

## Ouverts et fermés

### Exercice 1

Soit  $(u_n)$  une suite strictement croissante de réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que  $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  soit fermé.

### Exercice 2

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'ensemble des projecteurs de  $E$  est fermé dans  $\mathcal{L}(E)$ .

### Exercice 3

CCP 2013

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  que l'on munit de la norme uniforme. On pose

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0, \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$$

1. Montrer que  $A$  est une partie fermée de  $E$ .
2. Montrer que pour tout  $f \in A$ ,  $\|f\|_\infty > 1$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que l'on peut choisir  $\alpha \in ]0, 1]$  tel que la fonction

$$f_n : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right)x & \text{si } x \leq \alpha \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

appartienne à  $A$ .

4. En déduire la distance  $d(0, A)$ .

### Exercice 4 ★★★

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé  $E$ . On note  $V$  l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$ .

1. Montrer que  $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_k, k \geq n\}}$ .
2. En déduire que  $V$  est fermé.

### Exercice 5

Montrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé  $E$  sont  $\emptyset$  et  $E$ .

### Exercice 6

Soit  $E$  l'ensemble des suites complexes  $u$  telles que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$  converge. On pose  $\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

L'ensemble  $F = \left\{ u \in E, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 \right\}$  est-il fermé ? ouvert ? borné ?

### Exercice 7 ★★

Petites Mines MP 2016

Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . On pose

$$O = \{f \in E \mid f(1) > 0\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t) dt \leq 0 \right\}$$

1. Montrer que  $O$  est ouvert pour  $\|\cdot\|_\infty$ .
2. Montrer que  $F$  est fermé pour  $\|\cdot\|_\infty$  et pour  $\|\cdot\|_1$ .
3.  $O$  est-il ouvert pour  $\|\cdot\|_1$  ?

### Exercice 8

On note  $F$  l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. On note  $E$  l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme infinie.

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2.  $F$  est-il fermé dans  $E$  ? ouvert dans  $E$  ?

**Exercice 9 ★★★★★**

Centrale MP

On note  $E$  l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme infinie. Les ensembles suivants sont-ils fermés ?

1. l'ensemble  $A$  des suites croissantes ;
2. l'ensemble  $B$  des suites convergeant vers 0 ;
3. l'ensemble  $C$  des suites convergentes ;
4. l'ensemble  $D$  des suites admettant 0 pour valeur d'adhérence ;
5. l'ensemble  $E$  des suites périodiques.

**Exercice 10 ★**

1. Montrer que  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{xy} > (x + y)^2\}$  est une partie ouverte de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ln(1 + x^2 + y^2) \leq x + y\}$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^2$ .
3. Montrer que  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sin(x + y) = \sqrt{x^2 + y^2}\}$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 11 ★**

On munit l'espace vectoriel  $E$  des applications bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de la norme infinie. Montrer que

$$F = \{f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$$

est fermé.

**Exercice 12 ★★**

On note  $E_n$  l'ensemble des polynômes unitaires de degré  $n$  à coefficients réels.

1. Montrer que  $E_n$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. Montrer que  $\inf_{P \in E_n} \int_0^1 |P(t)| dt > 0$ .

**Adhérence et intérieur****Exercice 13**

Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est l'ensemble des matrices trigonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

On pourra montrer que si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , unitaire et de degré  $n$ , alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$ .

**Exercice 14 ★★★**

Soit  $A$  une partie convexe d'un espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que  $\overline{A}$  et  $\overset{\circ}{A}$  sont convexes.

**Exercice 15 ★★★★★**

Soient  $(n, p, r) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{N}$ . On pose

$$A_r = \{M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \operatorname{rg} M = r\}$$

$$B_r = \{M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \operatorname{rg} M \leq r\}$$

$$C_r = \{M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \operatorname{rg} M \geq r\}$$

Les ensembles  $A_r, B_r, C_r$  sont-ils ouverts ? fermés ?

Déterminer leurs adhérences et leurs intérieurs.

**Exercice 16 ★★★★★****X (non PC/PSI) MP 2019**

1. On note  $A$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré  $n$  scindés sur  $\mathbb{R}$  à racines simples. Montrer que  $A$  est ouvert dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. Quelle est l'adhérence de  $A$  ?

**Exercice 17 ★★**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé  $E$ .

1. Montrer que si  $F$  est ouvert, alors  $F = E$ .
2. Montrer que si  $F \neq E$ , alors  $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ .

**Exercice 18 ★★**

Soit  $F$  une partie fermée d'un espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que  $\text{Fr}(\text{Fr}(F)) = \text{Fr}(F)$ .

**Exercice 19 ★★****Orthogonal et topologie**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel  $E$  que l'on munit de sa norme euclidienne.

