# Devoir à la maison n°10

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1

**1** Evident.

**2** On trouve

$$\begin{aligned}
\phi_A(E_{1,1}) &= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -bE_{1,2} + cE_{2,1} \\
\phi_A(E_{2,2}) &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} = bE_{1,2} + cE_{2,1} \\
\phi_A(E_{1,2}) &= \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = -cE_{1,1} + (a-d)E_{1,2} + cE_{2,2} \\
\phi_A(E_{2,1}) &= \begin{pmatrix} b & 0 \\ (d-a) & -b \end{pmatrix} = bE_{1,1} + (d-a)E_{2,1} - bE_{2,2}
\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de $\Phi_A$ dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}$$

**3** On trouve

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{A}} = \det(\mathrm{XI}_4 - \mathrm{M}) &= \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 0 & c & -b \\ 0 & \mathrm{X} & -c & b \\ b & -b & \mathrm{X}-a+d & 0 \\ -c & c & 0 & \mathrm{X}-d+a \end{vmatrix} \\
&= \mathrm{X}\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & -b \\ 1 & \mathrm{X} & -c & b \\ 0 & -b & \mathrm{X}-a+d & 0 \\ 0 & c & 0 & \mathrm{X}-d+a \end{vmatrix} && \mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 \text{ puis factorisation} \\
&= \mathrm{X}\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & -b \\ 0 & \mathrm{X} & -2c & 2b \\ 0 & -b & \mathrm{X}-a+d & 0 \\ 0 & c & 0 & \mathrm{X}-d+a \end{vmatrix} && \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\
&= \mathrm{X}\begin{vmatrix} \mathrm{X} & -2c & 2b \\ -b & \mathrm{X}-a+d & 0 \\ c & 0 & \mathrm{X}-d+a \end{vmatrix} \\
&= \mathrm{X}\left(\mathrm{X}(\mathrm{X}-a+d)(\mathrm{X}-d+a) - 2bc(\mathrm{X}-a+d) - 2bc(\mathrm{X}-d+a)\right) && \text{d'après la règle de Sarrus} \\
&= \mathrm{X}^2\left[\mathrm{X}^2 - \left((d-a)^2 + 4bc\right)\right]
\end{aligned}$$

**4** Posons $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$ de sorte que $\chi_{\Phi_{\mathrm{A}}} = \mathrm{X}^2(\mathrm{X}^2 - \Delta)$.
Si $\Delta < 0$, $\chi_{\mathrm{A}}$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ donc $\Phi_{\mathrm{A}}$ n'est pas diagonalisable.
Si $\Delta = 0$, $\chi_{\Phi_{\mathrm{A}}} = \mathrm{X}^4$ donc $\mathrm{Sp}(\Phi_{\mathrm{A}}) = \{0\}$. Si $\Phi_{\mathrm{A}}$ était diagonalisable, il serait nul, ce qui n'est pas. Ainsi $\Phi_{\mathrm{A}}$ n'est pas diagonalisable.
Si $\Delta > 0$, alors $\chi_{\Phi_{\mathrm{A}}} = \mathrm{X}^2(\mathrm{X}-\delta)(\mathrm{X}+\delta)$ en posant $\delta = \sqrt{\Delta}$. Donc $\mathrm{Sp}(\Phi_{\mathrm{A}}) = \{0, \delta, -\delta\}$ (en particulier, $\delta \neq -\delta$). En considérant les multiplicités de $\delta$ et $-\delta$ dans $\chi_{\Phi_{\mathrm{A}}}$, on a $\dim \mathrm{E}_\delta(\Phi_{\mathrm{A}}) = \dim \mathrm{E}_{-\delta}(\Phi_{\mathrm{A}}) = 1$. Enfin, $\mathrm{I}_2$ et A appartiennent à $\mathrm{Ker}\,\Phi_{\mathrm{A}}$ et ne sont pas colinéaires par hypothèse donc $\dim \mathrm{E}_0(\Phi) = \dim \mathrm{Ker}\,\Phi_{\mathrm{A}} \geq 2$. En considérant la multiplicité de 0 dans $\chi_{\Phi_{\mathrm{A}}}$, on a donc $\dim \mathrm{E}_0(\Phi) = 2$. Ainsi $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\Phi_{\mathrm{A}})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\Phi_{\mathrm{A}}) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\Phi_{\mathrm{A}}$ est diagonalisable.
Par conséquent, $\Phi_{\mathrm{A}}$ est diagonalisable si et seulement si $\Delta > 0$.

