Devoir surveillé n°12

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

$\boxed{1}$ **1.a Première méthode.** Pour tout entier $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente, la série $\sum a_n$ converge.
Deuxième méthode. Comme $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout entier $n \geq 2$ et tout $t \in [n-1, n]$,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n-1}$$

puis, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{n-1}$$

et enfin

$$0 \leq -a_n \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Comme la suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge, il en est de même de la série télescopique $\sum \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum -a_n$ converge et donc $\sum a_n$ aussi.

1.b En notant $\mathrm{S} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2} a_n = \mathrm{S} + o(1)$$

ou encore

$$\mathrm{H}_n - 1 - \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{S} + o(1)$$

ou enfin

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \mathrm{A} + o(1)$$

avec $\mathrm{A} = 1 + \mathrm{S}$. A fortiori, $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + o(\ln n)$ i.e. $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

$\boxed{2}$ Posons $u_n = \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$. Remarquons tout d'abord que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^r}$.

- Si $r = 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $r = 1$, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ par croissances comparées. Or $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge et (u_n) est positive donc $\sum u_n$ diverge.
- Enfin, si $r \geq 2$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ par croissances comparées et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série convergente à termes positifs donc $\sum u_n$ converge.

$\boxed{3}$ **3.a** Le rayon de convergence de la série entière $\sum t^n$ vaut 1 et pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{t^n}{n}$ vaut 1 et pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\ln(1-t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$$

3.b Par produit de Cauchy, la série entière $\sum \left(\sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \frac{1}{k}\right) t^n$ possède un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et

$$\forall t \in]-1,1[, -\frac{\ln(1-t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{H}_n t^n$$

$\boxed{4}$ **4.a** Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $t \mapsto t^p(\ln t)^q$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$. De plus, par croissances comparées, $t^p(\ln t)^q \underset{t\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$ et $1/2 < 1$ donc $t \mapsto t^p(\ln t)^q$ est intégrable sur $]0,1]$. On en déduit que $\mathrm{I}_{p,q}$ existe.

4.b Soit $(p,q,\varepsilon) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times]0,1[$. Les applications $t \mapsto \frac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t \mapsto (\ln t)^q$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,1]$, de dérivées respectives $t \mapsto t^p$ et $t \mapsto \frac{q(\ln t)^{q-1}}{t}$. Par intégration par parties,

$$\mathrm{I}_{p,q}^{\varepsilon} = \frac{1}{p+1}\left[t^{p+1}(\ln t)^q\right]_{\varepsilon}^{1} - \frac{q}{p+1}\int_{\varepsilon}^{1} t^p(\ln t)^{q-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon^{p+1}(\ln\varepsilon)^q}{p+1} - \frac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p,q-1}^{\varepsilon}$$

4.c Par convergence des intégrales $\mathrm{I}_{p,q}$ et $\mathrm{I}_{p,q-1}$,

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \mathrm{I}_{p,q}^{\varepsilon} = \mathrm{I}_{p,q} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\varepsilon\to0^+} \mathrm{I}_{p,q-1}^{\varepsilon} = \mathrm{I}_{p,q-1}$$

Par ailleurs, par croissances comparées,

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \varepsilon^{p+1}(\ln\varepsilon)^q = 0$$

En passant à la limite dans l'égalité de la question précédente, on obtient donc

$$\mathrm{I}_{p,q} = -\frac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p,q-1}$$

4.d On montre alors par récurrence sur q que

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{I}_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q}\mathrm{I}_{p,0} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$$

$\boxed{5}$ Pour tout $t \in]0,1[$,

$$g(t) = (\ln t)^{r-1} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$$

où $g_n : t \mapsto a_n(\ln t)^{r-1}t^n$. On applique alors le théorème d'intégration terme à terme.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue par morceaux sur $]0,1[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est intégrable sur $]0,1[$ comme vu à la question **4.a**.
- g est continue par morceaux sur $]0,1[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme g_n est de signe constant sur $]0,1[$,

$$\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \left|\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t\right| = |a_n \mathrm{I}_{n,r-1}| = \frac{|a_n|(r-1)!}{(n+1)^r}$$

