Devoir surveillé n°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Supposons qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{I}(\lambda)$ et $\mathrm{I}(\mu)$ convergent. Par différence, $\int_a^{+\infty}\left(\frac{\lambda-f(t)}{t}-\frac{\lambda-f(t)}{t}\right)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty}\frac{\lambda-\mu}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Comme $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, ceci n'est possible que si $\lambda-\mu=0$ i.e. $\lambda=\mu$.

2. Supposons H_λ bornée sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, H_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ de dérivée $t\mapsto\lambda-f(t)$. Par ailleurs, $t\mapsto\frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ de dérivée $t\mapsto-\frac{1}{t^2}$. Par intégration par parties, on obtient sous réserve de convergence :

$$\mathrm{I}(\lambda)=\left[\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t}\right]_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Comme H_λ est bornée,

$$\left[\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t}\right]_a^{+\infty}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t}-\frac{\mathrm{H}_\lambda(a)}{a}=0$$

De plus, $\mathrm{H}_\lambda(t)\underset{t\to+\infty}{=}\mathcal{O}(1/t^2)$ donc H_λ est intégrable sur $[a,+\infty[$. A fortiori, $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
On en déduit que $\mathrm{I}(\lambda)$ converge et que

$$\mathrm{I}(\lambda)=\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

3. **a.** Posons $\mathrm{G}_\lambda(x)=\mathrm{H}_\lambda(x+\mathrm{T})-\mathrm{H}_\lambda(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$. On a déjà montré que H_λ était de classe $\mathcal{C}^1$ donc G_λ également et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{G}_\lambda'(x)=\mathrm{H}_\lambda'(x+\mathrm{T})-\mathrm{H}_\lambda'(x)=(\lambda-f(x+\mathrm{T}))-(\lambda-f(x))=f(x)-f(x+\mathrm{T})=0$$

Ainsi G_λ est constante sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{H}_\lambda(x+\mathrm{T})-\mathrm{H}_\lambda(x)=\mathrm{G}_\lambda(0)&=\mathrm{H}_\lambda(\mathrm{T})-\mathrm{H}_\lambda(0)\\&=\int_a^{\mathrm{T}}(\lambda-f(t))\,\mathrm{d}t-\int_a^0(\lambda-f(t))\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\mathrm{T}}(\lambda-f(t))\,\mathrm{d}t\qquad\text{d'après la relation de Chasles}\\&=\lambda\mathrm{T}-\int_0^{\mathrm{T}}f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

b. Par télescopage

$$\mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T})=\mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T})-\mathrm{H}_\lambda(a)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{H}_\lambda(a+(k+1)\mathrm{T})-\mathrm{H}_\lambda(a+k\mathrm{T})=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda\mathrm{T}-\int_0^{\mathrm{T}}f(t)\,\mathrm{d}t=n\left(\lambda\mathrm{T}-\int_0^{\mathrm{T}}f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Ainsi la suite $(\mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T}))$ est bornée si et seulement si $\lambda\mathrm{T}-\int_0^\mathrm{T} f(t)\,\mathrm{d}t$ i.e. si et seulement si $\lambda=\lambda_0=\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^\mathrm{T} f(t)\,\mathrm{d}t$.

c. Dans ce cas,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{H}_{\lambda_0}(x+\mathrm{T})-\mathrm{H}_{\lambda_0}(x)=0$$

Ainsi H_{λ_0} est T-périodique. Comme H_{λ_0} est continue, elle est bornée sur le segment $[0,\mathrm{T}]$. Par T-périodicité, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

d. Comme H_{λ_0} est bornée sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{I}(\lambda_0)$ converge d'après la question **2**. D'après la question **1**, λ_0 est l'unique valeur de λ pour laquelle $\mathrm{I}(\lambda)$ converge.

e. Soit $x\in[a,+\infty[$. Alors

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=-\int_a^x\frac{\lambda_0-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t+\int_a^x\frac{\lambda_0}{t}\,\mathrm{d}t=-\int_a^x\frac{\lambda_0-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t+\lambda_0(\ln x-\ln a)$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x\frac{\lambda_0-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{I}(\lambda_0)$ et $\lim_{x\to+\infty}\lambda_0\ln x=\pm\infty$ car $\lambda_0\neq0$. On en déduit que

$$\int_a^x\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\sim}\lambda_0\ln x$$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. L'application $t\mapsto\frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et comme $\sin u\underset{u\to0}{\sim}u$, $\lim_{t\to0^+}\frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}=n$. Ainsi $t\mapsto\frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ se prolonge en une application continue sur le *segment* $[0,\pi/2]$. L'intégrale A_n est donc bien définie. Le même argument montre également que B_n est bien définie.