1. Montrer que pour tout  $y \in E$ ,  $\varphi_y : x \in E \mapsto \langle x, y \rangle$  est continue.
2. Montrer que  $F^\perp$  est fermé dans  $E$ .
3. Montrer que de manière générale,  $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$ .

**Exercice 20 ★**

Soit  $A$  une partie bornée d'un espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que  $\overline{A}$  est également bornée.

**Exercice 21 ★****ESTP 1977**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. On note respectivement  $\overset{\circ}{X}$  et  $\overline{X}$  l'intérieur et l'adhérence d'une partie  $X$  de  $E$ . On note également  $\alpha(X) = \overset{\circ}{\overline{X}}$  et  $\beta(X) = \overline{\overset{\circ}{X}}$ .

1. Montrer que si  $X$  est ouvert, alors  $X \subset \alpha(X)$  et que si  $X$  est fermé, alors  $\beta(X) \subset X$ .
2. Montrer que, de manière générale,  $\alpha(\alpha(X)) = \alpha(X)$  et  $\beta(\beta(X)) = \beta(X)$ .
3. Dans cette question, on considère  $E = \mathbb{R}$ . Déterminer les ensembles  $\overline{\mathbb{Q}}$  et  $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}$ .
4. Donner un exemple (dans  $\mathbb{R}$  si l'on veut), où les ensembles suivants sont tous distincts :

$$X, \overset{\circ}{X}, \overline{X}, \alpha(X), \beta(X), \alpha(\overset{\circ}{X}), \beta(\overline{X})$$

5.  $A$  et  $B$  étant deux parties de  $E$ , montrer que  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ . Donner un exemple simple où  $A \cap \overline{B}$ ,  $\overline{A} \cap B$  et  $\overline{A} \cap \overline{B}$  sont distincts et un autre où,  $A$  n'étant pas ouvert,  $A \cap \overline{B}$  n'est pas inclus dans  $A \cap B$ .

**Densité****Exercice 22****ENS PC 2010**

1. Déterminer  $f$  continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t)t^n dt = 0$$

2. Le résultat précédent persiste-t-il si on change la condition en

$$\forall n \geq n_0, \int_0^1 f(t)t^n dt = 0$$

où  $n_0$  est un entier non nul.

**Exercice 23****X MP 2010**

Soit  $A$  une partie convexe et dense de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que  $A = \mathbb{R}^n$ .

**Exercice 24****ENS MP 2010**

Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite strictement croissante de réels strictement positifs. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (i) le sous-espace vectoriel engendré par la famille  $(x \mapsto x^{a_n})_{n \geq 0}$  est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$

pour la norme  $\| \cdot \|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_0^1 f^2}$ ;

- (ii) la série de terme général  $\frac{1}{a_n}$  diverge.

**Exercice 25**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\int_a^b f(t)t^k dt = 0$ . Que peut-on dire de  $f$  ?

**Exercice 26****Mines MP**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé.

1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que  $\overline{F}$  est encore un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Montrer que  $H$  est fermé ou dense dans  $E$ .

**Exercice 27****Lemme de Riemann-Lebesgue**

On considère un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  et un espace vectoriel normé de dimension finie  $E$ .

1. Soit  $\varphi$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$ . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} \varphi(t) dt = 0$$

2. Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$ . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

3. Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $E$ . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

**Exercice 28****Adhérence des matrices diagonalisables**

On note  $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  (resp.  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ ) l'ensemble des matrices diagonalisables (resp. trigonalisables) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Montrer que  $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
2. a. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  unitaire de degré  $d$ . Montrer que  $P$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$  si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^d$$

- b. En déduire que  $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 29**

On note  $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{T}_2(\mathbb{R})$ ) l'ensemble des matrices diagonalisables (resp. trigonalisables) de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que l'application  $\varphi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(M)^2 - 4 \det(M)$  est continue.
2. Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Montrer que  $M$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\varphi(M) \geq 0$ .
3. En déduire que  $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$  n'est pas dense dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
4. Montrer que  $\overline{\mathcal{D}_2(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 30 ★★**

Soient  $U$  et  $V$  deux parties denses d'un espace vectoriel normé  $E$ . On suppose que  $U$  est ouvert. Montrer que  $U \cap V$  est dense dans  $E$ .

**Exercice 31 ★★**

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ .

1. On suppose  $A$  inversible. Montrer que  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ .
2. Montrer par un argument de densité que le résultat précédent reste valable si on ne suppose plus  $A$  inversible.

**Limite et continuité**

**Exercice 32**

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en  $(0, 0)$  ?

