Devoir à la maison n°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Centrale Maths I PC 2011

Le but des deux premières parties est d'étudier l'existence d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dont on a fixé a priori les valeurs des dérivées successives en 0. Les deux parties suivantes sont consacrées à des classes de fonctions pour lesquelles les dérivées successives en 0 de f déterminent complètement la fonction f. On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulles en dehors d'un segment (qui dépend de la fonction considérée dans $\mathcal{W}$).

I Intervention des séries entières

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On cherche dans cette partie des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, qui sont somme d'une série entière sur un intervalle $]-\delta,\delta[$ pour au moins un réel $\delta > 0$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = u_n$.

1 Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-\delta,\delta[$, avec $\delta > 0$, donner $f^{(n)}(0)$ en fonction de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Dans les exemples suivants, proposer une solution f, en précisant une valeur de δ convenable :

2.a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

2.b Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ et $u_{2n+1} = 0$.

3 Pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2n)!$, montrer qu'aucune fonction du type considéré dans cette partie n'est solution du problème.

II Le théorème de Borel

II.A Une fonction en cloche

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4 **4.a** Montrer que pour tout naturel p, il existe un polynôme $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in]0,1[,\ g^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$

Pour tout entier $p \geq 1$, exprimer Q_p en fonction de Q_{p-1} et Q'_{p-1}.

4.b En déduire que, pour tout entier naturel p non nul, Q_p est de degré $3p-2$.

5 **5.a** Montrer que pour tout entier naturel p,

$$\lim_{x\to 0^+} g^{(p)}(x) = \lim_{x\to 1^-} g^{(p)}(x) = 0$$

5.b En déduire que $g \in \mathcal{W}$.

II.B Une fonction en plateau

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par $h(x) = \dfrac{\int_{x-1}^{1} g(t)\ \mathrm{d}t}{\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t}$.

6 Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, constante sur $]-\infty,1]$ et sur $[2,+\infty[$.

7 Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = h(2x)h(-2x)$ pour tout réel x.

7.a Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \geq 1$.

7.b Montrer que φ est nulle en dehors de $[-1,1]$ et tracer sommairement l'allure de son graphe.

7.c Justifier pour tout entier naturel p non nul l'existence du réel

$$\lambda_p = \max_{k\in[\![0,p-1]\!]} \max_{x\in[-1,1]} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|$$

II.C Le théorème de Borel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On définit pour tout entier naturel n une fonction g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_0(x) = \varphi(x) \text{ et si } n \geq 1,\ g_n(x) = \frac{x^n}{n!}\varphi(\beta_n x)$$

où $\beta_n = \max(1, 4^n|u_n|\lambda_n)$.

8 **8.a** Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

8.b Montrer que g_n est nulle hors du segment $\left[-\dfrac{1}{\beta_n}, \dfrac{1}{\beta_n}\right]$.

9 Soit n et j des entiers naturels tels que $j < n$.

9.a Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$$

9.b En déduire que $g_n^{(j)}(0) = 0$.

9.c Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \geq \dfrac{1}{\beta_n}$, on a $g_n^{(j)}(x) = 0$.

9.d Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leq \dfrac{1}{\beta_n}$, on a $|u_n g_n^{(j)}(x)| \leq 2^{-(n+1)}$.

10 Déduire des questions précédentes que pour $n, j \in \mathbb{N}$,

$$g_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}$$

11 En considérant $\sigma = \sum_{n=0} u_n g_n$, montrer qu'il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall j \in \mathbb{N}$, $f^{(j)}(0) = u_j$ (théorème de Borel).

III Un autre élément de $\mathcal{W}$

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante de limite nulle, et telle que la série $\sum a_n$ converge.

III.A Une fonction affine par morceaux

On pose pour tout x réel

$$f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}\left(|x+a_0| + |x-a_0| - 2|x|\right)$$

12 Montrer que f_0 est nulle en dehors de $[-a_0, a_0]$, préciser sa valeur sur $[-a_0, 0]$ et $[0, a_0]$, justifier sa continuité et tracer rapidement son graphe.

13 On pose $k = \dfrac{1}{a_0^2}$.

13.a Pour tout réel x, montrer que $|f_0(x)| \leq \dfrac{1}{a_0}$.

13.b Montrer que f_0 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

III.B La première étape

On pose pour tout x réel

$$f_1(x) = \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(t)\,\mathrm{d}t$$

14 Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_1'(x)$ pour tout x réel.

15 Montrer que f_1 est nulle en dehors de $[-a_0 - a_1, a_0 + a_1]$.

16 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_1(x)| \leq \dfrac{1}{a_0}$ et $|f_1'(x)| \leq \dfrac{1}{a_0 a_1}$.

17 Montrer que f_1 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

III.C Une suite de fonctions

On définit par récurrence une suite (f_n) de fonctions par f_0 et f_1 définies comme dans les questions précédentes et, pour tout naturel $n \geq 2$ et tout x réel,

$$f_n(x) = \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

18 Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_n'(x)$ pour tout x réel.

19 Montrer que f_n est nulle en dehors de $\left[-\sum_{i=0}^{n} a_i, \sum_{i=0}^{n} a_i\right]$.

20 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{a_0}$ et que, si $p \leq n$, on a $|f_n^{(p)}(x)| \leq \dfrac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}$.

