

DEVOIR À LA MAISON N°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – Mines-Ponts 2022 MP I

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n , c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n , est donnée en début de partie II. Dans la partie I, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie II, on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de \mathbb{C} , de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n z^n$. L'étude de P au voisinage de 1 permet alors, dans les parties suivantes, de progresser vers l'obtention d'un équivalent simple de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (formule asymptotique de Hardy et Ramanujan).

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de \mathbb{C} sera noté

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Dans tout l'énoncé, on utilisera la dénomination «variable aléatoire réelle» pour signifier «variable aléatoire discrète réelle».

On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$$

I Fonctions L et P

- 1** Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1, 1[$.

On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$$

- 2** Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $t \in [0, 1] \mapsto L(tz)$ est dérivable et donner une expression simple de sa dérivée.

En déduire que $t \mapsto (1 - tz)e^{L(tz)}$ est constante sur $[0, 1]$ et conclure que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1 - z}$$

- 3** Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$ pour tout z dans D . En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} L(z^n)$ pour tout z dans D . Dans la suite, on notera, pour z dans D ,

$$P(z) := \exp \left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n) \right]$$

On remarque, en vertu de la question précédente et des propriétés de l'exponentielle, que

$$\forall z \in D, P(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - z^n}$$

II Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N$ telles que $\sum_{k=1}^N k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

- 4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est fini pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N \geq 1}$.

- 5 Montrer par récurrence que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall z \in D, \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$$

- 6 Soit $z \in D$. On convient que $p_{n,0} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En examinant la sommabilité de la famille $((p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n)_{(n,N) \in \mathbb{N}^2}$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_n p_n x^n$.

- 7 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta}) d\theta$$

si bien que

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})} d\theta \quad (1)$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'obtenir un équivalent du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Cet équivalent sera obtenu via un choix approprié de t en fonction de n dans la formule (1).

III Contrôle de P

- 8 Soit $x \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left| \frac{1-x}{1-xe^{i\theta}} \right| \leq \exp(-(1-\cos \theta)x)$$

En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$ et tout réel θ ,

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right)$$

- 9 Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \geq \frac{x(1-\cos \theta)}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos \theta))}$$

En déduire que

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos \theta}{6(1-x)^3}\right) \text{ ou que } \left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right)$$

IV Intermède : quelques estimations de sommes

On fixe dans cette partie un réel $\alpha > 0$ et un entier $n \geq 1$. Sous réserve d'existence, on pose

$$S_{n,\alpha}(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1 - e^{-kt})^n}$$

On introduit aussi la fonction

$$\varphi_{n,\alpha} : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-x})^n}$$

qui est évidemment de classe \mathcal{C}^∞ .

10 Montrer que $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

11 Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'existence de $S_{n,\alpha}(t)$, sa positivité stricte, et l'identité

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x) dx = t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x - kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx.$$

En déduire que

$$S_{n,\alpha}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-x})^n} dx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

12 Démontrer, sans utiliser ce qui précède, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

Dans le reste du problème, nous admettrons le résultat suivant (il peut être démontré par une méthode similaire) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} dx = \frac{\pi^2}{3}$$

V Contrôle des fonctions caractéristiques

Etant donné une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ainsi qu'un réel θ , les variables aléatoires réelles $\cos(\theta X)$ et $\sin(\theta X)$ sont d'espérance finie puisque bornées : on introduit alors le nombre complexe

$$\Phi_X(\theta) := \mathbb{E}(\cos(\theta X)) + i \mathbb{E}(\sin(\theta X)).$$

13 Soit X une variable aléatoire réelle, Montrer que $|\Phi_X(\theta)| \leq 1$ pour tout réel θ .

Dans les questions **14** à **18**, on se donne une variable aléatoire réelle X suivant une loi géométrique, de paramètre $p \in]0, 1[$ arbitraire. On pose $q = 1 - p$.

