PROBABILITES

Révisions de première année

Exercice 1

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 8 boules rouges. Quelle est la probabilité de la suite «blanc, blanc, rouge» si on tire successivement trois boules sans remise ?

Exercice 2

On considère une urne A contenant deux boules rouges et trois boules vertes et une urne B contenant trois boules rouges et deux boules vertes. On tire au hasard une boule dans l'urne A que l'on place dans l'urne B. On tire ensuite successivement et sans remise deux boules dans l'urne B. Quelle est la probabilité que la boulé tirée dans l'urne A soit verte sachant que les deux boules tirées dans l'urne B sont rouges ?

Exercice 3

On considère n urnes numérotées de 1 à n. L'urne numéro k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
2. On suppose qu'on a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne numéro k ?

Exercice 4 — Une chaîne de Markov

Un buveur impénitent décide d'essayer de ne plus boire. S'il ne boit pas un jour donné, la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain est de $0,4$. S'il succombe à la tentation un jour, alors le remords fait que la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain monte à $0,8$.

1. Quelle est la probabilité que ce buveur ne boive pas le $n^{\text{ème}}$ jour ?
2. Que se passe-t-il lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 5

On dispose d'un dé à 6 faces et d'une pièce de monnaie. Après avoir lancé n fois le dé, on lance la pièce autant de fois qu'on a obtenu le 6 avec le dé. On note S le nombre de 6 obtenus avec le dé et F le nombre de faces obtenues avec la pièce.

1. Quelle est la loi de S ?
2. Soit $s \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi de F conditionnée par l'événement $\mathrm{S} = s$.
3. Montrer que F suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{12}\right)$.

Exercice 6

Une famille à n enfants ($n \geq 2$). On note

- A l'événement «la famille a des enfants des deux sexes» ;
- B l'événement «la famille a au plus une fille».

Montrer que A et B sont des événements indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice 7

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Z).
2. En déduire la loi de Z.

Exercice 8

Soient n et N des entiers naturels tels que $2 \leq n \leq \mathrm{N}$.
On effectue un tirage simultané de n boules dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On note X et Y respectivement le plus grand et le plus petit numéro obtenu.

1. Question préliminaire : soient a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$. Montrer que
$$\sum_{k=a}^{b} \binom{k}{a} = \binom{b+1}{a+1}$$
2. Déterminer les lois de X et Y.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y). En déduire la loi de $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$.
4. Déterminer les espérances de X et Y.
5. Déterminer les variances de X et Y.
6. Déterminer la variance de $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$. En déduire la covariance du couple (X, Y).

Exercice 9

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})$.

Exercice 10 — ESCP 2013

Dans tout l'exercice, N désigne un entier naturel non nul.
Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1, \mathrm{N}]\!]$. On note T_n et Z_n les variables aléatoires définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathrm{T}_n = \sup(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_n) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Z}_n = \inf(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_n)$$

On pose $\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n + \mathrm{Z}_n - 1$.
On pose enfin pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(\mathrm{N}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n & \text{si } \mathrm{N} \geq 2 \\ 0 & \text{si } \mathrm{N} = 1 \end{cases}$$

1. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, \mathrm{N}]\!]$. Établir la relation suivante.
$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{P}(\mathrm{Y} > k)$$
2. **a.** Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n \leq k)$ pour tout $k \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$.
   b. En déduire la loi de T_n.
   c. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{T}_n)$ en fonction de N et $a_n(\mathrm{N})$.
3. **a.** Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n > k)$ pour tout $k \in [\![0, \mathrm{N}-1]\!]$.
   b. En déduire $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_n)$ en fonction de $a_n(\mathrm{N})$.
4. **a.** Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{T}_n)$.
   b. Déterminer $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n)$.

