

DEVOIR SURVEILLÉ N°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – E3A MP 2008

Questions de cours et exemples

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E .

- 1** Donner la définition d'un polynôme annulateur de f .
- 2** Quelle est la structure de l'ensemble J_f des polynômes annulateurs de f ?
- 3** Donner la définition du polynôme minimal de f que l'on notera π_f .
- 4** Prouver l'existence de π_f .

5 Un premier exemple.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 de matrice canoniquement associée :

$$M = (m_{i,j}) \text{ où } \forall (i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2, m_{i,j} = \frac{1}{4}(1 + (-1)^{i+j})$$

5.a Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

5.b Déterminer π_f .

6 Un second exemple.

6.a Chercher les solutions à valeurs réelles des équations différentielles :

$$y'' + y = \operatorname{ch}(x) \quad \text{et} \quad y'' + y = \operatorname{sh}(x)$$

où ch et sh désignent respectivement les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

6.b On considère l'équation différentielle $(H_1) : y^{(4)} = y$.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^4 sur \mathbb{R} .

Démontrer que f est solution de (H_1) si et seulement si la fonction $g = f'' + f$ est solution d'une équation différentielle du second ordre (H_2) que l'on déterminera.

6.c Résoudre l'équation (H_2) .

6.d En déduire les solutions de (H_1) .

6.e On note alors E le sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} à valeurs réelles engendré par $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$.

6.e.i Quelle est la dimension de E ?

6.e.ii Justifier que la dérivation induit sur E un endomorphisme δ .

6.e.iii Déterminer le polynôme minimal π_δ de δ .

Problème

Dans tout le problème, $E = \mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E munie de ses opérations usuelles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n sera noté $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

On rappelle que si f est un endomorphisme de E , $f^0 = \text{Id}_E$ et

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, f^m = f \circ f^{m-1}$$

Lorsque f est un endomorphisme de E_n , on note χ_f son polynôme caractéristique.

Soient $u : P \in E \mapsto P'$ et $v : P \in E \mapsto P(X+1)$.

Partie I – Quelques propriétés des endomorphismes u et v

- 7** Rappeler la dimension de E_n . En donner une base usuelle.
- 8** Montrer que u et v sont des endomorphismes de E qui laissent stable E_n .
On note alors u_n et v_n les endomorphismes de E_n induits par u et v .
- 9** Ecrire les matrices U_n et V_n de u_n et v_n dans la base canonique de E_n .
- 10** Préciser le noyau et l'image de chacun de ces endomorphismes.
- 11** Les endomorphismes u_n et v_n commutent-ils ?
- 12** Quel est le polynôme caractéristique de u_n ? u_n est-il diagonalisable ?
- 13** Quel est le polynôme caractéristique de v_n ? v_n est-il diagonalisable ?
- 14** On note $w_n = v_n - \text{Id}_{E_n}$ et on pose :

$$Q_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)$$

14.a Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n .

14.b Déterminer $w_n(Q_0)$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel α_k non nul tel que

$$w_n(Q_k) = \alpha_k Q_{k-1}$$

14.c Ecrire la matrice de W_n de w_n dans la base \mathcal{B} .

14.d Donner une base de $\text{Ker}(w_n)$ ainsi que de $\text{Im}(w_n)$.

14.e Calculer $w_n^j(Q_k)$ pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

15 **Détermination des coordonnées d'un polynôme de E_n dans la base \mathcal{B} .**

15.a Soit $P \in E_n$. Justifier l'existence et l'unicité d'une famille de scalaires $(\beta_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que

$$P = \sum_{k=0}^n \beta_k Q_k$$

15.b Calculer $w_n^j(P)(0)$ pour $j \in \mathbb{N}$.

15.c Exprimer alors les coordonnées de P dans la base \mathcal{B} .

15.d Déterminer la base duale de la base \mathcal{B} .

15.e Calculer w_n^{n+1} et $w_n^n(Q_n)$.

Partie II – Recherche de quelques polynômes minimaux

16 Soit $f \in \mathcal{L}(E_n)$. Justifier que π_f divise χ_f .

17 Recherche de π_{u_n} .

17.a Déterminer u_n^{n+1} .

17.b Calculer $u_n^n(X^n)$.

17.c Conclure.

17.d De même, déterminer le polynôme minimal de w_n .

18 Recherche de π_{v_n} .

18.a Montrer qu'il existe $m \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ tel que $\pi_{v_n} = (X-1)^m$.

18.b Prouver que $m = n+1$.

19 Polynômes annulateurs de u .

Soit P un polynôme de degré m écrit $P = \sum_{j=0}^m a_j X^j$.

19.a Que sait-on de a_m ?

19.b On note r l'endomorphisme $P(u)$. Déterminer $r(X^m/m!)$.

19.c Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de u .

20 Polynômes annulateurs de v . Soit P un polynôme annulateur de v .

20.a Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (X-1)^{n+1}$ divise P .

20.b Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de v .

21 Soit s l'endomorphisme qui à tout polynôme P associe le polynôme $P(1-X)$.

21.a Vérifier que s est une symétrie de E .

21.b Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de s .

Partie III –

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel normé E_n . On rappelle que :

$$\exp(f) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^m}{m!}$$

22 Montrer que l'on a la relation $v_n = \exp(u_n)$.

23 On va montrer dans cette question que $u_n = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - \text{Id}_{E_n})^m$.

23.a Prouver que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_n(Q_k) = \sum_{m=0}^k u_n(Q_m)(0) Q_{k-m}$$

On pourra utiliser la question **15.c** de la partie I.

23.b Calculer $u_n(Q_m)(0)$ pour $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

23.c Conclure.