

Structure de groupe

Exercice 1 ★★

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On pose pour tous éléments (x, y) et (x', y') de G :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur G .
2. Vérifier que $(G, *)$ est un groupe. Est-il commutatif?
3. Donner une expression de $(x, y)^{*n}$.

Exercice 2 ★★

Soit $G =]-1, 1[$. On pose pour tous éléments x et y de G :

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur G .
2. Vérifier que $(G, *)$ est un groupe. Est-il commutatif?
3. Donner une expression de x^{*n} .

Exercice 3 ★★

Soit G un groupe d'élément neutre e tel que $\forall x \in G, x^2 = e$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 4 ★

On munit \mathbb{R} de la loi interne $*$ définie par : $\forall a, b \in \mathbb{R}, a * b = a + b + ab$. $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?

Exercice 5 ★

Transport de structures

Soient $(G, *)$ un groupe et H un ensemble. On suppose qu'il existe une bijection f de G sur H . On définit la loi $.$ sur H de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in H^2, x.y = f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y))$$

Montrer que $(H, .)$ est un groupe.

Exercice 6 ★

Transport de structures

Soient $(G, *)$ un groupe et $(H, .)$ un ensemble muni d'une loi interne. On suppose qu'il existe une surjection de G sur H vérifiant

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x * y) = f(x).f(y)$$

Montrer que $(H, .)$ est un groupe. Que peut-on dire de f ?

Exercice 7 ★

Soit G un groupe. On définit une relation binaire \sim sur G par

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim y \iff \exists g \in G, y = g^{-1}xg$$

Montrer que \sim est une relation d'équivalence.

Exercice 8 ★

Soit H un sous-groupe d'un groupe G . On définit trois relations binaires \sim, \sim_g, \sim_d sur G de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim y \iff \exists h \in H, y = h^{-1}xh$$

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim_g y \iff \exists h \in H, y = hx$$

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim_d y \iff \exists h \in H, y = xh$$

Montrer que \sim, \sim_g, \sim_d sont des relations d'équivalence sur G .

Exercice 9 ★★

On pose $G =]-1, 1[$.

1. Montrer que th induit une bijection de \mathbb{R} sur G .
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\text{th}(a + b) = \frac{\text{th}(a) + \text{th}(b)}{1 + \text{th}(a)\text{th}(b)}$.
3. Pour $(x, y) \in G^2$, on pose $x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$. A l'aide des questions précédentes, montrer que (G, \star) est un groupe commutatif.
4. Soit $x \in G$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^{\star n} = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}$.

Sous-groupes**Exercice 10 ★****Stabilisateur**

Soient E un ensemble et $x \in E$. On pose

$$S(x) = \{\sigma \in S(E), \sigma(x) = x\}$$

Montrer que $S(x)$ est un sous-groupe de $(S(E), \circ)$.

Exercice 11 ★★

Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G .

1. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G .
2. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 12 ★**Centre d'un groupe**

Soit G un groupe. On définit le centre de G par

$$Z(G) = \{a \in G, \forall x \in G, ax = xa\}$$

i.e. l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G . Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G .

Exercice 13 ★★★**Sous-groupes de \mathbb{R}**

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On suppose G non trivial i.e. $G \neq \{0\}$.

1. Question préliminaire : soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\alpha \leq \beta < (n+1)\alpha$.
2. Justifier que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure que l'on notera a .
3. On suppose que $a > 0$.
 - a. On suppose que $a \notin G$. Justifier l'existence de deux éléments distincts x et y de G appartenant à l'intervalle $]a, 2a[$.
 - b. Aboutir à une contradiction et en déduire que $a \in G$.
 - c. En déduire que $a\mathbb{Z} \subset G$.
 - d. Soit $z \in G$. En utilisant la question 1, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $z = na$.
 - e. En déduire que $G = a\mathbb{Z}$.
4. On suppose que $a = 0$.
 - a. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la question 1, montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $|g - t| < \varepsilon$.
 - b. En déduire que G est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 14 ★

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G . On définit une relation binaire \sim sur G par

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim y \iff \exists h \in H, y = xh$$

Montrer que \sim est une relation d'équivalence.

Exercice 15 ★★

Dans cet exercice, on pourra identifier le plan à \mathbb{C} via un repère orthonormé. On pourra en particulier identifier une transformation du plan à une application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

1. On note G l'ensemble des translations et des similitudes directes du plan. Montrer que G muni de la loi de composition est un groupe.
2. On note H l'ensemble des translations et des rotations du plan. Montrer que H est un sous-groupe de G .

Morphismes

Exercice 16 ★

Groupes et complexes

On rappelle que $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}^*, \times) et (\mathbb{C}^*, \times) sont des groupes.

