیس و توسعه‌ی این مختصات‌ها به داخل مرز، می‌توانیم متریک این مدل‌ها داخل دایره‌ی گرمایی را بدست آوریم.

$$ds^2 = 4 \left(\frac{\pi\theta}{\beta} \right)^2 \frac{d\tau^2 + dz^2}{\sinh^2 \frac{\pi\theta}{\beta} z}. \quad (40-3-2)$$

این هندسه، یک تکینگی مخروطی به اندازه‌ی $2\pi\theta$ در مرکز خود دارد. همچنین، انتگرال مسیر

گرانشی آن در مرتبه‌ی تک‌حلقه قابل محاسبه است و نتیجه آن در زیر آمده است.

$$\begin{aligned} Z(\beta, \theta) &= \beta \int_{\text{Diff } S^1/U(1)_\theta} [Df] e^{C \int_0^\beta d\tau \{\tan \frac{\pi}{\beta} \theta f(\tau), \tau\}} \\ &= \int_0^{+\infty} dk \frac{\cosh(2\pi\theta k)}{\pi} e^{-\beta \frac{k^2}{2C}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi C}{\beta} \right)^{1/2} e^{\frac{2\pi^2 C}{\beta} \theta^2}. \end{aligned} \quad (41-3-2)$$

توجه کنید که محاسبه‌ی انتگرال مسیر گرانشی تک‌حلقه تنها با یک مد صفر روبرو می‌شود، چون تنها تقارن دوران در صفحه حول نقطه‌ی تکین باقی‌مانده است. برای تحلیل بیشتر این مدل‌ها می‌توانید به [۳۱] رجوع کنید.

نتیجه‌ی مهمی که این مدل‌ها به ما می‌آموزنند این است که اگر در قرصِ هذلولوی یک تکینگی مخروطی در نقطه‌ی x_c درج شده باشد؛ انحنای اسکالر ریچی شامل دلتای دیراک در آن نقطه خواهد بود.

$$R(x) = -2 + 4\pi(1-\theta)\delta(x-x_c) \quad (42-3-2)$$

همچنین، در فرمول‌بندی انتگرال مسیر گرانشی، تعبیر این نقص معادل با افزودن یک عملگر $\exp\left(\frac{1}{4G_N}(1-\theta)\Phi(x_c)\right)$ در محل نقص است.

۲. **نقایص بیضوی استثنایی** : در نقص بیضوی، وقتی که n طبیعی باشد، گروه پایدارساز تقویت می‌شود و تبدیل به گروه $H = \text{PSL}^n(2, \mathbb{R})$ می‌شود.^{۲۶}

$$F \circ_n f = \tan \frac{\pi}{\beta} n f, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}). \quad (43-3-2)$$

در این حالت، تکینگی مخروطی، یک اضافه‌ی مخروطی به اندازه‌ی $2\pi n$ دارد. این اضافه‌ی مخروطی باعث می‌شود که هندسه عملاً تکثیر شود.

^{۲۶} منظور از این گروه، گروهی لی است که جبر مولدهای آن سه عملگر $\{L_+, L_n, L_{-n}\}$ هستند. می‌دانیم که این سه مولد ویراسورو تشکیل یک زیرجبر بسته می‌دهند.

نتیجه‌ی زیر را برای دامنه‌ی تک‌حلقه‌ی این مدل‌ها در فرمول‌بندی انتگرال‌مسیر گرانشی داریم.

$$\begin{aligned} Z(\beta, \lambda) &= \beta \int_{\text{Diff } S^1/U(1)_\lambda} [\mathcal{D}f] e^{C \int_0^\beta d\tau \{\tanh \frac{\pi}{\beta} \lambda f(\tau), \tau\}} \\ &= \int_0^{+\infty} dk \frac{\cos(2\pi\lambda k)}{\pi} e^{-\beta \frac{k^2}{2C}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi C}{\beta} \right)^{1/2} e^{-\frac{C}{2\beta} b^2}. \end{aligned} \quad (44-3-2)$$

۳. **نقایص هذلولوی:** این نقص را می‌توانیم به چشم توسعه‌ی تحلیلی پارامتر نقص بیضوی بینیم. گروه پایدارساز مجدداً همان $H = U(1)_\lambda$ است. $\theta \rightarrow i\lambda$

$$F \circ_\lambda f = \tanh \frac{\pi}{\beta} \lambda f, \quad M = \begin{pmatrix} \cosh(\pi\lambda) & \sinh(\pi\lambda) \\ \sinh(\pi\lambda) & \cosh(\pi\lambda) \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}). \quad (45-3-2)$$

در این مدل، متریک هندسه به شکل

$$ds^2 = 4 \left(\frac{\pi\lambda}{\beta} \right)^2 \frac{d\tau^2 + dz^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{\beta} \lambda z}, \quad (46-3-2)$$

است. این هندسه به شکل یک استوانه است که یکی از دوایر مرزی آن در $z = \infty$ است و دایره‌ی دیگر که در $z = \frac{\beta}{4\lambda}$ واقع شده است، یک مرز ژئودزیک است و محیط آن $2\pi\lambda \equiv b$ است. هم‌چنین نتیجه‌ی زیر را برای تابع پارش تک‌حلقه‌ی این مدل داریم.

(47-3-2)

$$Z(\beta, 0) = \beta \int_0^{+\infty} dk \frac{1}{\pi} e^{-\beta \frac{k^2}{2C}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi C}{\beta} \right)^{1/2}.$$

۴. **نقایص سهموی:** پایدارساز این مدار هم‌الحاقی گروه ویراسورو به شکل $H = U(1)$ است.

$$F \circ_0 f = f, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}), \quad (48-3-2)$$

این مدل را می‌توانیم به چشم مدلی حدی از مدل‌های بیضوی یا هذلولوی بینیم. تکینگی مربوط به این مدل، یک تکینگی از نوع تیزی است که در بینهایت واقع شده است. هم‌چنین نتیجه‌ی زیر

را برای تابع پارش تک حلقه داریم.

$$Z(\beta, 0) = \beta \int_0^{+\infty} dk \frac{1}{\pi} e^{-\beta \frac{k^2}{2C}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi C}{\beta} \right)^{1/2}. \quad (49-3-2)$$

۵-۳-۲ نگاهی به روش‌های متعارف یافتن دامنه‌ها

در این بخش نگاه کیفی و مختصری به روش‌های مختلف بدست آوردن دامنه‌های گرانش JT می‌کنیم و به طور خلاصه روش کار هریک را بحث می‌کنیم و ارجاعاتی به کارهای مهم و اساسی می‌دهیم. در آخر هم این روش‌های مختلف را مقایسه می‌کنیم و مزایا و معایب هر کدام را بر می‌شماریم.

۱. رهیافت ذره‌ی آزاد: با بازتعریف کردن $F' = e^\varphi$ (که شرط صعودی بودن F را همواره دارد)، می‌بینیم که کنش شوارتزی به شکل کنش بوزونی آزاد قابل نوشتن است.

$$S = -C \int_{\cdot}^{\beta} dt \{F, t\} = \frac{C}{2} \int_{\cdot}^{\beta} dt (\partial_\tau \varphi)^2. \quad (50-3-2)$$

شرط تناوبی روی F هم باید به طور دستی اعمال شود که با داشتن s شرط تناوبی بودن را می‌توانیم به کمک روش ضرایب لاغرانژ، وارد لاغرانژی کنیم. یعنی باید $\int_{\cdot}^{\beta} e^{\varphi(s)} ds = +\infty$ را با کمک ضریبی نامعین وارد لاغرانژی (۵۰-۳-۲) کنیم. این کار باعث می‌شود که پتانسیلی نمایی بر حسب میدان در لاغرانژی و کنش ظاهر شود.

به علت ناموضعی بودن لاغرانژی و کنش در این روش، انتشارگر و توابع چند نقطه‌ای را نمی‌توان با روش‌های متعارف و استاندارد نظریه‌ی میدان‌ها بدست آورد. اما با کمک اتحادهای خاص توابع گاما، می‌توان محاسبات مربوط به انتشارگر را ساده‌تر کرد و به صورت انتشارگر دومحلی شوارتزی نوشت. برای مشاهده‌ی جزئیات بیشتر این روش، به [۳۲، ۳۳] رجوع کنید.

کمی هم در مورد مزایا و معایب این رهیافت صحبت کنیم. این رهیافت بسیار شهودی و فیزیکی است، چون کنش را مستقیماً به کنش بوزونی آزاد تقلیل می‌دهد؛ اما همانطور که دیدیم ارضا کردن شرایط مرزی در آن کمی شرایط را پیچیده‌تر می‌کند و محاسبات مربوط به انتشارگر یا نمودارهای فاینمن آن، روش‌های نامتعارف نیاز دارد. هم‌چنین گروه تقارنی نظریه، یعنی گروه $PSL(2, \mathbb{R})$ به شکل آشکار در کنش بوزونی معلوم نیست.

۲. رهیافت حدگیری از تئوری لیوویل : نظریه‌ی گرانش JT را می‌توانیم به عنوان حدخاصلی (حدهای دومقیاسی) از نظریه میدان همدیس نگاه کنیم. در حد بار مرکزی بالا، هر نظریه میدان همدیس در سطح دینامیک با نظریه میدان لیوویل معادل است. کنش کلاسیک نظریه میدان لیوویل به شکل زیر است.

$$S_L = \frac{1}{4\pi b^2} \int_0^T d\tau \int_0^\pi d\sigma [(\partial\phi)^2 + 4\mu e^{2\phi}], \quad (51-۳)$$

که این نظریه روی جهان‌رویه‌ای استوانه‌ای با مختصات $\sigma \in (0, \pi)$ و زمان اقلیدسی τ با دوره‌ی تناوب T تعریف شده است. بار مرکزی این نظریه میدان همدیس، بر حسب پارامترهای کنش به شکل $c = 1 + (b + b^{-1})^2$ است. می‌توانیم این جهان‌رویه‌ای استوانه‌ای را روی غشاها ای بیندیم. اگر یک جفت غشای ZZ در دو انتهای جهان‌رویه $(\sigma = 0, \sigma = \pi)$ قرار بدهیم [۳۴]، می‌توانیم دامنه‌ی خلا این جهان‌رویه‌ی جدید را با روش انگرال مسیر حساب کنیم.

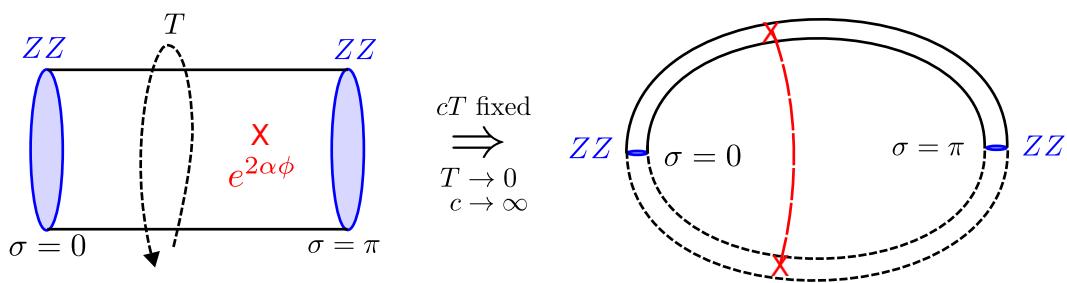
$$\chi_{+}(q) = \frac{q^{\frac{1-c}{4}}(1-q)}{\eta(iT/2\pi)}, \quad q = e^{-T}. \quad (52-۳)$$

این دامنه چیزی به جز مشخصه‌ی ویراسورو نیست.

در حدی که استوانه باریک و طولانی است ^{۲۵}، این دامنه تبدیل به دامنه‌های گرانشی JT می‌شود. در این حد، جهان‌رویه به شکل یک استوانه با دو دایره در انتهای جهان‌رویه درمی‌آید که این دایره‌ها دقیقاً همان دایره‌های گرمایی در گرانش JT هستند. برای بررسی دقیق‌تر به شکل ^{۱۱-۲} نگاهی بیندازید.

با این‌کار می‌توانیم به مدل‌های متنوع دیگری برسیم که همگی کنش‌های هندسی روی مدارهای هم‌الحاقی خاصی از گروه ویراسورو هستند ^[۳۵]. حتی این تناظر ما را قادر می‌کند که دامنه‌ها را هم حساب کنیم، برای این‌کار، یک عملگر راس نخستین از نظریه میدان لیوویل، مثل $e^{2\alpha\varphi(u,v)}$ را روی جهان‌رویه درج می‌کنیم. مطابق روندی که در بالا طی شد (حد دو مقیاسی و دامنه‌های نظریه‌های همدیس)، می‌توانیمتابع همبستگی دونقطه‌ای را که در ^(۲۷-۳) دیدیم به دست بیاوریم. بیشتر چیزهایی که قبل از مدل گرانشی JT دیدیم، مثل بدست آوردن تابع همبستگی چهار نقطه‌ای متقطع و همچنین گرانش JT در حضور مقایص، می‌توانیم با انجام کارهای خاصی روی نظریه میدان همدیس لیوویل معادلاً انجام داد.

^{۲۷} این حدگیری، علاوه بر حدهای $b \rightarrow \infty$ است. به خاطر همین دو حدگیری است که به این‌کار حدگیری دومقیاسی می‌گویند.



شکل ۲-۱۱: نظریه میدان همدیس لیوویل بین دو غشای ZZ در حدود مقیاسه. عملگرهای درج شده با رنگ قرمز نشان داده شده‌اند. (عکس از [۲] برداشته شده.)

از نقاط قوت این روش این است که وجود نظریه میدان همدیس دوبعدی در گرانش JT را می‌توانیم به وضوح در سطح کنش بینیم؛ همچنین تمامی روش‌ها و قدرت‌هایی که در نظریه میدان همدیس هست، اینجا قابل استفاده است. اما در مقابل، تصویر توده‌ی گرانش JT در این رهیافت شفاف نیست.

۳. رهیافت ذرهی مرزی: راه دیگر، بازنویسی مستقیم جمله‌ی مرزی گیبونز-هاوکینگ-یورک در کنش گرانشی به کمک قضیه‌ی گاووس-بوونه به شکل انتگرال مسیر یک ذره است [۳۶، ۳۷]. نظریه‌ی بدست آمده یک ذره‌ی غیرنسبیتی در پس زمینه‌ی هذلولوی را توصیف می‌کند که در میدان مغناطیسی بزرگ قرار گرفته است. از حل این مسئله می‌توانیم به توابع همبستگی چند نقطه‌ای برسیم [۳۸].

با کمک انتشارگر ذرات در میدان مغناطیسی (در حد $\infty \rightarrow q$) می‌توانیم رابطه‌ای برای انتشارگر عملگرهای مرزی JT پیدا کنیم.

$$\langle \mathcal{O}(\tau_1) \dots \mathcal{O}(\tau_n) \rangle \quad (53-3-2)$$

$$= \int \frac{\prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{Z_i}}{V(\text{SL}(2, \mathbb{R}))} G(\tau_{12}; x_1, x_2) \dots G(\tau_{n1}; x_n, x_1) \langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle_{\text{QFT}},$$

که $G(\tau_{12}; x_1, x_2)$ نمایانگر انتشارگر ذره‌ی غیرنسبیتی در حضور میدان مغناطیسی قوی است.

$$G(\tau_{ij}; x_i, x_j) \equiv \langle x_i | e^{-\tau_{ij} H} | x_j \rangle \quad (54-3-2)$$

از نقاط قوت این رهیافت، شهودی و فیزیکی بودن آن است، علی‌الخصوص که با انتشار ذره در میدان مغناطیسی معادل است. همچنین می‌توانیم به توده گرانش JT دسترسی داشته باشیم، یعنی

مثلاً می‌توانیم برهمکنش در توده اضافه کنیم و اثرش را اختلالی بررسی کنیم؛ برخلاف مدل قبلی که در آن تصویر توده واضح نبود. اما خواص تقارنی و ویژگی‌های مشخص کنش گرانشی در این تصویر مخفی شده است.

۴. رهیافت نظریه میدان‌های پیمانه‌ای دوبعدی: قبلاً به فرمول‌بندی گرانش JT روی یک خمینه‌ی بسته اشاره کردیم. برای گروه‌ی G ، نظریه‌ی پیمانه‌ای BF روی خمینه‌ی M با مرز ∂M ، به شکل زیر معرفی می‌شود، که شامل جمله‌ی مرزی است تا اصل کنش آن خوش‌تعریف باشد.

$$I_{BF} = - \int_M \text{Tr}(BF) + \frac{1}{2} \oint_{\partial M} d\tau \text{Tr}(BA_\tau), \quad B = A_\tau|_{\partial M}. \quad (55-3-2)$$

مدل‌های BF از طریق کاهش ابعادی کنش سه‌بعدی Chern-Simons هم قابل توجیه و بحث هستند. حالا باید برخی جنبه‌های نظری این مدل را مرور کنیم تا راحت‌تر بتوانیم مدل گرانشی JT را با آن بحث و بررسی کنیم.

با حل معادله‌ی حرکت برای B ، میدان F به شکل پیمانه‌خالص خواهد بود؛ یعنی $A_\mu = g^{-1} \partial_\mu g$. بنابراین دینامیک کل نظریه به دینامیک مرز تقلیل پیدا می‌کند و کنش به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$I_{BF} = \frac{1}{2} \oint_{\partial M} d\tau \text{Tr}(g^{-1} \partial_\tau g)^2. \quad (56-3-2)$$

در مدل‌های پیمانه‌ای، عملگرهای ویلسون مشاهده‌پذیرهای فیزیکی معتبر و پیمانه‌ناوردا هستند. چون هر عملگر ویلسون مرز را دوبار قطع می‌کند، پس در نگاه اول، باید با عملگرهای دومحلی شوارتزی و انتشارگرهای گرانش JT ارتباط داشته باشد.

نتایج مربوط به تابع پارش دیسک با درج یک عملگر ویلسون، به شکل زیر خلاصه می‌شوند [۳۹، ۴۰]. باید اول از همه تابع پارش و انتشارگر را در مدل توپولوژیک مرزی پیدا کنیم.

$$Z(\beta) = \sum_R (\text{R dim})^{\text{R}} e^{-\beta C_R}, \quad (57-3-2)$$

$$\langle G_{MM}^R(\tau, \cdot) \rangle = \sum_{R_1, R_2, m_1, m_2} \text{R dim}_1 \text{R dim}_2 e^{-C_{R_1} \tau} e^{-C_{R_2} (\beta - \tau)} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix}^{\text{R}}, \quad (58-3-2)$$

در این روابط، \sum_R نمایانگر جمع روی تمامی نمایش‌های یکانی کاهش‌ناپذیر گروه G است. همچنین، C_{R_i} و $\text{dim } R_i$ به ترتیب بعد نمایش و دو جمله‌ای کسیمیر این نمایش هستند. جمع \sum_{m_i} هم روی حالت‌های مختلف یک نمایش می‌خورد.

حالا تناظر بین توابع همبستگی این طور برقرار می‌شود: هرجا جمع روی نمایش‌ها دیدیم، آن را به انتگرال تبدیل می‌کنیم ($\sum_R \rightarrow \int_R^{+\infty} dk$) و سپس جاگذاری‌های زیر را انجام می‌دهیم.

(۵۹-۳-۲)

$$R \dim \rightarrow \frac{1}{\pi^2} k \sinh 2\pi k, \quad \Re j \rightarrow \sqrt{\frac{\Gamma(\Delta \pm ik_1 \pm ik_2)}{(2C)^{\Delta} \Gamma(2\Delta)}}, \quad \Im j \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \Delta_1 & k_1 & k_2 \\ \Delta_2 & k_3 & k_4 \end{array} \right\}.$$

نقایص هم با درج عملگر $\text{Tr}_R e^{2\pi\beta}$ ایجاد می‌شوند و درج عملگر کسیمیر معادل با درج کردن عملگر انرژی (مشتق شوارتزی) در نظریه‌ی گرانشی است.

از مزایای این روش این است که خواص تقارنی و خواص گروهی تقارن در بهروشنی آشکار است. به‌آسانی می‌توانیم میدان مادی به آن اضافه کنیم و همچنان عملگرهای مشاهده‌پذیر در آن کاملاً مشخص و واضح هستند. اگرچه اشکالات و سختی‌های فنی مربوط به جزئیات نظریه‌گروهی همچنان هست و این‌که فضای مازولی توپولوژی‌های متفاوت، دیگر فضای مازولی رویه‌های ریمانی نیست.

۴-۲ کرم‌چاله‌های سهیم در گرانش JT

در این قسمت، با سهم‌های جدید به دامنه‌های گرانشی روبرو می‌شویم که سهم‌های کرم‌چاله‌ای نامیده می‌شوند. اگرچه بررسی گرانش JT در سطح تابع پارش قرص، بسیار جالب توجه بود، اما انگیزه‌ی مهمی برای افزودن این سهم‌ها داریم. نتایجی که فعلاً از گرانش JT بدست می‌آوریم، در تعارض با آن‌چه از سامانه‌های کوانتمی کراندار انتظار داریم، است. ابتدا به دقت این انگیزه را بیان می‌کنیم و سپس یاد می‌گیریم که چطور این سهم‌ها افزوده می‌شوند؛ در نهایت می‌بینیم که سهم جدید چطور انتظارمان را برآورده می‌سازد.

۱-۴-۲ انگیزه‌ی افزودن سهم‌های کرم‌چاله‌ای

همانطورکه اشاره کردیم، ناهمخوانی بین رفتار سامانه‌های کوانتم مکانیکی و سامانه‌ای که روی مرز گرانش JT هست وجود دارد؛ اما به علت اصل تمام‌نگاری، می‌دانیم که نباید چنان ناهمخوانی بروز می‌کرد. این ناهمخوانی به طور مشخص در افت توابع همبستگی در زمان‌های دور معلوم می‌شود.

یک سامانه‌ی کوانتوم مکانیکی $1 + 0$ - بعدی را در نظر بگیرید؛ یعنی سامانه‌ای که بعد فضایی ندارد و فقط درجات آزادی داخلی دارد. تابع همبستگی دونقطه‌ای دلخواه آن، در پایه‌های ویژه‌انرژی این سامانه کوانتومی، این‌طور نوشته می‌شود.

$$\text{Tr} [e^{-\beta H} \mathcal{O}(t) \mathcal{O}(\cdot)] = \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} |\langle n | \mathcal{O} | m \rangle|^2 e^{-it(E_m - E_n)}, \quad (1-4-2)$$

این تابع دونقطه‌ای، به علت وجود عامل نمایی با فازهای مختلف نوسانی است، اما در زمان‌های دور، سهم غالب از جملات $n = m$ می‌آید. بنابراین در زمان‌های دور، این تابع دونقطه‌ای به شکل زیر رفتار می‌کند.

$$\text{Tr} [e^{-\beta H} \mathcal{O}(t) \mathcal{O}(\cdot)] \approx \sum_n e^{-\beta E_n} |\langle n | \mathcal{O} | n \rangle|^2. \quad (2-4-2)$$

اما این نوع رفتار نوسانی حول یک مقدار میانگین مشخص، در تنش با نتایجی است که تا الان از گرانش JT دیدیم؛ چه در حد نیمه‌کلاسیک یا در سطح کاملاً کوانتومی (طبیعتاً بدون درنظرگیری سهم‌های کرم‌چاله‌ای) نمی‌توانیم چنین رفتاری در گرانش JT ببینیم. این انتظارمان به علت اصل تمام‌نگاری است و این‌که سامانه‌ی کوانتوم مکانیکی مرز گرانش JT، دوگان با خود گرانش JT است.

در سطح نیمه‌کلاسیک، مقدار چشم‌داشتی توابع دونقطه‌ای مرزی، به شکل نمایی افت می‌کند.

$$\frac{\langle \mathcal{O}(t) \mathcal{O}(\cdot) \rangle_\beta}{Z(\beta)} = \left(\sinh \frac{\pi}{\beta} t \right)^{-2\Delta} \sim e^{-\frac{\pi}{\beta} \Delta t}. \quad (3-4-2)$$

هم‌چنان، در سطح کوانتومی هم، تابع همبستگی دونقطه‌ای متناسب با t^{-3} افت می‌کند.

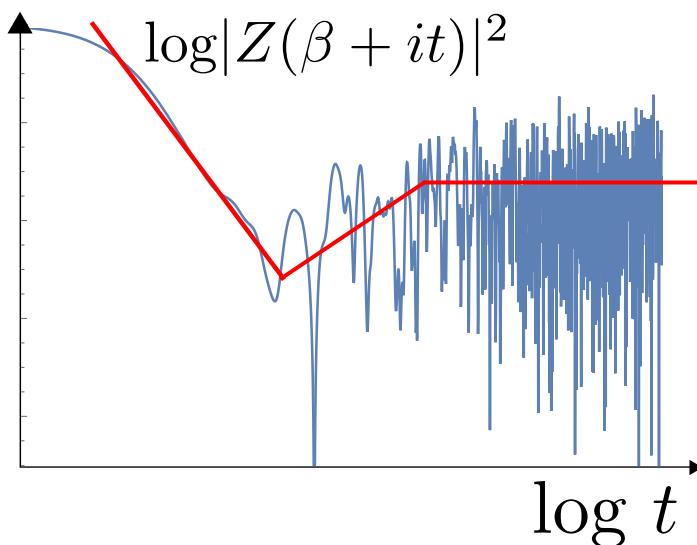
بنابراین تعارضی بین انتظارمان از تصویر تمام‌نگاری گرانش JT و نتایجی که تا الان بدست آورده‌ایم، وجود دارد. این عدم همخوانی بیانگر از دست رفتن اطلاعات است و منشاً اصلی آن هم پیوستاری از انرژی‌ها در طیف نظریه است [۴۱] که در جلوتر این توضیح مشخص می‌شود.

می‌توانیم این مسئله را ریشه‌ای تر هم بررسی کنیم. همانطور که تحلیل ساده‌ی بالا مشخص کرد، اشکال از رفتار نوسانی در (۱-۴-۲) سرچشمه می‌گیرد. پس می‌توانیم کمیتی بسازیم که تنها همین عوامل نوسانی را در خورد بگنجاند؛ این کمیت را ضریب‌شکل طیفی می‌نامیم.

$$Z(\beta + it) Z(\beta - it) = \sum_{n,m} e^{-(\beta+it)E_n} e^{-(\beta-it)E_m}, \quad (4-4-2)$$

مشخصا، این کمیت از مربع تابع پارش در $t = 0$ شروع می‌شود و در زمان‌های دور، حول میانگین $Z(2\beta)$ نوسان می‌کند. دوره‌ی این نوسان‌ها از مقیاس تفاوت انرژی بین حالت‌های مجاور کوانتومی است. اگر با نظریه‌های آشوبناک یا نظریه‌های با طیف پیوستار روبرو باشیم، این نوسانات بسیار پربسامد هستند، اما در نظریه‌های انتگرال‌پذیری مثل JT، چنین نیست و ضریبِ شکلِ طیفی خوش‌رفتارتر و رامتر است.

برای اطلاع بیشتر، ضریبِ شکلِ طیفی در یک نظریه‌ی آشوبناک یا تصادفی، مطابق شکل ۱۲-۲ است. به‌طور میانگین، اول روندی نزولی را طی می‌کند؛ سپس افزایشی و در زمان‌های خیلی دور، حول مقدار میانگینی نوسان دارد. اما چطور می‌توانیم این ویژگی را که در سطح تابع پارش قرصی ندیده‌بودیم، وارد گرانش JT کنیم؟ جواب این است که برای دیدن آثار مذکور، باید آثار گرانشی دیگری را وارد کار کنیم؛ یعنی پیکربندی‌های گرانشی جدیدی که توپولوژی مختلفی دارند. به این پیکربندی‌های جدید، کرم‌چاله‌های گرانشی می‌گوییم. در این بخش، مختصراً ایده‌های اصلی و محاسبات اساسی را مرور می‌کنیم.



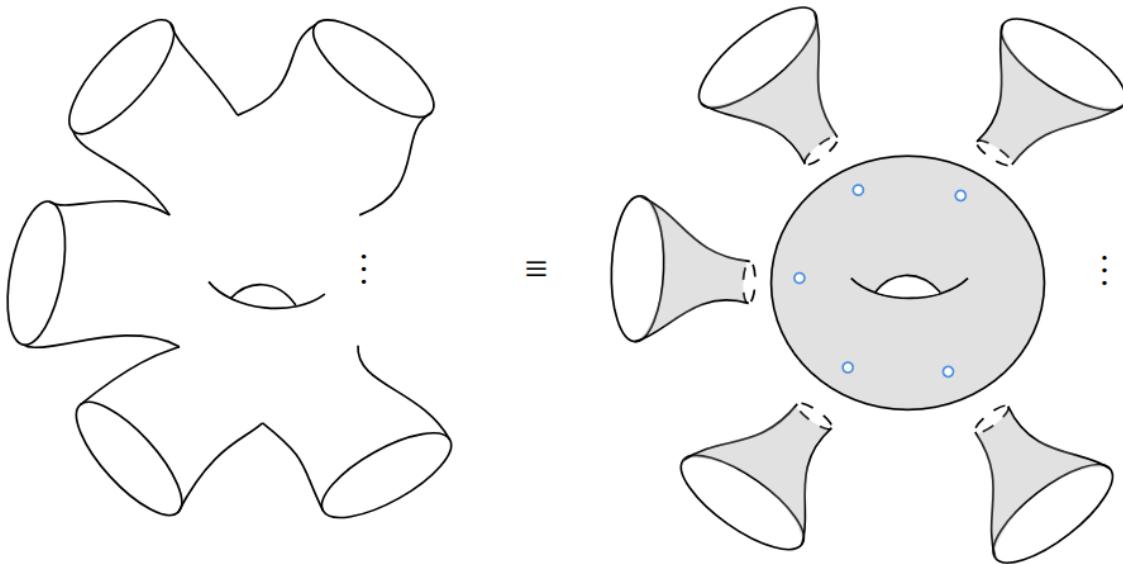
شکل ۱۲-۲: ضریبِ شکلِ طیفی برای یک نظریه‌ی آشوبناک. داده‌های متوسط‌گیری شده با خط قرمز نشان‌داده شده‌اند. (عکس از [۲] برداشته شده.)

۲-۴-۲ دامنه‌های پیچیده‌تر: رویه‌هایی با چندین مرز ژئودزیک و $g \geq 1$

حالا وقت آن است که انتگرال مسیر گرانشی را با درنظر گرفتن توپولوژی‌های مختلف تکمیل کنیم. بیشتر این نتایج و همچنین ارتباط با نظریه‌ی ماتریس تصادفی کار در مقاله‌ی معروف [۴۲] انجام شده است. اینجا هدفمان بیان مقدمات و همچنین آشنایی اولیه با این ایده‌هاست.

نگاهی کلی به فصل ۳-۳-۲ بیندازیم. در این فصل، برای محاسبه‌ی تابع پارش از طریق فرمول‌بندی انتگرال مسیر اقلیدسی، هندسه را قرص در نظر گرفتیم. نتیجه گرفتیم که طول خم مرزی، L ، و همچنین مقدار دیلاتون روی خم مرزی، ϕ_θ ، هر دو واگرا هستند، اما نسبت این دو ثابت است و برابر $\frac{L}{\phi_\theta} = \frac{\beta}{C}$ است. سازوکار جدید هم دقیقاً همین‌طور است، فقط قرار است جمعی روی توپولوژی‌های مختلف در انتگرال مسیر داشته باشیم.

به شکل زیر ۱۳-۲، که رویه‌ای ریمانی متشکل از n مرز است و هر کدام طول β_i دارند، نگاه کنید.



شکل ۱۳-۲: رویه‌ای ریمانی سمت چپ قابل شکستن به رویه‌ی ریمانی سمت راست است؛ نقطه‌های قرمز روی چنبره‌ی وسطی نمایانگر سوراخ هستند. آیا فیزیک این دو رویه‌های ریمانی هم معادل است؟ آیا ممکن است به نحوی این دامنه‌ی پیچیده در گرانش JT را بتوانیم به اجزای سازنده‌ی آن که بسیار ساده‌تر هستند، تبدیل کنیم؟ به زبان فیزیکی یعنی

$$Z_{\text{grav}}(\beta_1, \dots, \beta_n) \stackrel{?}{=} \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\text{BH}}} (e^{-\beta_1 H}) \dots \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\text{BH}}} (e^{-\beta_n H}) \quad (5-4-2)$$

که H یک هامیلتونی روی فضای هیلبرت یک سیاه‌چاله‌ی فرضی است. هدف از این بخش و بخش

بعدی این است که این ارتباط را دقیق‌تر بفهمیم و بتوانیم شهود فیزیکی مناسبی برای شکل^{۱۳-۲} پیدا کنیم.

برای شروع تحلیل‌مان، یکبار دیگر به کنش اقلیدسی JT نگاه کنیم که شامل جمله‌ی توپولوژیک است.

$$\begin{aligned} I = & -\frac{S}{4\pi} \left[\int_M \sqrt{g} R + 2 \oint_{\partial M} \sqrt{h} K \right] \\ & - \frac{1}{16\pi G_N} \left[\int_M \sqrt{g} \Phi(R+2) + 2 \oint_{\partial M} \sqrt{h} \Phi(K-1) \right], \end{aligned} \quad (6-4-2)$$

جمله‌ی اول، جمله‌ی گاووس-بونه است؛ g متريک روی سطح ريماني و M خمينه‌ی ريماني است. در فرمول‌بندی انتگرال‌مسير گرانشی، جمعی روی توپولوژی‌هاي غيربدويه اضافه می‌کنیم. در هر مرتبه از جمع روی توپولوژی، انگار که يك دسته

به هندسه اضافه می‌کنیم؛ در اين صورت، جمله‌ی اول کنش (6-4-2) که متناسب با مشخصه‌ی اويلر است، ما را قادر می‌سازد که تابع پارش را بسط توپولوژیک بدھيم.

$$Z_{\text{grav,conn}}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \sum_{g=0}^{\infty} e^{S.(2-2g-n)} Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n). \quad (7-4-2)$$

توجه کنید که در تعداد سوراخ‌های ثابت n ، با افزایش دسته‌ها ، ضریب تابع پارش، $Z_{g,n}$ بیشتر منفی می‌شود و این یعنی سهم‌های کرمچاله‌ای به تابع پارش، با پیچیده‌تر شدن هندسه‌ی کرمچاله، کوچک و کوچکتر می‌شوند.

برای سادگی کار، اول رویه‌ای ريماني با g دسته و n مرز ژئودزیک^{۲۸} ، با طول b را نگاه کنیم که مرز تمام‌نگار (يعني مرز در بي نهايت) ندارد. در اين صورت، انتگرال‌مسير به شکل زير بازنويسي می‌شود.

$$\int \frac{[Dg_{\mu\nu}][D\Phi]}{V(\text{Diff})} e^{-I_{\text{JT}}} = \int \frac{[Dg_{\mu\nu}]}{V(\text{Diff})} \delta(R+2), \quad (8-4-2)$$

به علت عدم وجود مرز هولوگرافیک، جملات مرزی کنش ظاهر نمی‌شوند و با انتگرال‌گیری روی میدان دیلاتونی به شکل سمت راست می‌رسیم. اما عبارت سمت راست تعبیری جالب دارد: انتگرال‌مسير کنش JT روی چنین خمينه‌هایی، حجم يك فضا است^{۲۹} ؟ فضایی که دربرگیرنده‌ی تمامی متريک‌های هذلولی است. البته اين فضا را باید با گروه وابسانی خارج قسمتی کرد، چون که متريک‌هایی که در

^{۲۸}مرز ژئودزیک طبق تعریف مرزی است که انحنای خارجی‌اش صفر است.

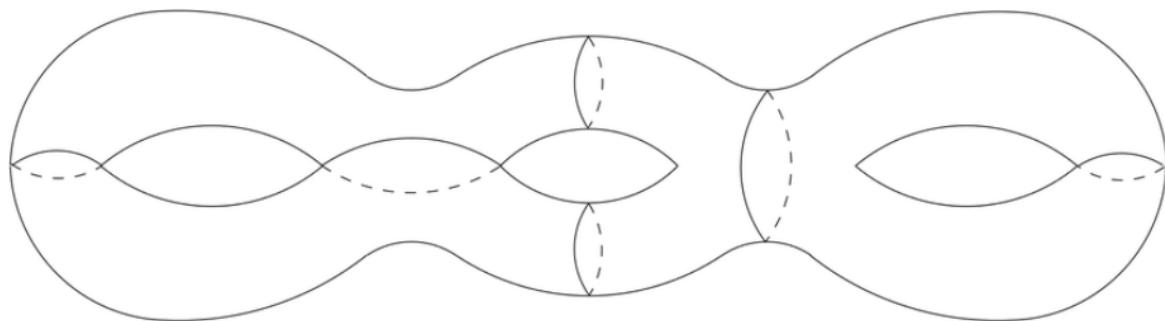
^{۲۹}چون انتگرال‌گیری فقط شامل مثر است و انتگرال‌ده برابر واحد است.

دستگاه‌های مختصاتی مختلف نوشته شده‌اند، از لحاظ فیزیکی کاملاً معادل هستند. این دقیقاً تعریف حجم فضای ماژولی رویه‌های ریمانی است. این فضا را با $(\bar{b})_{M_{g,n}}$ نشان می‌دهیم.^{۳۰}

محاسبه‌ی اندازه‌ی این انتگرال مسیر خودش پیچیدگی‌های خاصی دارد، برای دیدن جزئیات فنی می‌توانید به [۴۲، ۴۳] رجوع کنید. نتیجه‌ی نهايی این است که اندازه‌ی صحیح روی فضای ماژولی $M_{g,n}(\bar{b})$ ، باید از ۲-فرم وايل-پترسن بدست آيد. این ۲-فرم، از تجزیه‌ی رویه‌های ریمانی در دستگاه مختصات فنچل-نیلسن بدست می‌آید. می‌دانیم که هر رویه‌ی ریمانی را می‌توان به $n + 2 - 2g$ شکل «شلوارمانند» تجزیه کرد که توسط $n + 3 - 3g$ تیوب به هم وصل می‌شوند. طول متناظر با هر کدام از این برش‌ها \tilde{b}_i و زاویه‌ی چرخش هر کدام هم τ_i است. (برای مشاهده‌ی دقیق‌تر این تجزیه و پارامترهایش به شکل‌های ۲-۴-۲، ۱۵-۲ و ۱۶-۲ نگاهی کنید.) در این مختصات، ۲-فرم وايل-پترسن به شکل

$$\omega_{g,n} = \sum_{i=1}^{3g-3+n} d\tilde{b}_i \wedge d\tau_i. \quad (9-4-2)$$

است.



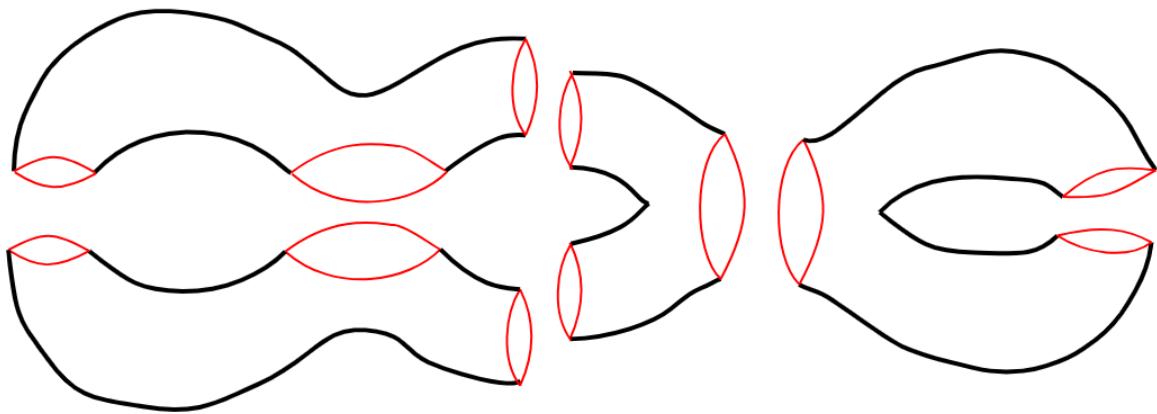
شکل ۲: یک رویه‌ی ریمانی با $g = 3$ و بدون سوراخ که برای آن تجزیه‌ی شلواری را انجام می‌دهیم.

فرم حجمی که از این ۲-فرم بدست می‌آید و برای محاسبه‌ی حجم فضای ماژولی استفاده می‌شود به شکل زیر است.

$$\frac{\omega_{g,n}^{3g-3+n}}{(3g - 3 + n)!} \quad (10-4-2)$$

اگرچه این فرم حجم ساده به نظر می‌رسد، اما مشخص کردن نواحی انتگرال‌گیری برای رویه‌ای ریمانی با $g \geq 2$ ، بسیار دشوار است؛ زیرا هنگام خارج قسمتی کردن این فضا به گروه نگاشت‌کلاس یا گروه

^{۳۰}بعد حقیقی این فضا $6 - 2n - 6g$ است.



شکل ۱۵-۲: رویه‌ی ریمانی شکل ۴-۲ به چهار شلوار تقسیم شده که با ۶ استوانه به هم متصل می‌شوند.

MCG = Diff/Diff. ، نواحی انتگرال‌گیری پارامترهای به شکل غیرقابل کنترلی تغییر می‌کنند. اهمیت فیزیکی این خارج قسمتی کردن، حذف کردن اضافه‌شماری‌های متريک در فرمول‌بندی انتگرال‌مسير است.

با دیدن اين همه فرماليسم، خوب است حالا نگاهي به چند مثال ساده برای محاسبه‌ی $Z_{g,n}$ بيندازيم.

۳-۴-۲ تابع پارش قرص: $Z_{0,1}(\beta)$

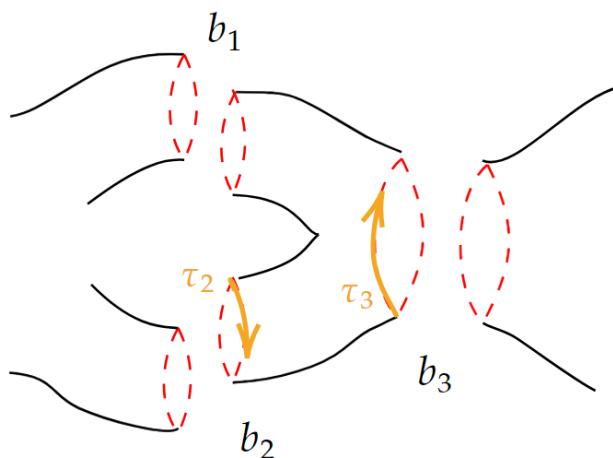
اولين موردي که نياز به بررسی دارد، قرص با $g=0$ و $n=1$ (داراي يك سوراخ) است.

ما اين سهم را قبلا در (۱۰-۳-۲) حساب کرده‌ایم.

$$Z_{0,1}(\beta) = Z_{\text{Sch,disk}}(\beta) = \frac{C^{3/2}}{(2\pi)^{1/2}\beta^{3/2}} e^{\frac{i\pi C}{\beta}}. \quad (11-4-2)$$

با داشتن تابع پارش و به کمک تبدیل معکوس لابلس، می‌توانیم چگالی حالات را در مرتبه‌ی پیشرو بخوانیم.

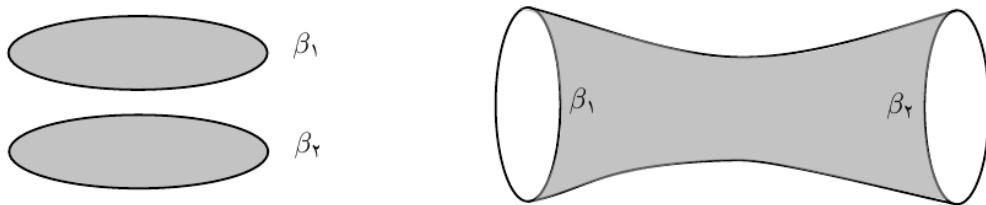
$$\rho_*(E) = \frac{C}{2\pi^2} \sinh \left(2\pi\sqrt{2CE} \right) \quad (12-4-2)$$



شکل ۲-۱۶: نمایش مختصات‌های فنچل-نیلسن در تجزیه‌ی شلواری. هر کدام از b_i طول ژئودزیک مرزهایی هستند که با دایره‌ی نقطه‌چین قمز مشخص شده‌اند. پارامتر پیچش τ_i هم مشخص می‌کند که پیش از همسان‌شدن این دایره‌ها، چقدر آن‌ها را نسبت به هم بچرخانیم.

۴-۴-۲ تابع پارش استوانه‌ای: $Z_{0,2}(\beta_1, \beta_2)$

این تابع پارش، از دو هندسه سهم می‌گیرد (به شکل ۲-۱۷ نگاهی بیاندازید). یکی دوقرص غیرهمبند، که سهم آن $Z_{0,1}(\beta_1) e^{2S}$ است و دیگری هندسه‌ی نابدیهی استوانه‌ای است که سهم آن $Z_{0,2}(\beta_1, \beta_2)$ است. مشخصه‌ی اویلر این هندسه $\chi = 0$ و شاید در اولین نگاه به نظر برسد که سهم آن غالب نیست؛



شکل ۲-۱۷: دو سهم به $Z_{0,2}(\beta_1, \beta_2)$ داریم. سهم غیرهمبند دوقرصی در چپ و سهم ترومپت در راست.

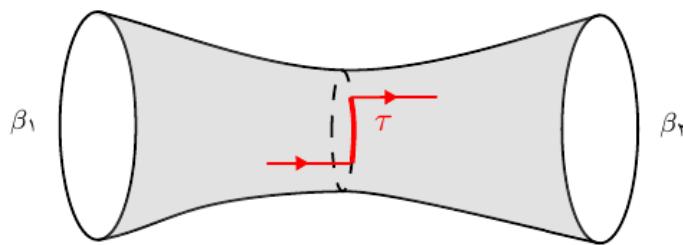
اما در محدوده‌ی خاصی از پارامترها، این سهم ممکن است غلبه کند. به این هندسه، به سبب شباهت ظاهری به ساز ترومپت، گاه هندسه‌ی ترومپت هم گفته می‌شود.

برای جمع روی این هندسه‌ها، یک خانواده‌ی ۲-پارامتری از متريک‌های روی ترومپت را درنظر

می‌گیریم.

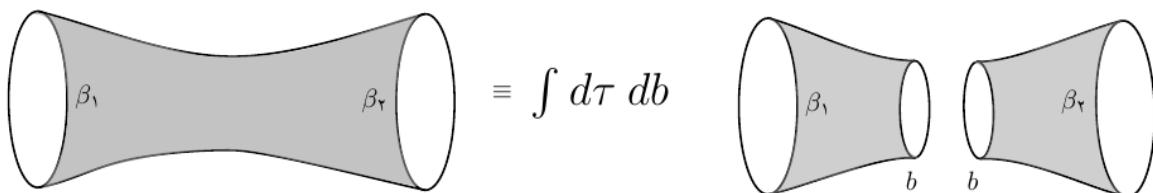
$$ds^2 = dr^2 + \cosh^2 r [b dx + \tau \delta(r) dr]^2, \quad x \sim x + 1. \quad (13-4-2)$$

که $0 < b < \tau$ است. در این متريک، r فاصله‌ی شعاعی است و مرزهای تمام‌نگار در $r \rightarrow \pm\infty$ حاصل می‌شوند. در $r = 0$ یک ژئودزيک به طول b هست و در نهايٰت، پارامتر τ یک پيچش را هنگام عبور از ژئودزيک $b = 0$ پارامتربرندی می‌کند. با داشتن جفت (b, τ) هندسه در شکل ۱۸-۲ نمايش داده شده است. اول انتگرال مسیر را روی یک ترومپت با (τ, b) ثابت حساب می‌کنيم و سپس روی



شکل ۱۸-۲: پارامترهای یک متريک دلخواه روی یک ترومپت دوتا هستند؛ یکی b که طول مرز ژئودزيک در $r = 0$ است و ديگری پارامتر پيچش که در اين شکل با τ مشخص شده است. همچنین توجه کنيد که در حد $\pm\infty \rightarrow r$ به مرزهای ژئودزيک (يعني مرزهای تمام‌نگار فضازمان) می‌رسيم. اين دو پارامتر انتگرال می‌گيريم؛ اين امر با شکستن ترومپت به دو ترومپت ميسر است (شکل ۱۹-۲).

خاصيت اين کار اين است که هرکدام از اين ترومپت‌ها، یک مرز شوارتزي (یا مرز تمام‌نگار) دارند که باید روی مدهای مرزی‌شان انتگرال مسیری گرفت و یک مرز ژئودزيک (که اولاً به خاطر نداشتن درجات آزادی داخلی، انتگرال‌گيري مسیر رویشان اعمال نمي‌شود و ثانياً به خاطر صفر شدن رد انحنای خارجي روی مرزهای ژئودزيک، اهميت فيزيکي هم ندارند). اين فرآيند در شکل ۱۹-۲ دیده می‌شود. در



شکل ۱۹-۲: یک ترومپت را به دو ترومپت می‌شکانيم و در قدمنهائي، باید آنها را با انتگرال‌گيري به هم بچسبانيم. انتگرال‌گيري روی پارامترهای مأذولی b و τ انجام می‌گيرد.

هرکدام از این ترومپت‌ها، سهم مدهای مرزی با انتگرال‌گیری روی مدار $(U/(S^1)) \text{Diff}(S^1)$ بدست می‌آید.

$$Z_T(\beta, b) = \beta \int_b^\infty db Z_T(\beta, b) = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\beta}} e^{-\frac{Cb^2}{2\beta}}. \quad (14-4-2)$$


قدمنهایی چسباندن دو ترومپت به هم است که نیاز به دانست اندازه‌ی انتگرال روی فضای ماژولی رویه‌های هیپربولیک دارد. اندازه‌ی درست $bdb\tau$ است و چون انتگرال‌ده مستقل از پارامتر پیچش است، به شکل bdb تبدیل می‌شود. جواب نهایی، به این شکل است.

$$Z_{1,2}(\beta_1, \beta_2) = \int_0^\infty bdb Z_T(\beta_1, b) Z_T(\beta_2, b) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\beta_1 \beta_2}}{\beta_1 + \beta_2} \quad (15-4-2)$$

تابع پارش کلی: $Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ۵-۴-۲

حالا آماده‌ایم که فرآیند بدست آوردن تابع پارش کلی $Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ را توصیف کنیم. این کار نیاز به هندسه‌ی هذلولوی و دانستن ژئودزیک‌های روی این هندسه‌ها دارد؛ ما فقط نتیجه‌ی کلی را بیان می‌کنیم و روش کار را با ارجاعات مناسب توصیف می‌کنیم.

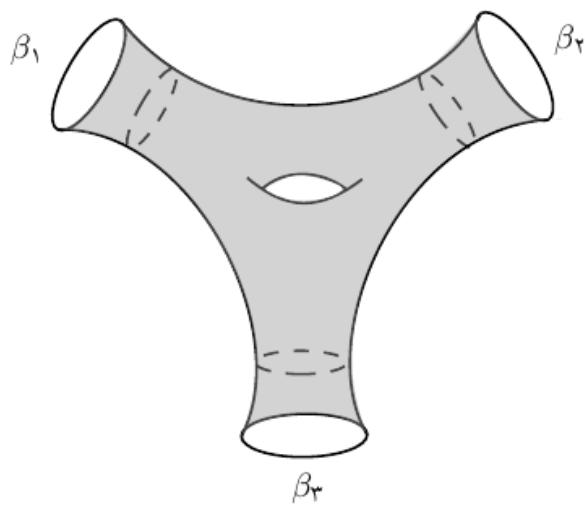
در یک رویه‌ی هذلولوی، همیشه می‌توانیم ژئودزیک‌هایی متعلق به دسته‌ی همولوژی مرزهای تمام‌نگار پیدا کنیم؛ طوری که این n ژئودزیک، یک رویه‌ی ریمانی هذلولوی را مقید کنند. به شکل ۲۰-۲ نگاهی کنید.

حالا رویه‌ی هذلولوی با دو مجموعه از پارامترهای ماژولی توصیف می‌شود، آن‌هایی که مربوط به رویه‌ی داخلی هستند؛ یعنی رویه‌ی $(\vec{b}, M_{g,n})$ و پارامترهای ماژولی مرز، یا $(b_1, \tau_1, \dots, b_n, \tau_n)$ که مشخص می‌کنند چطور مرزهای ژئودزیک به ترومپت‌ها دوخته می‌شود. پس از انجام انتگرال‌گیری روی τ_i ‌ها، مشابه با چیزی که بالاتر گفتیم، به عبارت زیر می‌رسیم. [۴۲]

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \int_0^\infty \left[\prod_{i=1}^n b_i db_i Z_T(\beta_i, b_i) \right] V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) \quad (16-4-2)$$

در این رابطه، انتگرال‌ها روی طول ژئودزیک مرزهایی است که متعلق به یک کلاس همولوژی با مرز تمام‌نگار هستند؛ $V_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ ، حجم فضای ماژولی رویه‌ی هذلولوی داخلی است.

$$V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) = \text{Vol}(M_{g,n}(\vec{b})) \quad (17-4-2)$$



شکل ۲-۲۰: همواره می‌توانیم خم‌های بسته‌ای متعلق به همان کلاس همولوژی مرزهای ژئودزیک پیدا کنیم. در این رویه‌ی هذلولوی با $g = n^3$ ، سه دایره‌ی مشخص شده با خطچین در همان کلاس همولوژی مرز ژئودزیک مجاور هستند.

آخرین چیزی که نیاز داریم، راهی برای محاسبه‌ی حجم فضای ماذولی، که حجم ویل-پترسن هم خوانده می‌شود، است. یک رهیافت، راهی است که دکتر میرزاخانی بررسی کرده‌اند [۴۴] و مبتنی بر هندسه‌ی جبری است. در ضمیمه‌ی [ت](#) این را بررسی کرده‌ایم.

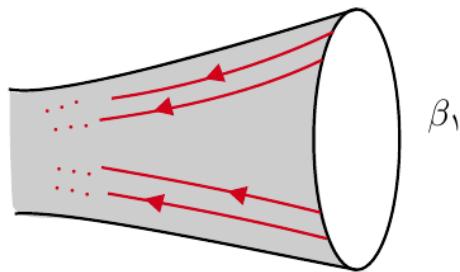
رهیافتی که اینجا مختصر توصیف می‌کنیم، Stanford و Shenker برای اولین بار ارائه کردند. این رهیافت مبتنی بر [۴۲] است که هدف آن اجتناب از پیچیدگی‌های محاسباتی اعمال اثر گروه کلاس‌نگاشت در ناحیه‌های انتگرال‌گیری پaramترهای ماذولی است.

یک مرز ژئودزیک را انتخاب می‌کنیم و آن را ۱ می‌نامیم. متعامد به این مرز، شروع به پرتاب ژئودزیک به سمت خارج می‌کنیم ([شکل ۲۱-۲](#)). یکی از این سه حالت رخ می‌دهد.

آ. ژئودزیک خود را قطع می‌کند (که در این صورت، آن را از محل تقاطع می‌بریم). یا دوباره به مرز اولیه بازمی‌گردد.

ب. ژئودزیک ادامه پیدا می‌کند و به مرز دیگری می‌رسد.

پ. ژئودزیک سرگردان، یعنی تا ابد روی روش ادامه‌پیدا می‌کند بدون آن که خودش یا مرز دیگری را قطع کند.



شکل ۲-۲۱: طرحی از ژئودزیک‌های پرتاب شده از یک مرز ژئودزیک یک رویه‌ی هذلولوی. این ژئودزیک‌های پرتاب شده به ما در شناخت خواص رویه و همچنین فضای مازولی رویه‌های هذلولی کمک می‌کنند.

