Devoir surveillé n°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0$.

2 J_f est un idéal de $\mathbb{R}[X]$.

3 Les idéaux de $\mathbb{R}[X]$ sont principaux. On note π_f l'unique polynôme unitaire engendrant π_f.

4 D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f \in J_f$. Ainsi J_f n'est pas nul, ce qui garantit l'existence de π_f.

5 **5.a** On a donc $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul montre que $M^2 = M$. Une récurrence évidente montre que $M^k = M$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

5.b D'après la question précédente, $X^2 - X = X(X-1)$ annule M donc π_M divise $X(X-1)$. Or $M \neq 0$ donc $\pi_M \neq X$ et $M \neq I_4$ donc $\pi_M \neq X - 1$. On en déduit que $\pi_M = \pi_f = X(X-1)$.

6 **6.a** L'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle linéaire homogène $y''+y = 0$ est $\operatorname{vect}(\cos, \sin)$. De plus, il est clair que $\frac{1}{2}\operatorname{ch}$ et $\frac{1}{2}\operatorname{sh}$ sont des solutions particulières respectives des équations différentielles $y'' + y = \operatorname{ch}$ et $y'' + y = \operatorname{sh}$. On en déduit que l'ensemble des solutions de $y'' + y = \operatorname{ch}$ est le sous-espace affine $\frac{1}{2}\operatorname{ch} + \operatorname{vect}(\cos, \sin)$ tandis que l'ensemble des solutions de $y'' + y = \operatorname{sh}$ est le sous-espace affine $\frac{1}{2}\operatorname{sh} + \operatorname{vect}(\cos, \sin)$.

6.b f est solution de (H_1) si et seulement si $g = f'' + f$ est solution de $(H_2) : z'' - z = 0$.

6.c L'ensemble des solutions de (H_2) est $\operatorname{vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$.

6.d Si f est soution de (H_1), alors g est solution de (H_2). Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g = f'' + f = \alpha \operatorname{ch} + \beta \operatorname{sh}$. La question **6.a** et le principe de superposition montre que $f \in \operatorname{vect}(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$. Réciproquement, il est clair que cos, sin, ch, sh sont solutions de (H_1). Or (H_1) est une équation différentielle linéaire homogène est donc l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel : il contient donc $\operatorname{vect}(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$. Par double inclusion, l'ensemble des solutions de (H_1) est $\operatorname{vect}(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$.

Remarque. On aurait aussi pu invoquer le lemme des noyaux. Une récurrence évidente montre que toute solution de (H_1) est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On considère alors l'endomorphisme $D : f \in F \mapsto f'$ où $F = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'ensemble des solutions de (H_1) est $\operatorname{Ker}(D^4 - \operatorname{Id}_F)$. Comme $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$ et $(X^2 - 1) \wedge (X^2 + 1) = 1$,

$$\operatorname{Ker}(D^4 - \operatorname{Id}_F) = \operatorname{Ker}(D^2 - \operatorname{Id}_F) \oplus \operatorname{Ker}(D^2 - \operatorname{Id}_F)$$

Or $\operatorname{Ker}(D^2 - \operatorname{Id}_F)$ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - y = 0$, à savoir $\operatorname{vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ de même que $\operatorname{Ker}(D^2 + \operatorname{Id}_F) = \operatorname{vect}(\cos, \sin)$.

6.e **6.e.i** Soit $(\lambda, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha \cos + \beta \sin + \gamma \operatorname{ch} + \delta \operatorname{sh} = 0$. En évaluant en 0, on obtient $\alpha + \gamma = 0$. En dérivant et en évaluant en 0, on obtient $\beta + \delta = 0$. En répétant deux fois cette opération, on obtient $-\alpha + \gamma = 0$ et $-\beta + \delta = 0$. On en déduit sans peine que $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Ainsi la famille $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est libre et $\dim E = 4$.

6.e.ii La dérivation est linéaire et

$$\delta(\cos) = -\sin \in \mathrm{E} \qquad \delta(\sin) = \cos \in \mathrm{E} \qquad \delta(\mathrm{ch}) = \mathrm{sh} \in \mathrm{E} \qquad \delta(\mathrm{sh}) = \mathrm{ch} \in \mathrm{E}$$

donc E est stable par δ. Ainsi δ induit un endomorphisme de E.

