Devoir surveillé n°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

$\boxed{1}$ **1.a** Remarquons que pour tout entier $n \geq n_0$,

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\, \mathrm{d}t$$

Par décroissance de f, pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$f(n+1) \leq f(t)$$

puis en intégrant sur $[n, n+1]$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\, \mathrm{d}t$$

de sorte que $\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq 0$. La suite $(\gamma_n)_{n \geq n_0}$ est donc décroissante.
A nouveau, si on fixe $n \geq n_0$ et que l'on se donne $k \in [\![n_0, -1]\!]$, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$f(t) \leq f(k)$$

puis en intégrant sur $[k, k+1]$

$$\int_k^{k+1} f(t)\, \mathrm{d}t \leq f(k)$$

et enfin

$$int_{n_0}^n f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k) \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = \mathrm{S}_n$$

car $f(n) \geq 0$. Par conséquent, (γ_n) est minorée par 0.
D'après le théorème de convergence monotone, (γ_n) converge.

1.b La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est continue, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$. D'après la question précédente, la suite de terme général γ_n converge. Notons ℓ sa limite de sorte que $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$. Or

$$\gamma_n = \mathrm{S}_n - \int_2^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - [\ln(\ln(t))]_2^n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n) + \ln(\ln 2)$$

En posant $\mathrm{C} = \ell - \ln(\ln 2)$, on a donc bien

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\ln n) + \mathrm{C} + o(1)$$

1.c Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^2(t)}$ sur $[2, +\infty[$ est $t \mapsto -\dfrac{1}{\ln t}$. Comme cette dernière fonction admet une limite en $+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)}$ converge.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^2(t)}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$. Par conséquent,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leq \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln^2(t)}$$

donc la série $\sum \dfrac{1}{k\ln^2(k)}$ converge.

Remarque. La somme précédente est à termes positifs donc a toujours un sens dans $[0,+\infty]$.

$\boxed{2}$ On remarque par exemple que $\dfrac{\ln k}{k(k-1)} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k^{3/2}}\right)$ et $\sum \dfrac{1}{k^{3/2}}$ est une série à termes positifs convergente (série de Riemann).

$\boxed{3}$ **3.a** Soit un entier $k \geq 2$. Par croissance de ln sur $[k-1,k]$,

$$\forall t \in [k-1,k],\ \ln(k) \geq \ln(t)$$

puis, par croissance de l'intégrale

$$\ln(k) = \int_{k-1}^{k} \ln(k)\ \mathrm{d}t \geq \int_{k-1}^{k} \ln(t)\ \mathrm{d}t$$

Enfin, d'après la relation de Chasles

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geq \int_{1}^{n} \ln(t)\ \mathrm{d}t = n\ln(n) - n + 1$$

3.b D'après la question précédente, pour tout entier $n \geq 2$;

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geq n\ln(n) - n + 1$$

Par ailleurs, par croissance de ln,

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq n\ln(n)$$

On en déduit que

$$|\ln(n!) - n\ln(n)| = n\ln(n) - \ln(n!) \leq n - 1 \leq n$$

ce qui prouve que

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + \mathcal{O}(n)$$

$\boxed{4}$ **4.a** Soit $\varphi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x\ln x - \lambda x$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = \ln(x) + 1 - \lambda$. Posons $\mu = e^{\lambda-1} > 0$. On en déduit que φ est strictement décroissante sur $]0,\mu]$ et strictement croissante sur $[\mu,+\infty[$. On sait aussi que $\lim\limits_{0^+} \varphi = 0 \leq \ln(n)$. Ainsi, par stricte décroissance de φ sur $]0,\mu]$, φ ne prend pas la valeur $\ln(n)$ sur $]0,e^{\lambda-1}]$. Par ailleurs, $\varphi(\mu) = -\mu < \ln(n)$. Enfin, $\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$ et φ est strictement croissante et continue sur $[\mu,+\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, φ prend la valeur $\ln(n)$ une unique fois sur $[\mu,+\infty[$ et donc également sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.b Par définition, $\varphi(r_n) = \ln(n)$. D'après la question précédente, φ induit une bijection de $[\mu,+\infty[$ sur $[-\mu,+\infty[$. En notant ψ la bijection réciproqie, $r_n = \psi(\ln(n))$. Or $\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} \psi = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$. A nouveau, $\varphi(r_n) = \ln(n)$ i.e. $r_n(\ln(r_n) - \lambda) = \ln(n)$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(r_n) = +\infty$, $\ln(r_n) - \lambda \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(r_n)$ puis $r_n\ln(r_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. On peut aussi écrire $r_n\ln(r_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)(1+o(1))$. On a donc