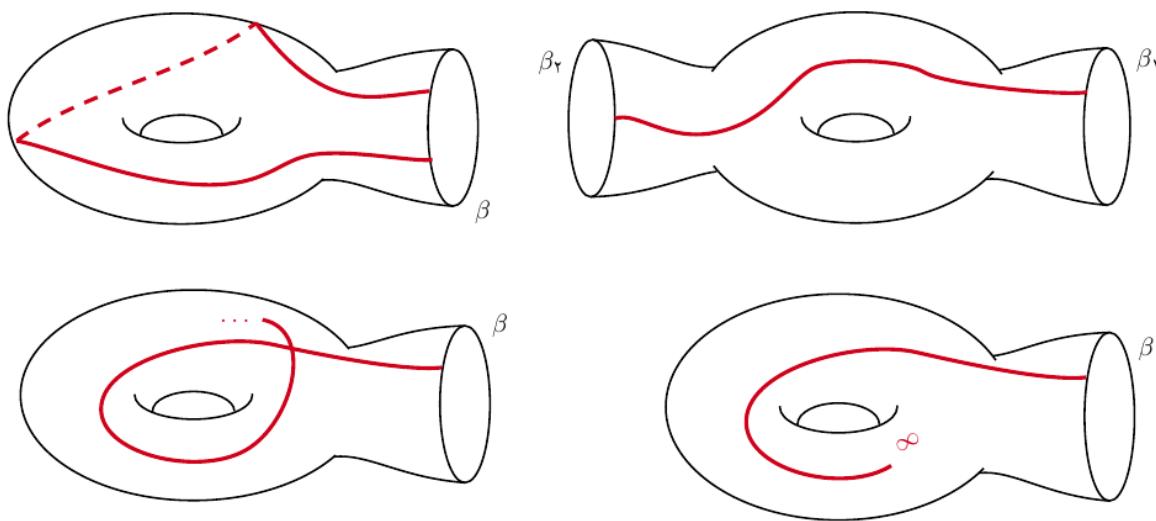
این سه وضعیت در شکل‌های ۲۲-۲ نمایش داده شده است.

می‌توانیم طول b_1 را برحسب طول خمها ای که در دسته‌ی (آ)، (ب) و (پ) هستند بنویسیم. با کمک قضایایی در هندسه‌ی هذلولوی و ژئودزیک‌های این رویه‌ها، می‌دانیم که ژئودزیک‌های نوع (پ) یک مجموعه‌ی اندازه صفر هستند و عملاً نقش معناداری در محاسبه‌ی حجم فضای مازولی ایفا نمی‌کنند. با برش رویه‌ی هذلولوی در راستای ژئودزیک‌های نوع (آ) و (ب) و همچنین انجام محاسباتی کوتاه (به [۴۲] نگاهی بیانداریم). به رابطه‌ی بازگشتی میرزاخانی می‌رسیم:

$$\begin{aligned} b_1 V_{g,n}(b_1, B) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty b' db' b'' db'' D(b_1, b', b'') V_{g-1}(b', b'', B), \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty b' db' b'' db'' D(b_1, b', b'') \sum_{\text{stable}} V_{h_1}(b', B_1) V_{h_2}(b'', B_2), \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_0^\infty b' db' (b_1 - T(b_1, b', b_k)) V_g(b', B/b_k) \end{aligned} \quad (18-4-2)$$

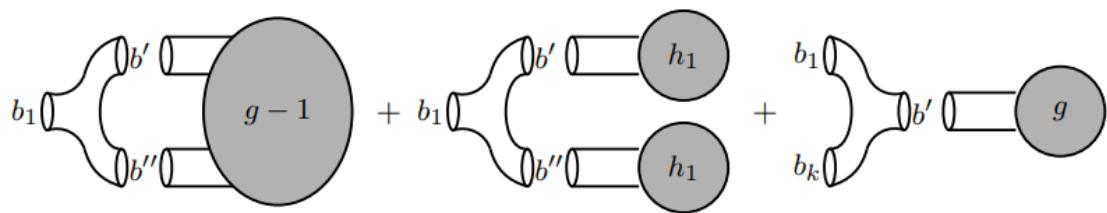
$D(b_1, b_2, b_3) = T(b_1, b_2, b_3) = \log \frac{\cosh \frac{b_3}{\gamma} + \cosh \frac{b_1+b_2}{\gamma}}{\cosh \frac{b_3}{\gamma} + \cosh \frac{b_1-b_2}{\gamma}}$ و تعریف کرده‌ایم $B = \{b_2, \dots, b_n\}$ که $b_1 - T(b_1, b_2, b_3) = T(b_1, b_3, b_2)$. سه خط معادله‌ی (۱۸-۴-۲) متناظر با این تجزیه‌ها هستند.

خط اول مربوط به حالت (آ) است، که بریدن در راستای این نوع ژئودزیک، برای فقط یک مرز تولید می‌کند و رویه‌ی جدید نمی‌سازد، تنها یک عدد از g می‌کاهد. خط دوم هم دوباره نمایانگر حالت (آ) است، با این تفاوت که برش در راستای ژئودزیک، برایمان دو رویه‌ی هذلولی با $g = h_1$ و $g = h_2$ تولید می‌کند که مرزهای (b', B_1) و (b'', B_2) دارند؛ طوری که $g = h_1 + h_2$ و $B = B_1 \cup B_2$. خط سوم هم نمایانگر حالت (ب) است.



شکل ۲-۲: انواع اتفاقاتی که ممکن است برای یک ژئودزیک که از مرز پرتاب می‌شود، بیفتد. در دوشکل سمت چپ، حالت (آ) را می‌بینیم. یعنی ژئودزیک به مرز اولیه بازگشته یا در میانه‌ی راه خود را قطع کرده است. در شکل سمت راست و بالا، حالت (ب) رخ داده، یعنی ژئودزیک با شروع از یک مرز، به مرز دیگر ختم شده. آخرین حالت هم وقتی است که ژئودزیک سرگردان باشد و در رویه‌ی هذلولی بچرخد بدون آنکه خود را قطع کند یا به مرزهای ژئودزیک برسد.

با استفاده از این رابطه بازگشتی و داشتن حجم فضای ماذولی قرص و استوانه (۱۱-۴-۲) و (۱۵-۴-۲) می‌توانیم حجم فضای ماذولی رویه‌های هذلولی با مشخصه‌های دلخواه را حساب کنیم و با ترکیب با رابطه‌ی (۱۶-۴-۲) توابع پارش هندسه‌های دلخواه را پیدا کنیم.



شکل ۲-۲۳: شمایی از انواع تجزیه‌ای ممکن یک رویه‌ی هذلولوی به کمک ژئودزی‌هایی که از مرز ژئودزیک پرتاب می‌شوند.

فصل ۳

نظریه‌ی گرانش سه‌بعدی

با بیان چندین ویژگی از گرانش اینشتینی سه‌بعدی مطالعه‌مان را آغاز می‌کنیم. اگرچه ممکن است که گرانش در ابعاد پایین از واقعیت جهان دور به نظر برسد، اما وجود سیاه‌چاله، غنای هندسی و توپولوژیک گرانش سه‌بعدی به واقعی‌تر کردن مدل کمک می‌کنند. همچنین ابزارهای فراوان در دسترس (مثل دوگانی AdS/CFT، تفسیرهای گرانش بر حسب تئوری‌های پیمانه‌ای و...) در حل مسئله با رهیافت‌های متنوع به ما کمک شایانی می‌کنند. اول می‌بینیم که گرانش سه‌بعدی مجانبنا پاددوسیته معادل با نظریه میدان لیوویل روی مرز همدیس استوانه‌ای است. سپس درجات آزادی موضعی این تئوری را بررسی می‌کنیم؛ می‌بینیم که درجه‌ی آزادی موضعی در این گرانش وجود ندارد. سپس شرایط افت را تعریف می‌کنیم، به دسته‌بندی تقارن‌های پیمانه‌ای می‌پردازیم و به مفهوم تقارن‌های مجانبی می‌پردازیم که از نتایج تعریف شرایط افت روی نظریه گرانشی است. درنهایت، در مدل گرانشی مجانبنا پاددوسیته، شرایط مرزی Brown-Henneaux را در سطح کلاسیک نگاه می‌کنیم و تقارن ویراسوروی مجانبی ظاهر شده را که از راهنمایی‌های اولیه به سمت تقارن AdS/CFT بوده است، به دست می‌آوریم. همچنین، در فضای مجانبنا تخت، شرط افت BMS را معرفی می‌کنیم و مفهوم تقارن مجانبی را برای این فضازمان هم بررسی می‌کنیم.

۱-۳ دوگانی گرانش مجاناً پاددوسیته با نظریه میدان لیوویل

این دوگانی را در سطح کلاسیک، به طور کامل بررسی می‌کنیم. این بخش نیاز به مقدمات زیادی دارد که در جاهای مناسب به آن‌ها ارجاع داده شده است.

۱-۱-۳ گرانش سه‌بعدی مجاناً دوسیته به عنوان یک نظریه‌ی Chern-Simons

آنچه که Townsend و Auchucarro [۴۵] کشف کردند و مستقلا Witten [۴۶] پیدا کرد، این بود که گرانش سه‌بعدی (نه لزوماً مجاناً پاددوسیته) و معادلات حرکتش معادل با یک نظریه‌ی پیمانه‌ای Chern-Simons روی گروه‌های پیمانه‌ای خاصی هستند. به طور دقیق‌تر، گرانش خالص اینشتین-هیلبرت معادل با یک نظریه‌ی Chern-Simons با گروه‌های ISO(۲, ۱)، SO(۲, ۲)، SO(۳, ۱) و SO(۲, ۲) است، وقتی که ثابت کیهان‌شناختی، به ترتیب، منفی، صفر و مثبت باشد (جدول ۱-۱-۳).

گروه پیمانه‌ای	Λ
SO(۳, ۱)	+(دوسیته)
ISO(۲, ۱)	٠(تخت)
SO(۲, ۲)	-(پاددوسیته)

جدول ۱-۳: پیمانه‌ای متناظر با نظریه‌های گرانش سه‌بعدی خالص در نظریه‌ی Chern-Simons معادل. ما این نتیجه را برای فضازمان مجاناً پاددوسیته ثابت می‌کنیم. در این حالت، جبر لی (۲, ۲) ۵۰ با روابط جابه‌جاگری زیر داده می‌شود.

$$[J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J^c, \quad [J_a, P_b] = \epsilon_{abc} P^c, \quad [P_a, P_b] = \epsilon_{abc} J^c, \quad (1-1-3)$$

که $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$ و این اندیس‌ها با متريک مينکوفسکي سه‌بعدی بالا و پايین می‌روند. همچنان، از نمایيش دوگان زير برای مولدهای لورنتز استفاده کرده‌ایم.

$$J_a \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{abc} J^{bc} \leftrightarrow J^{ab} \equiv -\epsilon^{abc} J_c, \quad (2-1-3)$$

این جبر، مجهز به فرم دوخطی و ناتبهگن زير است.

$$(J_a, P_b) = \eta_{ab}, \quad (J_a, J_b) = 0 = (P_a, P_b) \quad (3-1-3)$$

به ضمیمه‌ی ^۱ نگاه کنید. آنجا دیدیم که برای گرانش سه‌بعدی مجانباً پاددوستیه، فرمول بندی گرانشی را برحسب میدان‌های کمکی e_μ^a و هموستار اسپینی ^۲ ω_μ^a نوشتیم (رابطه‌ی ^۳۱۰-۰).

جالب است! اندیس‌های چارچوب از صفر تا دو تعریف شده‌اند؛ دقیقاً مشابه با مولدهای جبری ^۴ ۵۰(۲، ۲). پس باید میدان‌های پیمانه‌ای A در کنش Chern-Simons را اینطور بسازیم ^۵.

$$A_\mu \equiv \frac{1}{\ell} e_\mu^a P_a + \omega_\mu^a J_a \quad (4-1-3)$$

توجه کنید که اندیس‌های چارچوب با اندیس‌های مولد جبر یکسان شدند. با داشتن میدان پیمانه‌ای و همچنین فرم دوخطی ناتبهگن از معادله‌ی ^۶۳-۱-۳، در کنش Chern-Simons جایگذاری می‌کنیم. می‌بینیم که جمله‌ی اول به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} \text{Tr}[A \wedge dA] &= \left(\frac{1}{\ell} e^a P_a + \omega^a J_a, \frac{1}{\ell} de^b P_b + d\omega^b J_b \right) \\ &= \frac{1}{\ell} (e^a \wedge d\omega^b + \omega^a \wedge de^b) \eta_{ab} = \frac{1}{\ell} e^a \wedge d\omega_a, \end{aligned} \quad (5-1-3)$$

همچنین جمله‌ی دوم هم با اندکی جزئیات بیشتر تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \text{Tr}[A \wedge A \wedge A] &= \frac{1}{3} \text{Tr}[[A, A] \wedge A] \\ &= \frac{1}{3\ell} \left(\frac{1}{\ell} e^a \wedge e^b \wedge e^c + 3\epsilon_{abc} e^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c \right) \end{aligned} \quad (6-1-3)$$

با جمع این دو جمله پیدا می‌کنیم ^۶:

$$S_{\text{CS}}[e, \omega] = \frac{k}{4\pi\ell} \int_M \left(2e^a \wedge R_a[\omega] + \frac{1}{3\ell^2} \epsilon_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right) \quad (7-1-3)$$

و ثابت مرحله‌ی Chern-Simons به شکل زیر بدست می‌آید.

$$k = \frac{\ell}{4G} \quad (8-1-3)$$

نکته‌ی شایان ذکر دیگر این است که با توجه به هم‌ریختی جبر لی ^۷ $(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ^۸ ^۹

^۱ در نمایش دوگان مطابق رابطه‌ی ^{۱۰-۰}.

^۲ برای اطلاع بیشتر از کنش Chern-Simons به ضمیمه‌ی ^۷ ج رجوع کنید.

^۳ از رابطه‌ی انحنای کارتان

$$R_a = d\omega_a + \frac{1}{\ell} \epsilon_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c$$

استفاده شده تا تانسور انحنای ظاهر بشود.

^۴ صورت دقیق این نگاشت هم‌ریختی را می‌توانید در ^۷۳-۳ مشاهده کنید.

، می‌توانیم کنش Chern-Simons برای گروه پیمانه‌ای $(\mathbb{R}, \text{ا}^5)$ را به شکل جمعی از دو کنش-
Simons برای گروه پیمانه‌ای $(\mathbb{R}, \text{ا}^5)$ بنویسیم. یعنی، با تعریف

$$A = (e^a/\ell + \omega^a)T_a, \quad \bar{A} = (e^a/\ell - \omega^a)T_a \quad (9-1-3)$$

که در اینجا، T_a مولدهای $(\mathbb{R}, \text{ا}^5)$ هستند، کنش به شکل زیر تجزیه می‌شود.

$$S_{\text{CS}}[\Gamma] = S_{\text{CS}}[A] - S_{\text{CS}}[\bar{A}] \equiv S_{\text{CS}}[A, \bar{A}] \quad (10-1-3)$$

به عنوان نکته‌ی پایانی، نگاهی هم به معادلات حرکت می‌کنیم و نشان می‌دهیم که معادلات حرکت نظریه‌ی پیمانه‌ای Chern-Simons همان معادلات اینشتین می‌شوند.

از بخش **ج** می‌دانیم که معادلات حرکت نظریه‌ی پیمانه‌ای Chern-Simons ، به شکل موضعی صفر شدن اتحانی میدان پیمانه‌ای A هستند. با انتخاب ترکیب خطی $F^a \pm \bar{F}^a = 0$ می‌بینیم که این معادلات منجر می‌شوند به

$$F^a + \bar{F}^a = 0 \Leftrightarrow R^{ab} + \frac{1}{\ell^2} e^a \wedge e^b = 0 \quad (11-1-3)$$

و

$$F^a - \bar{F}^a = 0 \Leftrightarrow T^a = de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0 \quad (12-1-3)$$

که به ترتیب معادله‌ی دوم کارتان و معادله‌ی بدون پیچش بودن هموستار اسپینی هستند؛ این دو معادله همتای معادلات اینشتین و معادله‌ی بدون پیچش بودن هموستار لوی‌چویتا در فرمول‌بندی آشنای گرانش اینشتینی هستند. پس این دو نظریه در سطح معادلات حرکت هم‌خوانی دارند.

۲-۱-۳ ترجمه‌ی شرایط مرزی مجانباً پاددوسیته روی میدان‌های پیمانه‌ای

این مباحث را بعداً به شکل کامل‌تری در بخش ۳-۳ می‌بینیم، اما شرایط مرزی برای ما بسیار مهم‌اند، چرا که تنها مولفه‌ی دینامیکی در نظریه‌ی گرانش سه‌بعدی هستند و نقش محوری این شرایط مرزی را در رسیدن به نظریه میدان لیوویل روی مرز همدیس خواهیم دید. پس صرفاً شرط مرزی را نقل می‌کنیم و نگاه دقیق‌تر به آن را به بخش ۳-۳ موكول می‌کنیم. قسمت مهم این بخش تبدیل این شرایط مرزی به شرط مرزی روی میدان‌های پیمانه‌ای است.

در پیمانه‌ی فرمن- گرام، متریک فضازمان سه بعدی به شکل زیر نشان داده می‌شود.

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 + \gamma_{ij}(r, x^k) dx^i dx^j \quad (13-1-3)$$

که در حد $r \rightarrow \infty$ بسط $\gamma_{ij} = r^2 g_{ij}^{(0)}(x^k) + \mathcal{O}(1)$ را دارد. می‌گوییم متریک فضازمان به معنای مجانبا پاددوستیه است اگر که در حد $r \rightarrow \infty$ به شکل زیر باشد. Brown-Henneaux

$$g_{ij}^{(0)} dx^i dx^j = -dx^+ dx^- \quad (14-1-3)$$

هم‌چنین، نشان داده شده که کلی ترین جواب نظریه گرانش اینشتین با این شرایط مرزی Brown-Henneaux، به شکل زیر است [۴۷].

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - \left(r dx^+ - \frac{\ell^2}{r} L(x^-) dx^- \right) \left(r dx^- - \frac{\ell^2}{r} \bar{L}(x^+) dx^+ \right) \quad (15-1-3)$$

که $L(x^-)$ و $\bar{L}(x^+)$ دوتابع تک‌مقداری دلخواه هستند.

حالا شرایط بالا را به نظریه‌ی توپولوژیک Chern-Simons ترجمه می‌کنیم. میدان چارچوب e^a که ریشه‌ی متریک $(15-1-3)$ است، یعنی $ds^2 = \eta_{ab} e^a e^b$ ، در نظرمی‌گیریم^۵. می‌توانیم ببینیم که انتخاب مولفه‌های زیر برای e^a مناسب است.

$$\begin{aligned} e^+ &= -\frac{r}{\sqrt{2}} dx^- + \frac{\ell^2}{\sqrt{2}r} \bar{L}(x^+) dx^+ \\ e^- &= \frac{r}{\sqrt{2}} dx^+ - \frac{\ell^2}{\sqrt{2}r} L(x^-) dx^- \\ e^r &= \frac{\ell}{r} dr \end{aligned} \quad (16-1-3)$$

حالا از شرط اول کارتان استفاده می‌کنیم تا هموستارهای اسپینی را پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} \omega^+ &= \frac{r}{\sqrt{2}\ell} dx^- + \frac{\ell}{\sqrt{2}r} \bar{L}(x^+) dx^+ \\ \omega^- &= \frac{r}{\sqrt{2}\ell} dx^+ + \frac{\ell}{\sqrt{2}r} L(x^-) dx^- \\ \omega^r &= \cdot \end{aligned} \quad (17-1-3)$$

⁵ در اینجا متریک η غیر قطری است.

میدان پیمانه‌ی دست‌سانی که از ترکیب این میدان چارچوب و هموستار اسپینی، یعنی با کمک رابطه‌ی $\bar{A} = (\omega^a - e^a/\ell)j_a$ و $A = (\omega^a + e^a/\ell)j_a$ حاصل می‌شود، به شکل زیر است.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{dr}{\sqrt{r}} & \frac{\ell}{r}\bar{L}(x^+)dx^+ \\ \frac{r}{\ell}dx^+ & -\frac{dr}{\sqrt{r}} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} -\frac{dr}{\sqrt{r}} & \frac{r}{\ell}dx^- \\ \frac{\ell}{r}L(x^-)dx^- & \frac{dr}{\sqrt{r}} \end{pmatrix}. \quad (18-1-3)$$

اگر اندکی با نظریه‌ی میدان‌های پیمانه‌ای آشنا باشیم، می‌دانیم که می‌توان وابستگی به r را در میدان پیمانه‌ای بدست آمده در بالا حذف کرد. کافی است که با انتخاب

$$b(r) = \begin{pmatrix} r^{-1/2} & \cdot \\ \cdot & r^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (19-1-3)$$

تبديل پیمانه‌ای به شکل زیر اعمال کنیم.

$$a = b^{-1}Ab + b^{-1}db, \quad \bar{a} = b\bar{A}b^{-1} + bdb^{-1} \quad (20-1-3)$$

میدان پیمانه‌ای جدید، به شکل زیر بدست می‌آید.

$$a = \begin{pmatrix} \cdot & \ell\bar{L}(x^+)dx^+ \\ dx^+/\ell & \cdot \end{pmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{pmatrix} \cdot & dx^-/\ell \\ \ell L(x^-)dx^- & \cdot \end{pmatrix}. \quad (21-1-3)$$

حالا به کمک تعریف $a = a_\mu^a j_a dx^\mu$ ^۶. می‌بینیم که $a_r = \cdot = \bar{a}_r$ و دو دسته شرایط مرزی زیر را داریم.

$$(1) \quad a_- = \cdot = \bar{a}_+,$$

$$(2) \quad a_+ = \frac{\sqrt{2}}{\ell}j_1 + \cdot j_2 + \sqrt{2}\ell L(x^+)j_0, \quad (22-1-3)$$

$$(2') \quad \bar{a}_- = \sqrt{2}\ell\bar{L}(x^-)j_1 + \cdot j_2 + \frac{\sqrt{2}}{\ell}j_0.$$

خواهیم دید که شرط اول، کنش Chern-Simons را به جمع دو کنش دستیده‌ی WZW تبدیل می‌کند. هم‌چنین شرایط دسته‌ی دوم جریان‌های مدل WZW را قید می‌کنند و ما را به نظریه‌ی میدان لیوویل می‌رسانند.

^۶ برای تعریف مولدها و هم‌چنین متريک غیرقطري به پانويسي (۴۲-۱-۳) نگاه کنید.

۳-۱-۳ بهبود کنش Chern-Simons

همانطور که در بخش پیشین دیدیم، کنش یک نظریه گرانشی در فضای مجانباً پاددوسیته به شکل زیر است:

$$S_E[A, \bar{A}] = S_{CS}[A] - S_{CS}[\bar{A}] \quad (23-1-3)$$

که در آن:

$$S_{CS}[A] = -\frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} Tr \left[A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right] \quad (24-1-3)$$

در این کنش، میدان‌های پیمانه‌ای A عضوی از گروه $SL(2, \mathbb{R})$ هستند.

همچنین از این به بعد با ثابت κ به جای k کار می‌کنیم که به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$\kappa \equiv \frac{k}{4\pi} = \frac{\ell}{16\pi G}$$

اما پیش از ادامه برای رسیدن به کنش WZW، باید مشکلی جزئی را حل کنیم، کنش (۲۳-۱-۳) به معادله حرکت درستی منجر نمی‌شود، برای همین لازم است که کنش را اصلاح کنیم.

ابتدا باید ریشه مشکل را بینم^۴؛ اول کنش (۲۳-۱-۳) را در مختصات استوانه‌ای (τ, r, φ) می‌نویسیم:

$$S_{CS}[A] = -\kappa \int_{\mathcal{M}} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho Tr \left[A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{1}{3} A_\mu [A_\nu, A_\rho] \right] \quad (25-1-3)$$

که در آن از رابطه $[A, A] = 2A \wedge A$ بهره برده ایم^۵.

با کمک تعریف فرم دیفرانسیل حجم و تانسور لوی چویتا می‌توانیم این رابطه را باز کنیم و به صورت زیر بررسیم:

$$S_{CS}[A] = -\kappa \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi Tr \left[A_r (\partial_\tau A_\varphi - \partial_\varphi A_\tau) + A_\tau (\partial_\varphi A_r - \partial_r A_\varphi) + A_\varphi (\partial_r A_\tau - \partial_\tau A_r) + 2A_\tau [A_\varphi, A_r] \right] \quad (26-1-3)$$

^۴کافی است که فقط یکی از قسمت‌های دستیده‌ی کنش را بررسی کنیم و قسمت دیگر مشابها انجام می‌شود.

^۵توجه کنید که این رابطه به ظاهر اشتباه است، چون که جابه‌جا گر هرچیزی با خودش باقیستی صفر شود؛ اما توجه کنید که میدان‌های A یک-فرم با مقدار در جبر لی هستند، بنابراین برای محاسبه کردن جابه‌جا گر باید دقت بیشتری به خرج بدیم.

$$[A, A] = [A_\mu, A_\nu] dx^\mu \wedge dx^\nu = A_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu - A_\nu A_\mu dx^\mu \wedge dx^\nu$$

جمله اولی همان $A \wedge A$ است اما جمله دومی چون ماتریس‌های A_μ و A_ν با هم جایه‌جا نمی‌شوند، نیاز به تغییر اندیس هست، پس از انجام این کار، از اتحاد $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$ استفاده می‌کنیم و می‌بینیم که رابطه فوق درست است.

حال از جمله‌ی دوم و پنجم انتگرال جزء به جزء می‌گیریم، توجه کنید که فقط انتگرال‌های مرزی r را نگه می‌داریم چون متغیر φ تناوبی است و انتگرال‌ش روی یک دوره تناوب صفر می‌شود؛ همچنین برای جمله‌های مشتق کامل از رابطه استوکس استفاده می‌کنیم تا به رابطه زیر برسیم:

(۲۷-۱-۳)

$$S_{CS}[A] = -\kappa \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi Tr \left[A_r \dot{A}_\varphi - A_\varphi \dot{A}_r + 2A_\tau (\partial_\varphi A_r - \partial_r A_\varphi + [A_\varphi, A_r]) \right] \\ + \kappa \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau d\varphi Tr [A_\tau A_\phi]$$

که علامت \square به معنای مشتق گیری ∂_τ است.

اما آخرین جمله در معادله فوق ثابتی است که در تعریف کنش می‌توانیم جذب کنیم و آنچه که باقی می‌ماند این است:

$$S_{CS}[A] = -\kappa \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi Tr \left[A_r \dot{A}_\varphi - A_\varphi \dot{A}_r + 2A_\tau F_{\varphi r} \right] \quad (28-1-3)$$

که F ، دو-فرم انحنای مربوط به میدان A است یعنی $F = dA + A \wedge A$

حالا می‌توانیم مشکل را واضح‌آبی بینیم؛ اگر وردش کنش فوق را محاسبه کنیم، خواهیم دید که

$$\delta S_E = (EOM) + 2\kappa \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau d\varphi Tr \left[A_r \delta A_\varphi - \bar{A}_r \delta \bar{A}_\varphi \right]$$

اما این عبارت، روی غشای جرم صفر نیست؛ پس معادلات حرکت صادق نیستند و باید کنش را بهبود دهیم.

با الهام از شرایط مرزی (۲۲-۱-۳) روی میدان‌های پیمانه‌ای، می‌توانیم کنش را به سادگی اصلاح کنیم، می‌دانیم که روی مرز، $A_- = 0 = \bar{A}_+$ که اندیس‌های \pm در مختصات مخروط نوری هستند.^۹

با افزودن جمله‌ی جدید $I = -\kappa \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau d\varphi Tr \left[A_\varphi^2 + \bar{A}_\varphi^2 \right]$ خواهیم دید که وردش کنش روی غشای جرمی هم صفر خواهد بود و شرایط مرزی جمله‌ی اضافی را که در بالا دیدیم، حذف می‌کنند.

^۹ همانطور که دیدیم:

$$A_- = A_\tau - A_\varphi \\ \bar{A}_+ = \bar{A}_\tau + \bar{A}_\varphi$$

۴-۱-۳ تبدیل کنش Chern-Simons به جمع دو کنش WZW

در اینجا روش کار را برای قسمت دستیده (یعنی قسمتی از کنش که فقط تابع A است^{۱۰}) بررسی می‌کنیم و برای قسمت پاد دستیده (قسمتی از کنش که فقط تابع \bar{A} است.) مشابها می‌توان نتیجه گیری کرد.

به آخرین جمله در کنش (۲۸-۱-۲) نگاه کنید؛ A_τ هیچ کجای دیگر در کنش نیامده و فقط در این جمله آمده، بنابراین معادله حرکت آن یک ضریب لاغرانژ است که شرط $0 = F_{r\varphi}$ را برای ما ارضامی کند.

بنابراین این قید را می‌توان اینگونه حل کرد^{۱۱} که:

$$A_i = G^{-1} \partial_i G, \quad (i = r, \varphi) \quad (29-1-3)$$

حالا می‌توانیم از آزادی پیمانه‌ای بهره ببریم؛ با قید $0 = \partial_\varphi A_r = \partial_\varphi A_r$ می‌توانیم تا حدی از این آزادی استفاده کنیم. این یعنی $G \in SL(2, \mathbb{R})$ به گونه‌ای نخواهد بود که همزمان تابعی از دو متغیر r و φ باشد.

حدس زیر را برای G می‌زنیم:

$$G(\tau, r, \varphi) = g(\tau, \varphi)h(r, \tau) \quad (30-1-3)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$A_r = h^{-1} \partial_r h$$

$$A_\varphi = h^{-1} g^{-1} (\partial_\varphi g) h$$

در این مرحله فرض دیگری هم می‌کنیم، این که مشتق نسبت به τ از میدان $h(r, \tau)$ در مرز خمینه صفر است؛ این همان چیزی است که برای جوابهای روی غشای جرمی هم صادق است ($0 = h|_{\partial M}$).

حالا اگر روابط (۲۹-۱-۳) و (۳۰-۱-۳) را در کنش دستیده قرار دهیم به عبارت نسبتاً طولانی

^{۱۰} یعنی قسمت:

$$S[A] \equiv S_{CS}[A] - \kappa \int_{\partial M} d\tau d\varphi Tr[A_\varphi^\alpha]$$

^{۱۱} البته این حل کلی ترین حالت نیست، این پاسخ وقتی صادق است که گروه هلونومی هموستارهای \bar{A}, A بدیهی باشد. حالت‌های دارای هلونومی در [۴۸، ۴۹] بحث شده‌اند.

زیر می‌رسیم^{۱۲} :

$$S_{CS}[A] = \kappa \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi Tr \left[\partial_r hh^{-1} \dot{h} h^{-1} g^{-1} g' + \partial_r hh^{-1} g^{-1} \dot{g} g^{-1} g' \right. \\ \left. - \partial_r hh^{-1} g^{-1} \dot{g}' - h^{-1} \partial_r hh^{-1} g^{-1} g' \dot{h} - h^{-1} g^{-1} g' \dot{h} h^{-1} \partial_r h \right. \\ \left. + h^{-1} g^{-1} g' \partial_r \dot{h} \right] \quad (31-1-3)$$

و جمله‌ی مرزی به سادگی $[(g^{-1} g')^2] - \kappa \int_{\partial \mathcal{M}} d\tau d\varphi Tr[(g^{-1} g')^2]$ خواهد بود.

اما ما مایلیم بررسی کنیم آیا این کش معادل کنش WZW می‌شود یا نه؛ برای همین با جایگذاری مقدار G در کنش مدل WZW بررسی می‌کنیم که آیا جملات کنش معادلنده‌ی آن است.

جمله‌ای که قصد داریم بررسی کنیم، جمله‌ی $\frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{M}} Tr[(G^{-1} dG)^3]$ است. باید اینجا محاسبات را صریحاً دنبال کنیم.

$$Tr[(G^{-1} dG)^3] = \epsilon^{\mu\nu\rho} Tr[G^{-1} \partial_\mu G G^{-1} \partial_\nu G G^{-1} \partial_\rho G]$$

این عبارت شامل دوازده جمله‌ی است که با قرار داد $\epsilon^{r\tau\varphi} \equiv \epsilon^{r\tau\varphi}$ چندتا از این عبارتها را پیدا می‌کنیم^{۱۳}.

$$\epsilon^{r\tau\varphi} Tr[(h^{-1} \partial_r h)(h^{-1} g^{-1} \dot{g} h)(h^{-1} g^{-1} g' h)] = Tr[\partial_r hh^{-1} g^{-1} \dot{g} g^{-1} g']$$

که همان جمله‌ی دوم (31-1-3) است.

یا مثلاً جمله‌ی

$$\epsilon^{r\varphi\tau} Tr[(h^{-1} \partial_r h)(h^{-1} g^{-1} g' h)(h^{-1} g^{-1} \dot{g} h)] = -Tr[\partial_r hh^{-1} g^{-1} g' g^{-1} \dot{g}]$$

این عبارت شبیه هیچ‌کدام از جملات معادله (31-1-3) نیست، اما خواهیم دید که با یک انتگرال‌گیری جزء به جزء مشابه جملات آن می‌شود.

همچنین مثلاً عبارتی دیگر را ببینیم:

$$\epsilon^{r\varphi r} Tr[(h^{-1} g^{-1} \dot{g} h)(h^{-1} g^{-1} g' h)(h^{-1} \partial_r h)] = +Tr[h^{-1} g^{-1} \dot{g} g^{-1} g' \partial_r h]$$

که مجدداً همان جمله‌ی دوم (31-1-3) است.

^{۱۲} از این به بعد مشتق نسبت به متغیر φ را با علامت پرایم نشان می‌دهیم.

^{۱۳} در این روابط از خاصیت چرخه‌ای رد استفاده می‌کنیم.

حالا می‌توانیم واضح‌تر نتیجه بگیریم که عبارت $\text{Tr}[(G^{-1}dG)^3]$ شامل ۱۲ جمله است که شامل چهار دسته‌ی متمایز است که هر کدام سه بار تکرار شده‌اند، با حذف ضریب $\frac{1}{3}$ در کنش، نهایتاً نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{3} \int_{\mathcal{M}} \text{Tr}[(G^{-1}dG)^3] &= \kappa \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi \text{Tr}[\partial_r hh^{-1} \dot{h} h^{-1} g^{-1} g' + \partial_r hh^{-1} g^{-1} \dot{g} g^{-1} g' \\ &\quad - \partial_r hh^{-1} g^{-1} g' g^{-1} \dot{g} - h^{-1} \partial_r hh^{-1} g^{-1} g' \dot{h}] \end{aligned}$$

همانطور که گفتیم، برای تبدیل به فرم آشنایی که در کنش (۳۱-۱-۳) می‌بینیم، نیاز داریم که جمله‌ی سوم انتگرال گیری جزء به جزء روی متغیر φ انجام دهیم.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi \text{Tr}[\partial_r hh^{-1} g^{-1} g' g^{-1} \dot{g}] &= \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi \text{Tr}[\partial_r hh^{-1} \partial_\varphi(g^{-1} g g^{-1} \dot{g})] \\ &\quad - \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi \text{Tr}[\partial_r hh^{-1} \partial_\varphi(g^{-1}) g g^{-1} \dot{g}] - \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi \text{Tr}[\partial_r hh^{-1} g^{-1} g \partial_\varphi(g^{-1} \dot{g})] \end{aligned}$$

جمله‌ی مشتق کامل صفر می‌شود، چرا که توابع g و نسبت به متغیر φ متناوب هستند. اما از دو جمله‌ی باقی مانده، چیزی که می‌ماند این است:

$$+ 2 \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi \text{Tr}[\partial_r hh^{-1} g^{-1} g' g^{-1} g g^{-1} \dot{g}] - \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi \text{Tr}[\partial_r hh^{-1} g^{-1} \partial_\varphi(\dot{g})]$$

اما اگر دقت کنید، جمله‌ی شامل ضریب ۲، همان انتگرال اولیه (قبل از جزء به جزء اعمال کردن) است، پس با یک جایه‌جایی مختصر به دست می‌آوریم که:

$$\int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi \text{Tr}[\partial_r hh^{-1} g^{-1} g' g^{-1} g g^{-1} \dot{g}] = \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi \text{Tr}[\partial_r hh^{-1} g^{-1} \dot{g}']$$

بنابراین جمله‌ی سوم کنش (۳۱-۱-۳) هم ایجاد شد.

اکنون می‌توان مشابهت‌های کنش Chern-Simons با کنش WZW را واضح‌تر دید؛ کافی است که بازنویسی زیر را انجام دهیم:

$$(32-1-3) \quad S_{CS}[A] = \frac{\kappa}{3} \int_{\mathcal{M}} \text{Tr}[(G^{-1}dG)^3] + \kappa \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi \text{Tr}[-h^{-1} g^{-1} g' \dot{h} h^{-1} \partial_r h + h^{-1} g^{-1} g' \partial_r \dot{h}]$$

حالا سراغ دو جمله‌ی دیگر می‌رویم، می‌توانیم ببینیم که:

$$\begin{aligned}\partial_r(G^{-1}\partial_\varphi GG^{-1}\partial_\tau G) &= \partial_r(h^{-1}g^{-1}\partial_\varphi(gh)h^{-1}g^{-1}\partial_\tau(gh)) \\ &= \partial_r(h^{-1}g^{-1}g'h h^{-1}g^{-1}(gh + h\dot{g})) \\ &= \partial_r(h^{-1}g^{-1}g'h(h^{-1}g^{-1}\dot{gh} + h^{-1}\dot{h}))\end{aligned}\quad (33-1-3)$$

حالا اگر مشتق گیری از مولفه r را اثر بدھیم ^{۱۴}:

$$(34-1-3)$$

$$\begin{aligned}\partial_r(h^{-1}g^{-1}g'h^{-1}\dot{gh} + h^{-1}g^{-1}g'\dot{h}) &= -h^{-1}\partial_r hh^{-1}g^{-1}g'g^{-1}\dot{gh} + h^{-1}g^{-1}g'g^{-1}\dot{g}\partial_r h \\ &\quad - h^{-1}\partial_r hh^{-1}g^{-1}g'\dot{h} + h^{-1}g^{-1}g'\partial_r \dot{h}\end{aligned}$$

می‌بینیم که دو جمله‌ی آخری دقیقاً مشابه دو جمله‌ی اضافی در معادله‌ی (32-1-3) هستند. (البته با استیتی رد بگیریم و از خاصیت چرخه‌ای رد استفاده کنیم.) اگر به خوبی به دو جمله‌ی ای اول نگاه کنیم، می‌بینیم که در رد گرفتن، این دو جمله‌ی قرینه یکدیگر هستند، بنابراین با هم حذف می‌شوند.

پس عبارت (33-1-3) دقیقاً جملات باقی مانده‌ی معادله‌ی (32-1-3) است. حالا از فرض صفر بودن \dot{h} روی مرز خمینه استفاده می‌کنیم و می‌توانیم عبارت آخر رابطه (33-1-3) را به شکل $g^{-1}\partial_\varphi gg^{-1}\partial_\tau g$ بازنویسی کنیم.

بنابراین تا اینجا نشان داده ایم که

$$\begin{aligned}S_{CS}[A] &= \kappa \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau d\varphi Tr[g^{-1}\partial_\varphi gg^{-1}\partial_\tau g] + \kappa\Gamma[G] \\ &\equiv S_{WZW}^R[g]\end{aligned}\quad (35-1-3)$$

یعنی کنش به کنش دستیده‌ی WZW تبدیل می‌شود.

به طور کاملاً مشابه، کنش پاد دستیده‌ی

$$S[\bar{A}] \equiv S_{CS}[\bar{A}] + \kappa \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau d\varphi Tr[\bar{A}_\varphi^\chi] \quad (36-1-3)$$

به قید $\bar{G}(t, r, \varphi) = \bar{g}(t, \varphi)\bar{h}(r, \tau)$ است به شرطی که حل آن $\bar{A}_i = \bar{G}^{-1}\partial_i \bar{G}$ منجر می‌شود که $\bar{F}_{r\varphi} = 0$ و $\dot{\bar{h}}$ روی مرز خمینه صفر باشد.

^{۱۴} حتماً یادتان هست که $\delta(h^{-1}) = -h^{-1}\delta(h)h^{-1}$

در نهایت قسمت پاد دستیده‌ی کنش منجر می‌شود به:

$$S_{CS}[\bar{A}] = \kappa \int_{\partial M} d\tau d\varphi Tr[\bar{g}^{-1} \partial_\varphi \bar{g} \bar{g}^{-1} \partial_\tau \bar{g}] + \kappa \Gamma[\bar{G}] \quad (37-1-3)$$

$$\equiv S_{WZW}^L[\bar{g}]$$

با ترکیب کردن قسمت دستیده و پاد دستیده، نشان داده ایم که کنش Chern-Simons با ترکیب دو کنش دستیده‌ی WZW است.

$$S[A, \bar{A}] = S_{WZW}^R[g] - S_{WZW}^L[\bar{g}] \quad (38-1-3)$$

۵-۱-۳ تبدیل به کنش غیر دستیده‌ی WZW

حال برای اینکه از کنش بالا به کنش غیر دستیده برسیم، نیاز به یک سری تغییر متغیر داریم (در حقیقت این تغییر متغیر های فرمالیسم هامیلتونی کنش WZW را تعریف می کنند).) تعریف می کنیم: $k \equiv g^{-1}\bar{g}$ و $\Pi = -\bar{g}^{-1}\partial_\varphi gg^{-1}\bar{g} - \bar{g}^{-1}\partial_\varphi \bar{g}$ و $K \equiv G^{-1}\bar{G}$

حال می توانیم مشاهده کنیم که

$$\Gamma[K] = -\Gamma[G] + \Gamma[\bar{G}] - \int_{\partial M} Tr[d\bar{g} \bar{g}^{-1} dgg^{-1}] \quad (39-1-3)$$

کنش (۳۸-۱-۳) را به حسب متغیرهای جدید k, Π می نویسیم. $(40-1-3)$

$$S[k, \Pi] = \kappa \int_{\partial M} d\tau d\varphi Tr \left[\Pi k^{-1} \dot{k} - \frac{1}{4} (\Pi^2 + (k^{-1} k')^2) \right] - \frac{\kappa}{3} \int_{\partial M} Tr \left[(K^{-1} dK)^3 \right]$$

اکنون می توانیم از معادله حرکت میدان کمکی Π استفاده کنیم و آن را از معادله حذف کنیم:

$$S[k] = \kappa \int_{\partial M} d\tau d\varphi Tr \left[2k^{-1} \partial_+ k k^{-1} \partial_- k \right] - \frac{\kappa}{3} \int_{\partial M} Tr \left[(K^{-1} dK)^3 \right] \quad (41-1-3)$$

این رابطه همان کنش غیر دستیده مدل $SL(2, \mathbb{R})$ - WZW برای مرحله‌ی k است.

۶-۱-۳ از مدل WZW به نظریه میدان لیوویل

برای این کار، ابتدا از تجزیه گاوس میدان‌های K در کنش (۴۱-۱-۳) بهره می‌بریم. این تجزیه را به شکل زیر انجام می‌دهیم^{۱۵} :

$$\begin{aligned} K &= e^{\sqrt{\gamma}Xj_+} e^{\phi j_\tau} e^{\sqrt{\gamma}Yj_-} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & X \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{\gamma}\phi} & X \\ \cdot & e^{-\frac{1}{\gamma}\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (45-1-3)$$

که X و Y و ϕ میدان‌هایی هستند که به u و r و φ بستگی دارند. فرض می‌کنیم که این تجزیه به شکل سرتاسری برقرار است، با کمک رابطه‌ی

$$-\frac{1}{\gamma} \text{Tr} (K^{-1} dK)^\tau = dr d\tau d\varphi \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha (e^{-\phi} \partial_\beta X \partial_\gamma Y). \quad (46-1-3)$$

تجزیه‌ی گاوس به ما اجازه می‌دهد که انتگرال دو بعدی (۴۱-۱-۳) را به فرم سه بعدی بنویسیم. بنابر اتحاد بالا، با نگهداشتن جمله‌ی شعاعی مرزی،

$$-\frac{1}{\gamma} \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} (K^{-1} dK)^\tau = \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau d\varphi \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (\partial_- X \partial_+ Y - \partial_+ X \partial_- Y). \quad (47-1-3)$$

انتگرال بالا را می‌توانیم با جاگذاری $K|_{\partial\mathcal{M}}$ به جای k بنویسیم چراکه این دو در مرز با هم در توافق کاملند.

(۴۸-۱-۳)

$$\int_{\partial\mathcal{M}} d\tau d\varphi \text{Tr} [\gamma k^{-1} \partial_+ k k^{-1} \partial_- k] = \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau d\varphi (\partial_- \phi \partial_+ \phi + \gamma e^{-\phi} (\partial_+ X \partial_- Y + \partial_- X \partial_+ Y)).$$

^{۱۵} مولدهای جیر $sl(2, \mathbb{R})$ به این شکل هستند:

$$j_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad j_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad j_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (42-1-3)$$

که بالا و پایین بردن اندیس این مولد ها با متريک غير قطري زير انجام می شود:

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (43-1-3)$$

همچنین اين مولدها در روابط زير صدق می کنند:

$$\begin{aligned} [j_a, j_b] &= \epsilon_{abc} j^c \\ \text{Tr}(j_a j_b) &= \frac{1}{2} \eta_{ab} \end{aligned} \quad (44-1-3)$$

و با ترکیب کردن با تمامی جملات (۴۱-۱-۳) می‌یابیم.

$$S_{\text{red}} = 2\kappa \int_{\partial M} d\tau d\varphi \left(\frac{1}{2} \partial_- \phi \partial_+ \phi + 2e^{-\phi} \partial_- X \partial_+ Y \right), \quad (49-1-3)$$

کاهش هامیلتونی به نظریه‌ی میدان لیوویل

دسته‌ی دوم شرایط مرزی (۲۲-۱-۳) بر روی میدان‌های پیمانه‌ای، جریان‌های مدل WZW را قید می‌کنند؛ این عمل، کاهش هامیلتونی معروف مدل‌های WZW به نظریه‌ی میدان لیوویل است.

بیایید با جریان‌های راست روی WZW شروع کنیم که به شکل زیر بر حسب $\bar{g}^{-1} = g^{-1}$ داده شده‌اند.

$$J_a = k^{-1} \partial_a k, \quad \bar{J}_a = -\partial_a k k^{-1}. \quad (50-1-3)$$

با استفاده از تعریف k داریم:

$$J_- = -k^{-1} a_- k + \bar{a}_-, \quad \bar{J}_+ = a_+ - k \bar{a}_+ k^{-1} \quad (51-1-3)$$

با استفاده از اولین شرط مرزی $a_- = \bar{a}_+$ ، رابطه‌ای ساده بین جریان‌های WZW و میدان‌های پیمانه‌ای پیدا می‌کنیم.

$$J_- = k^{-1} \partial_- k = \bar{a}_-, \quad \bar{J}_+ = -\partial_+ k k^{-1} = a_+ \quad (52-1-3)$$

و با به کارگیری دسته‌ی دوم شرایط مرزی (۲۲-۱-۳) پیدا می‌کنیم که

$$\begin{aligned} J_-^* &= [k^{-1} \partial_- k]^* = \frac{\sqrt{\ell}}{\ell}, & J_-^* &= 0 \\ \bar{J}_+^* &= [-\partial_+ k k^{-1}]^* = \frac{\sqrt{\ell}}{\ell}, & \bar{J}_+^* &= 0 \end{aligned} \quad (53-1-3)$$

می‌بینیم که دسته‌ی دوم از شرایط مرزی، جریان WZW را ثابت می‌کنند. با تبدیل کردن این جریان‌ها، از روی تبدیل گاووسی میدان‌ها، به شکل زیر برای قیدها می‌رسیم.

$$e^{-\phi} \partial_- X = \frac{1}{\ell}, \quad e^{-\phi} \partial_+ Y = -\frac{1}{\ell} \quad (54-1-3)$$

$$X = 2\ell \partial_+ \phi, \quad Y = -2\ell \partial_- \phi$$

اینجا، نیاز به بهبود کش داریم تا کنش خوش‌تعریفی داشته باشد.

$$S_{\text{impr}} \equiv S_{\text{red}} - 2\kappa \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\varphi (e^{-\phi} (X \partial_+ Y + Y \partial_- X)) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} \quad (55-1-3)$$

پس از جاگذاری قیدها در کنش، به کنش‌نهایی زیر می‌رسیم که کنش لیوویل است.

$$S_{\text{Liouville}}[\phi] = 2\kappa \int_{\partial M} d\tau d\varphi \left(\frac{1}{2} \partial_+ \phi \partial_- \phi + \frac{\kappa}{\ell^2} \exp(\phi) \right) \quad (56-1-3)$$

این همان کنش معروف لیوویل در مختصات مخروط‌نوری است.

۲-۳ کلیات گرانش اینشتینی سه‌بعدی

یک خمینه‌ی سه‌بعدی جهت‌پذیر M را در نظر بگیرید که با مختصات $(x^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3)$ توصیف می‌شود. متريک $g_{\mu\nu}$ را با نشانگان $(+, -)$ روی اين خمینه‌ی فضازمان درنظر می‌گيريم.

کنش گرانشی اينشتين-هيلبرت به شكل زير است:

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}, \Phi] = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (1-2-3)$$

در اين رابطه، G ثابت نيوتون سه‌بعدی است، R اسکالر ریچی برای متريک $g_{\mu\nu}$ است و $\Lambda \in \mathbb{R}$ ثابت کيهان‌شناختي گرانشی است. ثابت نيوتون در سه‌بعدی بعد طول دارد، بنابراین ضریب G بعد انرژی دارد که در واحدهای طبیعی با جرم پلانک معادل است.

با وردش دادن کنش (۱-۲-۳)^{۱۶} به معادلات اينشتین در حضور ثابت کيهان‌شناختي می‌رسیم.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu} \quad (2-2-3)$$

آنچيزی که مختص سه بعد است؛ اين است که (مستقل از معادلات حرکت) تنها تانسور انحنای ریچی برای مشخص کردن تانسور ریمان کافی است.

$$R_{\lambda\mu\rho} = g_{\lambda\nu} R_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho} R_{\mu\nu} + g_{\mu\rho} R_{\lambda\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} R (g_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu}) \quad (3-2-3)$$

با جاي‌گذاري کردن از معادله‌ی حرکت می‌بینيم که تانسور ریمان مشابه تانسور ریمان يك فضای بيشينه‌متقارن است که انحنای آن با ثابت کيهان‌شناختي متناسب است.

$$R_{\lambda\mu\rho} = \Lambda (g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu}) \quad (4-2-3)$$

^{۱۶} فعلا جملات مرزی را دور می‌ريزيم، اما باید به آن برگردیم و به درستی تعریف‌ش کنیم. این کار در ضمیمه‌ی چ به دقت انجام شده‌است.

به بیان دیگر، هر جوابی از معادلات اینشتین در فضازمان سه‌بعدی، موضع با فضاهای سه‌بعدی دوستیه، مینکوفسکی یا پاددوستیه معادل است. این ویژگی کاملاً متفاوت با تئوری‌های گرانشی در ابعاد بالاتر است و به علت حالت خاص سه‌بعدی بودن، تانسور ریمان به شکل (۳-۲-۳) تنها از تانسور ریچی بدست می‌آید (یعنی تانسور واپل صفر است).

به زبان فنی‌تر، این مشاهده به این معناست که در گرانش سه‌بعدی اینشتینی، درجات آزادی موضعی وجود ندارد و هرچه هست درجات آزادی سرتاسری (توپولوژیک) است. به طور خاص‌تر، چون معادله‌ی حرکت در توده‌ی فضازمان به شکل خودکار برقرار است؛ پس انتظاری نداریم که امواج گرانشی در سه‌بعد داشته باشیم و این یعنی در توده‌ی خمینه‌ی فضازمان انتشار گراویتون نداریم.

توجه کنید که این هرگز به این معنای نیست که هر جوابی از گرانش سه‌بعدی، معادل با جواب فضای خالی است. چرا که ممکن است جواب‌ها سرتاسری متفاوت باشند؛ در حقیقت با خارج قسمتی کردن فضای دوستیه با هر زیرگروه گستته‌ای از خودریختی‌های این فضا، می‌توانیم به فضازمانی برسیم که خود جواب معادله‌ی اینشتین (۳-۲-۲) است. هم‌چنین این جواب‌های مختلف هم با هم معادل نیستند.

بنابراین، عدم حضور درجات آزادی موضعی در گرانش سه‌بعدی، این تئوری را کاملاً بی‌محتوانی کند و درجات آزادی این نظریه باید به شکل سرتاسری جستجو شوند. به نظریات میدانی که این ویژگی را داشته باشند، نظریات میدان کوانتمی توپولوژیک می‌گوییم.

تبصره: به علت نبود درجات آزادی موضعی در این مدل گرانشی، مدلی غیرواقع‌گرایانه از دنیای واقعی است (که در آن درجات آزادی موضعی در پدیده‌هایی مثل امواج گرانشی مشاهده می‌شوند). اما نظریه‌های بدیلی ارائه شده‌اند درجات آزادی موضعی هم دارند؛ مثل [۵۰] و [۵۱].

۱-۲-۳ شرایط مرزی و جملات مرزی کنش

برای معرفی کردن هر نظریه‌ی میدان، نیاز به معرفی محتوای میدانی آن، به همراه شرایط مرزی روی میدان‌ها داریم. معمولاً خمینه‌ی پس‌زمینه در مختصات شعاعی-زاویه‌ای (r, ϕ) توصیف می‌شود و مرزهای خمینه در حد $\infty \rightarrow r$ هستند. شرایط مرزی هم افت کردن میدان در $\infty \rightarrow r$ را مشخص می‌کنند.

$$\Phi(r, \phi) = \mathcal{O}(r^\#) \quad \text{as} \quad r \rightarrow \infty$$

در اینجا $\#$ توانی است که افت میدان را مشخص می‌کند و در ادامه، در خوش‌تعریفی کنش نقش

مهمی ایفا می‌کند.

در سطح کوانتومی، که کنش نظریه درون تابع نمایی در انترگرال مسیر است و روی تمامی پیکربندی‌های مجاز انترگرال‌گیری می‌شود، انتظار داریم که حد نیمه- کلاسیک انترگرال مسیر، یعنی $\rightarrow \hbar$ جواب‌های کلاسیکی را تولید کند. اما وردش^{۱۳} کنش^{۱۴} (۱-۲-۳) جملات مرزی دارد که جواب^{۱۵} کلاسیک را از معادله‌ی اینشتین- هیلبرت منحرف می‌کند.

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^3x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi G} \int_M d^3x \partial_\alpha \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\mu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \right) \quad (5-2-3)$$

برای این مشکل چاره‌ای باید اندیشید، راه حل اضافه کردن جمله‌ی گیبونز- هاوکینگ- یورک است که جملات مرزی فوق را صفر می‌کند و معادله‌ی حرکت آشنای نسبیت عام بدست بیاید (ضمیمه‌ی ^{۱۶}) . . . به علاوه، می‌دانیم که در نظریه‌های پیمانه‌ای نیاز به شرط افت^{۱۷} میدان‌ها داریم تا بتوانیم نظریه را بدون ابهام بررسی کنیم.^{۱۸}.

۲-۲-۳ آشنایی با تقارن‌های مجانبی

با قراردادن شرط افت میدان‌ها، حالا سراغ دسته‌بندی تقارن‌ها در یک نظریه‌ی پیمانه‌ای می‌رویم. در این رهیافت، دسته‌بندی تقارن‌های پیمانه‌ای برحسب این‌که آیا به شرایط افت میدان‌ها احترام می‌گذارند یا نه، انجام می‌پذیرد. برای انجام این‌کار، نیاز به بررسی بارهای تقارن‌های مجانبی داریم که در پایین بررسی‌شان می‌کنیم. اگرچه بارهای متناظر با تقارن‌های پیمانه‌ای وابسته به پیمانه هستند و کمیتی فیزیکی به حساب نمی‌آیند؛ اما هم‌چنان می‌توانیم بارهای پایستاری بسازیم که اطلاعات سودمندی در رابطه با تقارن‌های مجانبی در خود دارند. نتیجه‌ی نهایی بحث این است که مولدهای تقارن‌های مجانبی در یک جبری توسعه‌ی مرکزی یافته از جبری^{۱۹} گروه تقارنی مجانبی صدق می‌کنند.