6.e.iii La matrice de δ dans la base $(\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}^4 = \mathrm{I}_4$. On en déduit que $\mathrm{X}^4 - 1$ annule M donc π_M divise $\mathrm{X}^4 - 1$. De plus, on vérifie aisément que $(\mathrm{I}_4, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2, \mathrm{M}^3)$ est libre donc $\deg \pi_\mathrm{M} \geq 4$. Ainsi $\pi_f = \pi_\mathrm{M} = \mathrm{X}^4 - 1$.

$\boxed{7}$ Une base de E_n est $(\mathrm{X}^k)_{0 \leq k \leq n}$. On en déduit que $\dim \mathrm{E}_n = n + 1$.

$\boxed{8}$ u et v sont clairement des endomorphismes de E. De plus, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $u(\mathrm{X}^k) = k\mathrm{X}^{k-1} \in \mathrm{E}_n$ et $v(\mathrm{X}^k) = (\mathrm{X}+1)^k \in \mathrm{E}_n$. Comme $(\mathrm{X}^k)_{0 \leq k \leq n}$ engendre E_n, E_n est stable par u et v.

$\boxed{9}$ D'après la question précédente,

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la formule du binôme,

$$\mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \ddots & & \binom{n}{1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Remarquons notamment que tous les coefficients diagonaux de V_n valent 1.

$\boxed{10}$ Il est clair que $\operatorname{Im} u_n = \mathrm{E}_{n-1}$. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} u_n = 1$. Comme $u_n(1) = 0$, $\operatorname{Ker} u_n = \operatorname{vect}(1) = \mathrm{E}_0$.
En posant $f_n : \mathrm{P} \in \mathrm{E}_n \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$, $f_n \circ v_n = v_n \circ f_n = {}_{\mathrm{E}_n}$ donc $v_n \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}_n)$. Notamment, $\operatorname{Im} v_n = \mathrm{E}_n$ et $\operatorname{Ker} v_n = \{0\}$.

$\boxed{11}$ Pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)' = \mathrm{P}'(\mathrm{X}+1)$ donc u et v commutent. A fortiori, u_n et v_n commutent.

$\boxed{12}$ Comme U_n est triangulaire, $\chi_{u_n} = \chi_{\mathrm{U}_n} = \mathrm{X}^{n+1}$. Si u_n était diagonalisable, π_{u_n} serait simplement scindé. Comme π_{u_n} divise $\chi_{u_n} = \mathrm{X}^n$, on aurait $\pi_{u_n} = \mathrm{X}$ puis $u_n = 0$ ce qui n'est pas ($u_n(\mathrm{X}) = 1 \neq 0$). Ainsi u_n n'est pas diagonalisable.

$\boxed{13}$ A nouveau, V_n est triangulaire donc $\chi_{v_n} = \chi_{\mathrm{V}_n} = (\mathrm{X}-1)^{n+1}$. En raisonnant comme précédemment, si v_n était diagonalisable, on aurait $\pi_{v_n} = \mathrm{X} - 1$ puis $v_n = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n}$, ce qui n'est pas ($v_n(\mathrm{X}) = \mathrm{X} + 1 \neq \mathrm{X}$).

$\boxed{14}$ **14.a** Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg \mathrm{Q}_k = k$. Ainsi $\mathcal{B}$ est une famille de polynômes non nuls de degrés étagés : c'est donc une famille libre. De plus, elle comporte $n + 1$ éléments et $\dim \mathrm{E}_n = n + 1$ donc $\mathcal{B}$ est une base de E_n.

14.b $w_n(Q_0) = v_n(1) - 1 = 0$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned} w_n(Q_k) &= \frac{1}{k!}\left[\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right] \\ &= \frac{1}{k!}\left[\prod_{j=-1}^{k-2}(X-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right] \\ &= \frac{1}{k!}\left[(X+1)-(X-(k-1))\right]\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) \\ &= \frac{k}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) = Q_{k-1} \end{aligned}$$

14.c La question précédente montre que

$$W_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14.d Comme $(Q_k)_{0\le k\le n}$ est une base de E_n, la famille $(w_n(Q_0), \dots, w_n(Q_n))$ engendre $\mathrm{Im}(w_n)$. On en déduit que $(Q_k)_{0\le k\le n-1}$ est une base de $\mathrm{Im}(w_n)$.
Le théorème du rang montre que $\dim \mathrm{Ker}(w_n) = 1$. Comme $Q_0 \in \mathrm{Ker}(w_n)$, (Q_0) est une base de $\mathrm{Ker}(w_n)$.

