Vorlesung Differentialgeometrie

Gehalten von Dr. Grensing, Wintersemester 2012/13

Version **0.01** Build: 19. Oktober 2012

Wichtiger Hinweis: Dies ist eine Zusammenfassung der Vorlesung „Differentialgeometrie“ von Dr. Grensing im Wintersemester 2012/13 am KIT und dient lediglich dazu die Inhalte für meine eigene Verwendung besser zusammenzufassen und aufzubereiten. Es besteht weder eine Garantie über Vollständigkeit, noch Korrektheit der enthaltenen Aussagen.

Bei Anmerkungen bzw. beim Auffinden von Fehlern schicken Sie bitte eine E-Mail an

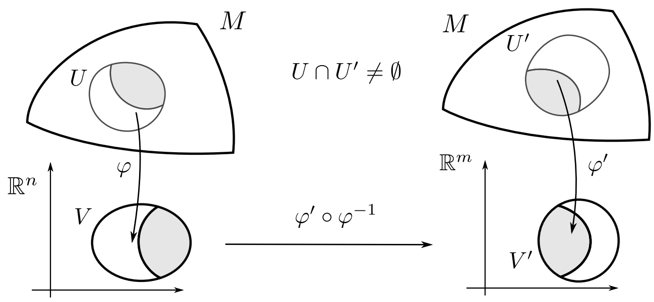
jan-bernhard.kordass@student.kit.edu

Übersicht

- Mannigfaltigkeiten, Tangentialvektoren
- Kovariante Ableitung
- Riemannsche Metriken
- Krümmung
- Jacobifelder
- Satz von Bonnet

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition. Eine n-dimensionale **topologische Mannigfaltigkeit** M ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit einer abzählbaren Basis der Topologie in dem zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Menge U mit $p \in U$ existiert und ein Homöomorphismus $\phi \colon U \to V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$.



$\varphi' \circ \varphi^{-1}$ ist ein Homöomorphismus offener Mengen des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Nach dem Satz von Brouwer (1912) gilt dann $m = n$. Damit ist die Dimension einer zusammenhängenden topologischen Mannigfaltigkeit eindeutig definiert.

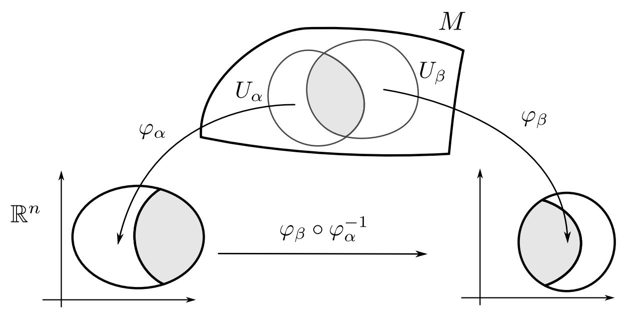
Die Abbildung $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Karte** von M um p, die Menge U heißt **Kartengebiet**.

Eine Menge von Karten $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in J\}$ heißt **Atlas** von M, falls $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = M$.

Ein Atlas $\mathcal{A}$ von M heißt C^k-Atlas, wenn für alle $\alpha, \beta \in J$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ der sogenannte **Kartenwechsel**:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ein C^k-Diffeomorphismus ist.



Eine Karte $\psi\colon U \to V$ von M heißt **verträglich** mit einem C^k-Atlas $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in J\}$ wenn jeder Kartenwechsel

$$\varphi_\alpha \circ \psi(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$$

ein C^k-Diffeomorphismus ist, i.e. $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{(\psi, U)\}$ ist ebenfalls ein C^k-Atlas.

Die Menge aller mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten ist ein **maxmaler C^k-Atlas**. Jeder maximale Atlas enthält alle mit ihm verträglichen Karten. Ein maximaler C^k-Atlas heißt auch **C^k-differenzierbare Struktur**.

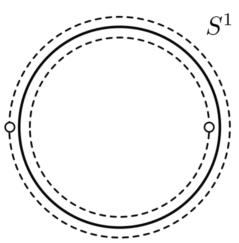
1.1 Def *differenzierbare Mannigfaltigkeit* Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** der Klasse C^k ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einer C^k-differenzierbaren Struktur.

1.2 Bsp Einige Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten:

(1) $M = \mathbb{R}^n, \mathcal{A} = \{(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)\}$

(2) $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{A} = \{(\imath_M, M)\}$

(3) $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist eine eindimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit:



$$\mathcal{A} = \{(sint, \cos t) \mid t \in (0, 2\pi)\}$$

ist offen in S^1 und

$$\varphi\colon (\sin t, \cos t) \mapsto t$$

ist ein Homöomorphismus

$$\varphi' \colon U' = \{(\sin t, \cos t) \mid t \in (-\pi, \pi)\} \to (-\pi, \pi)$$

ebenfalls. $\mathcal{A} = \{(\varphi, U), (\varphi', U')\}$ ist ein Atlas von S^1, denn $U \cup U' = S^1$.

