

DEVOIR SURVEILLÉ N°11

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

E3A MP 2021

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour $|t| < 1$, on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

- $G_X(t) = \frac{1}{2-t}$
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction G_X .
2. Donner le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.
3. En déduire le développement en série entière de la fonction G_Y .
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X = n)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$.
5. Soient $S = X + Y$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}(S = n)$.
6. **Calculs d'espérances et de variances.**
 - a. Justifier que la variable aléatoire $X + 1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
 - b. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .
 - c. Déterminer à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y-1)$.
 - d. En déduire la variance de la variable aléatoire Y .
 - e. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S .

Problème 1 – CCP MP Maths1 2011 – Autour de la transformation de Laplace

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} ;
- E l'ensemble des applications $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues, telles que, pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur \mathbb{R}_+ ;
- F l'ensemble des applications continues et bornées sur \mathbb{R}_+ .

Pour tout $f \in E$, on appelle *transformée de Laplace* de f et on note $\mathcal{L}(f)$ l'application définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$$

- 1 Question préliminaire.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

On considère les propositions suivantes :

- (i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
- (ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

- 1.a** f est positive sur $[a, +\infty[$;
- 1.b** f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

I Exemples et propriétés

- 2** **2.a** Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2.b Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2.c Justifier que \mathcal{L} est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} .
- 3** **3.a** On considère la fonction $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $U(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(U)$.
3.b Soit un réel $\lambda \geq 0$. On considère la fonction $h_\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$. Démontrer que $h_\lambda \in E$ et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.
- 4** Soient $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère $g_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^n f(t)$. Montrer que $g_n \in E$.
- 5 Transformée de Laplace d'une dérivée.** Soit $f \in E$ de classe \mathcal{C}^1 , croissante et bornée sur \mathbb{R}_+ . Démontrer que $f' \in E$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

- 6 Régularité d'une transformée de Laplace.**

- 6.a** Démontrer que pour tout $f \in E$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 a été définie à la question 4.
- 6.b** Démontrer que pour tout $f \in E$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

II Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E .

7 On suppose dans cette question que $f \in F$.

7.a Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

7.b Théorème de la valeur initiale. On suppose de plus que f est de classe \mathcal{C}^1 et croissante sur \mathbb{R}_+ , avec f' bornée sur \mathbb{R}_+ .

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8 Théorème de la valeur finale. On suppose dans cette question que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

8.a Démontrer que $f \in F$.

8.b Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x) dx$ où h_n est la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$h_n(x) = e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right).$$

8.c En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

8.d Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ quand x tend vers 0.

9 Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur \mathbb{R}_+ et on pose $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

9.a Démontrer que R est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et déterminer R' .

En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

9.b On fixe $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel positif A tel que pour tout $t \geq A$, on ait $|R(t)| \leq \varepsilon$.

En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon$$

9.c Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

III Application : calcul de l'intégrale de Dirichlet

Dans cette partie, f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour tout réel $t > 0$.

10 Démontrer que la fonction F définie sur \mathbb{R}_+ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

11 En considérant la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| dt$, démontrer que f n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ .

12 Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout $X > 0$,

$$\int_0^X \sin(t)e^{-xt} dt = -\frac{1}{1+x^2} (e^{-xX}(x \sin X + \cos X) - 1)$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Déterminer alors $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt$.

- 13** Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ .
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question **9**) :

Lorsque $f \in E$ vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) \, dt = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

On notera que, par rapport à la question **9**, on a remplacé l'hypothèse « f intégrable sur \mathbb{R}_+ » par l'hypothèse « $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) \, dt = \ell \in \mathbb{R}$ ».