Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 **1.a** Puisque $x \in]-1,1[$, $\lim_{n\to+\infty} 1-x^n = 1$. Ainsi $1-x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

1.b Soit $x \in]-1,1[$. D'après la question précédente, $\frac{a_nx^n}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_nx^n$. Par conséquent, $\left|\frac{a_nx^n}{1-x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_nx^n|$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$ est 1 donc $\sum a_nx^n$ converge absolument i.e. la série à termes positifs $\sum |a_nx^n|$ converge. D'après l'équivalent précédent, $\sum \left|\frac{a_nx^n}{1-x^n}\right|$ converge i.e. $\sum \frac{a_nx^n}{1-x^n}$ converge absolument.

1.c On peut par exemple prendre $a_n = \frac{1}{n^2}$ et $x=2$. Alors

$$\frac{a_nx^n}{1-x^n} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{2^n}{1-2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum \frac{a_nx^n}{1-x^n}$ converge également.

2 Soit $b \in [0,1]$. Alors

$$\forall x \in [-b,b],\ |a_nx^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n|b^n$$

et

$$\forall x \in [-b,b],\ |1-x^n| \geq 1-|x^n| = 1-|x|^n \geq 1-b^n > 0$$

On en déduit que

$$\forall x \in [-b,b], \left|\frac{a_nx^n}{1-x^n}\right| \leq \frac{|a_n|b^n}{1-b^n}$$

ou encore, en posant $f_n : x \mapsto \frac{a_nx^n}{1-x^n}$,

$$\|f_n\|_{\infty,[-b,b]} \leq \frac{|a_n|b^n}{1-b^n}$$

Or $\frac{|a_n|b^n}{1-b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n|b^n$ et la série $\sum a_nb^n$ converge absolument puisque $0 \leq b < 1$. Ainsi $\sum |a_n|b^n$ converge puis $\sum \frac{|a_n|b^n}{1-b^n}$ converge et enfin, $\sum \|f_n\|_{\infty,[-b,b]}$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-b,b]$.

3 **3.a** Puisque les f_n sont continues et que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$, $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]-1,1[$.

3.b Les fonctions f_n sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $\sum f_n$ converge uniformément et donc simplement vers f sur $]-1,1[$. Il reste uniquement à montrer que $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$. Pour conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$. Comme précédemment, on va montrer la convergence normale sur tout segment $[-b,b]$ avec $0 \leq b < 1$. Fixons $b \in [0,1[$. Remarquons que

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_n'(x) = \frac{na_nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

On montre alors que
$$\|f_n'\|_{\infty,[-b,b]} \leq \frac{n|a_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$$
De plus, $\dfrac{n|a_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n|a_n|b^{n-1}$. Or la série entière $\sum a_nx^n$ et sa série dérivée $\sum na_nx^{n-1}$ ont même rayon de convergence, à savoir 1. Par conséquent la série $\sum na_nb^{n-1}$ converge absolument et on en déduit comme précédemment la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[-b,b]$.
On peut alors conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et que
$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{na_nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$
Notamment, $f'(0) = a_1$.

4 **4.a** Il s'agit du théorème de sommation par paquets. La famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathrm{A}}$ étant supposé sommable, il suffit de vérifier que les I_n forment une partition de A i.e. $\mathrm{A} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{I}_n$. S'il existe $(k,p)\in \mathrm{I}_n\cap\mathrm{I}_m$, alors $n=m=kp$ et donc $\mathrm{I}_n=\mathrm{I}_m$. Les I_n sont donc disjoints deux à deux. Par ailleurs, $(k,p)\in\mathrm{I}_{kp}$ donc $\mathrm{A} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{I}_n$.

4.b Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la série géométrique $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} |a_nx^{np}| = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} |a_n||x^n|^p$ converge et
$$\sum_{p=1}^{+\infty} |a_nx^{np}| = \frac{|a_n||x|^n}{1-|x|^n}$$
Or on a vu que pour tout $t\in]-1,1[$, la série $\sum \dfrac{a_nt^n}{1-t^n}$ convergeait absolument donc, en prenant $t=|x|$, la série $\sum \dfrac{|a_n||x|^n}{1-|x|^n}$ converge. On en déduit la sommabilité de la famille $(a_nx^{np})_{(n,p)\in\mathrm{A}}$.