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$$

$$(0,\pi) \cup (\pi, 2\pi) \to (-\pi, 0) \cup (0, \pi), t \mapsto \begin{cases} t & 0 < t < \pi \\ t - 2\pi & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

(4) Jeder reelle Vektorraum endlicher Dimension ist in kanonischer Weise eine C^∞-Mannigfaltigkeit.
Wähle eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V. Diese definiert mit

$$\varphi\left(\sum \lambda_i v_i\right) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

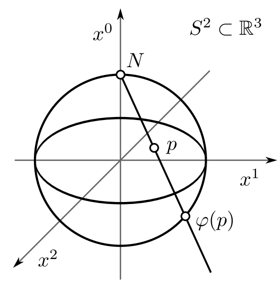
eine Bijektion auf $\mathbb{R}^n$. Damit erhält man eine globale Karte von V. Der zugehörige Atlas hängt nicht von der Wahl der Basis ab, denn ist $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine weitere Basis von V und $\psi(\sum \lambda_i w_i) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine weitere Karte, so ist $\varphi \circ \psi^{-1}$ als Endomorphismus des $\mathbb{R}^n$ schon C^∞.

(5) $S^n = \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \mid \sum_{i=0}^n (x^i)^2 = 1\}$.

Betrachte den Nordpol $N = (1, 0, \dots, 0)$ und den Südpol $S = (-1, 0, \dots, 0)$ und die Abbildung

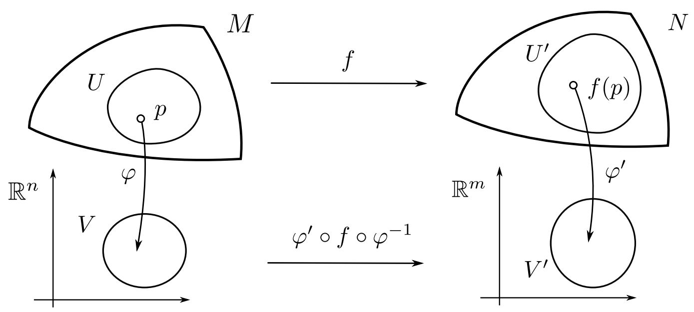
$$\varphi \colon U = S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \left(\frac{x^1}{1 - x^0}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^0}\right),$$

$$\psi \colon U' = S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \left(\frac{x^1}{1 + x^0}, \dots, \frac{x^n}{1 + x^0}\right)$$



Aufgabe: Zeige, dass $(\varphi, U), (\psi, U')$ einen C^∞-Atlas auf S^n definiert.

1.3 Def
Differenzierbare Abbildungen



Eine stetige Abbildung $f \colon M \to N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten M und N heißt **glatt** (C^∞-differenzierbar), wenn es zu jedem $p \in M$ Karten (φ, U) in M um p und (φ', U') in N um $f(p)$ gibt, so dass $\acute{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}$ glatt ist.

Die Menge aller glatten Abbildungen von M nach N wird $C^\infty(M, N)$ genannt.

Konvention: Ab jetzt seien zunächst alle Mannigfaltigkeiten, wie auch alle Abbildungen als glatt vorrausgesetzt.

1.4 Bem Da Kartenwechsel C^∞ sind, gilt obige Bedingung automatisch für alle Karten von M und N (evtl. nach Einschränkung).

1.5 Bsp Es folgen zwei Beispiele für diffenrenzierbare Abbildungen:

(1) $(\varphi, U) \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$, denn

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty.$$

(2) $f \in C^\infty(M, N),\ g \in C^\infty(N, P) \Rightarrow g \circ f \in C^\infty(M, P)$, denn

$$\varphi_p \circ g \circ f \circ \varphi_m^{-1} = (\varphi_p \circ g \circ \varphi_n^{-1}) \circ (\varphi_n \circ f \circ \varphi_m^{-1}) \in C^\infty.$$

1.6 Def *Diffeomorphismus* Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn f bijektiv ist und f, sowie f^{-1} C^∞-Abbildungen von M nach N sind. Insbesondere haben M und N in diesem Fall dieselbe Dimension.

Die Menge der Diffeomorphismen von M nach N wird mit $\mathrm{Diff}(M, N)$ bezeichnet. Die Menge der Diffeomorphismen von M nach M wird mit $\mathrm{Diff}(M)$ bezeichnet. $(\mathrm{Diff}(M), \circ)$ ist eine Gruppe.

Index