

## Polynômes annulateurs

### Exercice 1 ★★

CCP PSI 2015

L'endomorphisme

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \end{cases}$$

est-il diagonalisable ?

### Exercice 2 ★★

CCP MP 2018

Soient  $x$  un nombre réel et  $E_x$  l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $M^2 + M + xI_n = 0$ .

1. Si  $x \neq 0$ , montrer qu'une matrice  $M \in E_x$  est inversible et exprimer son inverse. Quelles sont les matrices inversibles appartenant à  $E_0$  ?
2. Pour quelles valeurs de  $x$  tous les éléments de  $E_x$  sont-ils diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?
3. Déterminer l'ensemble  $T$  des traces des éléments de  $E_{-2}$ . Quel est son cardinal ?

### Exercice 3 ★★★

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes diagonalisables d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$  tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Montrer que  $u$  et  $v$  diagonalisent dans une base commune.

### Exercice 4 ★

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que si  $A$  est diagonalisable, alors  $A^T$  l'est aussi.

### Exercice 5 ★★★

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes trigonalisables d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Montrer que  $u$  et  $v$  trigonalisent dans une base commune.

### Exercice 6 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2019

Soit  $n \geq 2$  entier. On considère  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = I_n$  et  $A \neq \pm I_n$ .

1. Montrer que  $\text{tr}(A) \equiv n[2]$ .
2. Montrer que  $|\text{tr}(A)| \leq n - 2$ .

### Exercice 7 ★★

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021

Soit l'endomorphisme

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto M + \text{tr}(M)I_n \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres de  $u$ , ainsi que les espaces propres associés.

### Exercice 8

X MP 2010

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $A\bar{A} = I_n$  si et seulement si il existe  $S \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que  $A = S\bar{S}^{-1}$ .

### Exercice 9

1. Déterminer toutes les matrices  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que

$$A^2 - 3A + 2I_2 = 0$$

2. Déterminer toutes les matrices  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que

$$A^3 - 8A^2 + 21A - 18I_2 = 0$$

### Exercice 10 ★

TPE MP 2010

Déterminer les  $n \in \mathbb{N}^*$  pour lesquels il existe  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $M^3 - M^2 - M - 2I_n = 0$  et  $\text{tr}(M) = 0$ .

### Exercice 11 ★★

Déterminer les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $M^5 = M^2$  et  $\text{tr}(M) = n$ .

### Exercice 12

Soient  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme unitaire annulateur de  $u$ . La décomposition de  $P$  en facteurs irréductibles unitaires s'écrit  $P = \prod_{i=1}^r P_i$ . Pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on pose  $N_i = \text{Ker } P_i(u)$ .

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Montrer que  $F = \bigoplus_{i=1}^r F \cap N_i$ .

### Exercice 13

TPE-EIVP PSI 2017

Soient  $A, B, C$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $C = A + B$ ,  $C^2 = 2A + 3B$ ,  $C^3 = 5A + 6B$ .  $A$  et  $B$  sont-elles diagonalisables ?

### Exercice 14 ★★★

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P(f) = 0$ ,  $P(0) = 0$  et  $P'(0) \neq 0$ . Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

### Exercice 15 ★★

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 + A^2 + A = 0$ . Montrer que  $\text{rg}(A)$  est pair.

### Exercice 16 ★★★

Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ ,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k) = 0$$

### Exercice 17 ★★

E3A MP 2019

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et  $E_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La matrice identité de  $E_n$  sera notée  $I_n$ .

Pour  $A \in E_n$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A_j$  la  $j$ -ème colonne de la matrice  $A$ .

Soit  $u$  l'application qui à toute matrice  $A$  de  $E_n$  associe la matrice  $B$  dont les colonnes  $B_j$  sont

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, B_j = S - A_j = \sum_{k=1, k \neq j}^n A_k \text{ où } S = \sum_{k=1}^n A_k$$

1. Dans cette question,  $n = 2$  et  $E_2$  est muni de la base  $\mathcal{B} = (K_1, K_2, K_3, K_4)$  où

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a. Vérifier que  $u$  est un endomorphisme de  $E_2$ .
- b. Déterminer la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Démontrer que  $u$  est un automorphisme de  $E_2$ .
- c. Reconnaître la nature géométrique de l'automorphisme  $u$  en précisant ses éléments caractéristiques.

2. Exprimer  $\det(u(A))$  en fonction de  $\det(A)$  dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ .

On revient au cas général et on admettra que  $u$  est un endomorphisme de  $E_n$ .

3. Montrer à l'aide d'opérations sur les colonnes et en utilisant  $S$  que l'on a

$$\det(u(A)) = (-1)^{n-1} (n-1) \det(A)$$

4.
  - a. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de l'endomorphisme  $u$ .
  - b. En déduire les éléments propres de l'endomorphisme  $u$ . Est-il diagonalisable ?
5. Soient  $J_n$  la matrice de  $E_n$  dont tous les coefficients sont égaux à 1 et  $U_n = J_n - I_n$ .
  - a. Déterminer les colonnes du produit matriciel  $AU_n$  à l'aide de celles de  $A$ .
  - b. Retrouver alors le résultat de la question 4.a.

**Exercice 18**

Mines Télécom MP 2022

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. A est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres complexes et déterminer une matrice D diagonalisable semblable à A.
2. Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  non nulle telle que  $M^3 + M = 0$ . Montrer que M est semblable à D.
3. A et M sont-elles semblables dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  ?  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?

**Polynôme minimal**

**Exercice 19 ★★**

CCINP (ou CCP) PSI 2021

On définit :  $\forall m \in \mathbb{R}, A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$ . Déterminer le polynôme minimal de  $A_m$ .

