DEVOIR À LA MAISON N°21

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – E3A 2000 PC – Mathématiques 3

L'épreuve est constituée de trois parties, et propose l'étude de quelques propriétés de la fonction J_0 *de Bessel (utilisée notamment en physique).*

I Etude de la fonction $\mathrm{J} = \mathrm{J}_0$ de Bessel. Développement en série entière

1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\mathrm{J}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta$.

1.a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{J}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta$$

1.b Montrer que la fonction $\mathrm{J} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi définie est continue, paire et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1.c Justifier que J est bornée sur $\mathbb{R}$.

1.d Justifier l'encadrement :

$$\forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta) \leq \theta$$

En déduire un encadrement de $\mathrm{J}(x)$ pour $x \in]0, 2]$.

1.e Préciser les valeurs de $\mathrm{J}(0)$ et $\mathrm{J}'(0)$. Montrer que J est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

2.a Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(2n+1)\mathrm{I}_n = 2(n+1)\mathrm{I}_{n+1}$.

2.b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{I}_n = \dfrac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$.

3 **3.a** Rappeler le développement en série entière de la fonction cos et son rayon de convergence. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \mapsto \cos(x\sin(\theta))$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et préciser ce développement.

3.b En déduire que J est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{J}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n}$$

(on précisera le théorème du cours utilisé pour l'intégration terme à terme).

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

II Etude d'une équation différentielle

4 Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(\mathrm{J}(x) + \mathrm{J}''(x)) + \mathrm{J}'(x) = 0$$

5 Montrer que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$, est un espace vectoriel réel de dimension 1, engendré par J.

6 Soit $\mathrm{K} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$.
Pour tout $x > 0$ on pose : $\mathrm{W}(x) = \mathrm{J}'(x)\mathrm{K}(x) - \mathrm{J}(x)\mathrm{K}'(x)$.
Montrer que $\mathrm{W} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, et est telle que pour tout $x > 0$, on ait : $\mathrm{W}'(x) = -\dfrac{1}{x}\mathrm{W}(x)$.
En déduire la forme de W.

7 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

7.a Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{H}_{n+1}}{\mathrm{H}_n} = 1$.

7.b Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{H}_n}{4^n(n!)^2} x^{2n}$.
Vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est bien égal à $+\infty$.
Pour tout réel x, expliciter (sous forme d'une série entière simple) la valeur de l'expression $x\varphi''(x) + \varphi'(x) + x\varphi(x)$ et la comparer avec $-2\mathrm{J}'(x)$.

7.c Pour tout $x > 0$, on pose : $\mathrm{K}(x) = \ln(x)\mathrm{J}(x) + \varphi(x)$.
Vérifier que K est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$, et expliciter la fonction W associée définie au **6**.
Que peut-on en déduire ?

III Usage de la transformation de Laplace

8 **8.a** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $y > 0$:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-xy}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{y^{n+1}}$$

8.b Montrer que pour tout $y > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{J}\left(\sqrt{x}\right)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{y} e^{-1/4y}$$

(on pourra commencer par justifier l'existence de cette intégrale en utilisant par exemple le **1.c**, puis le développement en série entière de J vu en **3.b** en précisant le théorème du cours utilisé pour l'intégration terme à terme).

9 **9.a** Justifier pour $y > 0$ l'existence de $\mathrm{L}(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{J}(x)\, \mathrm{d}x$.

9.b Montrer que la fonction L ainsi définie est une application continue sur $]0, +\infty[$ vérifiant $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \mathrm{L}(y) = 0$.

10 **10.a** Déterminer et justifier le développement en série entière sur $]-1, 1[$ de la fonction $h :\ u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$.

10.b Utiliser le développement en série entière de J vu au **3.b** afin de montrer que, pour tout $y \in]1, +\infty[$, $\mathrm{L}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

11 Soit $y > 0$ fixé.

11.a Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathrm{L}_n(y) = \displaystyle\int_0^n e^{-xy}\mathrm{J}(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que :

$$|\mathrm{L}_n(y) - \mathrm{L}(y)| \leq \frac{e^{-ny}}{y}$$

11.b En remarquant que $\dfrac{\pi}{2}\mathrm{L}_n(y) = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^n e^{x(-y+i\sin(\theta))}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\theta\right)$, montrer que :

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{L}_n(y) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{e^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+i\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi/2}\frac{1}{y-i\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right)$$

11.c Montrer que

$$\left|\int_0^{\pi/2}\frac{e^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+i\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right| \leq \frac{\pi}{2}\frac{e^{-ny}}{y}$$

11.d Par un passage à la limite, en déduire que, pour tout $y > 0$, on a :

$$\mathrm{L}(y) = \frac{2y}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{y^2+\sin^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

(on pourra utiliser le changement de variable défini par $u = \tan(\theta)$).