Devoir à la maison n°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Solution 1

1. **a.** Soit $x \in \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Im}(p)$. Ainsi $p(x) = 0_E$ et il existe donc $a \in E$ tel que $x = p(a)$. Comme $p^2 = p$, $x = p(a) = p^2(a) = p(x) = 0_E$. Finalement $\operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Im}(p) = \{0_E\}$. Mais comme E est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang pour affirmer que $\dim E = \dim \operatorname{Ker}(p) + \dim \operatorname{Im}(p)$. On en déduit que $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.

b. On suppose que p est un projecteur orthogonal.
Soit $x \in E$. Alors $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$ donc, comme $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore permet d'affirmer que

$$\|x\|^2 = \|p(x) + (x - p(x))\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$$

Ainsi $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Le théorème de Pythagore montre également que le cas d'égalité se produit si et seulement si $x = p(x)$ i.e. $x \in \operatorname{Im}(p)$.
A nouveau, $p(x) \perp x - p(x)$ donc

$$\langle p(x), x\rangle = \langle p(x), p(x) + (x - p(x))\rangle = \|p(x)\|^2 + \langle p(x), x - p(x)\rangle = \|p(x)\|^2 \geq 0$$

Ce calcul montre également que

$$\langle p(x), x\rangle = 0 \iff \|p(x)\|^2 = 0 \iff p(x) = 0_E \iff x \in \operatorname{Ker}(p)$$

c. Supposons que p est un projecteur orthogonal. Soit $(x, y) \in E^2$. Alors

$$\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), y - p(y)\rangle + \langle p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$$

car $y - p(y) \in \operatorname{Ker}(p)$ et $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$ donc $y - p(y) \perp x$. Comme $\langle p(x), p(y)\rangle$ est invariant par échange de x et y,

$$\langle p(x), y\rangle = \langle p(y), x\rangle = \langle x, p(y)\rangle$$

de sorte que $p^* = p$ par définition de l'adjoint.
Supposons que $p^* = p$. Soit $(x, y) \in \operatorname{Ker}(p) \times \operatorname{Im}(p)$. Il existe donc $a \in E$ tel que $y = p(a)$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \langle x, p(a)\rangle = \langle p(x), a\rangle = \langle 0_E, a\rangle = 0$$

Donc $\operatorname{Ker}(p) \perp \operatorname{Im}(p)$ et p est un projecteur orthogonal.

2. **a.** D'après la question précédente, M est la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée de E si et seulement si $M^2 = M$ et $M^\top = M$, ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b^2 + d^2 = d \\ ab + bd = b \\ b = c \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} a(1-a) = b^2 \\ a^2 - d^2 = a - d \\ ab + bd = b \\ b = c \end{cases}$$

ou bien encore

$$\begin{cases} a(1-a) = b^2 \\ (a-d)(a+d-1) = 0 \\ b(a+d-1) = 0 \\ b = c \end{cases}$$

Si on avait $a + d - 1 \neq 0$, on aurait $b = c = 0$ et $a = d \in \{0, 1\}$ i.e. $\mathrm{M} \in \{0, \mathrm{I}_2\}$ et M ne serait pas la matrice d'un projecteur strict. On en déduit que M est la matrice d'un projecteur orthogonal strict si et seulement si

$$\begin{cases} a(1-a) = b^2 \\ a+d-1 = 0 \\ b = c \end{cases}$$

b. Le produit $a(1-a)$ doit être positif, ce qui impose $a \in [0, 1]$.

c. On trouve $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
Supposons que $a = 0$. Alors, d'après la question **2.a**, $b^2 = a(1-a) = 0$ puis $b = 0$. Ainsi $\mathrm{N} = 0$ donc N est bien diagonalisable et $\mathrm{Sp(N)} = \{0\} \subset [0, 1]$.
Supposons que $a \neq 0$. Alors $\chi_{\mathrm{N}} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-a)$ est scindé à racines simples. D'après la question précédente, $a \in [0, 1]$ donc $\mathrm{Sp(N)} = \{0, a\} \subset [0, 1]$.

d. Comme p_1 est un projecteur orthogonal strict, $\dim \mathrm{Ker}(p_1) = \dim \mathrm{Im}(p_1) = 1$. La matrice de p_1 dans une base orthonormée de E adpatée à la décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Ker}(p_1)$ est alors $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme p_2 est également un projecteur orthogonal strict, la question **2.a** permet d'affirmer que sa matrice dans cette même base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$. La matrice de $p_1 \circ p_2$ dans cette base est alors la matrice N de la question précédente. Comme N est diagonalisable, $p_1 \circ p_2$ l'est également et $\mathrm{Sp}(p_1 \circ p_2) = \mathrm{Sp(N)} \subset [0, 1]$.