14.e Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$w_n^j(Q_k) = \begin{cases} Q_{k-j} & \text{si } j \le k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$$

$\boxed{15}$ **15.a** L'existence et l'unicité proviennent du fait que $\mathcal{B}$ est une base de E_n.

15.b Remarquons que $Q_k(0) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $Q_0(0) = 1$. On en déduit avec la question **14.e** que $w_n^j(Q_k)(0) = \delta_{j,k}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$. Ainsi

$$w_n^j(P)(0) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k w_n^j(Q_k)(0) = \begin{cases} \beta_j & \text{si } j \le n \\ 0 & \text{si } j > n \end{cases}$$

15.c D'après la question précédente, la famille des coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ est $(w_n^k(P)(0))_{0\le k\le n}$. On peut préciser la réponse. En effet, d'après la formule du binôme (v_n et $_{E_n}$ commutent),

$$w_n^k = (v_n - \mathrm{Id}_{E_n})^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}v_n^j$$

puis

$$w_n^k(P) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}v_n^j(P) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}P(X+j)$$

et enfin

$$w_n^k(P)(0) = \sum_{j=0}^{n}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}P(j)$$

15.d La base duale de $\mathcal{B}$ est donc la famille $(\varphi_k)_{0\le k\le n}$ où

$$\varphi_k : \left\{ \begin{array}{ccc} E_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}P(j) \end{array} \right.$$

15.e D'après la question **14.e**, $w_n^{n+1}(\mathrm{Q}_k) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Comme $(\mathrm{Q}_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n, $w_n^{n+1} = 0$. D'après la même question, $w_n^n(\mathrm{Q}_n) = \mathrm{Q}_0 = 1$.

16 D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_f annule f. Ainsi π_f divise χ_f.

17 **17.a** Pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_n$, $\mathrm{P}^{(n+1)} = 0$ donc $u_n^{n+1} = 0$.

17.b On trouve $u_n^n(\mathrm{X}^n) = n! \neq 0$.

17.c On sait que X^{n+1} annule u_n donc π_{u_n} divise X^{n+1}. Il existe donc $k \in [\![1, n+1]\!]$ tel que $\pi_{u_n} = \mathrm{X}^k$. Mais comme $u_n^n \neq 0$, $\pi_{u_n} = \mathrm{X}^{n+1}$.

17.d La question **15.e** montre que $w_n^{n+1} = 0$ et $w_n^n \neq 0$. On en déduit comme précédemment que $\pi_{w_n} = \mathrm{X}^{n+1}$.

18 **18.a** On a vu précédemment que $\chi_{v_n} = (\mathrm{X}-1)^{n+1}$. Comme π_{v_n} divise χ_{u_n}, il existe $m \in [\![1, n+1]\!]$ tel que $\pi_{v_n} = (\mathrm{X}-1)^m$.

18.b Comme π_{v_n} annule v_n, $(v_n - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n})^m = 0$ i.e. $w_n^m = 0$. On en déduit que $\pi_{w_n} = \mathrm{X}^{n+1}$ divise X^m. Ainsi $n+1 \leq m$ puis finalement $n+1 = m$.

19 **19.a** Puisque $\deg \mathrm{P} = m$, $a_m \neq 0$.

19.b On montre classiquement que pour $j \in [\![0, m]\!]$, $u^j(\mathrm{X}^m) = \dfrac{m!}{(m-j)!}\mathrm{X}^{m-j}$. Ainsi

$$r(\mathrm{X}^m/m!) = \sum_{j=0}^{m} a_j \frac{\mathrm{X}^{m-j}}{(m-j)!}$$

19.c D'après les deux questions précédentes, $r = \mathrm{P}(u) \neq 0$. Ainsi aucun polynôme non nul n'annule u. Finalement, $\mathrm{J}_u = \{0\}$.

