

Задание на 22.01  
Кириленко Андрей, ВШЭ  
22 января 2019

2a

Достаточно очевидно, что хотя бы 3 слагаемых посчитать потребуется, а значит можно считать что знаменатели окажутся положительными (в хвосте) Тогда можно оценить член ряда так:  $\frac{1}{x^2-x-z} < \frac{1}{x^2-x-2}$  Получили оценку, осталось найти такое  $n$ , что интеграл ограничивающей функции не больше заданной точности.  $\frac{1}{x^2-x-2} = 1/3 * (\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1})$ , неопределенный интеграл равен  $1/3 * \log |\frac{2-x}{x+1}| (+c)$ , теперь надо найти такое  $n$ , что подстановка от  $n$  до бесконечности будет не больше заданной точности. Подстановка бесконечности даст 0, так как в логарифме предел 1, останется  $\min n: -1/3 \log |\frac{2-n}{n+1}| \leq eps$  т.е.  $\log |\frac{n+1}{2-n}| \leq 3 * eps$ , что дает оценку  $n$  чуть больше 1000000. Остается посчитать функцию как частичную сумму до  $n = 10^6$  и построить график.

2b

Возьмем модельный ряд такой:  $\sum \frac{1}{k(k-1)}$  (определим его слагаемое для  $n=1$  как ноль). Сумма такого ряда равна 1. Разность будет соответственно  $\frac{z}{(k^2-k)(k^2-k-z)}$  (первое слагаемое опять же особенное и равно  $-1/z$ ) Останется поработать с остальной разностью, ее можно очевидно оценить как  $4/k^4$  (2 берется от  $z$  и еще 2 от оценки знаменателя как половина старшего члена:  $\frac{z}{(k^2-k)(k^2-k-z)} < \frac{2}{(k^2-k)(k^2-k-z)} < \frac{2}{k^4/2}$ ) (Можно точнее оценить константу числом 2 и получить 88 слагаемых). Интеграл равен  $-4/3 * x^{-3} (+c)$ . Решаем уравнение  $4/3 * x^{-3} \leq eps$ , что дает ответ около 110. Итого для подсчета ряда надо к  $1 - 1/z$  прибавить не менее 110 слагаемых ряда разности (начиная с 2)

2c

Посчитаем разность, проверим что максимум разности по модулю не больше  $2 * eps$ , построим график

3

Ясно, что при  $z$  по модулю меньше 1 не интересно, быстро сохходимся, так как экспонента. Если  $z$  по модулю больше 1, то ряд расходится. Остается из интересного только окружность, на ней и есть смысл проверять численно. Заметим, что при -1 ряд сходится, а при 1 расходится. Значит, скорость сходимости должна уменьшаться при движении по окружности. Проверим это численно. Для -1 график уже есть и можно не включать вещественные точки.