5. On utilise le fait que $\sin(t)\underset{t\to0}{=}t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)$:

$$\varphi(t)=\frac{\sin(t)-t}{t\sin(t)}\underset{t\to0}{\sim}\frac{-t^3/6}{t^2}=-\frac{t}{6}$$

6. D'après la question précédente, φ est prolongeable par continuité sur le segment $[0,\pi/2]$. Elle y est donc intégrable. Par inégalité triangulaire,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |\mathrm{A}_n-\mathrm{B}_n|\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin(nt)||\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$$

La suite $(\mathrm{A}_n-\mathrm{B}_n)$ est donc bornée.

7. Via le changement de variable linéaire $u=nt$,

$$\mathrm{B}_n=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}}\frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u=\mathrm{B}_1+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}}\frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u$$

Remarquons que $|\sin|$ est π-périodique donc, avec les notations de la question **3** et $a=\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\lambda_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi|\sin(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\neq0$$

On en déduit que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x\frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u\underset{x\to+\infty}{\sim}\lambda_0\ln(x)=\frac{2}{\pi}\ln(x)$$

et donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}}\frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{n\pi}{2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\ln(n)}{\pi}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln(n)}{\pi} = +\infty$,

$$\mathrm{B}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{\pi}$$

Puisque $(\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n)$ est bornée et que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{B}_n = +\infty$ d'après l'équivalent précédente,

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n + (\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{B}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{\pi}$$

Solution 2

1. Soit $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|x\|_p = 0$. Alors $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = 0$. Mais comme tous les termes de cette somme sont positifs, ils sont nuls et x est également nul.
Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$. Alors

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda|^p |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\|x\|_p$$

2. a. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$. L'inégalité est clairement vraie si l'un des deux réels u et v est nul. Supposons donc $u > 0$ et $v > 0$. Par concavité du logarithme

$$\ln\left(\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(u^p) + \frac{1}{q}\ln(v^q) = \ln(u) + \ln(v) = \ln(uv)$$

On en déduit l'inégalité demandée par croissance de l'exponentielle.

b. Soit $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$. Supposons d'abord $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$|x_k y_k| = |x_k||y_k| \leq \frac{|x_k|^p}{p} + \frac{|y_k|^q}{q}$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\|x.y\|_1 \leq \frac{\|x\|_p^p}{p} + \frac{\|y\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Revenons maintenant au cas général : x et y sont donc quelconques. Remarquons que l'inégalité demandée est vraie si l'un des vecteurs x et y est nul. Supposons donc x et y non nuls. Alors $\|x\|_p \neq 0$ et $\|y\|_q \neq 0$ par propriété de séparation. Posons alors $x' = \frac{x}{\|x\|_p}$ et $y' = \frac{y}{\|y\|_q}$. Par homogénéité, $\|x'\|_p = \|y'\|_q = 1$. D'après ce qui précède, $\|x'.y'\|_1 \leq 1$. Mais il est clair que $x'.y' = \frac{x.y}{\|x\|_p\|x\|_q}$ et par homogénéité de $\|.\|_1$, $\|x'.y'\|_1 = \frac{\|x.y\|_1}{\|x\|_p\|x\|_q}$ d'où l'inégalité demandée.

3. C'est du cours lorsque $p = 1$. Supposons donc $p > 1$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$. Posons $q = \frac{p}{p-1}$ de sorte que $q > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1}$$

D'après la question **2.b**,

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

En tenant compte du fait que $(p-1)q = p$ et $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$, ces deux inégalités peuvent également s'écrire

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \|x\|_p\|x + y\|_p^{p-1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \|y\|_p\|x + y\|_p^{p-1}$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x + y\|_p^{p-1}$$

Si $\|x + y\|_p = 0$, alors on a clairement $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Sinon, il suffit de diviser l'inégalité précédente par $\|x + y\|_p^{p-1}$ pour aboutir au même résultat.

