Devoir à la maison n°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

$\boxed{1}$ **1.a** Supposons que A et B soient les matrices du même endomorphisme u de E dans des bases orthonormales respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormales, P est orthogonale. Ainsi A et B sont orthogonalement semblables.

1.b Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, la matrice de u^* dans la base $\mathcal{B}$ est A^T. Comme l'application $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres,

$$u \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \iff u^* \in \mathbb{R}[u] \iff \mathrm{A}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}[\mathrm{A}] \iff \mathrm{A} \in \mathcal{P}_n$$

et

$$u \in \mathcal{N}(\mathrm{E}) \iff u^* \circ u = u \circ u^* \iff \mathrm{A}^\mathsf{T}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{A}^\mathsf{T} \iff \mathrm{A} \in \mathcal{N}_n$$

1.c On sait que $\mathbb{R}[u]$ et $\mathbb{R}[\mathrm{A}]$ sont des algèbres commutatives donc $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{N}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{N}_n$.

$\boxed{2}$ **2.a** Si $u \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$, alors $u^* = u \in \mathbb{R}[u]$ donc $u \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$. De même, si $u \in \mathcal{A}(\mathrm{E})$, alors $u^* = -u \in \mathbb{R}[u]$ donc $u \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$.

2.b Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_n$ triangulaire supérieure. Alors il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A}^\mathsf{T} = \mathrm{P}(\mathrm{A})$. Les matrices triangulaires supérieures forment une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ est également triangulaire supérieure. Or A^T est triangulaire inférieure. On en déduit que A^T est diagonale et donc A également. Réciproquement, si A est une matrice diagonale, alors A est triangulaire supérieure et $\mathrm{A}^\mathsf{T} = \mathrm{A} \in \mathbb{R}[\mathrm{A}]$ i.e. $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_n$. Les matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{P}_n$ sont donc exactement les matrices diagonales.
Si $n \geq 2$, il existe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures non diagonales et donc $\mathcal{P}_n \subsetneq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2.c On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Il existe donc une base orthonormale $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_i)$. On en déduit que la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, à savoir la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, est triangulaire supérieure. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$, à savoir P^{-1} est également triangulaire supérieure.
Notons $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ qui est triangulaire supérieure en tant que produit de telles matrices.
Soit $u \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ trigonalisable. D'après ce qui précède, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice A de u est triangulaire supérieure. Comme $u \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_n$. D'après la question précédente, A est en fait diagonale et a fortiori symétrique. Ainsi u est autoadjoint. Réciproquement, si u est autoadjoint, alors $u \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ d'après la question **2.a**.
Les éléments trigonalisables de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ sont les endomorphismes autoadjoints.

2.d Soit $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Alors $\chi_u(u) = 0$. De plus, $\chi_u(0) = \det(-u) \neq 0$. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\chi_u = \alpha + \mathrm{XQ}$. Comme χ_u annule u, $\alpha \,\mathrm{Id}_\mathrm{E} + u \circ \mathrm{Q}(u) = 0$ puis $u^{-1} = -\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{Q}(u) \in \mathbb{R}[u]$.
Si $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$, alors $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et $u^* = u^{-1} \in \mathbb{R}[u]$ de sorte que $u \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$.

$\boxed{3}$ Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_n$.

Existence. Par définition, il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A}^\mathsf{T} = \mathrm{P}(\mathrm{A})$. On écrit la division euclidienne de P par π_A : $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\pi_\mathrm{A} + \mathrm{R}$ avec $\deg \mathrm{R} < \deg \pi_\mathrm{A}$. On a alors $\mathrm{A}^\mathsf{T} = \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{Q}(\mathrm{A})\pi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) + \mathrm{R}(\mathrm{A}) = \mathrm{R}(\mathrm{A})$.
Unicité. Soient P_1 et P_2 deux polynômes tels que $\mathrm{A}^\mathsf{T} = \mathrm{P}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{P}_2(\mathrm{A})$, $\deg \mathrm{P}_1 < \deg \pi_\mathrm{A}$ et $\deg \mathrm{P}_2 < \deg \pi_\mathrm{A}$. Alors $\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2$ annule A de sorte que π_A divise $\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2$. Or $\deg(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2) < \deg \pi_\mathrm{A}$ donc $\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 = 0$ i.e. $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$.
De la même manière, pour tout $u \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, il existe un unique $\mathrm{P}_u \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\deg \mathrm{P}_u < \deg \pi_u$ et $\mathrm{P}_u(u) = u^*$.

