1 Введение

Санкт-Петербургский парадокс впервые был опубликован Даниилом Бернулли в "Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae".

Парадокс основан на игре с подбрасыванием монеты до момента выпадения орла. При числе выпавших решек n выигрыш рассчитывается по формуле 2^n. К примеру, в случае, если орел выпадет на первом броске, то выигрыш составит 2^0, то есть 1. Если же орел выпадет после четырех решек, то выигрыш будет равен 2^4.

Поскольку орел может выпасть после любого подбрасывания, то множество элементарных событий Ω счетно и дискретно. При этом $p(n)$ вероятность того, что орел выпадет на шаге n, составляет $\frac{1}{2^n}$. Рассчитаем на основе этого математическое ожидание:

$$\mathbf{E} = \sum_{\omega \in \Omega} \omega \cdot p(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Теоретическая медиана в таком случае будет находиться в промежутке от 1 до 2, поскольку с вероятностью 0.5 игра имеет результат 1, и с так же с 0.5 результат больше либо равный 2.

Парадокс заключается в том, что хотя математическое ожидание бесконечно, сыграть в реальных условиях стоимость даже в 30 монет для такой игры будет большой.

2 Ограничение числа бросков

Вместе со стандартной игрой Санкт-Петербургского парадокса рассмотрим такую, в которой будет не более десяти подбрасываний. Если на последнем броске так и не выпадет орел, то выигрыш увеличивается вдвое последний раз, и игра оканчивается.

В соответсвии с новой игрой рассчитаем новое математическое ожидание:

$$\mathbf{E} = \sum_{\omega \in \Omega} \omega \cdot p(\omega) = \sum_{n=1}^{10} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} + 2^{10} \cdot \frac{1}{2^{10}} = 6$$

Теоретическая медиана для игры с ограниченным числом будет аналогична изначальной игре, поскольку вероятности в единице не отличаются. Таким образом медиана теоретически располагается в промежутке между 1 и 2.

3 Реализация

Для генерации выборки используется цикл с заданным числом повторений и ограничением числа подбрасываний. Помимо этого реализован рассчет среднего выборочного, а также медианы для каждой такой сгенерированной выборки.

В эксперементе генерируется выборка объема 10^n, где $n = 2..8$ по обеим играм, для каждой из которых рассчитвается медиана и среднее выборочное.

Ниже представлены 2 графика зависимости выборочного среднего от объема выборки, для наглядности от lg:

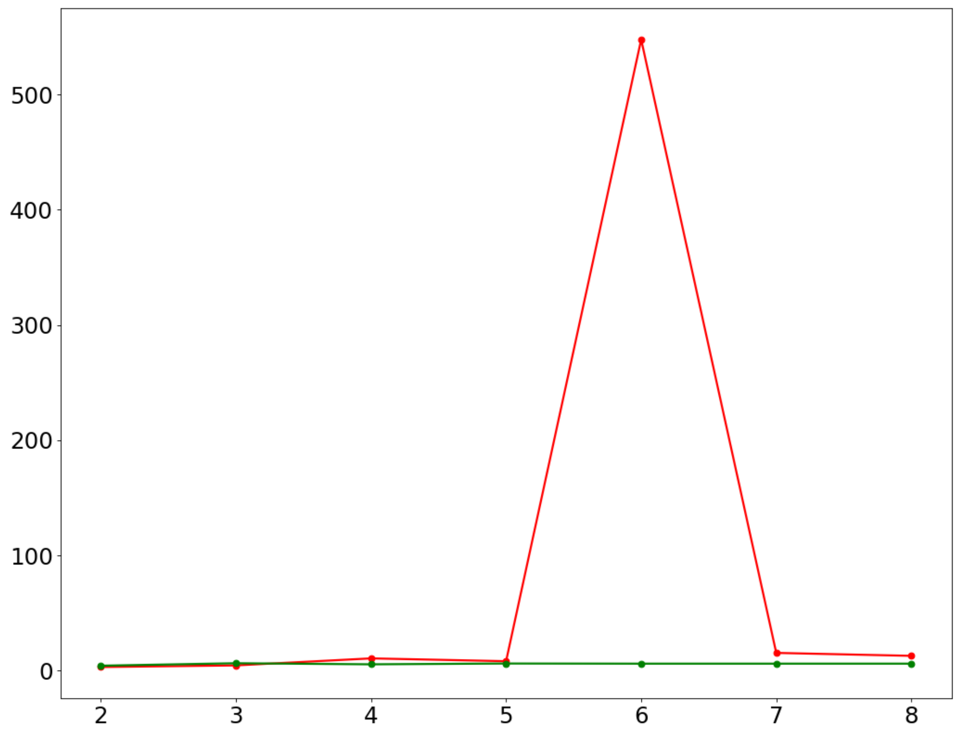

Рис. 3.1: Эксперемент 1

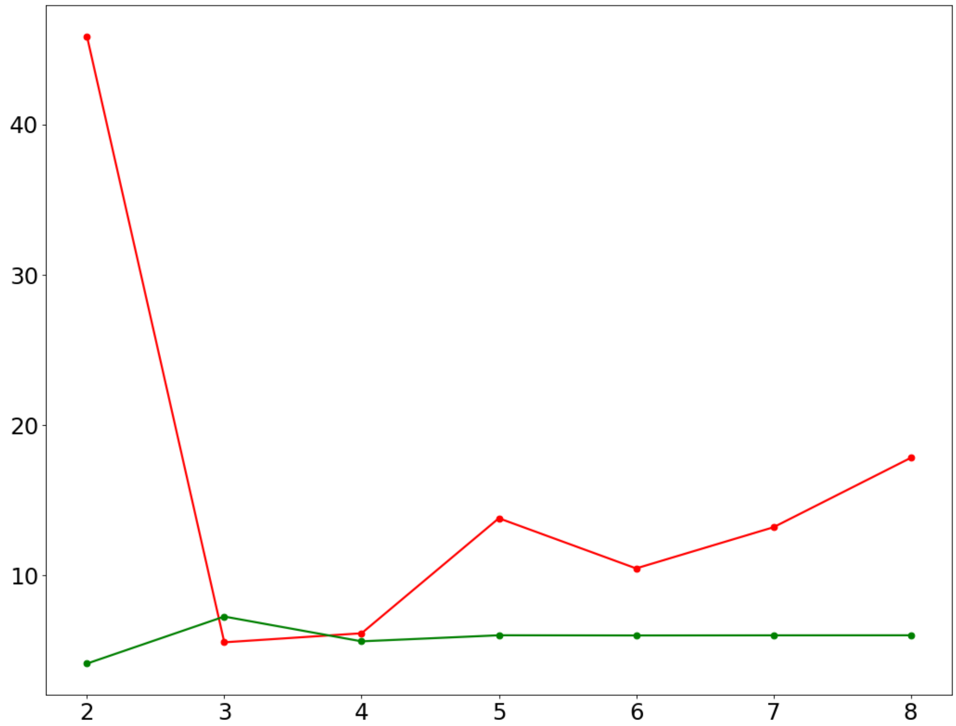

Рис. 3.2: Эксперемент 2

В каждом из 16 эксперементов медиана попала в рассчитанный теоретически промежуток, то есть принимает значения 1 или 2.

$\lg n$	2	3	4	5	6	7	8
green1	4.22	6.368	5.4263	6.12253	5.986214	5.9937484	5.99767625
red1	3.09	4.499	10.5837	8.14035	547.776749	15.3412161	12.80044241
green2	4.12	7.251	5.6003	6.00345	5.991469	5.9989245	6.00211726
red2	45.87	5.535	6.1364	13.79501	10.455261	13.1944594	17.81406501

Таблица 3.1: Значения средних выборочных для обоих эксперементов

Зеленый график отвечает за результаты игры с ограничем числа бросков, красный график — за результаты игры без них.

В первом случае (Рис. 3.1) в точке 6, то есть при объеме выборки 10^6, произошел резкий скачок выборочного среднего для варианта игры без ограничения бросков. Такая ситуация возникла из-за игры, в которой выигрыш составил 536870912, то есть 2^{29}, в то время как ближайший к нему результат только 2^{19}. Таким образом одно это число перевесило все остальные из-за недостаточного объема выборки и дало в результате среднее выборочное, равное 547.776749. Причем на медиану это никоем образом не влияет, она равна 1. Для большей наглядности приведен второй эксперемент.

Во втором случае (Рис. 3.2) при объеме выборки 100 также присутствует сильный скачок, однако, тут более наглядно видно, что красный график постепенно возрастает с ростом объема выборки, а зеленый график сходится к 6. На деле, судя по таблице результатов (Таб. 3.1), в первом случае зеленый график также сходится к 6.

4 Вывод

Моделирование обеих игр показывает, что при наличии ограничения на число подбрасываний, среднее выборочное сходится к определенному конечному числу, в нашем случае ограничение составляет 10, и пределом становится 6, которое также было посчитано теоритически. В случае отсутствия ограничений среднее выборочное также сходится к рассчитанному теоритическому, к бесконечности, то есть постепенно возрастает.

Что касается медиан, то они также попадают в теоретический рассчитанный промежуток от 1 до 2.