$$\begin{aligned}
\ln(r_n\ln(r_n)) &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(\ln(n)) + \ln(1+o(1)) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln(\ln(n)) + o(1)) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln(\ln(n)) + o(\ln(n))) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))
\end{aligned}$$

Or $\ln(r_n\ln(r_n)) = \ln(r_n) + \ln(\ln(r_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(r_n)$ par croissances comparées ($\ln(r_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$). On a donc $\ln(r_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(r_n))$. Or on a vu que $r_n\ln(r_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$.

$\boxed{5}$ **5.a** **5.a.i** Pour tout entier $n \geq \max \mathrm{F}$, $d_n(\mathrm{F}) = \dfrac{\operatorname{card} \mathrm{F}}{n}$ donc F admet une densité nulle.

5.a.ii Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n(a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{n}\lfloor n/a \rfloor$. Notamment,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}\left(\frac{n}{a} - 1\right) < d_n(a\mathbb{N}^*) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{a}$$

Par encadrement, $a\mathbb{N}^*$ admet une densité égale à $\dfrac{1}{a}$.

5.a.iii Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n(\mathrm{C}) = \dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$. En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq d_n(\mathrm{C}) \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$$

On en déduit que C admet une densité nulle.

5.b On désignera l'union disjointe par le symbole $\sqcup$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[\![1, n]\!] = ((\mathbb{N}^* \setminus \mathrm{E}_1) \sqcup \mathrm{E}_1) \cap [\![1, n]\!] = ((\mathbb{N}^* \setminus \mathrm{E}_1) \cap [\![1, n]\!]) \sqcup (\mathrm{E}_1 \cap [\![1, n]\!])$$

On en déduit que $d_n(\mathbb{N}^* \setminus \mathrm{E}_1) + d_n(\mathrm{E}_1) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $\mathbb{N}^* \setminus \mathrm{E}_1$ possède une densité et $d(\mathbb{N}^* \setminus \mathrm{E}_1) = 1 - d(\mathrm{E}_1)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(\mathrm{E}_1 \sqcup \mathrm{E}_2) \cap [\![1, n]\!] = (\mathrm{E}_1 \cap [\![1, n]\!]) \sqcup (\mathrm{E}_2 \cap [\![1, n]\!])$$

On en déduit que $d_n(\mathrm{E}_1 \sqcup \mathrm{E}_2) = d_n(\mathrm{E}_1) + d_n(\mathrm{E}_2)$. Ainsi, si E_1 et E_2 possèdent une densité $\mathrm{E}_1 \sqcup \mathrm{E}_2$ possède également une densité et $d(\mathrm{E}_1 \sqcup \mathrm{E}_2) = d(\mathrm{E}_1) + d(\mathrm{E}_2)$.