^{۱۷} توجه کنید که شرط افت متريک اساسی است و با اضافه کردن جمله‌ی گیبونز- هاوکینگ- یورک قابل حذف کردن نیست؛ برای تفسیر فيزيکي متريک روی فضا- زمان و همينطور وجود جواب برای معادله‌ی اينشتين، شرط افت متريک در دوردست‌های لازم است.

مشکل تقارن‌های پیمانه‌ای

اگر فرآیند قضیه‌ی نوتر را برای بدست آوردن جریان پایستار تقارن‌های پیمانه‌ای طی کنیم، به مشکلی می‌خوریم که در صفر شدن جریان‌های پایستار خود را نشان می‌دهد. اجازه بدهید اول مروری بر قضیه‌ی نوتر برای تقارن‌های سرتاسری داشته باشیم تا اشکال کار را پیدا کنیم.

فرض کنید نظریه‌ای پیمانه‌ای داریم که تحت تبدیلات سرتاسری که با N پارامتر ϵ^a تولید می‌شود، ناوردادست.

$$\begin{cases} X^\mu \longrightarrow X^\mu + \delta_\epsilon X^\mu \\ \Phi \longrightarrow \Phi + \delta_\epsilon \Phi \end{cases} \quad (6-2-3)$$

در اینجا، Φ نشانه‌ی تمامی میدان‌هایی است که در نظریه حاضرند. راه بدست آوردن جریان‌های نوتری این است که پارامترهای ϵ^a را پیمانه‌ای کنیم، یعنی به فضازمان وابسته کنیم و سپس تغییرات کنش را بخوانیم. چون این تقارن‌سرتاسری بود، تغییرات کنش به شکل زیر خواهد شد.

$$\delta S = - \int_{\mathcal{M}} d^D x j_a^\mu \partial_\mu \epsilon^a \quad (7-2-3)$$

و از روی آن، جریان‌ها بدست می‌آیند. پایستار بودن جریان به خاطر این است که δS روی غشای جرمی صفر است.

بارها با انTEGRالگیری روی یک ابررویه‌ی فضائگونه بدست می‌آیند.

$$Q_a = \int_{\Sigma} (d^{D-1}x)_\mu j_a^\mu, \quad Q_a = \int_{\Sigma} (d^{D-1}x)_\mu j_a^\mu \quad (8-2-3)$$

اما در مورد تقارن‌پیمانه‌ای، مشکلی هست. پارامترهای ϵ^a از قبل پیمانه شده بودند و نمی‌توانیم از آن‌ها جریان پایستار در بیاوریم. این یعنی سمت راست معادله‌ی (7-2-3) خودکار صفر است. برای پارامترهای دلخواه، تنها وقتی این اتفاق می‌افتد که جریان‌های نوتری j_a^μ خود صفر باشند؛ بنابراین قضیه‌ی نوتر برای تقارن‌های پیمانه‌ای جریان صفر بدست می‌دهد.^{۱۸}

اما همانطورکه گفتیم، بارها پایستار تقارن‌های پیمانه‌ای قرار است به ما در مورد تقارن‌های مجانبی اطلاعات بدهند؛ پس باید به نحوی این بارها را تعریف کنیم. راه حل این است که توجه کنیم که در

^{۱۸} معادل این استدلال آن است که بگوییم که جریان‌های نوتری بدست آمده در قضیه‌ی نوتر وابسته به پیمانه هستند و نشانگر کمیتی فیزیکی نیستند. در حالت خاص، ما در پیمانه‌ای نشسته بودیم که جریان و بار نوتری هر دو صفر بودند.

معادله‌ی (۷-۲-۳)، جریان نوتری یکتا نیست و با افزودن دیورژانس یک ۲ - فرم به این جریان، می‌توان کمیت پاییستار دیگری به شکل زیر ساخت.

$$\tilde{j}_a^\mu = j_a^\mu + \partial_\nu k_a^{\mu\nu} \quad (9-2-3)$$

البته توجه کنید که $k_{\mu\nu}$ باید شرط افت مناسبی داشته باشد تا در $\delta S = 0$ ، جملات مرزی صفر شوند. اصلاح کردن جریان به این شکل، روی بار هم اصلاحاتی وارد می‌کند. اگر $k_{\mu\nu}$ روی مرز فضازمان شاری داشته باشد، بار هم تصحیحی به شکل زیر خواهد داشت.

$$Q_a = \int_{\Sigma} (d^{D-1}x)_\mu j_a^\mu, \quad Q_a = \int_{\Sigma} (d^{D-1}x)_\mu j_a^\mu \quad (10-2-3)$$

حالا باید به فرآیندی که طی شد، نگاهی از بالا بکنیم. اول از همه به نظر می‌رسد کاری که کردیم آزادی عمل بالایی در انتخاب $k_{\mu\nu}$ در اختیارمان می‌گذارد و از پیش راهی برای انتخاب کردن و نسبت دادن یک $k_{\mu\nu}$ به هر تقارن پیمانه‌ای در دست نداریم. بنابراین بار متناظر هم می‌تواند هر مقداری داشته باشد و کاری که تا الان کردیم معنای فیزیکی درست و حسابی ندارد. اما همانطور که می‌بینیم، درست نیست که تمرکزمان روی ساختن کمیت‌های فیزیکی و خوش تعریف j_μ^a و Q^a باشد. ما به هر تقارن پیمانه‌ای یک (D-2)-فرم $k_{\mu\nu}$ نسبت می‌دهیم و بار متناظرش را می‌سازیم؛ اگر این تansور پاییستار باشد، بار متناظرش هم در زمان پاییسته باقی می‌ماند. انتظارمان این است که معنای فیزیکی نه در خود جریان یا بار، بلکه در کمیت‌های پیمانه ناوردآیی که از آنها ساخته می‌شود باشد.

این سازوکار نامهای تخصصی هم دارد. به $k_{\mu\nu}$ یک فراپتانسیل می‌گوییم و به بار ساخته شده از آن هم بار سطحی می‌گوییم. به عنوان مثال، در الکترودینامیک مرسوم، تانسور قوت میدان الکترومغناطیسی، فراپتانسیل است و بار سطحی هم همان شار میدان الکتریکی در بینهایت دور دست است.

حالا می‌توانیم ادامه دهیم و فراپتانسیل‌ها را دسته‌بندی کنیم تا به شناخت بهتری از انواع تقارن‌های پیمانه‌ای برسیم و بتوانیم آن‌ها را دسته‌بندی کنیم.

دسته‌بندی تقارن‌های پیمانه‌ای و معرفی تقارن مجانبی

دسته‌بندی تقارن‌های پیمانه‌ای و نسبت دادن فراپتانسیل به آن‌ها کار نسبتاً دشواری هست و در [۵۲][۵۳][۵۴] مفصل بررسی شده است. ما قصد داریم این کار را برای گرانش سه بعدی انجام بدھیم. اما اجازه بدھید اول یک نگاه کلی از فرآیندی که دسته‌بندی تقارن‌های پیمانه‌ای داشته باشیم.

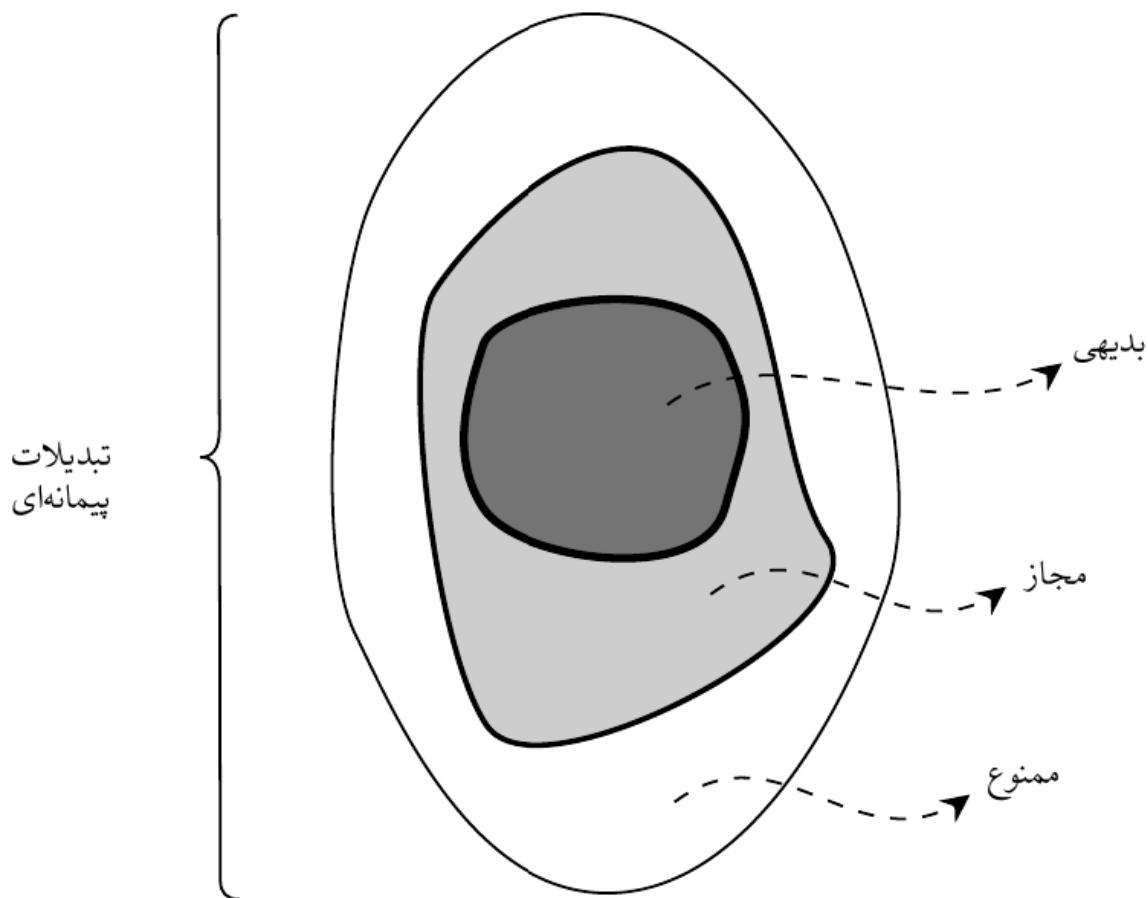
۱. اول از همه با انتخاب شرایطِ افت میدان‌ها روی خمینه‌ی فضازمان شروع می‌کنیم و نظریه را تعریف می‌کنیم. احتمالا در این مرحله اضافه کردن جملات مرزی مناسب هم لازم است.

۲. از بین تمامی تبدیلات تقارنی، دسته‌ای هست که شرط افت میدان را حفظ می‌کند. این دسته از تبدیلات را تبدیلات تقارنی مجاز می‌نامیم. در مقابل، تبدیلاتی که شرط افت میدان را محترم نمی‌شمارند، غیرمجاز هستند.

۳. به هرکدام از تبدیلات تقارنی، یک فراپتانسیل نسبت می‌دهیم. این فراپتانسیل حتما به شکل خطی به پارامترهای تبدیل وابسته است، اما وابستگی آن به میدان‌های مادی پیچیده‌تر است و در مراجع [۵۴] وابستگی آن به میدان‌های مادی برای نظریه‌های آشنا آمده است.

۴. برای هر فراپتانسیل، بار سطحی مربوطه را تشکیل می‌دهیم. شرطِ سازگاری نظریه‌ی پیمانه‌ای این است که تمامی بارهای سطحی‌شان متناهی باشند. مجموعه تبدیلاتی که بارهای سطحی‌شان صفر است، تبدیلات بدبیهی نامیده می‌شوند و سایر تبدیلات غیربدبیهی هستند.

با این روش چندمرحله‌ای، می‌توانیم تبدیلات پیمانه‌ای را به سه‌دسته‌ی مجزا تقسیم کنیم؛ همانطور که در شکل ۱-۳ می‌بینید.



شکل ۳-۱: تبدیلات پیمانه‌ای به سه‌دسته تقسیم می‌شوند. تبدیلات بدیهی تبدیلاتی هستند که شرط افت میدان را برآورده می‌کنند و حالت سیستم را عوض نمی‌کنند. تبدیلات غیربدیهی، فقط شرط افت را برآورده می‌کنند و حالت سیستم را عوض می‌کنند. تبدیلات ممنوع هم شرط افت را برآورده نمی‌کنند و به همین خاطر تقارن نظریه خوانده نمی‌شوند.

۱. تبدیلات پیمانه‌ای بدیهی: این تبدیلات، واقع‌تبدیلات پیمانه‌ای نظریه هستند؛ یعنی اضافه‌شماری‌هایی در توصیف نظریه.

۲. تبدیلات پیمانه‌ای غیربدیهی: این تبدیلات، میدان‌های پیمانه‌ای را به پیکربندی‌های غیرمعادل تبدیل می‌کنند و حالت سیستم را تغییر می‌دهند؛ هرچند که تقارن سیستم هستند. به یک معنا، این تبدیلات مشابه تبدیلات سرتاسری هستند.

۳. تبدیلات پیمانه‌ای غیرمجاز: این تبدیلات دیگر تقارن نظریه نیستند چون ما را از فضای فاز نظریه بیرون می‌اندازند (یعنی میدان‌ها را طوری تبدیل می‌کنند که شرایط افت برایشان صادق نیست).

حالا، از آنجایی که تبدیلات بینهایت کوچک برآکت لی دارند و جبری می‌سازند؛ به تعریف تقارن‌های مجانبی می‌پردازیم.

تعریف: جبر تقارن‌های مجانبی یک نظریه‌ی پیمانه‌ای از خارج قسمتی کردن جبر تبدیلات پیمانه‌ای مجاز به ایده‌آل متشکل از تبدیلات بدیهی بدست می‌آید.

ما قرار است تمامی این حرف‌ها را در چارچوب گرانش سه‌بعدی بیینیم که در آن تبدیلات پیمانه‌ای، دیفیوژور فیسم‌های خمینه‌ی فضازمان هستند. در ادامه، چارچوب ذکر شده در بالا را برای گرانش مجانبی پاددوسیته نگاه می‌کنیم و سپس به بررسی تقارن‌های مجانبی گرانش سه‌بعدی در فضای مجانبی تخت می‌رسیم که گروه تقارنی آن BMS₃ است.

توسعه‌ی مرکزی جبر بارهای سطحی

از نظریه‌ی میدان‌ها می‌دانیم که بارهای یک تقارن، مولد تبدیلات میدان هستند. در مسئله‌ی ما، بارهای سطحی مولد تبدیلات تقارنی مجانبی هستند. اگر ξ را یک پارامتر بینهایت کوچک برای تولید یک تقارن مجانبی درنظر بگیریم، بار متناظر آن، $[Q[\xi], \Phi]$ ، است و گزاره‌ی بالا معادل این است که

$$\{Q[\xi], \Phi\} = -\delta_\xi \Phi \quad (11-2-3)$$

که عبارت سمت راست، تبدیل میدان Φ تحت تقارن مجانبی تولید شده با ξ است.

چون برآکت پواسون در رابطه‌ی جاکوبی صدق می‌کند، برای هر میدان Φ می‌توانیم بینیم که

$$\{[Q[\xi], Q[\zeta]], \Phi\} = \{Q[[\xi, \zeta]], \Phi\} \quad (12-2-3)$$

شاید عبارت بالا ما را فریب دهد که صرفا برآکت پواسون را از طرفین حذف کنیم و به این نتیجه برسیم که بارهای سطحی نمایشی از تقارن‌های مجانبی هستند. اما این اشتباه است و می‌دانیم که جبر بارهای سطحی یک توسعه‌ی مرکزی از جبر تقارن‌های مجانبی است.

$$\{Q[\xi], Q[\zeta]\} = Q[[\xi, \zeta]] + c(\xi, \zeta) \quad (13-2-3)$$

که در آن c یک 2×2 -هم‌چرخه‌ی حقیقی است. چون اثر c روی میدان‌ها بدیهی است، در رابطه‌ی (13-2-3) از چشم‌ما مخفی ماند.

محتوای اصلی [۱] این بود که چنین توسعه‌ی مرکزی برای بارهای تقارن مجانبی نظریه‌های گرانشی حتما دیده می‌شود و جبر بارهای سطحی حاصل، جبر ویراسور است.

۳-۳ بررسی تقارن‌های مجانبی گرانش سه بعدی در فضای مجانبی پاددوسیته

تمامی آنچه که در قسمت‌های قبلی در مورد تقارن‌های مجانبی نظریه‌های پیمانه‌ای گفته شد، در این قسمت با بررسی مثال خاص گرانش سه بعدی مجانبی پاددوسیته، در عمل دیده می‌شود. به گرانش می‌توان به چشم نظریه‌میدانی پیمانه‌ای نگاه کرد که تقارن‌پیمانه‌ای آن، وابسانی‌های خمینه‌ی فضازمان هستند. در این بخش شرط مرزی Brown-Henneaux که افت متريک در دوردست‌های مکانی را مشخص می‌کند، معرفی می‌کنیم و به کمک آن، تقارن‌های مجانبی این سیستم را بررسی می‌کنیم.

راهنمای کلی این بخش به این صورت است: بعد از آشنایی اولیه با کلیات فضازمان پاددوسیته‌ی سه بعدی و مختصات‌های این فضازمان، به سراغ شرایط افت Brown-Henneaux روی متريک در مختصات سرتاسری می‌رویم و سپس میدان‌های برداری کیلینگ مجانبی را از روی شرایط افت Brown-Henneaux پیدا می‌کنیم. در نهایت به سراغ جبر بارهای سطحی می‌رویم و می‌بینیم که با جمع مستقیم دو جبر ویراسور با بار مرکزی ناصرف‌یکسان است؛ یعنی جبر بارهای سطحی، توسعه‌ی مرکزی جبر تقارن مجانبی است.

۱-۳-۳ هندسه‌ی فضای مجانبی پاددوسیته و شناخت این فضا از نزدیک‌تر

عموماً، برای شناخت بهتر یک خمینه (به خصوص از لحظه تقارنی، همانطور که در ادامه مشخص می‌شود)، آن را در فضای منتظمی با ابعاد بالاتر می‌نشانیم.

فضای $\mathbb{R}^{2,2}$ که مجهرز به مختصات (x, y, u, v) و متريک

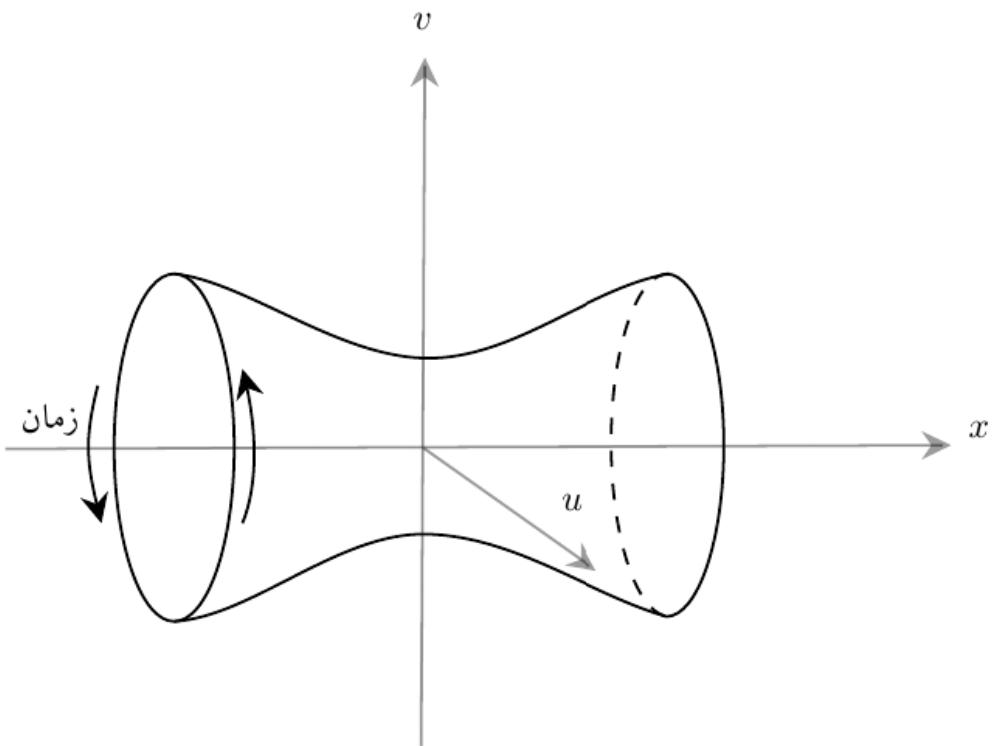
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - du^2 - dv^2 \quad (1-3-3)$$

است، در نظر بگیرید. فضازمان پاددوسیته‌ی سه بعدی را به عنوان یک زیر‌خمینه در این فضای هدف معرفی می‌کنیم.

$$\text{AdS}_4 \equiv \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^{2,2} \mid u^2 + v^2 = \ell^2 + x^2 + y^2\} \quad (2-3-3)$$

که $\ell > 0$ پارامتری مثبت است و شعاع AdS نام دارد. همچنین متريک روی این فضازمان، از متريک فضای هدف، یعنی $\mathbb{R}^{2,2}$ ، القا می‌شود.

خمينه‌ی معرفی شده به این شکل، توپولوژی $S \times \mathbb{R}^2$ دارد که بعد فشرده‌ی دایره‌ای آن زمان‌گونه است. (شکل ۲-۳ طرحی اولیه از آنچه در بعد پایین تر رخ می‌دهد به تصویر می‌کشد و کمک‌مان کند که این فضا و توپولوژی‌اش را بهتر درک کنیم.)



شکل ۲-۳: جانشانی فضای AdS_3 در $\mathbb{R}^{2,2}$. همانطور که می‌بینید، دایره‌های واقع شده روی صفحه‌ی $x = \text{cte}$ خم‌های بسته‌ی زمان‌گونه هستند.

فضای پاددوسیته‌ی سه بعدی را می‌توان به چشم یک زیرفضای همگن از فضای $\mathbb{R}^{2,2}$ دید. به این صورت که گروه طول پای فضای هدف، $O(2,2)$ است و به شکل گذرا روی زیرخمينه‌ی AdS_3 عمل می‌کند^{۱۹}. پایدارساز این اثر زیرگروه $O(2,1)$ است. مطابق قضیه‌ی مدار-پایدارساز، فضای همگن ساخته شده از خارج قسمتی کردن $O(2,2)$ به $O(2,1)$ ، همان فضای پاددوسیته‌ی سه بعدی است.

$$AdS_3 \cong \frac{O(2,2)}{O(2,1)} \cong \frac{SO(2,2)}{SO(2,1)}. \quad (3-3-3)$$

اما فضای معرفی شده، یکی از انتظارات فیزیکی ما را برآورده نمی‌سازد. همانطور که گفتیم، مولفه‌ی زمان‌گونه توپولوژی دایره‌ای دارد و این یعنی در این فضازمان، خم‌های بسته‌ی زمان‌گونه داریم. از آنجایی عمل این گروه طول پا به شکل آشنای $X^\mu \rightarrow \Lambda_\nu^\mu X^\nu$ است که یک چهارتایی مرتب است که نقاط فضای $\mathbb{R}^{2,2}$ را معلوم می‌کند و Λ یک ماتریس مربعی ۴ بعدی است که متریک (۱-۳-۳) را ناوردا نگه می‌دارد.

که خم‌های بسته‌ی زمان‌گونه در فضازمان اینشتینی، علیت را نقض می‌کنند، باید فکری به حال این فضازمان کنیم. برای حل این مشکل، خمینه‌ی معرفی شده در بالا را باید با فضای پوششی عامش جایگزین کنیم که آن را با \widetilde{AdS}_3 نشان می‌دهیم.

با معرفی مختصات‌های (r, φ, t) روی فضای پوششی به شکل زیر

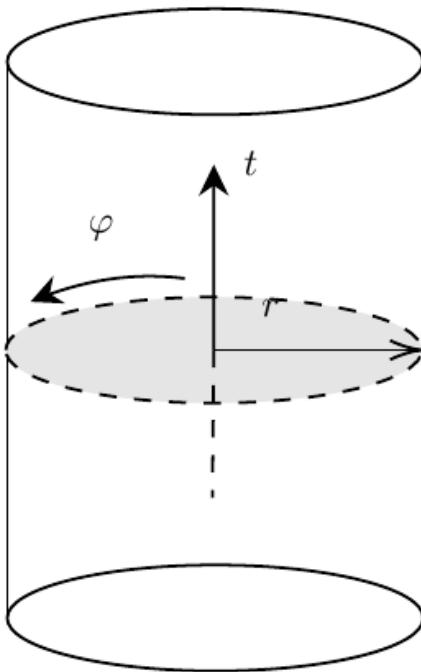
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{u^2 + v^2 - \ell^2}, \\ \varphi &= \arctan(y/x), \\ t &= \ell \operatorname{arctanh}(v/u). \end{aligned} \tag{4-۳-۳}$$

به صورت آشنای متريک فضای پاددوسيته سه‌بعدی می‌رسیم. در اين مختصات، $\varphi + 2\pi \sim \varphi$ و $t \in \mathbb{R}$ است؛ در حالی که در زيرخمينه‌ی (۴-۳-۳)، مختصه‌ی زمانی تحت همسان‌سازی $t \sim t + 2\pi\ell$ است.

متريک در اين مختصات به شکل زير است.

$$ds^2 = -(1 + r^2/\ell^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2/\ell^2} + r^2 d\varphi^2. \tag{5-۳-۳}$$

از اين‌به‌بعد، با فضای فيزيکی \widetilde{AdS}_3 کار می‌کنیم و آن را تعمدا «فضازمان پاددوسيته سه‌بعدی» می‌نامیم. به مختصات تعریف شده در (۴-۳-۳)، مختصات سرتاسری می‌گوییم. ثابت کیهان‌شناختی اين فضا $\Lambda = -1/\ell^2$ است و بعد جرمی ثابت نيوتون در سه‌بعد، منفي يك است. اين يعني پaramتر بعدي که تئوري گرانش را تعریف می‌کند، G/ℓ است و حد $\ell/G \rightarrow +\infty$ معادل تقریب نیمه‌کلاسیک است.



شکل ۳-۳: فضای پوششی AdS_3 که با \mathbb{R}^3 وابسان است. مختصه‌ی زمان در راستای محور استوانه است و مختصه‌ی r در راستای شعاع استوانه تعریف شده است. همچنین، مختصه‌ی φ ، 2π -متناوب است. استوانه‌ی واقع شده در $r \rightarrow \infty$ یک استوانه‌ی زمان‌گزنه است که با مختصات‌های (φ, r) تنیده می‌شود.

۲-۳-۳ بُردارهای کیلینگ فضای پاددوسیته‌ی سه‌بعدی

معرفی فضای پاددوسیته سه‌بعدی به این شکل، به راحتی این امکان را فراهم می‌سازد که با در دست داشتن بُردارهای کیلینگ فضای هدف (که دوران و خیز تعمیم‌یافته هستند)، به بُردارهای کیلینگ فضای AdS_3 بررسیم.^{۲۰}

شش میدان بُرداری کیلینگ مستقل که تبدیلات طول‌پایی فضای $\mathbb{R}^{2,2}$ را تولید می‌کنند، به شکل زیر علت این است که فضای پاددوسیته سه‌بعدی به شکل فاصله‌ی نقاط فضای هدف، یعنی $\mathbb{R}^{2,2}$ ، تعریف شده و این فاصله تحت تبدیلات طول‌پایی این فضا ناورداست، پس گروه تبدیلات طول‌پایی فضای هدف و گروه تبدیلات طول‌پایی فضای پاددوسیته سه‌بعدی یکسان هستند.

هستند.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= u\partial_v - v\partial_u, & \xi_2 &= x\partial_y - y\partial_x, & \xi_3 &= u\partial_y + y\partial_u, \\ \xi_4 &= v\partial_x + x\partial_v, & \xi_5 &= u\partial_x + x\partial_u, & \xi_6 &= v\partial_y + y\partial_v.\end{aligned}\quad (6-3-3)$$

برای آن که جبر این مولدها را مشخص کنیم، به بازتعریف زیر برای مولدها متول می‌شویم.

$$\begin{aligned}\ell_+ &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), & \bar{\ell}_+ &\equiv \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2), \\ \ell_1 &\equiv \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4 - i\xi_5 + i\xi_6), & \bar{\ell}_1 &\equiv \frac{1}{2}(-\xi_3 + \xi_4 - i\xi_5 - i\xi_6), \\ \ell_{-1} &\equiv \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4 + i\xi_5 - i\xi_6), & \bar{\ell}_{-1} &\equiv \frac{1}{2}(-\xi_3 + \xi_4 + i\xi_5 + i\xi_6),\end{aligned}\quad (7-3-3)$$

و مشاهده می‌کنیم که برای ℓ_m و $\bar{\ell}_n$ ($m, n = 0, \pm 1$) جبر زیر برقرار است.

$$i[\ell_m, \ell_n] = (m - n)\ell_{m+n}, \quad i[\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] = (m - n)\bar{\ell}_{m+n}, \quad i[\ell_m, \bar{\ell}_n] = 0. \quad (8-3-3)$$

این دقیقا همسانی $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ است.

آنچه در این بخش موردتوجه ماست، نه جبر مولدهای طول پای فضاهای تقارن‌های مجانبی (تقارن‌های حد $\infty \rightarrow r$) است. این ناحیه استوانه‌ی است که با مختصه‌های (t, φ) در مختصات سرتاسری توصیف می‌شود و در دوردست‌های فضایی واقع شده است (به شکل ۳-۳ نگاه کنید).

در ناحیه مجانبی، متریک $(5-3)$ به شکل زیر بازنویسی می‌شود (که در آن مختصه‌های مخروط

نور را این طور تعریف کرده‌ایم: $x^\pm = \frac{t}{\ell} \pm \varphi$.

$$ds^2 \sim \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - r^2 \left(\frac{dt^2}{\ell^2} - d\varphi^2 \right) = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - r^2 dx^+ dx^- \quad (9-3-3)$$

در حد $\infty \rightarrow r$ بردارهای کیلینگ معادله $(7-3-3)$ دارای صورت مجانبی زیر هستند.

$$\ell_m \sim e^{imx^+} \partial_+ - \frac{1}{2} im e^{imx^+} r \partial_r, \quad \bar{\ell}_m \sim e^{imx^-} \partial_- - \frac{1}{2} im e^{imx^-} r \partial_r \quad (10-3-3)$$

این دو دسته میدان‌های برداری، تبدیلات همدیس روی استوانه‌ی مجانبی را تولید می‌کنند که $\ell_+ + \bar{\ell}_+$ مولده انتقال زمانی و $\partial_\varphi - \ell_- - \bar{\ell}_-$ مولده چرخش روی استوانه هستند. با برهمنهی کردن مدهای فوریه در مولدهای مجانبی $(10-3-3)$ ، می‌توانیم فرم تبدیلات کلی را پیدا کنیم، به شکل زیر:

$$\xi \sim X(x^+) \partial_+ - \frac{1}{2} \partial_+ X(x^+) r \partial_r, \quad \bar{\xi} \sim \bar{X}(x^-) \partial_- - \frac{1}{2} \partial_- \bar{X}(x^-) r \partial_r \quad (11-3-3)$$

در اینجا $X(x^+)$ و $\bar{X}(x^-)$ توابع 2π -متناوب دلخواه هستند و خواهیم که شرط مرزی Brown-Henneaux به گونه‌ای هست که بردارهای کیلینگ $(11-3-3)$ ، مولدهای تقارن مجانبی می‌شوند.

۳-۳-۳ شرایط مرزی Brown-Henneaux

در این قسمت، منظورمان از فضازمان سه‌بعدی مجانباً پاددوسیته را مشخص می‌کنیم؛ در نگاه اول، انتظار داریم متريک فضازمان باید در حد مجانبی، به متريک فضای پاددوسیته‌ی خالی میل کند.

برای شروع، از خودمان می‌پرسیم که علی القاعده، باید چه فضازمان‌هایی را در زمرة فضازمان‌های مجانباً پاددوسیته بگنجانیم؟ پاسخ اولیه این است که بدیهتاً فضازمان پاددوسیته با متريک $(5-3)$ ، سپس تمامی فضازمان‌هایی که در توده‌ی خود کاستی یا فزونی مخروطی دارند. پس باید این متريک‌های این فضازمان‌ها را دقیق‌تر نگاه کنیم؛ اول همسان‌سازی زیر را انجام دهیم:

$$(r, \varphi, t) \sim (r, \varphi + 4\pi\omega, t - 2\pi A) \quad (12-3-3)$$

که در آن $\omega > 0$ و $A \in \mathbb{R}$ است. با این همسان‌سازی، به یک فضازمان با تکینگی مخروطی می‌رسیم. انتخاب $\omega = 1/2$, $A = 0$ فضای پاددوسیته‌ی خالی است و انتخاب $\omega < 1/2$ یک کاستی مخروطی و $\omega > 1/2$ یک فزونی مخروطی در مرکز مختصات ایجاد می‌کند.

از آنجایی که این همسان‌سازی سرتاسری است، خمینه‌ی جدید همچنان در معادله‌ی اينشتین (به جز احتمالاً در مرکز مختصات) صدق می‌کند 21 .

با تغییر مختصات زیر،

$$t' \equiv t + \frac{A}{2\omega} \varphi, \quad r' \equiv r, \quad \varphi' \equiv \frac{\varphi}{2\omega}, \quad (13-3-3)$$

به صورت آشنای متريک پاددوسیته‌ی سه‌بعدی AdS_3 می‌رسیم.

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r'^2}{\ell^2} \right) (dt' - Ad\varphi')^2 + \frac{dr'^2}{1 + r'^2/\ell^2} + 4\omega^2 r'^2 d\varphi'^2 \quad (14-3-3)$$

با این تفاوت که روی t' هیچ قیدی نیست و مختصه‌ی φ' هم با تناوب 2π همسان‌سازی می‌شود 22 .

حالا چون $(2, 2, 5)$ تقارن مجانبی فضای پاددوسیته‌ی خالی است و چون که علاقه‌مندیم متريک‌های دارای کاستی یا فزونی مخروطی را در زمرة متريک‌های «محانا تخت» بگنجانیم، پس باستی اثر مولدهای این گروه را روی متريک‌های دارای نقص مخروطی مشاهده کنیم و شرایط مجانبی مولفه‌های 23 در حقیقت متريک فوق جواب معادله‌ی اينشتین برای یک ذره‌ی نقطه‌ای جرم‌دار است که در مرکز مختصات قرار داده شده.

22 برای این که فضازمان حاصل در حد مجانبی خم‌های بسته‌ی زمان‌گونه نداشته باشد، لازم است که شرایط دیگری روی A و ω اعمال کنیم؛ در اینجا برای پیچیده‌تر نکردن بحث، از این شرایط صرف نظر می‌کنیم.

متريک را از روی اين اثر بخوانيم. اين شرایط، شرط‌افت Brown-Henneaux را تعريف می‌کنند. تبديلات بىنهایت کوچک متريک تحت ميدان برداری $\mathcal{L}\xi g_{\mu\nu}$ به شكل $g_{\mu\nu} + \mathcal{L}\xi g_{\mu\nu}$ داده می‌شود که در اينجا، متريک همان متريک داراي نقص مخروطي است^{۲۳}. در مختصات (r, φ, t) به شرایط افت زير برای متريک می‌رسيم.

$$(15-3-3) \quad (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\varphi} & g_{rt} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi t} \\ g_{tr} & g_{t\varphi} & g_{tt} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{r^4} + \mathcal{O}(r^{-4}) & \mathcal{O}(r^{-3}) & \mathcal{O}(r^{-3}) \\ \mathcal{O}(r^{-3}) & r^2 + \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(r^{-3}) & \mathcal{O}(1) & -\frac{r^2}{\ell^2} + \mathcal{O}(1) \end{pmatrix}$$

يادمان هست که می‌توانيم از وابسانی‌ها هم برای ساده‌تر کردن شرایط افت متريک کمک بگيريم؛ يعني پیمانه‌ای برای متريک‌ها انتخاب کنيم. بدست می‌آيد که مولفه‌های g_{rt} و $g_{r\varphi}$ می‌توانند همواره صفر شوند و تصحیحات مرتبه پايان‌تر به $g_{rr} = \frac{\ell^2}{r^4} + \mathcal{O}(r^{-4})$ هم با آزادی وابسانی صفر می‌شوند. به اين انتخاب پیمانه، پیمانه‌ی ففرمن-گرام می‌گويم. در نهايit به تعريف زير برای شرایط مرزی Brown-Henneaux می‌رسيم.

تعريف: \mathcal{M} را خمينه‌ای سه‌بعدی شبه-ريمانی با متريک ds^2 در نظر بگيريد. مختصات (r, x^a) را روی آن فرض کنيد که برای $r > r_0$ معتبر است و خمينه در حد $r \rightarrow \infty$ یک استوانه‌ی نورگونه است. اگر متريک در حد $r \rightarrow \infty$ رفتار زير را داشته باشد:

$$(16-3-3) \quad ds^2 \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell^2}{r^4} dr^2 + (r^2 \eta_{ab} + \mathcal{O}(1)) dx^a dx^b$$

که در آن η_{ab} متريک دوبعدی مينکوفسکی روی استوانه است؛ می‌گويم که خمينه‌ی (\mathcal{M}, ds^2) يک خمينه‌ی مجانباً پاددوسيته به معنای Brown-Henneaux در پیمانه‌ی ففرمن-گرام است. ثابت كيهان شناختي اين فضازمان $\Lambda = 1/\ell^2$ است.

از اين‌بعد، وقتی در مورد متريک‌های فضای پاددوسيته سه‌بعدی حرف می‌زنيم، توجه‌مان فقط به متريک‌های داراي شرایط افت Brown-Henneaux است. همچنان، متريک دوبعدی روی استوانه دوردست را با مختصات مخروط نور $-ds^2 = -dx^+ dx^-$ تعريف می‌کنيم.

توجه کنيد که خمينه‌های مجانباً پاددوسيته به شكل سرتاسری همان فضای پاددوسيته خالي نیستند؛ چراکه مثلاً در رده‌ی متريک‌های Brown-Henneaux، خمينه‌هایی که در توده‌شان داراي تكينگی^{۲۴} توجه کنيد که الزاماً $\mathcal{L}\xi g_{\mu\nu}$ صفر نیست؛ چرا که ميدان برداری مولد تبديلات طول‌پاي متريک فضای پاددوسيته است، نه فضای پاددوسيته داراي نقص.

مخروطی هستند، گنجانده شده‌است.

تبصره: علت این‌که توانستیم پیمانه‌ی ففرمن-گرام را انتخاب کنیم، برمی‌گردد به «ساختن خمینه‌ی همدیس در ابعاد بالاتر» [۵۵] و این ساختار در ارتباط تنگاتنگی است با این که در توده‌ی این خمینه‌ها درجه‌ی آزادی موضعی نداریم.

۴-۳-۳ میدان‌های برداری کیلینگ مجانبی فضای پاددوسیته‌ی سه‌بعدی

حالا به بررسی میدان‌های برداری می‌پردازیم که مولد وابرسانی‌هایی هستند که شرایط مرزی Brown-Henneaux را حفظ می‌کنند. به این میدان‌های برداری، میدان‌های برداری کیلینگ مجانبی می‌گوییم. این شرط معادل این است که معادلات زیر برقرار باشند.

$$\mathcal{L}_\xi g_{rr} = \mathcal{L}_\xi g_{r\pm} = 0, \quad \mathcal{L}_\xi g_{ab} = \mathcal{O}(1) \quad (a, b = \pm) \quad (17-3-3)$$

معادله‌ی اول از ثابت بودنِ مولفه‌های rr و $r\pm$ در تعریف (۱۶-۳-۳)، یعنی از $\frac{\ell^r}{r^2} g_{rr} = 0$ و $\frac{\ell^r}{r^2} g_{r\pm} = 0$ و معادله‌ی دوم از نوسان‌کردن ($a, b = \pm$) $g_{ab} = \mathcal{O}(1)$ در دوردست حاصل می‌شود.

لم: $g_{\mu\nu}$ را متریکی بگیرید که در تعریف ۳-۳-۳ (یعنی مجانبی پاددوسیته به معنای ففرمن-گرام) صدق می‌کند و \mathcal{L}_ξ برداری که شرایط فوق‌الذکر (۱۷-۳-۳) را برآورده می‌کند. آنگاه معادلات

$$\xi = X(x^+) \partial_+ + \bar{X}(x^-) \partial_- - \frac{1}{2} (\partial_+ X(x^+) + \partial_- \bar{X}(x^-)) r \partial_r \quad (18-3-3) \quad (\text{زیر- غالب})$$

که در آن $X(x^+)$ و $\bar{X}(x^-)$ دو تابع دلخواه و هموار 2π -متناوب هستند و تصحیحات مرتبه‌ی پایین‌تر به آن به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} & -\frac{\ell^r}{2} \partial_a (\partial_+ X + \partial_- \bar{X}) \int_r^{+\infty} \frac{dr'}{r'} g^{ab}(r', x^\pm) \partial_b \\ & = \frac{\ell^r}{2r^2} [\partial_- (\partial_+ X + \partial_- \bar{X}) \partial_+ + \partial_+ (\partial_+ X + \partial_- \bar{X}) \partial_-] + \mathcal{O}(r^{-4}). \end{aligned} \quad (19-3-3)$$

برهان: شرایط را تک‌تک روی \mathcal{L}_ξ اعمال می‌کنیم تا ظاهر آن به شکل مقید (۱۸-۳-۳) تبدیل شود.

اول شرط $\mathcal{L}_\xi g_{rr} = 0$ را اعمال می‌کنیم؛ بردار مجانبی را به شکل $\xi^r \partial_r + \xi^+ \partial_+ + \xi^- \partial_- = \xi$ بگیرید. با کمک $\mathcal{L}_\xi g_{rr} = 2\nabla_r \xi_r = 0$ و با دانستن این‌که تنها مولفه‌های ناصفر هموستار لوى‌چویتا در متریک

مجانباً پاددوسیته $\Gamma_{rr}^r = -1/r$ است؛ می‌رسیم به

$$\partial_r \xi^r = \xi^r/r \quad (20-3-3)$$

جواب این معادله به شکل $\xi^r(r, x^\pm) = r\mathcal{F}(x^\pm)$ تابع دلخواهی روی استوانه است. از طرف دیگر شرط $\mathcal{L}_\xi g_{r\pm}$ (با محاسباتی مشابه، این‌بار با تبدیل بردار \bar{X} از پیمانه‌ی مخروط نور به مختصه‌های (t, φ) و داشتن هموستارهای ناصر) منجر می‌شود به

$$\partial_r \xi^c = -g^{ca} \frac{\ell^r}{r} \partial_a \mathcal{F} \quad (21-3-3)$$

که به خاطر استقلال \mathcal{F} از مولفه‌ی r ، به سادگی انتگرال‌گیری می‌شود.

$$\xi^a = X^a(x^\pm) + \ell^r \partial_b \mathcal{F}(x^\pm) \int_r^{+\infty} \frac{dr'}{r'} g^{ab}(r', x^\pm) \quad (22-3-3)$$

در این جا $X^a \partial_a$ یک میدان برداری دلخواه روی استوانه است. توجه کنید که چون g_{ab} از مرتبه‌ی r^2 شروع می‌شود، پس معکوس متريک g^{ab} از مرتبه‌ی r^{-2} شروع می‌شود و انتگرال رابطه‌ی (22-3-3) همگراست. اگر $g^{ab} = \frac{\eta^{ab}}{r^4} + \mathcal{O}(r^{-4})$ را در معادله‌ی فوق جایگذاری کنیم به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\xi^a = X^a(x^\pm) + \frac{\ell^r}{2r^2} \eta^{ab} \partial_b \mathcal{F}(x^\pm) + \mathcal{O}(r^{-4}). \quad (23-3-3)$$

در مختصات مخروط نور، متريک مينکوفسکي به شکل زير است.

(24-3-3)

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} \eta_{++} & \eta_{+-} \\ \eta_{-+} & \eta_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & -1/2 \\ -1/2 & \cdot \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad (\eta^{ab}) = \begin{pmatrix} \cdot & -2 \\ -2 & \cdot \end{pmatrix}$$

پس عبارت (22-3-3)، با جذب متريک مينکوفسکي در مشتق، به شکل زير بازنويسي می‌شود.

$$\xi^\pm = X^\pm - \frac{\ell^r}{r^2} \partial_\mp \mathcal{F} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (25-3-3)$$

با اعمال شرط آخر از (17-3-3)، می‌رسیم به این که $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_\xi g_{ab} = r^2 (2\mathcal{F}\eta_{ab} + \mathcal{L}_X \eta_{ab})$ که مشتق لی روی استوانه نسبت به میدان برداری $X^a \partial_a$ است. شرط مرتبه‌یک بودن این عبارت نتیجه می‌هد که $\mathcal{F} = -1/2(\partial_+ X^+ + \partial_- X^-)$ ^{۲۴} که با ضرب در متريک مينکوفسکي می‌رسیم به $\mathcal{L}_X \eta_{ab} = -2\mathcal{F}\eta_{ab}$ و بقیه‌ی شرط‌ها قيد $\partial_- X^+ = \partial_+ X^-$ را می‌گذارند و اين یعنی که تابعیت X و \bar{X} به شکل $X(x^+)$ و

^{۲۴} به اين شرط، معادله‌ی كيلينگ همديس برای X گفته می‌شود.

است. درنهایت به با جمع آوری مولفه‌های $r \pm$ برای بردار $\bar{X}(x^-)$ به رابطه‌ی (۱۸-۳-۳) می‌رسیم و جملات مرتبه‌ی پایین‌تر هم از (۱۹-۳-۳) بدست می‌آیند.

از این به بعد بردار کیلینگ مجانبی تولیدشده با توابع $X(x^+)$ و $\bar{X}(x^-)$ (در رابطه‌ی (۱۸-۳-۳)) را با نماد (X, \bar{X}) نشان می‌دهیم. با بازکردن مولدها برحسب مد فوريه‌شان

$$\ell_m \equiv \xi_{(e^{imx^+}, \cdot)}, \quad \bar{\ell}_m \equiv \xi_{(\cdot, e^{imx^-})}, \quad (26-3-3)$$

می‌بینیم که که برآکت لی این مولدها (تا حداکثر جملات زیر-غالب) مشابه با (۸-۳-۳) است با این تفاوت که $m, n \in \mathbb{Z}$.

پس در حدمجانبی، جبرتقارن‌های مجانبی به دوکپی جابه‌جاشونده از جبر بی‌نهایت بعدی ویت تبدیل می‌شود؛ به این معنی، تقارن‌های سرتاسری فضازمان، در حالت مجانبی تقویت می‌شوند.

قضیه: گروه تقارن‌های مجانبی فضای AdS_3 با شرط مرزی Brown-Henneaux، ضرب مستقیم دو گروه ویراسورو $(\widetilde{\text{Diff}}^+(S^1) \times \widetilde{\text{Diff}}^+(S^1))$ است که اعضاش به شکل زیر هستند.

$$(x^+, x^-) \mapsto (f(x^+), \bar{f}(x^-)) \quad (27-3-3)$$

که به شکل تبدیلات همدیس روی مختصات مخروط نوری استوانه‌ی مرزی عمل می‌کنند.

البته هنوز قضیه‌ی بالا را نشان نداده‌ایم، چون هنوز نمی‌دانیم که آیا تمامی بارهای سطحی تقارن‌های فوق ناصرف‌ند؛ یعنی ممکن است بعضی از این تقارن‌ها بدیهی باشند. این چیزی است که در ادامه قرار است بحث کنیم و نشان دهیم که تمامی این تقارن‌ها نابدیهی‌اند.

همچنین توجه کنید که در بیان این قضیه، یک نکته را مسکوت گذاشتیم: از صورت بردارهای کیلینگ مجانبی در رابطه‌ی (۱۸-۳-۳) برمی‌آید که بردارهای کیلینگ مجانبی، مختصه‌ی شعاعی را تا مرتبه‌ی $O(r^{-1})$ عوض می‌کنند؛ اما این سهم در حد $\infty \rightarrow r$ اهمیتی ندارد.

۵-۳-۳ متریک‌های Brown-Henneaux

همانطور که در بخش‌های پیشین گفتیم، یکی از مراحل مهم در بررسی تقارن‌های مجانبی، اضافه کردن جملات مرزی مناسب به کنش (باتوجه به شرایط افت دلخواه‌مان) است تا جواب‌های کلاسیک، از فرینه‌ی کنش حاصل شوند. درحالی که شرایط افت ما Brown-Henneaux باشند، بهبود کنش با افزوده

شدن جمله‌ای مشابه جمله‌ی گیبونز-هاوکینگ-یورک صورت می‌گیرد.

$$S[g_{\mu\nu}] \equiv S_{EH}[g_{\mu\nu}] - \frac{1}{\Lambda\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-\det(g_{ab})} \left(K + \frac{1}{\ell} \right) \quad (28-3-3)$$

در این رابطه S_{EH} کنش عادی اینشتین-هیلبرت است و K رد انحنای خارجی است. (برای اطلاع بیشتر، به مراجع [۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹] رجوع کنید.)

حالا با این کنش بهبودیافته، معادلات حرکت را می‌توانیم بررسی کنیم. جواب کلی این معادله، به طور گستردگی در [۴۷، ۴۰] بررسی شده و نتیجه این است که در پیمانه‌ی ففرمن-گرام تمامی متريک‌های Brown-Henneaux به شکل زیر نوشته می‌شوند.

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^4} dr^2 - \left(r dx^+ - \frac{4G\ell}{r} \bar{p}(x^-) dx^- \right) \left(r dx^- - \frac{4G\ell}{r} p(x^+) dx^+ \right) \quad (29-3-3)$$

که $p(x^+)$ و $\bar{p}(x^-)$ دو تابع دلخواه 2π -متناوب هستند.

اجازه بدھید کمی با این متريک دست ورزی کنیم. وردش اين متريک تحت يك ميدان برداري كيلينگ مجانبي، (X, \bar{X}) ، به شکل زير است ^{۲۵}.

$$\mathcal{L}_{\xi_{(X, \bar{X})}} ds^2 \equiv 4G\ell \delta_X p(x^+) (dx^+)^2 + 4G\ell \delta_{\bar{X}} \bar{p}(x^-) (dx^-)^2 \quad (30-3-3)$$

توجه کنید که اين وردش، فرم ارائه شده در (۲۹-۳-۳) را با بازتعريف p و \bar{p} حفظ می‌کند. به کمک $(18-3-3)$ می‌توانیم بینیم که وردش p و \bar{p} تحت (X, \bar{X}) به شکل زیر است ^{۲۶}.

$$\delta_X p = X \partial_+ p + 2p \partial_+ X - \frac{c}{12} \partial_+^3 X, \quad \delta_{\bar{X}} \bar{p} = \bar{X} \partial_- \bar{p} + 2\bar{p} \partial_- \bar{X} - \frac{\bar{c}}{12} \partial_-^3 \bar{X} \quad (31-3-3)$$

که $c = \bar{c}$ بار مرکزي Brown-Henneaux است.

$$c = \bar{c} = \frac{3\ell}{2G} \quad (32-3-3)$$

همچنان، تبدیلات فوق برای p و \bar{p} کاملا مشابه تبدیلات مولفه‌های تمام ریخت و پادتمام ریخت تansور تنش نظریه‌ی میدان همدیس دو بعدی است؛ همینطور با نمایش هم‌الحاقی گروه ویراسورو وقتی که p و \bar{p} دو بردار هم‌الحاقی باشند. البته توجه کنید که هنوز دلیل و شاهد کافی برای این که c و \bar{c} را بار مرکزی میدان همدیس دوگان بنامیم نداریم؛ چون که با تغییر در بهنجارش p و \bar{p} ، مقدار c هم عوض می‌شوند. آنجایی این تعبیر درست است و این کمیت‌ها معنا پیدا می‌کنند که وارد جبر بارسطحی می‌شوند.

^{۲۵} تنها جملات مناسب با (dx^\pm) در مشتق لی زنده می‌مانند، چون میدان برداری مجانبی طبق تعریف طوری بود که موله‌های $d\bar{r}^\pm$ و dr^\pm تولید نکند. این وردش صرفا وردش متريک را به وردش بردارهای هم‌الحاقی (p, \bar{p}) نسبت می‌دهد.

^{۲۶} محاسبات با یافتن مشتق لی متريک (۲۹-۳-۳) تحت بردار ξ و با اتحادهای استاندارد مشتق لی انجام می‌شود، تنها نکته اين است که باید فقط به سهم جملات (dx^\pm) در متريک نگاه کنیم.

۶-۳-۳ بارهای سطحی و جبر ویراسورو

یک متریک با شرط مرزی Brown-Henneaux انتخاب می‌کنیم و یک میدان برداری کیلینگ مجانبی که با توابع $X(x^+)$ و $\bar{X}(x^-)$ معین شده، در نظر می‌گیریم. قصد داریم بار سطحی مربوط به تقارن مجانبی ای که با (X, \bar{X}) تولید می‌شود، پیدا کنیم. با انتخاب مناسب فراپتانسیل^{۲۴}، می‌توانیم بار سطحی منسوب به میدان برداری (p, \bar{p}) را روی متریک (به [۶۱] رجوع کنید).

$$Q_{(X, \bar{X})}[p, \bar{p}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [p(x^+) X(x^+) + \bar{p}(x^-) \bar{X}(x^-)] \quad (33-3-3)$$

مطابق گفته‌های پیشین، می‌توانیم این بار را بار نوتری تبدیلات همدیس (X, \bar{X}) روی یک نظریه میدان همدیس دو بعدی روی استوانه با تansور تنش p و \bar{p} تعبیر کنیم.

بار مربوط به تقارن انتقال در زمان که از بردار کیلینگ مجانبی $\partial_t = 1/\ell(\partial_+ + \partial_-)$ حاصل می‌شود، همان هامیلتونی یا جرم ADM است.

$$M[p, \bar{p}] = \frac{1}{2\pi\ell} \int_0^{2\pi} d\varphi [p(x^+) + \bar{p}(x^-)] \quad (34-3-3)$$

همچنین بار مربوط به تقارن چرخشی از بردار کیلینگ $\partial_\varphi - \partial_+ - \partial_-$ بدست می‌آید و همان تکانه‌زاویه‌ای است.

$$J[p, \bar{p}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [p(x^+) - \bar{p}(x^-)] \quad (35-3-3)$$

در حالت فضای پاددوسیته‌ی خالی، $M = -1/8G$ است؛ تکانه‌ی زاویه‌ای و تمامی بارهای سطحی صفرند.

حالا جبر بارهای سطحی را نگاه می‌کنیم. [۶۲]

یادمان هست که جبر بار سطحی به ما کمک می‌کند تا تبدیلات میدان‌ها را از رابطه‌ی (۱۱-۲-۳) پیدا کنیم و همچنین تقارن‌های پیمانه‌ای سیستم فیزیکی را دسته‌بندی کنیم.

اگر (p, \bar{p}) متریک را مشخص کنند، آن‌گاه برآکت پواسون دو بار $[p, \bar{p}]$ و $[Q_{(Y, 0)}, Q_{(X, 0)}]$ به شکل ^{۲۷} انتخاب ابرپتانسیل سازگار و محاسبات مربوط به این کار در [۶۱] آمده است.

