Devoir à la maison n°08

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Structure d'anneau de $(\mathrm{E}, +, \star)$

I.1 L'élément neutre pour la loi $+$ est évidemment la suite constamment nulle.

I.2 Soit $(u, v) \in \mathrm{E}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(u \star v)_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \\
&= \sum_{j=0}^{n} u_{n-j} v_j \quad \text{via le changement d'indice } j = n-k \\
&= \sum_{j=0}^{n} v_j u_{n-j} \\
&= (v \star u)_n
\end{aligned}$$

Ainsi $u \star v = v \star u$. La loi $\star$ est donc bien commutative.

I.3 Soit $(u, v, w) \in \mathrm{E}^3$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
((u \star v) \star w)_n &= \sum_{k=0}^{n} (u \star v)_k w_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} \right) w_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} w_{n-k} \\
&= \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} u_i v_{k-i} w_{n-k} \\
(u \star (v \star w))_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k (v \star w)_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_k \left(\sum_{i=0}^{n-k} v_i w_{n-k-i} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} u_k v_i w_{n-k-i} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} u_k v_{j-k} w_{n-j} \quad \text{via le changement d'indice } j = i+k \\
&= \sum_{0 \leq k \leq j \leq n} u_k v_{j-k} w_{n-j} \\
&= \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} u_i v_{k-i} w_{n-k} \quad \text{car les indices sont muets} \\
&= ((u \star v) \star w)_n
\end{aligned}$$

Ainsi $(u \star v) \star w = u \star (v \star w)$. La loi $\star$ est donc bien associative.

I.4 Soit $u \in \mathrm{E}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\varepsilon \star u)_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_{n-k} = \varepsilon_0 u_n = u_n$$

car $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_k = 0$ si $k \neq 0$. Ainsi $\varepsilon \star u = u$ et, comme $\star$ est commutative, $u \star \varepsilon = \varepsilon \star u = u$. La suite ε est donc bien neutre pour la loi $\star$.

I.5 Soit $(u, v, w) \in \mathrm{E}^3$. Alors

$$\begin{aligned}((u+v) \star w)_n &= \sum_{k=0}^{n} (u+v)_k w_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) w_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (u_k w_{n-k} + v_k w_{n-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k w_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} v_k w_{n-k} \\ &= (u \star w)_n + (v \star w)_n \\ &= (u \star w + v \star w)_n\end{aligned}$$

Ainsi $(u+v) \star w = (u \star w) + (v \star w)$. Comme $\star$ est commutative, on a également $w \star (u+v) = (w \star u) + (w \star v)$. La loi $\star$ est donc bien distributive sur la loi $+$.

I.6 Soit un entier $n \geq \mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2$. Alors

$$(u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Si $k \geq \mathrm{N}_1$, alors $u_k = 0$ et si $k < \mathrm{N}_1$, alors $n - k > n - \mathrm{N}_1 \geq \mathrm{N}_2$ donc $v_{n-k} = 0$. Tous les termes de la somme précédente sont donc nuls. Ainsi $(u \star v)_n = 0$ de sorte que la suite $u \star v$ est nulle à partir du rang $\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2$.

I.7 La suite ε nulle à partir du rang 1 donc $\varepsilon \in \mathrm{F}$.
Soit $(u, v) \in \mathrm{F}^2$. Les suites u et v sont donc nulles respectivement à partir d'un rang $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}$. On vérifie alors sans peine que $u - v$ est nulle à partir du rang $\max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$. Ainsi $u - v \in \mathrm{F}$.
De plus, la question précédente montre que $u \star v$ est nulle à partir du rang $\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2$. Ainsi $u \star v \in \mathrm{F}$.
On peut alors en déduire que F est un sous-anneau de E.

Partie II – Suites géométriques et calculs de puissances

II.8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$([q] \star [r])_n = \sum_{k=0}^{n} [q]_k [r]_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} q^k r^{n-k}$$

Or

$$q^{n+1} - r^{n+1} = (q - r) \sum_{k=0}^{n} q^k r^{n-k}$$

et $q \neq r$ donc

$$([q] \star [r])_n = \sum_{k=0}^{n} q^k r^{n-k} = \frac{q^{n+1} - r^{n+1}}{q - r}$$

II.9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$([q]^2)_n = \sum_{k=0}^{n} [q]_k [q]_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} q^n = (n+1) q^n$$

II.10 Puisque $a = [1]$, la question précédente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a^2)_n = (n+1) 1^n = (n+1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a^3)_n = (a^2 \star a)_n = \sum_{k=0}^{n} (a^2)_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

II.11 On raisonne par récurrence sur p.

$$\mathrm{HR}(p) : \ \forall n \in \mathbb{N},\ (a^p)_n = \binom{n+p-1}{p-1}$$

HR(1) est vraie puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1 = \binom{n}{0}$.
Supposons que HR(p) soit vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(a^{p+1})_n = (a^p \star a)_n &= \sum_{k=0}^{n} (a^p)_k a_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{p-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{p} - \binom{k+p-1}{p} \\ &= \binom{n+p}{p} - \binom{p-1}{p} \\ &= \binom{n+p}{p}\end{aligned}$$

Donc HR($p+1$) est vraie.

