

Задание на 22.01
Кириленко Андрей, ВШЭ
22 января 2019

2a

Достаточно очевидно, что хотя бы 3 слагаемых посчитать потребуется, а значит можно считать что знаменатели окажутся положительными(в хвосте) Тогда можно оценить член ряда так: $\frac{1}{x^2-x-z} < \frac{1}{x^2-x-2}$ Получили оценку, осталось найти такое n , что интеграл ограничивающей функции не больше заданной точности. $\frac{1}{x^2-x-2} = 1/3 * (\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1})$, неопределенный интеграл равен $1/3 * \log |\frac{2-x}{x+1}| (+c)$, теперь надо найти такое n , что подстановка от n до бесконечности будет не больше заданной точности. Подстановка бесконечности даст 0, так как в логарифме предел 1, останется $\min n: -1/3 \log |\frac{2-n}{n+1}| \leq eps$ т.е. $\log |\frac{n+1}{2-n}| \leq 3 * eps$, что дает оценку n чуть больше 1000000. Остается посчитать функцию как частичную сумму до $n = 10^6$ и построить график.

2b

Возьмем модельный ряд такой: $\sum \frac{1}{k(k-1)}$ (определим его слагаемое для $n=1$ как ноль). Сумма такого ряда равна 1. Разность будет соответственно $\frac{z}{(k^2-k)(k^2-k-z)}$ (первое слагаемое опять же особенное и равно $-1/z$) Останется поработать с остальной разностью, ее можно очевидно оценить как $4/k^4$ (2 берется от z и еще 2 от оценки знаменателя как половина старшего члена: $\frac{z}{(k^2-k)(k^2-k-z)} < \frac{2}{(k^2-k)(k^2-k-z)} < \frac{2}{k^4/2}$) (Можно точнее оценить константу числом 2 и получить 88 слагаемых). Интеграл равен $-4/3 * x^{-3} (+c)$. Решаем уравнение $4/3 * x^{-3} \leq eps$, что дает ответ около 110. Итого для подсчета ряда надо к $1 - 1/z$ прибавить не менее 110 слагаемых ряда разности(начиная с 2)

2c

Посчитаем разность, проверим что максимум разности по модулю не больше $2 * eps$, построим график

3

Ясно, что при z по модулю меньше 1 не интересно, быстро сходимся, так как экспонента. Если z по модулю больше 1, то ряд расходится. Остается из интересного только окружность, на ней и есть смысл проверять численно. Заметим, что при -1 ряд сходится, а при 1 расходится. Значит, скорость сходимости должна уменьшаться при движении по окружности. Проверим это численно.