5.c On peut mettre en défaut la σ-additivité. D'après la question précédente, $d(\{n\}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ mais

$$d\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{n\}\right) = d(\mathbb{N}^*) = 1 \neq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} d(\{n\})$$

On peut aussi constater que d n'est pas définie pour toutes les parties de $\mathbb{N}^*$. Par exemple, en posant $\mathrm{E} = \displaystyle\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [\![2^{2n}, 2^{2n+1} - 1]\!]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d_{2^{2n+1}-1} = \frac{1}{2^{2n+1} - 1} \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} = \frac{2^{2(n+1)} - 1}{3(2^{2n+1} - 1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$$

$$d_{2^{2n}-1} = \frac{1}{2^{2n} - 1} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k} = \frac{2^{2n} - 1}{3(2^{2n} - 1)} = \frac{1}{3}$$

Ainsi E ne possède pas de densité.
D'une manière ou d'une autre, d n'est pas une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

$\boxed{6}$ **6.a** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Comme les coefficients binomiaux sont positifs,

$$2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = 2\binom{2m+1}{m}$$

6.b Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que

$$r!\binom{2r+1}{r} = (2r+1)2r \ldots (r+2)$$

Soit $p \in [\![r+2, 2r+1]\!]$ un nombre premier. Alors p divise $r!\dbinom{2r+1}{r}$. Mais p est premier avec tous les entiers compris entre 1 et r (un nombre premier est premier avec un nombre qu'il ne divise pas) donc p est premier avec $r!$. D'après le lemme de Gauss, p divise $\dbinom{2r+1}{r}$. Enfin, tous les nombres premiers compris entre $r+2$ et $2r+1$ sont premiers entre eux deux à deux donc leur produit divise $\dbinom{2r+1}{r}$.

6.c Notons HR(n) l'assertion « $\displaystyle\prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^n$ ». HR(2) est vraie puisque $2 \leq 16$.

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que HR(k) est vraie pour tout $k \in [\![2, n]\!]$. Si $n+1$ n'est pas premier, alors

$$\prod_{\substack{p \leq n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^n \leq 4^{n+1}$$

Sinon $n+1$ est premier et impair ($n+1 \geq 3$). Il existe donc $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 = 2r+1$. Ainsi

$$\prod_{\substack{p \leq n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p = \left(\prod_{\substack{p \leq r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p\right)\left(\prod_{\substack{r+1 < p \leq 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p\right)$$

Comme $r+1 \leq 2r = n$, on peut appliquer HR$(r+1)$ pour affirmer que $\prod_{\substack{p \leq r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^{r+1}$. Par ailleurs, d'après les deux questions précédentes,

$$\prod_{\substack{r+1 < p \leq 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq \binom{2r+1}{r} \leq 2^{2r}$$

Finalement,

$$\prod_{\substack{p \leq n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^{r+1} \cdot 2^{2r} = 4^{2r+1} = 4^{n+1}$$

Dans tous les cas, HR$(n+1)$ est vraie, ce qui permet de conclure par récurrence forte que HR(n) est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

$\boxed{7}$ **7.a** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. α_k est également le nombre d'entiers m tels que $1 \leq mp^k \leq n$ i.e. $\frac{1}{p^k} \leq m \leq \frac{n}{p^k}$. Comme $\frac{1}{p^k} \leq 1$, c'est également le nombre d'entiers m tels que $1 \leq m \leq \frac{n}{p^k}$, c'est-à-dire $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

7.b Tout d'abord,

$$\nu_p(n!) = \nu_p\left(\prod_{j=1}^{n} j\right) = \sum_{j=1}^{n} \nu_p(j)$$

Posons alors $\mathrm{I}_k = \{j \in [\![1,n]\!],\ \nu_p(j) = k\}$. Alors $[\![1,n]\!] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_k$. Par sommation par paquets,

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j \in \mathrm{I}_k} \nu_p(j) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \operatorname{card}(\mathrm{I}_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\beta_k$$

7.c Posons $\mathrm{J}_k = \{j \in [\![1,n]\!],\ \nu_p(j) \geq k\}$. Alors $\mathrm{J}_{k+1} \sqcup \mathrm{I}_k = \mathrm{J}_k$ donc $\operatorname{card}(\mathrm{J}_{k+1}) + \operatorname{card} \mathrm{I}_k = \operatorname{card} \mathrm{J}_k$ ou encore $\beta_k = \alpha_k - \alpha_{k+1}$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\beta_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=0}^{+\infty} k\alpha_{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)\alpha_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Il s'agit de la formule de Legendre.

