

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Dans tout ce chapitre, A désigne une partie de \mathbb{R} et \mathbb{K} le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Suites de fonctions

1.1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

Définition 1.1 Convergence simple

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans \mathbb{K} . On dit que (f_n) **converge simplement** sur A vers une fonction f de A dans \mathbb{K} si

$$\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Exemple 1.1

On pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers $x \mapsto e^x$.

Exercice 1.1

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} convergeant simplement sur I vers une fonction f . Montrer que si les f_n sont croissantes / décroissantes / convexes / concaves, alors f est croissante / décroissante / convexe / concave.

Rappel Norme uniforme

On rappelle que la **norme uniforme** est définie sur l'ensemble des fonctions bornées de A dans \mathbb{K} par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

Définition 1.2 Convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans \mathbb{K} . On dit que (f_n) **converge uniformément** sur A vers une fonction f de A dans \mathbb{K} si les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

REMARQUE. En termes de quantificateurs, la **convergence simple** s'écrit :

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

La **convergence uniforme** s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

On notera la place du quantificateur « $\forall x \in A$ ».

REMARQUE. Si une suite de fonctions converge uniformément sur A , elle converge uniformément sur toute partie de A .

Exercice 1.2

Montrer qu'une combinaison linéaire de deux suites de fonctions convergeant uniformément sur une partie de \mathbb{R} converge également uniformément sur cette partie.

Proposition 1.1 La convergence uniforme implique la convergence simple

Si une suite de fonctions (f_n) converge **uniformément** sur A vers f , alors elle converge **simplement** vers f sur A.

ATTENTION ! La réciproque est fausse.

Méthode Montrer qu'une suite de fonctions converge uniformément

Soit (f_n) une suite de fonctions dont on souhaite montrer qu'elle converge uniformément.

1. On étudie d'abord la convergence simple. On fixe $x \in A$ et on étudie la limite éventuelle de la suite $(f_n(x))$. Si cette limite existe, on note $f(x)$ cette limite. Ainsi (f_n) converge simplement vers f sur l'ensemble D des x pour lesquels cette limite existe.
2. Il s'agit ensuite de montrer que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On doit donc trouver une majoration de $|f(x) - f_n(x)|$ **indépendante** de x . Pour cela, on peut étudier les variations de $f_n - f$ sur A pour déterminer la borne supérieure (ou éventuellement le maximum) de $|f_n - f|$ sur A.

Exemple 1.2

Soit $a \in [0, 1[$. On considère la suite de fonctions de terme général $f_n : x \in [0, 1] \mapsto n^a x^n (1 - x)$.

1. Etudions d'abord la convergence simple. Si $x \in [0, 1[$, $(f_n(x))$ converge vers 0 par croissances comparées. De plus, $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
2. f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et $f'_n(x) = n^a x^{n-1}(n - (n+1)x)$. Comme $f_n(0) = f_n(1) = 0$, on en déduit aisément que f_n est positive sur $[0, 1]$ et qu'elle admet son maximum en $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Ainsi

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^a}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

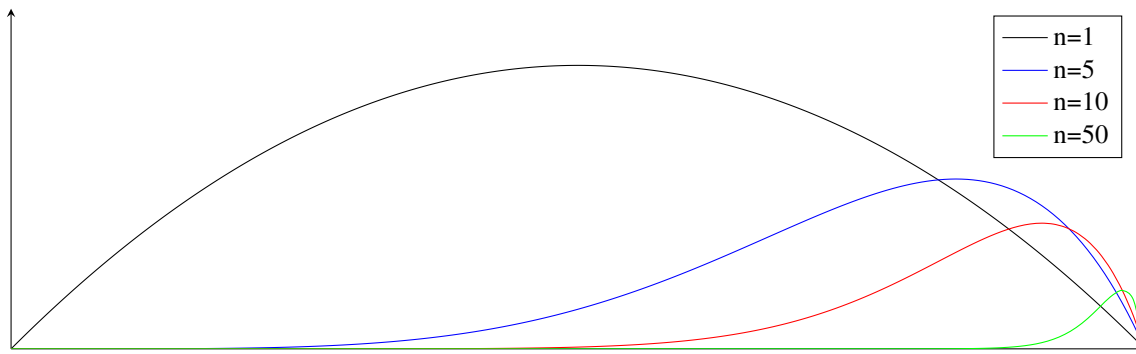
Or

$$\ln\left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n\right) = n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1}$$

Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{n+1} = 0$ car $a < 1$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ donc (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

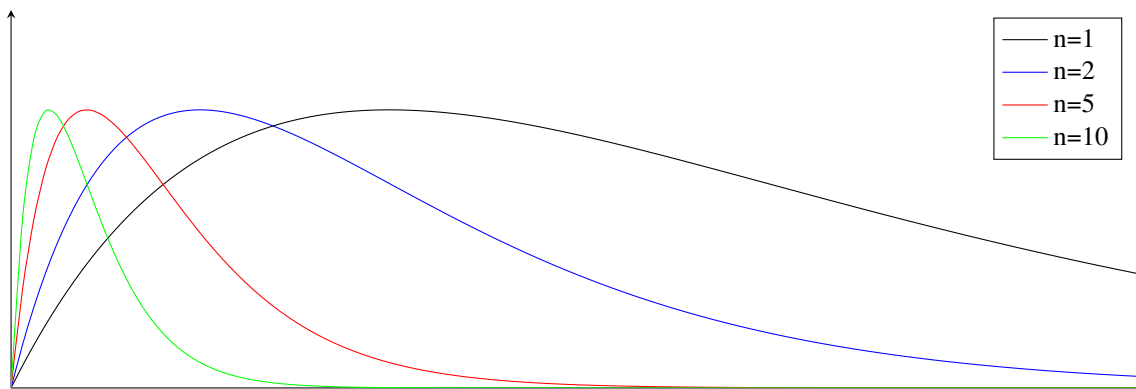
Graphes des fonctions $x \mapsto \sqrt{n}x^n(1-x)$ **Méthode** Montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément

- Tout d'abord, si une suite de fonctions (f_n) ne converge pas simplement, elle ne peut converger uniformément.
- Si l'on veut montrer qu'une suite de fonctions (f_n) convergeant simplement vers f **ne converge pas uniformément**, il suffit de trouver une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que la suite $(f(x_n) - f_n(x_n))$ ne converge pas vers 0.
- En effet, si (f_n) convergeait uniformément, elle convergerait uniformément vers f et on aurait donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) - f_n(x_n) = 0$ quelle que soit la suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ choisie.

Exemple 1.3

Posons $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto nxe^{-nx}$. On montre aisément que (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers la fonction nulle (croissance comparée si $x > 0$ et traiter le cas $x = 0$ à part).

Une étude de fonctions montre que f_n admet son maximum en $x_n = \frac{1}{n}$. Or $f_n(x_n) = e^{-1}$ donc la suite $(f_n(x_n))$ ne converge pas vers 0. La suite de fonctions (f_n) ne converge donc pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .

Graphes des fonctions $x \mapsto nxe^{-nx}$ 

ATTENTION ! Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille **infinie** de parties de A et si (f_n) converge uniformément sur chacun des A_i , alors (f_n) ne converge pas forcément uniformément sur $\bigcup_{i \in I} A_i$.
C'est néanmoins vrai lorsque la famille $(A_i)_{i \in I}$ est **finie**.

Exercice 1.3

Montrer que la suite de fonctions $(x \mapsto nxe^{-nx})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout **segment** de \mathbb{R}_+ mais pas sur \mathbb{R}_+ .

1.2 Théorèmes d'interversion**Rappel** Point adhérent

On rappelle que $a \in F$ est **adhérent** à A si tout voisinage de a (ou toute boule ouverte de centre a) possède une intersection non vide avec A .

Théorème 1.1 Théorème de la double limite

Soient (f_n) une suite de fonctions de A dans \mathbb{K} **convergeant uniformément** vers f sur A et a un point adhérent à A . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n possède une limite **finie** $\ell_n \in \mathbb{K}$ en a , alors

- la suite (ℓ_n) possède une limite en ℓ ;
- $\lim_a f = \ell$.