4.c On applique la question **4.a**.
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_nx^{np}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in\mathrm{I}_n} a_kx^{kp}\right)$$
Comme précédemment, $\sum_{p=1}^{+\infty} a_nx^{np} = \dfrac{a_nx^n}{1-x^n}$ (série géométrique) et
$$\sum_{(k,p)\in\mathrm{I}_n} a_kx^{kp} = \left(\sum_{(k,p)\in\mathrm{I}_n} a_k\right)x^n = \left(\sum_{d|n} a_d\right)x^n = b_nx^n$$
On en déduit bien que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_nx^n$$

5 Dans cette question,
$$b_n = \sum_{d|n} a_d = \sum_{d|n} 1 = d_n$$
donc
$$\forall x\in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_nx^n$$

6 **6.a** On rappelle que
$$\varphi(n) = \operatorname{card}\{k\in[\![1,n]\!],\ k\wedge n = 1\}$$
donc $1\leq\varphi(n)\leq n$. Notons R le rayon de convergence de la série $\sum\varphi(n)x^n$. Puisque $\varphi(n)\geq 1$ et que le rayon de convergence de $\sum z^n$ vaut 1, $\mathrm{R}\leq 1$. Mais $\varphi(n)\leq n$ et le rayon de convergence de $\sum nz^n$ vaut également 1, donc $\mathrm{R}\geq 1$. Finalement, $\mathrm{R}=1$.

6.b On propose les fonctions suivantes.

```
def pgcd(a,b):
    return a if b==0 else pgcd(b,a%b)

def indicatrice(n):
    return len([k for k in range(n) if pgcd(k,n)==1])

def somme(n):
    return sum(indicatrice(d) for d in range(1,n+1) if n%d==0)
```

On teste

```
>>> [somme(n) for n in range(1,13)]
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]
```

6.c Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Ensuite

$$\begin{aligned}\varphi(1)&=\operatorname{card}\{1\}=1\\ \varphi(2)&=\operatorname{card}\{1\}=1\\ \varphi(3)&=\operatorname{card}\{1,2\}=2\\ \varphi(4)&=\operatorname{card}\{1,3\}=2\\ \varphi(6)&=\operatorname{card}\{1,5\}=2\\ \varphi(12)&=\operatorname{card}\{1,5,7,11\}=4\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{d\mid 12}\varphi(d)=\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(6)+\varphi(12)=12$$

6.d Dans cette question

$$b_n=\sum_{d\mid n}a_d=\sum_{d\mid n}\varphi(d)=n$$

Ainsi

$$\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$$

Or on sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ donc, en dérivant, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$. Finalement,

$$\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$\boxed{7}$ On sait que

$$\forall x\in]-1,1[,\ -\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n}$$

Par ailleurs, la série $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ converge en vertu du crirère spécial des séries alternées (la suite $(1/n)$ est décroissante de limite nulle) donc, d'après le théorème de convergence radiale d'Abel,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\lim_{x\to1}-\ln(1+x)=-\ln 2$$

$\boxed{8}$ Tout d'abord, pour $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\frac{f(x)}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_nx^{n-1}}{1-x^n}$$

Fixons $b\in[0,1[$. On pose ici $f_n : x\mapsto\dfrac{a_nx^{n-1}}{1-x^n}$ et on montre comme à la question **2** que $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-b,b]$. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to0}f_n(x)=\begin{cases}a_1&\text{si } n=1\\0&\text{si } n\geq2\end{cases}$, on obtient par le théorème de la double limite, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a_1$. Par conséquent, $f(x)\underset{x\to0}{\sim}a_1x=-x$. Comme $f(0)=0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}\underset{x\to0}{\longrightarrow}a_1=-1$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1 = -1$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Tout d'abord, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n (1-x)}{(1-x^n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$$