3.a **3.b** Soit $A \in \mathcal{P}_n$ telle que P_A est un polynôme constant. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P_A = \alpha$. Ainsi $A^\top = P_A(A) = \alpha I_n$. Réciproquement, s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A = \alpha I_n$, alors en posant $P = \alpha$ on a bien $P(A) = \alpha I_n = A^\top$ et $\deg P \leq 0 < 1 \leq \deg \pi_A$. Ainsi $P_A = P = \alpha$ est un polynôme constant.
L'ensemble des matrices A de $\mathcal{P}_n$ telles que P_A est un polynôme constant est $\operatorname{vect}(I_n)$.

3.c Soit $A \in \mathcal{P}_n$ telle que $\deg P_A = 1$. Posons alors $P_A = \alpha X + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On sait qu'il existe A_1 symétrique et A_2 antisymétrique telles que $A = A_1 + A_2$. Alors

$$A_1 - A_2 = A^\top = P_A(A) = \alpha A + \beta I_n = \alpha A_1 + \alpha A_2 + \beta I_n$$

En transposant, on obtient

$$A_1 + A_2 = \alpha A_1 - \alpha A_2 + \beta I_n$$

En additionnant et en soustrayant ces deux égalités, on obtient

$$A_1 = \alpha A_1 + \beta I_n \qquad\qquad A_2 = -\alpha A_2$$

On a notamment $A_2 = 0$ ou $\alpha = -1$. Si $A_2 = 0$, alors A est symétrique mais non scalaire d'après la question précédente (sinon $\deg P_A \leq 0$). Si $\alpha = -1$, alors $A_1 = \frac{\beta}{2} I_n + A_2$ avec A_2 non nulle (toujours d'après la question précédente).
Réciproquement, si A est symétrique non scalaire, alors on constate que $A^\top = A = P(A)$ avec $P = X$. Comme A est non scalaire, $\deg \pi_A > 1 = \deg X$ et donc $P_A = X$ par unicité de P_A et $\deg P_A = 1$. De même, si $A = kI_n + M$ avec M antisymétrique non nulle, alors $A^\top = kI_n - M = P(A)$ avec $P = -X + 2k$. Comme M n'est pas nulle, A n'est pas scalaire de sorte que $\deg \pi_A > 1 = \deg P$. Par unicité de P_A, $P_A = -X + 2k$ et $\deg P_A = 1$.
En conclusion, les matrices A de $\mathcal{P}_n$ telles que $\deg P_A = 1$ sont les matrices symétriques non scalaires et les matrices de la forme $kI_n + M$ avec M antisymétrique non nulle.

3.d Si A et B sont orthogonalement semblables, alors il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ telle que $B = Q^{-1}AQ = Q^\top AQ$. Supposons que $A \in \mathcal{P}_n$. Alors

$$P_A(B) = P_A(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}P_A(A)Q = Q^\top A^\top A = B^\top$$

Donc $B \in \mathcal{P}_n$. De plus, A et B sont semblables donc $\pi_A = \pi_B$ de sorte que $\deg P_A < \deg \pi_A = \deg \pi_B$. Ainsi $P_B = P_A$ par unicité de P_B.

