Devoir à la maison n°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 **E3A Maths B MP 2012**

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* son *endomorphisme adjoint*, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de E vérifiant

$$\forall(x,y)\in \mathrm{E}^2,\ \langle u(x),y\rangle = \langle x,u^*(y)\rangle$$

On dit qu'un endomorphisme p de E est un *projecteur* s'il vérifie $p^2=p$. On dit que le projecteur p est *strict* si p n'est ni l'endomorphisme nul, ni l'identité Id_E.

Un projecteur p est dit *orthogonal* si les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont orthogonaux.

1. Soit p un projecteur de E.

a. Démontrer que $\mathrm{E}=\mathrm{Ker}(p)\oplus\mathrm{Im}(p)$.

b. Dans le cas où p est un projecteur orthogonal, démontrer que

i. Pour tout $x\in\mathrm{E}$, $\|p(x)\|\leq\|x\|$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

ii. Pour tout $x\in\mathrm{E}$, $\langle p(x),x\rangle\geq 0$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

c. Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $p=p^*$.

2. On considère ici le cas particulier du plan $\mathrm{E}=\mathbb{R}^2$.

a. Soit $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Démontrer que M est la matrice d'un projecteur strict orthogonal dans une base orthonormée de E si et seulement si $\begin{cases}d=1-a\\b=c\\a(1-a)=b^2\end{cases}$.

b. Qu'impose cette dernière égalité pour la valeur de a ?

c. Soit $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}a&b\\b&1-a\end{pmatrix}$ la matrice d'un projecteur strict orthogonal dans une base orthonormée de E. Exprimer ce produit de matrices

$$\mathrm{N}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\b&1-a\end{pmatrix}$$

Justifier que la matrice N est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans l'intervalle $[0,1]$.

d. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs stricts orthogonaux de E. Démontrer que l'endomorphisme $p_1\circ p_2$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0,1]$.

3. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs stricts orthogonaux d'un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

a. Déterminer l'endomorphisme adjoint de $p_1 \circ p_2 \circ p_1$. En déduire que l'endomorphisme $p_1 \circ p_2 \circ p_1$ est diagonalisable dans une base orthonormée (on citera précisément le théorème utilisé) et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.

b. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(p_1)$ est stable par l'endomorphisme $p_1 \circ p_2 \circ p_1$.

c. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(p_1)$ est stable par l'endomorphisme $p_1 \circ p_2$ et que celui-ci induit sur $\mathrm{Im}(p_1)$ un endomorphisme diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont dans l'intervalle $[0, 1]$.

d. Soit G le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Ker}(p_2)$. On note $\mathrm{G}^\perp$ son orthogonal dans E. Démontrer que $\mathrm{G}^\perp = \mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Im}(p_2)$. Que vaut l'endomorphisme $p_1 \circ p_2$ sur $\mathrm{G}^\perp$?

e. Démontrer que l'endomorphisme $p_1 \circ p_2$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.

f. Soit r_2 le rang de p_2. Démontrer que $\mathrm{tr}(p_1 \circ p_2) \leq r_2$. Etudier le cas d'égalité.

Exercice 2 **E3A Maths B MP 2012**

Etant donné un entier naturel non nul n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices (n,n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On désigne par I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Etant donnée une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_{\mathrm{M}}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{M})$ son polynôme caractéristique.
Si A, B, C, D sont quatre matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{M}_{\mathrm{A,B,C,D}}$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par :

$$\mathrm{M}_{\mathrm{A,B,C,D}} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

1. Soient A, B, C, D, E cinq matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Exprimer la matrice produit $\mathrm{M}_{\mathrm{A,B,C,D}}\mathrm{M}_{\mathrm{I}_n,\mathrm{E},0_n,\mathrm{I}_n}$.

b. On suppose la matrice A inversible. Justifier l'égalité :

$$\det(\mathrm{M}_{\mathrm{A,B,C,D}}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{D} - \mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B})$$

2. On suppose que les matrices A et C commutent.

a. On suppose que la matrice A est inversible. Démontrer que $\det(\mathrm{M}_{\mathrm{A,B,C,D}}) = \det(\mathrm{AD} - \mathrm{CB})$.

b. On ne suppose plus la matrice A inversible.

i. Démontrer qu'il existe des matrices U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que le polynôme caractéristique de la matrice $\mathrm{M}_{\mathrm{A,B,C,D}}$ vérifie $\chi_{\mathrm{M}_{\mathrm{A,B,C,D}}}(\lambda) = \det(\lambda^2 \mathrm{I}_n + \lambda \mathrm{U} + \mathrm{V})$.
Expliciter U et V en fonction des matrices A, B, C et D.

ii. En déduire que $\det(\mathrm{M}_{\mathrm{A,B,C,D}}) = \det(\mathrm{AD} - \mathrm{CB})$.

3. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{A} = \mathrm{D} = \mathrm{I}_n$ et que C et B sont deux matrices à coefficients réels transposées l'une de l'autre. On désigne la matrice $\mathrm{M}_{\mathrm{I}_n,\mathrm{B},\mathrm{B}^\top,\mathrm{I}_n}$ par S.

a. Justifier que $\mathrm{B}^\top\mathrm{B}$ est une matrice symétrique positive.

b. Exprimer le polynôme χ_{S} en fonction du polynôme $\chi_{\mathrm{B}^\top\mathrm{B}}$.

c. En déduire que la matrice S est symétrique définie positive si et seulement si les valeurs propres de la matrice $\mathrm{B}^\top\mathrm{B}$ sont toutes strictement inférieures à 1.

4. On considère la suite de matrices $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par :

$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall n > 1,\ \mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 2\mathrm{A}_{n-1} & i\mathrm{A}_{n-1} \\ i\mathrm{A}_{n-1} & -2\mathrm{A}_{n-1} \end{pmatrix}$$

a. Soit $n > 1$. Déterminer une relation de récurrence entre $\det(\mathrm{A}_n)$ et $\det(\mathrm{A}_{n-1})$.

b. Soit $n \geq 1$. Exprimer $\det(\mathrm{A}_n)$ en fonction de n.

c. Soit $n > 1$. Exprimer le polynôme caractéristique χ_{A_n} de la matrice A_n en fonction de $\chi_{\mathrm{A}_{n-1}}$ et $\chi_{(-\mathrm{A}_{n-1})}$.

d. Soit $n \geq 1$. Déterminer les valeurs propres de la matrice A_n.