20 **20.a** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme P annule v, il annule également v_n. On en déduit que $\pi_{v_n} = (\mathrm{X}-1)^{n+1}$ divise P.

20.b Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $\mathrm{Q}_n \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)^{n+1}\mathrm{Q}_n$. Si $\mathrm{P} \neq 0$, alors $\mathrm{Q}_n \neq 0$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \deg \mathrm{P} = \deg(\mathrm{X}-1)^{n+1} + \deg(\mathrm{Q}_n) \geq n+1$$

ce qui est absurde. On en déduit que $\mathrm{P} = 0$. Ainsi $\mathrm{J}_v = \{0\}$.

21 **21.a** Pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$,

$$s^2(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(1 - (1 - \mathrm{X})) = \mathrm{P}$$

donc s est une symétrie.

21.b La question précédente montre que $\mathrm{X}^2 - 1$ annule s donc π_s divise $\mathrm{X}^2 - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)$. Mais $s \neq \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ et $s \neq -\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ ($s(\mathrm{X}) = 1 - \mathrm{X} \neq \mathrm{X}$ et $s(\mathrm{X}) = 1 - \mathrm{X} \neq -\mathrm{X}$). On en déduit que $\pi_s = \mathrm{X}^2 - 1$. Par définition de π_s, $\mathrm{J}_s = (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{E}$.

22 Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\exp(u_n)(\mathrm{X}^k) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_n^m(\mathrm{X}^k)}{m!} = \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{(k-m)!m!}\mathrm{X}^{k-m} = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m}\mathrm{X}^{k-m} = (\mathrm{X}+1)^k = v_n(\mathrm{X}^k)$$

Comme $(\mathrm{X}^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n, $\exp(u_n) = v_n$.

23 **23.a** Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a vu à la question **15.c** que

$$u_n(\mathrm{Q}_k) = \sum_{m=0}^{n} w_n^m(u_n(\mathrm{Q}_k))(0)\mathrm{Q}_m$$

Mais u_n et v_n commutent donc w_n et u_n également de sorte que

$$u_n(\mathrm{Q}_k) = \sum_{m=0}^{n} u_n(w_n^m(\mathrm{Q}_k))(0)\mathrm{Q}_m$$

On utilise maintenant la question **14.e** pour obtenir

$$u_n(\mathrm{Q}_k) = \sum_{m=0}^{k} u_n(\mathrm{Q}_{k-m})(0)\mathrm{Q}_m$$

En effectuant le changement d'indice $m \mapsto k - m$, on obtient finalement

$$u_n(\mathrm{Q}_k) = \sum_{m=0}^{k} u_n(\mathrm{Q}_m)(0)\mathrm{Q}_{k-m}$$

23.b Soit $m \in [\![0, n]\!]$. Si $m = 0$, $u_n(\mathrm{Q}_m)(0) = 0$. Sinon,

$$\mathrm{Q}_n'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Q}_m(h) - \mathrm{Q}_m(0)}{h - 0} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{m!} \prod_{j=1}^{m-1} (h - j) = \frac{(-1)^{m-1}}{m}$$

23.c Finalement, $u_n(\mathrm{Q}_0) = 0$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$u_n(\mathrm{Q}_k) = \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \mathrm{Q}_{k-m} = \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m+1}}{m} w_n^m(\mathrm{Q}_k)$$

Mais la question **14.e** montre que $w_n^m(\mathrm{Q}_k) = 0$ pour $m \geq k + 1$ donc

$$u_n(\mathrm{Q}_k) = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} w_n^m(\mathrm{Q}_k)$$

Comme $(\mathrm{Q}_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de E_n,

$$u_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} w_n^m$$

Mais la question **15.e** montre que $w_n^m = 0$ pour $m \geq n + 1$ donc

$$u_n = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} w_n^m$$

Remarque. On retrouve le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1 + x)$. Formellement, ceci a du sens puisque $v_n = \exp(u_n)$ de sorte que

$$u_n = \ln(v_n) = \ln\left(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n} + (v_n - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n})\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n})^m$$

Bien entendu, ces dernières égalités sont à prendre avec beaucoup de pincettes...