Par hypothèse $\sum \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument donc $\sum \int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t)\ \mathrm{d}t$$

ou encore

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{I}_{n,r-1} = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}$$

$\boxed{6}$ **6.a** D'après la question **3.b**, a fonction $f : t \mapsto -\dfrac{\ln(1-t)}{1-t}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et

$$\forall t \in]-1,1[,\ f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{H}_n t^n$$

De plus, d'après la question **2**, la série $\sum \dfrac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ converge car $r \geq 2$. Comme elle est à termes positifs, elle converge donc aussi absolument et on peut utiliser la question précédente.

$$-\int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t}\ \mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$$

ou encore

$$\mathrm{S}_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t}\ \mathrm{d}t$$

6.b On procède à une intégration par parties. Les applications $t \mapsto (\ln t)^{r-1}$ et $t \mapsto -\frac{1}{2}(\ln(1-t))^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, de dérivées respectives $t \mapsto (r-1)\dfrac{(\ln t)^{r-2}}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$. Ainsi

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[(\ln t)^{r-1}(\ln(1-t))^2\right]_0^1 + \frac{r-1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\ \mathrm{d}t$$

Cette intégration par parties est légitime puisque, par croissances comparées,

- $(\ln t)^{r-1}(\ln(1-t))^2 \underset{t\to 0^+}{\sim} t^2(\ln t)^{r-1} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$;
- $(\ln t)^{r-1}(\ln(1-t))^2 \underset{t\to 1^-}{\sim} (t-1)^{r-1}(\ln(1-t))^2 \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 0$.

On peut alors affirmer que

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t}\ \mathrm{d}t = \frac{r-1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\ \mathrm{d}t$$

puis que

$$\mathrm{S}_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\ \mathrm{d}t$$

6.c Notamment,

$$\mathrm{S}_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln(1-t))^2}{t}\ \mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $u = 1-t$, on obtient

$$\mathrm{S}_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\ \mathrm{d}u$$

Par un développement en série entière

$$\forall u \in]0,1[,\ \frac{(\ln u)^2}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n (\ln u)^2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 |u^n (\ln u)^2|\ \mathrm{d}u = \int_0^1 u^n (\ln u)^2\ \mathrm{d}u = \mathrm{I}_{n,2} = \frac{2}{(n+1)^3}$$

et $\sum \dfrac{2}{(n+1)^3}$ converge. D'après le théorème d'intégration terme à terme :

$$\mathrm{S}_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3)$$

$\boxed{7}$ **7.a** La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$. De plus, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$ donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable en 0^+. Enfin, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

7.b On effectue le changement de variable $u = \alpha t$. Alors

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha^x}\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha^x}\Gamma(x)$$

Les deux intégrales sont de même nature, ce qui justifie a posteriori la convergence de $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$.

$\boxed{8}$ **8.a** Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. La fonction $t\mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue (par morceaux) sur $]0,1[$. De plus, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ et $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$ avec $1-x<1$ et $1-y<1$ donc $t\mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable en 0^+ et en 1^-. La fonction $t\mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est donc intégrable sur $]0,1[$, ce qui justifie l'existence de $\beta(x,y)$.

8.b Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = 1-t$.

8.c Par intégration par parties (légitime car le crochet «converge») :

$$\begin{aligned}
\beta(x+1,y) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{y}\left[t^x(1-t)^y\right]_0^1 + \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t - \frac{x}{y}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{y}\beta(x,y) - \frac{x}{y}\beta(x+1,y)
\end{aligned}$$

