حسن سیم چی
۹۸۴۴۳۱۱۹

کنش اول)

2.17) a) $x(n) = \delta(n) + 0.5\,\delta(n-5)$

$$X(e^{j\omega}) = \sum x[n] \cdot e^{-j\omega n} \quad , \quad X(z) = \sum x[n] \cdot z^{-n}$$

$$\rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum \left(\delta[n] + 0.5\,\delta[n-5]\right) \cdot e^{-j\omega n} = \underbrace{\sum \delta[n] \cdot e^{-j\omega n}}_{1} + 0.5 \sum \delta[n-5] e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = 1 + 0.5\, e^{-j\omega 5} \quad , \quad \omega = \frac{2k\pi}{N}$$

$$\rightarrow X(z) = \sum \delta[n] \cdot z^{-n} + 0.5 \sum \delta[n-5] \quad z^{-n} = 1 + 0.5\, e^{-j\omega 5}$$

b) $\underset{N=5}{\rightarrow} X(e^{j\omega}) = 1 + 0.5\, e^{-j2k\pi}$, $\underset{N=50}{\rightarrow} X(e^{j\omega})$ $X(e^{j\omega}) = 1 + 0.5\, e^{-\frac{j2k\pi}{10}} = \frac{-jk\pi}{5}$

$\underset{N=10}{\rightarrow} X(e^{j\omega}) = 1 + 0.5\, e^{-j2k\pi}$

c) با توجه به تبدیل فوریه ای که بدست آوردیم، اگر به ازای $N=5$، ۱۰ بار تکرار کنیم $N=50$ بدست میآید

d) بله درست!

2.18) $F_s = 20\,kHz$, $L = 1024$

a) Time duration $\leftarrow \frac{L}{F_s} = \frac{1024}{20000}\,ms$

b) $\Delta w \rightarrow \Delta\Omega = \frac{\Delta w}{T} = \frac{\Delta w}{(1024)(5\times10^{-5})}$, $w = \Omega T$

c) اگر به ۵۱۲ نمونه کاهش دهیم مدت زمان نیز نصف خواهد شد:

$t = \frac{512}{20000} \rightarrow$ 1/2 Time duration.

ولی کاهش نمونه به ۵۱۲، هیچ تغییری در b نمی کند.

3.14)

a) $g[n] = \underbrace{p[n] * p[n]}_{\text{اعضای صورت سؤال}}$

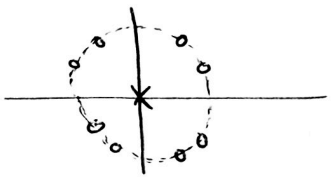
$$\left.\begin{array}{l} G(z) = \sum g[n] \cdot z^{-n} = \sum p[n] \cdot z^{-n} = P(z) \\ P(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} p[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \end{array}\right\} \Rightarrow G(z) = P^2(z) = \left[\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}\right]^2$$

b) $P(z) = \left[\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}\right] = \frac{z^{N-1}}{1} \left[\frac{1-z^{-N}}{z^{N-1}(z-1)}\right]$

Zeros: $z^N = 1$

Poles: $z^{N-1} = 0$ → $N-1$ قطب در صفر

$z = 1$ → یک قطب حذفی می‌شود



c) $z = e^{j\omega}$

$$P(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2}\left[e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}\right]}{e^{-j\omega/2}\left[e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}}\right]}$$

تولید تابع سینوسی

تولید تابع سینوسی

$$\Rightarrow P(e^{j\omega}) = e^{\frac{-j\omega(N-1)}{2}} \left[\frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin\frac{\omega}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow |\cos(e^{j\omega})| = |P(e^{j\omega})|^2 = \left|\frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|^2$$

d) $G_2(z) = z^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-2} (n+1) z^{-n}$

اعضای سؤال → $g_2[n] = n\,p[n]$ → $G_2(z) = -z \frac{dP(z)}{dz} = z \frac{dP}{dz}$

$$\left\{\left[\frac{1-z^{-1}}{z^{-1}}\right] \frac{2P}{P}\right\} z = \left\{\frac{(1-z^{-1})^2 (1-(N-1)z^{-N} + (N-1)z^{-(N+1)}) - (1-z^{-N})(1-z^{-1})(-z^{-2})}{(1-z^{-1})^2}\right\} z^{-1}$$

$$= \left\{\frac{2(1-z^{-1}) + 2N-1}{(1-z^{-1})^2}\right\} z^{-1} = \left\{\frac{(1-z^{-1})^2 - (N-1)^2 z^{-N} + N^2 z^{-(N+1)}}{(1-z^{-1})^2}\right\} z^{-1}$$

e) $G_4(z) \times z^{n} = z^{n-1} \left\{ \frac{1 + z^{-(n-1)} - z^{-N-1}}{2(1-z^{-1})} \right\}$

$\xrightarrow{n=4}$ $z^{-2} \underbrace{(3 + 2z^{-1} + z^{-2})}$ $(1 + \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2})(1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2})$

هر ۲ صفر خارج از دایره هستند

3.15) $g(n) = na^n$

طبق راهنمای جدول قبل:

$g(n) = na^n = -z \frac{dX(z)}{dz}$ $\leftarrow$ na^n $\leftarrow$ $-z \frac{d}{dz} \left\{ \underbrace{\frac{1}{1-az^{-1}}} \right\}$ کتاب دست است

$\rightarrow G(z) = \frac{az^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$

b) $G(e^{j\omega}) = \frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}$ $\rightarrow$ zeros : $z=0$; poles $= a$

$\rightarrow \arg = \arg\{\text{صورت}\} - \arg\{\text{مخرج}\}$

$= -\omega - \tan^{-1}\left\{ \frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega} \right\}$

c) $\omega = 0 \rightarrow G = \frac{a}{(1-a)^2}$ $\rightarrow |G| = \frac{a}{(1-a)^2}$: $a > 0$

$\left\{ \frac{\frac{a}{(1-a)^2}}{\frac{a}{(1+a)^2}} = \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2 \right.$

$\omega = \pi \rightarrow |G| = \frac{a}{(1+a)^2}$

$\rightarrow \frac{1+a}{1-a} = \sqrt{1000}$ $\rightarrow$ $a = \frac{\sqrt{1000}-1}{\sqrt{1000}+1}$

پایان بخش اول