EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1 ★★

Soit a et b deux fonction impaires continues sur $\mathbb{R}$. Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrer que f est paire.

Exercice 2 ★★ Périodicité

Soient $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+^*$, a et b deux fonctions continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$ et f une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$. Montrer que f est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(\mathrm{T})$.

Exercice 3 ★

Résoudre sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ puis $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' - xy = 1$$

Exercice 4 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy' - \alpha y = 0$. Déterminer l'unique solution f vérifiant $f(1) = 1$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy' - \alpha y = f$. Déterminer l'unique solution g vérifiant $g(1) = 0$.
3. On définit par récurrence une suite de fonctions (u_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ de la manière suivante :
   - $u_0 = f$;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est l'unique solution de l'équation différentielle $xy' - \alpha y = u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ valant 0 en 1.

   Remarque. On a donc $u_1 = g$.

   Déterminer par récurrence u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 ★★★★

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 6 ★

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - (1 - i)y' - 2(1 + i)y = 0$.
2. Donner l'unique solution f vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.

Exercice 7 ★★★

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f + f'' \geq 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

Exercice 8 ★★★ Mines MP 2010

Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On considère l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. On suppose que q est non constamment nulle au voisinage de $+\infty$ et que l'on dispose d'une solution y strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et on pose $f = \dfrac{y'}{y}$.

1. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
2. Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ puis qu'elle y est strictement positive.
4. Montrer que q est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_{[x,+\infty[} q \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 9 ★

On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à valeurs *réelles*

$$(\mathbf{E}) : y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à $(\mathbf{E})$.
2. Déterminer une solution particulière de $(\mathbf{E})$.
3. Résoudre l'équation $(\mathbf{E})$.
4. Déterminer l'unique solution f de $(\mathbf{E})$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Exercice 10 ★★

Soient a, b et x_0 des réelles tels que $a^2 \neq b$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que

$$\begin{cases} f'' + af' + bf = 0 \\ f^{(3)}(x_0) = f(x_0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$$
2. Résoudre ensuite sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = \frac{1}{1+t^2}$$

Exercice 12 ★★

Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle $y'' + y = \tan t$.

Exercice 13 ★★★

1. Déterminer les vecteurs propres de l'endomorphisme
$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*) \\ y & \longmapsto & (x \mapsto xy'(x)) \end{cases}$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle
$$x^2y'' + xy' - \alpha^2 y = 0$$

Exercice 14 ★★

On étudie l'équation différentielle $(t^2+1)y'' - 2y = t$.

1. Déterminer une solution polynomiale non nulle φ de l'équation homogène associée.
2. Résoudre l'équation homogène en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.
3. Exprimer la solution générale de l'équation étudiée.

Exercice 15 ★★★★ **ENS MP 2010**

Soient q une application continue périodique non identiquement nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et f une solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Montrer que f s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 16 ★★★

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction 2π-périodique. Montrer que l'équation différentielle $y'' + y = f$ admet des solutions 2π-périodiques si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos t \, dt = \int_0^{2\pi} f(t)\sin t \, dt = 0$$

Exercice 17 ★★★ **TPE-EIVP MP 2018**

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

1. On considère f une fonction solution de (E) sur $[0,1]$ s'annulant une infinité de fois. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = f'(x) = 0$
2. Déterminer toutes les solutions de (E) s'annulant une infinité de fois sur $[0,1]$.

Exercice 18 ★★

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(nt)$.
2. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(nt)$$

Exercice 19 **CCP MP**

1. Montrer qu'il existe une solution h de l'équation $xy'' + y' + y = 0$ développable en série entière et vérifiant $h(0) = 1$.
2. Montrer que h ne s'annule qu'une fois sur $]0,2[$.

Systèmes différentiels

Exercice 20 ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Résoudre, à l'aide de matrices, le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x + 6y \\ y' = -3x - 6y \\ z' = -3x - 6y - 5z \end{cases}$$

Exercice 21 ★★★

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$.

Exercice 22 ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soit le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & -2t \\ 4t & 1+3t \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de $A(t)$.
2. En déduire qu'il existe P indépendant de t telle que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale.
3. Résoudre le système différentiel.