On en déduit bien que

$$\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$$

8.d D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}
\beta(x+1,y+1) &= \frac{x}{x+y+1}\beta(x,y+1) \\
&= \frac{x}{x+y+1}\beta(y+1,x) \\
&= \frac{x}{x+y+1}\cdot\frac{y}{y+x}\beta(y,x) \\
&= \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y)
\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ **9.a** Supposons que la relation $(\mathcal{R})$ soit vrai pour $x>1$ et $y>1$. Soient alors $x>0$ et $y>0$. Alors $x+1>1$ et $y+1>1$ donc

$$\beta(x+1,y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)}$$

En vertu des relations fonctionnelles vérifiées par les fonctions β et Γ, ceci équivaut à :

$$\frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y) = \frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}$$

et donc

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

9.b Si on pose $\varphi : u \mapsto \dfrac{u}{1+u} = 1 - \dfrac{1}{1+u}$, alors φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$ et $\varphi'(u) = \dfrac{1}{(1+u)^2}$. Par changement de variable,

$$\beta(x,y) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{y-1} \cdot \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}y$$

9.c Par positvité de l'intégrande,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^t e^{-u}u^{x+y-1}\,\mathrm{d}u \leq \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{x+y-1}\,\mathrm{d}u$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{F}_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y)$$

9.d Posons $\varphi : (a,u) \mapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{F}_{x,y}((1+u)a)$. Remarquons de $\mathrm{F}_{x,y}$ est continue (et a fortiori continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$ en tant que primitive.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $u \mapsto \varphi(a,u)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $a \mapsto \varphi(a,u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $(a,u) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$|\varphi(x,y)| \leq \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$$

  d'après la question précédente. De plus, $u \mapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le changement de variable effectué à la question **9.b**.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, G est continue (et a fortiori définie) sur $\mathbb{R}_+$.

9.e Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Par définition de $\mathrm{F}_{x,y}$ et Γ,

$$\varphi(a,u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\int_0^{(1+u)a} e^{-t}t^{x+y-1}\,\mathrm{d}t \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x+y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$$

Les hypothèses de la question précédente permettent également d'appliquer le théorème de convergence dominée. Ainsi

$$\lim_{a\to+\infty} \mathrm{G}(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)\,\mathrm{d}u = \Gamma(x,y)\beta(x,y)$$

9.f Soit $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < c \leq d$.

- D'après l'hypothèse de domination de la question précédente, pour tout $a \in [c,d]$, $u \mapsto \varphi(a,u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $a \mapsto \varphi(a,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ car $\mathrm{F}_{x,y}$ l'est en tant que primitive d'une fonction continue.
- Pour tout $a \in [c,d]$ et tout $u \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}(1+u)\mathrm{F}'_{x,y}((1+u)a) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}(1+u)e^{-(1+u)a}((1+u)a)^{x+y-1} = u^{x-1}a^{x+y-1}e^{-(1+u)a}$$

  donc pour tout $a \in [c,d]$, $u \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial a}(a,u)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $a \in [c,d]$ et tout $u \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,u)\right| \leq u^{x-1}d^{x+y-1}e^{-c}e^{-cu} = \psi(u)$$

  De plus, comme $c > 0$, $\psi(u) \underset{u\to+\infty}{=} o(1/u^2)$ par croissances comparées donc ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[c,d]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

9.g La question précédente montre également que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{G}'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} u^{x-1}a^{x+y-1}e^{-(1+u)a}\,\mathrm{d}u = a^{x+y-1}e^{-a}\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-au}\,\mathrm{d}u$$

On effectue le changement de variable $t = au$ et on obtient

$$\mathrm{G}'(a) = a^{x+y-1}e^{-a}\int_0^{+\infty} (t/a)^{x-1}e^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{a} = a^{y-1}e^{-a}\Gamma(x)$$

9.h En notant $\mathrm{H}(a) = \int_0^a t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $a \in \mathbb{R}_+$, la relation de la question précédente s'écrit en vertu du théorème fondamental de l'analyse :

$$\forall a > 0,\ \mathrm{G}'(a) = \mathrm{H}'(a)\Gamma(x)$$

Il existe donc une constante C telle que

$$\forall a > 0,\ \mathrm{G}(a) = \mathrm{H}(a)\Gamma(x) + \mathrm{C}$$

Mais les fonctions G et H sont continues en 0 donc $\mathrm{C} = \mathrm{G}(0) - \mathrm{H}(0)\Gamma(x) = 0$. Ainsi

$$\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{G}(a) = \mathrm{H}(a)\Gamma(x)$$

On vu d'une part que $\lim_{a\to+\infty} \mathrm{G}(a) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$. De plus,

$$\lim_{a\to+\infty} \mathrm{H}(a) = \int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(y)$$

Un passage à la limite donne donc

$$\Gamma(x+y)\beta(x,y) = \Gamma(y)\Gamma(x)$$

ce qui est bien la relation $\mathcal{R}$.