Exercice 11 ★★

Soient $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. On note M la matrice aléatoire $\left(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

1. Déterminer la loi de rg M.
2. Déterminer la loi de $\mathrm{tr}(\mathrm{M})$.

Exercice 12

On considère dans cette partie des entiers naturels non nuls n, u, d, t, b vérifiant $u+d+t = b$.
Une urne $\mathcal{U}$ contient b boules parmi lesquelles u boules portent le numéro 1, d le numéro 2 et t le numéro 3.
Une expérience consiste en n tirages successifs d'une boule de l'urne $\mathcal{U}$ *avec remise*. Les tirages sont supposés mutuellement indépendants.
A chaque tirage, toutes les boules de l'urne $\mathcal{U}$ ont la même probabilité d'être tirées.
L'univers Ω est l'ensemble $\{1, 2, 3\}^n$ et on note U (resp. D, T) la variable aléatoire définie sur Ω dont la valeur est le nombre de boules numérotées 1 (resp. 2, 3) tirées au cours de l'expérience.

1. Montrer que la variable aléatoire U suit une loi usuelle (à préciser). Donner son espérance et sa variance.
   Donner de même les lois des variables aléatoires D et T.
2. Les variables U et D sont-elles indépendantes ? Justifier.
3. Déterminer sans calcul la loi de la variable aléatoire $\mathrm{U} + \mathrm{D}$, son espérance et sa variance.
4. En déduire que la covariance du couple (U, D) est égale à $-\dfrac{nud}{b^2}$.

Exercice 13 **ESCP 2007**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.
On pose $\mathrm{Z} = |\mathrm{X} - \mathrm{Y}|$ et $\mathrm{T} = \inf(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

1. Déterminer l'espérance de Z.
2. En déduire l'espérance de T.
3. Calculer l'espérance de Z^2 en fonction de la variance de X.

Exercice 14

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer l'espérance de $\dfrac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)}$.

Exercice 15

On considère une urne contenant n boules numérotées. On procède à un tirage successif de n boules avec remise. On note X le nombre de numéros qui sont sortis au moins une fois pendant le tirage. Calculer l'espérance de X ainsi qu'un équivalent de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 16

Soit un entier $n \geq 2$. On munit le groupe symétrique S_n de la probabilité uniforme. On note X la variable aléatoire qui à une permutation associe son nombre de points fixes. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 17

On lance n fois une pièce de monnaie bien équilibrée. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer n pour que la fréquence d'apparition de «face» soit comprise entre $0,45$ et $0,55$ avec une probabilité au moins égale à $0,9$.

Dénombrabilité

Exercice 18 ★★★

Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 19 ★★★

On dit qu'un nombre complexe est un *entier algébrique* s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des entiers algébriques est dénombrable.

Exercice 20 ★

Soit A un ensemble. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) A est dénombrable ;

(ii) il existe une injection de A dans un ensemble dénombrable ;

(iii) il existe une surjection d'un ensemble dénombrable sur A.

Exercice 21 ★★ **Support d'une famille sommable**

Soit $(a_j)_{j\in J}$ une famille sommable de nombres complexes. On note $S = \{j \in J,\ a_j \neq 0\}$. Montrer que S est au plus dénombrable.

Généralités

Exercice 22 **Lemme de Borel-Cantelli et loi du zéro-un de Borel**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$ et $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

1. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ converge.

a. Montrer que $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

b. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 0$.

2. On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

a. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_k)\right)$$

b. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 23 **D'après ESCP 2006**

Des joueurs $J_1, \dots, J_n$ jouent successivement l'un après l'autre à un jeu indéterminé jusqu'à ce que l'un des joueurs gagnent (si aucun des joueurs n'a gagné lors du premier tour, on recommence un tour et ainsi de suite). On considère qu'à chaque fois que le joueur J_k joue, il a une probabilité $p_k > 0$ de gagner. On pose également $q_k = 1 - p_k$. On note G_k l'événement «le joueur J_k gagne».

1. Exprimer la probabilité de G_k en fonction de $q_1, \dots, q_n$ et p_k.

2. Montrer que le jeu se finit presque sûrement i.e. avec une probabilité 1.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le jeu soit équitable i.e. que chaque joueur ait une probabilité $1/n$ de gagner.

4. Déterminer le nombre moyen de coups joués lors d'une partie.

Exercice 24 ★★

Deux archers A_1 et A_2 sont en compétition : ils tirent alternativement (A_1 aux rangs impairs, A_2 aux rangs pairs), touchant la cible avec probabilité p_i ($i = 1, 2$), et la partie s'arrête dès que l'un des deux a atteint la cible.