زیر است.

$$\begin{aligned} \{Q_{(X,\cdot)}[p, \bar{p}], Q_{(Y,\cdot)}[p, \bar{p}]\} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(X\partial_+ p + 2p\partial_+ X - \frac{c}{12}\partial_+^3 X \right) Y(x^+) \\ &= Q_{([X,Y],\cdot)}[p, \bar{p}] + c c(X, Y) \end{aligned} \quad (36-3-3)$$

در خط آخر، مقصود از [..] براکت لی میدان‌های برداری است و $c(X, Y)$ هم ۲-هم‌چرخه‌ی گلفاند-فوكس است. این جبر، همان جبر ویراسورو با توسعه‌ی مرکزی است.

۲-هم‌چرخه‌ی گلفاند-فوكس، که عضوی از گروه دوم کوهمولژی جبر ویراسور است؛ دو میدان برداری معرفی شده روی دایره را می‌گیرد و به شکل زیر یک میدان برداری دیگر روی دایره می‌دهد.

$$c(X, Y) \equiv -\frac{1}{24\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi X(\varphi) Y'''(\varphi). \quad (37-3-3)$$

و براکت پواسون نوشته شده در (36-3-3) دقیقا همان براکت Kirilov-Kostant روی بردارهای هم‌الحاقی گروه ویراسورو است؛ با این مفاهیم در ضمیمه‌ی مقدمات ریاضی ب بیشتر آشنا می‌شویم.

اگرچه این جبر فعلا شبیه جبر ویراسورو نیست، می‌توانیم آن را بر حسب مولدهای آشنای ویراسورو بنویسیم.

$$\mathcal{L}_m \equiv Q_{(e^{imx^+}, \cdot)}[p, \bar{p}], \quad \bar{\mathcal{L}}_m \equiv Q_{(\cdot, e^{imx^-})}[p, \bar{p}], \quad (38-3-3)$$

که براکت پواسون آن دو دقیقا مشابه به جبر ویراسورو می‌شود.

تبصره: شرایط مرزی Brown-Henneaux، به‌نوعی شرایط مرزی استاندارد گرانش سه‌بعدی در فضای مجانبنا پاددوستیه هستند؛ اما شرایط افت دیگری هم هستند که در مراجع بررسی شده‌اند. شرط مرزی آزاد [۶۳] که به‌نوعی تعمیم شرط Brown-Henneaux است و به فاکتور همدیس متریک اجازه‌ی دینامیک داشتن می‌دهد؛ از معروف‌ترین شرایط مرزی مجانبی است که به دسته‌ی جدیدی از تقارن‌ها اجازه‌ی وارد شدن به زمرة‌ی تقارن‌های مجانبی می‌دهد. همچنین شرط مرزی دستیده هم قبل بررسی شده [۶۴]. تعمیم‌های تئوری‌ها در حضور ماده و اسپین‌های بالاتر هم وجود دارند.

۷-۳-۳ حل مدهای صفر

منظورمان از مدهای صفر، جوابهای متريک برای انتخاب ثابت $p(x^-) = \bar{p}$ و $p(x^+) = p$ است؛ در اين حالت، به راحتی می‌توانيم ببينيم که تنها بارهای سطحی ناصرف، \mathcal{L} و $\bar{\mathcal{L}}$ هستند.

در حالت $p_+ = \bar{p}_+ = -c/2\ell$ ، متريک به شکل (۵-۳-۳)، يعني متريک فضای پاددوسيتهی خالص درمی‌آيد. تکانه‌زاویه‌ای اين انتخاب‌ها صفر است و جرم آن مطابق انتظار ما $M = 1/8G$ است.^{۲۸} می‌توانيم مشابها پaramترهای p و \bar{p} که به ما فضازمان‌های دارای تکينگی مخروطی می‌دهند، بدست آوريم.

$$\mathcal{L}_+ = p_+ = -\frac{\ell}{16G} \left(2\omega - \frac{A}{\ell} \right)^2, \quad \bar{\mathcal{L}}_+ = \bar{p}_+ = -\frac{\ell}{16G} \left(2\omega + \frac{A}{\ell} \right)^2 \quad (39-3-3)$$

برای اين انتخاب‌ها، تکانه‌زاویه‌ای و جرم به شکل زير هستند.

$$M = \frac{p_+ + \bar{p}_+}{\ell} = -\frac{1}{8G} \left(4\omega^2 + \frac{A^2}{\ell^2} \right) \quad (40-3-3)$$

$$J = p_+ - \bar{p}_+ = \omega A / 2G$$

در حالتی که هردوی p_+ و \bar{p}_+ مثبت باشند، متريک بدست آمده متريک BTZ است که جرم آن $M = J/\ell$ است و تکانه‌زاویه‌ای $p_+ - \bar{p}_+ = J$ دارد.²⁹

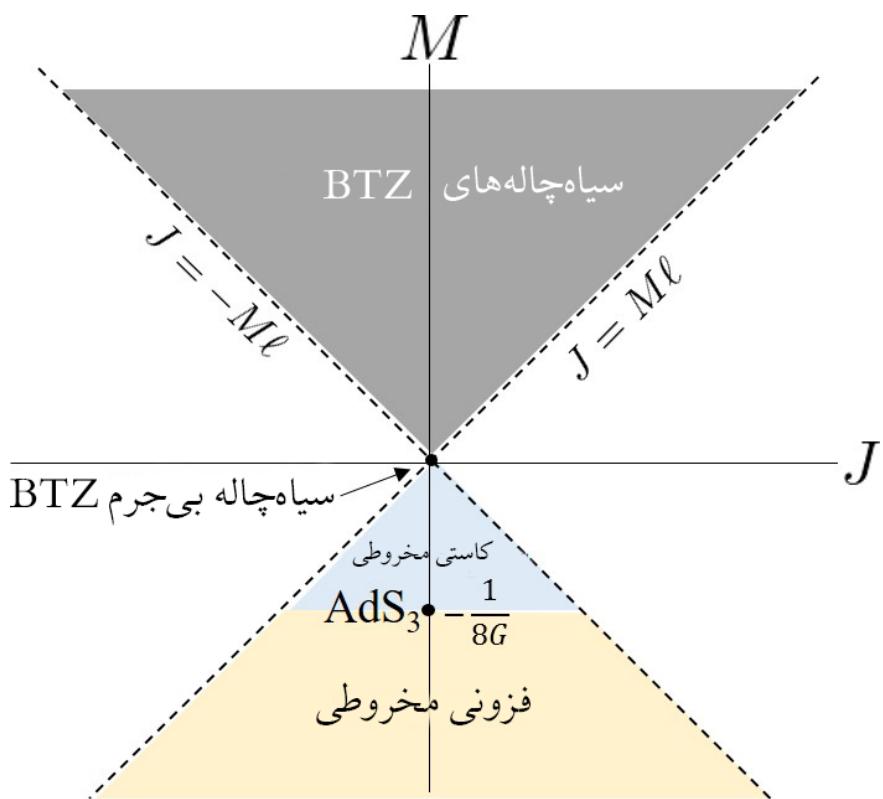
(41-3-3)

$$ds_{BTZ}^2 = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 - \left(r dx^+ - \frac{2G\ell}{r} (\ell M - J) dx^- \right) \left(r dx^- - \frac{2G\ell}{r} (\ell M + J) dx^+ \right).$$

توجه کنيد که در فضازمان‌های مجانباً پاددوسيته، شرط $p_+, \bar{p}_+ > 0$ معادل $\ell M \leq |J|$ (سانسور کيهاني) است و ورای آن، تمامي متريک‌ها (حتى در ناحيه‌ی مجانبي) دارای خم‌های بسته‌ی زمانگونه هستند.

در آخر هم بيايد نگاهی بيندازيم به طيف جوابهای گرانش سه‌بعدی مجانباً پاددوسيته برحسب جرم و تکانه‌ی زاویه‌ای شان در تصویر ۴-۳.

^{۲۸} اين جرم، انرژي خلا نظریه‌ی میدان همدیس دو بعدی روی استوانه هم هست؛ اين را با جايگذاري از بار مرکزي Brown-Henneaux مشاهده می‌کنيم.



شکل ۳-۴: طیف جوابهای گرانش مجانبا پاددوسیته با شرط مرزی Brown-Henneaux. می‌بینیم که فضای پاددوسیته‌ی خالی با یک شکاف جرمی از پیوستار سیاه‌چاله‌ها جدا شده است. و نواحی $|J| \geq \ell M$ سانسور کیهانی شده‌اند.

۴-۳ گرانش سه بعدی اینشتینی در فضای مجانبا تخت

گروه Bondi-Metzner-Sachs نامیده می‌شود، گروه لی بی‌نهایت بعدی است و از قضا خواهیم دید که گروه تقارن‌های مجانبی گرانش اینشتینی در فضازمان مجانبا تخت است. جبر این گروه از توسعه‌ی مرکزی جبر پوانکاره به دست می‌آید. ابتدا در کار اصلی Van der Burg و Metzner در [۶۵] و سپس مستقلان توسط Sachs در [۶۶] این گروه‌ها در چهار بعد فضازمانی پیدا شدند؛ اما ما در اینجا با گروه BMS₃ سروکار داریم. همچنین تحلیل ما در عمدتاً در سطح کلاسیک خواهد بود و دقیقاً نشان می‌دهیم که جبر مولدهای تقارن مجانبی همان b_{m53} است. درنهایت، فضای فاز گرانش مجانبا تخت با یک نمایش هم‌الحاقی از گروه BMS₃ با توسعه‌ی مرکزی بدست می‌آید.

۱-۴-۳ مختصات BMS در فضای سه‌بعدی تخت

در این بخش به معرفی مختصاتی می‌پردازیم که کارمان را برای بررسی تقارن‌های مجانبی تاحدی‌خیلی زیادی راحت می‌کند؛ این مختصات را مختصراً مختصات Bondi می‌نامیم.

فضای مینکوفسکی، جواب بیشینه متقارن معادله‌ی اینشتین با ثابت کیهان‌شناختی صفر است. می‌دانیم متريک مینکوفسکی سه‌بعدی روی خمينه‌ی $\mathbb{R}^{2,1}$ در مختصات‌های اقلیدسی $(t, x, y) = (x^0, x^1, x^2)$ به شکل زیر است.

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1-4-3)$$

گروه تقارنی فضای مینکوفسکی، گروه پوانکاره است، یعنی $\mathbb{R}^3 \ltimes O(2,1) = IO(2,1)$. اعضای این گروه جفت‌های (Λ, α) هستند، که Λ یک تبدیل لورنتز دلخواه است و α -بردار نمایانگر انتقال است.

این گروه به شکل گذراي $X^\mu \rightarrow \Lambda_\nu^\mu X^\nu + \alpha^\mu$ روی فضای مینکوفسکی اثر می‌کند. باز هم مشابه با فصل قبلی، می‌توانیم از قضیه‌ی مدار-پایدارساز نتیجه بگیریم که

$$\mathbb{R}^{2,1} \cong IO(2,1)/O(2,1) \quad (2-4-3)$$

اگرچه مختصات فوق آشناترین مختصات است؛ اما برای توصیف تقارن BMS مختصات Bondi سودمند است و به شکل زیر تعریف می‌شود.

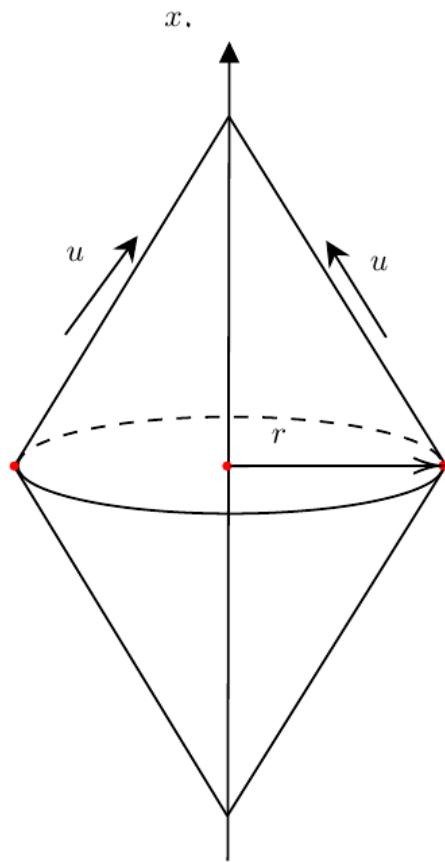
$$r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}, \quad e^{i\varphi} \equiv \frac{x + iy}{r}, \quad u \equiv t - r, \quad (3-4-3)$$

که محدوده‌ی متغیرها به شکل $r \in \mathbb{R}^+$ و $u, \varphi \in \mathbb{R}$ است. همچنین، همسان‌سازی $2\pi \sim \varphi + \varphi$ هم اعمال شده است. در این مختصات، u به عنوان زمان عقب افتاده شناخته می‌شود. به مختصات (t, r, φ) که قبلاً در (۵-۳-۳) تعریف کردیم، مختصات استوانه‌ای روی فضای مینکوفسکی می‌گوییم.

بنابراین، متريک مینکوفسکی در مختصات استوانه‌ای و مختصات Bondi به شکل زیر است.

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 = -du^2 - 2dudr + r^2 d\varphi^2 \quad (4-4-3)$$

در تصویر ۵-۳ نمودار پنروز فضازمان مینکوفسکی در مختصات Bondi را می‌توانید ببینید.



شکل ۳-۵: نمودار پنروز مختصات BMS. $x.$ مختصه‌ی زمانی است و u مختصه‌ی عقب‌افتاده‌ی BMS هستند.

۲-۴-۳ بردارهای کیلینگ فضای مینکوفسکی

میدان‌های برداری کیلینگ فضای مینکوفسکی (که مولدهای انتقال، دوران و خیز هستند)، به طور کاملاً طبیعی در مختصات اقلیدسی نوشته می‌شوند. این میدان‌های برداری به شکل زیر هستند.

$$\xi(x) = (\alpha^\rho + X^\mu x^\nu \epsilon_{\mu\nu}^\rho) \partial_\rho \quad (5-4-3)$$

که α^μ و X^μ دو بردار دلخواه هستند که انتقال و تبدیلات لورنتز را تولید می‌کنند؛ همچنین $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ تانسور کاملاً پادمتقارن لوی-چویتای سه‌بعدی است. به طور خاص، α' مسئول انتقال در زمان و α^1, α^2 مسئولیت انتقال در جهت y, x را بر عهده دارند. همچنین X' مولد انتقال در صفحه xy است و X^1, X^2 مولد خیز در راستاهای y, x هستند.

برای ادامه، این میدان‌های برداری را در مختصات Bondi می‌نویسیم.

$$\xi_{\text{Translation}} = \alpha(\varphi)\partial_u - \frac{\alpha'(\varphi)}{r}\partial_\varphi + \alpha''(\varphi)\partial_r \quad (6-4-3)$$

این رابطه، نمایانگر بردار کیلینگ انتقال‌های خالص است و $\alpha(\varphi)$ به شکل زیر با α^μ مرتبط است.

$$\alpha(\varphi) = \alpha^* - \alpha^1 \cos \varphi - \alpha^2 \sin \varphi \quad (7-4-3)$$

برای تبدیلات لورنتز هم

$$\xi_{\text{Lorentz}} = \left(X(\varphi) - \frac{u}{r} X''(\varphi) \right) \partial_\varphi + u X'(\varphi) \partial_u - \left(r X'(\varphi) - u X'''(\varphi) \right) \partial_r \quad (8-4-3)$$

نمایش بردار کیلینگ در مختصات Bondi است و ارتباط بین $X(\varphi)$ به X^μ به شکل زیر است.

$$X(\varphi) = X^* - X^1 \cos \varphi - X^2 \sin \varphi \quad (9-4-3)$$

اگر از فصل قبل حضور ذهن داشته باشیم؛ به راحتی می‌توانیم حدس بزنیم که احتمالاً شرایط مرزی جدید باید طوری باشد که مولدهای تقارن مجانبی، دقیقاً به فرم بردارهای کیلینگ بالا باشند، با این تفاوت که به جای $X(\varphi)$ و $\alpha(\varphi)$ توابع دلخواهی از φ جایگذاری شده باشند. در حقیقت، این حدس درست است و آنچه که در ادامه قرار است کامل‌تر بررسی اش کنیم همین است.

ساختمار جبری (۶-۴-۳) و (۸-۴-۳) که در حقیقت همان جبر پوانکاره است، با انتخاب پایه می‌تواند آشکارتر شود. پایه‌های زیر را انتخاب می‌کنیم.

$$j_m \equiv \xi_{\text{Lorentz}} \Big|_{X(\varphi)=e^{im\varphi}}, \quad p_m \equiv \xi_{\text{Translation}} \Big|_{\alpha(\varphi)=e^{im\varphi}} \quad (10-4-3)$$

که در آن $m, n = 0, \pm 1, \dots$ است؛ جبری به شکل زیر بدست می‌آید.

$$(11-4-3)$$

$$i[j_m, j_n] = (m-n)j_{m+n}, \quad i[j_m, p_n] = (m-n)p_{m+n}, \quad i[p_m, p_n] = 0$$

جبری این براکت‌ها را توسعه می‌دهد، طوری که برای تمامی $m, n \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌شوند؛ کاملاً مشابه با فضای مجانبی پاددوسیته که جبر ویت، جبر (\mathbb{R}, \mathbb{R}) را توسعه می‌داد.

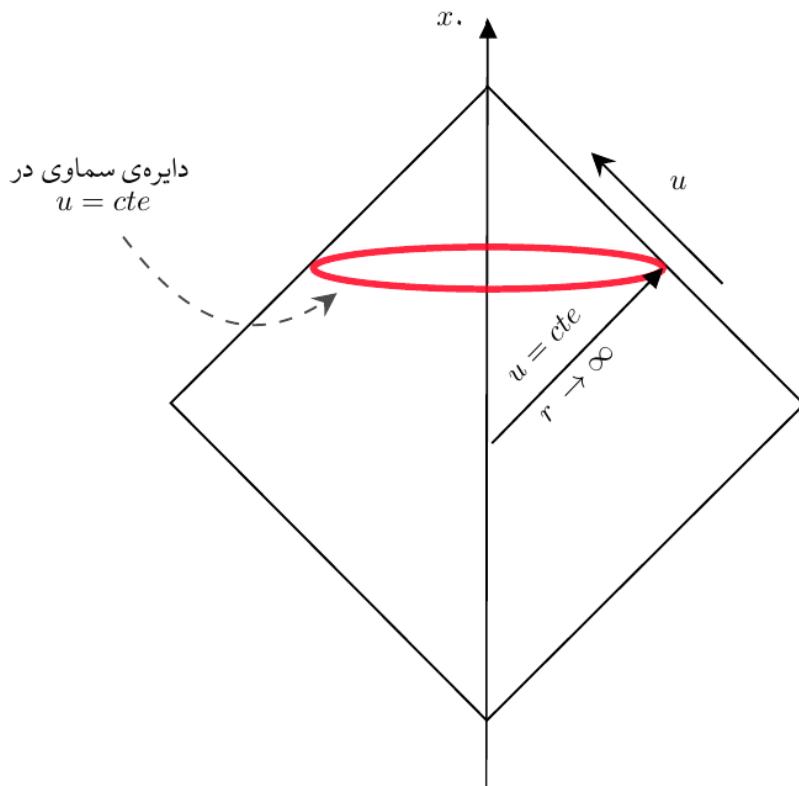
۳-۴-۳ تقارن پوانکاره در آینده‌ی نورگونه

حالا اندکی به تحلیل فضای مجانبی، خواص و تقارن‌هایش می‌پردازیم. در مختصات Bondi، ناحیه‌ی $r \rightarrow \infty$ (در φ و u متناهی) به شکل استوانه‌ای است که با دو مولفه‌ی (u, φ) مختصه‌بندی می‌شود و

در بی‌نهایت نورگونه واقع شده است. این ناحیه را در مخروط بالایی نمودار پنروز شکل ۵-۳ می‌توانید مشاهده کنید.

توجه کنید، این‌که مخروط بالایی در این تصویر انتخاب شده به خاطر تعریف زمان در مختصات Bondi است. می‌توانیم مختصات $v = t + r$ را هم تعریف کنیم که در این مختصات زمان به شکل $r \rightarrow \infty$ جایگزین u می‌شود و در این مختصات، $v = t + r$ معادل با بی‌نهایت نورگونه گذشته سو می‌شود^{۲۹}. اگرچه ما از این به بعد با مختصات عقب افتاده کار می‌کنیم، اما این تفاوت اهمیتی با معنا ندارد و تمامی نتایجی که اینجا می‌گیریم با جایگزینی $v \rightarrow u$ به مختصات پیش‌رفته مربوط می‌شود.

تعریف: دایره‌ی سماوی آینده در زمان u و در مختصات عقب افتاده، دایره‌ای است که با مختصهای φ در \mathcal{J}^+ در u ثابت تنیده می‌شود (به شکل ۶-۳ رجوع کنید). مشابها دایره‌ی سماوی گذشته هم در مختصات پیش‌رفته تعریف می‌شود.



شکل ۶-۳: نمایی از دایره‌ی سماوی در زمان u روی نمودار پنروز فضازمان مینکوفسکی.

از این به بعد هر وقت به «دایره‌ی سماوی» اشاره کردیم، منظورمان دایره‌ی سماوی آینده است.

^{۲۹} از این به بعد، بی‌نهایت نورگونه‌ی گذشته و آینده را به ترتیب با \mathcal{J}^- و \mathcal{J}^+ نشان می‌دهیم.

۴-۴-۳ تبدیلات پوانکاره در آینده‌ی نورگونه

از آنجایی که متریک مینکوفسکی را در مختصات عقب افتاده نوشت‌ایم، سوالی طبیعی که پیش می‌آید این است که حالا چطور اثر تبدیلات پوانکاره را روی این مختصات ببینیم؟ اول از همه به نظر می‌رسد که مختصات Bondi، ماهیت خطی تبدیلات پوانکاره را عوض کرده و آن را غیرخطی نشان می‌دهد؛ پس شاید نتوانیم آن را به آسانی مختصات دکارتی روی \mathbb{J}^+ اثر دهیم. اما بدست می‌آید [۶۷] که اتفاقاً مختصات عقب افتاده برای اثر تبدیلات پوانکاره روی \mathbb{J}^+ بسیار سودمند است؛ چرا که تبدیلات پوانکاره حد $\infty \rightarrow r$ را نگه می‌دارند؛ به این معنی که ناحیه $\infty \rightarrow r$ را به خودش می‌نگارد (چون روی r به شکل مقیاس عمل می‌کنند). و همچنین مختصه‌های φ و u را محدود نگه‌دارد. این یعنی تبدیلات پوانکاره روی \mathbb{J}^+ خوش‌تعریف‌نند. حالا ممکن است بپرسیم که شیوه‌ی اثر آن در این ناحیه چطور است؟ اجازه دهید به طور خلاصه آن را شرح بدهیم.

برای شروع روی مولفه‌های همبند گروه پوانکاره تمرکز می‌کنیم و از یکریختی گروه پوانکاره با $SL(2, \mathbb{R})$ برای توصیف اثر بهره می‌بریم.

قضیه: یکریختی گروهی زیر را داریم.

$$SO(2, 1)^\uparrow \cong SL/\mathbb{Z}_2 \equiv PSL(2, \mathbb{R}) \quad (12-4-3)$$

این یکریختی صریحاً با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

(13-4-3)

$$\phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b + c + d) & \frac{1}{\sqrt{2}}(a - b + c - d) & -ab - cd \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b - c - d) & \frac{1}{\sqrt{2}}(a - b - c + d) & -ab + cd \\ -ac - bd & bd - ac & ad + bc \end{pmatrix},$$

در این صورت، اثر یک انتقال خالص روی \mathbb{J}^+ به شکل زیر است.

$$(u, \varphi) \mapsto (u + \alpha(\varphi), \varphi) \quad (14-4-3)$$

که تابع $\alpha(\varphi)$ به از رابطه‌ی (۷-۴-۳) به α^μ مربوط می‌شود.

مشابها یک تبدیل لورنتز خالص که با یک عضو از $SL(2, \mathbb{R})$ تعریف شده، مطابق زیر روی \mathbb{J}^+ اثر

می‌کند

$$(u, \varphi) \mapsto (f'(\varphi)u, f(\varphi)) \quad (15-4-3)$$

و در آن $f(\varphi)$ تبدیل $(4-3)$ از دایره‌ی سماوی است و پارامترهای A, B به شکل زیر با مولفه‌های ماتریسی مرتبط هستند.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\varphi}(a + ib - ic + d) \\ B &= \frac{1}{\varphi}(a - ib - ic - d) \end{aligned} \quad (16-4-3)$$

$$|A|^2 - |B|^2 = 1 \quad \text{با شرط}$$

با اعمال همزمان تبدیل لورنتز و انتقال، \mathcal{J}^+ اینطور تبدیل می‌شود.

$$(u, \varphi) \mapsto (f'(\varphi)u + \alpha(f(\varphi)), f(\varphi)) \quad (17-4-3)$$

در ادامه می‌بینیم که گروه BMS_3 به همین شکل روی \mathcal{J}^+ اثر می‌کند؛ با این تفاوت که $f(\varphi)$ یک وابسانی دلخواه از دایره است و $\alpha(\varphi)$ هم یک تابع دلخواه روی دایره است.

تبصره: توجه کنید که رابطه‌ی $(17-4-3)$ تاحدی سوءاستفاده از نمادگذاری است! چرا که تبدیلات پوانکاره با توابع (φ, α) دلخواه، یک وابسانی روی کل فضازمان هستند و روی هرسه مختصه‌ی (r, φ, u) عمل می‌کنند؛ بنابراین لزومی ندارد که تنها روی دومختصه عمل کنند. آنچیزی که ناگفته مانده و در رابطه‌ی $(18-4-3)$ پنهان است، این است که این تبدیلات تا مرتبه $1/r$ صحیح هستند و در حد $r \rightarrow \infty$ (یعنی روی \mathcal{J}^+) این تصحیحات صفر می‌شوند. توجه کنید که هرچه به توده‌ی فضازمان نزدیک‌تر شویم، این تصحیحات مهم‌تر می‌شوند.

۵-۴-۳ شرط افت BMS و تقارن‌های مجانبی

حالا دقیقا مشابه با بخش $3-3$ ، می‌خواهیم خانواده‌ای از متريک‌ها را تعریف کنیم که در \mathcal{J}^+ مجانباً تخت هستند، به این معنی که به متريک مينکوفسکی در مختصات Bondi نزديک می‌شوند.

یک نقطه‌ی شروع خوب اين است که فکر کنیم کمینه‌ی تعداد متريک‌هایی که در اين خانواده می‌گنجند، چه هستند. باز هم مشابه قبل، متريک مينکوفسکی در فضای خالی به همراه متريک‌هایی که

نقص مخروطی دارند، انتخاب ما هستند. دقیقاً مشابه همان روندی که برای ساخت متريک دارای نقص مخروطی در فضای مجانبی پاددوسيته طی کردیم؛ می‌توانیم اینجا هم به متريک زیر برسیم.

$$ds^2 = (dt' - Ad\varphi')^2 + dr'^2 + 4\omega^2 r'^2 d\varphi'^2, \quad (18-4-3)$$

اگر دقت کنید، این متريک همان $\hat{h} \rightarrow \ell$ معادله‌ی (5-۳-۳) می‌شود. مشابه قبل، $\varphi' \sim \varphi + 2\pi$ و روی مولفه‌ی t' هیچ همسان‌سازی نیست. وجود جملات $Adt'd\varphi'$ در متريک نشانگر وجود تکانه‌ی زاویه‌ای است.^{۲۰}

حالا قصد داریم شرایطی مرزی پیدا کنیم که تمامی این متريک‌ها در آن صدق کنند. مشابه بخش ۳-۳-۳، اگر علاقه‌مند باشیم که تقارن‌های پوانکاره یک تقارن مجانبی برای این فضازمان‌ها باشند، باید وردش متريک‌های دارای نقص مخروطی را تحت مولدۀای تقارن پوانکاره پیدا کنیم و رفتار مجانبی متريک‌ها را از آنجا بخوانیم. در نهایت، این نتیجه را برای فضاهای مجانبی تخت خواهیم داشت.

تعريف: M را یک خمینه‌ی سه‌بعدی شبه‌پیمانی بگیرید که متريک آن ds^2 است. همچنین مختصات روی آن هم (r, φ, u) برای $r \geq 0$ باشد. در $\hat{h} \rightarrow r$ یک استوانه‌ی زمان‌گونه با مختصات (φ, u) در مرز همدیس خمینه وجود دارد. اگر متريک روی این استوانه به فرم مجانبی پایین باشد

$$ds^2 \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \mathcal{O}(1)du^2 - (2 + \mathcal{O}(1/r))dudr + r^2 d\varphi^2 + \mathcal{O}(1)dud\varphi \quad (19-4-3)$$

می‌گوییم که (M, ds^2) خمینه‌ای مجانبی تخت در \mathbb{J}^+ در پیمانه‌ی BMS است.

تبصره: شرط پیمانه‌ی BMS، کارکردی دقیقاً مشابه با شرط ففرمن-گرام دارد و هدفش حذف برخی از رفتارهای مجانبی در مولفه‌های متريک است تا ظاهر آن تمیزتر شود. فقط لازم است تاکید کنیم که این شرط تنها برخی جملات $\mathcal{O}(r^{-4})$ را در متريک حذف می‌کند و هیچ تغییری روی بارهای سطحی ایجاد نمی‌کند. از این به بعد وقتی در مورد گرانش مجانبی تخت صحبت می‌کنیم، همیشه توجهمان به متريک‌هایی است که شرایط مرزی BMS را برآورده می‌کنند.

۶-۴-۳ بردارهای کیلینگ مجانبی فضای مجانبی تخت سه‌بعدی

میدان‌های برداری کیلینگ مجانبی BMS، میدان‌هایی هستند که وابرسانی‌هایی را تولید می‌کنند که شرایط افت (19-4-3) را برآورده می‌سازند. برای این امر، باید مشتق لی متريک مجانبی تخت $g_{\mu\nu}$ در این حالت، نیاز به قید اضافه‌ای روی A و ω نیست که در حد مجانبی خم‌های بسته‌ی زمان‌گونه نداشته باشیم. تنها از این لحاظ روند کار با فضای مجانبی پاددوسيته متفاوت است.

تحت چنین میدان‌های برداری، مثل ξ ، به شکل زیر باشد.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi g_{rr} &= \mathcal{L}_\xi g_{r\varphi} = \mathcal{L}_\xi g_{\varphi\varphi} = 0 \\ \mathcal{L}_\xi g_{uu} &= \mathcal{O}(1), \quad \mathcal{L}_\xi g_{u\varphi} = \mathcal{O}(1), \quad \mathcal{L}_\xi g_{ur} = \mathcal{O}(1/r)\end{aligned}\quad (20-4-3)$$

شرط خط اول از اینکه در پیمانه‌ی BMS، $g_{\varphi\varphi} = r^2$ و $g_{rr} = g_{r\varphi} = 0$ هستند بدست می‌آید. خط دوم از اینکه $g_{ur}, g_{u\varphi}, g_{uu}$ اجازه نوسان در مرتبه‌ی r^{-1}, r^0, r^1 دارند، بر می‌آید.

لم: اگر $g_{\mu\nu}$ متريکي مجانباً تخت باشد (به معنای (19-4-3) باشد) و ξ میدانی برداری باشد که در شرایط (20-4-3) صدق کند، آنگاه

$$\xi = X(\varphi)\partial_\varphi + (\alpha(\varphi) + uX'(\varphi))\partial_u - rX'(\varphi)\partial_r \quad (21-4-3)$$

که $X(\varphi)$ و $\alpha(\varphi)$ دو تابع هموار دلخواه و 2π -متناوب هستند و تصحیحات مرتبه‌ی بالاتر به صورت زیر هستند.

$$\begin{aligned}&\left[(\alpha' + uX'') \int_r^{+\infty} \frac{dr'}{r'^2} g_{ur} \right] \partial_\varphi \\ &+ \left[\partial_\varphi \left((\alpha' + uX'') \int_r^{+\infty} \frac{dr'}{r'^2} g_{ur} \right) + \frac{1}{r^2} (\alpha' + uX'') g_{u\varphi} \right] \partial_r = \\ &= \frac{1}{r} (\alpha' + uX'') \partial_\varphi + \frac{1}{r} (\alpha'' + uX''') \partial_r + \mathcal{O}(r^{-2}).\end{aligned}\quad (22-4-3)$$

اين معادلات به شکلي يكتا، يك بردار كيلينگ مجانبي BMS مثل ξ را به متريک مجانباً تخت $g_{\mu\nu}$ و دو تابع هموار (X, α) بر روی دايره‌ي سماوي ربط مي‌دهند.

اثبات: اعمال شرایط (20-4-3) روی میدان برداری ξ به ما فرم ξ را نتيجه مي‌دهد. برای محاسبات هم، مشابه با حالت مجانباً پاددوسيته، کافی است که مولفه‌های ناصفر هموستار لوی‌چويتا را برای صورت مجانبی (19-4-3) پیدا کنیم و محاسبات را دنبال کنیم.

اول از همه، شرط $\mathcal{L}_\xi g_{rr} = 0$ منجر به $\partial_r \xi^u = 0$ می‌شود؛ پس ξ^u مستقل از r است. از طرف دیگر، شرط $\mathcal{L}_\xi g_{r\varphi} = 0$ یک معادله‌ی ديفرانسیل به شکل زیر می‌دهد.

$$\partial_r \xi^\varphi = -\frac{1}{r^2} g_{ru} \partial_\varphi \xi^u \quad (23-4-3)$$

که به خاطر استقلال ξ^u از r ، به شکل زیر انگرال‌گيري می‌شود.

$$\xi^\varphi = X(u, \varphi) + \partial_\varphi \xi^u \int_r^{+\infty} \frac{dr'}{r'^2} g_{r'u} \quad (24-4-3)$$

اینجا (φ, u) تابعی دلخواه روی استوانه‌ی \mathbb{J}^+ است. چون مطابق تعریف فضازمان مجانباً تحت، $g_{ru} = -1 + \mathcal{O}(\frac{1}{r})$ است، پس انتگرال فوق همگراست و با جایگذاری کردن معکوس متريک به مولفه‌ی ξ^φ می‌رسیم.

$$\xi^\varphi = X(u, \varphi) + \frac{1}{r} \partial_\varphi \xi^u + \mathcal{O}(1/r^2) \quad (25-4-3)$$

در اين مرحله، تابع (φ, u) را به شکل زير معرفی می‌کنيم.

$$\xi^u = \alpha(u, \varphi) + uX'(u, \varphi) \quad (26-4-3)$$

منظور از نماد پرایم، مشتق جزئی نسبت به φ است. بر مبنای این روابط، شرط $\mathcal{L}_\xi g_{\varphi\varphi} = 0$ تبدیل می‌شود به

$$\xi^r = -r\partial_\varphi \xi^\varphi - \frac{1}{r} g_{u\varphi} (\alpha' + uX'') \quad (27-4-3)$$

حالا کافی است از باقی شرایط استفاده کنيم تا X و α را قيد کنيم. به عنوان مثال، شرط $\mathcal{L}_\xi g_{ur} = 0$ نتیجه می‌دهد که

$$\partial_u \xi^u = X' \quad (28-4-3)$$

که با جاگذاری از (26-4-3) نتیجه می‌دهد $\partial_u \alpha + u\partial_u X' = 0$ صفر می‌شود. همینطور شرط $\mathcal{L}_\xi g_{u\varphi} = 0$ هم $\partial_u X'$ را در بردارد؛ اين يعني که X فقط و فقط تابع φ است. نهايتاً، رابطه‌ی (21-4-3) را بدست می‌آوريم، در حالی که جملات مرتبه‌پايين‌تر، از (27-4-3) حاصل می‌شوند.

توجه کنيد که بردارهای کيلينگ معرفی شده در (21-4-3)، دقيقاً فرم انتظار رفتري (8-4-3)، را می‌گيرند و تعديمي از ميدان‌های برداری کيلينگ پوانکاره هستند.

به طور خاص، اين تبدیلات تمامی انتقال‌ها را در برمی‌گيرند (اگر (φ, u) به شکل (4-3) انتخاب شود). و همینطور تمامی تبدیلات لورنتز را هم شامل می‌شوند (اگر (φ, u) به شکل (9-4-3) باشد). از اين به بعد، منظورمان از $\xi_{(X, \alpha)}$ برداری کيلينگ مجانبي تولیدشده با توابع (φ, u) است. به راحتی می‌توان بررسی کرد که برآكت لی اين ميدان‌های برداری به شکل پايين است.

$$[\xi_{(X, \alpha)}, \xi_{(Y, \beta)}] = \xi_{([X, Y], [X, \beta] - [Y, \alpha])} \quad (29-4-3)$$

جملاتِ مرتبه‌پایین‌تر صرف‌نظر شده‌اند چون هیچ سهمی به بارسطحی نخواهد داشت [۶۲]. ساختار جبری (۴-۳-۲۹) ساده‌تر می‌شود، اگر توابع $X(\varphi)$ و $\alpha(\varphi)$ را برحسب مدهای فوریه‌اش بسط بدھیم و میدان‌های برداری زیر را تعریف کنیم.

$$j_m \equiv \xi_{(e^{im\varphi}, \cdot)}, \quad p_m \equiv \xi_{(\cdot, e^{im\varphi})}. \quad (30-4-3)$$

به‌سادگی تحقیق می‌شود که برآکت لی آنها به شکل جبر پوانکاره باشد، با این تفاوت که $(m, n) \in \mathbb{Z}$. بنابراین، دیدیم که جبر مجانبی فضای مجانبی تخت شامل یک زیرگروه $SL(2, \mathbb{R})$ و جبری آبلی است. تبدیلات تقارنی مجانبی مربوط به این اعضای جبر، با نام فراچرخش و فرالنتقال شناخته می‌شوند.

تبصره: توجه به یک نکته لازم است. مختصات عقب‌افتاده (یا پیش‌رفته)، مختصاتی سرتاسری است، چراکه طبق تعریف تمامی فضای مینکوفسکی را می‌پوشانند و این‌که این مختصات‌ها اجازه می‌دهند که فقط یکی از J^+ یا J^- را توصیف کنیم، به این معنای نیست که نیمی از فضازمان را می‌پوشانند. هم‌چنین، همین حرف برای تقارن bms_3 که تعریفش به انتخاب مختصات عقب‌افتاده (یا پیش‌رفته) بستگی دارد، صادق است. اما می‌توان نشان داد که این دو تعریف bms_3 برحسب دو مختصات مختلف، با عمل همسان‌سازی پادسویی به هم مربوط می‌شوند.

۷-۴-۳ متریک‌های BMS

برای آن‌که جوابهای کلاسیک (در این‌جا متریک‌های با شرط افت BMS) از کنش بدست آیند، لازم است که کنش را بهبود دهیم. به کمک فرمالیسم Chern-Simons، می‌توان دید که کنش درست و خوش‌تعریف چه است [۶۸]. با در دست داشتن کنش بهبودیافته، حرف زدن از جوابهای مجانبی تخت کنش اینشتین-هیلبرت در خلا، در پیمانه‌ی BMS معنادار است. نشان‌داده شده که [۶۱]، جوابهای کلی به شکل زیر هستند.

$$ds^4 = \Lambda G p(\varphi) du^4 - 2 dudr + \Lambda G (j(\varphi) + up'(\varphi)) dud\varphi + r^4 d\varphi^4 \quad (31-4-3)$$

که توابع $p(\varphi)$ و $j(\varphi)$ توابع دلخواه و 2π -متناوب از φ هستند. بعدها خواهیم دید که این دو تابع، به ترتیب چگالی انرژی و چگالی تکانه‌ی زاویه‌ای در J^+ هستند.

مستقیماً، تبدیلات متریک (۴-۳-۲۱) را تحت بردار کیلینگ مجانبی (X, α) بررسی می‌کنیم.

$$\mathcal{L}_{\xi_{(X, \alpha)}} ds^4 \equiv \Lambda G \delta_{(X, \alpha)} p(\varphi) du^4 + \Lambda G (\delta_{(X, \alpha)} j(\varphi) + u \delta_{(X, \alpha)} p'(\varphi)) dud\varphi \quad (32-4-3)$$

که با نگاهی به (۲۱-۴-۳) و انجام محاسباتی سرراست بی‌درنگ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\delta_{(X,\alpha)} j &= Xj' + 2X'j + \alpha p' + 2\alpha'p - \frac{c_2}{12}\alpha''', \\ \delta_{(X,\alpha)} p &= Xp' + 2X'p - \frac{c_2}{12}X'''\end{aligned}\quad (33-4-3)$$

در اینجا، c_2 کمیتی بعددار متناسب با جرم پلانک است.

$$c_2 = \frac{3}{G} \quad (34-4-3)$$

اگر دقت کنیم، این دفعه فقط تبدیل $\delta_{(X,\alpha)} p$ مشابه تبدیل تانسور تنش نظریه میدان‌همدیس دو بعدی است.

۸-۴-۳ بارهای سطحی و معرفی جبر BMS₃

یک بردار کیلینگ مجانبی (X,α) را انتخاب می‌کنیم و متریک BMS را با انتخاب $((\varphi), p(\varphi), j(\varphi))$ ثابت می‌کنیم. قصد داریم بار سطحی را برای این انتخاب‌ها پیدا کنیم. علاوه‌بر این دو، باید بهنگارش هم انتخاب کنیم؛ یعنی پس‌زمینه‌ای که به انتخاب ما، بارهای سطحی آن صفر باشند. بدیهی‌ترین انتخاب همان $\rho = j = 0$ است.

$$\bar{g} = -2dudr + r^2 d\varphi^2. \quad (35-4-3)$$

با این انتخاب‌ها، بار سطحی به شکل زیر درمی‌آید.

$$Q_{(X,\alpha)}[j, p] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi [j(\varphi)X(\varphi) + p(\varphi)\alpha(\varphi)] \quad (36-4-3)$$

این بار می‌تواند به چشم جفت‌کردن مدارها و هم‌مدارهای الحاقی جبر BMS₃ دیده شود؛ یعنی (X, α) از مدارهای اثر جبر BMS₃ به شکل الحاقی روی خودش و (j, p) از هم‌مدارهای این اثر انتخاب شده‌اند. همین به ما سرنخی می‌دهد که فضای جوابهای (۳۱-۴-۳) به نمایش‌های هم الحاقی گروه BMS₃ مربوط هستند.

بار مربوط به انتقال زمانی که از بردار کیلینگ ∂_t حاصل می‌شود و همان هامیلتونی است، به شکل زیر است.

$$M = \mathcal{P}_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi p(\varphi), \quad (37-4-3)$$

پس می‌توانیم (φ) را به عنوان چگالی انرژی حمل شده توسط میدان گرانشی در \mathcal{J}^+ معرفی کنیم. همچنین، به طور کلی‌تر، بارهای مربوط به ابرانتقال‌ها به شکل پایین هستند.

$$Q_{(.,\alpha)}[j,p] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi p(\varphi) \alpha(\varphi) \quad (38-4-3)$$

همچنین، بارهای مربوط به دوران، که از بردار کیلینگ ∂_φ بدست می‌آیند، تکانه‌ی زاویه‌ای مربوط به فضازمان هستند.

$$J = \mathcal{J}_+ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi j(\varphi) \quad (39-4-3)$$

و می‌توانیم (φ) را چگالی تکانه‌ی زاویه‌ای حمل شده توسط میدان گرانشی در \mathcal{J}^+ تفسیر کنیم. مشابه‌ا، باز تمامی ابرچرخش‌ها به فرم زیر است.

$$Q_{(X,.)}[j,p] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi j(\varphi) X(\varphi) \quad (40-4-3)$$

۹-۴-۳ جبر بارهای سطحی

بدست آوردن برآکت پواسون بارهای سطحی، سرراست است. اگر (j,p) انتخابی برای یک متريک باشد، آنگاه

$$(41-4-3)$$

$$\{Q_{(X,\alpha)}[j,p], Q_{(Y,\beta)}[j,p]\} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [\delta_{(X,\alpha)} j(\varphi) Y(\varphi) + \delta_{(Y,\beta)} p(\varphi) \beta(\varphi)].$$

با کمک تبدیلات بی‌نهایت کوچک (۳۳-۴-۳) و انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توانیم عبارت بالا را به شکل پایین تبدیل کنیم.

$$\{Q_{(X,\alpha)}[j,p], Q_{(Y,\beta)}[j,p]\} = Q_{([X,Y],[X,\beta]-[Y,\alpha])}[j,p] + c_Y [c(X,\beta) - c(Y,\alpha)], \quad (42-4-3)$$

می‌توانیم جبر بالا را بر حسب تبدیل فوريه‌ی بارها بازنويسي می‌کنیم.

$$\mathcal{J}_m \equiv Q_{(e^{im\varphi},.)}[j,p], \quad \mathcal{P}_m \equiv Q_{(.,e^{im\varphi})}[j,p] \quad (43-4-3)$$

مشاهده می‌کنیم که این جبر تعمیمی از جبر پوانکاره است، برای تمامی $m, n \in \mathbb{Z}$. تعمیم جبر پوانکاره هم به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} i\{\mathcal{J}_m, \mathcal{J}_n\} &= (m - n)\mathcal{J}_{m+n}, \\ i\{\mathcal{J}_m, \mathcal{P}_n\} &= (m - n)\mathcal{P}_{m+n} + \frac{c_2}{12}m^3\delta_{m+n,0}, \\ i\{\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n\} &= 0 \end{aligned} \quad (44-4-3)$$

که به چشم یک توسعه‌ی مرکزی بی‌نهایت بعدی از جبر پوانکاره با بارمرکزی c_2 می‌توان به آن نگریست.
نکته: توجه داشته باشید که c_2 در جبر ابرچرخش‌ها با ابرانتقال‌ها ظاهر شده است. اما می‌توانست در جبر ابرچرخش‌ها هم یک جمله‌ی مرکزی باشد؛ به همین دلیل است که این جمله‌ی مرکزی را c_2 نامیدیم. همچنین این توسعه‌های مرکزی، خیلی متفاوت با توسعه‌ی مرکزی جبر ویت است. چون جمله‌ی مرکزی جبر ویراسورو با بازمقیاس مولدها ناوردادست، اما در اینجا c_2 با بازمقیاس مولدها تغییر می‌کند.

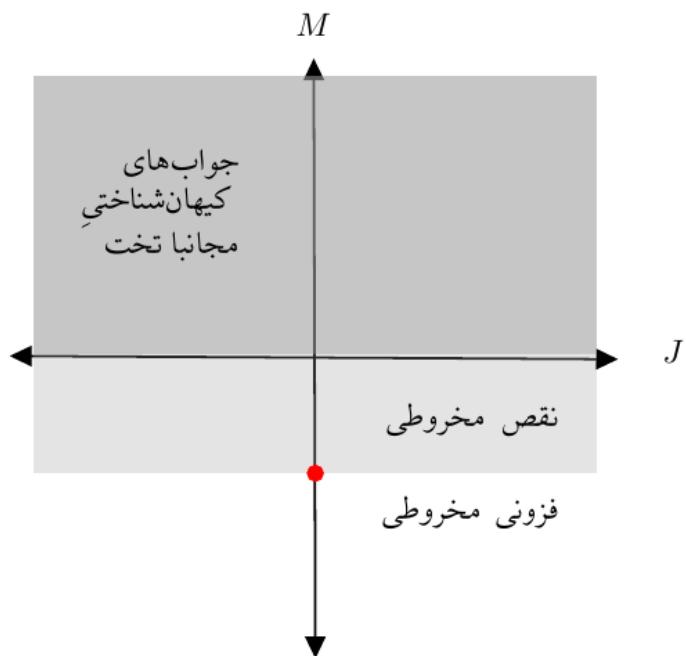
نکته: شرط متعارف و مشهور گرانش سه‌بعدی مجانباً تخت است؛ اما شرایط دیگری هم در مراجع بررسی شده‌اند. مثلاً شرایط مرزی آزاد (مشابه با گرانش مجانباً پاددوستیه) [۶۳]. در نظریه‌های گرانشی ناقض پاریته، می‌بینیم که جبر مولدهای ابرچرخش هم توسعه‌ی مرکزی پیدا می‌کند.

۱۰-۴-۳ حل‌های مد صفر

توجهمان را به فضازمان‌هایی با مد صفر، یعنی $(j, p) = (j_0, p_0)$ جلب می‌کنیم. تنها بارهای سطحی ناصفر این پیکربندی‌ها، جرم و تکانه زاویه‌ای هستند که دقیقاً مقدارشان j_0, p_0 است.

انتخاب $j_0 = 0$ و $p_0 = -1/8G = -c_2/24$ به متريک مينکوفسکي خالي می‌انجامد و جوابهای $j \neq j_0$ فضای مينکوفسکي چرخان هستند.

جوابهای با $p_0 < -c_2/24$ دارای نقص مخروطی هستند. همچنین $j_0 > p_0$ جوابهای خاصی هستند که مدل‌های کیهان‌شناختی سه‌بعدی را توصیف می‌کنند. در این مدل‌های کیهان‌شناختی، یک مهبانگ و یک مهربن داریم و تنها در حالتی که j_0 ناصفر باشد، گذار بین این دو حالت به شکل هموار صورت می‌پذیرد. برای دسته‌بندی تصویری جوابهای مد صفر، به شکل ۷-۳ نگاهی بیاندازید.



شکل ۳-۷: جواب‌های متصفح گرانش مجانباً تخت با شرط افت BMS . جواب مینکوفسکی خلا با نقطه‌ی قرمز رنگ مشخص شده است. نواحی $M > 0$ جواب‌هایی با تفسیر کیهان‌شناختی هستند که مجانباً تخت‌اند. کاستی‌های مخروطی برای $0 < M < c_2/24$ - رخ می‌دهد و فزوونی مخروطی برای $M < -c_2/24$. این شکل را می‌توانیم حد تخت شکل ۴-۳ هم بینیم، چون که در حد $\ell \rightarrow \infty$ شیب خط‌های J در صفحه‌ی (J, M) صفر می‌شود.

فصل ۴

تابع پارش گرانش سه بعدی مجانباً پاددوسیته

در این قسمت، به طور کاملاً منظم و ساختاریافته، به مطالعه‌ی تابع پارش گرانش سه بعدی با شرایط مرزی Brown-Henneaux می‌پردازیم. همانطور که می‌دانیم، کنش کلاسیکی اقلیدسی بدون جمله‌ی مرزی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{g} \left(R + \frac{2}{\ell^2} \right) \quad (1-0-4)$$

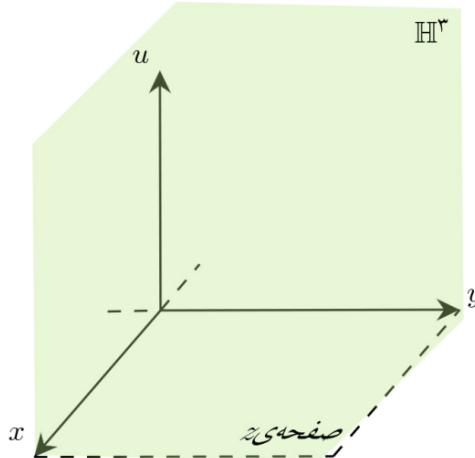
آنچه که در این بخش مورد علاقه‌مان است، مطالعه‌ی دقیق ترازهای انرژی نظریه‌ی گرانشی در فضازمان مجانباً پاددوسیته است. در این رهیافت، صورت متریک در دوردست‌های قید می‌شود و مسئله‌ی گرانش کوانتمی با کمک رهیافت انتگرال مسیر، با جمع وزن‌دار (وزن کنش اقلیدسی) روی تمامی فضازمان (جواب‌های معادله‌ی اینشتین) که صورت مجانبی مذکور را دارند، بررسی می‌شود. می‌بینیم که متاسفانه، نتیجه‌ای که از این محاسبات می‌گیریم، خیلی از نظر فیزیکی خواشایند نیست؛ همچنین سناریوهای احتمالی برای گرفتن این جوابهای غیرقابل قبول فیزیکی را هم ذکر می‌کنیم.

از دیدگاه تمام‌نگاری، دوست‌داریم که بتوانیم نتیجه‌ی تابع پارش را به شکل $\text{Tr} \left(\exp \left(-\beta H \right) \right)$ بنویسیم و نظریه‌ی گرانشی سه بعدی خالی مجانباً پاددوسیته را معادل با یک سامانه‌ی کوانتمی بدانیم که هامیلتونی آن H است و β عددی مختلط با قسمت حقیقی مثبت است که نمایانگر معکوس دما در ترمودینامیک کوانتمی است. در اولین بروخورد با مسئله، خیلی طبیعی است که هامیلتونی، همان انرژی ADM باشد که از طریق رفتار مجانبی متریک بدست می‌آید. این روش، دقیقاً رهیافت Brown و Henneaux در [۱] بود که منجر به پیدا شدن تقارن‌های مجانبی گرانش کوانتمی سه بعدی شد.

البته توجه می کنیم که تنها درجات آزادی سرتاسری سامانه، انرژی (یا جرم آن) نیست، بلکه ممکن است تکانه (زاویه ای) برای توصیف فضازمان لازم باشد، در این صورت باید تابع پارش را به شکل $\text{Tr} \left(\exp \left(-\beta H - iJ\theta \right) \right)$ برای سامانه کوانتو می دوگان بنویسیم.

تابع پارش، با جمع روی هندسه های اقلیدسی سه بعدی که جواب فضازمان هستند، محاسبه می شوند. ما انتگرال مسیر نیمه کلاسیک را روی هندسه هایی که در مرز همدیس شان یک چنبره هستند و پارامتر مازولی $i\beta = \theta/2\pi + \tau$ دارند، محاسبه می کنیم^۱.

چون رهیافت انتگرال مسیر در نشانگان اقلیدسی تابع پارش را حساب می کند، برای این کار بایستی سراغ توسعه ای تحلیلی فضای پاددوستیه سه بعدی برویم؛ این فضا چیزی به جز نیم فضای بالایی پوانکاره، \mathbb{H}^3 ، نیست. این فضا در شکل ۱-۴ نمایش داده شده است. در مختصات پوانکاره، متریک



شکل ۱-۴: نیم فضای بالایی پوانکاره - در این شکل، مرز همدیس که کره ریمان است با مختصهای مختلط z پرمایش شده است.

^۱ ممکن است که سوال پرسیده شود چرا تمرکزمان روی هندسه های با مرز چنبره است و چرا حالت ساده مرز کروی را اول بررسی نمی کنیم؟ می دانیم مرز همدیس چنبره یک پارامتر خشتش دارد، و در جاهای مختلف فیزیک دیده ایم که این پارامتر خشتش در ارتباط با خواص گرمایی فضازمان است. به خصوص ما علاقه مندیم که از نتایج این بخش در ترمودینامیک سیاه چاله های سه بعدی استفاده کنیم. اگر سراغ سهم هایی برویم که مرز همدیس کروی دارند، مطابق دوگانی پیمانه گرانش، این هندسه ها معادل تک هندسه ای پاددوستیه است، پس سیاه چاله ها را در بر نمی گیرد. البته این هرگز به این معنی نیست که مرزهای کروی برای ما فیزیک جدید ندارند، اتفاقا در مورد پایداری خلا فضای گرانشی نتایجی در بردارند؛ اما اگر قرار باشد خواص گرمایی فضازمان را نگاه کنیم، اولین سهم های مهم همین سهم های چنبره ای هستند. اگر باز هم علاقه مند باشیم که کاوش مان را عمیق تر کنیم، مرزهای همدیسی که رویه های ریمانی با $g > 1$ هستند هم جالب توجه اند؛ اما متاسفانه بررسی ریاضی این خمینه ها دشوار تر است.

به شکل

$$ds^2 = \frac{du^2 + |dz|^2}{u^2}$$

است و مرز همدیس در حد $\rightarrow u$ حاصل می شود.

