Interrogation écrite n°11

NOM : Prénom : Note :

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer sa fonction génératrice et en déduire son espérance.

$$\forall t \in [-1,1],\ \mathrm{G_X}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda(t-1)}$$

Comme $\mathrm{G_X}$ *est dérivable en* 1*,* X *est d'espérance finie et* $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}'_{\mathrm{X}}(1) = \lambda$*.* ∎

2. Calculer $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-nt}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$*. Par intégration par parties,*

$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{n}\left[te^{-nt}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Par croissance comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-nt} = 0$ *donc*

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n^2}\left[e^{-nt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$$

Posons $f : t \in d\mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{t}{e^t-1}$*. Pour tout* $t>0$*,* $0 < e^{-t} < 1$ *donc*

$$f(t) = te^{-t}\cdot\frac{1}{1-e^{-t}} = te^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$$

où $f_n : t \mapsto te^{-nt}$*.*

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,* f_n *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*
- *Ce qui précède montre que* f_n *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*
- $\sum f_n$ *converge simplement vers* f*.*
- $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \sum \frac{1}{n^2}$ *converge.*

D'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

∎

3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t$.

On pose $f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t^n}$ *et* $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+$.
- *La suite de fonctions* (f_n) *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$ *vers la fonction*

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ e^{-1} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

- f *est bien continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+$.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(t)| \le \varphi(t)$ *où* $\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

■

4. Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- *Pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x,t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $0 < a \le b$. *Pour tout* $x \in [a,b]$, *pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|\varphi(x,t)| \le \varphi(t)$ *avec*

$$\varphi : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \le 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

  - φ *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+^*$.
  - $\varphi(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-a}}$ *avec* $1-a<1$ *donc* φ *est intégrable en* 0^+.
  - $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ *donc* φ *est intégrable en* $+\infty$.

  Ainsi $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, φ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$. ■