Devoir surveillé n°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – E3A MP 2008

Questions de cours et exemples

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1 Donner la définition d'un polynôme annulateur de f.

2 Quelle est la structure de l'ensemble J_f des polynômes annulateurs de f ?

3 Donner la définition du polynôme minimal de f que l'on notera π_f.

4 Prouver l'existence de π_f.

5 **Un premier exemple.**
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice canoniquement associée :

$$M = (m_{i,j}) \text{ où } \forall (i,j) \in \{1,2,3,4\}^2,\ m_{i,j} = \frac{1}{4}(1 + (-1)^{i+j})$$

5.a Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

5.b Déterminer π_f.

6 **Un second exemple.**

6.a Chercher les solutions à valeurs réelles des équations différentielles :

$$y'' + y = \text{ch}(x) \qquad \text{et} \qquad y'' + y = \text{sh}(x)$$

où ch et sh désignent respectivement les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

6.b On considère l'équation différentielle (H_1) : $y^{(4)} = y$.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que f est solution de (H_1) si et seulement si la fonction $g = f'' + f$ est solution d'une équation différentielle du second ordre (H_2) que l'on déterminera.

6.c Résoudre l'équation (H_2).

6.d En déduire les solutions de (H_1).

6.e On note alors E le sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles engendré par $(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$.

6.e.i Quelle est la dimension de E ?

6.e.ii Justifier que la dérivation induit sur E un endomorphisme δ.

6.e.iii Déterminer le polynôme minimal π_δ de δ.

Problème

Dans tout le problème, $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E munie de ses opérations usuelles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n sera noté $\mathrm{E}_n = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
On rappelle que si f est un endomorphisme de E, $f^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ f^m = f \circ f^{m-1}$$

Lorsque f est un endomorphisme de E_n, on note χ_f son polynôme caractéristique.
Soient $u : \mathrm{P} \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{P}'$ et $v : \mathrm{P} \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$.

Partie I – Quelques propriétés des endomorphismes u et v

7 Rappeler la dimension de E_n. En donner une base usuelle.

8 Montrer que u et v sont des endomorphismes de E qui laissent stable E_n.
On note alors u_n et v_n les endomorphismes de E_n induits par u et v.

9 Ecrire les matrices U_n et V_n de u_n et v_n dans la base canonique de E_n.

10 Préciser le noyau et l'image de chacun de ces endomorphismes.

11 Les endomorphismes u_n et v_n commutent-ils ?

12 Quel est le polynôme caractéristique de u_n ? u_n est-il diagonalisable ?

13 Quel est le polynôme caractéristique de v_n ? v_n est-il diagonalisable ?

14 On note $w_n = v_n - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n}$ et on pose :

$$\mathrm{Q}_0 = 1 \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Q}_k = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(\mathrm{X} - j)$$

14.a Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (\mathrm{Q}_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n.

14.b Déterminer $w_n(\mathrm{Q}_0)$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel α_k non nul tel que

$$w_n(\mathrm{Q}_k) = \alpha_k \mathrm{Q}_{k-1}$$

14.c Ecrire la matrice de W_n de w_n dans la base $\mathcal{B}$.

14.d Donner une base de $\mathrm{Ker}(w_n)$ ainsi que de $\mathrm{Im}(w_n)$.

14.e Calculer $w_n^j(\mathrm{Q}_k)$ pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

15 **Détermination des coordonnées d'un polynôme de E_n dans la base $\mathcal{B}$.**

15.a Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_n$. Justifier l'existence et l'unicité d'une famille de scalaires $(\beta_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} \beta_k \mathrm{Q}_k$$

15.b Calculer $w_n^j(\mathrm{P})(0)$ pour $j \in \mathbb{N}$.

15.c Exprimer alors les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

15.d Déterminer la base duale de la base $\mathcal{B}$.

15.e Calculer w_n^{n+1} et $w_n^n(\mathrm{Q}_n)$.

Partie II – Recherche de quelques polynômes minimaux

16 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_n)$. Justifier que π_f divise χ_f.

17 **Recherche de π_{u_n}.**

17.a Déterminer u_n^{n+1}.

17.b Calculer $u_n^n(\mathrm{X}^n)$.

17.c Conclure.

17.d De même, déterminer le polynôme minimal de w_n.

18 **Recherche de π_{v_n}.**

18.a Montrer qu'il existe $m \in [\![1, n+1]\!]$ tel que $\pi_{v_n} = (\mathrm{X}-1)^m$.

18.b Prouver que $m = n+1$.

19 **Polynômes annulateurs de u.**

Soit P un polynôme de degré n écrit $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{m} a_j \mathrm{X}^j$.

19.a Que sait-on de a_m ?

19.b On note r l'endomorphisme $\mathrm{P}(u)$. Déterminer $r(\mathrm{X}^m/m!)$.

19.c Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de u.

20 **Polynômes annulateurs de v.** Soit P un polynôme annulateur de v.

20.a Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{X}-1)^{n+1}$ divise P.

20.b Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de v.

21 Soit s l'endomorphisme qui à tout polynôme P associe le polynôme $\mathrm{P}(1-\mathrm{X})$.

21.a Vérifier que s est une symétrie de E.

21.b Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de s.

Partie III –

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel normé E_n. On rappelle que :

$$\exp(f) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^m}{m!}$$

22 Montrer que l'on a la relation $v_n = \exp(u_n)$.

23 On va montrer dans cette question que $u_n = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n})^m$.

23.a Prouver que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_n(\mathrm{Q}_k) = \sum_{m=0}^{k} u_n(\mathrm{Q}_m)\mathrm{Q}_{k-m}$$

On pourra utiliser la question **15.c** de la partie I.

23.b Calculer $u_n(\mathrm{Q}_m)(0)$ pour $m \in [\![0, n]\!]$.

23.c Conclure.