Devoir à la maison n°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Mines-Ponts 2022 MP I

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie II. Dans la partie I, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie II, on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$. L'étude de P au voisinage de 1 permet alors, dans les parties suivantes, de progresser vers l'obtention d'un équivalent simple de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (formule asymptotique de Hardy et Ramanujan).

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ sera noté

$$\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Dans tout l'énoncé, on utilisera la dénomination «variable aléatoire réelle» pour signifier «variable aléatoire discrète réelle».

On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$$

I Fonctions L et P

1 Soit $z \in \mathrm{D}$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1,1[$.

On notera

$$\mathrm{L}(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$$

2 Soit $z \in \mathrm{D}$. Montrer que la fonction $t \in [0,1] \mapsto \mathrm{L}(tz)$ est dérivable et donner une expression simple de sa dérivée.

En déduire que $t \mapsto (1-tz)e^{\mathrm{L}(tz)}$ est constante sur $[0,1]$ et conclure que

$$\exp(\mathrm{L}(z)) = \frac{1}{1-z}$$

3 Montrer que $|\mathrm{L}(z)| \leq -\ln(1-|z|)$ pour tout z dans D. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \mathrm{L}(z^n)$ pour tout z dans D. Dans la suite, on notera, pour z dans D,

$$\mathrm{P}(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{L}(z^n)\right]$$

On remarque, en vertu de la question précédente et des propriétés de l'exponentielle, que

$$\forall z \in \mathrm{D},\ \mathrm{P}(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(z) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1-z^n}$$

II Développement de P en série entière

Pour $(n, \mathrm{N}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}}$ l'ensemble des listes $(a_1, \dots, a_\mathrm{N}) \in \mathbb{N}^\mathrm{N}$ telles que $\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} ka_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,\mathrm{N}}$ son cardinal.

4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}}$ est fini pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, que la suite $\left(p_{n,\mathrm{N}}\right)_{\mathrm{N}\geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $\left(p_{n,\mathrm{N}}\right)_{\mathrm{N}\geq 1}$.

5 Montrer par récurrence que

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathrm{D},\ \prod_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1 - z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,\mathrm{N}} z^n$$

6 Soit $z \in \mathrm{D}$. On convient que $p_{n,0} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En examinant la sommabilité de la famille $\left(\left(p_{n,\mathrm{N}+1} - p_{n,\mathrm{N}}\right) z^n\right)_{(n,\mathrm{N})\in\mathbb{N}^2}$, démontrer que

$$\mathrm{P}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_n p_n x^n$.

7 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \mathrm{P}\left(e^{-t+i\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

si bien que

$$p_n = \frac{e^{nt}\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{\mathrm{P}\left(e^{-t+i\theta}\right)}{\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta \tag{1}$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'obtenir un équivalent du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Cet équivalent sera obtenu via un choix approprié de t en fonction de n dans la formule (1).

III Contrôle de P

8 Soit $x \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left|\frac{1 - x}{1 - xe^{i\theta}}\right| \leq \exp(-(1 - \cos\theta)x)$$

En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$ et tout réel θ,

$$\left|\frac{\mathrm{P}\left(xe^{i\theta}\right)}{\mathrm{P}(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1 - x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - xe^{i\theta}}\right)\right)$$

9 Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{1 - x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - xe^{i\theta}}\right) \geq \frac{x(1 - \cos\theta)}{(1 - x)\left((1 - x)^2 + 2x(1 - \cos\theta)\right)}$$

En déduire que

$$\left|\frac{\mathrm{P}\left(xe^{i\theta}\right)}{\mathrm{P}(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1 - \cos\theta}{6(1 - x)^3}\right) \text{ ou que } \left|\frac{\mathrm{P}\left(xe^{i\theta}\right)}{\mathrm{P}(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1 - x)}\right)$$

IV Intermède : quelques estimations de sommes

On fixe dans cette partie un réel $\alpha > 0$ et un entier $n \geq 1$. Sous réserve d'existence, on pose

$$S_{n,\alpha}(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}$$

On introduit aussi la fonction

$$\varphi_{n,a} : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}$$

qui est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10 Montrer que $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

11 Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'existence de $S_{n,a}(t)$, sa positivité stricte, et l'identité

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que

$$S_{n,\alpha}(t) \underset{t\to 0^+}{=} \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\,\mathrm{d}x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

12 Démontrer, sans utiliser ce qui précède, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$$

Dans le reste du problème, nous admettrons le résultat suivant (il peut être démontré par une méthode similaire) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}$$

V Contrôle des fonctions caractéristiques

Etant donné une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ainsi qu'un réel θ, les variables aléatoires réelles $\cos(\theta X)$ et $\sin(\theta X)$ sont d'espérance finie puisque bornées : on introduit alors le nombre complexe

$$\Phi_X(\theta) := \mathbb{E}(\cos(\theta X)) + i\mathbb{E}(\sin(\theta X)).$$

13 Soit X une variable aléatoire réelle, Montrer que $|\Phi_X(\theta)| \leq 1$ pour tout réel θ.

Dans les questions **14** à **18**, on se donne une variable aléatoire réelle X suivant une loi géométrique, de paramètre $p \in]0,1[$ arbitraire. On pose $q = 1 - p$.