Posons cette fois-ci,

$$f_n : x \mapsto \frac{a_n x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k} = \frac{(-1)^n x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Soit $b \in]0,1[$. Il suffit donc de montrer la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1[$ pour conclure à l'aide du théorème de la double limite. Tout d'abord, $\sum f_n$ converge simplement sur $[b,1[$ et comme pour $x \in [b,1[$, la suite de terme général $\dfrac{x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$ est décroissante (numérateur décroissant et dénominateur croissant), on a d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in [b,1[, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \frac{x^{n+1}}{\sum_{k=0}^{n} x^k} \leq \frac{1}{(n+1)b}$$

On en déduit que le reste de la série $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[b,1[$ puis que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[b,1[$.. D'après le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 1} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \ln 2$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{\ln 2}{1-x}$$

Problème 2

1 **1.a** ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$ donc ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.b Si l'un des a_i est nul, l'inégalité est triviale. Sinon, par concavité de ln,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(a_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

On obtient alors l'inégalité voulue par croissance de exp.

2 **2.a** Soit $s \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de s.
Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top\mathrm{SP}$ soit diagonale.

2.b On calcule $\chi_\mathrm{S} = \mathrm{X}^2$. Ainsi $\mathrm{Sp(S)} = \{0\}$. Si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle. S n'est donc pas diagonalisable.

3 **3.a** Comme β est une base orthonormée, $x = \sum_{i=1}^{n}\langle x \mid \varepsilon_i\rangle\varepsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle x \mid \varepsilon_i\rangle\varepsilon_i$. Comme β est orthonormée,

$$\mathrm{R}_s(x) = \langle s(x) \mid x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2$$

3.b Soit $x \in \mathrm{S}(0,1)$. Alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2 = 1$. Comme $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_1\langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_n\langle x \mid \varepsilon_i\rangle^2$$

ou encore

$$\lambda_1 \leq \mathrm{R}_s(x) \leq \lambda_n$$

4 Notons s l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base β est S. On sait que $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que β est orthonormée donc $s \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. De plus, $\mathrm{Sp}(s) = \mathrm{Sp(S)} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.
Comme β est orthonormée, $s_{i,j} = \langle s(\varepsilon_j) \mid \varepsilon_i\rangle$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Comme la base β est normée, $\varepsilon_i \in \mathrm{S}(0,1)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. D'après la question précédente, $\mathrm{R}_s(\varepsilon_i) = \langle s(\varepsilon_i) \mid \varepsilon_i\rangle \in [\lambda_1, \lambda_n]$ ou encore

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n$$

5 L'application $\varphi : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M} - \mathrm{I}_n$ est polynomiale en les coefficients de M donc continue.
On peut aussi remarquer que, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, l'application linéaire $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application bilinéaire $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ sont continues. Ainsi l'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ est continue comme composée des applications continues $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{M}^\top, \mathrm{M})$ et $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{I}_n$ est constante donc continue. Par différence, φ est continue.

6 On sait que les colonnes de A sont toutes de norme 1 i.e.

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2 = 1$$

Comme les $a_{i,j}^2$ sont positifs, on en déduit que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ |a_{i,j}| \leq 1$$

7 Le singleton $\{0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
D'après la question précédente, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact car fermé et borné.

8 **8.a** D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{S} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\top = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$. Par propriété de la trace,

$$\mathrm{T(A)} = \mathrm{tr(AS)} = \mathrm{tr}(\mathrm{AP}\Delta\mathrm{P}^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\Delta)$$

Comme $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

8.b T est une forme linéaire sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi T est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, T admet un maximum t sur $O_n(\mathbb{R})$.

8.c Si on note $B = (b_{i,j})$,

$$T(A) = \operatorname{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i}\lambda_i$$

Mais comme B est orthogonale, $b_{i,i} \leq 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Enfin, les λ_i sont positifs car $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc

$$T(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr}(S)$$

Ainsi tr(S) est un majorant de T sur $O_n(\mathbb{R})$. De plus, $T(I_n) = \operatorname{tr}(S)$ et $I_n \in O_n(\mathbb{R})$ donc $t = \operatorname{tr}(S)$.