4. **a.** Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Alors on a clairement

$$\|x\|_\infty^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^p = \|x\|_p^p$$

On en déduit que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.

b. Soit $x \in \mathbb{K}^n$.

$$\|x\|_q^q = \sum_{k=1}^n |x_k|^q \leq \|x\|_\infty^{q-p} \sum_{k=1}^n |x_k|^p = \|x\|_\infty^{q-p}\|x\|_p^p$$

D'après la question **4.a**, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ donc $\|x\|_q^q \leq \|x\|_p^q$ puis $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

Posons $\mathrm{M} = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \dfrac{\|x\|_q}{\|x\|_p}$. L'inégalité précédente montre que $\mathrm{M} \leq 1$. De plus, cette inégalité est une égalité lorsque x est un vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ donc $\mathrm{M} = 1$ et cette borne supérieure est atteinte.

5. **a.** Posons $p' = \dfrac{p}{r}$ et $q' = \dfrac{q}{r}$ de sorte que $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{q'}$. D'après la question **2.b**

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k|^r \leq \left(\sum_{k=1} |x_k|^{rp'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1} |y_k|^{rq'}\right)^{\frac{1}{q'}}$$

Puisque $rp' = p$ et $rq' = q$, on obtient l'inégalité demandée en élevant la dernière inégalité à la puissance $\dfrac{1}{r}$.

b. Puisque $p < q$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$ i.e. $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p}$.
Soit $x \in \mathbb{K}^n$ et $y = (1, \dots, 1)$. D'après la question précédente,

$$\|x.y\|_p \leq \|x\|_q\|y\|_r$$

Ce qui s'écrit encore

$$\|x\|_p \leq \|x\|_q n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

Posons $\mathrm{M} = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \dfrac{\|x\|_p}{\|x\|_q}$. L'inégalité précédente montre que $\mathrm{M} \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$. De plus, cette inégalité est une égalité lorsque $|x_k| = 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ donc $\mathrm{M} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ et cette borne supérieure est atteinte.

6. On a vu à la question **4.a** que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.
De plus,

$$\|x\|_p^p = \sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq n\|x\|_\infty^p$$

donc $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}$. Finalement

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Solution 3

1. Si PQ est nul, alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et alors $\sum u_n$ converge.
Sinon, en notant d le degré de PQ, $\mathrm{PQ}(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(n^d)$. Comme (a_n) est bornée, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(n^d/2^n)$. Par croissances comparées, on peut par exemple affirmer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^2)$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont évidentes (à faire néanmoins). Si l'on se donne $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P} \rangle = 0$, alors $\mathrm{P}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car une somme de termes positifs ne peut être nulle que si chacun des termes est nul. Ainsi P possède une infinité de racines : il est nul.

3. Tout d'abord, la symétrie, la bilinéarité et la positivité restent conservées même si les a_n sont positifs ou nul.
On va montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit encore un produit scalaire si et seulement si il existe une infinité d'entiers n tels que $a_n > 0$.
Si c'est le cas, un polynôme P vérifiant $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P} \rangle = 0$ s'annule encore en tous les entiers n tels que $a_n > 0$. Il possède donc encore une infinité de racines et il est nul.
Si ce n'est pas le cas, notons A l'ensemble fini des entiers n tels que $a_n > 0$. Posons alors $\mathrm{P} = \prod_{n\in\mathrm{A}} (\mathrm{X} - n)$. On vérifie alors que $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P} \rangle = 0$ mais P n'est pas nul.