**Exercice 20 ★★★**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que A admet le même polynôme minimal considérée comme une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et comme une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Exercice 21 ★★**

CCINP (ou CCP) MP 2021

On considère un entier  $n \geq 2$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A^n = I_n$  et telle que la famille  $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$  soit libre. Montrer que  $\text{tr}(A) = 0$ .

**Exercice 22**

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soient E un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Énoncer le lemme de décomposition des noyaux appliqué à f dans le cas de deux polynômes premiers entre eux.
2. On suppose que le polynôme minimal de f est donné par  $\mu_f = (X^2 + 1)(X^2 + 4)$ . A l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls de E, x et y, tels que :  $f^2(x) = -x$  et  $f^2(y) = -4y$ .
3. On suppose que E est de dimension 4. Montrer que  $(x, f(x), y, f(y))$  est une base de E. Donner alors la matrice de f dans cette base.

**Exercice 23**

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A^n = I_n$  et telle que la famille  $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$  soit libre. Montrer que  $\text{tr}(A) = 0$ .

**Exercice 24**

ENS MP 2011

1. Soit A une matrice inversible réelle. Exprimer le polynôme minimal de  $A^{-1}$  en fonction de celui de A.
2. Soit A une matrice orthogonale réelle telle que 1 et -1 ne soient pas racines de son polynôme minimal. Montrer que A et  $A^{-1}$  ont même polynôme minimal. Montrer que le degré de ce polynôme minimal est pair.

**Exercice 25**

Soient E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $f \circ g - g \circ f = f$ .

1. Montrer que  $f^n \circ g - g \circ f^n = n f^{n-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. En déduire que  $P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P'(f)$  pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ .
3. Montrer que f est nilpotent.

**Exercice 26 ★★****CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ n & & & \end{pmatrix}$  où  $n \geq 3$ .

1. Quel est le rang de  $A$  ? la dimension du noyau de  $A$  ?
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
3. Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?
4. Montrer qu'il existe  $\lambda \in ]1, +\infty[$  tel que  $\text{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$ .
5. Déterminer un polynôme annulateur de  $A$  de degré 3.

**Exercice 27 ★★**

On considère un entier  $n \geq 2$ . Soit l'endomorphisme

$$u: \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto M + \text{tr}(M)I_n \end{cases}$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de  $u$  de degré 2.
2.  $u$  est-il diagonalisable ?
3. Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de  $u$ .

**Exercice 28 ★★****CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ .

1. Donner le rang de  $B$  en fonction du rang de  $A$ .
2. Montrer que, pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

3. On suppose que  $A$  est diagonalisable. Montrer que  $B$  l'est aussi, et donner ses valeurs propres.

**Exercice 29 ★★****Matrice compagnon**

Soient  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .
2. Montrer que  $\pi_A = \chi_A$ .
3. Déterminer les sous-espaces propres de  $A^T$ .

**Exercice 30****Endomorphismes cycliques**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1.
  - a. Pour  $x \in E$ , on note  $I_{u,x} = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0_E\}$ . Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $I_{u,x}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ . On note  $\pi_{u,x}$  son unique générateur unitaire. Justifier que  $\pi_{u,x}$  divise  $\pi_u$ .
  - b. Pour  $x \in E$ , on note  $E_{u,x} = \{P(u)(x), P \in \mathbb{K}[X]\}$ . Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $E_{u,x}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et que  $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$  est une base. En déduire la dimension de  $E_{u,x}$ .
  - c. Montrer que  $E_{u,x}$  est stable par  $u$  et que  $\pi_{u|_{E_{u,x}}} = \pi_{u,x}$ .
2. Soient  $x_1, \dots, x_p$  tels que les polynômes  $\pi_{u,x_1}, \dots, \pi_{u,x_p}$  soient deux à deux premiers entre eux. On pose  $x = \sum_{i=1}^p x_i$  et  $P = \prod_{i=1}^p \pi_{u,x_i}$ .
  - a. Montrer que  $\pi_{u,x}$  divise  $P$ .
  - b. Montrer que les sous-espaces vectoriels  $E_{x_1}, \dots, E_{x_p}$  sont en somme directe.
  - c. En déduire que  $\pi_{u,x} = P$  et  $E_{u,x} = \bigoplus_{i=1}^p E_{u,x_i}$ .
3. En considérant la décomposition en facteurs irréductibles de  $\pi_u$ , montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe  $x \in E$  tel que  $\pi_{u,x} = \pi_u$ .
4. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
  - (i)  $\pi_u = \chi_u$ .
  - (ii) Il existe  $x \in E$  tel que  $E_{u,x} = E$ .
  - (iii) Il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On dit dans ce cas que  $u$  est un endomorphisme *cyclique*.

**Exercice 31 ★**

Soient un entier  $n \geq 2$  et  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer le polynôme minimal de  $U$ .
2. Réduire  $U$ .

**Exponentielles****Exercice 32**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\exp(A)^T = \exp(A^T)$ .
2. On suppose  $A$  symétrique dans cette question. Montrer que  $\exp(A)$  est également symétrique.
3. Montrer que  $\det(\exp(A)) > 0$ .
4. On suppose  $A$  antisymétrique dans cette question. Montrer que  $\exp(A) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 33 ★**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\exp(A)$  de deux manières.

**Exercice 34 ★**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\exp(A)$  de deux manières.

**Exercice 35 ★★**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que  $\text{Ker}(\exp(u) - \text{Id}_E) = \text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(\exp(u) - \text{Id}_E) = \text{Im}(u)$ .