REMARQUE. Le résultat reste valide si $a = \pm\infty$ (dans ce cas A doit être une partie de \mathbb{R} non majorée ou non minorée).

REMARQUE. Il s'agit d'un théorème d'interversion dans le sens où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

REMARQUE. Le théorème de la double limite ne donne que des limites **finies**.

ATTENTION! L'hypothèse de convergence uniforme est essentielle. Considérons par exemple les fonctions $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$. La suite de fonctions (f_n) converge **simplement** sur $[0, 1[$ vers la fonction nulle. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 1} f_n = 1$ mais la limite de la fonction nulle en 1 est 0 et non 1. On en déduit en particulier que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

Théorème 1.2 Transfert de continuité

Si (f_n) est une suite de fonctions **continues** sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} convergeant **uniformément** vers f sur tout segment de I , alors f est continue sur I .

REMARQUE. Si (f_n) converge uniformément sur tout segment de I , alors (f_n) converge simplement sur I .

ATTENTION! L'hypothèse de convergence **uniforme** est à nouveau essentielle. Considérons les fonctions $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$. Les fonctions f_n sont bien continues sur $[0, 1]$. Cependant, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $x \in [0, 1] \mapsto \delta_{x,1}$ qui est discontinue en 1. On en déduit en particulier que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

ATTENTION! Si une suite de fonctions **continues** converge **simplement** vers une fonction **continue**, la convergence n'est pas nécessairement uniforme.

On peut par exemple considérer l'exemple suivant dû à Cantor : la suite de fonctions de terme général :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

converge simplement vers la fonction nulle (traiter à part le cas $x = 0$) qui est bien continue. Pourtant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(1/n) = 1$ donc la convergence ne peut être uniforme.

Théorème 1.3 Intversion limite / primitive

Soient (g_n) une suite de fonctions continues sur un **intervalle** I à valeurs dans \mathbb{K} et $a \in I$. On suppose que (g_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, G_n : x \in I \mapsto \int_a^x g_n(t) dt \quad \text{et} \quad G : x \in I \mapsto \int_a^x g(t) dt$$

Alors (G_n) converge uniformément vers la fonction G sur tout segment de I .

Corollaire 1.1 Intversion limite / intégration

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un **segment** $[a, b]$ convergeant **uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

REMARQUE. Il s'agit à nouveau d'un théorème d'intversion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

ATTENTION ! A nouveau, la condition de convergence uniforme n'est pas décorative. Considérons $f_n : x \in [0, \pi/2] \mapsto (n+1) \cos^n(x) \sin(x)$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$ (traiter à part le cas $x = 0$) mais pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = 1$$

Théorème 1.4 Intversion limite / dérivation

Soit (f_n) une suite de fonctions **de classe** \mathcal{C}^1 sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . Si

- (f_n) converge **simplement** vers une fonction f sur I ;
- (f'_n) converge **uniformément** vers une fonction g sur tout segment de I .

Alors

- (f_n) converge **uniformément** vers f sur tout segment de I ;
- f est de **classe** \mathcal{C}^1 sur I ;
- $f' = g$.

REMARQUE. Il s'agit bien d'un théorème d'interversion dans le sens où

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n'$$

Corollaire 1.2

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^k sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . Si

- pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I ;
- $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

- la limite simple f de (f_n) est de classe \mathcal{C}^k sur I ;
- pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément vers $f^{(j)}$ sur tout segment de I .

2 Séries de fonctions

2.1 Modes de convergence

Définition 2.1 Série de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans \mathbb{K} , on note $\sum f_n$ la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ est appelée la somme partielle de rang n de la série $\sum f_n$.

Définition 2.2 Convergence simple

On dit qu'une série de fonctions de A dans \mathbb{K} converge simplement sur A si la suite de ses sommes partielles converge simplement sur A .

REMARQUE. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur A , alors la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur A .

Définition 2.3 Reste

Si $\sum f_n$ converge simplement sur A , la fonction $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est bien définie sur A et est appelée reste de rang n de la série $\sum f_n$.