4 Soit $A \in \mathcal{P}_2$. Comme $\deg \pi_A \leq 2$, $\deg P_A \leq 1$. D'après les questions précédentes, A est symétrique ou de la forme $aI_2 + M$ avec M antisymétrique i.e. de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Réciproquement, si $A \in \mathcal{S}_2$ alors $A \in \mathcal{P}_2$ et si $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, alors $A^\top = P(A)$ avec $P = a$ si $b = 0$ ou $P = -X + 2a$ si $b \neq 0$ donc $A \in \mathcal{P}_2$.
Ainsi

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{S}_2 \cup \operatorname{vect}(I_2, J_2)$$

avec $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5 **5.a** D'après le théorème de Bézout, il existe $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $U\pi_{A_1} + V\pi_{A_2} = 1$. On en déduit que

$$(P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1} + (P_{A_1} - P_{A_2})V\pi_{A_2} = (P_{A_1} - P_{A_2})$$

ou encore

$$P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1} = P_{A_2} + (P_{A_1} - P_{A_2})V\pi_{A_2}$$

Une récurrence évidente montre que

$$\forall m \in \mathbb{N},\ A^m = \begin{pmatrix} A_1^m & 0 \\ 0 & A_2^m \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(A_1) & 0 \\ 0 & P(A_2) \end{pmatrix}$$

Comme π_{A_1} annule A_1, $P(A_1) = P_{A_1}(A_1) = A_1^\top$. Mais on a également $P = P_{A_2} + (P_{A_1} - P_{A_2})V\pi_{A_2}$ et π_{A_2} annule A_2 donc $P(A_2) = A_2^\top$. On en déduit que $P(A) = A^\top$. Autrement dit, $A \in \mathcal{P}_{n_1+n_2}$.

5.b Pour tout $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{Q}(\mathrm{A}) = 0 \iff (\mathrm{Q}(\mathrm{A}_1) = 0$ ET $\mathrm{Q}(\mathrm{A}_2) = 0)$. En termes d'idéaux annulateurs,

$$\pi_{\mathrm{A}}\mathbb{K}[\mathrm{X}] = \pi_{\mathrm{A}_1}\mathbb{K}[\mathrm{X}] \cap \pi_{\mathrm{A}_2}\mathbb{K}[\mathrm{X}] = (\pi_{\mathrm{A}_1} \vee \pi_{\mathrm{A}_2})\mathbb{K}[\mathrm{X}]$$

On en déduit que $\pi_{\mathrm{A}} = \pi_{\mathrm{A}_1} \vee \pi_{\mathrm{A}_2} = \pi_{\mathrm{A}_1}\pi_{\mathrm{A}_2}$ car $\pi_{\mathrm{A}_1} \wedge \pi_{\mathrm{A}_2} = 1$.
D'après la question **3.a**, P_{A} est le reste de la division euclidienne de P par $\pi_{\mathrm{A}} = \pi_{\mathrm{A}_1}\pi_{\mathrm{A}_2}$.

6 Remarquons que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_2 & 0 \\ \mathrm{J}_2 & 0 \end{pmatrix}$. D'après la question **4**, I_2 et J_2 appartient à $\mathcal{S}_2$. De plus, $\mathrm{P}_{\mathrm{I}_2} = 1$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{J}_2} = -\mathrm{X}$ de sorte que $\mathrm{P}_{\mathrm{I}_2} \wedge \mathrm{P}_{\mathrm{J}_2} = 1$. D'après la question **5.a**, $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_4$.
On détermine sans peine $\pi_{\mathrm{I}_2} = \mathrm{X}-1$ et $\pi_{\mathrm{J}_2} = \mathrm{X}^2+1$. Avec les notations précédentes, on peut donc prendre $\mathrm{U} = -\frac{1}{2}(\mathrm{X}+1)$ et $\mathrm{V} = \frac{1}{2}$. On en déduit que

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathrm{I}_2} - (\mathrm{P}_{\mathrm{I}_2} - \mathrm{P}_{\mathrm{J}_2})\mathrm{U}\pi_{\mathrm{I}_2} = 1 + \frac{1}{2}(\mathrm{X}+1)^2(\mathrm{X}-1) = \frac{1}{2}(\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1)$$

Or $\pi_{\mathrm{A}} = \pi_{\mathrm{I}_2}\Pi_{\mathrm{J}_2} = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1$ donc

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\pi_{\mathrm{A}} + \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1$$

de sorte que $\mathrm{P}_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1$.

