T.P. Nº 3 – MATRICES Y DETERMINANTES

OBJETIVOS: Identificar tipos de matrices. Operar con matrices, realizar la suma y el producto de matrices e identificar su problemática. Mostrar aplicaciones del cálculo matricial. Operar con determinantes. Calcular matriz inversa.

1- Escribir explícitamente las siguientes matrices:

a) $B = [b_{ij}]_{3x4}$

b) $C = [c_{ij}]_{1x5}$ ¿qué nombre recibe esta matriz?

c) $D = [d_{ij}]_{4x1}$ ¿qué nombre recibe esta matriz?

d) Una matriz A de clase 3 x 3 que resulte simétrica.

e) $A \in \mathbb{R}^{4x4}$ / $\mathbf{a_{ij} = 2}$ si $\mathbf{i = j} \wedge \mathbf{a_{ij} = 0}$ si $\mathbf{i \neq j}$

2- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 1 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ verificar:

a) $4 . B = B . 4$

b) $(A^T)^T = A$

c) $(A + B)^T = A^T + B^T$

d) $2 (A + B) = 2A + 2B$

e) $(-3 . A)^T = -3 . A^T$

f) $(A . B)^T = B^T . A^T$

3- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Realizar, si es posible, las operaciones detalladas; en caso de que no se pueda operar, justificar:

a) $3.A + 2.B$

b) $C^T + A$

c) $B.A$

g) $A^2 – B$

d) $D.A$

e) $B.C$

f) $C . (A + B)$

4- Siendo **N** la matriz nula y A, B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular, de ser posible, la matriz **C** de tal modo que se verifique:

a) $A – B + C = N$

b) $A + 2.B = 3.C$

c) $2.A + 3.B –5.C = 5.A$

5- La Compañía "Fabrot" produce lapiceras, lápices y gomas de borrar. Estos artículos se venden en las tiendas A, B y C en las cantidades indicadas en la siguiente tabla:

	A	B	C
Lapiceras	40	30	20
Lápices	50	30	60
Gomas de borrar	40	40	60

La ganancia por la venta de un lápiz es de \$100, la de una lapicera \$150 y la de una goma de borrar \$200. Se pide:

a) Representar la tabla en forma matricial.
b) ¿Qué representa el elemento a_{23}?
c) Calcular la ganancia por la venta de cada tipo de artículos.

6- Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S.

Produce del **modelo A**: 440 unidades en la terminación N, 220 unidades en la terminación L y 55 unidades en la terminación S.
Produce del **modelo B**: 330 unidades en la terminación N, 110 unidades en la terminación L y 33 unidades en la terminación S.

La terminación N lleva 27 horas de taller y 1.1 hora de administración
La terminación L lleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración
La terminación S lleva 36 horas de taller y 1.4 horas de administración.

a. Representar la información en dos matrices.
b. Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

7- Calcular las siguientes operaciones con matrices booleanas, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$a)\quad A \vee B \qquad\qquad b)\quad A \wedge B$

Recordar: una matriz booleana mxn es aquella matriz cuyos elementos son 0 y 1. Ambas matrices deben ser del mismo tamaño

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad a_{ij} = 1 \quad o \quad b_{ij} = 1 \\ 0 & si \quad a_{ij} = 0 \quad y \quad b_{ij} = 0 \end{cases} \qquad (A \vee B)$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad a_{ij} = 1 \quad y \quad b_{ij} = 1 \\ 0 & si \quad a_{ij} = 0 \quad o \quad b_{ij} = 0 \end{cases} \qquad (A \wedge B)$$

8- Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -4 \\ 1 & \frac{-5}{4} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3x+2y & 1 \\ 1 & 3x-2y \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4b & 2a \\ -a & \frac{-b}{2} \end{vmatrix}$$

9- Calcular el determinante de las siguientes matrices y el de sus traspuestas:

a) Aplicando la Regla de Sarrus.

b) Aplicando desarrollo por los elementos de una línea.

i. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ ii) $B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ iii) $C = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10- Determine, si existe, algún número real x tal que:

a) $\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

11- Calcular el rango de las siguientes matrices, aplicando el Método de Gauss:

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

12- Determinar si las matrices A y B son inversas

a)

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

b)

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

> Recordar: Si una matriz A tiene una matriz **inversa multiplicativa** o simplemente **una inversa**, A^{-1} entonces, A^{-1} es una matriz para la que $\mathbf{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$

13- Hallar, si es posible, la matriz inversa de cada una de las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ -9 & -8 & -4 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{4} \\ 32 & -4 \end{pmatrix}$$

14) Hallar, si existe, la matriz X que verifica AX = B siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

15) Dadas $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}$, si $C = AB$, hallar (si existe) $x \in \mathbb{R}$ para que C resulte inversible.