Définition 2.4 Convergence uniforme

On dit qu'une série de fonctions de A dans \mathbb{K} converge uniformément sur A si la suite de ses sommes partielles converge uniformément sur A .

REMARQUE. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A , alors la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur A .

Exemple 2.1

Posons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^n}{n!}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ converge et a pour somme e^x . Ainsi la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement et a pour somme la fonction exp.

Par contre, $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty = +\infty$ et donc (f_n) ne peut évidemment converger vers la fonction nulle.

Exercice 2.1

Soit $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Sur quelle partie I de \mathbb{R} la série $\sum f_n$ converge-t-elle simplement ?
2. La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur I ? sur les segments de I ?

Proposition 2.1

Une série de fonctions converge uniformément sur A si et seulement si

- elle converge simplement sur A
- et la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur A .

Définition 2.5 Convergence normale

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans \mathbb{K} . On dit que la série $\sum f_n$ converge **normalement** sur A si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Rappel Convergence absolue

Soit $\sum u_n$ une série de termes à valeurs dans \mathbb{K} . On dit que $\sum u_n$ converge **absolument** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 2.2

Si une série de fonctions converge **normalement** sur A , alors elle converge **uniformément** sur A et **absolument** en tout point de A .

REMARQUE. On peut alors préciser que si $\sum f_n$ converge normalement, alors $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$.

ATTENTION ! La réciproque est fautive : une série de fonctions peut converger uniformément sans converger normalement.

Exemple 2.2

Soit $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} . En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

2.2 Comparaison série / intégrale

Méthode Comparaison série-intégrale

On rappelle que si f est une fonction continue par morceaux et décroissante sur $[N, +\infty[$ telle que $\int_N^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge et

$$\int_N^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=N}^{+\infty} f(n) \leq f(N) + \int_N^{+\infty} f(t) dt$$

Exercice 2.2 Fonction ζ d'Euler

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Quel est le domaine de définition D de ζ ?
2. La série de fonctions définissant ζ converge-t-elle uniformément sur D ? sur tout segment de D ?

Exemple 2.3 Equivalent de la fonction ζ en 1

On rappelle que $\zeta: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1, +\infty[$. Soit $x > 1$. La fonction $f: t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

ou encore

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

On en déduit que

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \mathcal{O}(1)$$

En particulier,

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

2.3 Séries alternées

Rappel Séries alternées

Soit $\sum (-1)^n u_n$ une série vérifiant le critère spécial des séries alternées, c'est-à-dire que (u_n) est une suite réelle décroissant vers 0. Si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$, alors $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Exemple 2.4

On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$. Si on fixe $x \in \mathbb{R}^*$, la série $\sum f_n(x)$ converge car elle vérifie le critère des séries alternées. Autrement dit, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* . De plus, si

$$\text{on pose } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$$

ou encore $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$. On en déduit que (R_n) converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi la série $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 2.3

On considère $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}$. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément mais pas normalement sur $[0, 1]$.

2.4 Théorèmes d'interversion**Théorème 2.1 Théorème d'interversion série/limite**

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions de A dans \mathbb{K} **convergeant uniformément** vers f sur A et a un point adhérent à A.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n possède une limite **finie** $\ell_n \in \mathbb{K}$ en a , alors

- la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_n$ converge ;

- $\lim_a f = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

REMARQUE. Le résultat reste valide si $a = \pm\infty$ (dans ce cas A doit être une partie de \mathbb{R} non majorée ou non minorée).

REMARQUE. Le théorème d'interversion série/limite ne donne que des limites **finies**.

Exemple 2.5 Limite en $+\infty$ de la fonction ζ

Posons $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. En tant que série de Riemann, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [2, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum f_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[2, +\infty[$. De plus, $\lim_{+\infty} f_n = \delta_{1,n}$ donc $\lim_{+\infty} \zeta = 1$.