14 Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout réel θ,

$$\Phi_{aX+b}(\theta) = \frac{pe^{i(a+b)\theta}}{1-qe^{ia\theta}}.$$

15 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X^k est d'espérance finie. Montrer que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left(X^k\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

16 Montrer qu'il existe une suite $(\mathrm{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$, indépendante de p, telle que

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{N},\ \Phi_{\mathrm{X}}^{(k)}(\theta)=pi^k e^{i\theta}\frac{\mathrm{P}_k\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+1}}\text{ et }\mathrm{P}_k(0)=1.$$

17 En déduire qu'il existe une suite $(\mathrm{C}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, indépendante de p, telle que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \left|\mathbb{E}\left(\mathrm{X}^k\right)-\frac{1}{p^k}\right|\leq\frac{\mathrm{C}_k q}{p^k}$$

18 En déduire qu'il existe un réel $\mathrm{K}>0$ indépendant de p tel que

$$\mathbb{E}\left((\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X}))^4\right)\leq\frac{\mathrm{K}q}{p^4}.$$

Dans les questions **19** à **21**, on se donne une variable aléatoire réelle centrée Y telle que Y^4 soit d'espérance finie.

19 Montrer successivement que Y^2 et $|\mathrm{Y}|^3$ sont d'espérance finie, et que

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^2\right)\leq\left(\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^4\right)\right)^{1/2}\text{ puis }\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^3\right)\leq\left(\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^4\right)\right)^{3/4}$$

20 Montrer, pour tout réel u, l'inégalité

$$\left|e^{iu}-1-iu+\frac{u^2}{2}\right|\leq\frac{|u|^3}{6}$$

En déduire que pour tout réel θ,

$$\left|\Phi_{\mathrm{Y}}(\theta)-1+\frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^2\right)\theta^2}{2}\right|\leq\frac{|\theta|^3}{3}\left(\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^4\right)\right)^{3/4}.$$

21 Conclure que pour tout réel θ,

$$\left|\Phi_{\mathrm{Y}}(\theta)-\exp\left(-\frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^2\right)\theta^2}{2}\right)\right|\leq\frac{|\theta|^3}{3}\left(\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^4\right)\right)^{3/4}+\frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^4\right)$$

VI Convergence vers une gaussienne

Etant donné un réel $t>0$, on pose, suivant les notations de la partie IV,

$$m_t:=\mathrm{S}_{1,1}(t)\text{ et }\quad\sigma_t:=\sqrt{\mathrm{S}_{2,1}(t)}.$$

Etant donné des réels $t>0$ et θ, on pose

$$h(t,\theta)=e^{-im_t\theta}\frac{\mathrm{P}\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)}$$

Etant donné des réels $t>0$ et u, on pose

$$\zeta(t,u)=\exp\left(i\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t-\frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right)\quad\text{ et }\quad j(t,u)=\zeta(t,u)h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)$$

22 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ ainsi que des complexes $z_1,\dots,z_n,u_1,\dots,u_n$ tous de module inférieur ou égal à 1. Montrer que

$$\left|\prod_{k=1}^n z_k-\prod_{k=1}^n u_k\right|\leq\sum_{k=1}^n|z_k-u_k|$$

23 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire Z_k suivant la loi $\mathcal{G}\left(1 - e^{-kt}\right)$, et on pose $Y_k = k\,(Z_k - \mathbb{E}(Z_k))$. Démontrer que

$$h(t, \theta) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta)$$

En déduire, à l'aide en particulier de la question **21** l'inégalité

$$\left| h(t, \theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2 \theta^2}{2}} \right| \leq K^{3/4} |\theta|^3 S_{3,3/4}(t) + K\theta^4 S_{4,1}(t)$$

On rappelle que la constante K a été introduite à la question **18**, les quantités $S_{n,\alpha}(t)$ dans la partie IV.

24 Montrer que $\sigma_t \underset{t \to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{3} t^{3/2}}$. En déduire, pour tout réel u, que

$$j(t, u) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} e^{-u^2/2}$$

25 Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi],\ 1 - \cos\theta \geq \alpha\theta^2.$$

A l'aide de la question **9**, en déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in]0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$|h(t, \theta)| \leq e^{-\beta(\sigma_t \theta)^2} \quad \text{ou} \quad |h(t, \theta)| \leq e^{-\gamma(\sigma_t |\theta|)^{2/3}}$$

26 Conclure que

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t, u)\, \mathrm{d}u \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$$

VII La conclusion

Dans cette dernière partie, on admet que $P\left(e^{-t}\right) \underset{t \to 0^+}{\sim} \sqrt{\dfrac{t}{2\pi}} \exp\left(\dfrac{\pi^2}{6t}\right)$.

27 En appliquant la formule (1) à $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{6n}}$, démontrer que

$$p_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n}$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.