10 On sait que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En dérivant cette relation on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$$

En divisant par $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi(x+1) = \frac{1}{x} + \psi(x)$$

11 **11.a** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \mapsto \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car Γ l'est. La relation $\mathcal{R}$ montre alors que $\frac{\partial\beta}{\partial y}$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et que

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y) &= \Gamma(x)\frac{\Gamma'(y)\Gamma(x+y) - \Gamma(y)\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)^2}\\ &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\left(\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right)\\ &= \beta(x,y)(\psi(y) - \psi(x+y))\end{aligned}$$

11.b Soit $(y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $y_1 \leq y_2$. Pour tout $t \in]0,1[$, $1-t \in]0,1[$ de sorte que $(1-t)^{y_1-1} \geq (1-t)^{y_2-1}$ puis $t^{x-1}(1-t)^{y_1-1} \geq t^{x-1}(1-t)^{y_2-1}$. Par croissance de l'intégrale, $\beta(x,y_1)) \geq \beta(y_2)$. Ainsi $y \mapsto \beta(x,y)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

11.c La question précédente montre que $\frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y) \leq 0$ pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Comme β est strictement positive sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ (stricte positivité de l'intégrale), la question **11.a** montre que $\psi(y) \leq \psi(x+y)$ pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. La fonction ψ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

12 **12.a** Soit $n \in \mathbb{N}$. Par télescopage, avec la question **10**,

$$\psi(n+1) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{n} \psi(k+1) - \psi(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Soit $x > -1$. On a de même

$$\psi(n+x+1) - \psi(x+1) = \sum_{k=1}^{n} \psi(k+x+1) - \psi(k+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x}$$

On en déduit immédiatement la relation demandée.

12.b Comme $x > -1$, $n+x+1 \geq n$ et donc, par croissance de ψ, $\psi(n+x+1)-\psi(n) \geq 0$. Par définition de la partie entière, $x \leq \mathrm{E}(x)+1 = p$. Par croissance de ψ,

$$\psi(n+x+1)-\psi(n) = \psi(n+p+1)-\psi(n) = \sum_{k=n}^{n+p} \psi(k+1)-\psi(k) = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} = \mathrm{H}_{n+p}-\mathrm{H}_{n-1}$$

Enfin, la somme $\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k}$ comporte $p+1$ termes tous inférieurs ou égaux à $\frac{1}{n}$ donc

$$\mathrm{H}_{n+p}-\mathrm{H}_{n-1} = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} \leq \frac{p+1}{n}$$

12.c Soit $x > -1$. D'après la question **12.a**,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \psi(1+x)-\psi(1) = \psi(n+x+1)-\psi(n+1)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$$

D'après la question précédente et le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \psi(n+x+1)-\psi(n) = 0$$

On en déduit que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right) = \psi(1+x)-\psi(1)$$

$\boxed{13}$ **13.a** Posons $g_n : x \mapsto \frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}$. La série $\sum g_n$ converge simplement sur $]-1,+\infty[$ d'après la question précédente. De plus, la suite $(1/n)$ converge donc la série télescopique $\sum g_n(-1)$ converge. Ainsi $\sum g_n$ converge simplement sur $[-1,+\infty[$.

Pour tout $n \geq 2$, g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,+\infty[$. Soient $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $g_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}k!}{(n+x)^{k+1}}$ pour tout $x \in [-1,+\infty[$. Notamment, $\left\|g_n^{(k)}\right\|_{\infty,[-1,+\infty[} = \frac{1}{(n-1)^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^k}$. Comme $k+1 \geq 2$, la série $\sum g_n^{(k)}$ converge normalement et donc uniformément sur $[-1,+\infty[$.