1. Quelle est la probabilité que A_1 l'emporte au tour $2n + 1$?

2. Quelle est la probabilité que A_2 l'emporte au tour $2n + 2$?

3. En déduire les probabilités que A_1 (resp A_2) l'emporte, et celle que le jeu dure indéfiniment.

4. A quelle condition le jeu est-il équitable ? Est-ce le cas si $p_1 > 1/2$?

Probabilités conditionnelles

Exercice 25

On dispose initialement d'une fleur F_0 qui meurt à l'instant 1 en ayant deux descendances avec probabilité p, ou aucune. Chaque nouvelle fleur suit le même destin, les unes indépendamment des autres. On note D_n : «la lignée de F_0 est éteinte à l'instant n (ou avant)» et p_n sa probabilité.

1. Calculer p_0 et p_1.
2. Justifier que la suite (p_n) converge.
3. Prouver que $p_{n+1} = pp_n^2 + 1 - p$.
4. Déterminer la limite de (p_n).

Exercice 26

On lance une infinité de fois une pièce de monnaie et on gagne à chaque lancer un point si pile apparaît (avec probabilité p), deux points si c'est face (avec probabilité $q = 1 - p$). On s'intéresse à la probabilité g_n qu'on ait marqué n points exactement au cours du jeu. Prouver la relation $g_{n+2} = pg_{n+1} + qg_n$ et en déduire g_n en fonction de n.

Exercice 27 **Probabilité d'obtenir deux piles consécutifs**

On lance une infinité de fois une pièce donnant pile avec probabilité $p > 0$ et face avec probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles consécutifs au cours de ces lancers ?

Variables aléatoires

Exercice 28 **Mines-Ponts MP 2018**

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\mathbb{P}(X = k) = r \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^r \, dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que cette relation définit bien la loi d'une variable aléatoire.
2. Donner une condition sur r pour que l'espérance soit définie et la calculer.

Exercice 29 ★★★ **BECEAS MP 2019**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires réelles définies sur cet espace.
Montrer que $A = \left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0\right\}$ est un événement.

Exercice 30 **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés de 1 à 3. On effectue une série de tirages indépendants avec remise d'un jeton. On note :

- Y la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour avoir deux nombres différents ;
- Z la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour avoir les trois numéros.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer la loi de $Y - 1$.
3. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
4. Déterminer la loi du couple (Y, Z).

Exercice 31

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X = j, Y = k) = \frac{a(j+k)}{2^{j+k}}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Lois usuelles

Exercice 32 ★★ **CCINP (ou CCP) PC 2017**

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres p_1 et p_2. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 33 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soient X, Y, Z des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$. En déduire $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(Z > X + Y)$.

Exercice 34 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Une urne contient initialement une boule blanche. On effectue un ou plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée :

- si on obtient pile, on ajoute une boule noire et on lance à nouveau la pièce ;
- si on obtient face, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.

On note X le numéro du lancer auquel on arrête l'expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Exercice 35 ★★★★ **Centrale-Supélec MP 2021**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$.

1. Écrire explicitement les lois suivies par X et Y.
2. **a.** Déterminer la loi conjointe du couple (U, V) puis les lois de U et de V.
   b. Montrer que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes.
3. Réciproquement, on suppose que X et Y sont indépendantes de même loi, et que U et V sont indépendantes telles que
$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(\{U = n\} \cap \{V = m\}) \neq 0$$
   Montrer que X et Y suivent une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Exercice 36 **CCINP (ou CCP) MP 2018**

On cherche à obtenir toutes les pièces d'un puzzle de n pièces différentes. On achète chaque semaine une pièce emballée, chaque pièce étant équiprobable. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note Y_k le nombre d'achats à effectuer, sachant qu'on a eu une $(k-1)^{\text{ème}}$ pièce différente, avant d'avoir une $k^{\text{ème}}$ pièce qu'on n'a pas déjà eue.

