Interrogation écrite n°02

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer un équivalent simple de la somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$.

Première méthode. *On sait que* $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln(n+1)-\ln(n)$. *Comme la série* $\sum \dfrac{1}{n}$ *est un série à termes positifs divergente,*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)-\ln(k) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Seconde méthode. *On sait que la fonction* $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Par comparaison série/intégrale*

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

ou encore

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1+\ln(n)$$

Comme $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Remarque. *On rappelle que* $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ *car* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$.

∎

2. Justifier la convergence de la série $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(n\pi\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

Comme la suite $(\pi/2n)$ *décroît vers* 0, $\sum \dfrac{(-1)^\pi}{2n}$ *converge. Comme* $3>1$, $\sum \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ *converge. Ainsi* $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ *converge.*

∎

3. Déterminer un équivalent simple du reste de la série $\sum \frac{1}{n^3}$.

Première méthode. *On sait que*

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^3}$ *est un série à termes positifs convergente,*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Seconde méthode. *On sait que la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Par comparaison série/intégrale*

$$\frac{1}{2(n+1)^2} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2n^2}$$

Comme $\frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, *on obtient*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

∎

4. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t} + t^2)}{t + t^2}\,\mathrm{d}t$.

Tout d'abord, $f : t \mapsto \frac{\sin(\sqrt{t} + t^2)}{t + t^2}$ *est continue par morceaux sur* $]0, +\infty[$.
De plus,

$$\sin(\sqrt{t} + t^2) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t} + t^2 \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t} \qquad \textit{et} \qquad t + t^2 \underset{t\to 0^+}{\sim} t$$

donc $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}}$ *et* f *est intégrable en* 0^+ *(*$1/2 < 1$*).*
Enfin, $\sin(\sqrt{t} + t^2) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$ *et* $t + t^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2$ *donc* $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ *et* f *est intégrable en* $+\infty$ *(*$2 > 1$*). Finalement,* f *est intégrable sur* $]0, +\infty[$ *et* I *converge.* ∎