Devoir surveillé n°09

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – CCP MP 2019 Maths 1

Dans ce sujet, une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n x^n$ soit de rayon de convergence égal à 1.

I Propriétés

Soit une série de fonctions L_a : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$.

1 **1.a** Si $x \in]-1,1[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

1.b Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

1.c La série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1,1[$. Donner un exemple de suite (a_n) telle que la série L_a converge au moins en un x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1,1[$.

2 Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans l'intervalle $]-1,1[$.

3 On pose pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$.

3.a Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1,1[$.

3.b Démontrer ensuite que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-1,1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

4 **Expression sous forme de série entière.**
On note $\mathrm{A} = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

4.a Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathrm{A}}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in\mathrm{I}_n} u_{k,p}\right) \text{ où } \mathrm{I}_n = \{(k,p)\in\mathrm{A},\ kp=n\}$$

4.b Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p\in\mathrm{A})}$ est sommable.

4.c En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n \text{ où } b_n = \sum_{d\mid n} a_d$$

où la dernière somme porte sur les diviseurs positifs de n.

II Exemples

5 Dans cette question, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n. Exprimer, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

6 Dans cette question, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \varphi(n)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

6.a Justifier que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \varphi(n)x^n$ est de rayon de convergence égal à 1.

6.b Ecrire une fonction `pgcd(a,b)` d'arguments deux entiers naturels a et b et renvoyant le pgcd de a et b. En déduire une fonction `indicatrice(n)` d'argument un entier naturel non nul n et renvoyant $\varphi(n)$ puis une fonction `somme(n)` d'argument un entier naturel non nul n et renvoyant $\sum_{d|n} \varphi(d)$.

6.c On admet que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

6.d Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

7 Etablir à l'aide du développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$ la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

8 Dans cette question et la suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver alors le résultat de la question **3.b**.

9 Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim -\frac{\ln(2)}{1-x}$. On pourra remarquer que pour $x \in]0,1[$,

$$\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$$

Problème 2 – D'après CCP MP Maths2 2014

On note $\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée.
On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes auto-adjoints de E, $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs de E, et $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs de E.
De la même manière, on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III Préliminaires

$\boxed{1}$ **1.a** Montrer que ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.b En déduire que si $a_1, \dots, a_n$ sont des réels positifs,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$$

$\boxed{2}$ **2.a** Enoncer sans démonstration le théorème de réduction des endomorphismes auto-adjoints de l'espace euclidien E, ainsi que sa version relative aux matrices symétriques réelles.

2.b Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra considérer la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ Soit $s \in S(E)$ de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant : $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.
Soit $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $s(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.
Pour tout $x \in E$, on pose $R_s(x) = \langle s(x) \mid x \rangle$.

3.a Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β.

3.b En déduire l'inclusion $R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de E.

$\boxed{4}$ Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant. Exprimer $s_{i,j}$ comme un produit scalaire et montrer que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n$$

IV Un maximum sur $O_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{5}$ Démontrer que l'application $M \mapsto M^\top M - I_n$ est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{6}$ Justifier que si $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$, alors

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ |a_{i,j}| \leq 1$$

$\boxed{7}$ En déduire que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{8}$ Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A) = \operatorname{tr}(AS)$.

8.a Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que $T(A) = \operatorname{tr}(B\Delta)$.

8.b Démontrer que l'application T admet un maximum sur $O_n(\mathbb{R})$, que l'on notera t.

8.c Démontrer que, pour toute matrice $A \in O_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leq \operatorname{tr}(S)$, puis déterminer le réel t.

V Inégalité d'Hadamard

Soit $\mathrm{S} = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant.

9 Démontrer l'inégalité

$$\det(\mathrm{S}) \leq \left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(\mathrm{S})\right)^n \tag{$\star$}$$

10 Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\mathrm{S}_\alpha = \mathrm{D}^\top \mathrm{S} \mathrm{D}$. Démontrer que $\mathrm{S}_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\operatorname{tr}(\mathrm{S}_\alpha)$.

11 Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité ($\star$), démontrer que

$$\det(\mathrm{S}) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}$$

12 Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $\mathrm{S}_\varepsilon = \mathrm{S} + \varepsilon \mathrm{I}_n$. Démontrer que $\det(\mathrm{S}_\varepsilon) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i} \qquad \text{(inégalité d'Hadamard)}$$

VI Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées par ordre croissant et $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{S} = \Omega \Delta \Omega^\top$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

13 Démontrer que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{U}$, la matrice $\mathrm{B} = \Omega^\top \mathrm{A} \Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant

$$\operatorname{tr}(\mathrm{AS}) = \operatorname{tr}(\mathrm{B}\Delta)$$

14 Démontrer que $\{\operatorname{tr}(\mathrm{AS}),\ \mathrm{A} \in \mathcal{U}\} = \{\operatorname{tr}(\mathrm{B}\Delta),\ \mathrm{B} \in \mathcal{U}\}$, puis que ces deux ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m.

15 Démontrer que si $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_{i,j}) \in \mathcal{U}$:

$$\operatorname{tr}(\mathrm{B}\Delta) \geq n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}(b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}$$

16 En déduire que pour $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\operatorname{tr}(\mathrm{B}\Delta) \geq n(\det(\mathrm{S}))^{1/n}$.

17 Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}(\det(\mathrm{S}))^{1/n}$ et $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Déterminer le réel m.