Remarque. On a utilisé la convention usuelle stipulant que si k et n sont deux entiers naturels tels que $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$. On vérifie alors que la relation $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ est encore valable lorsque $k = n$.

Par récurrence, HR(p) est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

II.12 On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a^p)_n = \frac{\prod_{k=1}^{p-1}(n+k)}{(p-1)!}$$

Or pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $n + k \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc

$$(a^p)_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

Partie III – Inversibles de l'anneau $(\mathrm{E}, +, \star)$

III.13 Supposons que $u \in \mathrm{E}$ soit inversible. Il existe donc $v \in \mathrm{E}$ telle que $u \star v = \varepsilon$. En particulier,

$$u_0 v_0 = (u \star v)_0 = \varepsilon_0 = 1$$

donc $u_0 \neq 0$.
Réciproquement supposons que $u_0 \neq 0$. On peut alors définir une suite $v \in \mathrm{E}$ par récurrence en posant $v_0 = \frac{1}{u_0}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = -\frac{1}{u_0} \sum_{k=0}^{n-1} v_k u_{n-k}$$

On a alors $v_0 u_0 = 1$ et donc $(v \star u)_0 = \varepsilon_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n} v_k u_{n-k} = u_0 v_n + \sum_{k=0}^{n-1} v_k u_{n-k} = 0 = \varepsilon_n$$

Ainsi $v \star u = \varepsilon$, ce qui prouve que u est inversible.

III.14 $[q]$ est inversible puisque $[q]_0 = q^0 = 1 \neq 0$. Comme $y = [q]^{-1}$, $[q] \star y = \varepsilon$.
En particulier, $[q]_0 y_0 = ([q] \star y)_0 = \varepsilon_0 = 1$ donc $y_0 = 1$ puisque $[q]_0 = 1$.
Ensuite $[q]_0 y_1 + [q]_1 y_0 = ([q] \star y)_1 = \varepsilon_1 = 0$. Ceci signifie que $y_1 + q = 0$ et donc $y_1 = -q$.
De la même manière, $[q]_0 y_2 + [q]_1 y_1 + [q]_2 y_0 = ([q] \star y)_2 = \varepsilon_2 = 0$. Ceci signifie que $y_2 - q^2 + q^2 = 0$ et donc $y_2 = 0$.
Enfin, $[q]_0 y_3 + [q]_1 y_2 + [q]_2 y1 + [q]_3 y_0 = (x \star y)_3 = \varepsilon_3 = 0$. Ceci signifie que $y_3 - q^3 + 0 + q^3 = 0$, ce qui donne à nouveau $y_3 = 0$.

III.15 On sait déjà que $y_0 = 1$ et $y_1 = -q$ et l'on va montrer que $y_n = 0$ pour tout entier $n \geq 2$ par récurrence forte.
On a déjà montré que $y_2 = 0$. Supposons qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $y_k = 0$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$. Alors

$$0 = \varepsilon_{n+1} = (y \star [q])_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} y_k [q]_{n+1-k} = y_{n+1}[q]_0 + \sum_{k=0}^{n} y_k [q]_{n+1-k} = y_{n+1}[q]_0 + y_0 [q]_{n+1} + y_1 [q]_n$$

puisque $y_k = 0$ pour $k \in [\![2, n]\!]$. On en déduit donc que

$$y_{n+1} + q^{n+1} - q \cdot q^n = 0$$

et donc que $y_{n+1} = 0$. Il s'ensuit donc que $y_n = 0$ pour tout entier $n \geq 2$ par récurrence forte.

Partie IV – Intégrité de l'anneau $(\mathrm{E}, +, \star)$

IV.16 Puisque u et v sont non nulles, les ensembles $\{n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0\}$ et $\{n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 0\}$ sont non vides. Puisqu'il s'agit de deux parties de $\mathbb{N}$, elles admettent tous deux un minimum.

IV.17 Remarquons que par définition de p et q, $u_k = 0$ pour tout $k < p$ et $v_k = 0$ pour tout $k < q$. Alors

$$\begin{aligned}
(u \star v)_{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} u_k v_{p+q-k} \\
&= u_p v_q + \sum_{k=0}^{p-1} u_k v_{p+q-k} + \sum_{k=p+1}^{p+q} u_k v_{p+q-k} \\
&= u_p v_q + \sum_{k=0}^{p-1} u_k v_{p+q-k} + \sum_{j=0}^{q-1} u_{p+q-j} v_j \qquad \text{via le changement d'indice } j = p + q - k \\
&= u_p v_q
\end{aligned}$$

puisque $u_k = 0$ pour $k < p$ et $v_j = 0$ pour $j < q$. Par définition de p et q, $u_p \neq 0$ et $v_q \neq 0$ donc $(u \star v)_{p+q} \neq 0$.