1.  $f(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ .
2.  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .
3.  $f(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2}$ .
4.  $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ .
5.  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \sin x$ .
6.  $f(x, y) = x^y$ .
7.  $f(x, y) = \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

**Exercice 33 ★★**

Pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on pose  $N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |P^{(n)}(0)|$  et  $N_2(P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|$ . On considère l'endomorphisme  $D$  de  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $D(P) = P'$  pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

1. Vérifier que  $N_1$  et  $N_2$  sont des normes sur  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Montrer que si l'on munit  $\mathbb{R}[X]$  de la norme  $N_1$ , alors  $D$  est continu.
3. Montrer que si l'on munit  $\mathbb{R}[X]$  de la norme  $N_2$ , alors  $D$  n'est pas continu.

**Exercice 34**

On pose  $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ . Montrer que l'application  $\varphi : f \in E \mapsto f'$  n'est jamais continue de  $(E, N)$  dans  $(E, N)$  quelque soit la norme  $N$  dont on munit  $E$ .

**Exercice 35 ★**

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

Soit  $E = \mathbb{C}[X]$ . Pour  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$ , on pose  $\|P\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ . Soit  $b \in \mathbb{C}$ . On définit l'application  $f : P \in E \mapsto P(b)$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Etudier la continuité de  $f$  et calculer sa norme subordonnée le cas échéant.

**Exercice 36 ★★**

On note  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . On munit  $E$  d'une norme définie de la manière suivante :

$$\forall f \in E, \|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$$

Pour  $f \in E$ , on définit

$$\phi(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

1. Justifier que  $\phi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Démontrer que  $\phi$  est continu.
3. On pose  $f_n : x \in [0, 1] \mapsto ne^{-nx}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\|f_n\|$  et  $\|\phi(f_n)\|$ .
4. En déduire la norme de  $\phi$  subordonnée à la norme  $\|\cdot\|$ .

**Exercice 37 ★**

On note  $E$  l'ensemble des suites réelles bornées que l'on munit de la norme uniforme. On pose  $\Delta : (u_n) \in E \mapsto (u_{n+1} - u_n)$ . Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme continu de  $E$  et déterminer sa norme d'opérateur.

**Exercice 38**

Norme d'opérateur (ou norme subordonnée)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

1. On suppose que  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  sont munis de leurs normes uniformes respectives. Montrer que

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |A_{i,j}|$$

2. On suppose que  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  sont munis de leurs normes 1 respectives. Montrer que

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$$

3. On suppose que  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  sont munis de leurs normes 2 respectives. Montrer que

$$\|A\| = \sqrt{\max \operatorname{Sp}(A^T A)}$$

**Exercice 39 ★★**

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, \pi]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  que l'on munit de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On note  $D$  l'application qui à  $f \in E$  associe  $D(f) : x \in [0, \pi] \mapsto \int_0^x f(t) \sin(t) dt$ . Montrer que  $D$  est un endomorphisme continu de  $E$  et calculer sa norme d'opérateur.

**Exercice 40 ★★★**

On munit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme 1 définie par

$$\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

On note  $T$  l'application qui à  $f \in E$  associe l'application  $T(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x f(t) dt$ .

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Démontrer que  $T$  est continu sur  $(E, \|\cdot\|_1)$  et déterminer  $\|T\|$ .
3. Vérifier que la borne supérieure qui définit  $\|T\|$  n'est pas atteinte.

**Exercice 41****Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2023**

On pose  $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$  que l'on muni de la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ .  
On pose pour  $f \in E$ ,

$$u(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

Montrer que  $u$  est un endomorphisme continu de  $E$  et calculer  $\|u\|$ .

**Compacité****Exercice 42 ★★★****Centrale MP 2010**

Donner un exemple de partie fermée bornée non compacte d'un espace vectoriel normé.

**Exercice 43 ★★★★★****ENS Ulm/Lyon/Cachan MP 2001**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

1. On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f^{-1}(\{a\})$  soit un singleton. Montrer que  $f$  admet un extremum global.
2. On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f^{-1}(\{a\})$  soit compact et non vide. Montrer que  $f$  admet un extremum global.
3. On suppose que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(\{a\})$  est compact. Montrer que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x)$  existe.

**Exercice 44 ★★★★★****Centrale MP 2018**

Soient  $E$  un espace vectoriel normé,  $K$  un compact de  $E$  et  $g : K \rightarrow K$  une application 1-lipschitzienne. On cherche à montrer que  $g$  est surjective si, et seulement si, c'est une isométrie.

1. On commence par supposer  $g$  surjective. On considère  $x$  et  $y$  dans  $K$  ainsi que  $x_n$  et  $y_n$  des antécédents par  $g^n$  de  $x$  et  $y$  respectivement. On note  $(x', y')$  une valeur d'adhérence de la suite  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Montrer que  $x - y$  est une valeur d'adhérence de la suite  $(g^n(x') - g^n(y'))_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Montrer que la suite  $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\|x - y\|$ . En déduire que  $g$  est une isométrie.
3. On suppose maintenant que  $g$  est une isométrie. Montrer que  $g$  est surjective. Donner un contre-exemple lorsque  $K$  est seulement bornée.