Remarque. On peut vérifier à l'aide d'un calcul par blocs que

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{I}_2) & 0 \\ 0 & \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{J}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{J}_2 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^\top$$

7 Soit $u \in \mathcal{N}(\mathrm{E})$. Comme u et u^* commutent, il en est de même de $\mathrm{P}(u)$ et $\mathrm{P}(u^*)$. On prouve aisément que $\mathrm{P}(u^*) = \mathrm{P}(u)^*$ donc $\mathrm{P}(u) \in \mathcal{N}(\mathrm{E})$.

8 Par définition de l'adjoint

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, u^* \circ u(x)\rangle = \langle x, u \circ u^*(x)\rangle = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle = \|u^*(x)\|^2$$

9 **9.a** Si A est la matrice de f dans une base orthonormale, $\mathrm{A}^\top$ est la matrice de f^* dans cette même base. Ainsi

$$\det(f) = \det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^\top) = \det(f^*) = \det(-f) = (-1)^m \det(f)$$

Comme f est inversible, $\det(f) \neq 0$ de sorte que $(-1)^m = 1$ i.e. m est pair.
9.b Par propriété de l'adjonction,

$$(f^2)^* = (f^*)^2 = (-f)^2 = f^2$$

Ainsi f^2 est autoadjoint et a fortiori diagonalisable. Comme $m > 0$, f^2 admet donc au moins une valeur propre et donc un vecteur propre x_0. Quitte à diviser x_0 par sa norme, on peut supposer x_0 unitaire.
Notamment, $f^2(x_0) \in \mathrm{vect}(x_0)$. On en déduit que

$$f(\Pi) = \mathrm{vect}(f(x_0), f^2(x_0)) \subset \mathrm{vect}(f(x_0), x_0) = \Pi$$

donc Π est stable par f.
Remarquons que $f(x_0) \neq 0$ car f est injective et $x_0 \neq 0$. De plus, comme $f^* = -f$,

$$\langle f(x_0), x_0\rangle = \langle x_0, f^*(x_0)\rangle = -\langle x_0, f(x_0)\rangle$$

donc $\langle f(x_0), x_0\rangle = 0$. Ainsi $f(x_0) \perp x_0$. A fortiori, $(x_0, f(x_0))$ est libre et Π est bien un plan.
Comme f est anti-autoadjoint, $f_{|\Pi}$ l'est également et la matrice de $f_{|\Pi}$ dans une base orthonormale de Π est antisymétrique. Cette matrice est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

9.c Il suffit de raisonner par récurrence. Dans le cas où $m = 2$, le résultat est clair puisque la matrice de f dans une base orthonormale est antisymétrique. Supposons le résultat acquis lorsque $m = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $m = 2(k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On construit comme précédemment un plan Π. La matrice de $f_{|\Pi}$ est alors de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$. On sait de plus que $\Pi^\perp$ est stable par $f^* = -f$ et donc par f. Comme $\dim \Pi^\perp = 2k$, la matrice de $f_{|\Pi^\perp}$ dans une base orthonormale adéquate est de la forme voulue par hypothèse de récurrence. En concaténant les bases de Π et $\Pi^\perp$, on obtient une base de $\mathbb{R}^m$ dans laquelle la matrice de f est de la forme voulue.

10 **10.a** Comme E_1 est stable par u, $E_2 = E_1^\perp$ est stable par u^*. De même, E_1 est stable par u^* donc $E_2 = E_1^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$.

10.b Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

A fortiori, pour tout $(x, y) \in E_1^2$,

$$\langle u_{|E_1}(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle\langle x, (u^*)_{|E_1}(y)\rangle$$

On en déduit que $(u_{|E_1})^* = u^*_{|E_1}$.