3. a. Comme p_1 et p_2 sont des projecteurs orthogonaux, on obtient par propriété de l'adjonction :

$$(p_1 \circ p_2 \circ p_1)^* = p_1^* \circ p_2^* \circ p_1^* = p_1 \circ p_2 \circ p_1$$

Par conséquent, $p_1 \circ p_2 \circ p_1$ est auto-adjoint et le théorème spectral permet d'affirmer qu'il est diagonalisable dans une base orthonormée.
Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(p_1 \circ p_2 \circ p_1)$ et x un vecteur propre associé. Comme p_1 et p_2 sont des projecteurs orthogonaux, on obtient avec la question **1.b**,

$$\|p_1 \circ p_2 \circ p_1(x)\| \leq \|p_2 \circ p_1(x)\| \leq \|p_1(x)\| \leq \|x\|$$

c'est-à-dire $|\lambda|\|x\| \leq \|x\|$. Comme x n'est pas nul en tant que vecteur propre, $\|x\| > 0$ puis $|\lambda| \leq 1$.
Comme p_1 est un endomorphisme auto-adjoint,

$$\langle p_1 \circ p_2 \circ p_1(x), x\rangle = \langle p_2 \circ p_1(x), p_1(x)\rangle$$

Mais comme p_2 est un projecteur orthogonal, $\langle p_2 \circ p_1(x), p_1(x)\rangle \geq 0$. Finalement, $\langle p_1 \circ p_2 \circ p_1(x), x\rangle \geq 0$ ou encore $\lambda\|x\|^2 \geq 0$. A nouveau, $\|x\|^2 > 0$ donc $\lambda \geq 0$.
Finalement, $\lambda \in [0, 1]$.

b. On a clairement $\mathrm{Im}(p_1 \circ p_2 \circ p_1) \subset \mathrm{Im}(p_1)$ donc $\mathrm{Im}(p_1)$ est stable par $p_1 \circ p_2 \circ p_1$.

c. De même, $\mathrm{Im}(p_1 \circ p_2) \subset \mathrm{Im}(p_1)$ donc $\mathrm{Im}(p_1)$ est également stable par $p_1 \circ p_2$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(p_1)$. Alors $x = p_1(x)$ puis $p_1 \circ p_2(x) = p_1 \circ p_2 \circ p_1(x)$. L'endomorphisme q de $\mathrm{Im}(p_1)$ induit par $p_1 \circ p_2$ est donc également l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(p_1)$ induit par $p_1 \circ p_2 \circ p_1$. Or $p_1 \circ p_2 \circ p_1$ est diagonalisable donc l'endomorphisme q de $\mathrm{Im}(p_1)$ qu'il induit est également diagonalisable. On peut également affirmer avec la question **3.a** que $\mathrm{Sp}(q) \subset \mathrm{Sp}(p_1 \circ p_2 \circ p_1) \subset [0, 1]$.

d. On montre classiquement que, si A et B sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $(\mathrm{A} + \mathrm{B})^\perp = \mathrm{A}^\perp \cap \mathrm{B}^\perp$. Ainsi

$$\mathrm{G}^\perp = \mathrm{Im}(p_1)^\perp \cap \mathrm{Ker}(p_2)^\perp$$

Mais comme p_1 et p_2 sont des projecteurs orthogonaux, $\mathrm{Im}(p_1)^\perp = \mathrm{Ker}(p_1)$ et $\mathrm{Ker}(p_2)^\perp = \mathrm{Im}(p_2)$. Ainsi

$$\mathrm{G}^\perp = \mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Im}(p_2)$$

Soit $x \in \mathrm{G}^\perp = \mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Im}(p_2)$. Alors $p_2(x) = x$ et $p_1(x) = 0_{\mathrm{E}}$. Ainsi $p_1 \circ p_2(x) = 0_{\mathrm{E}}$. L'endomorphisme $p_1 \circ p_2$ est donc nul sur $\mathrm{G}^\perp$.

e. Comme q est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\operatorname{Im} p_1$ formée de vecteurs propres de q et donc de $p_1 \circ p_2$. Comme $G = \operatorname{Im} p_1 + \operatorname{Ker} p_2$, on peut compléter $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{B}'$ de G en lui ajoutant des vecteurs de $\operatorname{Ker} p_2$. Ces vecteurs sont encore des vecteurs propres de $p_1 \circ p_2$ (associés à la valeur propre 0). $\mathcal{B}'$ est donc une base de G formée de vecteurs propres de $p_1 \circ p_2$. Donnons nous enfin une base $\mathcal{B}''$ de $G^\perp$. Comme $p_1 \circ p_2$ est nul sur $G^\perp$, $\mathcal{B}''$ est une base de vecteurs propres de $p_1 \circ p_2$ (encore une fois associés à la valeur popre 0). Comme $E = G \oplus G^\perp$, la concaténation des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ est une base de E formée de vecteurs propres de $p_1 \circ p_2$ qui est donc diagonalisable. De plus, les valeurs propres de $p_1 \circ p_2$ sont 0 et les valeurs propres de q qui sont toutes dans $[0, 1]$. Ainsi toutes les valeurs propres de $p_1 \circ p_2$ sont encore dans $[0, 1]$.