**5** Remarquons que $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{A})\mathrm{X} + \det(\mathrm{A}) = \mathrm{X}^2 - (a+d)\mathrm{X} + (ad-bc)$. Notamment le discriminant de $\chi_{\mathrm{A}}$ vaut $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc = \Delta$.
Si $\Delta < 0$, $\chi_{\mathrm{A}}$ n'est pas scindé donc A n'est pas diagonalisable.
Si $\Delta = 0$, alors $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X} - \mathrm{tr}(\mathrm{A})/2)^2$ et $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{tr}(\mathrm{A})/2\}$. Si A était diagonalisable, alors A serait semblable à la matrice scalaire $\frac{\mathrm{tr}(\mathrm{A})}{2}\mathrm{I}_n$ et donc égale à cette matrice, ce qui est exclu par hypothèse.
Si $\Delta > 0$, $\chi_{\mathrm{A}}$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.
Finalement, A est diagonalisable si et seulement si $\Delta > 0$ i.e. si et seulement si $\Phi_{\mathrm{A}}$ est diagonalisable.

**6** **6.a** On trouve $\mathrm{DE}_{i,j} - \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{D} = (\lambda_i - \lambda_j)\mathrm{E}_{i,j}$.

**6.b** Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. D'après l'énoncé, $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Comme $\mathrm{B}_{i,j} = \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{P}^{-1}$

$$\Phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}_{i,j}) = \mathrm{AB}_{i,j} - \mathrm{B}_{i,j}\mathrm{A} = \mathrm{PDE}_{i,j}\mathrm{P}^{-1} - \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{DP}^{-1} = \mathrm{P}\left(\mathrm{DE}_{i,j} - \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{D}\right)\mathrm{P}^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)\mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{P}^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)\mathrm{B}_{i,j}$$

Ainsi $\mathrm{B}_{i,j}$ est bien un vecteur propre de $\Phi_{\mathrm{A}}$.

**6.c** L'application $\varphi : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{PMP}^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, cette application est clairement linéaire et on vérifie qu'en posant $\psi : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$, on a bien $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. On en déduit notamment que l'image de la base $(\mathrm{E}_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à savoir la famille $(\mathrm{B}_{i,j})$, est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $\Phi_{\mathrm{A}}$ : $\Phi_{\mathrm{A}}$ est diagonalisable.

**7** **7.a** **7.a.i** Comme $\Phi_{\mathrm{A}}$ est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont réelles.
**7.a.ii** Il suffit de constater que

$$\chi_{\mathrm{A}^\top} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}^\top) = \det((\mathrm{XI}_n - \mathrm{A})^\top) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A})$$

On conclut en invoquant le fait que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

**7.a.iii**
$$\Phi_A(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top A = zXY^\top - X(A^\top Y)^\top = zXY^\top - \overline{z}XY^\top = (z-\overline{z})XY^\top$$
Comme X et Y ne sont pas nuls, il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $X_i \neq 0$ et $Y_j \neq 0$. Alors $(XY^\top)_{i,j} = X_iY_j \neq 0$ donc $XY^\top \neq 0$. On en déduit que $z - \overline{z}$ est bien une valeur propre de $\Phi_A$.

**7.b** A possède au moins une valeur propre complexe $z$ car $\chi_A$ est scindé dans $\mathbb{C}$. Comme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, $\overline{z}$ est également valeur propre de A. D'après la question précédente, $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ est également valeur propre de $\Phi_A$. Mais toutes les valeurs propres de $\Phi_A$ sont réelles donc $\mathrm{Im}(z) = 0$ puis $z \in \mathbb{R}$. Ainsi A possède au moins une valeur propre réelle.

