Devoir à la maison n°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Centrale PSI Maths 1 2012

- Dans le problème, λ désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante et non majorée.
- Dans le problème, f désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
- On note E l'ensemble des réels x pour lesquels l'application $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- On note E′ l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}\,\mathrm{d}t$ converge.

On se propose ci-après d'étudier la transformation $f \mapsto \mathrm{L}f$ défini en **1**, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser la transformation L pour l'étude d'un opérateur.

I Préliminaires, définition de la transformation L

1 Quelle inclusion existe-t-il entre les ensembles E et E′ ?

Désormais, pour $x \in \mathrm{E}'$, on notera

$$\mathrm{L}f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}\,\mathrm{d}t$$

2 Montrer que si E n'est pas vide, alors E est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

3 Montrer que si E n'est pas vide, alors $\mathrm{L}f$ est continue sur E.

II Exemples dans le cas de f positive

4 Comparer E et E′ dans le cas où f est positive.

5 Dans les trois cas suivants, déterminer E.

5.a $f(t) = \lambda'(t)$ avec λ supposée de classe C^1.

5.b $f(t) = e^{t\lambda(t)}$.

5.c $f(t) = \dfrac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}$.

6 Dans cette question, on étudie le cas $\lambda(t) = t^2$ et $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

6.a Déterminer E. Que vaut $\mathrm{L}f(0)$?

6.b Prouver que $\mathrm{L}f$ est dérivable.

6.c Montrer l'existence d'une constante $\mathrm{A} > 0$ telle que pour tout $x > 0$, on ait

$$\mathrm{L}f(x) - (\mathrm{L}f)'(x) = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{x}}$$

6.d On note $g(x) = e^{-x}\mathrm{L}f(x)$ pour $x \geq 0$. Montrer que

$$\forall x \geq 0,\ g(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{A}\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

6.e En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

III Etude d'un premier exemple

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} - 1 + \dfrac{t}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

7 Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On note encore f le prolongement obtenu.

8 Déterminer E.

9 A l'aide d'un développement en série, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\mathrm{L}f(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

10 Est-ce que $\mathrm{L}f(x) - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x}$ admet une limite finie en 0^+ ?

IV Généralités dans le cas typique

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

11 Montrer que si E n'est pas vide et si α est sa borne inférieure (on convient que $\alpha = -\infty$ si $\mathrm{E} = \mathbb{R}$) alors $\mathrm{L}f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\alpha, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.

12 Dans le cas particulier où $f(t) = e^{-at}t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, expliciter E, E′ et calculer $\mathrm{L}f(x)$ pour $x \in \mathrm{E}'$.

13 **Comportement en l'infini.**
On suppose ici que E n'est pas vide et que f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ suivant :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k + \mathrm{O}(t^{n+1})$$

13.a Montrer que pour tout $\beta > 0$, on a, lorsque x tend vers $+\infty$, le développement asymptotique suivant :

$$\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k\right) e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}(x^{-n-2})$$

13.b En déduire que lorsque x tend vers $+\infty$, on a le développement asymptotique :

$$\mathrm{L}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} + \mathrm{O}(x^{-n-2})$$

14 **Comportement en 0.**
On suppose ici que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

14.a Montrer que E contient $\mathbb{R}_+^*$.

14.b Montrer que $x\mathrm{L}f(x)$ tend vers ℓ en 0^+.

V Etude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ pour tout $t > 0$, f étant prolongée par continuité en 0.

15 Montrer que E ne contient pas 0.

16 Montrer que $\mathrm{E} =]0, +\infty[$.

17 Montrer que E′ contient 0.

18 Calculer $(\mathrm{L}f)'(x)$ pour $x \in \mathrm{E}$.

19 En déduire $(\mathrm{L}f)(x)$ pour $x \in \mathrm{E}$.

20 On note pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $f_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\sum (f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

21 Que vaut $\mathrm{L}f(0)$?

VI Injectivité dans le cas typique

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

22 Soit g une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

22.a Que dire de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$?

22.b En déduire que g est l'application nulle.

23 Soient f fixée telle que E soit non vide, $x \in \mathrm{E}$ et $a > 0$. On pose $h(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-xu} f(u)\,\mathrm{d}u$ pour tout $t \geq 0$.

23.a Montrer que $\mathrm{L}f(x + a) = a \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} h(t)\,\mathrm{d}t$.

23.b On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{L}f(x + na) = 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) \mathrm{d}u$ converge et qu'elle est nulle.

23.c Qu'en déduit-on pour la fonction h ?

24 Montrer que l'application qui à f associe $\mathrm{L}f$ est injective.

VII Etude en la borne inférieure de E

25 **Cas positif.**
On suppose que f est positive et que E n'est ni vide ni égal à $\mathbb{R}$. On note α sa borne inférieure.

25.a Montrer que si $\mathrm{L}f$ est bornée sur E, alors $\alpha \in \mathrm{E}$.

25.b Si $\alpha \notin \mathrm{E}$, que dire de $\mathrm{L}f(x)$ quand x tend vers α^+ ?

26 Dans cette question, $f(t) = \cos(t)$ et $\lambda(t) = \ln(1+t)$.

26.a Déterminer E.

26.b Déterminer E′.

26.c Montrer que $\mathrm{L}f$ admet une limite en α, borne inférieure de E, et la déterminer.

VIII Une utilisation de la transformation L

Dans cette partie, $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients complexes et on utilise la transformation L appliqué à des éléments de $\mathcal{P}$ pour l'étude d'un opérateur U.

27 Soient P, Q deux éléments de $\mathcal{P}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \overline{\mathrm{P}(t)}\mathrm{Q}(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

28 Pour tout couple $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathcal{P}^2$, on note

$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \int_0^{+\infty} \overline{\mathrm{P}(t)}\mathrm{Q}(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Vérifier que $(\cdot, \cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.

29 On note D l'endomorphisme de dérivation et U l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ défini par

$$\mathrm{U}(\mathrm{P})(t) = e^t\mathrm{D}(te^{-t}\mathrm{P}'(t))$$

Vérifier que U est endomorphisme de $\mathcal{P}$.

30 Montrer que pour tous P, Q de $\mathcal{P}$ on a

$$(\mathrm{U}(\mathrm{P}), \mathrm{Q}) = (\mathrm{P}, \mathrm{U}(\mathrm{Q}))$$

31 Montrer que U admet des valeurs propres dans $\mathbb{C}$, qu'elles sont réelles et que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

32 Soient λ une valeur propre de U et P un vecteur propre associé.

32.a Montrer que P est solution d'une équation différentielle linéaire simple que l'on précisera.

32.b Quel lien y-a-t-il entre λ et le degré de P ?

33 **Description des éléments propres de U.**
On considère sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_n) \;:\; t\mathrm{P}'' + (1-t)\mathrm{P}' + n\mathrm{P} = 0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et d'inconnue $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$.

33.a En appliquant la transformation L avec $\lambda(t) = t$ à (E_n), montrer que si P est solution de (E_n) sur $[0, +\infty[$, alors son image Q par L est solution d'une équation différentielle (E'_n) d'ordre 1 sur $]1, +\infty[$.

33.b Résoudre l'équation (E'_n) sur $]1, +\infty[$ et en déduire les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme U.

33.c Quel est le lien entre ce qui précède et les fonctions polynomiales définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $\mathrm{P}_n(t) = e^t\mathrm{D}^n(e^{-t}t^n)$?