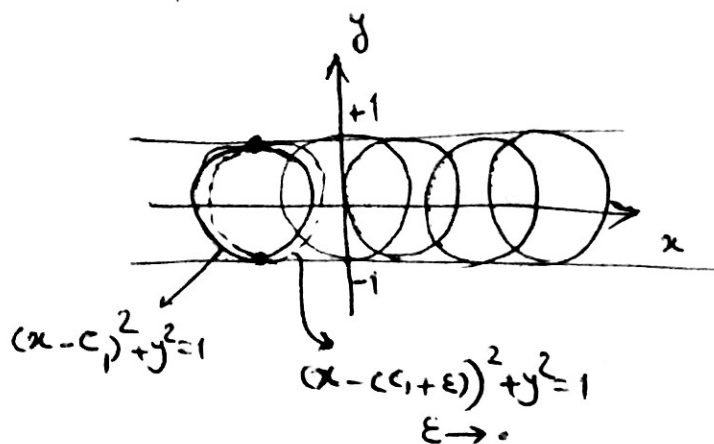


تعریف پوش دسته منحنی:

به منحنی (های) به هر یک از منحنی های یک دسته منحنی تماس باشند، پوش آن دسته منحنی گفته می شود.

تعریف دقیق ریاضیاتی پوش:

منحنی (های) پوش، مکان هندسی محل تماس منحنی های بیار نزدیک هم در دسته منحنی هستند.



مثال: یک دسته منحنی دایره ای

$$(x-c)^2 + y^2 = 1 \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

منحنی های پوش: $y = \pm 1$

نقض: برای بدست آوردن پوش یک دسته منحنی $F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ که c_i ها پارامترهای دسته منحنی هستند باید دستگاه زیر را تشکیل داد و همه c_i ها را از دستگاه حذف کرد:

$$\begin{cases} F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial c_n} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{در حالت ساده تقابلی}} \begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

البته باید توجه داشت که پوش یک دسته منحنی، حتماً جزء جواب های حذف c_i ها از دستگاه فوق است ولی همه جواب های این دستگاه، لزوماً پوش نیستند و ممکن است مکان هندسی نقاط استثنایی دسته منحنی باشند. لذا پوش دسته منحنی، با حذف مکان های هندسی نقاط استثنایی از پاسخ های دستگاه فوق حاصل می شود.

* نکته: باید ببینیم نقاط استثنایی یک دسته منحنی چه نقاطی هستند.

نقاط استثنایی دسته منحنی $F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ نقاطی هستند که در آن ها $\frac{dy}{dx} = 0$ می شود.

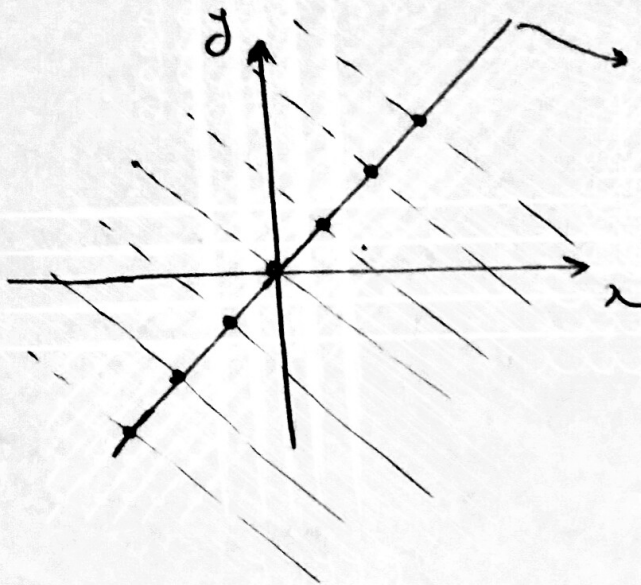
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{ولذا}$$

اتوجه به این که در نقاط استثنای ضعیف تعریف $\frac{dy}{dx} = 0$ است، خط‌های بر منحنی قابل تعیین نیست.