10.c D'après la question précédente, si $u \in \mathcal{N}(E)$, alors

$$(u_{|E_1})^* \circ u_{|E_1} = (u^*)_{|E_1} \circ u_{|E_1} = (u^* \circ u)_{|E_1} = (u \circ u^*)_{|E_1} = u_{|E_1} \circ (u^*)_{|E_1} = u_{|E_1} \circ (u_{|E_1})^*$$

donc $u_{|E_1} \in \mathcal{N}(E_1)$. De la même manière, $u_{|E_2} \in \mathcal{N}(E_2)$.

11 Comme u et u^* commutent, $u - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ et $(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^* = u^* - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ commutent également. On en déduit que $u - \lambda\,\mathrm{Id}_E \in \mathcal{N}(E)$. D'après la question **8**,

$$\|u(x) - \lambda x\|^2 = \|(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)(x)\|^2 = \|(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^*(x)\|^2 = \|(u^* - \lambda\,\mathrm{Id}_E)(x)\|^2 = \|u^*(x) - \lambda x\|^2$$

Ainsi $u(x) - \lambda x = 0 \iff u^*(x) - \lambda x = 0$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(u^* - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$. On en déduit que u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres.
On sait que les sous-espaces propres de u sont en somme directe. De plus, si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u, alors, pour $(x, y) \in E_\lambda(u) \times E_\mu(u)$,

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle$$

car $E_\mu(u) = E_\mu(u^*)$. Comme $\lambda \neq \mu$, $\langle x, y\rangle = 0$. Par conséquent $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$.
Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(u^*)$, $E_\lambda(u) = E_\lambda(u^*)$ est stable par u et u^*. On en déduit que $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ est stable par u et u^*. Ainsi $F = \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)\right)^\perp$ est stable par les adjoints respectifs de u et u^*, c'est-à-dire u^* et u.
On remarque alors que $u_{|F}$ n'admet pas de valeur propre car $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ et F sont en somme directe. Notamment, $\chi_{u_{|F}}$ est de degré pair (un polynôme réel de degré impair admet toujours une racine réelle en vertu du théorème des valeurs intermédiaires ; considérer les limites en $+\infty$ et $-\infty$). Donc $\dim F = \deg \chi_{u_{|F}}$ est paire.

12 **12.a** s est clairement auto-adjoint donc diagonalisable. A fortiori, χ_s est scindé.

12.b Comme v et v^* commutent, on vérifie sans peine que s et a commutent de même que s et v.
Comme s est diagonalisable, ses sous-espaces propres F est la somme directe orthogonale de ses sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(s)$ pour $i \in [\![1, k]\!]$. De plus, $\dim E_{\lambda_i}(s) = n_i$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.
Fixons $i \in [\![1, k]\!]$. $E_{\lambda_i}(s)$ est stable par s et $s_{|E_{\lambda_i}(s)} = \lambda_i\,\mathrm{Id}_{E_{\lambda_i}(s)}$. Comme a commute avec s, $E_{\lambda_i}(s)$ est stable par a. De plus, a est anti-autoadjoint donc $a_{|E_{\lambda_i}(s)}$ également en vertu de la question **10.a**. La matrice de $a_{|E_{\lambda_i}(s)}$ dans une base orthonormale $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(s)$ est donc une matrice antisymétrique A_i. Enfin, s et v commutent donc $E_{\lambda_i}(s)$ est également stable par v et $v_{|E_{\lambda_i}(s)} = s_{|E_{\lambda_i}(s)} + a_{|E_{\lambda_i}(s)}$. On en déduit que la matrice de $v_{|E_{\lambda_i}(s)}$ dans la base $\mathcal{B}_i$ est $M_i = \lambda_i I_{n_i} + A_i$.
La concaténation $\mathcal{B}'$ des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ forme une base orthonormale de F dans laquelle la matrice de v est de la forme voulue.