1. **a.** Les variables aléatoires Y_k sont-elles mutuellement indépendantes ? Justifier que Y_1 peut s'écrire comme une constante simple.
   b. Donner la loi de Y_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$. Donner l'espérance, puis la variance de Y_k.
2. On note X le nombre d'achats à effectuer avant d'avoir le puzzle complet. Exprimer X en fonction des Y_k. Donner l'espérance de X en fonction de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
3. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de H_n. En déduire un équivalent quand $n \to +\infty$ de l'espérance de X.

Exercice 37

Soient X et Y deux variables aléatoires suivant des lois de Poisson telles que $X + Y$ suit une loi de Poisson.

1. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
2. X et Y sont-elles nécessairement indépendantes ?

Exercice 38 **C.C.E. Mines MP 2015**

On considère un péage composé de m guichets. On note N la variable aléatoire égale au nombre de voitures utilisant le péage en 1h. N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le choix du guichet se fait de manière aléatoire et indépendamment des autres voitures. On note X la variable aléatoire égale au nombre de voitures ayant pris le guichet n°1.

1. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X = k \mid N = n)$ pour $0 \leq k \leq n$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!}$.
3. Donner la loi de X.
4. Espérance et variance de X ?

Exercice 39 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = I_X$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Espérance et variance

Exercice 40

Soit X une variable suivant la loi géométrique de paramètre p. Déterminer l'espérance de $1/X$.

Exercice 41 ★★★★ **Centrale MP 2015**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements quelconques. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n)$ converge.

Pour X un ensemble, on note $\mathbb{1}_X$ la fonction indicatrice de X.

1. Soit $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{E_n}$ (on convient que $Z = \infty$ si la série diverge). Montrer que Z est une variable aléatoire. Prouver que Z est une variable aléatoire.
2. Soit
$$F = \{\omega \in \Omega,\ \omega \text{ appartient à un nombre fini de } E_n\}$$
Prouver que F est un événement et que $\mathbb{P}(F) = 1$.
3. Prouver que Z admet une espérance.

Exercice 42 ★★★

Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant «pile» avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois «pile». Soit X le nombre de «face» obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance finie et la calculer.
3. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi et l'espérance de Y.
4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 43 ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2018**

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois géométriques de paramètres p et q. Z est la variable aléatoire $\max(X, Y)$. Déterminez $\mathbb{E}(Z)$.

Fonctions génératrices

Exercice 44

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Déterminer la loi de $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Exercice 45 ★ — **Somme de variables binomiales indépendantes**

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exercice 46 ★★★ — **Formule de Wald**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la même loi que X.
On se donne une autre variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendante des variables aléatoires précédentes.
On pose $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$, c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = \sum_{k=0}^{N(\omega)} X_k(\omega)$$

1. Justifier que S est bien un variable aléatoire.
2. On note G_X, G_N et G_S les fonctions génératrices respectives de X, N et S. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $G_S(t) = G_N \circ G_X(t)$.
3. On suppose que les variables aléatoires X et N admettent des espérances finies. Montrer qu'il en est de même pour S et exprimer l'espérance de S en fonction de celles de N et X.
4. On suppose que les variables aléatoires X et N admettent des moments d'ordre deux. Montrer qu'il en est de même pour S et exprimer la variance de S en fonction des espérances et des variances de N et X.

Exercice 47 — **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2019**

On considère la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$.

1. Donner le rayon de convergence R de cette série.
2. Calculer sa somme $S(t)$ sur $]-R, R[$.
3. On se donne une variable aléatoire X telle que, $\forall t \in [-1, 1]$, $G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - **a.** Que vaut λ ?
   - **b.** Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Temps d'arrêt

Exercice 48 — **ENS Ulm MPI 2019**

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de «piles» soit égal au double du nombre de «faces». Quelle est la probabilité qu'on ne s'arrête jamais ?

Exercice 49 ★★ — **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire

$$T_r = \min\left(\left\{n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{n} X_i = r\right\} \bigcup \{+\infty\}\right)$$

1. Pour $r = 1$, reconnaître la loi de T_r.
2. Calculer $P(T_r = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que l'évènement $(T_r = +\infty)$ est négligeable.