Remarque. Les opérations précédentes sont licites car toutes les sommes intervenant plus haut ne comportent qu'un nombre fini de termes non nuls.

7.d Par majoration de la partie entière,

$$\nu_p(n!) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1}$$

De plus, s'agissant d'une somme de termes positifs, on peut la minorer par son premier terme :

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \geq \frac{n}{p} - 1$$

8 L'énoncé nous demande d'effectuer ce que l'on appelle une transformation d'Abel.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k &= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\mathrm{A}_k - \mathrm{A}_{k-1}) \qquad \text{en convenant que } \mathrm{A}_0 = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \mathrm{A}_k - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \mathrm{A}_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \mathrm{A}_k - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k+1} \mathrm{A}_k \\
&= \varepsilon_n \mathrm{A}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \mathrm{A}_k - \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_{k+1} \mathrm{A}_k \qquad \text{car } \mathrm{A}_0 = 0 \\
&= \varepsilon_n \mathrm{A}_n + \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \mathrm{A}_k
\end{aligned}$$

9 Soit $(x, a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire,

$$|x - a| = |x - (a + b) + b| \leq |x - (a + b)| + |b|$$

Ainsi

$$|x - (a + b)| \leq d \implies |x - a| \leq d + |b|$$

Notamment

$$\left[|\mathrm{X}_\mathrm{N} - \mathbb{E}(\mathrm{X}_n)| \leq \frac{1}{2} a_\mathrm{N}^{2/3}\right] = \left[|\mathrm{X}_\mathrm{N} - (a_\mathrm{N} + b_\mathrm{N})| \leq \frac{1}{2} a_\mathrm{N}^{2/3}\right] \subset \left[|\mathrm{X}_\mathrm{N} - a_\mathrm{N}| \leq \frac{1}{2} a_\mathrm{N}^{2/3}\right] + b_\mathrm{N}$$

Mais (b_N) est bornée et $(a_\mathrm{N}^{2/3})$ diverge vers $+\infty$, $|b_\mathrm{N}| \leq \frac{1}{2} a_\mathrm{N}^{2/3}$ pour N suffisamment grand. On en déduit finalement que

$$\left[|\mathrm{X}_\mathrm{N} - \mathbb{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N})| \leq \frac{1}{2} a_\mathrm{N}^{2/3}\right] \subset \left[|\mathrm{X}_\mathrm{N} - a_\mathrm{N}| \leq a_\mathrm{N}^{2/3}\right]$$

10 En passant au complémentaire, on a donc à partir d'un certain rang

$$\left[|\mathrm{X}_\mathrm{N} - a_\mathrm{N}| > a_\mathrm{N}^{2/3}\right] \subset \left[|\mathrm{X}_\mathrm{N} - \mathbb{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N})| > \frac{1}{2} a_\mathrm{N}^{2/3}\right]$$

de sorte que

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_\mathrm{N} - a_\mathrm{N}| > a_\mathrm{N}^{2/3}\right) \leq \mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_\mathrm{N} - \mathbb{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N})| > \frac{1}{2} a_\mathrm{N}^{2/3}\right)$$

Mais, par inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_\mathrm{N} - \mathbb{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N})| > \frac{1}{2} a_\mathrm{N}^{2/3}\right) \leq \frac{4\mathbb{V}(\mathrm{X}_\mathrm{N})}{a_n^{4/3}}$$

Mais, par hypothèse, $\mathbb{V}(\mathrm{X}_\mathrm{N}) \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} \mathcal{O}(a_\mathrm{N})$ donc

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_\mathrm{N} - \mathbb{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N})| > \frac{1}{2} a_\mathrm{N}^{2/3}\right) \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{a_\mathrm{N}^{1/3}}\right)$$

Comme (a_N) diverge vers $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n^{1/3}} = 0$ puis

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_\mathrm{N} - \mathbb{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N})| > \frac{1}{2} a_\mathrm{N}^{2/3}\right) = 0$$