12.c Avec les notations de la question précédente, il s'agit donc de montrer que $a_{|E_{\lambda_i}(s)}$ est inversible. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}\, a_{|E_{\lambda_i}(s)}$. Alors $x \in E_{\lambda_i}(s)$ i.e. $s(x) = \lambda_i x$ et $a(x) = 0$. On en déduit que $v(x) = s(x) + a(x) = \lambda_i x$. Mais comme v n'admet pas de valeur propre réelle, $x = 0_E$. On a donc montré que $\mathrm{Ker}\, a_{|E_{\lambda_i}(s)} = \{0\}$ i.e. A_i est inversible.

13 Notons $S = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. S est stable par u et les sous-espaces propres de u sont orthogonaux deux à deux donc il existe une base orthonormale de S adpatée à cette décomposition en somme directe. La matrice de $u_{|S}$ dans cette base orthonormale est une matrice diagonale D.
De plus, $u_{|F} \in \mathcal{N}(F)$ donc la question précédente montre qu'il existe une base orthonormale de F dans laquelle la matrice de $u_{|F}$ est diagonale par blocs de la forme $M_j = \lambda_j I_{n_j} + A_j$ où A_k est antisymétrique. De plus, $F \cap S = \{0\}$ donc $u_{|F}$ n'admet aucune valeur propre réelle et les matrices A_i sont donc inversibles. D'après la question **9**, chaque matrice A_j

est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$ où $n_i \neq 0$. En en déduit que chaque matrice $\mathrm{M}_j = \lambda_j \mathrm{I}_{n_j} + \mathrm{A}_j$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_j & -b_i \\ b_i & \lambda_j \end{pmatrix}$.
Autrement dit, il existe une base orthonormale de F dans laquelle la matrice de $u_{|\mathrm{F}}$ est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ avec $b_i \neq 0$. Comme E est la somme directe orthogonale de S et F, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme voulue.

14 Les matrices de $\mathcal{N}_n$ sont des matrices orthogonalement semblables à une matrice de la forme de la question précédente. La réciproque ne pose pas de problème (elles commutent clairement avec leurs transposées).

15 Si $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$, un calcul par blocs montre que D et les τ_i sont des matrices orthogonales. On en déduit que les coefficients diagonaux de D valent ± 1 et que les blocs τ_i sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.

16 **16.a** Il est clair que $\mathrm{P}(\mathrm{M})$ est la matrice diagonale diagonale par blocs ayant pour blocs $\mathrm{P}(\mathrm{M}_1), \dots, \mathrm{P}(\mathrm{M}_k)$ et que $\Delta^\top$ est la matrice diagonale diagonale par blocs ayant pour blocs $\mathrm{M}_1^\top, \dots, \mathrm{M}_k^\top$. On en déduit la condition demandée.

16.b On a déjà vu que $\mathrm{P}_\mathrm{A} = -\mathrm{X} + 2a$. On trouve $\chi_\mathrm{A} = (\mathrm{X} - a)^2 + b^2$. Comme $b \neq 0$, A n'est pas scalaire de sorte que $\deg \pi_\mathrm{A} > 1$. Comme π_A divise χ_A, $\pi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{A}$.
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^\top \\
\iff & \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}_\mathrm{A}(\mathrm{A}) \\
\iff & (\mathrm{P} - \mathrm{P}_\mathrm{A})(\mathrm{A}) = 0 \\
\iff & \pi_\mathrm{A} = (\mathrm{X} - (a+ib))(\mathrm{X} - (a-ib)) \mid \mathrm{P} - \mathrm{P}_\mathrm{A} \\
\iff & (\mathrm{P} - \mathrm{P}_\mathrm{A})(a+ib) = 0 \text{ ET } (\mathrm{P} - \mathrm{P}_\mathrm{A})(a-ib) = 0 \qquad \text{car } a - ib \neq a + ib \\
\iff & \mathrm{P}(a+ib) = \mathrm{P}_\mathrm{A}(a+ib) = a - ib \text{ ET } \mathrm{P}(a-ib) = \mathrm{P}_\mathrm{A}(a-ib) = a + ib \qquad \text{car } \mathrm{P}_\mathrm{A} = -\mathrm{X} + 2a
\end{aligned}$$