14 Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout réel θ ,

$$\Phi_{aX+b}(\theta) = \frac{p e^{i(a+b)\theta}}{1 - q e^{ia\theta}}.$$

15 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X^k est d'espérance finie. Montrer que Φ_X est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et que $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 16** Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients dans \mathbb{C} , indépendante de p , telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \Phi_X^{(k)}(\theta) = p^k e^{i\theta} \frac{P_k(qe^{i\theta})}{(1 - qe^{i\theta})^{k+1}} \text{ et } P_k(0) = 1.$$

- 17** En déduire qu'il existe une suite $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, indépendante de p , telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left| \mathbb{E}(X^k) - \frac{1}{p^k} \right| \leq \frac{C_k q}{p^k}$$

- 18** En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ indépendant de p tel que

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4) \leq \frac{Kq}{p^4}.$$

Dans les questions **19** à **21**, on se donne une variable aléatoire réelle centrée Y telle que Y^4 soit d'espérance finie.

- 19** Montrer successivement que Y^2 et $|Y|^3$ sont d'espérance finie, et que

$$\mathbb{E}(Y^2) \leq (\mathbb{E}(Y^4))^{1/2} \text{ puis } \mathbb{E}(|Y|^3) \leq (\mathbb{E}(Y^4))^{3/4}$$

- 20** Montrer, pour tout réel u , l'inégalité

$$\left| e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{|u|^3}{6}$$

En déduire que pour tout réel θ ,

$$\left| \Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| \leq \frac{|\theta|^3}{3} (\mathbb{E}(Y^4))^{3/4}.$$

- 21** Conclure que pour tout réel θ ,

$$\left| \Phi_Y(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2}\right) \right| \leq \frac{|\theta|^3}{3} (\mathbb{E}(Y^4))^{3/4} + \frac{\theta^4}{8} \mathbb{E}(Y^4)$$

VI Convergence vers une gaussienne

Etant donné un réel $t > 0$, on pose, suivant les notations de la partie IV,

$$m_t := S_{1,1}(t) \text{ et } \sigma_t := \sqrt{S_{2,1}(t)}.$$

Etant donné des réels $t > 0$ et θ , on pose

$$h(t, \theta) = e^{-im_t\theta} \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}$$

Etant donné des réels $t > 0$ et u , on pose

$$\zeta(t, u) = \exp\left(i \frac{u}{\sigma_t} \left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) \text{ et } j(t, u) = \zeta(t, u) h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right)$$

- 22** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que des complexes $z_1, \dots, z_n, u_1, \dots, u_n$ tous de module inférieur ou égal à 1. Montrer que

$$\left| \prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n u_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k - u_k|$$

- 23** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire Z_k suivant la loi $\mathcal{G}(1 - e^{-kt})$, et on pose $Y_k = k(Z_k - \mathbb{E}(Z_k))$. Démontrer que

$$h(t, \theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \Phi_{Y_k}(\theta)$$

En déduire, à l'aide en particulier de la question **21** l'inégalité

$$\left| h(t, \theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2 \theta^2}{2}} \right| \leq K^{3/4} |\theta|^3 S_{3,3/4}(t) + K \theta^4 S_{4,1}(t)$$

On rappelle que la constante K a été introduite à la question **18**, les quantités $S_{n,\alpha}(t)$ dans la partie IV.

- 24** Montrer que $\sigma_t \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3t^{3/2}}}$. En déduire, pour tout réel u , que

$$j(t, u) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} e^{-u^2/2}$$

- 25** Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], \quad 1 - \cos \theta \geq \alpha \theta^2.$$

A l'aide de la question **9**, en déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in]0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$|h(t, \theta)| \leq e^{-\beta(\sigma_t \theta)^2} \quad \text{ou} \quad |h(t, \theta)| \leq e^{-\gamma(\sigma_t |\theta|)^{2/3}}$$

- 26** Conclure que

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t, u) \, du \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$$

VII La conclusion

Dans cette dernière partie, on admet que $P(e^{-t}) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \exp\left(\frac{\pi^2}{6t}\right)$.

- 27** En appliquant la formule (1) à $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$, démontrer que

$$p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3n}}$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.