On en déduit que $g = \sum_{n=2}^{+\infty} g_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,+\infty[$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ g^{(k)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} g_n^{(k)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}k!}{(n+x)^{k+1}} = (-1)^k k! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}}$$

Notamment,

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k k! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}} = (-1)^{k+1}k!(\zeta(k+1)-1)$$

13.b Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$. Par inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left|g(x)-\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leq \max_{[-1,1]} |g^{(n+1)}| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Mais d'après la question prédédente,

$$\forall t \in [-1,1],\ |g^{(n+1)}(t)| = (n+1)! \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{(j+x)^{n+2}} \leq (n+1)! \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{(j-1)^2} = (n+1)!\zeta(2)$$

On en déduit l'inégalité demandée.

13.c Comme $\lim_{n\to+\infty|} |x|^{n+1} = 0$ pour $x \in]-1,1[$, la question précédente montre que

$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

On sait également que $g(0) = 0$ donc, avec la question **13.a**,

$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}(\zeta(n+1)-1)x^n$$

Or la série $\sum (-1)^n x^n$ converge pour $x \in]-1,1[$, ce qui nous autorise à écrire

$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n = \frac{1}{1+x} - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n$$

Par conséquent,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) = 1 - \frac{1}{1+x} + g(x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n$$

$\boxed{14}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $y \mapsto \beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car Γ l'est également. Notamment, $\mathrm{B} :\ x \mapsto \dfrac{\partial^2\beta}{\partial y^2}(x,1)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a établi à la question **11.a** que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y) = \beta(x,y)(\psi(y) - \psi(x+y))$$

L'application ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc dériver par rapport à y la relation précédente :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)(\psi(y) - \psi(x+y)) + \beta(x,y)(\psi'(y) - \psi'(x+y))$$

puis en évaluant en $y = 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{B}(x) = \frac{\partial\beta}{\partial y}(x,1)(\psi(1) - \psi(x+1)) + \beta(x,1)(\psi'(1) - \psi'(1+x))$$

Mais toujours d'après la question **11.a**

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\partial\beta}{\partial y}(x,1) = \beta(x,1)(\psi(1) - \psi(1+x))$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{B}(x) = \beta(x,1)(\psi(1) - \psi(x+1))^2 + \beta(x,1)(\psi'(1) - \psi'(1+x))$$

Enfin

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \beta(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{B}(x) = \frac{1}{x}(\psi(1) - \psi(x+1))^2 + \frac{1}{x}(\psi'(1) - \psi'(1+x))$$

Comme Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ψ l'est également de même que B.

$\boxed{15}$ **15.a** Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\varphi(y,t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$.

- Pour tout $t \in]0,1[$, $y \mapsto \varphi(y,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \varphi(y,t)$, $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t) = \ln(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(y,t) = \ln(1-t)^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ sont continues par morceaux sur $]0,1[$.
- On a déjà vu que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \varphi(y,t)$ était intégrable sur $]0,1[$. De plus, pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -t^x$ donc $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t)$ est intégrable en 0^+ (elle y est prolongeable par continuité). De plus, en se donnant $z \in]0,y[$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t) \underset{t\to 1^-}{=} o\left(\dfrac{1}{(1-t)^{1-z}}\right)$ par croissances comparées. On en déduit que $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t)$ est intégrable en 1^-. Finalement, $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t)$ est intégrable sur $]0,1[$.

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in]0,1[$ et tout $y \in [a,+\infty[$,

$$\left|\ln(1-t)^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\right| \leq |\ln(1-t)|^2 t^{x-1}(1-t)^{a-1} = \xi(t)$$

A nouveau, ξ est intégrable sur $]0,1[$ car $\xi(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x+1}$ et $\xi(t) \underset{t\to 1^-}{=} o\left(\frac{1}{(1-t)^{1-z}}\right)$ où $0 < z < a$.

On en déduit que $y \mapsto \beta(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (ce que l'on savait déjà) mais surtout que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\ \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(y,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(1-t)^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

Notamment, en évaluant en $y=1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{B}(x) = \int_0^1 \ln(1-t)^2 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

15.b En employant à nouveau le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, on montrerait que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{B}^{(p)}(x) = \int_0^1 \ln(1-t)^2 \ln(t)^p t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

15.c Soit un entier $r \geq 2$. On va appliquer le théorème de convergence dominée.