4. Posons $\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Il est clair que $\mathrm{N}_2(\mathrm{P}_k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{N}_1(\mathrm{P}_k)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{2k}}{2^n} \geq \frac{2^{2k}}{2^2}$$

car une somme de termes positifs est supérieure à chacun de ses termes (ici le terme d'indice $n = 2$). Ainsi $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}_k) \geq 2^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis $\frac{\mathrm{N}_1(\mathrm{P}_k)}{\mathrm{N}_2(\mathrm{P}_k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ de sorte que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Problème 1

Remarquons déjà que dans tout le problème, $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(2t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.1 **I.1.a** **Etude en $+\infty$.** Clairement, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$ donc $f(2t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$ puis $\dfrac{f(t)-f(2t)}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^3)$.
Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(2t)}{t}$ l'est également.
Etude en 0^+. Puisque $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to0}{=} 1+\mathcal{O}(u)$, $f(t) \underset{t\to0}{=} 1+\mathcal{O}(t^2)$ puis $f(2t) \underset{t\to0}{=} 1+\mathcal{O}(t^2)$ et enfin $\dfrac{f(t)-f(2t)}{t} \underset{t\to0}{=} \mathcal{O}(t)$.
Comme $t \mapsto t$ est intégrable sur $]0,1]$, $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(2t)}{t}$ l'est également.
Finalement, $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(2t)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: l'intégrale $\mathrm{I}(f)$ converge (absolument).

I.1.b Décomposition en éléments simples :

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{1}{t(t^2+1)} - \frac{1}{t(4t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t} + \frac{4t}{4t^2+1} = \frac{4t}{4t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}$$

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(2t)}{t}$ est donc

$$t \mapsto \frac{1}{2}\ln(4t^2+1) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4t^2+1}{t^2+1}\right)$$

Ainsi

$$\mathrm{I}(f) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{4t^2+1}{t^2+1}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 2$$

I.2

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{4t^2+1}$$

Ainsi

$$\mathrm{I}(f) = [\arctan(t) - \arctan(2t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

I.3 Remarquons que

$$f(t) = \frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

On se ramène donc à la question **I.1** : $\mathrm{I}(f)$ converge et $\mathrm{I}(f) = -\ln 2$.

I.4 Lorsque $n \geq 3$,

$$\frac{f(t)-f(2t)}{t} = \frac{t^{n-1}}{1+t^2} - \frac{2^n t^{n-1}}{1+4t^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4-2^n}{4t^{3-n}}$$

car $4-2^n \neq 0$. Or $3-n \leq 0 \leq 1$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3-n}}$ diverge. De plus, $t \mapsto \dfrac{4-2^n}{4t^{3-n}}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on peut affirmer que $\mathrm{I}(f)$ diverge également.

Partie II –

II.5 **Etude en $+\infty$.** Par croissances comparées, $\dfrac{f(t)-f(2t)}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$. Par conséquent, $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(2t)}{t}$ est intégrable en $+\infty$.
Etude en 0^+. On sait que $e^{-t} \underset{t\to0}{=} 1-t+o(t)$ et $e^{-2t} = 1-2t+o(t)$ donc $\dfrac{f(t)-f(2t)}{t} = 1+o(1)$ i.e. $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{f(t)-f(2t)}{t}$. Ainsi f est intégrable en 0^+.
Finalement, $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(2t)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: l'intégrale $\mathrm{I}(f)$ converge (absolument).

II.6

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}t - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{par le changement de variable } u=2t\\
&= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{via la relation de Chasles}\\
&= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}-1}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u}
\end{aligned}$$

II.7 h est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il suffit de constater que $\lim\limits_{0} h = -1$ pour affirmer que h est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

II.8 On note H une primitive du prolongement continu de h sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t)-f(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}-1}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \mathrm{H}(2\varepsilon) - \mathrm{H}(\varepsilon) + \ln 2$$

Comme H est continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{H}(2\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{H}(\varepsilon) = \mathrm{H}(0)$$

Par conséquent,

$$\mathrm{I}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t)-f(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$$

II.9 On effectue le changement de variable $t = -\ln u$. Celui-ci est valide car $-\ln$ est une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$. Ainsi

$$\mathrm{I} = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{0} \frac{u-u^2}{-\ln u}\cdot\frac{-\,\mathrm{d}u}{u} = \int_{0}^{1} \frac{u-1}{\ln u}\,\mathrm{d}u$$

Ainsi

$$\mathrm{J} = \mathrm{I}(f) = \ln 2$$