**Remarque.** On a également montré que toutes les valeurs propres de A étaient réelles.

**7.c** Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Par définition, $\Phi_A(P_{i,j}) = \lambda_{i,j}P_{i,j}$ ou encore $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$. On en déduit que
$$AP_{i,j}X = \left(\lambda_{i,j}P_{i,j} + P_{i,j}AX\right) = (\lambda_{i,j} + \lambda)P_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$$
en posant $\mu_{i,j} = \lambda + \lambda_{i,j}$.

**7.d** L'application linéaire $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MX \end{array}\right.$ est surjective. En effet, comme X est non nul, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $X_i \neq 0$. Si on se donne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors en considérant la matrice M dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est $Y/X_i$ et dont les autres colonnes son nulles, on a bien $MX = Y$.
L'image de la base $(P_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à savoir la famille $(P_{i,j}X)$ est donc une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On peut alors en extraire une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, cette base est composée de vecteurs propres de A. La matrice A est donc diagonalisable.

**8** Tout d'abord, $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est bien une famille de $\mathbb{R}[A]$.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ tel que $\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k A^k = 0$. Alors $P = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k X^k$ est un polynôme annulateur de A. Par conséquent, $\pi_A$ divise P. Or $\deg P \leq m-1 < m = \deg \pi_A$ donc $P = 0$ puis $(\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}) = (0, \dots, 0)$. Ainsi $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est libre.
Enfin, soit $M \in \mathbb{R}[A]$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$. Notons R le reste de la division euclidienne de P par $\pi_A$. Alors $M = P(A) = R(A)$ et $\deg R < \deg \pi_A = d$ donc $M \in \mathrm{vect}(I_n, A, \dots, A^{m-1})$. La famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est génératrice.
Ainsi $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est bien une base de $\mathbb{R}[A]$.

**9** Comme $\mathbb{R}[A]$ est une algèbre commutative, $\mathbb{R}[A] \subset \mathrm{Ker}\,\Phi_A$. On en déduit que $\dim \mathrm{Ker}\,\Phi_A \geq \dim \mathbb{R}[A] = d$.

**10** **10.a** Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ i.e. $\sum_{i=1}^n \lambda_i u^{n-i}(y) = 0$. Supposons que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ne soit pas nul. Notons alors $j = \max\{i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \neq 0\}$. Ainsi $\lambda_j = 0$ pour tout $j > i$. Donc $\sum_{i=1}^j \lambda_i u^{n-i}(y) = 0_E$. En appliquant, $u^{j-1}$ à cette égalité, on obtient $\lambda_j u^{n-1}(y) = 0_E$, ce qui est contradictoire. Ainsi $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est nul et $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Comme $\dim \mathbb{R}^n = n$, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

**10.b** Comme $B \in \mathrm{Ker}\,\Phi_A$, A et B commutent. Par conséquent, $u$ et $v$ commutent également. On en déduit aisément que $u$ et $v^k$ commutent pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi
$$\begin{aligned}\forall j \in [\![1,n]\!],\ v(e_j) = v \circ u^{n-j}(y) = u^{n-j} \circ v(y) &= u^{n-j}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = u^{n-j}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(y)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-j} \circ u^{n-i}(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i} \circ u^{n-j}(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(e_j) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}\right)(e_j)\end{aligned}$$
Ainsi les endomorphismes $v$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$ coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ : ils sont égaux.

**10.c** La question précédente montre que si $B \in \mathrm{Ker}\,\Phi_A$, alors $v \in \mathbb{R}[u]$ i.e. $B \in \mathbb{R}[A]$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,\Phi_A \subset \mathbb{R}[A]$. Mais on a vu précédemment que $\mathbb{R}[A] \subset \mathrm{Ker}\,\Phi_A$ donc $\mathrm{Ker}\,\Phi_A = \mathbb{R}[A]$ par double inclusion.