مطابق دوگانی پیمانه/گرانش، تابع پارش محاسبه شده در بالا، تابع پارش نظریه‌ی دوگان روی مرز همدیس، تابع پارش روی یک نظریه‌ی میدان همدیس است که روی چنبره تعریف شده است. در حقیقت، می‌بینیم که هامیلتونی و تکانه‌ی نظیر نظریه‌ی دوگان، با هامیلتونی و تکانه‌ی زاویه‌ای فضازمان گرانشی معادل می‌شود.

از دیدگاه انتگرال مسیر گرانشی، تابع پارش با دستور زیر حاصل می‌شود.

$$Z = \int [D\phi][Dg_{\mu\nu}]e^{-I[g_{\mu\nu}, \phi]} \quad (2-0-4)$$

اما متاسفانه، این انتگرال همگرا نیست. تنها راه شناخته شده برای دست‌وپنجه نرم کردن با این مشکل این است که پیرامون یک جواب کلاسیک بسط بدھیم (یعنی از تقریب زینی استفاده کنیم). هیچ جواب دقیقی به این سوال هم در دسترس نیست که توپولوژی‌هایی که جواب کلاسیک نیستند، آیا سهم معناداری به انتگرال مسیر می‌دهند یا نه. همچنین اثرات غیراختلالی به انتگرال مسیر گرانشی هم در هاله‌ای از ابهام است. متاسفانه، فعلاً راهی هم برای بررسی کردن این سوالات در دسترس نیست.

اما خوشبختانه، ساختار گرانش سه بعدی طوری است که به ما امکان دسته‌بندی جواب‌ها را می‌دهد. [۶۹، ۷۰] این دسته‌بندی جوابها به لطف عدم وجود درجات ازادی موضعی در توده‌ی خمینه است که باعث می‌شود معادله‌ی اینشتین به طور خودکار در توده برقرار بشود. جالب‌تر از همه این‌که خواهیم دید بسط اختلالی انتگرال مسیر گرانشی حول جوابهای کلاسیک در مرتبه‌ی تک‌حلقه خاتمه می‌یابد و به این معنی، گرانش سه بعدی در مرتبه‌ی تک‌حلقه دقیق است.

در این بخش، مباحث زیر را به ترتیب پی می‌گیریم. اول سهم‌های شناخته شده به انتگرال مسیر گرانشی را دسته‌بندی می‌کنیم و سهم‌های معنادار فیزیکی را از سهم‌های کم‌اهمیت جدا می‌کنیم. در بخش بعدی، جمع تابع پارش را با کمک سری‌های پوانکاره و روش بازجمع پواسون و منتظم‌سازی انجام می‌دهیم. دقیقاً در همین مرحله است که جوابهای غیرفیزیکی می‌بینیم و سپس سعی می‌کنیم سناریوهای احتمالی برای غیر فیزیکی شدن پاسخمن را نگاه کنیم. نتایج کارهای ما تصحیحات به آنتروپی سیاه‌چاله‌ی BTZ را بدست می‌دهند. توسعه‌های ابرمتقارن این گرانش را هم می‌توان علی‌الاصول دید. نتایج این توسعه‌ها کم‌وبیش یکسان است و می‌توانیم بگوییم که قسمت عمده‌ی فیزیک مسئله را

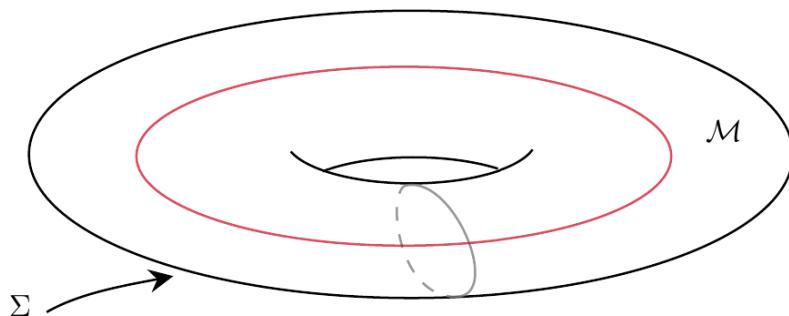
در مسئله‌ی بوزونی دیده‌ایم.

۱-۴ جواب‌های کلاسیکی سه‌بعدی در انتگرالِ مسیر گرانشی

در این قسمت، جواب‌های کلاسیکی در نظریه‌ی گرانش سه‌بعدی را نگاه می‌کنیم و انتخاب‌های مختلف برای خمینه‌های فضازمانی معتبر M را بررسی می‌کنیم، همچنان سهم یک جواب نوعی را به تابع پارش نگاه می‌کنیم و استدلالاتی کلی از منظر تمام‌نگاری خواهیم داشت.

۱-۱-۴ دسته‌بندی جواب‌های کلاسیک

اولین قدم در بدست آوردن جواب‌های کلاسیک، قید کردن شرایطِ مرزی خمینه است و همانطور که در بخش قبلی گفتیم، خمینه‌های مورد بررسی ما در حد $0 \rightarrow u$ (یعنی مرز همدیس)، به شکل یک چنبه (یا رویه‌ای ریمانی با $g = 1$) هستند و متريک روی این چنبه، متريکِ تخت $ds^2 = |dz|^2$ در مختصات مخلوط است. این مرز همدیس را با Σ نشان می‌دهیم. همچنان، فرضهای استاندارد نسبیت عام را روی این فضازمان سه‌بعدی می‌گذاریم. یعنی خمینه‌ی M هموار است و متريک روی این خمینه کامل است. همچنان Σ تنها مرز این خمینه است ($\Sigma = \partial M$). البته شاید مجبور باشیم جایی از این شرایط کوتاه بیاییم و تعدیلشان کنیم، اما برای شروع نقطه‌ی خوبی هستند. (به شکل ۲-۴)



شکل ۲-۴: چنبه‌ای که توصیف‌کننده‌ی مرز همدیس فضازمان است. خمینه‌ی M فضای داخلی این چنبه به همراه مرزش است.

گروه‌های خودریختی فضای AdS_3 ، همان گروه لورنتز است.

$$SO(1, 3) \cong \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}$$

و متریک آن در مختصات پوانکاره به شکل

$$ds^2 = \frac{du^2 + |dz|^2}{u^2}$$

است.^۲

می‌دانیم که جواب‌های فضازمانی معادله‌ی اینشتین، موضعاً پاددوسیته هستند؛ این به این معناست که اگرچه در خواص سرتاسری ممکن است کاملاً متفاوت باشند، اما موضعاً شبیه به فضای مدل پاددوسیته هستند. برای ساخت خمینه‌هایی به شکل بالا، یک روش کلی و منظم وجود دارد که در اینجا توصیف شده است. اول با انتخاب یک زیرگروه گسسته (یا متناهی تولیدشده) از گروه خودریختی‌های فضای پاددوسیته‌ی سه بعدی شروع می‌کنیم و با خارج قسمتی کردن فضای پاددوسیته‌ی سه بعدی با این زیرگروه انتخابی، به فضایی می‌رسیم که همچنان در معادله‌ی اینشتین صادق است (البته به جز احتمالاً در تعداد محدودی نقطه). بیاید این پروسه را در عمل بینیم.

مختصه‌های (z, u) را برای نیم‌فضای بالایی \mathbb{H}^3 انتخاب می‌کنیم و با یک عدد کواترنیونی به شکل $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ روی این فضا را به شکل $y = z + ju$ نقاط آن را نشان می‌دهیم. حالا اثر گروه $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ روی این فضای می‌کنیم.

$$z \rightarrow (ay + b)(cy + d)^{-1} \quad (1-1-4)$$

توجه کنید که دو عضو $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ به یک شکل روی نقاط فضای اثر می‌کنند؛ پس اثر بالا در حقیقت اثر گروه $\frac{\text{SL}(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}$ یا گروه لورنتز روی نیم‌فضای بالایی است. مطابق حرفهایی که در بالا گفته شد، جوابهای گرانش سه بعدی، به فرم $\frac{AdS'_3}{\Gamma}$ هستند که Γ زیرگروهی گسسته (یا متناهی تولیدشده) از $SO(1, 3)$ است و AdS'_3 تنها یک زیرمجموعه‌ی باز از فضای پاددوسیته‌ی سه بعدی است که گروه تقارنی Γ روی آن اثر می‌کند.

حالا بیاید بینیم که در این ساختار، مرز همدیس خمینه‌ی M که محل زندگی نظریه میدان همدیس دو بعدی است، چطور ساخته می‌شود. می‌دانیم مرز همدیس فضای پاددوسیته‌ی سه بعدی یک کره‌ی دو بعدی است که می‌توانیم آن را به چشم فضای تصویری $\{ \infty \} = \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{ \infty \}$ به آن نگاه کنیم. این فضای

^۲ در این متریک، شعاع فضای پاددوسیته را واحد گرفته‌ایم.

تصویری با پارامتر مختلط z مختصه بندی شده است. از شیوه‌ی اثر گروه لورنتز روی نیم فضای بالایی در معادله‌ی (۴-۱-۱) می‌توانیم بینیم که اثر زیر روی کره‌ی ریمان (یا \mathbb{CP}^1) القا خواهد شد.

$$z \rightarrow (az + b)(cz + d)^{-1} \quad (2-1-4)$$

اینجا اما کمی دقت ساختاری ریاضی لازم است. خارج قسمتی کردن کل گروه ریمان با این گروه، یک خمینه‌ی خوش تعریف روی مرز نمی‌دهد، بلکه باید نقاط ثابت اثر را برداریم و اثر را تنها روی ناحیه‌ای تعریف کنیم که به شکل ناپیوسته است. این ناحیه‌ی جدید را با $U \subset \mathbb{CP}^1$ نشان می‌دهید و آن را ناحیه‌ی ناپیوستگی می‌نامیم. با درنظر گرفتن این اصلاح جزئی، مرز همدیس خمینه‌ی M ، از خارج قسمتی کردن U با گروه Γ حاصل می‌شود.

$$\partial M = \Sigma = \frac{U}{\Gamma} \quad (3-1-4)$$

در اینجا، نکته این است که چون اثر گروه به گونه‌ای است که مولفه‌های z و \bar{z} را مخلوط نمی‌کند، پس مرز همدیس هم ساختار مختلط کره‌ی ریمان را به ارث می‌برد.

اما یادمان هست که انگیزه‌ی ما مطالعه‌ی خمینه‌هایی بود که مرز همدیس‌شان یک چنبره بود، پس باید گروه‌های گستته‌ی Γ را به درستی انتخاب کنیم. اگر قرار باشد که Σ چنبره باشد، پس گروه بنیادی آن $\pi_1(\Sigma) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ است. نتیجه‌ی رابطه‌ی (۳-۱-۴) در سطح گروه بنیادی این است که $\pi_1(U) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و این سه امکان را مطرح می‌کند.

۱. حالتی که اندیس گروه (U) در (Σ) متناهی باشد.

$$\pi_1(U) = \mathbb{Z}. \quad 2.$$

۳. حالت آخر هم این است که گروه (U) ممکن است بدیهی باشد.

در ادامه از خواص و قضایایی در نظریه‌ی رویه‌های ریمانی استفاده می‌کنیم تا این سه حالت را نگاه کنیم و بفهمیم که کدامشان به ما خمینه‌ای با مرز همدیس چنبره می‌دهند.

حالت اول ممکن نیست. چون در این صورت، خود U یک پوشش با اندیس متناهی از Σ است. به خاطر متناهی بودن اندیس گروه (U) در (Σ) ، گروه بنیادی آن حتماً یک مولفه‌ی \mathbb{Z} دارد. اما از طبقه‌بندی فضاهای تخت می‌دانیم که فقط در صورتی این امکان پذیر است که خود U یک رویه‌ی ریمانی

با $g = 1$ یا چنبره باشد. اما یادمان هست که $U \subset \mathbb{C}P^1$ و هیچ زیرمجموعه‌ای از کره‌ی ریمان یک چنبره نیست! پس حالت اول کلا امکان ندارد.

سراغ حالت سوم برویم، وقتی گروه بنیادی فضای پوششی بدیهی می‌شود؛ مطابق تعریف، فضای پوششی یک فضای پوششی عام است و فضای پوششی عام یک چنبره، صفحه‌ی مختلط یا \mathbb{R}^2 است. برای این‌که $\mathbb{C} \cong U$ را در $\mathbb{C}P^1$ بنشانیم، یک راه بیشتر نداریم؛ باید صفحه‌ی مختلط را در خودش بنشانیم و نقطه‌ی بی‌نهایت را نقطه‌ی ثابت اثر بگیریم. (تمامی انتخاب‌های دیگر، به هرشكی که باشند، بالاخره باید یک نقطه را به عنوان نقطه‌ی ثابت داشته باشند). اگر تقاضا کنیم که نقطه‌ی $\infty = z$ نقطه‌ی ثابت اثر باشد، زیرگروهی از $(\mathbb{C}, SL(2))$ که این نقطه را ثابت نگه‌مند دارد، از ماتریس‌های بالامثلی تشکیل شده است.

$$\begin{pmatrix} \lambda & w \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad (4-1-4)$$

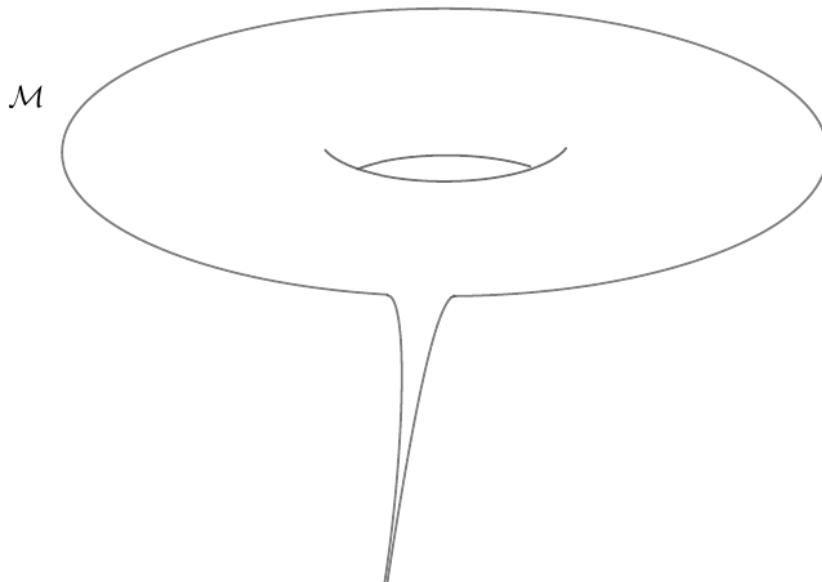
به شکل $\lambda w + \lambda^2 z \rightarrow z$ روی مرز همدیس اثر می‌کند.

حالا مطابق قضیه‌ی یکنواخت‌سازی سطوح ریمانی چون که U همبندساده است، پس (U, π_1) با تبدیلات دسته‌ای این اثر یکسان است و این یعنی $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. بنابراین باید بتوانیم گروه $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ از ماتریس‌های بالامثلی بیرون بکشیم. دو ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ که $a, b \in \mathbb{C}$ اعدادی هستند که روی \mathbb{R} مستقل خطی هستند، انتخاب خوبی برای مولدها هستند. بنابراین گروه Γ با دو عدد مختلط ساخته می‌شود؛ اما این همه‌ی ماجرا نیست.

با تزویجی کردن اعضای این گروه با اعضای دیگر از $(\mathbb{C}, SL(2))$ به گروه دیگری می‌رسیم که با این گروه هم‌ریخت است، اما پارامترهای a, b آن متفاوت‌اند. چیزی که در حقیقت مهم است، نسبت b/a است. اگر بگیریم $1 = a$ و $\tau = b$ ، گروه مدنظر ما با دوماتریس $\begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ تولید می‌شود. به عنوان نکته‌ی پایانی، تبدیل $\tau \rightarrow -\tau$ هم تاثیری روی زیرگروه تولید شده ندارد، پس باید خودمان را به $\text{Im}\tau > 0$ محدود کنیم.

با تمامی این حرفهای بالا، گروه Γ به شکل $z \rightarrow z + m + n\tau$ که $m, n \in \mathbb{Z}$ است، معرفی می‌شود. این گروه در حقیقت معرف یک شبکه روی صفحه‌ی مختلط است و کاری که الان انجام دادیم، ساختن فضای تایشمولر چنبره بود.

اما مشکلی وجود دارد! خمینه‌ی خارج قسمتی حاصل که به شکل $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ است، خواصی که در اول این بخش ذکر کردیم ندارد. تنها مرز خمینه قرار بود چنبره در حد $0 \rightarrow u$ باشد. اما متسفانه در $u = \infty$ هم مرزی داریم، در این مرز متريک صفر می‌شود. اين مرز دقیقاً مانند یک نقطه‌ی بریده شده است و در شکل ۳-۴ دیده می‌شود.



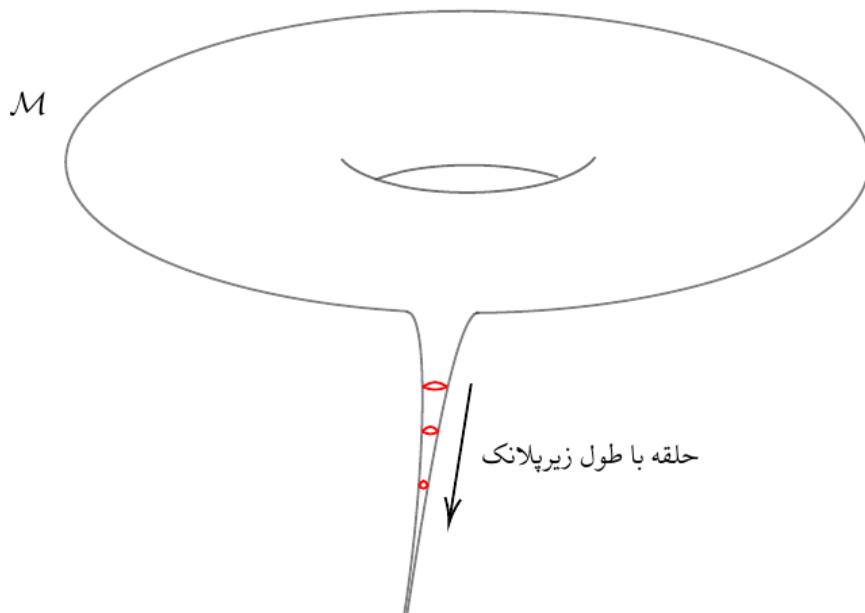
شکل ۳-۴: هندسه‌ی مذکور علاوه بر مرز همدیس، یک نقص دارد و بنابراین توپولوژی مرز همدیس آن مثل چنبره نیست و در حقیقت مثل صفحه است.

پس این خمینه واجد شرایطی که انتظار داشتیم نیست.

البته هنوز هم مطمئن نیستیم که دور ریختن این فضازمان‌ها کار درستی باشد، اما شواهدی فیزیکی پیشینی ما، شرایط جواب معادله‌ی اینشتین، مانع حضورشان می‌شود. یک دلیل فیزیکی تر این است که حلقه‌هایی که حول این نقاط زده شده است، می‌توانند طول بسیار بسیار کوچکی بگیرند و مرتبه‌های زیرپلانکی بروند. این حلقه‌ها تقریب نیمه کلاسیک را خراب می‌کنند. (به شکل ۴-۴ نگاه کنید).

۲-۱-۴ ساخت هندسه‌های هموار نیمه کلاسیک

اگر $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$ باشد، ناحیه‌ی باز U نمی‌تواند به جز $S^1 \times \mathbb{R}$ باشد. برای ساختن چنین هندسه‌هایی، باید سراغ زیرگروه‌هایی از گروه لورنتز برویم که شامل ماتریس‌های قطری است (تا نقطه‌ی $z = 0$ را ثابت نگه دارد).



شکل ۴-۴: حلقه هایی که در اطراف نقطه‌ی $\infty = u$ هستند، می‌توانند به طول دلخواهی نزدیک به صفر برسند و این حلقه های زیرپلانکی، در مسئله‌ی فیزیکی بعدا مشکل‌ساز خواهند شد.

در این حالت هم دو انتخاب برای زیرگروه‌مان داریم.

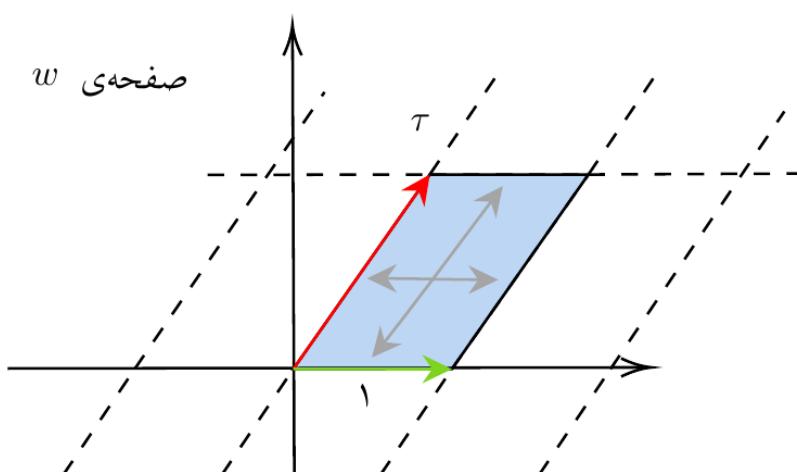
$$1. \text{ اول اینکه } \mathbb{Z} \cong \Gamma \text{ باشد و با ماتریس‌های } W = \begin{pmatrix} q & \\ & \cdot \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \text{ تولید شود که } |q| < 1. \quad ^3$$

$$2. \text{ حالت دوم اینکه } Y = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/n} & & \\ & \cdot & \\ & & e^{-2\pi i/n} \end{pmatrix} \text{ تولید می‌شود } (n \in \mathbb{N}).$$

در حالت اول، باید نقطه‌ی $z = 0$ را دور بیاندازیم و سپس با گروه تولید شده با W خارج قسمتی بسازیم. بهتر است که صفحه‌ی مختلط را با مختصه‌ی $w = \exp(2\pi i w) = \exp(2\pi i w)$ پارامتربرندی کنیم؛ طوری که مختصه‌ی w به پیمانه‌ی یک معنادار باشد ($1/w \sim w$).

و اثیر گروه W روی این صفحه به شکل $w \rightarrow w + \frac{\log q}{2\pi i}$ است. این شکل همسان‌کردن صفحه‌ی مختلط w به ما دقیقا یک چنبره با پارامتر خشتی $\tau = \frac{\log q}{2\pi i}$ می‌دهد؛ همانطور که در شکل ۴-۵ مشاهده می‌کنید.

³ حالت $|q| > 1$ با تعویض عناصر روی قطر قابل مشاهده است. همچنین حالت $|q| = 1$ به خاطر اینکه گروه‌های غیرگسسته می‌دهد قابل قبول نیست.



شکل ۴-۵: ساخت چنبره از کاشی‌کاری صفحه‌ی مختلط w با پارامتر خشتی τ . تمام ناحیه‌های متوازی‌الاضلاعی به تحت همسان‌سازی به ناحیه‌ی آبی رنگ نگاشته می‌شوند و فلش‌های خاکستری دوسر، رنگ اضلاعی که با هم یکسان می‌شوند را نشان می‌دهد.

می‌دانیم که پارامتر خشتی چنبره، تا حداقل یک تبدیل $PSL(2, \mathbb{Z})$ تعریف شده است؛ $\tau \rightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. پس چنبره با پارامتر جدید، معادل با چنبره‌ی قبلی است. البته هر چهار عدد صحیح a, b, c, d مستقل نیستند. شرط $ad - bc = 1$ ما را مقید می‌کند و با داشتن تنها c و d می‌توانیم دو پارامتر دیگر را بخوانیم ^۴.

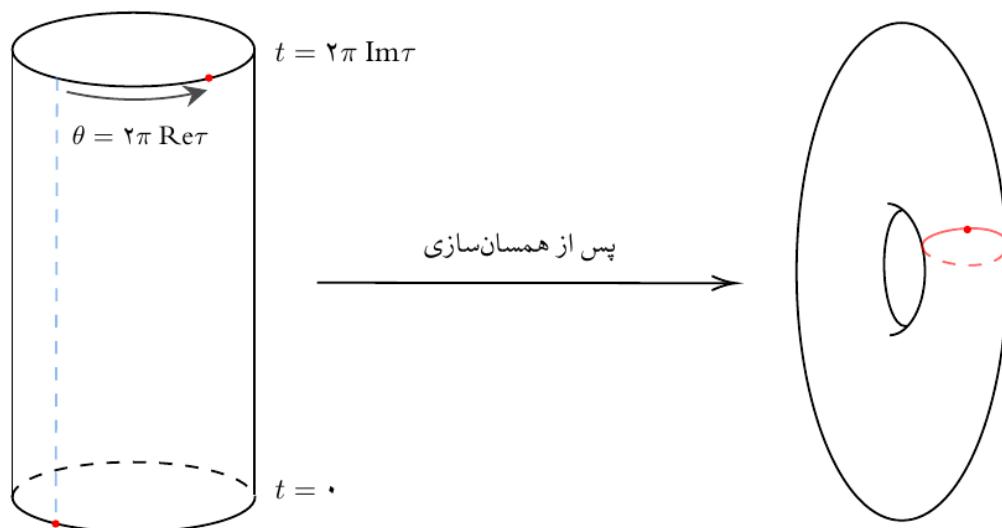
نتیجه‌نهایی این بخش این است که خمینه‌های سه بعدی با مرز چنبره را می‌توانیم با انتخاب پارامتر خشتی τ و دو عدد صحیح c و d که نسبت به هم اول هستند بسازیم. خمینه‌ی حاصل را $M_{c,d}$ می‌نامیم. اتفاقاً این دسته از خمینه‌ها برای اولین بار (به معنای کاربرد فیزیکی) در [۴۰] و در مسئله‌ی گرانش سه بعدی مجانباً پاددوسيتِه بحث شدند.

۳-۱-۴ شناخت هندسی خمینه‌های $M_{c,d}$

حالا نگاهی به ساده‌ترین خمینه می‌اندازیم؛ یعنی $M_{0,1}$. زیرگروه تک‌پارامتری Γ را مشخص می‌کند. حالا اثر این گروه را روی فضای AdS_3 معلوم می‌کنیم. قبل از این فضا ^۴ البته حداقل تا یک انتقال $(a, b) \rightarrow (a, b) + t(c, d)$

در مختصات سرتاسری را دیده‌ایم و همچنین دیده‌ایم که خمینه‌ی حاصل توپولوژی یک استوانه‌ی توپر را دارد. زیرگروه $\text{diag}(e^b, e^{-b})$ به شکل $t \rightarrow t + b$ روی خمینه اثر می‌کند و زیرگروه $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ روی مختصه‌ی زاویه‌ای اثر می‌کند: $\theta + \phi \rightarrow \phi$. پس گروه W یک عملی ترکیبی است که انتقال زمانی و چرخش فضایی را با هم انجام می‌دهد.

فضازمان را به این شکل می‌سازیم. استوانه‌ی فضازمان را از محل $t = 0$ و $t = 2\pi \text{Im}\tau$ می‌بریم، سپس مرز دیسکی بالایی را به اندازه $\theta = 2\pi \text{Re}\tau$ می‌چرخانیم و دو دایره را بایکدیگر همسان می‌کنیم. (به شکل ۴-۶ نگاه کنید.)



شکل ۴-۶: ساخت خمینه‌ی $M_{c,d}$: اول در $t = 0$ و $t = 2\pi \text{Im}\tau$ فضازمان را می‌بریم و سپس نقاط روی دایره‌های مرز را با چرخش $\theta = 2\pi \text{Re}\tau$ همسان می‌کنیم. در شکل، نقطه‌ی قرمز در دایره‌ی بالا و پایینی با هم همسان می‌شوند و پس از انجام همسان‌سازی، روی چنبره نشان داده شده‌اند. فضای حاصل همان $M_{0,1}$ است.

انتگرال مسیر اقلیدسی این فضا، یک تعبیر فیزیکی جالب برحسب عملگرهای H و J دارد. همانطور که می‌دانیم، انتگرال مسیر اقلیدسی از دید مکانیک کوانتمی، مثل تحول و ضرب داخلی کردن یک سری حالت‌هاست. توصیف عمل بالا از دید مکانیک کوانتمی مانند این است که اول یک حالت خلا ایجاد می‌شود، سپس تا زمان اقلیدسی $2\pi \text{Im}z = \beta$ تحول داده می‌شود؛ در ادامه با عملگر چرخش $e^{-i\theta J}$ به اندازه $\theta = 2\pi \text{Re}\tau$ چرخش می‌دهیم تا به حالت نهایی برسیم. همسان‌کردن حالت اولیه پایانی در تصویر کوانتم مکانیکی، معادل این است که حالت اولیه را با حالت نهایی ضرب داخلی کنیم.

سایر خمینه‌های $M_{c,d}$ از $M_{0,1}$ بدست می‌آیند که در آن روی پارامتر خشتی یک تبدیل خشتی اعمال شده است. این فهم از خمینه‌ها، به ما کمک می‌کند که سهم این خمینه‌ها در تابع پارش را راحت‌تر حساب کنیم. توجه کنید که بعضی از این فضازمان‌ها، سیاهچاله‌های سه بعدی هستند^۵؛ مثلًا فضازمان $M_{1,1}$ معادل سیاهچاله‌ی BTZ است [۷۱].

نکته: حالت دومی که مولدهای Γ متشکل از W و Y بودند، بررسی نشدنده و در حد نکته می‌گوییم که خمینه‌های حاصل، مثل $M_{c,d}/\mathbb{Z}_m$ هستند؛ اما در حالتی که $1 > m$ باشد، اثر گروه \mathbb{Z}_m نقطه‌ی ثابت خواهد داشت و خمینه‌ی نهایی تکینگی از نوع مخروطی دارد. طی کردن فرآیند بالا، خمینه‌ای می‌سازد که یک خط تکینگی مخروطی با زاویه‌ی نقص $(1/m) - 1 = \theta = 2\pi$ خواهد داشت. همچنین توجه کنید که جواب‌های دارای تکینگی مخروطی واقعاً فیزیکی هستند! خط تکینگی مخروطی داخل توده جواب‌های فضازمانی معادله‌ی اینشتین هستند که انتشار یک ذره جرم‌دار در فضازمان را توصیف می‌کنند که جرم ذره‌ی منتشرشونده با زاویه‌ی نقص ارتباط دارد [۷۲]. به این معنی، با محدود کردن خودمان به سهم خمینه‌های $M_{c,d}$ به تابع پارش، داریم مقداری از فیزیک مسئله را دور می‌ریزیم.

۲-۴ محاسبه‌ی تابع پارش روی $M_{c,d}$

چون خمینه‌های $M_{c,d}$ با تغییر پارامتر خشتی به هم مرتبط می‌شوند، پس تابع پارش را می‌توانیم به شکل جمعی روی پارامترهای ماثولی مختلف (که به c و d وابسته است) بنویسیم. فرض کنید که $Z_{c,d}(\tau)$ سهم خمینه‌ی $M_{c,d}$ به تابع پارش باشد؛ در این صورت، حرف بالا به رابطه‌ی $Z_{c,d}(\tau) = Z_{0,1}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ ترجمه می‌شود و تابع پارش جواب‌های هموار به شکل زیر است.

$$Z(\tau) = \sum_{c,d} Z_{c,d}(\tau) = \sum_{c,d} Z_{0,1}\left((a\tau + b)/(c\tau + d)\right). \quad (1-2-4)$$

جمع روی تمامی عده‌های صحیح c و d است که نسبت به هم اولند و $c \geq d \geq 0$ است.

اجازه بدید با ساده‌ترین حالت ممکن تحلیلمان را آغاز کنیم. فرض می‌کنیم که $Z_{0,1}(\tau)$ تنها $\exp(I)$ است که I کنش جواب $M_{0,1}$ است^۶.

$$I = -4\pi k \text{Im}(\tau) \quad (2-2-4)$$

^۵ از این‌که دایره‌های همولوژی زمان، قابل انقباض هستند یا نه می‌توان به ماهیت فضازمان بپردازیم.

^۶ البته برای این‌که کنش اقلیدسی مذکور متناهی شود، باید به کنش گرانشی جمله‌ی گیبونز-هاوکینگ-یورک را هم اضافه کنیم [۵۶].

که در آن $\frac{\ell}{2G} = k$ است. بنابراین در این تقریب خیلی خام، $Z_{(1)}(\tau) = |q\bar{q}|^{-k}$ است. اگرچه این نتیجه از تقریب خیلی ابتدایی و بی توجیهی حاصل شده، اما واقعاً جالب توجه است. این تابع پارش تقریبی، مشابه سهم خلا به تابع پارش یک نظریه میدان همدیس است.

یک نظریه میدان همدیس با $c_R = c_L = 24k$ در نظر بگیرید. می دانیم که هامیلتونی و تکانه‌ی آن از مولدهای جبر ویراسورو به این شکل حاصل می‌شوند.

$$\begin{cases} H = L_+ + \bar{L}_- \\ J = L_+ - \bar{L}_- \end{cases} \quad (3-2-4)$$

روی حالت خلا، ویژه مقادیر L_+ و \bar{L}_- به ترتیب $-c_L/24$ و $-c_R/24$ هستند. پس انرژی حالت خلا $H = -24k$ و تکانه‌ی آن هم صفر است. می دانیم که تابع پارش نظریه میدان همدیس به شکل زیر است.

$$Z(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{H}}(q^{L_+ - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_- - \frac{\bar{c}}{24}}) \quad (4-2-4)$$

پس سهم این حالت به تابع پارش نظریه میدان همدیس به شکل زیر است.

$$|0\rangle \propto \text{Tr}(e^{-2\pi H \text{Im}\tau} + e^{2\pi i J \text{Re}\tau}) \propto \exp(4\pi k \text{Im}\tau) = |q\bar{q}|^{-k} \quad (5-2-4)$$

بنابراین انگار که خمینه‌ی $M_{(1)}$ متناظر با حالت خلا نظریه میدان همدیس روی مرز است. اگر با فرم دقیق تابع پارش میدان همدیس روی چنبره قیاس کنیم، مقدار بار مرکزی $c_L = c_R = 3\ell/(2G) = 24k$ است. توجه کنید که این مقدار برای بار مرکزی بسیار بستگی به این دارد که چطور منظم سازی انجام دهیم؛ در این مثال ساده، ما با افزودن جمله‌ی مرزی گیبونز-هاوکینگ-یورک، این کار را انجام دادیم و بار مرکزی اینطور حاصل شد. چیزی که معنای فیزیکی دارد این است که تابع پارش تا حدی مشابه با تابع پارش میدان همدیس دارد، این‌که بار مرکزی میدان همدیس روی مرز چه مقداری دارد، از استدلال‌های دیگر فهمیده می‌شود.

احتمالاً همینجا بتوانید حدس بزنید که اضافه کردن سایر سهم‌های کوانتمی (سهم‌های چندحلقه) معادل با نگاه کردن به بقیه‌ی حالات دودمانی در نظریه میدان همدیس دوگان است.

برای این‌که جوابمان را کامل‌تر کنیم و از تقریب خام فوق خارج شویم، باید انرژی حالات برانگیخته‌ی

$Z_{0,1}(\tau)$ را هم پیدا کنیم^۷. در تئوری های گرانشی بعد بالا، به خاطر وجود درجات آزادی داخل توده، تصحیحات انرژی از گازهای گراویتونی داخل توده هم می آیند و این کار را خیلی خیلی سخت تر می کند. اما خوش بختانه در سه بعد همه چیز ساده تر است؛ به این معنی که تصحیحاتی از توده نداریم. اما این حرف هرگز به این معنی نیست که درجات آزادی مرزی روی طیف انرژی موثر نیستند. در حقیقت استدلال Brown-Henneaux در [۱] ما را راهنمایی می کند که باید حالات دودمانی ویراسور که به شکل زیر هستند؛ معادل گرانشی داشته باشند.

$$\prod_{n=2}^{\infty} L_{-n}^{u_n} \prod_{m=2}^{\infty} \tilde{L}_{-m}^{v_m} |0\rangle, \quad (6-2-4)$$

که u_m و v_m اعداد طبیعی یا صفر هستند.

یک حالت به این فرم، ویژه بردار هردوی L . و \bar{L} . است و ویژه‌ی مقادیر آن به شکل زیر است.

$$L_+ = -k + \sum_{n=2}^{\infty} n u_n \quad (7-2-4)$$

$$\bar{L}_+ = -k + \sum_{m=2}^{\infty} m v_m$$

که تابع پارش را به شکل زیر عوض می کنند.

$$Z_{0,1}(\tau) = |\bar{q}q|^{-k} \frac{1}{\prod_{n=2}^{\infty} |1-q^n|^2} \quad (8-2-4)$$

اگر بر حسب تابع اتای ددکیند بنویسیم؛ تابع پارش به شکل زیر است.

$$Z_{0,1}(\tau) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} |\bar{q}q|^{-(k-1/24)} |1-q|^2. \quad (9-2-4)$$

نوشتن تابع پارش به این شکل، تحقیق ناوردایی خشتی را راحت تر می کند.

تابع اتای ددکیند، یک فرم خشتی با وزن $\frac{1}{2}$ است که روی نیم صفحه‌ی بالایی مختلط تعریف شده و به خصوص در توابع پارش نظریات ریسمان و میدان‌های همدیس ظاهر می شود.

این تابع برای عدد مختلط τ با قسمت حقیقی مثبت، به شکل زیر تعریف می شود (تعریف کردہ‌ایم)

⁷ توجه کنید که ما در این بحث فقط و فقط با $Z_{0,1}(\tau)$ سروکار داریم و اصلاً به $Z_{c,d}(\tau)$ ها نگاه نمی کنیم.

$$\eta(\tau) = e^{\frac{i\pi\tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{n\pi i\tau}) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (10-2-4)$$

تحت تبدیلات خشتشی، این تابع به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \eta(\tau + 1) &= e^{\frac{i\pi}{12}} \eta(\tau) \\ \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{-i\tau} \eta(\tau) \end{aligned} \quad (11-2-4)$$

البته تمام چیزهایی که تا الان در مورد سهمهای غیرخلا گفته شد، در حد حدس است؛ باید بتوانیم به نحوی توجیه کنیم که چگونه ممکن است حالت‌های بالا سهم گرانشی باشند. این کار را انجام می‌دهیم و حتی بیشتر می‌بینیم که رابطه‌ی (۴-۲-۴) در تمامی مراتب اختلال دقیق است.

۴-۲-۱ استدلال مربوط به تابع پارش گرانشی $M_{,1}$

برای این‌که بتوانیم تابع پارش را اصلاح کنیم و به دقت نقش سایر حالات دودمانی نظریه میدان همدیس دوگان در تابع پارش گرانشی را درک کنیم، باید گریزی بزنیم به کوانتش نظریه‌ی گرانش سه‌بعدی. استدلال‌هایی که در این قسمت مطرح می‌شوند، اگرچه بدون دقت خاصی بیان می‌شوند، اما به منابع مناسب ارجاع داده می‌شود.

در کوانتش هندسی، فضای هیلبرت سامانه‌ی کوانتمی با کوانتش یک فضای فاز کلاسیک ساخته می‌شود. اگرچه این روش ممکن است به شکل غیراختلالی نتواند به شناخت گرانش کوانتمی کمک کند، اما برای مسئله‌ی ما که نگاه کردن به سهمهای تک حلقه‌ی گرانش است، کاملاً مناسب و کافی است.

منظورمان از فضای فاز یک نظریه‌ی فیزیکی، فضای جوابهای کلاسیک آن است. در نسبیت عام ایشتینی با شرایط مرزی Brown-Henneaux روی متریک، باید فضای جوابهای کلاسیک را به تبدیلات پیمانه‌ای بدیهی (رجوع کنید به بخش ...) تقسیم کنیم؛ چون که این تبدیلات، تبدیلات پیمانه‌ای حقیقی در شرط افت Brown-Henneaux هستند و پس از اعمالشان، فضازمان را عوض نمی‌کنند. پس از این‌کار، اضافه‌شماری‌های پیکربندی‌های کلاسیک حذف شده و به یک فضای فاز درست می‌رسیم. همانطور که در بخش ۳-۳-۳ دیدیم، تمامی متریک‌هایی که شرایط مرزی Brown-Henneaux را برآورده می‌کنند با

دو تابع p و \bar{p} که عضو $\text{Diff}(S^1)$ هستند، معین می شوند؛ بنابراین فضای پیکربندی های کلاسیک گرانش سه بعدی مجانباً پاددوسيته با شرط مرزی Brown-Henneaux (با اضافه شماری احتمالی) $\times \text{Diff}(S^1)$ است. اضافه شماری این فضا هم مجموعه تبدیلات ایزو متري یک متريک خاص است. مثلاً $\text{Diff}(S^1)$ (به عنوان نمونه) گروه ایزو متري فضای پاددوسيته سه بعدی گروه $\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{SL}(2, \mathbb{R})$ است.^۸ پس فضای فاز کلاسیک صحیح، به شکل پایین است.^۹

$$\mathcal{M} = \frac{\text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1)}{\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{SL}(2, \mathbb{R})} = \left(\frac{\text{Diff}(S^1)}{\text{SL}(2, \mathbb{R})} \right)^2$$

اما کوانتش چنین فضاهای فازی، به شکل وسیعی توسط Shatashvili و Alekseev و Faddev بررسی شده است [۳۵]. چون فضای فاز یک خمینه همتافته است، با کمک کوانتش هندسی و کنش های هندسی قابل بررسی هست. ما در این بخش صرفا هدفمان این است که فضاهای حالات کوانتمی را بشناسیم و وارد جزئیات کنش های هندسی نمی شویم. تنها نکته ای که لازم است بدانیم این است که به طور کلی، کوانتش فضای G/H به ما فضای هیلبرتی مثل H می دهد که نمایشی مثل R از گروه (احتمالاً توسعه ی مرکزی گروه) G است که خلا آن تحت تبدیلات H ناورداست.

ترجمه‌ی تمامی حرفهای بالا به مسئله‌ی ما این است که فضای هیلبرت کوانتش $\text{Diff}(S^1)/\text{SL}(2, \mathbb{R})$ نمایش‌های گروه توسعه ی مرکزی یافته‌ی $\text{Diff}(S^1)$ هستند که خلا آنها تحت تبدیلات $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ناورداست. چقدر جالب! توسعه ی مرکزی گروه $\text{Diff}(S^1)$ همان گروه $\widetilde{\text{Diff}}(S^1)$ است که گروه ویراسورو است و خلا گروه ویراسورو تحت تبدیلات همدیس سرتاسری که (بخش تمام ریخت آن) همان $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ است، ناورداست. پس کوانتش گرانش سه بعدی با این شرایط چیزی به جز نظریه‌ی میدان همدیس نیست! پس حالات کوانتمی نظریه‌ی گرانش کوانتمی دقیقاً با حالات دودمانی نظریه‌ی میدان همدیس یکی هستند و به شکل

$$\prod_{n=2}^{\infty} L_{-n}^{a_n} |0\rangle \quad (12-2-4)$$

هستند و انرژی

$$E = -k + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n. \quad (13-2-4)$$

^۸ می توانیم در سطح متريک (۲۹-۳-۳) هم مشاهده کنيم که با بازتعريف \bar{p} به شکلی خاص، به همان متريک و فضازمان قبلی می رسیم؛ اما استدلال با متريک AdS_3 خالص خيلي راحت‌تر و تميز‌تر است.
^۹ يك راه ساختن فضای فاز، استفاده از ساختار فضای همگن است و اين که فضای فاز واقعاً يك خمینه همگن مجهر به فرم همتافته است. اين ساختار با مطالعه مدارهای هم‌الحاقی گروه ویراسورو امكان پذير می شود که مجهز به ۲- فرم Krillov-Kostant است.

را دارند.

حالا کوانتش^۲ ($\text{Diff}(S^1)/\text{SL}(2, \mathbb{R})$) فضای هیلبرت را ضرب تانسوری دو نمایش از گروه ویراسورو می دهد و به این معنا، به ما انرژی ها و حالت هایی که در روابط (۱۲-۲-۴) و (۱۳-۲-۴) داده شده است می رسیم. در واقع، کوانتش گرانشی طوری است که به طور کاملاً طبیعی، حالات کوانتمی همان حالات نظریه‌ی میدان همدیس دوگان هستند و کاری که در قسمت‌های قبلی کردیم، اینجا معنای درست به خود می‌گیرند.

برای اطلاع دقیق‌تر از کوانتش هندسی فضاهای همگن و به خصوص فضای $\text{Diff}(S^1)/\text{SL}(2, \mathbb{R})$ به [۷۳] و حوالی روابط ۱۷۰ تا ۱۷۴ رجوع کنید. این حالاتی که در اینجا توصیف کردیم، به عنوان Brown-Brane‌گیختگی‌های مرزی فضای مجانباً پاددوسيته درنظر گرفته می‌شوند و به آنها حالات کوانتمی Henneaux-هم گفته می‌شود.

۲-۲-۴ محاسبه‌ی جمع روی هندسه‌های $M_{c,d}$

همانطور که در بخش‌های گذشته توصیف شد، سهم‌های هموار شناخته شده به تابع پارش گرانش کوانتمی خالص مجانباً پاددوسيته، از هندسه‌های هموار $M_{c,d}$ می‌آید. با درنظر گرفتن سهم Brane-گیختگی‌های به تابع پارش، به تابع پارش زیر می‌رسیم.

$$Z(\tau) = \sum_{c,d} Z_{c,d}(\gamma\tau) \quad (14-2-4)$$

که

$$\gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad (15-2-4)$$

و

$$Z_{c,d}(\tau) = \left| q^{-k} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \right|^{\frac{1}{2}} = \frac{|\bar{q}q|^{-k+1/24} |1-q|^{\frac{1}{2}}}{|\eta(\tau)|^2} \quad (16-2-4)$$

به این جمع‌ها، سری پوانکاره گفته می‌شود.

به خاطر اين که ترکيب $\sqrt{\text{Im}\tau}|\eta(\tau)|^{\frac{1}{2}}$ تحت تبديلات خشتی ناورداست، $Z(\tau)$ را به اين فرم تبديل می‌کنیم تا تبديلات خشتی آن راحت‌تر بررسی شود.

$$Z(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\text{Im}\tau}|\eta(\tau)|^{\frac{1}{2}}} \sum_{c,d} \left(\sqrt{\text{Im}\tau} |\bar{q}q|^{-k+1/24} |1-q|^2 \right) \Big|_{\gamma} \quad (17-2-4)$$

که $|_{\gamma} (\dots)$ تبديل شده‌ی (\dots) تحت تبديل γ است.

با نوشتن $|1-q|^2 = 1 - q - \bar{q} + q\bar{q}$ می‌بینیم که به جمع چهارسری پوانکاره به فرم

$$E(\tau; n, m) = \sum_{c,d} \left(\sqrt{\text{Im}\tau} q^{-n} \bar{q}^{-m} \right) \Big|_{\gamma} \quad (18-2-4)$$

می‌رسیم که $n - m = 0, \pm 1$

دقیقا همین جمع در [۷۴] برای اولین بار بررسی شده بود. با تعریف $\kappa = n + m$ و $\mu = m - n$ و $\text{Im}(\gamma\tau) = \frac{\text{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2}$ سری بالا به شکل ساده‌شده‌ی زیر تبديل می‌شود.

$$E(\tau; \kappa, \mu) = \sqrt{\text{Im}\tau} \sum_{c,d} |c\tau + d|^{-1} \exp \{ 2\pi\kappa \text{Im} \gamma\tau + 2\pi i \mu \text{Re} \gamma\tau \} \quad (19-2-4)$$

برحسب این سری، تابع پارش به شکل زیر است.

(۲۰-۲-۴)

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\text{Im}\tau}|\eta(\tau)|^{\frac{1}{2}}} (E(2k - 1/12, 0) + E(2k + 2 - 1/12, 0) \\ &\quad - E(2k + 1 - 1/12, 1) - E(2k + 1 - 1/12, -1)). \end{aligned}$$

گاهی در نوشتن τ را از قلم می‌اندازیم و فقط می‌نویسیم $E(\kappa, \mu)$. این جمع‌ها نیاز به منظم‌سازی دارد که در ادامه به آن‌ها می‌پردازیم (این واگرایی‌های طیف گرانش سه بعدی در [۷۵، ۷۶] هم مشاهده شده بودند).

با کمک اتحادهای زیر (که $\tau = x + iy$)

$$\begin{aligned} \frac{a\tau + b}{c\tau + d} &= \frac{a}{c} - \frac{1}{c(c\tau + d)} \\ \text{Im}(\gamma\tau) &= \frac{y}{(cx + d)^2 + c^2y^2} \\ \text{Re}(\gamma\tau) &= \frac{a}{c} - \frac{cx + d}{c((cx + d)^2 + c^2y^2)}. \end{aligned} \quad (21-2-4)$$

جمله‌ی نمایی سری (۲۲-۲-۴) به شکل زیر است.

$$\exp \{2\pi\kappa \operatorname{Im} \gamma\tau\} = \exp \left\{ 2\pi\kappa \frac{y}{(cx+d)^2 + c^2 y^2} \right\} \quad (22-2-4)$$

حالا رفتار واگرایی این سری را نگاه کنیم؛ دو جمله‌ی اول در حد $c, d \rightarrow \infty$ به شکل $|c\tau + d|^{-1}$ و اگرایی دارند؛ توجه کنید که حتماً واگرایی‌های دیگری هم درکار است، اما این رفتار، سربعترین واگرایی این سری است.

روشی که ما برای منظم‌سازی این جمع به کار می‌گیریم، روش قاعده‌مندتر استفاده از تابع زتا ریمان است. البته به کمک مشاهده کردن دقیق طیف لاپلاسی هم می‌توانیم تابع پارش را به چشم ویژه برداری از لاپلاسی ببینیم و عمل منظم‌سازی را انجام دهیم؛ اما ما در اینجا به روش تابع زتا ریمان متولسل می‌شویم؛ اگرچه این روش شهود مناسبی به دست نمی‌دهد، اما راه مناسبی برای برخورد با مسائل مختلف به ما می‌آموزد. برای دیدن روش منظم‌سازی برحسب عملگر لاپلاسی می‌توانید به [۵] نگاهی بیاندازید.

منتظم‌سازی به کمک تابع ζ ریمان به این شکل انجام می‌پذیرد. سری پوانکاره‌ی اولیه را با یک سری دیگر که به پارامتر s بستگی دارد جایگزین می‌کنیم.

$$E(\tau; s, n, m) = \sum_{c,d} ((\operatorname{Im} \tau)^s q^{-n} \bar{q}^{-m}) \Big|_{\gamma}. \quad (23-2-4)$$

چون $\left(\frac{\operatorname{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2}\right)^s$ پس سری $E(\tau, s, n, m)$ برای $\operatorname{Re}(s) > 1$ همگراست. اما مسئله‌ی ما بررسی $s = \frac{1}{2}$ است. همانطور که خواهیم دید، توسعه‌ی تحلیلی این سری به $s = \frac{1}{2}$ هیچ اشکال فنی‌ای نخواهد داشت. این توسعه‌ی تحلیلی در نهایت به ما کمک می‌کند که تابع پارش Z را بخوانیم.

برحسب n و $k = m + n - \mu$ ، سری پوانکاره‌ی منظم شده، به شکل زیر است.

$$E(s, \kappa, \mu) = \sum_{c,d} \frac{y^s}{|c\tau+d|^{2s}} \exp \{2\pi\kappa \operatorname{Im} \gamma\tau + 2\pi i \mu \operatorname{Re} \gamma\tau\} \quad (24-2-4)$$

که حالت $\mu = 0$ سری آیزنشتاین با وزن s است.

جمع پواسون

این بخش از [۷۴] وام گرفته شده است. برای پیش روی بیشتر، اول d را مطابق الگوریتم تقسیم، به c تقسیم کنید.

$$d = d' + nc, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq d' < c$$

می‌توانیم جمع (۲۴-۲-۴) را به شکل زیر بشکانیم.

$$E(s, \kappa, \mu) = y^s e^{\pi(\kappa y + i\mu x)} + \sum_{c>0} \sum_{d' \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(c, d', n) \quad (25-2-4)$$

که $f(c, d', n)$ به شکل زیر تعریف شده است.

(۲۶-۲-۴)

$$f(c, d', n) = \frac{y^s}{|c(\tau + n) + d'|^s} \exp \left\{ \frac{\pi \kappa y}{|c(\tau + n) + d'|^2} + \pi i \mu \left(\frac{a}{c} - \frac{cx + d}{c|c(\tau + n) + d'|^2} \right) \right\}$$

روشِ جمع پواسون به ما اجازه می‌دهد که جمع روی n را به جمع روی \hat{n} یعنی مدهای فوریه تبدیل کنیم.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(c, d', n) = \sum_{\hat{n} \in \mathbb{Z}} \hat{f}(c, d', \hat{n}) \quad (27-2-4)$$

که \hat{f} تبدیل فوریه‌ی f است.

(۲۸-۲-۴)

$$\begin{aligned} \hat{f}(c, d', \hat{n}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dn e^{\pi i n \hat{n}} f(c, d', n) \\ &= \exp \left(\pi i \left(\frac{\mu a - \hat{n} d'}{c} - \hat{n} x \right) \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{\pi i \hat{n} t} \left(\frac{y}{t^2 + y^2} \right)^s \exp \left\{ \frac{\pi (\kappa y - i \mu t)}{t^2 + y^2} \right\}. \end{aligned}$$

که در رابطه‌ی بالا، متغیر انتگرال‌گیری انتقال‌داده شده است؛ $t = n + x + d'/c$.

با بسط تیلور عامل نمایی و همچنین تعریف $T = t/c$ می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \hat{f}(c, d', \hat{n}) &= \sum_{m=0}^{\infty} c^{-s(m+1)} e^{\pi i \left(\frac{\mu a - \hat{n} d'}{c} - \hat{n} x \right)} \frac{(\pi)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{\pi i \hat{n} t} \left(\frac{y}{t^2 + y^2} \right)^{m+s} \left(\kappa - i \mu \frac{t}{y} \right)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c^{-s(m+1)} e^{\pi i \left(\frac{\mu a - \hat{n} d'}{c} - \hat{n} x \right)} \frac{(\pi)^m}{m!} y^{1-m-s} \int_{-\infty}^{\infty} dT e^{\pi i \hat{n} T y} (1+T)^{-m-s} (\kappa - i \mu T)^m. \end{aligned} \quad (29-2-4)$$

حالا چون در روابط بالا، متغیرهای c و d' در انتگرال‌گیری حاضر نیستند، می‌توانیم جمع را مستقیماً روی c و d' بزنیم.

توجه کنید چون که μ عددی صحیح است، به خاطر حضور عامل نمایی، حاصل جمع به مقدار a در پیمانه‌ی c بستگی دارد. اما مقدار a در پیمانه‌ی c به d' ربط دارد اگر $ad' \equiv 1 \pmod{c}$. این تنها وقتی امکان‌پذیر است که d' در دسته‌مانده‌های وارون‌پذیر c باشد. بنابراین، جمع روی d' به شکل زیر ساده می‌شود (توجه کنید که با تغییر برچسب، به جای d' نوشته‌ایم d).

$$S(-\hat{n}, \mu; c) = \sum_{d \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^*} \exp \left\{ \pi i \left(\frac{-\hat{n} d + \mu d^{-1}}{c} \right) \right\} \quad (30-2-4)$$

که $d^{-1} \in (\mathbb{Z}/(c\mathbb{Z}))^*$ ، یعنی d^{-1} واورن ضربی d است به پیمانه c . این جمع به جمع کلوسترمن معروف است.

