Convergence dominée

Exercice 1

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 ★★

On pose

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t\ln t\,\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer $f(2)$.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x\in[0,\sqrt{n}]$,

$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\leq e^{-x^2}$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4

Soit $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nf(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 5 ★★ CCP MP

On pose $f_n\colon x\mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[a,\frac{\pi}{2}\right]$ où $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$?
3. Soit g continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t=g(0)$$

Exercice 6 Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

1. Pour quelles valeurs de n l'intégrale est-elle définie ?
2. Calculer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
4. Montrer que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge et calculer sa somme S sous la forme d'une intégrale.
5. Calculer S.

Exercice 7 Mines-Télécom MP 2018

Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$, où $u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$. On pourra travailler sur les sommes partielles de la série.

Exercice 8 ★★

Soit f une application continue sur $[0,1]$. On pose $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n$.

Exercice 9 ★★

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^n}\, dt$.

Exercice 10 **Mines Télécom MP 2022**

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}\, dx$.

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du$.

Exercice 11

Soit f une application continue sur $[0,1]$. Montrer que

$$\lim_{y\to+\infty} y\int_0^1 x^y f(x)\, dx = f(1)$$

Intégration terme à terme

Exercice 12 **Mines-Ponts MP**

On définit une fonction f par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{sh}(x\sqrt{t})\, dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer ce développement en série entière.
3. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 13 ★ **ENSEA/ENSIIE MP 2015**

1. Montrer que

$$\forall x \in [-1,1],\ \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$

Exercice 14 ★ **CCINP (ou CCP) PSI 2019**

Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente.

1. Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$.
3. Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 15 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Montrer que $I = \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\, dx$ est bien définie.
2. Donner la décomposition en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ et préciser son rayon de convergence.
3. Écrire I comme somme d'une série.
4. Donner la valeur exacte de I sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 16 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I converge.

2. Montrer que $\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 17 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

2. Rappeler le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un segment.

3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $|x| < \mathrm{R}$.

Exercice 18 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2019**

1. Montrer l'intégrabilité de $f : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}$ sur $]0,1]$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \in]0,1] \mapsto x^{2n}(\ln x)^2$. Montrer l'intégrabilité de u_n sur $]0,1]$ et calculer $\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer une expression de $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ sous forme de somme.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une méthode de calcul de I à ε près.

Exercice 19 **Mines Télécom MP 2022**

Etablir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 20 **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2022**

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Continuité

Exercice 21 ★★★

On pose

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Montrer que g est continue sur $]-\infty, 1[$.

3. Montrer que

$$f(x) \underset{x\to0^+}{=} \frac{1}{x} + o(1) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to1^-}{=} \frac{1}{1-x} + o(1)$$

Exercice 22 ★ **Transformée de Fourier**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Justifier que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivation

Exercice 23 **Mines-Ponts MP 2018**

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^x \frac{\ln(t)\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

Exercice 24 **Mines-Ponts MP 2017**

A toute fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on associe la fonction $\mathrm{R}(h)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{R}(h)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

A toute fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on associe fonction $\mathrm{S}(g)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{S}(g)(x) = g(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que R et S sont des applications linéaires à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

2. On pose $\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation entre W_n et W_{n+2}.

3. Soit P un polynôme. Montrer que $\mathrm{S} \circ \mathrm{R}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$.

4. Montrer que pour $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\mathrm{S} \circ \mathrm{R}(g) = g$.

Exercice 25 ★★

On pose

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 t + x^2\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et en déduire $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 26 **CCP MP**

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Donner une équation différentielle vérifiée par g sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Donner un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 27 ★★ **Mines Télécom MP 2016**

Soit $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.

2. Montrer que $|\sin u| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer F''.

4. Déterminer la fonction F.

Exercice 28 ★★ **Centrale MP 2011**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

1. Montrer que $f^2 + g$ est constante. Quelle est sa valeur ?

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 29 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt$.

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. **a.** Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
   b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. **a.** Montrer que f est solution de (E) : $y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.
   b. Déterminer la fonction f.

Exercice 30 **Mines-Ponts MP**

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{tx}}{t} e^{-t}\, dt$. Déterminer le domaine de définition de F et expliciter $F(x)$.

Exercice 31 ★★★ **Intégrale de Poisson**

On pose pour $f(x) = \int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\, d\theta$.

1. Justifier que f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
2. Montrer que pour tout $x \in D \setminus \{0\}$, $f(x) = f(1/x) + 2\pi \ln|x|$.
3. Justifier que f est dérivable sur $]-1,1[$.
4. Montrer que f' est nulle sur $]-1,1[$.
5. En déduire la valeur de $f(x)$ pour $x \in D$.

Exercice 32 **CCINP (ou CCP) MP 2022**

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\arctan(u)| \leq |u|$.
2. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\, dt$.
   a. Domaine de définition de F ?
   b. Domaine de continuité de F ?
   c. Domaine de dérivabilité de F ?
   d. Déterminer F′.
   e. En déduire F.

Divers

Exercice 33 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2014**

On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer des équivalents simples de f aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 34 ★★

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0^+.

Exercice 35 ★★★★ **Transformée de Laplace**

Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que $t \mapsto f(t)e^{-pt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on pose

$$\alpha = \inf\left\{p \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)e^{-pt} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+\right\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Pour $p \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{F}(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ lorsque cela est possible.

1. Justifier que F est définie sur $]\alpha, +\infty[$.
2. *Théorème de la valeur initiale*. On suppose que $\lim\limits_{0^+} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} p\mathrm{F}(p) = \ell$.
3. *Théorème de la valeur finale*. On suppose $\lim\limits_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\alpha \leq 0$ et $\lim\limits_{p\to0^+} p\mathrm{F}(p) = \ell$.