Exercice 50 **Obtention de deux piles consécutifs**

On lance une infinité de fois une pièce donnant «pile» avec probabilité $\frac{2}{3}$ et «face» avec probabilité $\frac{1}{3}$. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs. On pose alors $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1. Calculer p_2 et p_3.
2. Justifier que $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$ pour tout entier $n \geq 2$.
3. Quelle valeur de p_1 doit-on choisir pour que la relation de récurrence précédente reste valide lorsque $n = 1$?
4. Calculer p_n pour tout entier $n \geq 1$.
5. Calculer l'espérance de X.

Exercice 51 ★★★ **Marche aléatoire**

On considère un point se déplaçant sur un axe. Au temps $n = 0$, il se trouve à l'origine. Il se déplace ensuite successivement d'une unité vers la droite avec une probabilité p et d'une unité vers la gauche avec une probabilité $1 - p$. On note S_n sa position après n déplacements.

1. Déterminer la loi de S_0, S_1 et S_2.
2. Déterminer de manière générale la loi de S_n.
3. Calculer la probabilité p_n de l'événement $\{S_n = 0\}$.
4. Justifier que $P : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$ est définie sur $]-1,1[$ et calculer $P(t)$ pour $t \in]-1,1[$.
5. On note T l'instant où le point retourne pour la première fois à l'origine (on convient que $T = +\infty$ si le point ne retourne jamais à l'origine) et on pose $q_n = \mathbb{P}(T = n)$. Justifier que $Q \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_n t^n$ est définie et continue sur $[-1, 1]$.
6. Montrer que $P(t) = 1 + P(t)Q(t)$ pour tout $t \in]-1,1[$.
7. En déduire la valeur de q_n.
8. Calculer la probabilité que le point retourne à l'origine.
9. T est-elle d'espérance finie ?

Exercice 52 ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2018**

1. Une urne contient n boules blanches et n boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément n boules de l'urne.

   a. Quel est le nombre de tirages possibles ?

   b. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

2. Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une unité. Elle peut aller à tout instant, soit à droite, soit à gauche, avec équiprobabilité. On note C_n l'événement : «la puce est en O après n sauts». On donne : $P(C_0) = 1$.

   a. Déterminer $P(C_{2n+1})$ et $P(C_{2n})$.

   b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} P(C_{2n})$ à l'aide de la formule de Stirling.

3. La puce peut à présent se déplacer suivant deux directions (droite, gauche, haut, bas) avec équiprobabilité.

   a. Montrer que $P(C_{2n}) = \binom{2n}{n}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$.

   b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} P(C_{2n})$.

Inégalités

Exercice 53 **Inégalité de Hoeffding**

On considère une variable aléatoire discrète X *centrée* et à valeurs dans $[-1, 1]$.

1. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in [-1,1],\ e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^{t}$$

2. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

3. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

On considère une variable aléatoire réelle discrète Y.

4. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(Y \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\mathbb{E}(e^{tY})$$

On considère maintenant des variables aléatoires discrètes réelles centrées $X_1, \dots, X_n$ indépendantes telles que $|X_k| \leq c_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ ($c_k > 0$). On pose $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

5. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbb{P}(|S| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)$$

Exercice 54 **Centrale MP 2016**

1. Pour $(x,t) \in [-1,1] \times \mathbb{R}$, montrer que
$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}$$

2. Soit X une variable aléatoire discrète centrée telle que $|X| \leq 1$. Montrer que e^{tX} admet une espérance et que
$$E(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes centrées et $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que
$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ |X_i| \leq a_i$$
et on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$

4. On pose $s = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$. Montrer que
$$\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2s}}$$

Exercice 55 ★★★ **Inégalité de Cantelli**

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire réelle discrère possédant un moment d'ordre 2.

1. On suppose que $\mathbb{E}(X) = 0$.

   a. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}((X+u)^2) = \mathbb{V}(X) + u^2$.

   b. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)+u^2}{(\lambda+u)^2}$.

   c. En déduire que $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2 + \mathbb{V}(X)}$.

2. On ne suppose plus maintenant $\mathbb{E}(X) = 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2 + \mathbb{V}(X)}$.