Exercice 23 ★★ **TPE-EIVP MP 2014**

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 9x(t) - 5y(t) + 2t \\ y'(t) = 10x(t) - 6y(t) + e^t \end{cases}$$

Exercice 24 ★★

Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x + 3y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

Exercice 25 ★★ **Saint-Cyr PSI 2019**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donner une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.

2. Trouver les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, avec $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$.

Exercice 26 ★★

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$$

1. Montrer que $V : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}$.

2. **a.** Soit $X \in \mathcal{S}$. Montrer que $AX \in \mathcal{S}$.
   b. En déduire une base de $\mathcal{S}$.

3. **a.** Soit $X \in \mathcal{S}$. Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.
   b. Soient $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PMP^{-1}$.
   Soit $Y : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $Y' = MY$. Montrer que Y est bornée sur $\mathbb{R}$.

4. On introduit sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par $(X \mid Z) = X^{\mathsf{T}}Z$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
   Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = (A + b(t)I_2)X(t)$$
   Soit $f : t \mapsto \|X(t)\|^2$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = 2b(t)f(t)$$

5. Montrer que la fonction X de la question précédente est bornée.

Changement de variable

Exercice 27 ★★

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \ x^2y'' - xy' - 3y = x^4$$

1. **a.** Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.

   b. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. **a.** Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $g : t \mapsto f(-e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à coefficients constants à déterminer.

   b. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28 **CCINP (ou CCP) MP 2013**

On se donne l'équation différentielle $4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$.

1. Trouver une solution polynomiale de degré 2 à l'équation.
2. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra poser $x = e^t$.
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$.

Problèmes de raccord

Exercice 29 ★★ **Problème de raccordement**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x^2y' - y = 0$.

Exercice 30 ★★

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$.

Exercice 31 ★★ **Raccordement**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' - y = x$.

Exercice 32 ★★ **Raccordement**

On considère l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : xy'' - y' - x^3y = 0$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en effectuant le changement de variable $t = x^2$.
2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33 ★★ **Problème de raccord**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : \ ty' + (1-t)y = e^{2t}$.

Exercice 34 ★★ **Mines MP**

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$

$$x\ln(x)y' - (3\ln(x) + 1)y = 0$$

Wronskien

Exercice 35 ★★★ **CCP MP 2017**

On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(\mathrm{E}) : x'' + 2\frac{x'}{t} + x = 0$$

1. Montrer que $\varphi_1 : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est solution de (E).
2. A l'aide du wronskien, chercher une autre solution de (E).

Exercice 36 ★★★

Soient q une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + qy = 0$.

1. Soit f une solution bornée de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f' admet une limite en $+\infty$ puis déterminer la valeur de cette limite.

2. Soient f et g deux solutions bornées de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Étudier le wronskien $w = fg' - f'g$ des solutions f et g.
En déduire que f et g sont liées. Que peut-on en conclure ?

Exercice 37 ★★★ **Zéros entrelacés**

1. Soient p et q deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $p \leq q$ sur $\mathbb{R}$. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $u'' + pu = 0$ et $v'' + qv = 0$. On suppose que u s'annule en des réels a et b avec $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$.

   a. On pose $W = u'v - uv'$. Déterminer W'.

   b. En déduire que v s'annule sur $[a, b]$.

2. Application. Soient r une fonction continue sur $\mathbb{R}$, f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' + rf = 0$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$.

   a. On suppose $r \geq M^2$. Montrer que tout intervalle fermé de longueur $\frac{\pi}{M}$ contient au moins un zéro de f.

   b. On suppose $r \leq M^2$. On suppose que f s'annule en des réels a et b tels que $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que $b - a \geq \frac{\pi}{M}$.

Divers

Exercice 38 ★★★ **Equation fonctionnelle de l'exponentielle matricielle**

Déterminer les applications $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivables en 0 vérifiant :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2,\ M(s + t) = M(s)M(t)$$

Exercice 39 ★★★ **Banque Mines-Ponts MP 2019**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr}(A) > 0$, et $x : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = Ax(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.
Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle ℓ, telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ \ell(x(t)) = 0$.

Exercice 40 ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes bornées.

Exercice 41 ★★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble S_α des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f'(x) = -f(\alpha - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^2$.

2. Montrer que les éléments de S_α sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

3. Conclure.

Exercice 42 ★★

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$$

Exercice 43 ★★

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -f(-x)$$