Devoir à la maison n°10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – CCP MP Maths 2 2012

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $\left(\mathrm{E}_{i,j}\right)$ sa base canonique ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $\mathrm{E}_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne, qui vaut 1).

On note $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Pour tout $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on note $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{A}^k$. L'ensemble des matrices P(A) pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est noté $\mathbb{R}[\mathrm{A}]$.

On dit que P annule A lorsque $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$, ce qui équivaut à $\mathrm{P}(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme minimal de l'endomorphisme u ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A.

On note ϕ_{A} l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} - \mathrm{MA}$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de ϕ_{A}. Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de ϕ_{A}, les parties III et IV en étudient les vecteurs propres.

Les quatre parties sont indépendantes.

I Etude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1 Vérifier que l'application ϕ_{A} est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker \phi_{\mathrm{A}}$.

Dans la suite de cette partie, on pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 Donner la matrice de ϕ_{A} dans la base $\left(\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{2,2}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,1}\right)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\phi_{\mathrm{A}} \neq 0$ (c'est-à-dire que $\mathrm{A} \neq \lambda \mathrm{I}_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

3 Donner le polynôme caractéristique de ϕ_{A} sous forme factorisée (on pourra utiliser la calculatrice).

4 En déduire que ϕ_{A} est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

5 Démontrer que ϕ_{A} est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

II Etude du cas général

On note $c = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6 On suppose dans cette question que A est diagonalisable.

On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$\mathrm{B}_{i,j} = \mathrm{P}\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{P}^{-1}$$

6.a Exprimer, pour tout couple (i, j), la matrice $\mathrm{DE}_{i,j} - \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{D}$ en fonction de la matrice $\mathrm{E}_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

6.b Démontrer que, pour tout couple (i, j), $\mathrm{B}_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_{A}.

6.c En déduire que ϕ_{A} est diagonalisable.

7 On suppose dans cette question que ϕ_{A} est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\left(\mathrm{P}_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une base de vecteurs propres de ϕ_{A} et, pour tout couple (i, j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $\mathrm{P}_{i,j}$.

7.a Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et ϕ_{A} comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} - \mathrm{MA}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

7.a.i Justifier que toutes les valeurs propres de ϕ_{A} sont réelles.

7.a.ii Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de $\mathrm{A}^{\top}$.

7.a.iii Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A. On considère alors $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($\mathrm{X} \neq 0$) et $\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($\mathrm{Y} \neq 0$) tels que $\mathrm{AX} = z\mathrm{X}$ et $\mathrm{A}^{\top}\mathrm{Y} = \overline{z}\mathrm{Y}$.
En calculant $\phi_{\mathrm{A}}\left(\mathrm{XY}^{\top}\right)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de ϕ_{A}.

7.b En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

On note λ une valeur propre réelle de A et $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($\mathrm{X} \neq 0$) une matrice colonne telle que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$.

7.c Démontrer que, pour tout couple (i, j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $\mathrm{AP}_{i,j}\mathrm{X} = \mu_{i,j}\mathrm{P}_{i,j}\mathrm{X}$.

7.d En déduire que A est diagonalisable.

III Etude des vecteurs propres de ϕ_{A} associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A.

8 Démontrer que la famille $\left(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \dots, \mathrm{A}^{m-1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}[\mathrm{A}]$.

9 Vérifier que $\mathbb{R}[\mathrm{A}]$ est inclus dans $\ker \phi_{\mathrm{A}}$ et en déduire une minoration de $\dim \ker \phi_{\mathrm{A}}$.

10 *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

10.a Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

10.b Soient $\mathrm{B} \in \ker \phi_{\mathrm{A}}$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Démontrer que si $v(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ alors $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

10.c En déduire $\ker \phi_{\mathrm{A}}$.

11 *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ $(1 \leq p \leq n)$ les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $\mathrm{E}_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k. On note m_k la dimension de cet espace propre.

11.a Soient $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $\mathrm{B} \in \ker \phi_{\mathrm{A}}$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $\mathrm{E}_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(\mathrm{E}_u(\lambda_k)) \subset \mathrm{E}_u(\lambda_k)$).

11.b En déduire que $\mathrm{B} \in \ker \phi_{\mathrm{A}}$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

11.c Préciser la dimension de $\ker \phi_{\mathrm{A}}$.

11.d Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k (on ne demande pas de justification).

IV Etude des vecteurs propres de ϕ_{A} associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de ϕ_{A} et B un vecteur propre associé ($\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \neq 0$). On note π_{B} le polynôme minimal de B et d le degré de π_{B}.

12 Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi_{\mathrm{A}}\left(\mathrm{B}^k\right) = \alpha k \mathrm{B}^k$.

13 Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Exprimer $\phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{P}(\mathrm{B}))$ en fonction de α, B et $\mathrm{P}'(\mathrm{B})$.

14 Démontrer que le polynôme $\mathrm{X}\pi'_{\mathrm{B}} - d\pi_{\mathrm{B}}$ est le polynôme nul (π'_{B} étant le polynôme dérivé du polynôme minimal de la matrice B).

15 En déduire que $\mathrm{B}^d = 0$.