Devoir surveillé n°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – Un développement asymptotique de la série harmonique (d'après ENS BL 2010)

Dans tout le problème, on considère les suites $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = \mathrm{H}_n - \ln n$$

Partie I –

I.1 Etablir pour tout entier naturel k non nul l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

I.2 **I.2.a** Quelle est la limite de la suite (H_n) ?

I.2.b En utilisant le résultat de la question **I.1**, montrer pour tout entier naturel non nul n l'encadrement suivant :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \mathrm{H}_n \leq \ln(n) + 1$$

I.2.c En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.

I.3 **I.3.a** En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu à la question **I.1**, montrer que la suite (u_n) est décroissante.

I.3.b En déduire que cette suite est convergente ; on note γ sa limite. Montrer que γ appartient à $[0, 1]$.

I.4 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout entier naturel non nul k :

$$\mathrm{J}_k = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\, \mathrm{d}t$$

I.4.a Établir pour tout entier naturel non nul k l'égalité suivante :

$$\mathrm{J}_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\, \mathrm{d}t$$

I.4.b En déduire pour tout entier naturel non nul n la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\, \mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{J}_k$$

I.5 On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

I.5.a Établir pour tout entier naturel non nul k la double inégalité suivante :

$$0 \leq \mathrm{J}_k \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{4t^3}$$

I.5.b En déduire que la série de terme général J_k est convergente.

I.5.c En déduire également, pour tout entier naturel non nul n l'encadrement suivant :

$$0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{J}_k \leq \frac{1}{8n^2}$$

I.5.d En déduire le développement asymptotique suivant :

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Partie II –

On considère les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 2}$ définies par :

$$\forall n \geq 1,\ x_n = u_n - \frac{1}{2n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 2,\ y_n = x_n - x_{n-1}$$

II.1 **II.1.a** Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$?

II.1.b Justifier pour tout entier naturel non nul n l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$$

II.1.c En déduire pour tout entier naturel non nul n l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$$

II.2 Montrer que

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

II.3 En déduire que

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Problème 2 – Série de restes

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n\geq n_0} a_n$ une série à termes réels. Dans le cas où cette série converge, on note R_n le reste de rang n de cette série, c'est-à-dire $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour tout entier $n \geq n_0$.

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{R}_n$ dans plusieurs cas.

Partie I – Cas d'une série géométrique

On se donne $q \in \mathbb{R}$ et on pose $a_n = q^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (on a donc $n_0 = 0$).

I.1 Pour quelles valeurs de q la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ convergent-elle ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite de cette partie.

I.2 Exprimer R_n en fonction de q et n.

I.3 En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{R}_n$ converge et calculer sa somme.

Partie II – Cas d'une série de Riemann

On se donne dans cette partie $\alpha \in \mathbb{R}$ et on pose $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on a donc $n_0 = 1$).

II.4 Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge-t-elle ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite de cette partie.

II.5 A l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

II.6 En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{R}_n$ converge.

Partie III – Cas de la série harmonique alternée

Dans cette partie, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on a donc $n_0 = 1$). On note également S_n la somme partielle de rang n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$, c'est-à-dire $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

III.7 Calculer $\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.

III.8 En déduire que $\mathrm{S}_n = -\ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, \mathrm{d}x$.

III.9 En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$.

III.10 Exprimer R_n à l'aide d'une intégrale puis, à l'aide d'une intégration par parties, déterminer deux constantes réelles α et β telles que $\alpha > 1$ et $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}\beta}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

III.11 En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{R}_n$.