DEVOIR À LA MAISON N°05

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – D'après ESC Paris Maths I 1994

Dans tout le problème, on désigne par W la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\, dt$. L'objectif est d'étudier cette fonction W et d'en déduire quelques applications.

I Etude d'une intégrale impropre

1 Justifier la convergence de l'intégrale $L = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$.

2 On pose $J = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)\, dt$ et $K = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt$. Montrer que $J = K = L$.

3 Exprimer $K + L$ en fonction de $L + J$.

4 En déduire la valeur de L.

II Etude de la fonction W

5 Déterminer le sens de variation de la fonction W sur $\mathbb{R}_+$.

6 **6.a** Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ |e^{-ax} - e^{-ay}| \leq a|x - y|$$

6.b En déduire que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ |W(x) - W(y)| \leq \frac{\pi \ln 2}{2}|x - y|$$

6.c Etablir la continuité de W sur $\mathbb{R}_+$.

7 Pour tout nombre réel positif x, exprimer $W(x + 2)$ en fonction de $W(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

8 On se propose d'étudier le comportement asymptotique de W à l'aide de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = (x + 1)W(x + 1)W(x)$.

8.a Etablir que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x + 1) = g(x)$.
En déduire la valeur de $g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8.b Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{g(n+1)}{n+2} \leq \frac{g(x+n)}{x+n+1} \leq \frac{g(n)}{n+1}$$

En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer son unique valeur.

8.c En remarquant que $W(x+2) \leq W(x+1) \leq W(x)$, montrer que $W(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} W(x)$.

8.d Déduire de ces résultats que $W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

III Applications

A Calcul de l'intégrale de Gauss

On considère l'intégrale $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$.

9 **9.a** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout réel $u > -x$:

$$\left(1+\frac{u}{x}\right)^x \leq e^u$$

9.b En déduire que pour $x \geq 1$,

$$\int_0^{\sqrt{x}} \left(1-\frac{t^2}{x}\right)^x \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x} \mathrm{d}t$$

9.c En effectuant les changements de variable $t = \sqrt{x}\cos u$ et $t = \sqrt{x}\dfrac{\cos u}{\sin u}$, établir que pour $x \geq 1$:

$$\sqrt{x}W(2x+1) \leq \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{x}W(2x-2)$$

9.d A l'aide de l'équivalent de W obtenu à la fin de la partie II, en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale G.

B Calcul de valeurs apporchées du nombre π

10 On pose pour $x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) = \dfrac{W(x+1)}{W(x)}$.

10.a En remarquant à nouveau que $W(x+2) \leq W(x+1) \leq W(x)$, établir que

$$0 \leq 1 - h(x) \leq \frac{1}{x+2}$$

10.b Exprimer $h(x)$ en fonction de $h(x-2)$ pour $x \geq 2$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h(2n) = \frac{r_n}{\pi} \text{ avec } r_n = 2\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

En déduire la limite de la suite (r_n) et un encadrement de $\pi - r_n$.

10.c Ecrire en Python une fonction d'argument $n \in \mathbb{N}$ renvoyant r_n.

11 On se propose d'accélérer la convergence de la suite (r_n).

11.a Montrer que

$$\ln\frac{\pi}{r_n} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

11.b Justifier que

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

11.c En déduire un équivalent de $\ln\dfrac{\pi}{r_n}$ et prouver que

$$\pi - r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{r_n}{4n}$$

11.d Montrer que

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

et que

$$\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$$

11.e En déduire que

$$\ln\frac{\pi}{r_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis que

$$\left(1 + \frac{1}{4n}\right) r_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$