16.c Tout d'abord,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^\top \iff \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}^\top \iff \mathrm{P}(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^\top \text{ ET } \forall k \in [\![1, p]\!], \mathrm{P}(\tau_k) = \tau_k^\top$$

Or les valeurs propres réelles de A sont exactement les coefficients diagonaux de D donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^\top \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{R}(\mathrm{A}),\ \mathrm{P}(\lambda) = \lambda$$

Les valeurs propres complexes de A sont les valeurs propres complexes des matrices τ_k, c'est-à-dire les $a_k \pm ib_k$. La question précédente montre alors que

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \mathrm{P}(\tau_k) = \tau_k^\top \iff \forall z \in \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{A}) \setminus \mathrm{Sp}_\mathbb{R}(\mathrm{A}),\ \mathrm{P}(z) = \overline{z}$$

16.d Il suffit de prendre le polynôme interpolateur de Lagrange P vérifiant les conditions de la question précédente. C'est l'unique polynôme de degré n vérifiant ces n conditions. Remarqons alors que le polynôme $\overline{\mathrm{P}}$ vérifie les mêmes conditions et que $\deg \overline{\mathrm{P}} = \deg \mathrm{P}$. Ainsi $\overline{\mathrm{P}} = \mathrm{P}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On en déduit que $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{P}_n$. On a déjà vu que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{N}_n$ donc $\mathcal{N}_n = \mathcal{P}_n$.

16.e Comme P est un polynôme de degé minimal vérifiant $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^\top$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\mathrm{A}$.
En reprenant la matrice A de la question **6**, on a $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1, i, -i\}$. On en déduit que P_A est le polynôme interpolateur de Lagrange, vérifiant $\mathrm{P}_\mathrm{A}(1) = 1$, $\mathrm{P}_\mathrm{A}(i) = -i$ et $\mathrm{P}_\mathrm{A}(-i) = i$. On a donc

$$\mathrm{P}_\mathrm{A} = 1 \cdot \frac{(\mathrm{X} - i)(\mathrm{X} + i)}{(1 - i)(1 + i)} - i \cdot \frac{(\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} + i)}{(i - 1)(i + i)} + i \cdot \frac{(\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} - i)}{(-i - 1)(-i - i)} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1$$

17 **17.a** On a $\mathrm{J} \in \mathcal{O}_n \subset \mathcal{N}_n = \mathcal{P}_n$ ou encore $\mathrm{J}^{n-1} = \mathrm{J}^\top$ donc $\mathrm{J} \in \mathcal{P}_n = \mathcal{N}_n$. En posant $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathrm{X}^i$, $\mathrm{C}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) = \mathrm{P}(\mathrm{J}) \in \mathcal{N}_n = \mathcal{P}_n$ d'après la question **7**.

17.b On a classiquement $\pi_\mathrm{J} = \mathrm{X}^{n-1}$. D'une part,

$$\mathrm{P}_\mathrm{A} \circ \mathrm{P}(\mathrm{J}) = \mathrm{P}_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^\top$$

D'autre part,

$$\mathrm{Q}(\mathrm{J}) = \alpha_0 \mathrm{I}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathrm{J}^{n-i} = \alpha_0 \mathrm{I}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\mathrm{J}^i)^\top = \mathrm{P}(\mathrm{J})^\top = \mathrm{A}^\top$$

Ainsi $(\mathrm{P}_\mathrm{A} \circ \mathrm{P} - \mathrm{Q})(\mathrm{J}) = 0$ et π_J divise $\mathrm{P}_\mathrm{A} \circ \mathrm{P} - \mathrm{Q}$. Comme $\deg \mathrm{Q} \leq n-1 < n = \deg \pi_\mathrm{J}$, Q est le reste de la division euclidienne de $\mathrm{P}_\mathrm{A} \circ \mathrm{P}$ par π_J.