Exemple 2.6

Posons $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ ne peut converger uniformément sur $]1, +\infty[$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{1^+} f_n = \frac{1}{n}$

mais la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice 2.4

Montrer que

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)$$

Exemple 2.7 Limite en 1^+ de la fonction ζ

Posons à nouveau $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. La série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$ donc on ne peut pas utiliser le théorème d'interversion série/limite. Néanmoins, ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$ en tant que somme d'une série de fonctions décroissantes. La fonction ζ admet donc une limite en 1^+ . Fixons $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in]1, +\infty[, \zeta(x) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x}$$

Par passage à la limite,

$$\lim_{1^+} \zeta \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\lim_{1^+} \zeta = +\infty$.

Exercice 2.5

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Quel est le domaine de définition D de f ?
2. La série de fonctions définissant f converge-t-elle uniformément sur D ? sur tout segment de D ?

Théorème 2.2 Transfert de continuité

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions **continues** sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} convergeant **uniformément** vers f sur tout segment de I , alors f est continue sur I .

REMARQUE. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I , alors $\sum f_n$ converge simplement sur I .

Exemple 2.8 Continuité de la fonction ζ

Posons $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. En tant que série de Riemann, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$. Soit $a \in]1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^a}$$

Or $\sum \frac{1}{n^a}$ converge donc la série $\sum f_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[a, +\infty[$. On en déduit que ζ est continue sur $[a, +\infty[$.

Comme $]1, +\infty[= \bigcup_{a>1} [a, +\infty[$, ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Théorème 2.3 Intersion série / primitive

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions continues sur un **intervalle** I à valeurs dans \mathbb{K} et $a \in I$. On suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n : x \in I \mapsto \int_a^x f_n(t) dt \quad \text{et} \quad F : x \in I \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$$

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} F_n$ converge uniformément vers la fonction F sur tout segment de I .

Corollaire 2.1 Intersion série / intégration

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions continues sur un **segment** $[a, b]$ convergeant **uniformément** sur $[a, b]$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$$

Exercice 2.6

Soit $r \in \mathbb{R}_+$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq r$. Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta} - z}$. On distinguera les cas $|z| < r$ et $|z| > r$.

Théorème 2.4 Intersion série / dérivation

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions **de classe** \mathcal{C}^1 sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . Si

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge **simplement** sur I ;
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n$ converge **uniformément** sur tout segment de I .

Alors

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge **uniformément** sur tout segment de I ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de **classe** \mathcal{C}^1 sur I ;
- $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Corollaire 2.2

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions de classe \mathcal{C}^k sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . Si

- pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^k sur I ;
- pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^{(j)}$ converge uniformément vers $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}$ sur tout segment de I .

Exemple 2.9 La fonction ζ est de classe \mathcal{C}^∞

Posons $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$. Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1, +\infty[, f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$$

Fixons $a \in]1, +\infty[$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, +\infty[, |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ converge (série de Bertrand, classique quoique hors programme). Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n^{(k)}$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$. On en déduit que ζ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[a, +\infty[$. Comme $]1, +\infty[= \bigcup_{a>1} [a, +\infty[$, ζ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$. De plus,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]1, +\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$$

3 Approximation uniforme

Théorème 3.1 Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier

Soit f une fonction **continue par morceaux** sur un **segment** $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} . Alors il existe une suite (φ_n) de fonctions **en escalier** sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} **convergeant uniformément** vers f .

REMARQUE. Si on note $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} et $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} , ceci signifie que $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est **dense** dans $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ pour la norme uniforme.

Exercice 3.1 ★★★**Lemme de Riemann-Lebesgue**

On considère un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} et un espace vectoriel normé de dimension finie E .

1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans E . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} \varphi(t) \, dt = 0$$

2. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) \, dt = 0$$

3. Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} à valeurs dans E . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) \, dt = 0$$

Théorème 3.2 Théorème de Weierstrass

Soit f une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors il existe une suite (P_n) de fonctions **polynomiales** sur $[a, b]$ à coefficients dans \mathbb{K} **convergeant uniformément** vers f .

REMARQUE. A nouveau, ceci signifie que l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ à coefficients dans \mathbb{K} est **dense** dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ pour la norme uniforme.