با بازآرایی جمع (۲۵-۲-۴) می‌رسیم به

$$E(s, \kappa, \mu) = y^s e^{\pi(\kappa y + i\mu x)} + \sum_{\hat{n}} e^{-\pi i \hat{n} x} E_{\hat{n}}(s, \kappa, \mu) \quad (31-2-4)$$

که $E_{\hat{n}}(s, \kappa, \mu)$ در پایین آمده است.

$$E_{\hat{n}}(s, \kappa, \mu) = \sum_{m=1}^{\infty} I_{m, \hat{n}}(s, \kappa, \mu) y^{-m-s} \left(\sum_{c=1}^{\infty} c^{-\pi(m+s)} S(-\hat{n}, \mu; c) \right) \quad (32-2-4)$$

و در آن، انتگرال زیر را معرفی کرده‌ایم.

$$I_{m, \hat{n}}(s, \kappa, \mu) = \frac{(\pi)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} dT e^{\pi i \hat{n} T y} (1 + T^2)^{-m-s} (\kappa - i\mu T)^m \quad (33-2-4)$$

حالا چون (۳۱-۲-۴) مستقل از x است؛ پس به شکل یک بسط فوریه روی x است که ضرایب آن است. با نگاهی به (۲۵-۲-۴) ، مقایسه‌ی تبدیل فوریه‌ی E نسبت با حالت ما، ضرایب فوریه $\text{Tr}_j(\exp(-\beta H))$ هستند؛ یعنی تابع پارش محدود شده به حالات با تکانه‌ی زاویه‌ای $j = J$ در سیستم دوگان کوانتمی.

توجه کنید که (۳۳-۲-۴) برای $m > 0$ همگراست و سری (۳۱-۲-۴) هم همین‌طور؛ اما مشکل اصلی هنگامی است که $m = 0$ است، چون نه انتگرال و نه سری همگراست. بعده باید به مسئله‌ی توسعه‌ی تحلیلی حول $s = \frac{1}{2}$ برگردیم.

۳-۲-۴ جمع روی مدهای $\hat{n} = 0$

در این قسمت به بررسی مدهای $\hat{n} = 0$ که متناظر با جملات ثابت در (۳۱-۲-۴) هستند. در این حالت، انتگرال (۳۳-۲-۴) مستقل از y می‌شود و قابل کنترل‌تر است.

برای $\mu = 0$ جواب بر حسب توابع گاماست و به شکل زیر است.

$$I_{m, 0}(s, \kappa, 0) = \kappa^m \frac{\pi^{m+1/2} \Gamma(s+m-1/2)}{m! \Gamma(s+m)} \quad (34-2-4)$$

همچنین برای $\mu = \pm 1$ ، جواب انتگرال بر حسب تابع فراهندرسی گاووسی بدست می آید.

$$I_{m,\cdot}(s, \kappa, \pm 1) = \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \frac{(2\pi)^m \Gamma\left(\frac{1+m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{2} + s\right)}{m! \Gamma(m+s)} {}_2F_1\left(\frac{m-1}{2} + s, -\frac{m}{2} + s; \frac{1}{2}; \kappa^2\right) \\ + m\kappa \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \frac{(2\pi)^m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} + s\right)}{m! \Gamma(m+s)} {}_2F_1\left(\frac{1-m}{2}, \frac{m}{2} + s; \frac{3}{2}; \kappa^2\right) \quad (35-2-4)$$

جمع روی c هم به شکل تحلیلی قابل انجام هست. در حالت $\mu = 0$ از تعریف S در رابطه $(30-2-4)$ می توانیم بفهمیم که $S(0, 0, c)$ تابع حسابی اویلر است ^{۱۰} و جمع به شکل استانداردی انجام می شود.

$$\sum_{c=1}^{\infty} c^{-\frac{1}{2}(m+s)} S(0, 0; c) = \sum_{c>0} c^{-\frac{1}{2}(m+s)} \phi(c) = \frac{\zeta(2(m+s)-1)}{\zeta(2(m+s))} \quad (36-2-4)$$

برای انجام جمع بالا، از خاصیت اساسی تابع حسابی اویلر استفاده می کنیم.

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

برای محاسبه جمع $\zeta(\sigma) = \sum_n n^{-\sigma}$ ، طرفین را در تابع زتا $\zeta(\sigma)$ ضرب می کنیم و محاسبه را دنبال می کنیم.

$$\zeta(\sigma) \sum_{c=1}^{\infty} c^{-\sigma} \phi(c) = \sum_{n,c=1}^{\infty} (nc)^{-\sigma} \phi(c) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\sigma} \sum_{c|m} \phi(c) \quad (37-2-4) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} m^{1-\sigma} = \zeta(\sigma - 1)$$

با قراردادن $(s+m)\sigma = 2$ به نتیجه هی دلخواه می رسیم.

برای $\mu = \pm 1$ ، جمع سری کلوسترمن ، حالت خاصی از چیزی است که تحت عنون سری رامانوجان می شناسیم.

$$S(\hat{n}, \cdot; c) = \sum_{d \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^*} e^{\frac{1}{2}\pi i d/c} = \mu(c) \quad (38-2-4)$$

^{۱۰} تابع حسابی اویلر یا $(m)\phi$ ، تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از m که نسبت به آن اول هستند را می شمارند.

که $(c)\mu$ تابع موبیوس است^{۱۱}. جمع روی c هم به شکل زیر انجام می‌گیرد.

$$\sum_{c=1}^{\infty} c^{-\frac{1}{2}(s+m)} S(\cdot, \pm 1; c) = \sum_{c=1}^{\infty} c^{-\frac{1}{2}(s+m)} \mu(c) = \frac{1}{\zeta(\frac{1}{2}(s+m))} \quad (39-2-4)$$

این جمع هم مشابه جمع حالت $\mu = 0$ است و فقط نیاز است که از خاصیت $\delta_{n,1}$ استفاده کنیم و مشابه کادر مشکی رنگ قبلی، این عبارت را در تابع زتا ریمان ضرب کنیم.

ادغام کردن تمامی نتایج بالا، قسمت مستقل از x در سری (31-2-4) را می‌دهد.

$$E.(s, \kappa, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(s, \kappa, \mu) y^{1-m-s} \quad (40-2-4)$$

که ثوابت مستقل از x و y ، یعنی $w_m(s, k, \mu)$ از روابط زیر داده می‌شوند.

$$w_m(1/2, \kappa, \cdot) = \frac{2^m \pi^{m+1/2} \zeta(2m)}{m \Gamma(m + 1/2) \zeta(2m + 1)} \kappa^m \quad (41-2-4)$$

حالا به سراغ رفتار $\frac{1}{2}$ در انتگرال و $\zeta(2s)$ در جمع، هر دو در $\frac{1}{2} = s$ قطب ساده‌دارندو در حد $\frac{1}{2} \rightarrow s$ نسبت $\frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\zeta(2s)}$ به عدد ۲ میل می‌کند. پس از ساده‌سازی جبری، تمامی عوامل ساده می‌شوند و به

$$E.(s, \kappa, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(s, \kappa, \mu) y^{1-m-s} \quad (42-2-4)$$

می‌رسیم.

در حالت $\mu = \pm 1$ و $m = 0$ بازهم به این دو عامل $\Gamma(s - \frac{1}{2})$ و $\zeta(2s)$ می‌خوریم و با ساده‌سازی‌هایی مشابه بالا، به عبارت زیر می‌رسیم.

$$E.(1/2, \kappa, \pm 1) = 2y^{1/2} + \mathcal{O}(y^{-1/2}) \quad (43-2-4)$$

باجایگذاری در (31-2-4) می‌بینیم که

$$E(\kappa, \cdot) = y^{1/2} \exp(2\pi\kappa y) - y^{1/2} + \mathcal{O}(y^{-1/2}) \quad (44-2-4)$$

هم‌چنین، به طور مشابه برای $\mu = \pm 1$ می‌بینیم که

$$E(\kappa, \pm 1) = y^{1/2} \exp(2\pi(\kappa y \pm ix)) + 2y^{1/2} + \mathcal{O}(y^{-1/2}) \quad (45-2-4)$$

^{۱۱}تابع موبیوس برای عدد صحیح n مقدار صفر را می‌دهد اگر در تجزیه‌ی آن به اعداد اول، نمایه‌ای مکرر داشته باشیم و مقدار $(-1)^k$ را برمی‌گرداند اگر در تجزیه‌ی اول این عدد، دقیقاً k عامل اول متمایز با نمای واحد داشته باشیم.

در اين مرحله، اگر تابع پارش را با جملات اول^{۱۲} $(45-2-4)$ و $(43-2-4)$ حساب کنيم، تابع پارش به همان $Z_{0,1}$ تقليل مي يابد. بنابراین برای يافتن اولین تصحیحات، هر دو جمله را کامل در نظر مي گيريم تا برسیم به

$$Z = Z_{0,1} + \frac{1}{|\eta|^2} (-6 + \mathcal{O}(y^{-1})) \quad (46-2-4)$$

تعبيير اين رابطه کمي عجيب است! اين تابع پارش مي گويد که تا انرژي $\frac{1}{2}$ ، (که اندکي کمتر از انرژي سياه چاله هاي کلاسيکي است)، غالب طيف مثل طيف بدست آمده مدهاي برانگيخته اي مرزي Brown-Henneaux است. اما ورای اين انرژي، تبهگي حالات انرژي منفي شش است^{۱۲}. منفي شدن چگالي حالات نشانه خوبی نیست. اشكال ديگري هم هست! از روند استدلال بالا مي توانيم بفهميم که تصحیحات با توان $\frac{1}{y}$ داده مي شوند و نه با جملات نمائي! اين برخلاف تعبيير ما از تابع پارش و دوگان بودن آن با يك سامانه کوانتومي است؛ چون انتظار داشتيم که بتوانيم تابع پارش کامل را به شكل $\text{Tr}(\exp(-\beta H))$ بنويسيم. بنابراین به نتيجه هاي اصلی زير مي رسیم.

جمع سهم هاي شناخته شده در تابع پارش گرانش سه بعدی خالص مجانباً پاددوسيته، از لحاظ فيزيکي معنadar نیست.

خوب است که نگاهي هم به سایر جملات برحسب $\frac{1}{y}$ بياندازيم تا مطمئن تر شويم. برخلاف حالت $m = 0$ در حالت $m \neq 0$ به هيچ قطبی نخواهيم خورد و محاسبات سرراست تر خواهد بود.

برای $\mu = w_m$ تابع را به شكل زير پيدا مي کنيم.

$$w_m(1/2, \kappa, 0) = \frac{2^m \pi^{m+1/2} \zeta(2m)}{m \Gamma(m+1/2) \zeta(2m+1)} \kappa^m \quad (47-2-4)$$

پس جملات مرتبه بعدی سري پوانکاره به شكل زيرند.

$(48-2-4)$

$$E.(1/2, \kappa, 0) = -y^{1/2} + \left(\frac{2\pi^3}{3\zeta(3)} \kappa \right) y^{-1/2} + \left(\frac{4\pi^6}{135\zeta(5)} \kappa^2 \right) y^{-3/2} + \mathcal{O}(y^{-5/2})$$

اما محاسبه $I_{m,\pm 1} = \int y^{\pm 1} w_m(y) dy$ به بسط توابع Hypergeometric دارد. مي بینيم که انتگرال هاي $I_{m,\pm 1}$ به شكل زير ساده مي شود.

$$I_{m,\pm 1} = \frac{2\pi^{m+1/2}}{m \Gamma(m+1/2)} T_m(\kappa) \quad (49-2-4)$$

^{۱۲} مي دانيم که ضريب عامل نمائي، دقیقا همان تبهگي حالات انرژي است.

که T_m چندجمله‌ای چبیشف نوع اول است؛ و ضرایب ظاهر شده به شکل زیرند.

$$w_m(1/2, \kappa, \pm 1/2) = \frac{2\pi^{m+1/2}}{m\Gamma(m+1/2)\zeta(2m+1)} T_m(\kappa) \quad (50-2-4)$$

این به ما، جمله‌ی E . را به شکل زیر می‌دهد.

$$(51-2-4)$$

$$E.(1/2, \kappa, \pm 1) = 2y^{1/2} + \left(\frac{4\pi}{\zeta(3)}\kappa\right)y^{-1/2} + \left(\frac{4\pi^3}{3\zeta(5)}(2\kappa^2 - 1)\right)y^{-3/2} + \mathcal{O}(y^{-5/2}).$$

که در نهایت

$$(52-2-4)$$

$$E(\kappa, \cdot) = y^{1/2} \exp(2\pi\kappa y) - y^{1/2} + \left(\frac{2\pi^3}{3\zeta(3)}\kappa\right)y^{-1/2} + \left(\frac{4\pi^5}{135\zeta(5)}\kappa^2\right)y^{-3/2} + \mathcal{O}(y^{-5/2})$$

و

$$(53-2-4)$$

$$E(\kappa, \pm 1) = y^{1/2} \exp(2\pi(\kappa y \pm ix)) + 2y^{1/2} + \left(\frac{4\pi}{\zeta(3)}\kappa\right)y^{-1/2} + \left(\frac{4\pi^3}{3\zeta(5)}(2\kappa^2 - 1)\right)y^{-3/2} + \mathcal{O}(y^{-5/2})$$

با قراردادن تمامی این‌ها در (۳۱-۲-۴) و می‌توانیم تصحیحات جدید به تابع پارش را پیدا کنیم.

$$(54-2-4)$$

$$\begin{aligned} Z = Z_{\cdot, 1} + \frac{1}{|\eta|^2} \left(-6 + \frac{(\pi^3 - 6\pi)(11 + 24k)}{9\zeta(3)} y^{-1} \right. \\ \left. + \frac{5(53\pi^6 - 882\pi^2) + 528(\pi^6 - 90\pi^3)k + 576(\pi^6 - 90\pi^3)k^2}{2430\zeta(5)} y^{-2} + \mathcal{O}(y^{-3}) \right) \end{aligned}$$

این‌جا می‌توانیم دو نتیجه‌ی دیگر بگیریم. اولاً صفر نشدن تصحیحات به ما اطمینان می‌دهند که تابع پارش را نمی‌توان به شکل نمایی نوشت، چون تصحیحات به شکل نمایی در عکس y است. ثانياً، ضرایب اگرچه مثبت هستند، اما صحیح نیستند و تعبیر چگالی حالات را از آن‌ها داشته باشیم (از نظریه میدان‌همدیس دوگان انتظار داشتیم که این ضرایب طبیعی باشند).

$$\hat{n} \neq 0 \quad 4-2-4$$

حالا وقتِ ادامه دادن محاسبات برای مدهای فوریه‌ی ناصرف هست. برای $\mu = 0$ ، حاصل جمع (۳۳-۲-۴)، تابع بسل است و جمع کلوسترمن در (۳۲-۲-۴) هم به جمع رامانوجان است. با تحلیلی

کاملاً مشابه با قسمت قبل (تنها با این تفاوت که در $\frac{1}{\ell} = s$ قطبی در کار نخواهد بود) ، می‌توانیم به مدهای $E_{\hat{n}}$ بررسیم.

(۵۵-۲-۴)

$$E_{\hat{n}}(1/2, k, \cdot) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{3/2} \pi^{m+1} |\hat{n}|^m}{m! \Gamma(m + 1/2) \zeta(2m + 1)} \left(\sum_{\delta|\hat{n}} \delta^{-2m} \right) \sqrt{y} K_m(2\pi |\hat{n}| y)$$

اما متأسفانه برای $\mu \neq 0$ به طور تحلیلی قابل بررسی نیست. مسئله‌ای نیست که انتگرال‌های (۳۳-۲-۴) قابل حل نیستند؛ اتفاقاً برحسب جمعی از توابع بسل نوشته می‌شوند. مسئله این است که وقتی $\mu \neq 0$ جمع (۳۲-۲-۴) به شکل تحلیلی قابل انجام نیست. اگرچه می‌دانیم که این جمع باید تابعی مختلط با قطب ساده روی صفحه‌ی مختلط s باشد و ارتباط‌هایی بین این نوع جمع‌ها و تابع زتای سلبرگ هست؛ اما نمی‌توانیم تحلیلی این حاصل را پیدا کنیم.

۳-۴ تحلیل پیشامدهای احتمالی

تا الان، جمع سهم‌های شناخته شده به تابع پارش را شناختیم و در آن مشکلاتی دیدیم. حالا مقصود ما این است که نتایج را طور خاصی تفسیر کنیم. اولین چیزی که به ذهن می‌رسد این است که محاسبات انجام شده در بالا را وحی منزل تلقی کنیم و صحبت آن را معیار تفسیرمان بدانیم. این دیدگاه نتیجه‌اش این است که گرانش کوانتومی سه بعدی اصلاً وجود ندارد و برای خودسازگاری نظریه‌ی گرانش سه بعدی حتماً لازم است با افزودن درجات آزادی جدید، مثل میدان‌های مادی، طیف را اصلاح کنیم تا نقايس بالا برطرف شود. یک احتمال دیگر آن است که شاید برخی سهم‌های ناشناخته باشند که اگر در محاسبه‌ی تابع پارش وارد بشوند، بتوانند مشکلات را حل کنند.

۱-۳-۴ پیشامد اول: ریسمان‌های کیهانی

مدل‌های خودسازگار شناخته شده‌ای از گرانش سه بعدی هستند که از نظریه‌ی ریسمان بدست می‌آیند؛ مثلاً یک مدل خاص و معروف، از نظریه‌ی ریسمان نوع IIB روی $X \times S^3 \times AdS_3$ می‌آید که در آن خمینه‌ی X یا سطح $K3$ است یا T^4 .

در این مدل‌ها، نسبت بی بعد $\frac{\ell}{\sqrt{G}}$ گستته است به خاطر شارهایی که در روند فشرده‌سازی

انتخاب می شوند^{۱۳}. می توان در نظریه ریسمان دیواره هایی هم گذاشت که با غشاها بهم پیچیده در نظریه ایجاد می شوند.

در سه بعد (یعنی $2+1$)، غشاها ($1+1$) بعدی هستند و به چشم ریسمان های کیهانی (خطی گسترده در فضازمان) قابل بررسی هستند.

از آنجایی که مدل های سازگار گرانش سه بعدی دارای چنین ریسمان های کیهانی هستند، شاید افزودن این اشیای هندسی به مدل ما، مسئله را حل کند.

۲-۳-۴ پیشامد دوم: جمع روی دو هندسه

سناریوی بالا، کاملاً حدس است و پشتونه ای برای صحت آن نداریم. حالا یک سناریوی دیگر را مطرح می کنیم و سعی می کنیم آن را توجیه کنیم.

برای بیان انگیزه مان، اول به رابطه^(۴) (۲-۲-۴) که کنش کلاسیک فضازمان_{۱,۰} است نگاه می کنیم. به طور صریح، سهم این فضازمان به تابع پارش به شکل $q^{-k}\bar{q}^{-k} \exp(I) = q^{-k}\bar{q}^{-k}$ می دهد. اگر خوب دقت کنیم، این تابع به شکل ضرب یک تابع تمام ریخت در یک تابع پادتمام ریخت است. افزودن تصحیحات تک حلقه، همچنین این این فرم را حفظ می کند و داریم

$$Z_{+,1} = F_k(q)F_k(\bar{q}) \quad (1-3-4)$$

که

$$F_k(q) = q^{-k} \prod_{n=2}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \quad (2-3-4)$$

این فاکتور شدن برای تمامی سهم های کلاسیک به تابع پارش برقرار است (برای مثال های بیشتر به [۵۷] نگاهی کنید).

توصیف گرانش سه بعدی بر حسب نظریه های پیمانه ای، دلیل روشنی از این فاکتور شدن به ماه می دهد. چون در فرمول بندی Chern-Simons ، گروه پیمانه ای $\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{SL}(2, \mathbb{R})$ و نظریه ی گرانشی، معادل با دو تئوری Chern-Simons با کنش های جدا شده است؛ در نتیجه، در سطح تابع پارش، این فاکتور شدن پارامترهای خشتش مشاهده می شود.

^{۱۳} این را با اعمال قضیه^c زومولوچیکف به نظریه ی میدان همدیس دوگان روی مرز هم می شود دید.

در [۷۸] پیشنهاد شده که تابع پارش گرانش سه بعدی خالص، به شکل تمام ریخت تجزیه می شود. همچنین اگر طیف Brown-Henneaux برای انرژی پایین برقرار باشد، آنگاه تابع پارش گرانش سه بعدی، علی الاصول، می تواند به طور یکتا مشخص شود. همچنین مشاهده شده است که دسته‌ی خاصی از نظریه‌ی میدان‌های همدیس هستند که طیف‌شان در انرژی پایین با گرانش سه بعدی مشابه‌ت دارد. این نظریه‌های میدان، نظریه‌های میدان همدیس اکسترمال نامیده می شوند. مشاهده‌ی دیگری که ارتباط بین این دو را غنی‌تر می کند؛ این است که تابع پارش نظریه‌ی میدان‌های همدیس اکسترمال روی روابط ریمانی $\tau = g$ به طور یکتا تعیین می شوند. هر چند شواهدی هم بر علیه این که نظریه‌های همدیس اکسترمال دوگان گرانش سه بعدی باشند، وجود دارد.

حالا باید وضعیت این فاکتور شدن را، وقتی روی هندسه‌های کلاسیک جمع می‌بندیم، نگاه کنیم. به هر عضو $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ یک فضازمان کلاسیک $M_{c,d}$ نسبت دادیم و کنش مربوط به این هندسه‌های کلاسیک، با اعمال تبدیل خشتی روی کنش $M_{0,1}$ پیدا می شود.

$$I_\gamma(\tau) = 2\pi ik(\gamma\tau - \bar{\gamma}\bar{\tau}) \quad (3-3-4)$$

که

$$\begin{aligned} \gamma &\mapsto \gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \\ \bar{\gamma} &\mapsto \bar{\gamma}\bar{\tau} = \frac{a\bar{\tau} + b}{c\bar{\tau} + d} \end{aligned} \quad (4-3-4)$$

درنهایت تابع پارش به شکل

$$Z_{c,d} = F_k(q)|_\gamma F_k(\bar{q})|_\gamma \quad (5-3-4)$$

است و مثل $Z_{0,1}$ تجزیه تمام ریخت می شود.

اما مشکل اینجاست که وقتی روی هندسه‌ها جمع می‌زنیم (\sum_γ)، این تجزیه‌ی تمام ریخت از بین می‌رود.

$$Z = \sum_{\gamma \in W} F_k(q)|_\gamma F_k(\bar{q})|_\gamma \quad (6-3-4)$$

(اینجا W زیرگروهی است که با $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ هم ریخت است و \mathbb{Z} زیرگروهی است که نمایانگر ماتریس‌های بالا مثالی است.)

اگرچه هر جمله از این جمع، ناوردای خشتی است، اما مطمئناً تجزیه‌ی تمام ریخت ندارد. چه می‌توان کرد که این تجزیه احیا شود؟ کاری که باید انجام دهیم، از روی شکل رابطه‌ی (۶-۳-۴) خیلی طبیعی است؛ اما باید دید که این کار در چارچوب گرانش سه بعدی معنای درستی دارد؟

اگر به شکل خیلی فرمال، جمع روی هندسه‌های مختلف را برای قسمت‌های تمام ریخت و پادتمام ریخت بشکنیم و تابع پارش تعمیم یافته‌ی زیر را تعریف کنیم.

$$\hat{Z} = \sum_{\gamma, \gamma' \in W} F_k(q)|_{\gamma} F_k(\bar{q})|_{\gamma'} \quad (7-3-4)$$

آن‌گاه به شکل واضحی، تجزیه‌شدن تمام ریخت مشاهده می‌شود. چون می‌توان این جمع را جدا کرد.

$$\hat{Z} = \left(\sum_{\gamma \in W} F_k(q)|_{\gamma} \right) \left(\sum_{\gamma' \in W} F_k(\bar{q})|_{\gamma'} \right) \quad (8-3-4)$$

حالا سوال این است که چطور این جمع جدید رو هندسه‌ها را توجیه کنیم؟ کنش کلاسیکی مرتبط به یک جمله در (۸-۳-۴) چیست؟ به سادگی، کنش کلاسیکی‌ای که چنین جمله‌ای در تابع پارش تولید می‌کند، با یک جفت γ و γ' داده می‌شود و به این شکل است.

$$I_{\gamma, \gamma'} = 2\pi i (\gamma\tau - \gamma'\bar{\tau}) \quad (9-3-4)$$

اما اگر $\gamma' \neq \gamma$ این رابطه، مقدارش حقیقی نیست و نمی‌تواند از یک جواب فضازمانی حقیقی آمده باشد. پس، راهِ خوب تفسیر این نتیجه این است که آن را به عنوان کنش روی یک جواب مخلوط از معادله‌ی اینشتین نگاه کنیم. همانطور که در بخش‌های قبلتر دیدیم، اصلاً راهی در دستمان نداریم که سهم فضازمان‌هایی که جواب کلاسیک معادله‌ی اینشتین نیستند، در انتگرال مسیر حساب کنیم. پس در نظر نگرفتن خمینه‌هایی که جواب کلاسیک نیستند، ممکن است برایمان دردرساز شده باشد.

یک راه اولیه برای این‌که در همین چارچوب محاسباتمان را توسعه دهیم، این است که به نسخه‌ی مخلوط معادله‌ی اینشتین نگاه کنیم^{۱۴}. با در دست داشتن چنین جواب‌هایی، می‌توانیم به به نظریه‌ی اختلال حول این متریک‌ها نگاه کنیم تا بینیم چیز جدید عایدمان می‌شود؟ اما متأسفانه تابه‌حال نتوانسته‌ایم یک خانواده از جوابهای معادله‌ی اینشتین مخلوط پیدا کنیم.

^{۱۴} که همان معادلات اینشتین $-R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ است، با این تفاوت که اجازه می‌هیم که $g_{\mu\nu}$ مخلوط هم بشود.

۳-۳-۴ ”دیدن“ هندسه‌های غیرکلاسیک

می‌توانیم استدلالی داشته باشیم که اثر سهم‌های غیرکلاسیک را بهتر درک کنیم و بفهمیم که آیا ممکن است به سهم‌های کلاسیک فائق آیند؟ در حد $\infty \rightarrow \ell/G \propto k$ و پارامتر خشتش ثابت، تابع پارش را نگاه می‌کنیم. اول تابع پارش عادی که در (۲-۴) بدست آمد را بررسی می‌کنیم و سپس به \hat{Z} که تابع پارش تعمیم‌یافته است، نگاه می‌کنیم. در حد کلاسیک $\infty \rightarrow k$ ، جمع روی هندسه‌ها، هندسه‌ای غالب است که بیشترین مقدار کنش کلاسیک را دارد. یعنی باید γ ای را انتخاب کنیم که

$$I_\gamma = 2\pi i(\gamma\tau - \gamma\bar{\tau}) \quad (10-3-4)$$

را کمینه کند. این معادله را به شکل

$$I_\gamma = \operatorname{Re} (2\pi i\gamma\tau) = \operatorname{Re} (-2\pi i\gamma\bar{\tau}) \quad (11-3-4)$$

هم می‌توانیم بنویسیم.

برای انتخاب τ در ناحیه‌های خاصی، مثل $1 < |\tau| < \frac{1}{2}$ و $|\operatorname{Re}\tau| < |\tau|$ ، هندسه‌ی $M_{1,1}$ بر سایر هندسه‌های کلاسیک می‌چربد. در طول قوس $1 = |\operatorname{Re}\tau| < \frac{1}{2} < |\tau|$ ، یک گذار فاز رخ می‌دهد که به گذار فاز هاوکینگ-پیج معروف است؛ در ورای این خم، سهم $M_{1,0}$ که سیاهچاله‌ی اقلیدسی BTZ است، غالب است.

حالا تحلیل را برای \hat{Z} تکرار می‌کنیم. چیزی که دوست داریم کمینه کنیم، قسمت حقیقی کنش است.

$$(12-3-4)$$

$$\operatorname{Re} I_{\gamma,\gamma'} = \operatorname{Re} (2\pi i(\gamma\tau - \gamma'\bar{\tau})) = \operatorname{Re} (2\pi i\gamma\tau) + \operatorname{Re} (-2\pi i\gamma'\bar{\tau}) = \operatorname{Re} (2\pi i\gamma\tau) + \operatorname{Re} (2\pi i\gamma'\tau)$$

کمینه همواره در $\gamma' = \gamma$ رخ می‌دهد و با کمک

$$\operatorname{Re} I_{\gamma,\gamma'} = \frac{1}{2} (I_\gamma(\tau) + I_{\gamma'}(\tau)) \quad (13-3-4)$$

هرچه کمینه‌ی I_x نسبت به x است، کمینه‌ی $I_{\gamma,\gamma'}(\tau)$ در $x = \gamma = \gamma'$ است. نتیجه‌ی نهایی این است که حتی اگر جواب‌های غیرکلاسیک سهیم باشند و تابع پارش را تصحیح کند، در حد نیمه‌کلاسیک، تابع پارش با سهم‌های کلاسیک غالب است. پس در حد نیمه‌کلاسیک، سهم‌های غیرکلاسیکی ظاهر نمی‌شوند.

برای دیدن سهمهای غیر کلاسیک، باید به سراغ کمیتی غیر از تابع پارش برویم و یا مشاهداتمان را ورای حد نیمه کلاسیک می بریم.

۴-۴ آنتروپی سیاهچاله و تصحیحات واردہ به آن

در این بخش، به سراغ پیامدهای بخش‌های قبلی برای آنتروپی سیاهچاله می‌رویم. همانطور که در بخش‌های قبلی گفته شد، هندسه‌ی $M_{,1}$ نامیدیم، توسعه‌ی اقلیدسی هندسه‌ی سیاهچاله‌ی BTZ بود. پارامتر خشتشی τ ، به دمای هاوکینگ β^{-1} و پتانسیل زاویه‌ای θ سیاهچاله مرتبط است؛ به شکل $\tau = \theta + i\beta$.

تابع پارش این سهم با اعمال تبدیل خشتی $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ به عبارت (۲-۴-۲) پیدا می‌شود و به شکل پایین هست.

$$Z_{1,\cdot} = \mathcal{Z}(\tau)\bar{\mathcal{Z}}(\bar{\tau}) \quad (1-4-4)$$

که قسمت تمام ریخت آن به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{Z}(\tau) = \frac{q_-^{-(k-1/24)}(1-q_-)}{\eta(-1/\tau)} \quad (2-4-4)$$

که $q_- = e^{-\frac{\pi i}{\tau}}$. حالا $\mathcal{Z}(\tau)$ را به شکل زیر تجزیه می‌کنیم.

$$\mathcal{Z}(\tau) = \sum_{\Delta=-k}^{\infty} C_{\Delta} q_-^{\Delta} \quad (3-4-4)$$

که ضرایب C_{Δ} به شکل زیرند.

$$C_{\Delta} = p(\Delta' + k) - p(\Delta' + k - 1) \quad (4-4-4)$$

و $p(N)$ تعداد پارتیشن‌های عدد طبیعی N را مشخص می‌کند. این روابط تصحیحات کوانتمی به خواص ترمودینامیکی سیاهچاله‌ی BTZ را مشخص می‌کند. این تابع پارش در هنگرد کانونی است و از رابطه‌ی زیر می‌توانیم آنتروپی سیاهچاله را پیدا کنیم.

$$S(\beta, \theta) = \log Z_{1,\cdot} - \beta Z_{1,\cdot}^{-1} \frac{\partial Z_{1,\cdot}}{\partial \beta} \quad (5-4-4)$$

اما به خاطر مقاصد ما که قیاس با پیش‌بینی‌های نظریه‌ی میدان هم‌دیس است. خیلی خوب است که آنتروپی را در هنگرد میکروکانونی حساب کنیم؛ که تعداد حالات $N(M, J)$ را در جرم M و تکانه‌زاویه‌ای J ثابت می‌شمارد.

می‌دانیم که جرم و تکانه‌ی زایه‌ای به شکل زیر به بعد هم‌دیس مرتبط هستند.

$$\begin{aligned} M &= \Delta + \bar{\Delta} \\ J &= \Delta - \bar{\Delta} \end{aligned} \quad (6-4-4)$$

این چگالی حالات، از تابع پارش $\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau})$ و با کمک تبدیل لاپلاس معکوس بدست می‌آید.

$$N(\Delta, \bar{\Delta}) = \left(\int_{i\epsilon-\infty}^{i\epsilon+\infty} d\tau \right) \left(\int_{i\epsilon-\infty}^{i\epsilon+\infty} d\bar{\tau} \right) q^{-\Delta} \bar{q}^{-\bar{\Delta}} Z_{1,0}(\tau, \bar{\tau}) \quad (7-4-4)$$

این همان تبدیل لاپلاسی است که وقتی از هنگرد کانونی به هنگرد میکروکانونی می‌رویم، مشاهده می‌کنیم. آنتروپی در هنگرد میکروکانونی هم از رابطه‌ی شانون

$$S(\Delta, \bar{\Delta}) = \log N(\Delta, \bar{\Delta}) \quad (8-4-4)$$

حاصل می‌شود.

چون تابع پارش تجزیه‌ی تمام‌ریخت دارد، پس همین اتفاق هم برای N ، یعنی چگالی حالات می‌افتد.

$$N(\Delta, \bar{\Delta}) = \mathcal{N}(\Delta)\mathcal{N}(\bar{\Delta}), \quad S(\Delta, \bar{\Delta}) = \mathcal{S}(\Delta) + \mathcal{S}(\bar{\Delta})$$

که

$$\mathcal{N}(\Delta) = \int_{i\epsilon-\infty}^{i\epsilon+\infty} d\tau q^{-\Delta} \mathcal{Z}(\tau) \quad (9-4-4)$$

اگر از بسط (۳-۴-۴) استفاده کنیم، در می‌یابیم که

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\Delta) &= \sum_{\Delta'=-k}^{\infty} C_{\Delta} \int_{i\epsilon-\infty}^{i\epsilon+\infty} d\tau q^{-\Delta} q_{-}^{\Delta'} \\ &= \sum_{\Delta'=-k}^{\infty} C_{\Delta} \int_{i\epsilon-\infty}^{i\epsilon+\infty} d\tau \exp \left\{ -2\pi i \left(\Delta\tau + \frac{\Delta'}{\tau} \right) \right\} \end{aligned} \quad (10-4-4)$$

این انتگرال شبیه یکی از نمایش‌های کانتوری تابع پسل است.

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint t^{-1} e^{(z/2)(t+t^{-1})} dt \quad (11-4-4)$$

که کانتور \mathcal{C} حول مبدا پاد ساعتگرد می‌چرخد. (با تبدیل $t \rightarrow z \rightarrow 4\pi\sqrt{-\Delta\Delta'}$ و جاگذاری Δ' به Δ انتگرال $(10-4)$ می‌رسیم.) آنتروپی در هنگرد میکروکانونی به این فرم است.

$$\mathcal{N}(\Delta) = e^{\mathcal{S}(\Delta)} = 2\pi \sum_{\Delta'=-k}^{\infty} C_{\Delta'} \sqrt{\frac{-\Delta'}{\Delta}} I_1(4\pi\sqrt{-\Delta\Delta'}) \quad (12-4-4)$$

در حد نیمه کلاسیک، این رابطه با $= -k = \Delta'$ غالب است و با استفاده از فرم مجانبی تابع بسل، در می‌یابیم که

$$\mathcal{S}(\Delta) = \log \mathcal{N}(\Delta) = 4\pi\sqrt{k\Delta} + \frac{1}{4}\log k - \frac{3}{4}\log \Delta - \frac{1}{2}\log 2 + \dots \quad (13-4-4)$$

در این رابطه، جمله‌ی اول همان جمله‌ی معروف Bekenstein-Hawking یعنی سطح سیاه‌چاله‌ی BTZ است. سایر جملات هم تصحیحات لگاریتمی هستند که معمولاً در هنگرد میکروکانونی ظاهر می‌شوند. [۱۹]

فصل ۵

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، مدل‌های گرانشی در ابعاد پایین (دو و سه) مورد بررسی قرار گرفته‌اند تا به درک عمیق‌تری از ویژگی‌های کوانتمی گرانش برسیم. این مدل‌ها به دلیل سادگی نسبی‌شان، به عنوان بستری مناسب برای آزمایش ایده‌های بنیادی و تقارن‌ها در گرانش کوانتمی عمل می‌کنند. ما به طور ویژه مدل JT را مورد مطالعه قرار دادیم که یکی از مدل‌های مهم و حل‌پذیر در گرانش دو بعدی است و به ما امکان می‌دهد تا برخی از مفاهیم پیچیده گرانش کوانتمی را به زبان ساده‌تری تحلیل کنیم.

همچنین، تقارن‌های مجانبی در گرانش سه‌بعدی مورد توجه قرار گرفتند. با مطالعه این تقارن‌ها، توانستیم درس‌هایی درباره ساختار فضای سه‌بعدی و چگونگی رفتار گرانش کوانتمی در آن بیاموزیم و همچنین ارتباطات عمیقی با نظریه‌های پیمانه‌ای پیدا کردیم. این یافته‌ها به ما کمک می‌کنند تا دید بهتری از چگونگی انتقال نتایج و ویژگی‌های گرانشی از ابعاد پایین به ابعاد بالاتر به دست آوریم.

در آینده، بررسی دقیق‌تر ارتباط میان مدل‌های گرانش در ابعاد پایین و ویژگی‌های گرانش کوانتمی در ابعاد بالاتر اهمیت ویژه‌ای دارد. به‌ویژه، درک نحوه ظهر پدیده‌های چهار بعدی مانند سیاه‌چاله‌ها و اطلاعات کوانتمی در مدل‌های ساده‌تر می‌تواند مسیر را برای نظریه‌ای جامع‌تر هموار کند. همچنین، مطالعه دقیق‌تر روی ویژگی‌های انتروپی و نقش تقارن‌های مجانبی در گرانش پایین بعد برای درک مسائل مرتبط با اطلاعات در گرانش کوانتمی و تمام‌نگاری، کلیدوازه‌هایی برای پژوهش‌های آینده خواهد بود.

به طور خاص، این مسائل قابل پیگیری هستند:

۱. آیا گرانش سه‌بعدی خالص معنادار هست یا نه؟ دوگان همدیس به این نظریه چه نظریه‌میدانی

هست؟

۲. چه ویژگی‌هایی از گرانش بعد پایین جهان‌شمول هستند و می‌توانیم آنها را در ابعاد بالاتر انتظارشان را داشته باشیم؟

۳. آیا در مدل‌های بعد پایین‌تر که نظریه‌ی گرانش کوانتومی خوش‌رفتار و قابل‌کنترل هست، می‌توانیم تصویرِ تمام‌نگاری درستی برای فضازمان‌های مجانباً تخت و دوسیته تعریف کنیم و از آن‌ها برای فضازمان‌های بعد بالاتر استفاده کنیم؟

پیوست آ

پیشنهادهایی برای بهتر خواندن این پایان نامه

اگرچه سعی من بر این بوده که تا حد ممکن نگارش این تز خودخوان باشد، اما در این ضمیمه‌ی کوچک، پیش‌نیازهای اصلی فیزیکی و ریاضی برای خواندن این تز را بیان می‌کنم.

- درس «اطلاعات کوانتمی و سیاه‌چاله‌ها» از توماس هارتمن در دانشگاه کرنل [۸۰].
- پیش‌نیازهای هندسی این پایان نامه به سادگی ضمیمه‌های کتاب «مقدمه‌ای بر نسبیت عام» از شان کروول هستند [۸۱].
- مفاهیم ریاضیاتی را می‌توانید به طور کامل‌تر از فصل‌های مقدماتی کتاب ریاضی فیزیک پیشرفت‌هی ناکاهارا نگاه کنید. [۸۲] همچنین در صورت نیاز به یکنواخت‌سازی سطوح ریمانی، فصل‌های پایانی این کتاب و دانشنامه‌های اینترنتی منابع کامل و مناسبی هستند.
- برای آشنایی بهتر با نظریه‌های پیمانه‌ای هم می‌توانید به کتاب «میدان‌های پیمانه‌ای، گره‌ها و گرانش» رجوع کنید [۸۳].

پیوست ب

مقدمات ریاضی

در این ضمیمه‌ی فوق‌العاده فشرده، به بررسی پیش‌نیازهای لازم برای فهم ساختارهای غنی گرانش سه‌بعدی و فضای فاز آن می‌پردازیم. این‌باخش، تا حدی دانش هندسه‌دیفرانسیل و هندسه‌ی خمینه‌ها را پیش‌فرض می‌گیرد.

ب-۱ گروه و جبر لی

گروه‌لی، گروهی پیوسته چون G است که ساختار یک خمینه را دارد و نگاشت‌های ضرب و وارون این گروه، هموار هستند. به طور خاص، نگاشت‌های ضرب از چپ و راست

$$\begin{cases} g \mapsto L_f(g) = fg \\ g \mapsto R_f(g) = gf \end{cases} \quad (\text{ب-۱})$$

یک وابسانی از گروه‌لی G به خودش هستند. عضو خنثی این گروه را با e و اعضای نوعی این گروه را با حروف انگلیسی f, g نشان می‌دهیم.

تعريف ۱. میدان برداری^۱ روی خمینه‌ی G ، یک میدان برداری چپ-ناوردا نامیده می‌شود، اگر برای تمامی $f \in G$ داشته باشیم: $\xi = (L_f)_* \xi$.^۱

^۱ نگاشت‌دیفرانسیل یک نگاشت هموار $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ در نقطه‌ی $p \in \mathcal{M}$ ، نگاشتی چون $F_{*p} : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)} \mathcal{N}$

به کمک نگاشت ضرب از چپ، می‌توان دید که هر میدان برداری چپ-ناوردا را می‌توان به شکل $X \in T_e G$ نوشت که $(L_g)_{*e} X = (\xi_g)_e$ برداری در فضای هم‌ماس عضو خنثی است. بنابراین تمام میدان‌های برداری چپ-ناوردا (که در سرتاسر خمینه تعریف شده‌اند)، یکسان با فضای هم‌ماس عضو بدیهی هستند. پس از این به بعد، یک میدان برداری چپ-ناوردا دلخواه روی G را از فضای هم‌ماس عضو بدیهی به شکل $(\xi_X)_g \equiv (L_g)_{*e} X$ می‌سازیم.

تعریف ۲. جبر لی گروه G ، فضای برداری $T_e G = \mathfrak{g}$ است که برای $X, Y \in \mathfrak{g}$ به برآکت زیر مجهر است.

$$[X, Y] \equiv [\xi_X, \xi_Y]_e \quad (ب-۱-۲)$$

در این رابطه، سمت راست همان برآکت عادی میدان‌های برداری روی یک خمینه است.

تبصره ۱. هر هم‌ریختی بین گروه‌های لی $H \rightarrow G$ طوری است که نگاشت دیفرانسیلی F_{*e} ، تعریف شده در نقطه‌ی همانی، یک هم‌ریختی بین جبر لی این دو گروه است.

در فیزیک، وقتی که گروه لی G گروه تقارنی یک نظریه است، اعضای جبر لی به عنوان تقارن‌های بی‌نهایت کوچک (مولد اعضای دلخواه گروه G) دیده می‌شوند و جبر لی در پایه‌ی خاصی مثل $\{t_a\}_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ بررسی می‌شود. برآکت جبر به شکل زیر معرفی می‌شود.

$$[t_a, t_b] = f_{ab}^c t_c$$

به ضرایب $f_{ab}^c \in \mathbb{R}$ ، ثوابت ساختار جبر لی در پایه‌ی $\{t_i\}$ می‌گوییم.

است که به شکل زیر، بردارهای فضای هم‌ماس را به هم می‌نگارد.

$$\mathcal{F} : \dot{\gamma}(0) \mapsto \left. \frac{d}{dt} (\mathcal{F}(\gamma(t))) \right|_{t=0}.$$

که $\gamma(t)$ خمی در خمینه‌ی \mathcal{M} است و $\gamma(0) = p$.

ب-۲ نگاشت نمایی

تعريف ۳. برای $X \in T_e G$ ، خم γ_X را خم انتگرالی مربوط به میدان برداری چپ-ناوردای X باشد. نگاشت نمایی به شکل زیر معرفی می‌شود.

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\mapsto G \\ \exp : x &\mapsto \exp(x) \equiv \gamma_X(1) \end{aligned} \quad (\text{ب-۲})$$

با کمک تعریف مقدماتی خم انتگرال (یعنی $\xi_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t)$) می‌توانیم نشان بدھیم که این تعریف برای گروههای لی ماتریسی، واقعاً به بسط تیلور $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ می‌انجامد. همچنین، چون این نگاشت به کمک شار میدان برداری تعریف شده است، پس انتظار اولیه از تابع نمایی، یعنی $\exp(sX) \exp(tX) = \exp((s+t)X)$ را برآورده می‌کند.

ب-۳ نمایش الحاقی و نمایش هم الحاقی

تعريف ۴. گروه لی G و جبر لی متناظرش \mathfrak{g} را در نظر بگیرید. آنگاه، نمایش الحاقی G ، هم‌ریختی زیر است.

$$\text{Ad} : G \mapsto \text{GL}(\mathfrak{g}) : g \mapsto \text{Ad}_g \quad (\text{ب-۳})$$

که Ad_g یک عملگر خطی روی جبر لی است و به شکل زیر معرفی می‌شود.

$$\text{Ad}_g(X) = \frac{d}{dt} (ge^{tX}g^{-1})|_{t=0}. \quad (\text{ب-۳-۱})$$

این تعریف، برای گروههای لی ماتریسی، به شکل ساده‌ی $\text{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$ تبدیل می‌شود.

تعريف ۵. نمایش الحاقی جبر لی \mathfrak{g} هم به عنوان دیفرانسیل نگاشت Ad_g معرفی می‌شود.

$$\text{ad}_X(Y) = \frac{d}{dt} (\text{Ad}_{e^{tX}}(Y))|_{t=0} = [X, Y] \quad (\text{ب-۳-۲})$$

می‌توانیم دوگان این نمایش‌ها را هم تعریف کنیم. فضای دوگان به فضای برداری \mathfrak{g} را با \mathfrak{g}^* نشان دهید؛ که متشکل از تمامی نگاشتهای خطی $\mathbb{R} \mapsto \mathfrak{g}$ است.

تعريف ۶. نمایش هم‌الحقیقی گروه G ، هم‌ریختی $\text{Ad}^* : G \mapsto GL(\mathfrak{g}^*)$ است که برای تمامی اعضای $X \in \mathfrak{g}$, $p \in \mathfrak{g}^*$ به شکل زیر تعریف شده است.

$$\text{Ad}_f^*(p) \equiv p \circ (\text{Ad}_f)^{-1} \quad (\text{ب}-۳)$$

از این به بعد، به اعضای \mathfrak{g} و \mathfrak{g}^* به ترتیب، بردارهای الحقیقی و هم‌الحقیقی می‌گوییم.

با این تعریف، می‌توانیم فضای \mathfrak{g} را به G -مدارهای مجزا برگ‌بندی کنیم. مجموعه‌ی معرفی شده با $\{ \text{Ad}_g^*(p) \mid g \in G \}$ را مدار هم‌الحقیقی عنصر $p \in \mathfrak{g}^*$ می‌نامیم. این مجموعه یک فضای همگن برای اثر هم‌الحقیقی G است.

هم‌چنان، نگاشت دیفرانسیل نمایش هم‌الحقیقی گروه G ، نمایش هم‌الحقیقی جبر \mathfrak{g} است و با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$\text{ad}_X^*(p) \equiv \frac{d}{dt} (\text{Ad}_{e^{tX}}^*(p))|_{t=0} = -p \circ \text{ad}_X = -p \circ [X, \cdot]. \quad (\text{ب}-۴)$$

تبصره ۲. نمایش‌های الحقیقی و هم‌الحقیقی، تنها وقتی معادلند که جبر \mathfrak{g} ، یک فرم دوخطی ناتبیگن داشته باشد، مثل جبرهای لی نیمه‌ساده.

ب-۴ ساختار پواسون

وقتی صحبت به فضای فاز می‌رسد، ساختارهای همتافته و پواسون مهمترین ساختارهای ریاضی هستند که خود را نشان می‌دهند. اگر قرار باشد دانشی را که درباره گروه و جبرهای لی پیدا کردہ‌ایم، به سامانه‌های فیزیکی اعمال کنیم؛ باید توصیفی درست از فضاهای فاز سامانه‌های فیزیکی داشته باشیم و این توصیف از طریق این ساختارها صورت می‌گیرد.

تعريف ۷. یک ساختار پواسون روی خمینه‌ی M ، یک نگاشت دوخطی پادمتقارن است.

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) : \mathcal{F}, \mathcal{G} \mapsto \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} \quad (\text{ب}-۵)$$

که در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$\{\mathcal{F}, \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\}\} + \{\mathcal{G}, \{\mathcal{H}, \mathcal{F}\}\} + \{\mathcal{H}, \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}\} = 0 \quad (\text{جاكوبی}), \quad (\text{ب}-۶)$$

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\mathcal{H}\} = \{\mathcal{F}, \mathcal{H}\}\mathcal{G} + \mathcal{G}\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} \quad (\text{لايب نيتز}).$$

این نگاشت، یک برآکت پواسون روی M نامیده می‌شود و جفت $(\{\cdot, \cdot\}, M)$ یک خمینه‌ی پواسون نامیده می‌شود.

توجه کنید که برآکت پواسون، فضای توابع هموار روی خمینه‌ی M را تبدیل به یک جبر لی می‌کند، به علاوه خاصیت لاپلایزی برآکت پواسون نتیجه می‌دهد که نگاشت

$$\{\mathcal{F}, \cdot\} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) : \mathcal{G} \mapsto \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} \quad (\text{ب-۴-۳})$$

یک رابطه‌ی مشتق روی فضای توابع است.

تبصره ۳. وجود یک برآکت پواسون روی خمینه، هیچ قیدی روی بعد خمینه نمی‌گذارد؛ برخلاف ساختار همتافته. مثلا خمینه‌ی \mathbb{R}^3 با برآکت $\{F, G\} = \partial_x F \partial_y G - \partial_y F \partial_x G$ یک خمینه‌ی پواسون است.

تعریف ۸. اگر $(\{\cdot, \cdot\}, M)$ یک خمینه‌ی پواسون باشد، و $\mathcal{H} \in C^\infty(M)$ تابعی دلخواه روی خمینه باشد، میدان برداری هامیلتونی H منسوب به تابع \mathcal{H} را این طور معرفی می‌کنیم.

$$\xi_H = -\{H, \cdot\} \quad (\text{ب-۴-۴})$$

این تعریف، ارتباط تنگاتنگی با مکانیک هامیلتونی دارد. محتوی اطلاعاتی تعریف بالا چیزی به جز معادلات هامیلتون نیست.

خم‌های انتگرالی میدان برداری ξ_H ، که در رابطه‌ی $\xi_H(t) = \dot{\gamma}(t)$ صدق می‌کند، در مختصات موضعی، تبدیل به تعداد $\dim M$ معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول می‌شوند؛ یعنی $\dot{x}^i = \{x^i, H\}$. این همان معادلات آشنای هامیلتون برحسب برآکت پواسون است که حرکت سامانه‌ی فیزیکی در خمینه‌ی M ، یعنی فضای فاز سامانه را توصیف می‌کند.

یک مشاهده‌ی دیگر این است که برآکت پواسون دو میدان برداری هامیلتونی، خود یک میدان برداری هامیلتونی است.

$$[\xi_{\mathcal{F}}, \xi_{\mathcal{H}}] = \xi_{\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\}} \quad (\text{ب-۴-۵})$$

این مشاهده، ما را به معرفی خمینه‌های همتافته، به کمک قضیه‌ی فروبنیوس، رهنمون می‌کند. تمامی میدان‌ها برداری هامیلتونی روی خمینه‌ی M را در نقطه‌ی $p \in M$ در نظر بگیرید. این‌ها یک زیرفضا از فضای مماس $T_p M$ می‌تند. با اجتماع مجزا روی تمامی این زیرفضاها، یک زیرکلافل از کلاف

مماس خواهیم داشت، به خاطر شرط $(\text{ب}-\text{۴-۵})$ ، قضیه‌ی فربینیوس، نتیجه می‌دهد که این میدان‌های برداری هامیلتونی، یک برگ‌بندی از خمینه‌ی M می‌سازند. به این برگ‌بندی، یک برگ‌بندی همتافته از خمینه می‌گوییم.

دو نقطه از خمینه در یک برگ هستند، اگر با یک خم انتگرالی از یک میدان برداری هامیلتونی به هم وصل شوند. در همان مثال \mathbb{R}^3 که پیش‌تر گفته شد، برگ‌های همتافته صفحه‌های $z = cte$ هستند.

ب-۵ ساختارهای همتافته

تعریف ۹. فرم همتافته روی خمینه‌ی M ، یک $2 - \text{فرم بسته‌ی ناتبهگن}$ است. به جفت (M, ω) یک خمینه‌ی همتافته می‌گوییم.

قید عدم تبهگنی در مختصات موضعی خمینه یعنی ماتریس $z_{ij}\omega$ وارون‌پذیر است. اما می‌دانیم که ماتریس‌های پادمتقارن با بعد فرد وارون‌پذیر نیستند. این یعنی که خمینه‌ی دارای ساختار همتافته، حتماً بعدش زوج است.

با خواص خوبی که فرم همتافته دارد، می‌توانیم فرم حجم لیوویل را روی خمینه معرفی کنیم.

$$\mu = \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{\text{به تعداد نصف بعد خمینه}} \quad (\text{ب-۵-۱})$$

برگ‌های همتافته‌ی خمینه‌ی پواسون، اولین مثال از یک خمینه‌ی همتافته هستن که مجهز به براکت $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}_{\text{P.B.}} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle_{\omega}$ است. اما آشناترین مثال فیزیکی، فضای \mathbb{R}^{2n} است که نشان‌گر فضای فاز یک ذره‌ی غیرنسبیتی در n بعد فضایی است. اگر مختصات‌های تعمیم‌یافته‌ی مکان و تکانه را با $(q_1, p_1, p_2, \dots, p_n)$ و (q_1, q_2, \dots, q_n) نشان دهیم؛ فرم همتافته‌ی این فضا به شکل زیر است.

$$\omega = dq^i \wedge dp_i \quad (\text{ب-۵-۲})$$

مثال آشنای دیگر، که برای کوانتش هندسی بسیار آموزنده است، کلاف همماس به یک خمینه است. فرض کنید خمینه‌ی \mathcal{Q} ، پیکربندی‌های کلاسیکی یک سامانه‌ی فیزیکی را توصیف کند (مثلاً قرارگیری n ذره نسبت به هم). فضای فاز متناظر با این سامانه، کلاف همماس به این خمینه، $T^*\mathcal{Q}$ ، است. نقاط این خمینه به شکل $(q, \alpha) \in T_q^*\mathcal{Q}$ است که $q \in \mathcal{Q}$ و $\alpha \in T_q^*\mathcal{Q}$ است و این دو مولفه، مختصه‌های مکان

و تکانه را نمایش می‌دهند. می‌توانیم بینیم که این خمینه همتافته است، و ۲- فرم همتافته‌ی کانونی در تعریف زیر آمده است.

با انتخاب مختصات (q_1, \dots, q_n) روی مجموعه باز $Q \subset U$ و (p_1, \dots, p_n) روی $\pi^{-1}(U)$ ، فرم $\alpha = p_j(dq^j)$ قابل بسط است و ۲- فرم همتافته‌ی کانونی روی این قسمت از مختصات، به شکل زیر است.

$$\omega = dq^i \wedge dp_i$$

تبصره ۴. قضیه‌ی داربیان می‌دارد که در یک همسایگی از هر نقطه‌ی خمینه‌ی همتافته می‌توان مختصات (q_i, p_i) را انتخاب کرد که ۲- فرم همتافته در آن همسایگی، به شکل کانونی بشود. یعنی هر خمینه‌ی همتافته، به شکل موضعی مثل کلاف همماس است.