**Exercice 45 ★★★★★****Centrale MP**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Pour un compact  $K$  non vide, on pose  $\delta(K) = \sup_{(x,y) \in K^2} \|x - y\|$ . Montrer que  $\delta(K)$  est bien défini. La borne supérieure est-elle atteinte ?
2. Pour  $a \in E$ , on note  $\mathcal{S}_a$  l'ensemble des compacts de  $E$  symétriques par rapport à  $a$ . Pour  $B$  compact de  $E$ , on pose

$$T(B) = \left\{ x \in B \mid \forall y \in B, \|x - y\| \leq \frac{1}{2}\delta(B) \right\}$$

Montrer que  $T$  induit une application de  $\mathcal{S}_a$  dans  $\mathcal{S}_a$ .

3. Soit  $B_0 \in \mathcal{S}_a$ . On pose  $B_{n+1} = T(B_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $\bigcap_{n \geq 0} B_n$ .
4. En déduire que toute isométrie de  $E$  conserve les milieux.  
*Remarque : une isométrie de  $E$  est une application  $u : E \rightarrow E$  telle que  $\|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$  pour tout  $(x, y) \in E^2$ .*

**Exercice 46 ★★★****Mines MP**

Soit  $K$  une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé et  $f : K \rightarrow K$  telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. Montrer que  $f$  admet un unique point fixe.
2. Soit  $(x_n)$  une suite de premier terme  $x_0 \in K$  et telle que  $x_{n+1} = f(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $(x_n)$  converge vers l'unique point fixe de  $f$ .
3. Donner un contre-exemple en ne supposant plus  $K$  compact.

**Exercice 47 ★★★****Principe du maximum pour les polynômes (X 2019)**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . On note

$$B = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\} \quad \text{et} \quad S = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

Montrer que

$$\max_{z \in B} |P(z)| = \max_{z \in S} |P(z)|$$

**Exercice 48 ★**

Montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  est une partie compacte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 49**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé de dimension finie et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Montrer que  $f$  admet un minimum sur  $E$ .

**Exercice 50 ★★★**

Soient  $K$  et  $L$  des parties respectives de deux espaces vectoriels normés  $E$  et  $F$ . On suppose  $K$  compact. Soit  $f : K \rightarrow L$  bijective et continue. Montrer que  $f^{-1}$  est continue.

**Exercice 51 ★★★★★****Théorème de compacité de Riesz**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$  tel que  $F \neq E$ .
  - a. Soit  $x \in E \setminus F$ . Justifier que  $\delta = d(x, F) > 0$ .
  - b. Justifier qu'il existe  $v \in F$  tel que  $0 < \|x - v\| \leq 2\delta$ .
  - c. On pose  $u = \frac{x - v}{\|x - v\|}$ . Justifier que  $d(u, F) \geq \frac{1}{2}$ .
2. On note  $B$  la boule unité fermée de  $E$  i.e.  $B = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$ . Montrer que si  $E$  n'est pas de dimension finie, alors  $B$  n'est pas compacte.

**Exercice 52 ★★****Matrices stochastiques**

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des matrices *stochastiques* de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  à *coefficients positifs* et telles que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^p M_{i,j} = 1$$

Montrer que  $\mathcal{S}$  est une partie compacte de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

## Connexité

### Exercice 53

ENS MP 2010

1. Soient  $r, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_1, \dots, f_r$  des formes linéaires sur  $\mathbb{R}^n$  formant une famille libre. Quel est le nombre de composantes connexes par arcs de  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^r \text{Ker } f_i$  ?
2. Même question en remplaçant  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{C}$ .

### Exercice 54

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à 2.

1. Montrer que la sphère unité  $S$  de  $E$  est connexe par arcs.
2. En déduire que toutes les sphères de  $E$  sont connexes par arcs.

### Exercice 55 ★★

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $O_n(\mathbb{R})$  est-il connexe par arcs ?

### Exercice 56 ★★

Montrer que  $SO_2(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.

### Exercice 57 ★★★

Connexité par arcs de  $GL_n(\mathbb{C})$

1. Soit  $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$ . On pose

$$d : z \in \mathbb{C} \mapsto \det((1-z)A + zB)$$

Montrer que  $V = \{z \in \mathbb{C}, d(z) \neq 0\}$  est connexe par arcs.

2. En déduire que  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.

### Exercice 58 ★★

1. Déterminer les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^3 = x^3$ .
2. Déterminer les applications  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  continues telles que  $\forall z \in \mathbb{C}, f(z)^3 = z^3$ .

### Exercice 59 ★★★

Soit  $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que  $f$  n'est pas injective.

### Exercice 60 ★★★

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que  $f$  n'est pas injective.