9 Comme S est diagonalisable, $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\operatorname{tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Comme les λ_i sont positifs, d'après la question **1.b**,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ou encore

$$\det(S)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\operatorname{tr}(S)$$

Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(S)\right)^n$$

10 Tout d'abord,

$$S_\alpha^\top = D^\top S^\top D = D^\top SD = S_\alpha$$

car S est symétrique. Ainsi S_α est également symétrique.
Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top S_\alpha X = (DX)^\top S(DX) \geq 0$$

car $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On en déduit que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Enfin,

$$\operatorname{tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}$$

11 Par propriété du déterminant

$$\det(S_\alpha) = \det(S)\det(D)^2 = \det(S)\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = \frac{\det(S)}{\prod_{i=1}^{n} s_{i,i}}$$

La question précédente montre que $\operatorname{tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i} = n$. On applique l'inégalité de la question **9** à S_α et on obtient

$$\frac{\det(S)}{\prod_{i=1}^{n} s_{i,i}} \leq 1$$

ou encore

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$$

12 Comme $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\operatorname{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ et les coefficients diagonaux de S sont positifs d'après la question **4**. Les coefficients diagonaux de S_ε sont alors strictement positifs puisque $\varepsilon > 0$. On peut alors appliquer la question précédente à S_ε.

$$\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon)$$

Comme S_ε est encore diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1 + \varepsilon, \dots, \lambda_n + \varepsilon$, ceci équivaut à

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i + \varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon)$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient bien par passage à la limite

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$$

13 On vérifie aisément que B est symétrique car A l'est. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. De plus, $B = \Omega^\top A \Omega = \Omega^{-1} A \Omega$ car Ω est orthogonale. Ainsi B est semblable à A de sorte que $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On sait que $\det(\Omega) = 1$ car $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ donc, par propriété du déterminant,

$$\det(B) = \det(\Omega)^2 \det(A) = 1$$

car $A \in \mathcal{U}$. Ainsi $B \in \mathcal{U}$.
Enfin, par propriété de la trace,

$$\mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(A\Omega\Delta\Omega^\top) = \mathrm{tr}(\Omega^\top A \Omega \Delta) = \mathrm{tr}(B\Delta)$$

14 La question précédente montre l'inclusion $\{\mathrm{tr}(AS),\ A \in \mathcal{U}\} \subset \{\mathrm{tr}(B\Delta),\ B \in \mathcal{U}\}$.
Inversement, si on se donne $B \in \mathcal{U}$ et si l'on pose $A = \Omega B \Omega^\top$, on vérifie que $A \in \mathcal{U}$ et que $\mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(B\Delta)$, ce qui donne l'inclusion réciproque.
Par double inclusion, $\{\mathrm{tr}(AS),\ A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{tr}(B\Delta),\ B \in \mathcal{U}\}$.
Comme $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. D'après la question **4**, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_{i,i} \geq \min \mathrm{Sp}(B) > 0$ car $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\forall B \in \mathcal{U},\ \mathrm{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} > 0$$

L'ensemble $\{\mathrm{tr}(AS),\ A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{tr}(B\Delta),\ B \in \mathcal{U}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée : il addmet donc une borne inférieure.

15 On a montré à la question précédente que

$$\forall B \in \mathcal{U},\ \mathrm{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i}$$

et on a vu que les $\lambda_i b_{i,i}$ étaient positifs. On peut donc appliquer la question **1.b** pour affirmer que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \right)^{1/n}$$

ou encore

$$\mathrm{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \left(\prod_{i=1}^n b_{i,i} \right)^{1/n}$$

16 Comme $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on peut appliquer l'inégalité d'Hadamard :

$$\prod_{i=1}^n b_{i,i} \geq \det(B) = 1$$

puisque $B \in \mathcal{U}$. En combinant avec l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\mathrm{tr}(B\Delta) \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} = n \det(S)^{1/n}$$

17 Il est clair que $D \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus,

$$\det(D) = \prod_{k=1}^n \mu_k = \frac{\det(S)}{\prod_{k=1}^n \lambda_k} = 1$$

donc $D \in \mathcal{U}$. Enfin,

$$\mathrm{tr}(D\Delta) = \sum_{k=1}^n \mu_k \lambda_k = n \det(S)^{1/n}$$

On en déduit que $m = n \det(S)^{1/n}$ (cette borne inférieure est en fait un minimum).