تعريف ۱۰. اگر (M, ω) و (N, Ω) دو خمینه‌ی همتافته باشند، یک همتافته‌ریختی از M به N یک واپرسانی $N \rightarrow M$ است که ساختار همتافته را حفظ می‌کند؛ به این معنی که $\omega = \Omega \circ \phi^*$. در این صورت، دو خمینه‌ی M به N همتافته‌ریخت نامیده می‌شوند.

ب-۶ ساختارهای Kirillov-Kostant

هدف ما در این بخش، توصیف فضای فازی است که کاملاً از دیدگاه نظریه‌ی گروهی قابل بررسی است. فضای فاز سامانه‌های دارای تقارن پیوسته (گروه لی) مثالی از این فضاهای فاز هستند و می‌بینیم که فضای فاز گرانش سه‌بعدی هم در حقیقت بر حسب خواص نظریه‌گروهی کاملاً قابل فهم است.

تعريف ۱۱. فرض کنید که G گروهی لی باشد و \mathfrak{g} جبر لی آن باشد. برآکت پواسون Kirillov-Kostant روی \mathfrak{g}^* به شکل زیر معرفی می‌شود.

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}(p) \equiv \langle p, [\mathcal{F}_{*p}, \mathcal{G}_{*p}] \rangle \quad (\text{ب-۶})$$

که $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in C^\infty(\mathfrak{g}^*, \mathbb{R})$ توابعی هموار هستند و \mathcal{F}_{*p} نگاشت دیفرانسیلی \mathcal{F} در $p \in \mathfrak{g}^*$ را نشان می‌دهد.

گزاره ۵. اگر \mathcal{F} تابعی حقیقی روی \mathfrak{g}^* باشد و \mathcal{F} میدان برداری هامیلتونی معادلش باشد، معادله‌ی تحول اویلر-پواسون روی \mathfrak{g}^* به شکل زیر است که تحول میدان برداری هامیلتونی \mathcal{F} را معین می‌کند.

$$\dot{\gamma}(t) = (\xi_{\mathcal{F}})_{\gamma(t)} = ad_{\mathcal{F}_{*\gamma(t)}}^*(\gamma(t)). \quad (\text{ب-۶})$$

اثبات. $\mathfrak{g}^* \in p$ را عضوی دلخواه بگیرید و \mathcal{G} ، تابعی دلخواه روی \mathfrak{g}^* . مقدار $(\xi_{\mathcal{F}})(\mathcal{G})$ را به دو شکل حساب می‌کنیم و با برابر قرار دادن دوطرف، به معادله‌ی اویلر-پواسون می‌رسیم.

اول از همه، $(\xi_{\mathcal{F}})_p(\mathcal{G})$ برداری مماس به \mathfrak{g}^* در نقطه‌ی p است. پس داریم

$$(\xi_{\mathcal{F}})_p(\mathcal{G}) = \langle (\xi_{\mathcal{F}})_p, \mathcal{G}_{*p} \rangle. \quad (ب-6)$$

دوما، با تعریف میدان‌برداری و براکت Kirillov-Kostant داریم:

$$(ب-6)$$

$$(\xi_{\mathcal{F}})_p(\mathcal{G}) = -\{\mathcal{F}cF, \mathcal{G}\} = -\langle p, [\mathcal{F}_{*p}, \mathcal{G}_{*p}] \rangle = -\langle p, \text{ad}_{\mathcal{F}_{*p}}(\mathcal{G}_{*p}) \rangle = \langle \text{ad}_{\mathcal{F}_{*p}}^*(p), \mathcal{G}_{*p} \rangle.$$

■ با قیاس‌کردن دورابطه‌ی اخیر به معادله‌ی تحول اویلر-پواسون می‌رسیم.

تبصره ۶. برگ‌های همتافته‌ی براکت Kirillov-Kostant، مدارهای هم‌الحاقی G هستند. به طور خاص، تمام مدارهای متناهی بعد، دارای بعد زوج هستند.

برای ارجاع در آینده، خوب است که براکت Kirillov-Kostant را برحسب پایه‌های $\{t_a\}$ در جبر لی بنویسیم. هر بردار الحاقی به شکل $X = X^a \partial_a$ نوشته می‌شود. اگر $\{(t^a)^*\mid a = 1, 2, \dots, n\}$ باشد، طوری که $\langle (t^a)^*, t_b \rangle = \delta_b^a$ ؛ هر بردار هم‌الحاقی به شکل $p = p_a(t^a)^*$ نوشته می‌شود که $p_a \in \mathbb{R}$ است. این تعریف، یک مختصات سراسری $\{p_a \mid a = 1, \dots, n\}$ روی \mathfrak{g}^* معرفی می‌کند که p_a تابعی حقیقی روی \mathfrak{g}^* است و به هر بردار هم‌الحاقی p مولفه‌ی $(t^a)^*$ را نسبت می‌دهد.

همچنین توجه کنید که نگاشت دیفرانسیل ${}_*(p_a)$ روی بردارهای پایه‌ی $\frac{\partial}{\partial p_a}$ به شکل زیر عمل می‌کند.

$$(p_a)_* \left(\frac{\partial}{\partial p_c} \right) = \frac{\partial p_a}{\partial p_c} = \delta_a^c \quad (ب-6)$$

اما یادمان هست که \mathfrak{g}^* خود یک فضای برداری است و با مشاهده‌ی این که $\frac{\partial}{\partial p_c} (t^c)^*$ یکی است، می‌توانیم تناظر $\mathfrak{g}^* \cong T_p \mathfrak{g}^*$ را نتیجه بگیریم.

$$(p_a)_*(t^c)^* = \delta_a^c \quad (ب-6)$$

با این‌کار، نگاشت دیفرانسیل به دوگان دوگان \mathfrak{g} مربوط است، یعنی $\mathfrak{g}_* \in p$ یک بردار الحاقی است. پس براکت Kirillov-Kostant به شکل زیر قابل نوشتن است.

$$\{p_a, p_b\} = f_{ab}{}^c p_c \quad (ب-6)$$

ب-۷ فرم هم تافته‌ی Kirillov-Kostant

تعريف ۱۲. بگیرید $\mathfrak{g} \in \mathcal{W}_p$ و $p \in \mathcal{W}_q$ نمایانگر مدار این عضو هم‌الحقی است. فرم هم‌تافته‌ی Kirillov-Kostant(-Souriau) در شکل زیر معرفی می‌شود.

$$\omega_q(\text{ad}_X^* q, \text{ad}_Y^* q) = \langle q, [X, Y] \rangle \quad (1-7)$$

که $X, Y \in \mathfrak{g}$.

در اینجا، ad_X^* و ad_Y^* جابه‌جایی‌های بی‌نهایت کوچک از q هستند و بردارهای مماس نوعی از \mathcal{W}_p را نشان می‌دهند. هر مدار هم‌الحقی G یک فضای همگن است که به یک ۲-فرم هم‌تافته‌ی G -ناوردا مجهر است^۲. بعدها خواهیم دید که هر مدار هم‌الحقی با قسمت خاصی از فضای فاز معادل است.

ب-۸ نگاشت‌های مومنتوم

در این بخش، به معرفی نگاشت‌های مومنتوم می‌پردازیم و بیانی از قضیه‌ی نوتر به زبان نگاشت‌های مومنتوم را می‌بینیم.

ب-۸-۱ اثرهای گروه‌های لی و مولدهای بی‌نهایت کوچک

تعريف ۱۳. $G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ نگاشتی است که به شکل $(f, q) \mapsto f.q$ و هموار روی خمینه اثر می‌کند. در این صورت، مولد بی‌نهایت کوچک این اثر برای $\mathfrak{g} \in X$ یک میدان برداری X روی \mathcal{M} است که با

$$(\xi_X)_q = \frac{d}{dt} (e^{tX}.q) \Big|_{t=0}.$$

معرفی می‌شود.

این تعريف نتیجه می‌دهد که

$$[\xi_X, \xi_Y] = -\xi_{[X, Y]} \quad (1-8)$$

^۲چراکه $(\text{Ad}_f^*)^*(\omega) = \omega$

که برآکت لی در سمت چپ به معنای جبر لی و در سمت راست به معنای برآکت میدان های برداری است.

به عنوان مثال، نمایش های الحاقی و هم الحاقی که پیشتر در (ب-۳) بررسی شدند، مولدهای بی نهایت کوچک اثر الحاقی و هم الحاقی G هستند.

ب-۸-۲ نگاشت مومنتوم

تعریف ۱۴. اگر (M, ω) یک خمینه همتافته باشد؛ اثر گروه لی G روی این خمینه همتافته نامیده می شود اگر که نگاشت $f \cdot q \mapsto q$ یک همتافته ریختی باشد. یعنی اگر X مولدهای بی نهایت کوچک اثر همتافته باشند، آنگاه $i_{\xi_X} \omega = \mathcal{L}_{\xi_X} \omega$ است.

تعریف ۱۵. اگر اثر $M \mapsto M \times G$ یک اثر همتافته باشد، نگاشت مومنتوم این اثر یک نگاشت $\mathcal{J} : \mathcal{J}(p) \mapsto \mathcal{J}(q)$ که \mathcal{J} و برای هر $X \in \mathfrak{g}^*$ داریم

$$i_{\xi_X} \omega = d \langle \mathcal{J}(\cdot), X \rangle \quad (\text{ب-۸-۲})$$

که X مولدهای بی نهایت کوچک اثر است. در این بیان $\langle \mathcal{J}(\cdot), X \rangle$ تابعی حقیقی است که روی M تعریف شده و به نقطه $q \in M$ مقدار $\langle \mathcal{J}(q), X \rangle$ را نسبت می دهد. از این به بعد می نویسیم $\langle \mathcal{J}(\cdot), X \rangle \equiv \mathcal{J}_X$ و به این نگاشت، نگاشت تکانه می گوییم.

گزاره ۷. به شرطی که فضای فاز همبند باشد، جبر پواسون نگاشت های مومنتوم یک نمایش از جبر لی \mathfrak{g} است یا حد اکثر یک توسعه مركزی با آن تفاوت دارد.

$$\{\mathcal{J}_X, \mathcal{J}_Y\} = \mathcal{J}_{[X, Y]} + c(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad (\text{ب-۸-۳})$$

که $c(X, Y)$ یک دو هم چرخه حقیقی روی \mathfrak{g} است. در حالتی که فضای فاز، چندین مولفه هی همبندی داشته باشد، ممکن است چندین هم چرخه در سمت راست این رابطه ظاهر شوند. این گزاره را بدون اثبات می پذیریم.

این گزاره معادل با آنست که نگاشت های تکانه یک نمایش افکنشی از \mathfrak{g} هستند یا نمایشی از توسعه مركزی این جبر.

ب-۸-۳ قضیه نوتر

هر نگاشتِ مومنتوم، یک کمیتِ بارِ پایسٹار $\mathcal{J}(p) \in \mathcal{J}$ مربوط به حالتِ کلاسیکی $\mathfrak{g}^* \in p$ در فضای فاز می‌دهند. این تفسیر از نتیجه‌ی اساسی زیر می‌آید.

قضیه ۸. قرار دهید که $f.q \mapsto q$ یک اثر هامیلتونی از G روی (M, ω) باشد که نگاشت \mathcal{J} مومنتوم آن است. همچنین $\mathcal{H} \in C^\infty(M)$ را هم یک مشاهده‌پذیر کلاسیک ناوردا تحت G بگیرید، یعنی $\mathcal{H}(f.q) = \mathcal{H}(q)$ برای تمامی $f \in \mathcal{J}$ و $q \in M$. همینطور، \mathcal{H} میدان‌برداری هامیلتونی مربوط به \mathcal{H} باشد. در این صورت

$$\mathcal{J}(\gamma(t)) = \mathcal{J}(\gamma(0)) \quad (\text{ب-۸-۴})$$

در تمامی زمان‌ها برقرار است. به زبانی دیگر $\dim \mathfrak{g}$ مولفه‌ی برداری بردارِ هم‌الحاقی $\mathcal{J}(\gamma(t))$ پایسٹار هستند.

اثبات. چون هامیلتونی تحت G ناورداست، پس

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(e^{tX} \cdot p) \Big|_{t=0}.$$

برای هر $p \in M$ برقرار است. اما چون خم انتگرالی X به شکل $e^{tX} \cdot p$ است، بنابراین $\mathcal{J}_X(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. بنابراین، \mathcal{H} تحت خم انتگرالی \mathcal{J}_X ناورداست. درنتیجه \mathcal{J}_X هم تحت خم‌های انتگرالی X یعنی تحولِ دینامیکی سیستم ناورداست. یعنی \mathcal{J} بردار پایسٹار حرکت است. ■

در سامانه‌های ناوردای انتقال، نگاشت مومنتوم به هر نقطه از فضای فاز یک بردار تکانه نسبت می‌دهد. در سامانه‌های دارای تقارن چرخشی، نگاشت مومنتوم، به هر نقطه از فضای فاز، تکانه‌ی زاویه‌ای منسوب به آن پیکربندی را نسبت می‌دهد. در نظریه‌ی میدان همدیس دو بعدی هم، نگاشت مومنتوم، تانسور تنش یک پیکربندی میدان را می‌دهد.

ب-۸-۴ نگاشتِ مومنتوم برای مدارهای هم‌الحاقی

بیایید نگاشت‌های مومنتوم مربوط به یک مدار هم‌الحاقی \mathcal{W}_p برای گروه G را بسازیم. هر مسیر $\gamma(t)$ در \mathcal{W}_p را می‌توانیم به شکل $\gamma(t) = \text{Ad}_{f(t)p}^*$ بنویسیم که $f(t)$ مسیری در G است که $q = \gamma(0)$ و

برای هر $Y \in \mathfrak{g}$ داریم.

$$\omega_q(\text{ad}_X^* q, \dot{\gamma}(\cdot)) = \omega_q(\text{ad}_X^* q, \text{ad}_Y^* q) \langle q, [X, Y] \rangle = \langle \text{ad}_Y^* q, X \rangle \quad (\text{ب}-\text{۸}-\text{۸})$$

حالا چون $\text{ad}_X^* q$ مولد بینهایت کوچک X از اثر هم‌الحاقی G روی \mathcal{W}_p است، سمت چپ معادله‌ی بالا تبدیل می‌شود به

$$(i_{\xi_X} \omega)_q(\dot{\gamma}(\cdot))$$

بنابراین، طبق تعریف نگاشت مومنتوم

$$\langle \text{ad}_Y^* q, X \rangle = \frac{d}{dt} (\langle \mathcal{J}(\gamma(t)), X \rangle) \Big|_{t=0} = \langle \mathcal{J}_{*q} \text{ad}_Y^* q, X \rangle \quad (\text{ب}-\text{۸}-\text{۹})$$

این یعنی نگاشت $\mathfrak{g}^* \ni g \mapsto \mathcal{J}_X g : T_g \mathcal{W}_p \mapsto \mathcal{W}_p$ نگاشت شمولیت است.

گزاره ۹. در حقیقت، گنجاندن مدار هم‌الحاقی \mathcal{W}_p در \mathfrak{g} به کمک نگاشت $\mathcal{J} : \mathcal{W}_p \mathfrak{g}^* : q \mapsto q$ نگاشت مومنتوم برای اثر هم‌الحاقی G روی خمینه‌ی همتافته‌ی $(\mathcal{W}_p, \omega_{KKS})$ است.

پیوست ب

مقدمه‌ای بر مدل SYK

در این قسمت، به بررسی مدل SYK می‌پردازیم. این مدل را آفای کیتائاف [۸۴] برای ساده‌سازی مدل اولیه‌ی Ye - Sachdev [۸۵] مطرح کرد و آن را حل کرد. مدلی کوانتم مکانیکی مشکل از N فرمیون مایورانا، که همگی با جفتیدگی‌های تصادفی (اما انتخاب شده از یک توزیع خاص) به هم جفت شده‌اند. همچنین می‌بینیم که چطور این مدل در انرژی پایین، می‌تواند به کنش شوارتزی منجر شود، بنابراین توصیف تمام‌نگاری مناسبی از گرانش JT باشد.

پ-۱ معرفی مدل SYK

این مدل در حقیقت هنگرددی از مدل‌های کوانتمی ساده با بعد متناهی است. هر مدل از این هنگردد، با یک هامیلتونی هرمیتی مشخص می‌شود. اول با کمک نمایش مایورانا (نمایش اسپین $\frac{1}{2}$ گروه لورنتز)، هامیلتونی این مدل‌ها را مشخص می‌کنیم. برای مقاصد ما فقط به نمایش‌های مایورانا در ابعاد زوج دلخواه نیاز است؛ پس باید اول مروری مختصر بر این نمایش‌ها داشته باشیم.

می‌خواهیم نمایش‌های جبر کلیفورد،

$$\{\psi_i, \psi_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (\text{پ-۱})$$

را پیدا کنیم. همانطور که گفتیم فقط به نمایش‌های بعد زوج، $N = 2K$ ، توجه می‌کنیم. همچنین برای هرمیتی بودن هامیلتونی حاصل، باید نمایش‌های هرمیتی، $\psi_i^\dagger = \psi^i$ را بررسی کنیم. می‌توانیم این جبر

را به جبر فرمیونی تقلیل دهیم؛ با تعریف

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{2i} - i\psi_{2i+1}), \quad c_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{2i} + i\psi_{2i+1}), \quad i = 1, \dots, K \quad (\text{پ-۱-۲})$$

با کمک خواص پادجابه‌جاگر می‌توانیم رابطه‌ی پادجابه‌جاگر عملگرهای جدید را بدست آوریم:

$$\{c_i, c_j\} = \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = 0, \quad \{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad (\text{پ-۱-۳})$$

این همان جبر عملگرهای فرمیونی است که نمایش ساده‌ای بر حسب عملگرهای خلق دارد. با داشتن نمایش‌های جبر فرمیونی و تنها با استفاده از ترکیب خطی آن‌ها، رابطه (پ-۱-۲)، می‌توانیم نمایش‌های مایورانا را بدست بیاوریم.

یادآوری نمایش‌های جبر فرمیونی

یک خلا می‌گیریم که با تمامی عملگرهای فنا نابود می‌شود:

$$c_i |0\rangle = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}.$$

حالا پایه‌های نمایشمان را اینظور می‌سازیم:

$$(c_1^\dagger)^{n_1} \dots (c_K^\dagger)^{n_K} |0\rangle, \quad n_k = 0, 1$$

به تعداد $2^K = 2^{\frac{N}{2}}$ از این بردارهای پایه داریم، بسته به این که یک مخصوص با فرمیون اشغال شده باشد یا نه. این نمایش تنها نمایش کاهش‌ناپذیر هرمیتی این جبر است؛ یعنی سایر نمایش‌ها با یک تبدیل یکانی، با این نمایش معادلنند.

نکته: به N های فرد نیاز نداریم، اما می‌دانیم که نمایش آن با افزودن ماتریس γ_5 به نمایش‌های $1 - N$ که زوج است، بدست می‌آید؛ پس عملاً تمامی نمایش‌ها را دسته‌بندی کرده‌ایم.

برای نمایش‌های فرمیون‌های مایورانا یک رابطه‌ی بازگشتی هم هست.

$$\begin{aligned}\psi_i^{(K)} &= \psi_i^{(K-1)} \otimes \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N-2 \\ \psi_{N-1}^{(K)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} I_{2^{K-1}} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \psi_i^{(N)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} I_{2^{K-1}} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{پ-۴-۱}$$

معلوم است که ماتریس‌های $\psi_i^{(K)}$ ماتریس‌های $2^K \times 2^K$ هستند و نیاز به دو ماتریس اولیه داریم تا روابط بازگشتی شروع به کار کنند:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

اعضای هنگرد SYK هامیلتونی زیر را دارند:

$$H = \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \tag{پ-۵-۱}$$

که J_{ijkl} جفتیدگی‌های تمامی فرمیون‌ها به هم‌دیگر است که برای اعضای مختلف هنگرد، متفاوت است. هر کدام از این جفتیدگی‌ها، به طور تصادفی و مستقل از دیگری، از یک توزیع گاووسی با متوسط $\mu = 0$ و پراکندگی $\sigma = \frac{\sqrt{3!J}}{N^{\frac{q}{2}}}$ انتخاب می‌شوند^۱.

همچنین یک تعمیم ساده‌ی دیگر از این مدل هست که برهمنکش‌های q -تایی دارد.

$$H = i^{\frac{q}{2}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq N} J_{i_1 \dots i_q} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_q} \tag{پ-۶-۱}$$

که این‌دفعه، جفتیدگی از یک توزیع گاووسی با متوسط صفر و پراکندگی $\sigma = \frac{\sqrt{(q-1)!J}}{N^{\frac{q-1}{2}}}$ انتخاب می‌شوند. از مزیت‌های این مدل این است که بسط تحلیلی بر حسب $\frac{1}{q}$ در حد $\infty \rightarrow q$ دارد.

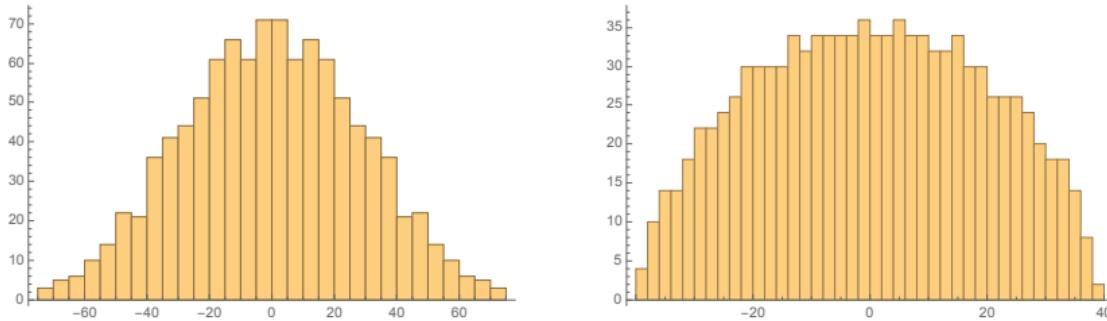
^۱ در این توزیع J یک عدد است که پارامتر گردایه است و همچنین نمای $\frac{3}{2}$ در پراکندگی بعداً برایمان بسیار مهم خواهد بود.

پ-۲ ویژگی‌های کلی مدل SYK

۱. این مدل در حد $N \rightarrow \infty$ -بزرگ کلاسیکی می‌شود. پس برای مدلی مت Shankel از فرمیون‌های زیاد، با حل معادلات حرکت کلاسیکی برای میدان‌های G و Σ می‌توانیم مدل را در سطح کوانتمی کامل درک کنیم. (در ادامه جزئیات بیشتری اضافه می‌کنیم).

۲. در حد مذکور و در حد انرژی پایین (حد دومقیاسه)، تقارن بازپرماش زمانی ($f(t) \mapsto t \mapsto f(t)$) پدیدار می‌شود که با خلا به شکل خودبهخودی می‌شکند. این مدهای پدیداری از تقارن بازپرماش زمانی، معادل مدهای گلدستون هستند و کنش موثری برایشان تعریف می‌شود. همچنین در ادامه می‌بینیم این شکست تقارنی دقیقاً مشابه با گرانش JT است؛ اگرچه در محدوده فرابینفس، مشابه با هیچ کدام از تئوری‌های گرانشی دیلاتونی نیست.

۳. طیف مدل هم جالب است؛ چگالی حالات را برای چند حالت خاص در شکل پ-۱ می‌بینیم. در حالت $q = 2$ که برهمکنش‌ها دوتایی‌اند؛ نظریه آزاد است و چگالی حالات دقیقاً معادل با نظریه‌های انتگرال‌پذیر است؛ یعنی انتهای طیف در انرژی پایین، امتداد دارد. اما، از طرفی دیگر، در $q = 4$ ، طیف ناگهان خاتمه می‌یابد.



شکل پ-۱: نمودار سمت چپ، چگالی حالات برای $q = 2$ است و نمودار سمت راست برای $q = 4$. هردوی این طیف‌ها برای $N = 20$ بدست آمده‌اند.

پ-۳ تحلیل مدل در سطح کوانتومی

حالا شروع به تحلیل مدل SYK می‌کنیم. با روش اختلالی رایج به تحلیل مدل SYK می‌پردازیم که در آن J پارامتر اختلالمن است. می‌فهمیم که در حد $N \rightarrow \infty$ می‌توانیم عمل جمع روی نمودارهای مختلف فاینمن را به شکل یک سری شوینگر-دایسون ببینیم.

در نشانگان اقلیدسی، تابع دونقطه‌ای مرتب‌زمانی شده از فرمیون‌ها، به شکل زیر است.

$$G_{ij}(\tau) = \langle T\psi_i(\tau)\psi_j(\cdot) \rangle \equiv \Theta(\tau)\langle\psi_i(\tau)\psi_j(\cdot)\rangle - \Theta(-\tau)\langle\psi_j(\cdot)\psi_i(\tau)\rangle, \quad (\text{پ-۳})$$

که Θ تابع هموسايد است و

$$\psi_i(\tau) = e^{\tau H}\psi_i e^{-\tau H}. \quad (\text{پ-۴})$$

یک کمیت مهم که از توابع دونقطه‌ای می‌سازیم، ردبهنجارشده تابع دونقطه‌ای است. برای محاسبه‌ی این کمیت به راس‌های چهارتایی فرمیونی نیازی نداریم، پس اگر قرار دهیم $\cdot = J$ ، هامیلتونی هم صفر می‌شود و خواهیم داشت $\psi_i(\tau) \equiv \psi_i$.

با استفاده از جبر کلیفورد، توابع دونقطه‌ای و ردبهنجارشده آن $G(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_{ii}(\tau)$ را حساب می‌کنیم.

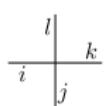
$$G_{ij}^{\text{free}}(\tau) = \frac{1}{2}\delta_{ij}\text{sgn}\tau, \quad G^{\text{free}}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_i G_{ii}^{\text{free}} = \frac{1}{2}\text{sgn}\tau, \quad (\text{پ-۵})$$

که sgn تابع علامت است.

در فضای فوریه، این تابع دونقطه‌ای به شکل زیر است.

$$G_{ij}^{\text{free}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} G_{ij}^{\text{free}}(\tau) = -\frac{\delta_{ij}}{i\omega} \quad (\text{پ-۶})$$

اختلال این نظریه با نگاه کردن به راس چهارتایی و قانون فاینمن آن انجام می‌شود.

- راس چهارتایی  سه‌می به شکل J_{ijkl} به نمودار فاینمن می‌دهد.

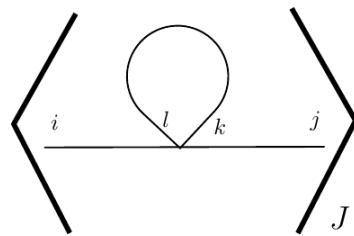
اول از همه، با استفاده از قوانین راس و انتشارگر، دامنه‌ی یک نمودار را پیدا می‌کنیم و سپس روی جفتیدگی J متوسط می‌گیریم. به عنوان مثال، چون جفتیدگی‌های تصادفی از یک هنگرد گاوی انتخاب شده‌اند،

متوسطگیری‌های دوتایی J مثل زیر است.

$$\langle J_{i_1 j_1 k_1 l_1} J_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle_J = 3! \frac{J^3}{N^3} \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{k_1 k_2} \delta_{l_1 l_2} \quad (\text{پ-۳})$$

حالا، سهم‌های نابدیهی به انتشارگر را بررسی می‌کنیم.

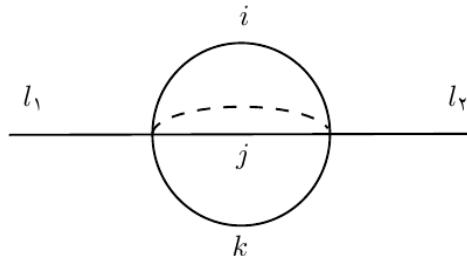
۱. سهم قورباغه‌ای



شکل پ-۲: سهم قورباغه‌ای به انتشارگر فرمیونی در مدل SYK

این سهم صفر است، چون برابر با $\langle J_{ijkl} \rangle$ است و هنگرد گاووسی جفتیدگی با میانگین صفر انتخاب شده‌بود.

۲. سهم هندوانه‌ای

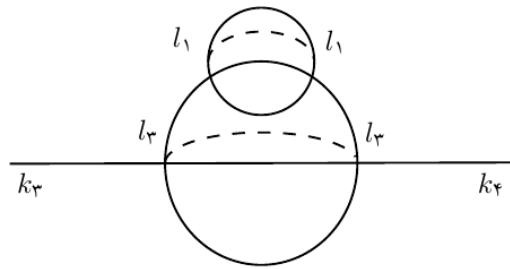


شکل پ-۳: سهم هندوانه‌ای به انتشارگر فرمیونی در مدل SYK

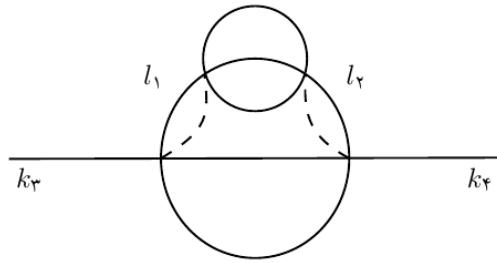
که خطچین در شکل پ-۳ متوسطگیری‌هایی مثل (پ-۳-۵) است و روی اندیس‌های تکراری جمع زده شده است. سهم این نمودار به شکل زیر است.

$$\mathcal{A}_{\text{melon}} = 3! \frac{J^3}{N^3} G_{ii}^{\text{free}} G_{jj}^{\text{free}} G_{kk}^{\text{free}} \delta_{l_1 l_2} = 3! J^3 (G^{\text{free}})^3 \delta_{l_1 l_2} \quad (\text{پ-۴})$$

۳. از مرتبه J^3 چندین سهم دخیل است. دو تا از این سهم‌ها را می‌بینیم.



شکل پ-۴: سهم مرتبه‌ی J^4 به انتشارگر فرمیونی در مدل SYK - نوع (۱)



شکل پ-۵: سهم مرتبه‌ی J^4 به انتشارگر فرمیونی در مدل SYK - نوع (۲)

دامنه‌ی نمودار پ-۴ به شکل زیر است.

$$\mathcal{A}_{(4)}^{(1)} = \frac{J^4}{N^4} \left(G_{ll}^{\text{free}} \right)^5 G_{l_1 l_2}^{\text{free}} G_{l_3 l_4}^{\text{free}} \delta_{k_3 k_4} = \frac{1}{4} J^4 \left(G^{\text{free}} \right)^6 \delta_{k_3 k_4} \quad (\text{پ-۳})$$

دامنه‌ی نمودار پ-۵ هم به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(4)}^{(2)} &= \frac{J^4}{N^4} \left(G_{i_1 i_2}^{\text{free}} G_{j_1 j_2}^{\text{free}} G_{k_1 k_2}^{\text{free}} \right) \left(G_{l_1 l_2}^{\text{free}} G_{l_3 l_4}^{\text{free}} \right) \left(G_{i_1 i_2}^{\text{free}} G_{j_1 j_2}^{\text{free}} \right) \\ &= \frac{1}{4N^2} J^4 \left(G^{\text{free}} \right)^4 G_{k_3 k_4}^{\text{free}} \end{aligned} \quad (\text{پ-۴})$$

دامنه‌ی اولی با N مقیاس می‌شود و دامنه‌ی دومی با N^{-2} ؛ بنابراین، در حد $\infty \rightarrow N$ نمودار پ-۵ مهم نیست.

درسی که از محاسبات بالا می‌توانیم بگیریم این است که نمودارهایی که با توانی از $N/1$ سرکوب نمی‌شوند، آن‌هایی هستند که داخل هر شکل هندوانه‌ای، فقط یک اتصال خط‌چینی باشد. پس تابع دونقطه‌ای غالب در حد $\infty \rightarrow N$ به شکل زیر است.

$$G(\tau) = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

که به شکل زیر قابل خلاصه است.

$$\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \qquad | \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} = \text{---} + \text{---} \quad \Sigma \quad \text{---} + \text{---} \quad \Sigma \quad \Sigma \quad \text{---}$$

$$\Sigma = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}$$

می‌توانیم این معادلات تصویری را با معرفی یک نمایش از ضرب ماتریسی، ساده کنیم.

$$(AB)(\tau, \tau') = \int d\tau'' A(\tau, \tau'') B(\tau'', \tau') \quad (\text{پ-۳})$$

اولین معادله از نمودار تصویری بالا به شکل زیر نوشته می‌شود (به این مدل جمع‌ها، جمع شوینگر-دایسون گفته می‌شود).

$$\begin{aligned} G &= G^{\text{free}} + G^{\text{free}} \Sigma G^{\text{free}} + G^{\text{free}} \Sigma G^{\text{free}} \Sigma G^{\text{free}} + \dots \\ &= G^{\text{free}} [1 + \Sigma G^{\text{free}} + \Sigma G^{\text{free}} \Sigma G^{\text{free}} + \dots] \\ &= G^{\text{free}} [1 - \Sigma G^{\text{free}}]^{-1} \\ &= [(G^{\text{free}})^{-1} - \Sigma]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{پ-۴})$$

چون انتشارگر، همان معکوس جمله‌ی جنبشی لاغرانژی است

$$(G^{\text{free}})^{-1}(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') \partial_{\tau'} \quad (\text{پ-۵})$$

پس از مختصرنویسی زیر هم معتبر است.

$$G = [\partial_{\tau} - \Sigma]^{-1} \quad (\text{پ-۶})$$

معادله‌ی تصویری دوم هم به عبارت زیر تقلیل می‌یابد.

$$\Sigma(\tau, \tau') = J^{\gamma} [G(\tau, \tau')]^{\gamma} \quad (\text{پ-۷})$$

پ-۴ حد انرژی پایین و پدیداری تقارن همدیس

در حد انرژی پایین به کنش مدل نگاه می‌کنیم. در قیاس با جفتیدگی مدل، که بعد انرژی دارد، حد انرژی پایین یعنی فرکانس‌های کمتر از جفتیدگی. با نوشتن (پ-۳-۱۱) به فرم فوریه،

$$\frac{1}{G(\omega)} = -i\omega - \Sigma(\omega) \quad (\text{پ-۴-۱})$$

و صرف نظر از ω در حد فوق، می‌بینیم که معادلات (در حد فروسرخ) به شکل ساده‌ی زیر تبدیل می‌شوند.

$$\int d\tau'' G(\tau, \tau'') \Sigma(\tau'', \tau') = -\delta(\tau - \tau') \quad (\text{پ-۴-۲})$$

$$\Sigma(\tau, \tau') = J^q G(\tau, \tau')^{q-1}$$

یک مشاهده‌ی اساسی این است که این معادلات، تقارن‌های بیشتری دارد. تحت بازپرمایش $(\tau \rightarrow \phi(\tau))$ ، G و Σ اینطور تبدیل می‌شوند.

$$G(\tau, \tau') \mapsto [\phi'(\tau)\phi'(\tau')]^\Delta G(\phi(\tau), \phi(\tau')), \quad (\text{پ-۴-۳})$$

$$\Sigma(\tau, \tau') \mapsto [\phi'(\tau)\phi'(\tau')]^{\Delta(q-1)} \Sigma(\phi(\tau), \phi(\tau'))$$

این یعنی که هردوی G و Σ مثل یک تابع دونقطه‌ای در نظریه‌ی میدان همدیس تبدیل می‌شوند.

مثلاً معادله‌ی اول به صورت زیر تحت تبدیلات همدیس ناورداند.

$$\begin{aligned} \int d\tau'' [\phi'(\tau)\phi'(\tau'')]^{\frac{1}{q}} G(\phi(\tau), \phi(\tau'')) [\phi'(\tau'')\phi'(\tau')]^{1-\frac{1}{q}} \Sigma(\phi(\tau''), \phi(\tau')) \\ = \int d\tilde{\phi} G(\phi(\tau), \tilde{\phi}) \Sigma(\tilde{\phi}, \phi(\tau')) \phi'(\tau') \left[\frac{\phi'(\tau)}{\phi'(\tau')} \right]^{\frac{1}{q}} \quad (\text{پ-۴-۴}) \\ = -\phi'(\tau') \delta(\phi(\tau) - \phi(\tau')) \\ = -\delta(\tau - \tau') \end{aligned}$$

پ-۵ تبدیل به کنش شوارتزی در حد $\infty \rightarrow N$

بررسی حد شوارتزی در حد $\infty \rightarrow N$ کمی تکنیکی است و نیاز به ابزارهای میدان‌پس‌زمینه و همچنین انتگرال‌مسیر دارد. ما در اینجا فقط به مراجع مربوطه ارجاع می‌دهیم [۶، ۸۶].

پیوست ت

فضای ماذولی رویه‌های ریمانی

در بخش ۴-۲ JT ، لروم جمع زدن روی توپولوژی‌های غیر از قرص را درک کردیم؛ اما برای محاسبه‌ی تابع پارش در حضور توپولوژی‌های غیرقرص، باید جمعی روی متريک‌های هذلولوی ($[Dg]$) بزنیم. در اکثر موقع، کنش مستقل از متريک انتخابی است و فقط به انحنای نرده‌ای ریچی آن بستگی دارد. پس جمع روی تمام متريک‌ها به حجم فضای ماذولی متريک‌های هذلولوی روی رویه‌های ریمانی تقلیل می‌یابد^۱.

حجم فضای ماذولی رویه‌های ریمانی در حضور مرز ژئودزیک را قبلاً دکتر میرزاخانی بررسی کردند. در [۴۴] ، ایشان یک رابطه برای $V_{g,\bar{b}}$ یعنی^۲ حجم فضای ماذولی $M_{g,\bar{b}}$ ، برحسب فضای ماذولی در حضور n سوراخ ، $M_{g,n}$ ، بدست آوردند. به شکل مختصر کار ایشان را نگاه بررسی می‌کنیم.

۲- فرم ω_g روی فضای ماذولی در حضور مرزهای ژئودزیک و ۲- فرم ω_n روی فضای ماذولی در حضور سوراخ (یا نقاط نشانه‌دار) است. به این ۲- فرم‌ها، فرم‌های ویل-پترسون می‌گوییم. این فرم‌ها روی این دو فضا متفاوت‌اند، اما ارتباط زیر بین آن‌ها وجود دارد:

۱ در حالاتی که تکینگی مخروطی در توده‌ی خمینه درج کرده‌ایم، کنش به محل تکینگی مخروطی بستگی دارد و به جای فضای ماذولی متريک‌های هذلولی، باید انتگرال‌گیری متريک را روی فضای ماذولی متريک‌های هذلولی سوراخ دار بگیریم. این فضای ماذولی شامل همه‌ی متريک‌هایی است که نقاط خاصی رویشان برجسته است؛ در ادامه با این فضا بیشتر آشنا می‌شویم.
۲ مقصود از g ، تعداد دسته‌های رویه‌ی ریمانی و همچنین $(b_1, \dots, b_m) = \bar{b}$ نمایانگر برداری است که اعضایش طول خم‌های ژئودزیک مرزی هستند.

اگر نقطه‌ی p را روی رویه‌ی ریمانی Σ در نظر بگیرید، کلاف هم‌مماس در نقطه‌ی p ، یک فضای برداری مختلط یک بعدی است. با تغییر دادن پارامترهای ماذولی Σ (یعنی با تغییر دادن شکل این رویه‌ی ریمانی)، این فضای برداری هم عوض می‌شود. بنابراین یک کلاف خطی مختلط \mathcal{L} ، روی فضای ماذولی تولید می‌شود. حالا اگر با فضای $\mathcal{M}_{g,n}$ که n نقطه‌ی برجسته $\{p_1, \dots, p_n\}$ دارد، شروع کنیم؛ روند بالا به ما دقیقاً n کلاف خطی $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n\}$ را می‌دهد. حالا اولین کلاسِ چرنِر هر کدام از این‌ها را $c_i(\mathcal{L}_i) = c_1(\mathcal{L}_i) = \psi_i$ می‌نامیم.

$$\omega_g, \vec{b} = \omega_{g,n} + \frac{1}{2} \sum_i b_i^\alpha \psi_i. \quad (\text{ت-۱})$$

این رابطه بین فرم‌های ویل-پترسونِ دوفضای ماذولی، سریعاً رابطه‌ی بین حجم دوفضا را می‌دهد :

$$V_{g,\vec{b}} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \exp \left(\omega_{g,n} + \frac{1}{2} \sum_i b_i^\alpha \psi_i \right). \quad (\text{ت-۲})$$

هم‌چنین، نشان داده شده است که همین رابطه برای حجم فضای ماذولی در حضور تکینگی‌های مخروطی برقرار است، فقط باید جایگزینی $(2\pi - \alpha_i) \rightarrow b_i$ را انجام دهیم.^۴

پس دستوری کلی برای حجم فضای ماذولی در حضور تکینگی مخروطی و مرزهای ژئودزیک چنین است:

دستورالعمل بدست آوردن حجم فضای ماذولی

اگر $\mathcal{M}_{g,\vec{b},\vec{\alpha}}$ ، فضای ماذولی رویه‌های ریمانی هیپربولیک با g دسته و m مرز ژئودزیک به طول n تکینگی مخروطی با زوایای $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \vec{\alpha}$ باشد، حجم این

^۳ در رابطه انتگرالی، $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ فضای فشرده‌شده‌ی ماذولی است که Deligne-Mumford Compactification فضای ماذولی اصلی است. در هندسه‌ی هذلولی، هر کلاس کوهمولوزی، یک همتایی دارد که در بینهایت صفر می‌شود؛ بنابراین می‌توان انتگرال‌ها را روی فضای اصلی گرفت و بهجای آن، از نماینده‌های فوق در انتگرال‌گیری استفاده کرد.

^۴ البته به شرطی که جمع تمام زوایای مخروطی از 4π بیشتر شود؛ در غیر این صورت حجم فضای ماذولی صفر است؛ یعنی هیچ متريک هیپربوليكی روی چنین رویه‌ای نمی‌توان گذاشت.

فضا از رابطه‌ی

$$V_{g,\vec{b},\vec{a}} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,m+n}} \exp \left(\omega_{g,m+n} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m b_i^\ast \psi_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\pi - \alpha_j)^\ast \tilde{\psi}_j \right). \quad (ت-۰-۳)$$

حاصل می‌شود، که در آن کلاس‌های کوهمولژی ψ مربوط به مرز ژئودزیک با ψ_i و مربوط به تکینگی مخروطی را با $\tilde{\psi}_j$ نمایش داده‌ایم.

نکته: خوب است که همینجا اشاره کنیم که ارتباط بین نظریه‌ی گرانش دو بعدی JT و ارتباطش با فضای مازولی رویه‌های ریمانی، از یک رهیافت ما را به نظریه‌ی ماتریس‌های تصادفی در حد دومقیاسه می‌رساند [۸۷]. این رهیافت مبتنی بر روش ویتن-کنتسویچ برای محاسبه‌ی حجم فضای مازولی رویه‌های ریمانی است [۸۸، ۸۹]. اما از دیدگاه فیزیکی‌تر [۴۲] این تقاضا که گرانش کوانتمی باید روی مرزش معادل با یک سامانه‌ی کوانتمی باشد، ما را به نظریه‌های ماتریس‌های تصادفی رهنمون می‌کند.

پیوست ث

فرمول بندی مرتبه اول گرانش اینشتینی

در این فرمول بندی به جای استفاده مستقیم از متريک $g_{\mu\nu}$ از یک ميدان کمکی^۱ e_μ^a استفاده می کنيم که به نوعی ريشه‌ي متريک است

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) \eta_{\mu\nu} e_\nu^b \quad (\text{ث}-۰)$$

اين ميدان کمکی در سه‌بعد Driebein هم خوانده می شود^۲.

رابطه‌ي (ث-۰-۱) را می توان به چشم تبدیل یک تانسور تحت تبدیلات عام دید؛ یعنی تانسور متريک را می توان با تبدیلاتی که از ميدان‌های چارچوب ساخته می شود، به صورت متريک مينکوفسکی درآورد. اين رابطه همچنان در مورد معکوس پذيری ميدان‌های کمکی هم اطلاعات سودمندی در بردارد.

با دترمينان گرفتن از طرفيين رابطه (ث-۰-۱) می فهميم که

$$e \equiv \det e_\mu^a = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} \neq 0$$

بنابراین ميدان‌های کمکی معکوس پذيرند و می توان معکوس آنها يعني e_a^μ را تعريف کرد.

$$\begin{aligned} e_a^\mu e_\nu^a &= \delta_\nu^\mu \\ e_\mu^a e_b^\mu &= \delta_b^a \end{aligned} \quad (\text{ث}-۰)$$

^۱گاه آن را ميدان چارچوب هم می ناميم.

^۲توجه کنيد که e_μ^a دو دسته انديسⁱ متفاوت دارد. انديس‌های لاتين که انديسⁱ کمکی یا انديسⁱ چارچوب هستند و تبدیلى که رویشان اعمال می شود، تبدیلات موضعی لورنتز است. انديس یونانی هم همان انديس‌های متعارف فضازمانی هستند و تبدیلاتⁱ عام رویشان اعمال می شود.

همچنین میدان های کمکی یکتا نیستند؛ هر تبدیل لورنتز $\Lambda \in SO(2, 1)$ (چه موضعی چه سرتاسری) روی میدان های کمکی، یک میدان کمکی جدید حاصل می کند که همچنان در رابطه (ث-۱۰) صدق می کند.

$$(e')_\mu^a = \Lambda_b^a(x) e_\nu^b(x)$$

توجه کنید که در تبدیلات بالا، تبدیل لورنتز فقط روی اندیس های چارچوب اثر می گذارد، تبدیلات عام روی اندیس های یونانی اثر می کنند؛ بنابراین میدان های کمکی به دو شکل می توانند تبدیل شوند.

همچنین می توانیم از میدان های کمکی برای تعریف پایه در فضای فرمهای دیفرانسیلی استفاده کنیم، فرم دیفرانسیلی $e^a \equiv e_\mu^a dx^\mu$ را به این شکل تعریف می کنیم و تansور لوی چویتا با اندیس های چارچوب اینطور تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\rho} &= e^{-1} \epsilon_{abc} e_\mu^a e_\nu^b e_\rho^c \\ \epsilon^{\mu\nu\rho} &= e \epsilon^{abc} e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho \end{aligned} \quad (\text{ث-۳-۰})$$

مشتق هموردا هم به شکل مشابه از یک مشتق عادی با یک هموستار ساخته می شود که به صورت نمادین است. $D = \partial + \Gamma$

این هموستار متشکل از یک سری ۱- فرمهاست که آن را هموستار اسپینی می نامیم. هموستار اسپینی را با $\omega_\mu^{ab} dx^\mu = \omega^{ab}$ نشان می دهیم که این ۱- فرم دیفرانسیلی روی اندیس های چارچوب خود خاصیت پادتقارنی دارد: $\omega^{ab} = -\omega^{ba}$.

اما حالا به ارتباط بین هموستار اسپینی و هموستار لوی چویتا می پردازیم. این دو هموستار بی ارتباط نیستند و اینطور نیست که دو ساختار کاملا مستقل از هم روی خمینه تعریف کرده باشیم؛ راه پیدا کردن ارتباط این دو باهم این است که یک میدان برداری دلخواه مثل $X = X^\mu \partial_\mu$ تعریف کنیم و یک بار مشتق هموردای آن را در پایه های مختصاتی حساب کنیم، بار دیگری همان میدان برداری را در پایه های Driebein بنویسیم و مشتق هموردا را مجددا حساب کنیم. چیزی که حاصل می شود رابطه‌ی بین هموستار اسپینی و هموستار لوی چویتا است که به شکل زیر است:

$$\omega_\mu^a{}_b = e_\nu^a e^\lambda_b \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - e^\lambda_b \partial_\mu e_\lambda^a \quad (\text{ث-۴-۰})$$

مشابه هموستار لوی چویتا در نسبیت عام که خود تانسور نبود و تبدیلات غیربدیهی داشت؛ هموستار اسپینی هم تحت تبدیلات چارچوب (یعنی تبدیلات لورنتز موضعی) رفتار نابدیهی دارد؛ اما ما را قادر

می سازد تا کمیت هایی بسازیم که تحت تبدیلات چارچوب خوش رفتار هستند. هموستار اسپینی تحت تبدیل چارچوب به شکل زیر تغییر می کند:

$$\omega_b^a \rightarrow (\Lambda^{-1})_c^a d\Lambda_b^c + (\Lambda^{-1})_c^a \omega_d^c \Lambda_b^d$$

و به عنوان مثال، کمیت ۲ - فرم پیچش هموستار که به شکل زیر تعریف می شود:

$$T^a \equiv de^a + \omega_b^a \wedge e^b \quad (\text{ث}-۰)$$

تحت تبدیلات لورنتز روی اندیس های چارچوب، مثل یک بردار رفتار می کند یعنی $T^a \rightarrow \Lambda^a_b T^b$. می توانیم ببینیم که کمیت تعریف شده واقعا همان معنی پیچش در نسبیت عام را دارد، یعنی قسمت پادتقارنی هموستار لوی چویتا.

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\lambda &= e_\mu^\lambda T_{\mu\nu}^a \\ &= e_\mu^\lambda (\partial_\nu e_\mu^a - \partial_\mu e_\nu^a + \omega_\mu^a{}_b e_\nu^b - \omega_\nu^a{}_b e_\mu^b) \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \end{aligned} \quad (\text{ث}-۰)$$

که در خط دوم از رابطه (ث-۰۵) جاگذاری کرده ایم و در خط آخر هم از رابطه (ث-۰۴)، هموستار اسپینی را بر حسب هموستار لوی چویتا نوشتیم.

پس از بیان این مقدمات هندسی، به مقصودمان که بررسی نسبیت عام در فرمول بندی اول است می پردازیم. یعنی قرار است کنش اینشتین-هیلبرت را بر حسب e و ω بازنویسی کنیم. به این منظور مشاهده می کنیم که

$$d\sqrt{-g} = edx^\mu dx^\nu dx^\rho = \frac{1}{3!} e \epsilon_{\mu\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \quad (\text{ث}-۰)$$

حالا اگر از (ث-۰۳) بر حسب میدان های کمکی جایگذاری کنیم و از تعریف $e^a \equiv e_\mu^a dx^\mu$ استفاده کنیم؛ می فهمیم که

$$d\sqrt{-g} = \epsilon_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c \quad (\text{ث}-۰)$$

تبدیل جمله ای متناسب با اینها در کنش اینشتین-هیلبرت با معرفی نمایش دوگان (که فقط در سه بعد امکان پذیر است) صورت می گیرد. تانسور اینها در اندیس های چارچوب به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} R^{ab} &= \frac{1}{\sqrt{g}} R_{\mu\nu}^{ab}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ R_{\mu\nu}^{\lambda\sigma} &= e_a^\lambda e_b^\sigma R_{\mu\nu}^{ab} \end{aligned} \quad (\text{ث}-۰)$$

نمایش دوگان هم به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} R_a &\equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abc}R^{bc} \leftrightarrow R^{ab} \equiv -\epsilon^{abc}R_c \\ \omega_a &\equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^{bc} \leftrightarrow \omega^{ab} \equiv -\epsilon^{abc}\omega_c \end{aligned} \quad (\text{ث}-۰)$$

می‌توانیم مشاهده کنیم که

$$\begin{aligned} \epsilon_{abc}e^a \wedge R^{bc} &= \frac{1}{2}e\epsilon_{\mu\alpha\beta}R_{\nu\rho}^{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu\rho}d^3x \\ &= d^3x\sqrt{-g}R \end{aligned} \quad (\text{ث}-۱)$$

با جمع‌کردن دو جمله‌ی فوق، کنش اینشتین-هیلبرت در فرمول بندی مرتبه‌ی اول به شکل زیر است.

$$S_{\text{EH}}[e, \omega] = \frac{1}{16\pi G} \int_M \left(2e^a \wedge R_a[\omega] - \frac{\Lambda}{3}\epsilon_{abc}e^a \wedge e^b \wedge e^c \right). \quad (\text{ث}-۱)$$

اندکی با واژگان آلمانی برای اشاره به پایه‌های کمکی آشنا بشویم. میدان‌های کمکی در ابعاد مختلف (بسته به ابعاد) نام‌های خاصی دارند، که اینجا اشاره‌ی مختصری به این نام‌ها می‌کنیم. در تمای این نام‌گذاری‌ها، جزء اول عددی است که بعدضرا را بیان می‌کند و جزء دوم، یعنی *bein*، به معنا «پا» است.

۱. به پایه‌ی کمکی فضای یکبعدی، *Einbein* گفته می‌شود. حتما در مسئله‌ی انتشار ذره‌ی نسبتی میدان کمکی $e = \sqrt{g_{tt}}$ کمکی را دیده‌ایم که یک متغیر کمکی است و روی مسیر ذره تعریف می‌شود.

۲. پایه‌های کمکی فضای دو بعدی *Zweibein* نامدارند و مطابق $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$ تعریف می‌شوند.

۳. پایه‌های کمکی فضای سه بعدی *Driebein* نام دارند.

۴. پایه‌های کمکی فضای چهار بعدی در آلمانی *Vierbein* گفته می‌شوند. هم‌چنین واژه‌ی اصالتاً یونانی *Tetrad* هم برای اشاره به این پایه‌های کمکی است.

۵. برای ابعاد بالاتر از چهار هم نام‌گذاری هست؛ اما واژه‌ی عمومی *Vielbein* (به معنای «چندپایه») به آن‌ها اطلاق می‌شود.

پیوست ج

مقدمه ای کوتاه بر نظریه های Chern-Simons و WZW

ج-۱ نظریه‌ی Chern-Simons

در این قسمت، تنها نظریه‌ی توبولوژیک Chern-Simons را توصیف می‌کنیم و به ویژگی‌هایی که برای اهداف ما در بخش ۳ موردنبیاز است، اشاره می‌کنیم.

کنش Chern-Simons برای یک گروه فشرده‌ی G به شکل زیر داده می‌شود.

$$S_{\text{CS}}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{\gamma}{4} A \wedge A \wedge A \right) \quad (1-1-7)$$

که k ثابت مرحله نامیده می‌شود. A نمایانگر ۱- فرم با مقدار در جبر لی \mathfrak{g} است، یعنی $A = A_\mu dx^\mu$ همچنین $\text{Tr} \, \text{شانگر} \, \text{فرم دوخطی} \, \text{ناتبهگن روی} \, \text{جبر لی} \, \mathfrak{g}$ است^۱.

با نوشتن $A = A^a T_a$ ، که T_a مولدهای جبری هستند، جمله‌ی اول کنش (ج-۱-۱) ، مشاهده می‌کنیم که

$$\text{Tr}[A \wedge dA] = \text{Tr}(T_a T_b)[A^a \wedge dA^b]$$

این شرط به این خاطر است که تمامی میدان‌های پیمانه‌ای ظاهرشده در کنش، باید جمله‌ی جنبشی داشته باشند. تمامی جبرهای لی نیمه‌ساده واجد چنین فرم دوخطی ناتیجه‌گذاری هستند.

این یعنی $d_{ab} \equiv \text{Tr}(T_a T_b)$ نقش متریک در جبر لی \mathfrak{g} را بازی می‌کند و به همین خاطر باید ناتبهگن باشد.

با وردش دادن کنش بالا و همچنین انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، حاصل می‌شود که

$$\delta S_{\text{CS}}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr}(\mathfrak{d}\delta A \wedge (dA + A \wedge A)) - \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M} \text{Tr}(A \wedge \delta A) \quad (\text{ج-۱-۲})$$

اگر δA طوری انتخاب شود که روی مرز خمینه‌ی \mathcal{M} ، یعنی $\partial\mathcal{M}$ صفر شود،^۲ معادله‌ی حرکت را به دست می‌آوریم.

$$F \equiv dA + A \wedge A = 0 \quad (\text{ج-۱-۳})$$

که F یک ۲-فرم با مقدار در جبر لی \mathfrak{g} است و انحنای میدان‌های پیمانه‌ای A را می‌سنجد.