f. Notons $r = \operatorname{rg}(p_1 \circ p_2)$. Comme $p_1 \circ p_2$ est diagonalisable, elle est semblable à une matrice $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ où les λ_i sont non nuls. On sait de plus que les λ_i sont dans l'intervalle $[0, 1]$ donc

$$\operatorname{tr}(p_1 \circ p_2) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \leq r = \operatorname{rg}(p_1 \circ p_2) \leq \operatorname{rg}(p_2) = r_2$$

Supposons que $\operatorname{tr}(p_1 \circ p_2) = r_2$. D'après les inégalités précédentes, on a donc $r = r_2$ et $\lambda_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base dans laquelle la matrice de $p_1 \circ p_2$ est $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Alors $p_1 \circ p_2(e_i) = e_i$. Mais comme p_1 et p_2 sont des projecteurs orthogonaux, la question **1.b** montre que

$$\|p_1 \circ p_2(e_i)\| \leq \|p_2(e_i)\| \leq \|e_i\|$$

Comme $p_1 \circ p_2(e_i) = e_i$, ces inégalités sont en fait des égalités et la question **1.b** nous dit notamment que $p_2(e_i) \in \operatorname{Im}(p_1)$. Par ailleurs, Réciproquement, si $\operatorname{Im}(p_2) \subset \operatorname{Im}(p_1)$, alors pour tout $x \in E$, $p_2(x) \in \operatorname{Im}(p_1)$ donc $p_1 \circ p_2(x) = p_2(x)$. Ainsi $p_1 \circ p_2 = p_2$. Ainsi $\operatorname{tr}(p_1 \circ p_2) = \operatorname{tr}(p_2) = \operatorname{rg}(p_2)$ car le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

Solution 2

1. **a.** Un produit par blocs donne
$$M_{A,B,C,D}M_{I_n,E,0_n,I_n} = M_{A,AE+B,C,CE+D}$$
b. En prenant $E = -A^{-1}B$ dans la question précédente, on obtient
$$M_{A,B,C,D}M_{I_n,E,0_n,I_n} = M_{A,0_n,C,D-CA^{-1}B}$$
Par conséquent,
$$\det(M_{A,B,C,D})\det(M_{I_n,E,0_n,I_n}) = \det(M_{A,0_n,C,D-CA^{-1}B})$$
Les matrices $M_{I_n,E,0_n,I_n}$ et $M_{A,0_n,C,D-CA^{-1}B}$ sont triangulaires par blocs donc $\det(M_{I_n,E,0_n,I_n}) = \det(I_n)^2 = 1$ et $\det(M_{A,0_n,C,D-CA^{-1}B}) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$. Finalement,
$$\det(M_{A,B,C,D}) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

2. **a.** D'après la question précédente,
$$\begin{aligned}\det(M_{A,B,C,D}) &= \det(A)\det(D - CA^{-1}B)\\ &= \det(A(D - CA^{-1}B)) && \text{par propriété du déterminant}\\ &= \det(AD - ACA^{-1}B)\\ &= \det(AD - CAA^{-1}B) && \text{car A et C commutent}\\ &= \det(AD - CB)\end{aligned}$$
b. **i.** Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$. Alors $\lambda I_n - A$ est inversible. De plus, $\lambda I_n - A$ et $-C$ commutent encore. On peut alors appliquer la question précédente pour affirmer que
$$\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det(M_{\lambda I_n - A,-B,-C,\lambda I_n - D}) = \det((\lambda I_n - A)(\lambda I_n - D) - CB) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$$
avec $U = -(A + D)$ et $V = AD - CB$. Les applications $\lambda \mapsto \chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda)$ et $\lambda \mapsto \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$ sont polynomiales et coïncident sur l'ensemble infini $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$: elles sont donc égales.
ii. Les deux applications précédentes sont donc égales en 0, ce qui donne
$$\det(M_{-A,-B,-C,-D}) = \det(AD - CB)$$
Or
$$\det(M_{-A,-B,-C,-D}) = \det(-M_{A,B,C,D}) = (-1)^{2n}\det(M_{A,B,C,D}) = \det(M_{A,B,C,D})$$
donc
$$\det(M_{A,B,C,D}) = \det(AD - CB)$$