IV.18 La question précédente montre que si u et v sont non nulles, $u \star v$ est non nulle. Par contraposition, si $u \star v$ est nulle, l'une des deux suites u et v est nulle. Ceci prouve l'intégrité de l'anneau $(\mathrm{E}, +, \star)$.

Partie V – Résolution d'une équation dans E

On note u la suite de E telle que $u_0 = 1$, $u_1 = -5$, $u_2 = 6$ et $u_n = 0$ pour tout entier $n \geq 3$.
On note également v la suite de E telle que $v_0 = v_1 = 1$ et $v_n = 0$ pour tout entier $n \geq 2$.

V.19 Puisque $u_0 = 1 \neq 0$, u est inversible. Alors $u \star x = v \iff x = u^{-1} \star v$, ce qui prouve l'existence et l'unicité de x.

V.20 Tout d'abord $u_0 x_0 = (u \star x)_0 = v_0 = 1$ donc $x_0 = 1$ puisque $u_0 = v_0 = 1$.
Ensuite, $u_0 x_1 + u_1 x_0 = (u \star x)_1 = v_1 = 1$ donc $x_1 = 6$ puisque $u_0 = 1$ et $u_1 = -5$.

V.21 Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part

$$(u \star x)_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} u_k x_{n-k} = u_0 x_{n+2} + u_1 x_{n+1} + u_2 x_n = x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n$$

D'autre part

$$(u \star x)_{n+2} = v_{n+2} = 0$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$$

V.22 Le polynôme caractéristique associée à la relation de récurrence précédente est $X^2 - 5X + 6$. Ses racines sont 2 et 3. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 2^n\lambda + 3^n\mu$$

Or $x_0 = 1$ et $x_1 = 6$ donc $\lambda + \mu = 1$ et $2\lambda + 3\mu = 6$, ce qui donne $\lambda = -3$ et $\mu = 4$. On en déduit donc que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$$

V.23 $\{a\}$ est inversible puisque $\{a\}_0 = 1 \neq 0$. De plus, la question **III.15** montre que $[a]^{-1} = \{a\}$ et donc $\{a\}^{-1} = a$.

V.24 **Analyse :** Soient a et b deux réels. On suppose que $u = \{a\} \star \{b\}$. Notamment $\{a\}_0\{b\}_1 + \{a\}_1\{b\}_0 = u_1$, ce qui donne $a + b = 5$. De plus, $\{a\}_0\{b\}_2 + \{a\}_1\{b\}_1 + \{a\}_2\{b\}_0 = u_2$, ce qui donne $ab = 6$. On en déduit que a et b sont les racines du polynômes $X^2 - 5X + 6$, à savoir 2 et 3.
Synthèse : On pose $a = 2$ et $b = 3$. On vérifie sans peine que $(\{a\} \star \{b\})_0 = 1 = u_0$. Les calculs précédents montrent en fait que $(\{a\} \star \{b\})_1 = -a - b = -5 = u_1$ et que $(\{a\} \star \{b\})_2 = ab = 6 = u_2$. Donnons-nous maintenant un entier $n \geq 3$.

$$(\{a\} \star \{b\})_n = \sum_{k=0}^{n} \{a\}_k\{b\}_{n-k}$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Si $k \geq 2$, alors $\{a\}_k = 0$ et si $k \leq 1$, alors $n - k \geq n - 1 \geq 2$ donc $\{b\}_{n-k} = 0$. On a donc bien $(\{a\} \star \{b\})_n = 0 = u_n$.
Finalement $u = \{2\} \star \{3\}$.

V.25 On rappelle que $x = u^{-1} \star v$. Or $u = \{2\} \star \{3\}$ donc $u^{-1} = \{3\}^{-1} \star \{2\}^{-1} = [3] \star [2]$. D'après la question **II.8**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u^{-1})_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3 - 2} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

Alors $x_0 = (u^{-1} \star v)_0 = (u^{-1})_0 v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
x_n &= (u^{-1} \star v)_n \\
&= (v \star u^{-1})_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} v_k (u^{-1})_{n-k} \\
&= v_0 (u^{-1})_n + v_1 (u^{-1})_{n-1} \quad \text{car } v_k = 0 \text{ pour } k \geq 2 \\
&= 3^{n+1} - 2^{n+1} + 3^n - 2^n \\
&= 3 \cdot 3^n + 3^n - 2 \cdot 2^n - 2^n \\
&= 4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n
\end{aligned}$$

L'égalité est en fait encore valable pour $n = 0$.

Partie VI – Un peu de Python

VI.26 On peut être extrêmement concis en utilisant des *listes en compréhension*.

```python
def convol(U, V):
    N = min(len(U), len(V)) - 1
    return [sum([U[k] * V[n - k] for k in range(n + 1)]) for n in range(N + 1)]
```

Mais on peut évidemment utiliser des boucles "standard" si on préfère.

```python
def convol(U, V):
    N = min(len(U), len(V)) - 1
    L = []
    for n in range(N + 1):
        sum = 0
        for k in range(n + 1):
            sum += U[k] * V[n - k]
        L.append(sum)
    return L
```