On cherche $\mathrm{P}_\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$. On calcule $\mathrm{P}_\mathrm{A} \circ \mathrm{P}$ que l'on réduit modulo $\mathrm{X}^n - 1$: il suffit pour cela de réduire les puissances de X modulo n. On identifie alors les coefficients du polynôme obtenu avec ceux de Q ce qui fournit un système de n équations à n inconnues permettant de calculer les a_k.

Si $\mathrm{A} = \mathrm{C}(1, 1, 0)$, on a donc $\mathrm{P} = 1 + \mathrm{X}$, $\mathrm{Q} = 1 + \mathrm{X}^2$ et $\pi_\mathrm{J} = \mathrm{X}^3 - 1$. On pose $\mathrm{P}_\mathrm{A} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$. On a alors

$$\mathrm{P}_\mathrm{A} \circ \mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + (2a + b)\mathrm{X} + a + b + c$$

Ce polynôme est déjà réduit modulo $\mathrm{X}^3 - 1$. L'égalité $\mathrm{P}_\mathrm{A} \circ \mathrm{P} = \mathrm{Q}$ donne $a = 1$, $b = -2$ et $c = 2$. Ainsi $\mathrm{P}_\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 2$.

18 On pose $\Delta = (a_1 - 2)^2 - 4a_0a_2$.

Supposons qu'un tel entier n et une telle matrice A existent. Si χ_A était scindé dans $\mathbb{R}$, alors A serait trigonalisable dans $\mathbb{R}$ et donc A serait symétrique d'après la question **2.c**. On aurait donc $\mathrm{P}_\mathrm{A} = \mathrm{X}$ ou P_A constant (si A est scalaire), ce qui contredit le fait que $\deg \mathrm{P}_\mathrm{A} = 2$. Ainsi A possède une valeur propre complexe non réelle $a + ib$ ($b \neq 0$). On sait alots d'après la question **16.c** que $\mathrm{P}(a + ib) = a - ib$. En identifiant parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\begin{cases} a_0 + a_1 a + a_2 a^2 - a_2 b^2 = a \\ a_1 b + 2a_2 ab = -b \end{cases}$$

La deuxième équation fournit $a = -\dfrac{a_1 + 1}{2a_2}$. En reportant dans la première, on obtient $b^2 = \dfrac{4 - \Delta}{a^2}$. Or $b^2 > 0$ donc $\Delta < 4$. De plus, ce qui précède montre que les seules valeurs propres complexes de A sont $a \pm ib$ avec $a = -\dfrac{a_1 + 1}{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{4 - \Delta}}{2a_2}$. Le polynôme $\mathrm{Q} = -\mathrm{X} + 2a$ échange alors ces deux valeurs propres complexes. Si A ne possédait pas de valeurs propres réelles, on aurait $\mathrm{Q}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^\top$ d'après la question **16.c**. Ceci est impossible par minimalité du degré de P_A. Ainsi A possède une valeur propre réelle. La même question **16.c** montre alors que $\mathrm{P} - \mathrm{X}$ admet une racine réelle (la valeur propre en question). On en déduit que le discriminant de $\mathrm{P} - \mathrm{X}$ est positif i.e. $\Delta \geq 0$.

Supposons que $\Delta \in [0, 4[$. Alors $\mathrm{P} - \mathrm{X}$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta \geq 0$. Il admet donc au moins une solution réelle λ. Par ailleurs en posant $a = -\dfrac{a_1 + 1}{2a_2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{4 - \Delta}}{2a_2} \neq 0$, on vérifie que $\mathrm{P}(a \pm ib) = a \mp ib$. D'après la question **16.c**, on a donc $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^\top$ en posant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$. Comme $b \neq 0$, A possède trois valeurs propres distinctes λ, $a + ib$ et $a - ib$. On en déduit que $\deg \pi_\mathrm{A} = 3$. Ainsi $\deg \mathrm{P} < \deg \pi_\mathrm{A}$ puis $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\mathrm{A}$.