3. **a.** D'une part, $(B^\top B)^\top = B^\top(B^\top)^\top = B^\top B$ donc $B^\top B$ est symétrique. D'autre part, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top B^\top BX = (BX)^\top BX = \|BX\|^2 \geq 0$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi B est bien symétrique positive.
b. Comme I_n et $B^\top$ commutent, on peut appliquer la question **2.b.i** pour affirmer que
$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \chi_S(\lambda) = \det(\lambda^2 - 2\lambda I_n + I_n - B^\top B) = \det((\lambda - 1)^2 I_n - B^\top B) = \chi_{B^\top B}((\lambda - 1)^2)$$
c. Remarquons déjà que S est bien symétrique.
Supposons que S soit symétrique définie positive. Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(B^\top B)$. Comme $B^\top B$ est symétrique positive, $\mu \geq 0$. D'après la question précédente,
$$\chi_S(1 - \sqrt{\mu}) = \chi_{B^\top B}(\mu) = 0$$
donc $1 - \sqrt{\mu}$ est valeur propre de S. Comme S est symétrique définie positive, $1 - \sqrt{\mu} > 0$ puis $\mu < 1$. Les valeurs propres de $B^\top B$ sont donc toutes strictement inférieures à 1.
Supposons que toutes les valeurs propres de $B^\top B$ soient strictement inférieures à 1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$. Alors
$$\chi_{B^\top B}((\lambda - 1)^2) = \chi_S(\lambda) = 0$$
d'après la question précédente. Ainsi $(\lambda - 1)^2$ est une valeur porpre de $B^\top B$ de sorte que $(\lambda - 1)^2 < 1$ i.e. $-1 < \lambda - 1 < 1$ ou encore $0 < \lambda < 2$. On a alors $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc S est bien symétrique définie positive.

4. **a.** On montre d'abord par récurrence que A_n est une matrice carrée de taille 2^n.
Les matrices $2A_{n-1}$ et iA_{n-1} commutent donc, d'après la question **2.b.ii**,

$$\det(A_n) = \det(2A_{n-1} \times (-2A_{n-1}) - iA_{n-1} \times iA_{n-1}) = \det(-3A_{n-1}^2) = (-3)^{2^{n-1}} \det(A_{n-1})^2$$

Mais comme $n > 1$, 2^{n-1} est pair donc

$$\det(A_n) = 3^{2^{n-1}} \det(A_{n-1})^2$$

b. Tout d'abord, $\det(A_1) = -3$. On montre ensuite par récurrence que $\det(A_n) = 3^{2^{n-1}n}$ pour tout entier $n \geq 2$. D'abord,

$$\det(A_2) = 3^2 \det(A_1)^2 = 3^4 = 3^{2^{2-1}\times 2}$$

Ensuite, supposons que $\det(A_n) = 3^{2^{n-1}n}$ pour un certain entier $n \geq 2$. Alors

$$\det(A_{n+1}) = 3^{2^n} \det(A_n)^2 = 3^{2^n}\left(3^{2^{n-1}n}\right)^2 = 3^{2^n} \cdot 3^{2^n n} = 3^{2^n(n+1)}$$

ce qui conclut la récurrence.

c. Les matrices $2A_{n-1}$ et iA_{n-1} commutent donc, d'après la question **2.b.i**,

$$\begin{aligned}
\forall\lambda \in \mathbb{C},\ \chi_{A_n}(\lambda) &= \det(\lambda^2 I_{2^{n-1}} - 3A_{n-1}^2) \\
&= \det\left(3\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}I_{2^{n-1}} - A_{n-1}\right)\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}I_{2^{n-1}} + A_{n-1}\right)\right) \\
&= 3^{2^{n-1}} \det\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}I_{2^{n-1}} - A_{n-1}\right)\det\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}I_{2^{n-1}} + A_{n-1}\right) \\
&= 3^{2^{n-1}} \chi_{A_{n-1}}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right)\chi_{-A_{n-1}}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

d. Comme $\chi_{A_1} = X^2 - 3$, $\mathrm{Sp}(A_1) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. La relation de récurrence de la question précédente montre que

$$\mathrm{Sp}(A_n) = \left(\sqrt{3}\,\mathrm{Sp}(A_{n-1})\right) \cup \left(\sqrt{3}\,\mathrm{Sp}(-A_{n-1})\right) = \left(\sqrt{3}\,\mathrm{Sp}(A_{n-1})\right) \cup \left(-\sqrt{3}\,\mathrm{Sp}(A_{n-1})\right)$$

On en déduit par une récurrence évidente que $\mathrm{Sp}(A_n) = \{-\sqrt{3}^n, \sqrt{3}^n\}$.