- Pour tout $t \in]0,1[$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1-t)^2\ln(t)^{r-2}t^{x-1} = \frac{\ln(1-t)^2\ln(t)^{r-2}}{t}$.
- Pour tout $t \in]0,1[$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\ln(1-t)^2\ln(t)^{r-2}t^{x-1}\right| \leq \frac{\ln(1-t)^2|\ln(t)|^{r-2}}{t} = \xi(t)$$

De plus, $\xi(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t|\ln(t)|^{r-2}$ donc $\xi(t) \underset{t\to 0^+}{=} o(1/t^{1/2})$ par croissances comparées et ξ est intégrable en 0^+. De plus, $\xi(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \ln(1-t)^2(1-t)^{r-2}$ donc $\xi(t) \underset{t\to 1^-}{=} o(1/(1-t)^{1/2})$ par croissances comparées et ξ est intégrable en 1^-. Finalement, ξ est intégrable sur $]0,1[$.

D'après le théorème de convergence dominée et la question précédente,

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{B}^{(r-2)}(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)^2\ln(t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t$$

On conclut avec la question **6.b**.

15.d Notamment, $\mathrm{S}_2 = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{B}(x)$. D'après la question **14**n pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{B}(x) = (\psi(1+x)-\psi(1))\frac{\psi(1+x)-\psi(1)}{x} - \frac{\psi'(1+x)-\psi'(1)}{x}$$

On sait que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\lim_{x\to 0^+}\psi(1+x)-\psi(1) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\psi(1+x)-\psi(1)}{x} = \psi'(1) \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\psi'(1+x)-\psi'(1)}{x} = \psi''(1)$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{B}(x) = -\psi''(1)$. Le développement en série entière obtenu à la question **13.c** nous informe de plus que $\frac{\psi''(1)}{2} = (-1)^{2+1}\zeta(2+1) = -\zeta(3)$. On retrouve alors $\mathrm{S}_2 = \zeta(3)$.

16 **16.a** On a déjà vu que ψ était de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que φ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.
Soit un entier $n \geq 2$. Posons $\xi(x) = \psi(1+x)-\psi(1)$. D'après la formule de Leibniz,

$$\varphi^{(n)}(0) = -\psi^{(n+1)}(1) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\xi^{(k)}(0)\xi^{(n-k)}(0) = -\psi^{(n+1)}(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\psi^{(k)}(1)\psi^{(n-k)}(1)$$

16.b Soit un entier $r \geq 3$. Comme $\varphi(x) = x\mathrm{B}(x)$ pour tout $x > 0$, on a à nouveau d'après la formule de Leibniz :

$$\forall x > 0,\ \varphi^{(r-1)}(x) = x\mathrm{B}^{(r-1)}(x) + (r-1)\mathrm{B}^{(r-2)}(x)$$

On montre comme à la question **15.c** que $\mathrm{B}^{(r-1)}$ admet une limite finie en 0^+, ce qui permet alors d'affirmer que

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{B}^{(r-2)}(x) = \frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{r-1}$$

D'après la question **15.c** et la question précédente,

$$2\mathrm{S}_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\varphi^{(r-1)}(0) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\left(-\psi^{(r)}(1) + \sum_{k=1}^{r-2}\binom{r-1}{k}\psi^{(k)}(1)\psi^{(r-1-k)}(1)\right)$$

Or la question **13.c** montre que $\dfrac{\psi^{(k)}(1)}{k!} = (-1)^{k+1}\zeta(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\begin{aligned}2\mathrm{S}_r &= \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\left(-(-1)^{r+1}r!\zeta(r+1) + \sum_{k=1}^{r-2}\binom{r-1}{k}(-1)^{k+1}k!\zeta(k+1)(-1)^{r-k}(r-1-k)!\zeta(r-k)\right)\\ &= r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2}\zeta(k+1)\zeta(r-k)\end{aligned}$$