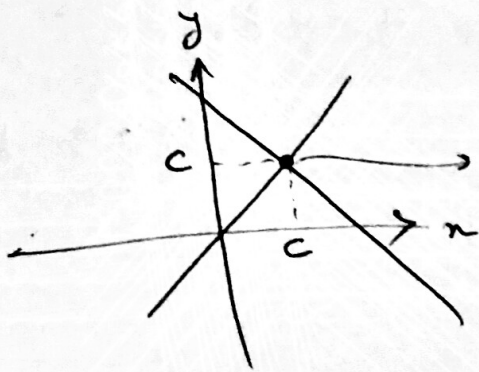
مثلاً دسته منحنی $F(x,y,c) = (y-c)^2 - (x-c)^2 = 0$ را در نظر بگیرید.

$\frac{\partial F}{\partial x} = -2(x-c)$ و $\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-c)$ به ازای هر مقدار c ، یک منحنی از

دسته منحنی داریم که در نقطه $(x,y) = (c,c)$ $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$ است و لذا در آن نقطه $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ است.



خط $y=x$ مکان هندسی نقاط استثنای دسته منحنی F است.



نقطه استثنای منحنی

$$(y-c)^2 - (x-c)^2 = 0$$

در این نقطه خط‌های بر منحنی قابل

تعیین نیست

سوال و چرا مکان هندسی نقاط استثنای جزو پاسخ‌های دسته \bar{c} حذف c ها از است $\begin{cases} F=0 \\ \frac{\partial F}{\partial c_1}=0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial c_n}=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(c_1, \dots, c_n) \\ y(c_1, \dots, c_n) \end{cases} \xRightarrow{\text{نقطه استثنای}} F(x(\bar{c}), y(\bar{c}), \bar{c}) = 0$

مشتق نسبت به c_i $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dc_i} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dc_i} + \frac{\partial F}{\partial c_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial c_i} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial c_n} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{نقاط استثنایی جزو جوابهای صحت} \\ \text{نقته ها از دستگاه رد می شوند. ✓} \end{array}$$

مثال: پوش دسته منحنی $\{(y-c)^2 = (x-c)^3 \mid c \in \mathbb{R}\}$ را می بینیم.

بیان دیگر سوال فوق: پاسخ های غیر عادی معادله (1) را بیابیم که پاسخ عمومی آن برابر $(y-c)^2 = (x-c)^3$ است را بدست آوریم.

$$F(x, y, c) = (y-c)^2 - (x-c)^3 = 0$$

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (y-c)^2 - (x-c)^3 = 0 \\ -2(y-c) + 3(x-c)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{هدف: حذف } c \end{array}$$

$$\text{از رابطه (1): } (y-c) = \frac{3}{2}(x-c)^2 \Rightarrow \left[\frac{3}{2}(x-c)^2 \right]^2 - (x-c)^3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-c)^3 \left(\frac{9}{4}(x-c) - 1 \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = x & \textcircled{I} \\ c = x - \frac{4}{9} & \textcircled{II} \end{cases}$$

بنابراین $c = x$ در رابطه اول

$$\textcircled{I} \Rightarrow \begin{cases} (y-x)^2 - (x-x)^3 = 0 \\ -2(y-x) + 3(x-x)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = x}$$

$$\textcircled{II} \Rightarrow \begin{cases} (y-x+\frac{4}{9})^2 - (x-x+\frac{4}{9})^3 = 0 \\ -2(y-x+\frac{4}{9}) + 3(x-x+\frac{4}{9})^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = x - \frac{4}{27}}$$

پس $y = x$ و $y = x - \frac{4}{27}$ منحنی های حاصل از حذف c در دستگاه فوق

هستند. اکنون باید بررسی کنیم مکان هندسی نقاط استثنایی دسته منحنی F چیست و در صورت وجود آن را از دو پاسخ فوق حذف کنیم تا پوش بدست آید.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3(x-c)^2 = 0 \Rightarrow x = c \\ 2(y-c) = 0 \Rightarrow y = c \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = x} \quad \begin{array}{l} \text{مکان هندسی نقاط} \\ \text{استثنایی دسته منحنی } F \end{array}$$

(42)

$$\Rightarrow \boxed{y = x - \frac{4}{27}} \quad \text{پوش دسته منحنی}$$