21 Montrer que f_n est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

22 Montrer que pour tout naturel n,

$$\int_{-\mathrm{S}}^{\mathrm{S}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1 \text{ où } \mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

III.D La limite

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} k_n$ où $k_n = f_n - f_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

$\boxed{23}$ **23.a** Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, montrer que $|k_n(x)| \leq \frac{k}{2}a_n$.

23.b En déduire la convergence normale de la série de fonctions $\sum k_n$.
Pour tout réel x, on note

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n$$

$\boxed{24}$ **24.a** Montrer que pour tout x réel, $f_n(x)$ converge vers une limite que l'on notera $w_(x)$ et qui vérifie $w(x) = f_0(x) + s(x)$.

24.b Pour tout x réel, montrer que $|w(x)| \leq \frac{1}{a_0}$.

24.c Montrer que w est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

24.d Montrer que w est nulle en dehors du segment $[-S, S]$.

$\boxed{25}$ **25.a** Montrer que $\int_{-S}^{S} w(t)\,dt = 1$.

25.b En déduire que w n'est pas constante nulle sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{26}$ **26.a** Montrer que $\sum(f_n' - f_{n-1}')$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

26.b Trouver un lien entre w, f_1 et $\sum(f_n - f_{n-1})$.

26.c En déduire que w est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

26.d Montrer que pour tout x réel, $|w'(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1}$.

$\boxed{27}$ Soit $p \geq 2$.

27.a Montrer que $\sum_{n\geq p+1} (f_n^{(p)} - f_{n-1}^{(p)})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

27.b Trouver un lien entre w, f_p et $\sum_{n=p+1}^{+\infty} (f_n - f_{n-1})$.

27.c En déduire que w est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$.

27.d Montrer que pour tout x réel, $|w^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}$.

IV Classes quasi-analytiques

On considère une suite réelle $M = (M_n)_{n\geq 0}$ vérifiant les trois conditions :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M_n > 0 \tag{IV.1}$$

$$M_0 = 1 \tag{IV.2}$$

$$\forall n \geq 1,\ M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1} \tag{IV.3}$$

On note $\mathcal{C}(M)$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour lesquelles il existe deux constantes $A > 0$ et $B > 0$ (dépendantes de f) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leq AB^n M_n$$

L'ensemble $\mathcal{C}(M)$ est dit classe associée à la suite M.
La classe $\mathcal{C}(M)$ est dite quasi-analytique si

$$\forall f \in \mathcal{C}(M),\ \big(\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = 0\big) \implies f = 0$$

IV.A Quelques propriétés d'une classe

28 Montrer que si $f \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ appartient aussi à $\mathcal{C}(\mathrm{M})$.

29 Vérifier que $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

30 **30.a** Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$, on a $\mathrm{M}_k\mathrm{M}_{n-k} \leq \mathrm{M}_n$. On pourra étudier, pour p fixé, la monotonie de la suite $(\mathrm{M}_n/\mathrm{M}_{n-p})_{n\geq p}$.

30.b En déduire que le produit de deux éléments quelconques de $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ est un élément de $\mathcal{C}(\mathrm{M})$.

IV.B Un exemple de classe quasi-analytique

On note U la suite définie par $\mathrm{U}_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

31 Montrer que la suite U vérifie les conditions IV.1, IV.2 et IV.3.

32 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathrm{U})$; on fixe $\mathrm{A} > 0$, $\mathrm{B} > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leq \mathrm{AB}^n n!$$

32.a Dans cette question et la suivante, on suppose que le réel α vérifie $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(\alpha) = 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \int_\alpha^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

32.b En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-\alpha| \leq \dfrac{1}{2\mathrm{B}} \implies f(x) = 0$.

32.c Montrer que $\mathcal{C}(\mathrm{U})$ est une classe quasi-analytique.

IV.C

33 Montrer que si $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ est quasi-analytique, alors $\mathcal{C}(\mathrm{M}) \cap \mathcal{W} = \{0\}$.

34 Montrer la réciproque ; on pourra montrer, lorsque $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ n'est pas quasi-analytique, l'existence d'une fonction $g \neq 0$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, nulle sur $]-\infty, 0]$, puis considérer $h : x \mapsto g(x)g(c-x)$ pour un $c \in \mathbb{R}$ bien choisi.

IV.D

On se donne une suite réelle $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_n)_{n\geq 0}$ vérifiant les trois conditions IV.1, IV.2 et IV.3 et on considère les assertions :

$$\text{la série } \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\mathrm{M}_n}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ converge} \tag{IV.4}$$

$$\text{la série } \sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{M}_{n-1}}{\mathrm{M}_n} \text{ converge} \tag{IV.5}$$

$$\text{la classe } \mathcal{C}(\mathrm{M}) \text{ n'est pas quasi analytique} \tag{IV.6}$$

Pour tout $n \geq 1$, on note $\alpha_n = \mathrm{M}_{n-1}/\mathrm{M}_n$.

35 Exprimer M_n en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et en déduire que IV.4 $\implies$ IV.5

36 Démontrer en utilisant la partie III que IV.5 $\implies$ IV.6.

On peut montrer à l'aide d'outils mathématiques plus élaborés que IV.6 $\implies$ IV.4, ce qui donne une caractérisation des classes quasi-analytiques. Ce résultat constitue une partie du théorème de Denjoy-Carleman.