این معادله، به شکل موضعی نتیجه می‌هد که

$$A = G^{-1} dG \quad (\text{ج-۱-۴})$$

این یعنی که میدان A ، تبدیلی پیمانه‌ای از پیکربندی بدیهی $0 = A$ است؛ به بیانی دیگر، A پیمانه‌ی خالص است.^۳

این مشاهده به ما می‌فهماند که نظریه‌ی Chern-Simons درجه‌ی آزادی انتشارشونده ندارد و در حقیقت یک نظریه‌ی میدان توپولوژیک است. به همین دلیل هم است که می‌تواند با یک نظریه‌ی گرانشی که درجه‌ی آزادی انتشارشونده ندارد، معادل شود.

ج-۲ نظریه‌ی WZW

با مدل سیگمای غیرخطی شروع می‌کنیم و با افزودن جمله‌ی Wess-Zumino ناهنجاری همدیس این مدل را برطرف می‌کنیم تا به مدل WZW برسیم.

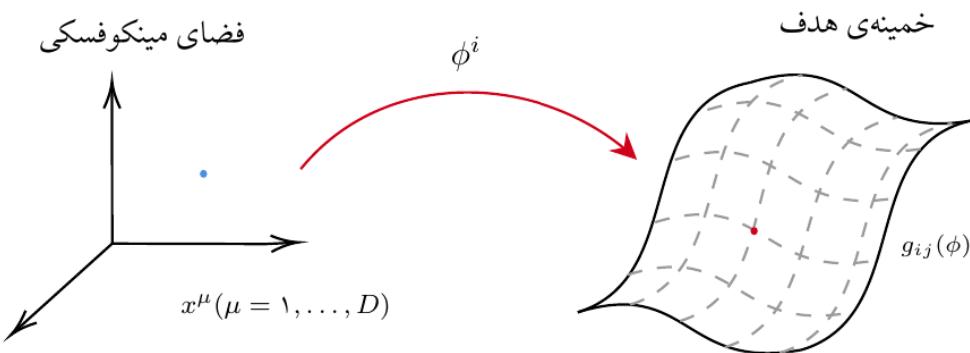
^۲ یا به سیاق فصل ^۳ می‌توانیم از کنش بهبودیافته استفاده کنیم تا با وجود صفرنشدن وردش جمله‌ی مرزی، اصل وردش خوش‌تعیف باقی بماند.

^۳ البته به‌شکل سراسری لزوماً A پیمانه خالص نیست و ممکن است هولونومی در کار باشد.

ج-۲-۱ مدل سیگمای غیرخطی

مدل Wess-Zumino-Witten یک مدل خاص بر مبنای مدل سیگمای غیرخطی است؛ بنابراین ابتدا مختصررا با مدل سیگمای غیرخطی آشنا می شویم.

مدل سیگمای غیرخطی، تعدادی میدان نرده‌ای ($i = 1, \dots, n$) ϕ^i دارد که نگاشتی از یک فضازمان تخت (مینکوفسکی) به یک خمینه‌ی هدف هستند. خمینه‌ی هدف، یک خمینه ریمانی M_n با بعد حقیقی n است که به یک متریک (ϕ) $g_{ij}(\phi)$ مجهز است. در حقیقت میدان‌های اسکالر به عنوان مختصات روی خمینه‌ی ریمانی تعریف می شوند و از آنجایی که متریک به میدان‌های ϕ (مختصات روی خمینه هدف) بستگی دارد، بنابراین این مدل غیرخطی است.



شکل ج-۱: میدان‌ها در یک مدل سیگمای غیرخطی، نگاشتهایی از فضای تخت به یک خمینه هدف هستند.

کنش این مدل به شکل زیر تعریف می شود:

$$S_\sigma[\phi] = \frac{1}{4a^2} \int d^D x \ g_{ij}(\phi) \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j \quad (ج-۲-۱)$$

که در آن $a > 0$ ثابت جفتیدگی بدون بعد است.

اما مدل Wess-Zumino-Witten که به اختصار آن را WZW می نامیم؛ یک مدل سیگمای غیرخطی خاص است. در این مدل، خمینه‌ی هدف یک گروه لی نیمه‌ساده G است؛ همچنین میدان‌هایی که نگاشت‌هایی از فضای تخت به این خمینه هدف هستند، ماتریسی هستند که با (x) g آنها را نشان می دهیم.

برای فضای تخت دو بعدی که آن را با Σ نشان می دهیم و دو مختصات (φ, τ) را دارد؛ کنش مدل

غیر خطی سیگما اینطور نوشته می شود.

$$S_\sigma[g] = \frac{1}{4a^2} \int_{\Sigma} d^2x \operatorname{Tr} [\eta^{\mu\nu} \partial_\mu g \partial_\nu (g^{-1})] \quad (ج-۲)$$

توجه کنید که برای این که کنش کمیتی نرده ای باشد، باید از ماتریس ها یک عدد بسازیم. بنابراین، از فرم کیلینگ روی گروه لی نیمه ساده استفاده کرده ایم و شرط وجود رد در گروه های لی این است که نیمه ساده باشند (حتی اگر فشرده نباشند).

حالا کمی بیشتر به بررسی این کنش می پردازیم. ابتدا معادله حرکت آن را پیدا می کنیم.

برای ساده سازی کنش توجه می کنیم که :

$$\partial_\nu (g^{-1}) = -g^{-1} \partial_\nu g g^{-1}$$

که به سادگی از رابطه $\partial_\nu (gg^{-1}) = 0$ حاصل می شود. با جایگذاری این جمله در کنش به شکل دیگر کنش می رسیم:

$$S_\sigma[g] = \frac{1}{4a^2} \int_{\Sigma} d^2x \operatorname{Tr} [g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial^\mu g] \quad (ج-۳)$$

این صورت از کنش به وضوح تقارن $g \rightarrow g_L g g_R^{-1} g$ را دارد.

با وردش کنش، معادلات حرکت حاصل می شوند:

$$\begin{aligned} \delta S_\sigma &= \frac{1}{2a^2} \int_{\Sigma} d^2x \operatorname{Tr} [(-g^{-1} \delta gg^{-1} \partial_\mu g + g^{-1} \delta (\partial_\mu g)) g^{-1} \partial^\mu g] \\ &= \frac{1}{2a^2} \int_{\Sigma} d^2x \operatorname{Tr} [\partial_\mu (g^{-1} \delta g) g^{-1} \partial^\mu g] \\ &= -\frac{1}{2a^2} \int_{\Sigma} d^2x \operatorname{Tr} [g^{-1} \delta g \partial_\mu (g^{-1} \partial^\mu g)] \end{aligned} \quad (ج-۴)$$

پس معادله حرکت $\partial^\nu (g^{-1} \partial_\nu g) = 0$ است.

با تغییر مختصات $x^\pm \equiv \tau \pm \frac{1}{2} J_\pm$ معادلات حرکت به شکل زیر نوشته می شوند:

$$\partial_+ J_+ + \partial_- J_- = 0$$

که در آن $J_\pm = g^{-1} \partial_\pm g$ است.

می بینیم که جریان های چپ رو و راست رو، به تنها بی پایسته نیستند؛ در حالی که تقارن ضرب از چپ و ضرب از راست، بایستی دو جریان پایستار بدهند؛ به همین دلیل بایستی کنش اصلاح شود^۴.

^۴ یکی دیگر از دلایل اصلاح نظریه این است که در سطح کلاسیکی این مدل تقارن همدیس دارد، اما بعد از کوانش، این

ج-۲-۲ افزودن جمله‌ی Wess-Zumino

برای حل مشکلاتی که در بخش قبلی دیدیم؛ بایستی جمله‌ی زیر را اضافه کنیم [۹۰]، [۹۱] :

$$S = S_\sigma[g] + k\Gamma[G]$$

که در آن k عددی صحیح است و کنش Wess-Zumino یعنی $\Gamma[G]$ به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \Gamma[G] &= \frac{1}{3} \int_V Tr \left[\left(G^{-1} dG \right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{3} \int_V d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} Tr \left[G^{-1} \partial_\mu G G^{-1} \partial_\nu G G^{-1} \partial_\rho G \right] \end{aligned} \quad (\text{ج-۲-۵})$$

که در آن V یک خمینه سه بعدی است که مرز آن Σ است. همچنین G هم توسعه‌ی میدانها به خمینه‌ی سه بعدی V است^۵ برای بررسی معادلات حرکت، وردش کنش را تحت $G \rightarrow G + \delta G$ محاسبه می‌کنیم، پس از استفاده از قضیه استوکس می‌رسیم به:

$$\delta\Gamma[G] = \int_{\Sigma} d^2x Tr \left[\epsilon^{\mu\nu} \delta g g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g g^{-1} \right] \quad (\text{ج-۲-۶})$$

با ترکیب این معادله حرکت و معادله ای که برای بخش $S_\sigma[g]$ داشتیم، به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2a^2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu (g^{-1} \partial_\nu g) - k \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu (g^{-1} \partial_\nu g) = 0$$

و با بازنویسی در مختصات مخروط نوری $(\partial_t \pm \partial_\phi)$ می‌رسیم به:

$$(1 - 2a^2 k) \partial_+ (g^{-1} \partial_+ g) + (1 + 2a^2 k) \partial_- (g^{-1} \partial_- g) = 0$$

حال می‌توانیم از پارامتر k که معرفی کردیم استفاده کنیم و مقدار آن را طوری انتخاب کنیم که جریان‌ها پایستار شوند.

• اگر $a^2 = -\frac{a}{2k}$ آنگاه $\partial_+ J_+ = 0$ و پایستگی جریان راست رو حاصل می‌شود یعنی $\partial_- J_- = 0$

• برای $a^2 = \frac{a}{2k}$ حتماً k مثبت خواهد بود و پایستگی جریان چپ رو را داریم:

تقارن شکسته می‌شود و برای بازگرداندن تقارن همدیس در سطح کوانتمی نیاز به جملات جدید در کنش خواهیم داشت که جمله‌ی Wess-Zumino دقیقاً همین کار را می‌کند.
^۵ توجه کنید که توسعه‌ی یک خمینه با داشتن مرزش یکتا نیست، همچنین توسعه‌ی میدان‌های g به شکلی که $g|_{\partial V} = g$ هم لزوماً یکتا نیست. پس تعریف Γ به شکل فوق دارای ابهام است، اما خوشبختانه در گروه فشرده‌ی $SL(2, \mathbb{R})$ و روی فضای دو بعدی تخت، مشکلی از لحاظ ابهام در تعریف نداریم. برای اطلاع بیشتر در این مورد به [۹۲] رجوع کنید.

با انتخاب $a^2 = -\frac{a}{2k^2}$ به کنش WZW می رسیم که گاهی آن را WZNW هم می گویند.

$$S_{WZW}[g] = \frac{k}{2} \int d^4x Tr[\eta^{\mu\nu} g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g] + k\Gamma[G] \quad (7-2)$$

جوابهای معادله حرکت این کنش یعنی $\partial_+(g^{-1}\partial_-g) = 0$ به شکل $g = \theta_+(x^+)\theta_-(x^-)$ هستند که توابع $\theta_+(x^+)$ و $\theta_-(x^-)$ دلخواه هستند.

همچنین این مدل دو جریان پایستار دارد که به $J_+ \equiv -\partial_+ gg^{-1}$ و $J_- \equiv g^{-1}\partial_- g$ هستند. می توان به سادگی دید که این کنش تحت تبدیل $(x^+)g\Theta_-^{-1}(x^-) \rightarrow g$ ناوردادست و جریان های پایسته این تبدیل همان دو جریانی است که آورده شد. بنابراین کاری که با افزودن جمله Γ Wess-Zumino کردیم مثل این بود که یک تقارن سرتاسری را پیمانه ای کردیم.

پیوست چ

جمله‌ی مرزی گیبونز-هاوکینگ-یورک در کنش اینشتین-هیلبرت

کنش هیلبرت-اینشتین را دیده‌ایم و از وردش گرفتن آن به معادله معروف اینشتین رسیده‌ایم. از معادلات وردشی زیر

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \\ \delta R_{\alpha\beta} &= \nabla_\mu(\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta}) - \nabla_\beta(\delta\Gamma^\mu_{\alpha\mu})\end{aligned}\quad (چ-۱-۰)$$

دانستیم که وردش کنش اینشتین-هیلبرت، به شکل زیر است.

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R)\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g} d^4x \quad (چ-۲-۰)$$

که چون هر دو جمله‌ی رابطه دوم از معادلات (چ-۱-۰) به شکل مشتق کامل هستند، استفاده از قضیه استوکس نتیجه می‌داد که باید این جمله سهمی در دینامیک نداشته باشد.

حالا می‌خواهیم دقیق‌تر بررسی کنیم که وردش این جمله در حالت کلی (اگر خمینه مرزدار باشد یا حتی خمینه‌های غیرفسرده که مرزشان به شکل مرز همدیس دیده می‌شود) چه سهمی دارد.

چ-۱ وردش کنش و ساده کردن جمله مرزی

توجه کنید که در نهایت، معادله‌ی حرکت ما تغییری نمی‌کند؛ بلکه ما باید به شکل دستی، جمله‌ای به کنش اضافه کنیم که بتواند جمله‌ی دوم (چ-۰) را خنثی کند؛ بعدا می‌بینیم که این جمله جدید تعریف هندسی بسیار خوشایند و شسته‌رفته‌ای دارد.

فعلا باید از قضیه استوکس استفاده کنیم تا جمله‌ی مرزی را روشن تر بینیم:

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\mu(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu) - \nabla_\mu(g^{\alpha\mu}\delta\Gamma_{\alpha\theta}^\theta) \quad (\text{چ-۱-۱})$$

در این معادله، فقط از خط اتحاد دوم معادلات (چ-۰) بهره برده‌ایم؛ به علاوه‌ی این که اندیس تکراری μ را با θ عوض کرده‌ایم تا بتوانیم از آن برای اندیس مشتق هموردا استفاده کنیم.

حالا می‌توانیم دقیق‌تر بینیم که چرا این جمله مشتق کامل است؛ چرا که به شکل δV^μ است که در آن

$$\delta V^\mu = g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu - g^{\alpha\mu}\delta\Gamma_{\alpha\theta}^\theta. \quad (\text{چ-۱-۲})$$

حالا از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم؛ اول قضیه را بینیم.

قضیه استوکس:

$$\int_{\Sigma} \nabla_\mu V^\mu \sqrt{-g} d^4x = \int_{\partial\Sigma} \epsilon V^\mu n_\mu \sqrt{|h|} d^3y$$

که در آن n^α بردار یکه عمود بر سطح مرز خمینه است، h_{ab} متریک القایی از خمینه Σ روی مرز خمینه یعنی $\partial\Sigma$ است. همچنین $n^\mu n_\mu = \epsilon$ تنها مقادیر $1 \pm i$ را می‌گیرد و جهت گیری بردار عمود به سطح را مشخص می‌کند. ^a در نهایت y هم مختصات‌های روی مرز هستند. در شکل چ-۱ این اجزا را مشاهده می‌کنید.

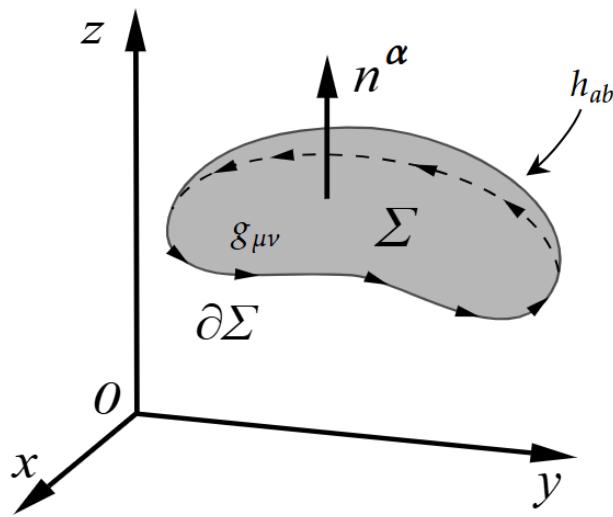
^b منظور از جهت‌گیری این است که آیا این بردار رو به داخل خمینه است یا خارج آن. دقیقاً مثلاً همان چیزی که برای قضیه استوکس در سه بعد دیده‌ایم.

$$d\Sigma^\mu = \epsilon n^\mu \sqrt{|h|} d^3y$$

در حقیقت همان فرم حجم سه بعدی ناوردای روی خمینه مرزی است.

برای استفاده از قضیه استوکس، لازم است که مقدار $\delta V^\mu n_\mu$ را روی مرز خمینه حساب کنیم. اینجا لازم است که به یاد داشته باشیم که روی مرز متریک وردشی ندارد؛ دقیقاً مشابه مکانیک کلاسیک که دو سر مسیر وردش‌ها را صفر می‌کردیم؛ پس

$$\delta g_{\alpha\beta} \Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0 = \delta g^{\alpha\beta} \Big|_{\partial\mathcal{M}} \quad (\text{چ-۱-۳})$$



شکل چ-۱: نمایی از خمینه‌ی سه‌بعدی Σ با مرز فشرده‌ی $\partial\Sigma$ که متريک داخل توده و مرز آن به ترتیب h_{ab} و $g_{\mu\nu}$ است.

اول مقدار $\delta\Gamma$ را روی مرز حساب می‌کنیم (با فرض عدم تغییر متريک روی مرز یا همان (چ-۱-۳) اين کار را انجام می‌دهیم.)

$$\begin{aligned} \left. \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right|_{\partial\mathcal{M}} &= \frac{1}{\sqrt{g}} g^{\mu\nu} (\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}) \\ \left. g^{\alpha\mu} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\beta \right|_{\partial\mathcal{M}} &= \frac{1}{\sqrt{g}} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\alpha\beta,\nu} - \delta g_{\nu\beta,\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{چ-۱-۴})$$

در خط سوم معادله بالا، جای اندیس‌هایی را که رویشان جمع است، عوض کردہ‌ایم؛ یعنی جای α و ν را و سپس از متقارن بودن جمله اول داخل پرانتز تحت این تغییر استفاده کردیم. حالا می‌توانیم در تعریف δV^μ از معادله (چ-۱-۲) جایگذاری کنیم:

$$\begin{aligned} \left. \delta V^\mu \right|_{\partial\mathcal{M}} &= \frac{1}{\sqrt{g}} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}) - \frac{1}{\sqrt{g}} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\alpha\beta,\nu} - \delta g_{\nu\beta,\alpha}) \\ &= g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}) \end{aligned} \quad (\text{چ-۱-۵})$$

و حالا می‌توانیم حاصل را در n_μ ضرب کنیم، تا یک قدم به استفاده از قضیه استوکس نزدیک‌تر شویم:

$$\begin{aligned}\delta V^\mu n_\mu \Big|_{\partial M} &= n^\nu g^{\alpha\beta} (\delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}) \\ &= n^\nu (\epsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta}) (\delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}) \\ &= n^\nu h^{\alpha\beta} (\delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu})\end{aligned}\quad (6-1-\text{ق})$$

در خط دوم معادله بالا، از تجزیه متريک خمينه M به دو متريک خمينه مرزی و متريک در زيرفضای يك بعدی عمود به آن استفاده کرده ايم^۱. برای رسیدن به خط سوم هم از اين نكته استفاده کردیم که $n^\nu n^\alpha n^\beta$ نسبت به تعويض انديس های ν و α متقارن است؛ اما عبارت داخل پرانتز پادمتقارن است، بنابراین حاصل ضربشان صفر می‌شود.

حالا استدلال می‌کنیم که جمله‌ی اول در رابطه (چ-۶) صفر می‌شود. چون تغييرات متريک روی مرز صفر است، پس مشتق تغييرات متريک (روی مرز) هم باید صفر باشد^۲ یا $\delta g_{\alpha\beta,\gamma} e_c^\gamma = 0$ که تانسورهای e_c^γ وظيفه تصوير کردن يك كميت از روی خمينه به روی مرز را به عهده دارند. اين يعني :

$$h^{\alpha\beta} \delta g_{\mu\beta,\alpha} = h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta \delta g_{\mu\beta,\alpha} = 0 \quad (7-1-\text{چ})$$

پس خواهیم داشت:

$$n^\mu \delta V_\mu \Big|_{\partial M} = -h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\nu} n^\nu \quad (7-1-\text{چ})$$

با جايگزاری در رابطه استوکس به اين رابطه می‌رسیم:

$$\delta S_{bd} = -\frac{1}{16\pi} \int_{\partial M} \epsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\nu} n^\nu \sqrt{|h|} d^3y \quad (7-1-\text{چ})$$

^۱ مراجع مروری خوب برای آشنایی با هندسه ابررویه‌ها، [۸۱] و [۹۳] هستند.

^۲ برای درک بهتر، وضعیت را سه بعدی تصور کنید؛ اگر تابعی مانند $f(x, y, z)$ داشته باشیم که روی \mathbb{R}^3 تعریف شده باشد و مثلاً روی صفحه‌ی $z = 0$ ثابت باشد؛ مشتق جهتی این تابع در راستای هر خمی که روی این صفحه تعریف شده باشد، صفر است.

چ-۲ وردش جمله گیبونز-هاوکینگ-یورک و اضافه کردن آن به کنش اصلی

جمله GHY به شکل زیر است:

$$S_{\text{GHY}} = \frac{1}{\lambda\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \epsilon \sqrt{|h|} K \quad (\text{چ-۲-۱})$$

که در آن K رد انحنای خارجی رویه‌ی مرز است که در خمینه اصلی جانشانی شده است.

از تعریف انحنای خارجی بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} K &= \nabla_\alpha n^\alpha \\ &= g^{\alpha\beta} \nabla_\beta n_\alpha \\ &= (\epsilon n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta}) \nabla_\beta n_\alpha \\ &= h^{\alpha\beta} \nabla_\beta n_\alpha \\ &= h^{\alpha\beta} (\partial_\beta n_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma n_\gamma) \end{aligned} \quad (\text{چ-۲-۲})$$

در خط دوم از این استفاده کردیم که به سادگی از $n^\alpha \nabla_\beta n_\alpha = 0$ نتیجه می‌شود.

پس وردش رد انحنای خارجی بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta K &= -h^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma n_\gamma \\ &= -\frac{1}{\lambda} h^{\alpha\beta} n_\gamma g^{\gamma\sigma} (\delta g_{\sigma\alpha,\beta} + \delta g_{\sigma\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\sigma}) \\ &= -\frac{1}{\lambda} h^{\alpha\beta} (\delta g_{\sigma\alpha,\beta} + \delta g_{\sigma\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\sigma}) n^\sigma \\ &= \frac{1}{\lambda} h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\sigma} n^\sigma \end{aligned} \quad (\text{چ-۲-۳})$$

که در معادله آخر، بازهم از صفر شدن مشتق تغییرات متريک روی مرز استفاده کردیم ^۳.

بنابراین پیدا کردیم که

$$\delta S_{\text{GHY}} = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} \epsilon h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu \sqrt{|h|} d^3y \quad (\text{چ-۲-۴})$$

اگر دقت کنید، این جمله دقیقاً جمله‌ی مرزی در معادله‌ی (چ-۱-۹) را خنثی می‌کند.

^۳ پایین معادله‌ی (چ-۱-۶) کاملاً توضیح داده شده است.

پس اگر کنش اینشتین-هیلبرت را به شکل

$$\begin{aligned} S_{\text{grav}} &= S_{\text{EH}} + S_{\text{GHY}} \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} R \, d^4x + \frac{1}{\Lambda\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \, \epsilon \sqrt{|h|} K \end{aligned} \quad (\text{چ-۲-۵})$$

بنویسیم، وردش کنش خوش تعریف می‌شود و جملات مرزی همدیگر را حذف می‌کنند تا در نهایت به معادله‌ی معروف اینشتین برسیم.

کنجکاوی بیشتر:

حتی می‌توان گفت که در فضاهای غیرفسرده که مرز بی‌نهایت دارند، نیاز به افزودن یک جمله دیگر هم هست که مانع از بی‌نهایت شدن حاصل انتگرال کنش بشود، بخصوص در فضاهای مجانباً پاددوستیه این مشکل خیلی پیش می‌آید.

جمله جدید این است:

$$S_{\text{Asymp}} = -\frac{1}{\Lambda\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \, \epsilon \sqrt{|h|} K. \quad (\text{چ-۲-۶})$$

که ایندفعه K انحنای خارجی مرز بی‌نهایت است که در خمینه اصلی جانشانی شده است.

توجه کنید که این جمله هم مثل جمله‌ی گیبونز-هاوکینگ-یورک غیردینامیکی است و هدفش حذف واگرایی‌های بوجود آمده به علت غیرفسرده بودن فضاست؛ در حالتی که فضا فشرده باشد، مرزی در کار نخواهد بود و حاصل این انتگرال صفر است.

Bibliography

- [1] J. D. Brown and M. Henneaux. Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity. *Commun. Math. Phys.*, 104:207–226, 1986.
- [2] T. G. Mertens and G. J. Turiaci. Solvable models of quantum black holes: a review on jackiw–teitelboim gravity. *Living Reviews in Relativity*, 26(1), July 2023.
- [3] L. Donnay. Asymptotic dynamics of three-dimensional gravity, 2016.
- [4] B. Oblak. Bms particles in three dimensions. *Springer Theses*, 2017.
- [5] A. Maloney and E. Witten. Quantum gravity partition functions in three dimensions. *Journal of High Energy Physics*, 2010(2), Feb. 2010.
- [6] G. Sarosi. Ads₂ holography and the syk model. In *Proceedings of XIII Modave Summer School in Mathematical Physics — PoS(Modave2017)*, Modave2017. Sissa Medialab, Mar. 2018.
- [7] C. Teitelboim. Gravitation and hamiltonian structure in two spacetime dimensions. *Physics Letters B*, 126(1):41–45, 1983.
- [8] R. Jackiw. Lower dimensional gravity. *Nuclear Physics B*, 252:343–356, 1985.
- [9] P. Nayak, A. Shukla, R. M. Soni, S. P. Trivedi, and V. Vishal. On the Dynamics of Near-Extremal Black Holes. *Journal of High Energy Physics*, 2018(9):007, 2018.
- [10] A. Blommaert, T. G. Mertens, and H. Verschelde. Fine structure of jackiw–teitelboim quantum gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2019(9):343, 2019.

- [11] P. Schaller and T. Strobl. Diffeomorphisms versus non abelian gauge transformations: An example of 1+1 dimensional gravity, 1994.
- [12] Y. Fan and T. G. Mertens. From quantum groups to liouville and dilaton quantum gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2022(5):014, 2022.
- [13] Y. Fan and T. G. Mertens. Supergroup structure of jackiw-teitelboim supergravity. *Journal of High Energy Physics*, 2022(8):014, 2022.
- [14] E. Witten. Three-dimensional gravity revisited.
- [15] R. M. Wald. *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984.
- [16] A. Almheiri, N. Engelhardt, D. Marolf, and H. Maxfield. The entropy of bulk quantum fields and the entanglement wedge of an evaporating black hole. *Journal of High Energy Physics*, 2019(12), Dec. 2019.
- [17] A. Almheiri and J. Polchinski. Models of ads₂backreactionandholography, 2015.
- [18] N. Callebaut and H. Verlinde. Entanglement dynamics in 2d cft with boundary: entropic origin of jt gravity and schwarzian qm. *Journal of High Energy Physics*, 2019(5), May 2019.
- [19] N. Callebaut. The gravitational dynamics of kinematic space. *Journal of High Energy Physics*, 2019(2), Feb. 2019.
- [20] J. Engelsöy, T. G. Mertens, and H. Verlinde. An investigation of ads2 backreaction and holography. *Journal of High Energy Physics*, 2016(7), July 2016.
- [21] J. Maldacena, D. Stanford, and Z. Yang. Conformal symmetry and its breaking in two dimensional nearly anti-de-sitter space, 2016.
- [22] J. Engelsöy, T. G. Mertens, and H. Verlinde. An Investigation of AdS₂ Backreaction and Holography. *Journal of High Energy Physics*, 2016(7):014, 2016.
- [23] K. Jensen. Chaos in AdS₂ holography. *Physical Review Letters*, 117(11):1200, 2016.
- [24] J. Maldacena, D. Stanford, and Z. Yang. Conformal symmetry and its breaking in two dimensional Nearly Anti-de-Sitter space.
- [25] S. Ryu and T. Takayanagi. Aspects of holographic entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, 2006(08):045–045, 2006.

- [26] P. Saad, S. H. Shenker, and D. Stanford. JT gravity as a matrix integral.
- [27] D. Stanford and E. Witten. Fermionic Localization of the Schwarzian Theory. *Journal of High Energy Physics*, 2017(10):343, 2017.
- [28] T. G. Mertens, G. J. Turiaci, and H. L. Verlinde. Solving the schwarzian via the conformal bootstrap. *Journal of High Energy Physics*, 2017(8), Aug. 2017.
- [29] H. T. Lam, T. G. Mertens, G. J. Turiaci, and H. Verlinde. Shockwave s-matrix from schwarzian quantum mechanics. *Journal of High Energy Physics*, 2018(11), Nov. 2018.
- [30] T. G. Mertens. Towards black hole evaporation in jackiw-teitelboim gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2019(7), July 2019.
- [31] J. BALOG, L. FEHÉR, and L. PALLA. Coadjoint orbits of the virasoro algebra and the global liouville equation. *International Journal of Modern Physics A*, 13(02):315–362, Jan. 1998.
- [32] D. Bagrets, A. Altland, and A. Kamenev. Sachdev–ye–kitaev model as liouville quantum mechanics. *Nuclear Physics B*, 911:191–205, Oct. 2016.
- [33] D. Bagrets, A. Altland, and A. Kamenev. Power-law out of time order correlation functions in the syk model. *Nuclear Physics B*, 921:727–752, Aug. 2017.
- [34] A. Zamolodchikov and A. Zamolodchikov. Liouville field theory on a pseudosphere, 2001.
- [35] A. Alekseev and S. Shatashvili. Path integral quantization of the coadjoint orbits of the virasoro group and 2-d gravity. *Nuclear Physics B*, 323(3):719–733, 1989.
- [36] S. J. Suh. Dynamics of black holes in jackiw-teitelboim gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2020(3), Mar. 2020.
- [37] A. Kitaev and S. J. Suh. Statistical mechanics of a two-dimensional black hole. *Journal of High Energy Physics*, 2019(5), May 2019.
- [38] Z. Yang. The quantum gravity dynamics of near extremal black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2019(5), May 2019.

- [39] T. G. Mertens. The schwarzian theory — origins. *Journal of High Energy Physics*, 2018(5), May 2018.
- [40] A. Blommaert, T. G. Mertens, and H. Verschelde. The schwarzian theory — a wilson line perspective. *Journal of High Energy Physics*, 2018(12), Dec. 2018.
- [41] J. Maldacena. Eternal black holes in anti-de sitter. *Journal of High Energy Physics*, 2003(04):021–021, Apr. 2003.
- [42] P. Saad, S. H. Shenker, and D. Stanford. Jt gravity as a matrix integral, 2019.
- [43] D. Stanford and E. Witten. Jt gravity and the ensembles of random matrix theory, 2020.
- [44] M. Mirzakhani. Simple geodesics and weil-petersson volumes of moduli spaces of bordered riemann surfaces. *Inventiones mathematicae*, 167:179–222, 2006.
- [45] A. Achúcarro and P. Townsend. A chern-simons action for three-dimensional anti-de sitter supergravity theories. *Physics Letters B*, 180(1):89–92, 1986.
- [46] E. Witten. 2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nuclear Physics B*, 311(1):46–78, 1988.
- [47] M. Bañados. Three-dimensional quantum geometry and black holes. In *AIP Conference Proceedings*, page 147–169. AIP, 1999.
- [48] M. Roeman and P. Spindel. Holonomies, anomalies and the fefferman–graham ambiguity in gravity. *Nuclear Physics B*, 594(1–2):329–353, Jan. 2001.
- [49] M. Henneaux, L. Maoz, and A. Schwimmer. Asymptotic dynamics and asymptotic symmetries of three-dimensional extended ads supergravity. *Annals of Physics*, 282(1):31–66, May 2000.
- [50] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. Topologically massive gauge theories. *Annals of Physics*, 281(1):409–449, 2000.
- [51] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, and P. K. Townsend. Massive gravity in three dimensions. *Physical Review Letters*, 102(20), May 2009.
- [52] G. Barnich and F. Brandt. Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges. *Nuclear Physics B*, 633(1–2):3–82, June 2002.

- [53] G. Barnich. Boundary charges in gauge theories: using stokes theorem in the bulk. *Classical and Quantum Gravity*, 20(16):3685–3697, July 2003.
- [54] G. Compère. Symmetries and conservation laws in lagrangian gauge theories with applications to the mechanics of black holes and to gravity in three dimensions, 2007.
- [55] C. Fefferman and C. R. Graham. The ambient metric, 2008.
- [56] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Action integrals and partition functions in quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 15:2752–2756, May 1977.
- [57] S. d. Haro, K. Skenderis, and S. N. Solodukhin. Gravity in warped compactifications and the holographic stress tensor. *Classical and Quantum Gravity*, 18(16):3171–3180, Aug. 2001.
- [58] V. Balasubramanian and P. Kraus. A stress tensor for anti-de sitter gravity. *Communications in Mathematical Physics*, 208(2):413–428, Dec. 1999.
- [59] M. Henningson and K. Skenderis. Holography and the weyl anomaly. *Fortschritte der Physik*, 48(1–3):125–128, Jan. 2000.
- [60] K. Skenderis and S. N. Solodukhin. Quantum effective action from the ads/cft correspondence. *Physics Letters B*, 472(3–4):316–322, Jan. 2000.
- [61] G. Barnich and C. Troessaert. Aspects of the bms/cft correspondence. *Journal of High Energy Physics*, 2010(5), May 2010.
- [62] G. Barnich, P. Kielanowski, V. Buchstaber, A. Odzijewicz, M. Schlichenmaier, and T. Voronov. A note on gauge systems from the point of view of lie algebroids. In *AIP Conference Proceedings*. AIP, 2010.
- [63] C. Troessaert. Enhanced asymptotic symmetry algebra of ads 3. *Journal of High Energy Physics*, 2013(8), Aug. 2013.
- [64] G. Compère, W. Song, and A. Strominger. New boundary conditions for ads3. *Journal of High Energy Physics*, 2013(5), May 2013.
- [65] H. Bondi, M. G. J. van der Burg, and A. W. K. Metzner. Gravitational waves in general relativity. 7. waves from axisymmetric isolated systems. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 269:21–52, 1962.

- [66] R. Sachs. Asymptotic symmetries in gravitational theory. *Phys. Rev.*, 128:2851–2864, Dec 1962.
- [67] B. Oblak. From the lorentz group to the celestial sphere, 2018.
- [68] G. Barnich and H. A. González. Dual dynamics of three dimensional asymptotically flat einstein gravity at null infinity. *Journal of High Energy Physics*, 2013(5), May 2013.
- [69] R. Dijkgraaf, J. Maldacena, G. Moore, and E. Verlinde. A black hole farey tail, 2007.
- [70] J. Maldacena and A. Strominger. Ads3 black holes and a stringy exclusion principle. *Journal of High Energy Physics*, 1998(12):005–005, Dec. 1998.
- [71] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli. Black hole in three-dimensional spacetime. *Physical Review Letters*, 69(13):1849–1851, Sept. 1992.
- [72] S. Deser, R. Jackiw, and G. ’t Hooft. Three-dimensional einstein gravity: Dynamics of flat space. *Annals of Physics*, 152(1):220–235, 1984.
- [73] E. Witten. Coadjoint orbits of the virasoro group. *Communications in Mathematical Physics*, 114:1–53, 1988.
- [74] H. Iwaniec. Spectral methods of automorphic forms. 2002.
- [75] M. Kleban, M. Porrati, and R. Rabada. Poincare recurrences and topological diversity. *Journal of High Energy Physics*, 2004(10):030–030, Oct. 2004.
- [76] J. Manschot. Ads3partition functions reconstructed. *Journal of High Energy Physics*, 2007(10):103–103, Nov. 2007.
- [77] K. Krasnov. On holomorphic factorization in asymptotically ads 3d gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 20(18):4015–4042, Aug. 2003.
- [78] E. Witten. Three-dimensional gravity revisited, 2007.
- [79] S. Carlip. Logarithmic corrections to black hole entropy, from the cardy formula. *Classical and Quantum Gravity*, 17(20):4175–4186, Sept. 2000.
- [80] Black holes and quantum information.

- [81] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 7 2019.
- [82] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. 2003. Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics).
- [83] J. C. Baez and J. P. Muniain. Gauge fields, knots and gravity. 1994.
- [84] A simple model of quantum holography.
- [85] S. Sachdev and J. Ye. Gapless spin-fluid ground state in a random quantum heisenberg magnet. *Physical Review Letters*, 70(21):3339–3342, May 1993.
- [86] V. Rosenhaus. An introduction to the syk model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 52(32):323001, July 2019.
- [87] R. Dijkgraaf and E. Witten. Developments in topological gravity. *International Journal of Modern Physics A*, 33(30):1830029, 2018.
- [88] E. Witten. Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. *Surveys Diff. Geom.*, 1:243–310, 1991.
- [89] M. Kontsevich. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix airy function. *Commun. Math. Phys.*, 147:1–23, 1992.
- [90] E. Witten. Nonabelian Bosonization in Two-Dimensions. *Commun. Math. Phys.*, 92:455–472, 1984.
- [91] S. P. Novikov. The hamiltonian formalism and a many-valued analogue of morse theory. *Russian Mathematical Surveys*, 37(5):1, oct 1982.
- [92] R. Floreanini, R. Percacci, and E. Sezgin. Sigma models with purely wess-zumino-witten actions. *Nuclear Physics B*, 322(1):255–276, 1989.
- [93] matthias blau. Lecture notes on general relativity, 2024. Lecture notes on General Relativity.

واژه‌نامه

الف	
انحنای خارجی	extrinsic curvature.....
اندازه صفر	measure zero.....
اندازه‌ی انتگرال‌گیری	integration measure.....
اندیس‌های چارچوب	frame indices.....
انرژی آزاد	free energy.....
اینستانتن	instanton.....
ب	
بار سطحی	surface charge.....
بار مرکزی	central charge.....
بار نوثر	Noether charge.....
بازبهنجارپذیر	renormalizable
بازتعریف	redefinition
بازمقیاس	rescale
بازپرماش	reparametrization
بدون پیچش	torsion free
براکت لی	Lie bracket
براکت پواسون	Poisson bracket
آشوب کوانتمی	quantum chaos.....
آنتروپی	entropy
آنتروپی بکشتاین-هاوکینگ	Bekenstein-Hawking
entropy	entropy
اتحاد جاکوبی	Jacobi identity.....
اثر اختلالی	perturbative effect.....
اثر غیراختلالی	non-perturbative effect
اثر هم‌تافته	symplectic action
اثرات کوانتمی	quantum effects.....
اربیلد	orbifold
اسکالار ریچی	Ricci scalar
اصل تمام‌نگاری	holographic preinciple
اصل وردش	variational principle
اضافه‌شماری	overcounting
افتوخیزهای کوانتمی	quantum fluctuations
انتشارگر مرزی	boundary propagator
انتگرال مسیر	path integral
انتگرال گاوی	Gaussian integral

integration contour	پربند انتگرال‌گیری	بردار الحاقی
parametrization	پرمایش	بردار هم‌الحاقی
backreaction	پس واکنش	برگ
null	پوچ	برگ‌بندی
pure gauge	پیمانه خالص	بسط توپولوژیک
Fefferman-Graham gauge	پیمانه ففرمن-گرام	بسط فوریه
light cone gauge	پیمانه مخروط نور	بعد مقیاسی
conformal gauge	پیمانه همدیس	بعد همدیس
gravitational configuration	پیکربندی گرانشی	بوتسسترپ همدیس
ت		
Dedekind eta function	تابع اتا ددکیند	بی‌نهایت نورگونه آینده‌سو
Bessel function	تابع بسل	بی‌نهایت نورگونه گذشته‌سو
Euler totient function	تابع حسابی اویلر	بی‌نهایت همدیس
Dirac delta function	تابع دلتای دیراک	بی‌نهایت پوچ
Zeta function	تابع زتا	
Selberg zeta function	تابع زتا سلبرگ	
Mobious function	تابع موبیوس	
correlation function	تابع همبستگی	
unnormalized correlation function	تابع همبستگی بهنجار نشده	
partition function	correlation function	
disk partition function	partition function	پاد دوسیته
n-point function	تابع پارش قرص	پاد دوسیته خالی
crossed 4-point function	تابع چند نقطه‌ای	پادتمام‌ریخت
generating functional	تابع چهار نقطه‌ای متقاطع	پادجابه‌جاگر
generating functional	تابعی مولد	پادجمله
پ		
Anti de Sitter		پارامتر بعددار
pure ads		پارامتر خشتی
antiholomorphic		پارامتر پیچش
anticommutator		پایدارساز
counterterm		پایه‌های متعامد
dimensionful parameter		پتانسیل دیلاتونی
moduli parameter		پراکندگی
twist parameter		variance

تحول کوانتومی	quantum evolution	تansور انحنا
black hole	black hole	تansور انرژی تکانه
ترمودینامیک سیامچاله	thermodynamic	تansور تنش
quantum correction	quantum correction	تansور تنش تمام‌نگار
near conformal symmetry.	near conformal symmetry	تansور ریمان
تقارن تقریباً همدیس		
asymptotic symmetries	asymptotic symmetries	تansور لوی‌چویتا
تقارنهای مجانبی		
holomorphic	holomorphic	تansور ولای
تمام‌ریخت	Levi Civita tensor	
holography	holography	تبدیل خیز
hypergeometric functions	hypergeometric functions	تبدیل لاپلاس
توابع فراهندسی		
bulk	bulk	تبدیل لاپلاس معکوس
توده		transformation
توسعه‌ی تحلیلی	analytical continuation	
duplicated	redundant	تبدیل موبیوس
تکثیر شده		
singularity	singularity	تبدیل ولای
تکینگی		
conical singularity	conical singularity	تبدیلات دسته‌ای
cusp	cusp	تبدیلات عام
تیزی		تبدیلات مختصات
ث		
ثابت ساختار	structure constant	تبدیلات پیمانه‌ای
ثابت کیهان‌شناختی	cosmological constant	تبدیلات پیمانه‌ای بدیهی
		transformations
		تبدیلات پیمانه‌ای غیرمجاز
		transformations
		تبدیلات پیمانه‌ای مجاز
		transformations
ج		
Lie algebra	Lie algebra	تپ انرژی
جبر لی نیمه‌ساده	semi-simple Lie algebra	تجزیه (فاکتور) شدن
جبر ویت	Witt algebra	تجزیه‌ی تمام‌ریخت
جبر پواسون	Poisson algebra	تجزیه‌ی شلواری

double scaling limit	حد دومقیاسه	جبر کلیفرد
IR limit	حد فروسرخ	جرم پلانک
near horizon limit	حد نزدیک افق	جفتیدگی
semi-classical limit	حد نیمه-کلاسیک	جفتیدگی گرانشی
decoupling limit	حد واجفتیدگی	جمع رامانوجان
solvable	حل پذیر	جمع کلوسترمن

خ

off-shell	خارج غشا	جمله‌ی توپولوژیک
integral curve	خم انتگرال	جمله‌ی جنبشی
closed timelike curve	خم بسته‌ی زمان‌گونه	جمله‌ی مرزی گیبونز-هاوکینگ-یورک
manifold	خمینه	Hawking-York boundary term
orientable manifold	خمینه جهت‌پذیر	جهان‌رویه
pseudo-Riemannian manifold	خمینه شهریمانی	جهان‌شمول
compact manifold	خمینه فشرده	جهان‌شمولیت
symplectic manifold	خمینه همتافته	Jackiw-Teitelboim
Poisson manifold	خمینه پواسون	چنبره
automorphism	خودریختی	چگالی حالت

د

damane در انرژی ثابت	دامنه در انرژی ثابت
damane‌ی پراکندگی	دامنه‌ی پراکندگی
celestial circle	دایره‌ی سماوی
future celestial circle	دایره‌ی سماوی آینده
past celestial circle	دایره‌ی سماوی گذشته
thermal circle	دایره‌ی گرمایی
deteminan تک حلقه	one-loop determinant

ح

descendant states	حالات دودمانی
vacuum state	حالت خلا
Weil-Petterson volume	حجم ویل-پترسون
low energy limit	حد انرژی پایین

submanifold	زیرخمینه	درج
subbundle	زیرکلاف	درج‌های آزادی سرتاسری
finite index subgroup	زیرگروه با شاخص متناهی	درج‌های آزادی موضعی
diagonal subgroup	زیرگروه قطری	درهم‌تندیگی
س		
complex structure	ساختار مختلط	دسته
symplectic structure	ساختار همتافته	دسته‌ی همولوژی
Poisson structure	ساختار پواسون	دستسان
cosmic censorship	سانسور کیهانی	دستسانی
Schwinger-Dyson series	سری شوینگر-دایسون	دماهی هاوکینگ
Poincare series	سری پوانکاره	Weil-Petterson 2-form
tadpole contribution	سهم قورباغه‌ای	Gelfand-Fuchs
melon contribution	سهم هندوانه‌ای	2-cocycle
abuse of notation	سوءاستفاده از نمادگذاری	دوسیته
black hole	سیاهچاله	دوگانی
extremal black hole	سیاهچاله‌ی فرینه	دوگانی پیمانه/گرانش
ش		
flux	شار	رد
vector field flow	شار میدان‌برداری	رفتار اختلالی
boundary condition	شرایط مرزی	روی غشا
falloff condition	شرط افت	رویه‌ی ریمانی
consistency condition	شرط سازگاری	Ryu-Takayanagi
free boundary condition	شرط مرزی آزاد	تاكایاناگی
chiral boundary condition	شرط مرزی دستسان	ز
gauge condition	شرط پیمانه	زمان‌های دور
AdS radius	شعاع پادددوسیته	subleading
د		
insertion
global degree of freedom
local degree of freedom
entanglement
handle
homology class
chiral
chirality
Hawking temperature
Weil-Petterson 2-form
Gelfand-Fuchs

symplectic form	فرم همتافته	ض
canonical symplectic form	فرم همتافته‌ی کانونی	ضرایب لاغرانژ
first order formulation	فرمول‌بندی مرتبه اول	ضرب مستقیم
Majorana fermion	فرمیون مایورانا	ضرب نیمه مستقیم
extremum	فرینه	ضریب شکل طیفی
conical excess	فرونی مخروطی	ط
compactification	فسرده‌سازی	طیف لاپلاسی
near AdS spacetime	فضازمان تقریباً پاد دوسیته	ع
spacelike	فضاگونه	علیت
maximally symmetric	فضای بیشینه‌متقارن	عملگر دو محلی شوارتزی
	spacetime	operator
Teichmuller space	فضای تایشمولر	عملگر نخستین
quotient space	فضای خارج قسمتی	عملگر نقص
phase space	فضای فاز	عملگر ویلسونی
covariant phase space	فضای فاز هموردا	عملگرهای خلق و فنا
moduli space of ...	فضای مازولی رویه‌های ریمانی	operators
	Riemann surfaces	
asymptotically flat	فضای مجانباً تخت	غشا
	spacetime	غشای پیچیده
asymptotically AdS	فضای مجانباً پاد دوسیته	
	spacetime	
tangent space	فضای مماس	ف
target space	فضای هدف	فرالنتقال
homogenous space	فضای همگن	فرابازبینجاش‌پذیر
universal covering space	فضای پوششی عام	فرابرپتانسیل
		فراچرخش
		فرم حجم لیوویل
		فرم خشتی
	ق	

tangent bundle	کلاف مماس	قاعده زنجیره‌ای	
cotangent bundle	کلاف هم‌مماس	قاعده‌مند	
Euclidean action	کنش اقلیدسی	قانون هوپیتال	
improved action	کنش بهبودیافته	قرص هذلولوی	
Lorentzian action	کنش لورنتزی	قضیه استوکس	
geometric action	کنش هندسی	قضیه داربو	
geometric quantization	کوانتش هندسی	قضیه فروینیوس	
گ		قضیه مدار-پایدارساز	
Hawking-page phase	گذر فاز هاوکینگ-پیچ	قضیه نوثر	
	transition	Gauss-Bonnet theorem	
2d gravity	گرانش دو بعدی	قضیه یکنواخت‌سازی	
quantum gravity	گرانش کوانتومی	قضیه یکنواخت‌سازی سطوح ریمانی	
graviton	گراویتون	of Riemann surfaces	
fundamental group	گروه بنیادی	قطب	
Lorentz group	گروه لورنتز	قطع/برش	
finitely generated group	گروه متناهی تولیدشده		
homotopy groups	گروه هموتوپی	ک	
Virasoro group	گروه ویراسورو	کاهش ابعادی	
Poincare group	گروه پوانکاره	کاهش هامیلتونی	
isometry group	گروه طول‌پا	کرم‌چاله	
Centrally Extended Lie Algebra	گروه لی توسعه‌ی مرکزی یافته	کره سماوی	
isotropy group	گروه همسان‌گرد	کره سماوی آینده	
mapping class group	گروه کلاس‌نگاشت	کره سماوی گذشته	
genus	گونه	Casimir	
genera	گونه‌ها	conjugacy class	
م		کلاس چرن	
		کلاف خطی	

zero modes	مدهای صفر
leading order	مرتبه پیشرو
normal ordered.....	مرتب‌سازی معمول
Schwarzian boundary.....	مرز شوارتزی
conformal boundary	مرز همدیس
geodesic boundary	مرز ژئودزیک
holographic boundary	مرز تمام‌نگار
Schwarzian derivative.....	مشتق شوارتزی
Virasoro character	مشخصه ویراسورو
Euler characteristic	مشخصه اویلر
Euler-Lagrange	معادلات اویلر-لاگرانژ
	equations
Schwarzian equation	معادله شوارتزی
Liouville equation	معادله لیوویل
Euler-Poisson equation..	معادله اویلر-پواسون
Cartan equation	معادله کارتان
deformed	معوج/دگرگون شده
regularization	منتظم‌سازی
regularized.....	منتظم شده
big bang.....	مهبانگ
big crunch.....	مهربم
shock wave.....	موج شوکی
Virasoro generators.....	مولدهای ویراسورو
Lie algebra generators	مولدهای جبر لی
monodromy.....	مونودرومی (تکمقداری)
Hamiltonian vector field.	میدان برداری هامیلتون
Killing vector fields	میدان برداری کیلینگ
	ماتریس‌های بالا مثلثی
	متريک القايی
	متريک تكين
	متريک رايسنر-نوردشتروم ..
	metric
	متريک مينکوف斯基
	متريک هذلولوي
	متريک كامل
	متناقض‌نمای اطلاعات ..
	معجانبا تخت
	محختصات اقلیدسي
	محختصات سرتاسری
	محختصات عقب‌افتاده ..
	محختصات فنچل-نيلسن
	coordinates
	محختصات مخروط نور ...
	محختصات پوانکاره
	محختصات پيش‌رفته
	مدار
	مدار هم‌الحاقی
	مدار ناوردا تحت اثر گروه ..
	مدل سيگماي غيرخطي ..
	مدل پواسون-سيگما
	مدل‌های بعد پاين
	مدهای شوارتزی
	مدهای کالوزا-کلاين

نظریه میدان کوانتومی	quantum field theory	میدان دیلاتون	dilaton field
نظریه انتگرال پذیر	integrable theory	میدان لیوویل	Liouville field
extremal CFT	extremal CFT	میدان پس زمینه	background field
higher spin theories	higher spin theories	میدان کمکی	auxiliary fields
نظریه های اسپین بالا	random matrix theory	میدان برداری راست ناوردا	right-invariant vector
defect	defect	field	
نقص بیضوی	elliptic defects	میدان برداری چپ ناوردا	left-invariant vector field
نقص بیضوی استثنایی	exceptional elliptic defects	میدان برداری کیلینگ مجانبی	asymptotic Killing
		vector field	
نقص سهموی	parabolic defects	میدان نرده‌ای	scalar field
نقص مخروطی	conical defect	میدان‌های مادی	matter fields
نقص هذلولوی	hyperbolic defect	میدان‌های چارچوب	frame fields
نقشه ثابت	fixed point	ن	
نقشه تکین	singular point	ناتبهگن	non-degenerate
نقشه زینی	saddle point	ناحیه (وصله)	patch
نمایش	representation	ناحیه‌ی ناپیوستگی	region of discontinuity
نمایش افکنشی	projective representation	ناهنجری	anomaly
نمایش الحقی	adjoint representation	ناهنجری همدیس	conformal anomaly
نمایش هم الحقی	coadjoint representation	نای	tube
نمایش کاهش ناپذیر	irreducible representation	نزدیک فرینه	near extremal
نمایش یکانی	unitary representation	نشانگان اقلیدسی	Euclidean signature
نمایشی افکنشی	projective representation	نشانگان لورنتزی	Lorentzian signature
نمایه	profile	نظریه اینشتین-ماکسول	Einstein Maxwell theory
Feynman diagram	Feynman diagram	نظریه میدان کوانتومی توپولوژیک	topological
نمودار پنروز	Penrose diagram	quantum field theory	
نورگونه	lightlike		
نگاشت دیفرانسیل	differential map		

convergent.....	همگرا	نگاشت شمولیت
isometric	همگون	نگاشت مومنتوم
Hermitian conjugate	همیوغ هرمیتی	نگاشت نمایی
symplectomorphic.....	هم تافته‌ریخت	نیم فضای بالایی
symplectomorphism	هم تافته‌ریختی	
antipodal identification..	همسانسازی پادسویی ..	و
group homomorphism.....	هم ریختی گروهی	وابرسانی
cocycle.....	هم چرخه	وابرسانی‌های بزرگ
هم‌نگاری دوگانی پاددوسته/میدان همدیس	AdS/CFT dictionary	واحدهای طبیعی
هنرده ترومپت	trumpet geometry	واگرایی
هنرده هم‌تافته	symplectic geometry	وردش
هنرگرد	ensemble	ویژه‌انرژی
هنرگرد ریزکانونی	microcanonical ensemble	ویژه‌تابع
هنرگرد کانونی	canonical ensemble	
هولونومی	holonomy	
ی		
یکریختی گروهی	group isomorphism.....	هامیلتونی خشتی
		همسانسازی
		هموستا لوی‌چویتا
		هموستار
		هموستار اسپینی

Abstract

Gravity models in lower dimensions, particularly in two and three dimensions, are powerful tools for gaining a deeper understanding of the fundamental structure of gravitational and quantum theories. Three-dimensional gravity, due to its simpler and more controllable properties, provides a unique laboratory for studying the geometric and topological features of black holes, as well as the holographic nature of spacetime. On the other hand, two-dimensional gravity models, such as dilaton gravity, play a crucial role in exploring the dynamic mechanisms of horizons and phenomena like black hole evaporation. These models not only allow us to grasp the complexities of quantum gravity in a more accessible language but also pave the way for more advanced research within the framework of string theory and applications of the holographic principle.

In this thesis, we conduct a comprehensive study of two-dimensional JT gravity, analyzing its properties at both the classical and quantum levels to gain a deeper insight into this foundational model. In the realm of three-dimensional gravity, we focus on its correspondence with gauge theories; in this context, we carefully define and elaborate on the asymptotic symmetry groups. For asymptotically anti-de Sitter and flat spacetimes, we examine these symmetries in detail to reveal their important connections with the geometric and physical structure. Finally, we delve into the partition function of three-dimensional asymptotically anti-de Sitter gravity, offering an in-depth analysis of the quantum aspects of this model and examining its results and applications comprehensively.

Keywords: Quantum gravity, Low-dimensional quantum gravity models, quantum field theory, conformal field theory, JT gravity, 3D quantum gravity, partition functions of 3d gravity



Sharif University of Technology

Department of Physics

M.Sc. Thesis

Aspects of Two and Three Dimensional Quantum Gravity

By:

Hossein Mohammadi

Supervisor:

Amin Faraji Astaneh

November 2024