**11** **11.a** Remarquons tout d'abord que $B \in \mathrm{Ker}\,\Phi_A$ si et seulement si $u$ et $v$ commutent.
Si $u$ et $v$ commutent, on sait que les sous-espaces propres de $u$ sont stables par $v$.
Réciproquement, supposons que tous les sous-espaces propres de $u$ soient stables par $v$. Fixons $k \in [\![1,p]\!]$ et $x \in E_u(\lambda_k)$. Alors, d'une part, $v \circ u(x) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x)$ et d'autre part, $u \circ v(x) = \lambda_k v(x)$ car $v(x) \in E_u(\lambda_k)$. On en déduit que $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur $E_u(\lambda_k)$. Comme $u$ est diagonalisable, ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans E. On en déduit que $u \circ v = v \circ u$.

**11.b** On en déduit que $B \in \operatorname{Ker} \Phi_A$ si et seulement si la matrice de $v$ dans une base adaptée à la décomposition en somme directe des sous-espaces propres de $u$ est diagonale par blocs, chaque bloc diagonal ayant même taille que la dimension du sous-espace propre respectif, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_r \end{pmatrix}$$

avec $B_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$.

**11.c** L'isomorphisme qui à un endomorphisme associe sa matrice dans une base donnée nous permet d'affirmer que $\operatorname{Ker} \Phi_A$ a la même dimension que le sous-espace vectoriel des matrices diagonales par blocs de la forme précédente. Comme l'application qui à $(B_1, \dots, B_p) \in \prod_{k=1}^{p} \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$ associe la matrice $\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_r \end{pmatrix}$ est clairement un isomorphisme, on en déduit que

$$\dim \operatorname{Ker} \Phi_A = \dim \prod_{k=1}^{p} \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{p} m_k^2$$

**11.d** Il s'agit d'envisager toutes les décompositions de 7 comme sommes d'entiers naturels non nuls. Passionnant ! Un peu de Python.

```
>>> def partitions(n, I=1):
...     yield (n,)
...     for i in range(I, n//2 + 1):
...         for p in partitions(n-i, i):
...             yield (i,) + p
...
>>> set([sum(k**2 for k in p) for p in partitions(7)])
{37, 7, 9, 11, 13, 15, 49, 17, 19, 21, 25, 27, 29}
```

**12** Remarquons déjà que $AB - BA = \alpha B$.
On procède ensuite par récurrence. Le résultat est évident pour $k = 0$. Supposons-le vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors $AB^k - B^k A = \alpha k B^k$ puis

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A = (\alpha k B^k + B^k A)B - B^{k+1}A = \alpha k B^{k+1} + B^k(AB - BA) = \alpha(k+1)B^{k+1}$$

Par récurrence, le résultat est établi pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**13** Ecrivons $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. Par linéarité de $\Phi_A$,

$$\Phi(P(B)) = \Phi\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k B^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \Phi_A(B^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \alpha k B^k = \alpha B \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k B^{k-1} = \alpha B P'(B)$$

**14** En appliquant la relation précédente à $P = \pi_B$, on obtient

$$0 = \Phi_A(\pi_B(B)) = \alpha B \pi'_B(B)$$

Ainsi $\alpha X \pi'_B$ est un polynôme annulateur de B. Par conséquent, $\pi_B$ divise $\alpha X \pi'_B$. Comme ces deux polynômes ont même degré ($\alpha \neq 0$), ils sont associés i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda \pi_B = \alpha X \pi'_B$. En observant les coefficients dominants de ces deux polynômes, on obtient $\lambda = d\alpha$ de sorte que $X\pi'_B - d\pi_B = 0$.

**15** Posons $\pi_B = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} b_k X^k$. L'égalité $X\pi'_B = d\pi_B$ donne $kb_k = db_k$ pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$. On en déduit que $b_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$. Ainsi $\pi_B = X^d$. Comme $\pi_B$ est un polynôme annulateur de B, $B^d = 0$.