On note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

1. Montrer que \mathbb{U} est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que \mathbb{U}_n est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z^n \end{cases}$.
 - a. Montrer que f est un endomorphisme de (\mathbb{C}^*, \times) .
 - b. En considérant le noyau de f , retrouver le résultat de la question 2.
 - c. f est-il injectif?
 - d. Déterminer l'image de f . f est-il surjectif?

4. On pose $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{cases}$.

- a. Montrer que g est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe (\mathbb{C}^*, \times) .
- b. Déterminer le noyau de g . g est-il injectif?
- c. En considérant l'image de g , retrouver le résultat de la question 1.
- d. g est-il surjectif?

5. On pose $h : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ z & \longmapsto & |z| \end{cases}$.

- a. Montrer que h est un morphisme du groupe (\mathbb{C}^*, \times) dans le groupe (\mathbb{R}^*, \times) .
- b. En considérant le noyau de h , retrouver le résultat de la question 1.
- c. h est-il injectif?
- d. Déterminer l'image de h . h est-il surjectif?

Exercice 17 ★★

Montrer que les endomorphismes de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ continus sont les homothéties i.e. les applications $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 18 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $f_n : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ p & \longmapsto & e^{2i\pi n p \alpha} \end{cases}$.

1. Montrer que f_n est un morphisme du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ dans le groupe (\mathbb{C}^*, \times) .
2. Montrer que $\text{Im } f_n \subset \mathbb{U}$.
3. En considérant le noyau de f_n , montrer que f_n est injective si et seulement si $\alpha \notin \mathbb{Q}$.
4. A partir de maintenant, on suppose que $\alpha \in \mathbb{Q}$. On écrit α sous forme de fraction irréductible, c'est-à-dire sous la forme $\alpha = \frac{r}{s}$ avec $r \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{N}^*$ tels que $r \wedge s = 1$.
 - a. Montrer que $\text{Im } f_1 \subset \mathbb{U}_s$.
 - b. En écrivant une relation de Bézout entre r et s , montrer que $e^{\frac{2i\pi}{s}} \in \text{Im } f_1$. En déduire que $\mathbb{U}_s \subset \text{Im } f_1$.
 - c. Montrer que $\text{Ker } f_1 = s\mathbb{Z}$.
5. On pose $m = \frac{s}{n \wedge s}$.
 - a. Justifier que m est entier.
 - b. Montrer que $nr \wedge s = n \wedge s$.
 - c. Montrer que $\text{Im } f_n \subset \mathbb{U}_m$.
 - d. En écrivant une relation de Bézout entre nr et s , montrer que $e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \text{Im } f_n$. En déduire que $\mathbb{U}_m \subset \text{Im } f_n$.
 - e. Montrer que $\text{Ker } f_n = m\mathbb{Z}$.

Exercice 19 ★★★★★

X MP 2010

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les morphismes de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 20 ★★**Automorphismes intérieurs**

Soit G un groupe. Étant donné un élément a de G on définit l'application :

$$\varphi_a : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto axa^{-1} \end{cases}$$

1. Soit $a \in G$. Montrer que φ_a est un automorphisme de G .
2. On pose $\mathfrak{I}(G) = \{\varphi_a, a \in G\}$. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{I}(G)$ est un sous-groupe de $(\text{Aut}(G), \circ)$.
3. Montrer que $\varphi : \begin{cases} G & \longrightarrow \text{Aut}(G) \\ a & \longmapsto \varphi_a \end{cases}$ est un morphisme de groupes.

Exercice 21 ★★

Soit G un groupe. Montrer que $f : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto x^{-1} \end{cases}$ est un automorphisme de G si et seulement si G est commutatif.

Exercice 22 ★★

Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Ordre**Exercice 23 ★★★****ENS MP 2019**

Soit G un groupe. Montrer que G est fini si et seulement si l'ensemble des sous-groupes de G est fini.

Exercice 24 ★★

Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

Exercice 25 ★★★

Soit G un groupe cyclique d'ordre n . Montrer que pour tout diviseur d de n , il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d .

Exercice 26 ★★★**Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit G un groupe fini. On suppose que tous les éléments de G sont d'ordre au plus 2. Que peut-on dire du cardinal de G ?

Exercice 27 ★★

Montrer que tout groupe d'ordre premier est cyclique.

Exercice 28 ★★★**Ordre d'un produit**

Soient x et y deux éléments d'un groupe G d'ordres respectifs p et q . On suppose que x et y commutent et que $p \wedge q = 1$. Montrer que l'ordre de xy est pq .

Exercice 29 ★★★

Soit G un groupe et E l'ensemble des éléments d'ordre fini de G . Montrer que si E est fini, alors E est un groupe.

Exercice 30 ★★★

Soit G un groupe ayant un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

Exercice 31 ★★

Soit G un groupe. Montrer que $f : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto x^{-1} \end{cases}$ est un automorphisme de G si et seulement si G est commutatif.