

DEVOIR À LA MAISON N°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – Centrale PSI Maths II 2003

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On considère un espace euclidien E de dimension n . On note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y et $x \mapsto \|x\|$ la norme associée.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note u^* son adjoint, π_u son polynôme minimal, χ_u son polynôme caractéristique et $\text{Sp } u$ l'ensemble de ses valeurs propres.

L'endomorphisme u de E est dit anti-autoadjoint lorsque $u^* = -u$.

On note $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$ et $\mathcal{O}(E)$ les sous-ensembles de $\mathcal{L}(E)$ formés respectivement des endomorphismes auto-adjoints, des endomorphismes anti-autoadjoints et des isométries vectorielles.

Si F est un sous-espace de E stable par u , on note $u|_F$ l'endomorphisme de F induit par u .

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E tels que u^* soit un polynôme en u et $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui commutent avec leur adjoint, donc :

$$\mathcal{P}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E), u^* \in \mathbb{R}[u]\} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E), u^* \circ u = u \circ u^*\}$$

Le but du problème est d'étudier et comparer les deux ensembles $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{N}(E)$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n et \mathcal{S}_n , \mathcal{A}_n et \mathcal{O}_n les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formés respectivement des matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note χ_A son polynôme caractéristique et π_A son polynôme minimal. On note A^T la transposée de A .

Deux matrices A et B sont dites orthogonalement semblables lorsqu'il existe $P \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = P^{-1}AP$.

On note \mathcal{P}_n l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A^T peut s'exprimer comme un polynôme en A , donc :

$$\mathcal{P}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^T \in \mathbb{R}[A]\}$$

et de manière analogue

$$\mathcal{N}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^T A = A A^T\}$$

Les parties I et II sont indépendantes.

I Généralités sur $\mathcal{P}(E)$ et \mathcal{P}_n

- 1** **1.a** Soient A et B les deux matrices d'un même endomorphisme de E rapporté à deux bases orthonormales. Montrer que A et B sont orthogonalement semblables.
- 1.b** Soit u un endomorphisme de E et A sa matrice sur \mathcal{B} , une base orthonormale de E . Etablir un rapport entre l'appartenance de u à $\mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{N}(E)$) et l'appartenance de A à \mathcal{P}_n (resp. \mathcal{N}_n).
Dans la suite du problème, on pourra exploiter ce rapport pour répondre à certaines questions.
- 1.c** Montrer que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{N}(E)$ et que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{N}_n$.

- 2** **2.a** Vérifier que $\mathcal{S}(E) \subset \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{A}(E) \subset \mathcal{P}(E)$.
- 2.b** Quelles sont les matrices triangulaires supérieures qui appartiennent à \mathcal{P}_n ?
En déduire que si $n \geq 2$, on a $\mathcal{P}(E) \neq \mathcal{L}(E)$.
- 2.c** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant, sur une certaine base \mathcal{B} de E , une matrice triangulaire supérieure. Montrer qu'il existe une base orthonormale \mathcal{B}' de E , telle que les matrices de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et de \mathcal{B}' à \mathcal{B} soient triangulaires supérieures.
Montrer que la matrice de u dans \mathcal{B}' est triangulaire supérieure.
En déduire les éléments $u \in \mathcal{P}(E)$ qui sont trigonalisables.
- 2.d** On suppose que u est un automorphisme de E ; montrer que u admet un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. En déduire que u^{-1} peut s'écrire comme un polynôme en u .
En déduire que $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{P}(E)$.
- 3** **3.a** Montrer que si $A \in \mathcal{P}_n$ et $A \neq 0$, alors il existe un unique polynôme réel que l'on note P_A , tel que $\deg P_A < \deg \pi_A$ et $P_A(A) = A^T$.
Si A est la matrice nulle, on convient que P_A est le polynôme nul.
Énoncer le résultat correspondant pour $u \in \mathcal{P}(E)$.
- 3.b** Déterminer les matrices A de \mathcal{P}_n pour lesquelles P_A est un polynôme constant.
- 3.c** Déterminer les matrices A de \mathcal{P}_n pour lesquelles P_A est du premier degré. On rappelle que toute matrice carrée s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- 3.d** Soient A et B deux matrices orthogonalement semblables.
Montrer que si $A \in \mathcal{P}_n$ alors $B \in \mathcal{P}_n$ et $P_A = P_B$.
- 4** Décrire les éléments A de \mathcal{P}_2 et calculer les P_A correspondants.
- 5** Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in \mathcal{P}_{n_1}$, $A_2 \in \mathcal{P}_{n_2}$.
- 5.a** On suppose que π_{A_1} et π_{A_2} sont premiers entre eux. Montrer l'existence de deux polynômes U et V tels que :

$$P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1} = P_{A_2} + (P_{A_1} - P_{A_2})V\pi_{A_2}$$

Calculer A^m pour m entier positif quelconque, puis $P(A)$ pour $P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1}$.

En déduire que $A \in \mathcal{P}_{n_1+n_2}$.

5.b Expliciter π_A en fonction de π_{A_1} et π_{A_2} .

Comment trouver P_A connaissant π_{A_1} , π_{A_2} et le polynôme P défini par $P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1}$?

6 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $A \in \mathcal{P}_4$ et calculer P_A avec la méthode précédente.

II Étude de $\mathcal{N}(E)$ et \mathcal{N}_n

- 7** Montrer que si $u \in \mathcal{N}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(u) \in \mathcal{N}(E)$.
- 8** Soient $u \in \mathcal{N}(E)$ et $x \in E$. Montrer que $\|u(x)\|^2 = \|u^*(x)\|^2$. En déduire que u et u^* ont le même noyau.
- 9** Soit m un entier, $m > 0$. On suppose donné un endomorphisme f anti-autoadjoint inversible de l'espace \mathbb{R}^m muni de son produit scalaire canonique.

- 9.a** Comparer les déterminants de f et f^* . En déduire que m est pair.
- 9.b** Justifier que f^2 est auto-adjoint puis que f^2 possède un vecteur propre unitaire x_0 .
En déduire que $\Pi = \text{vect}(x_0, f(x_0))$ est un plan stable par f .
Donner la forme de la matrice de $f|_{\Pi}$ dans une base orthonormale de Π .
- 9.c** Montrer qu'il existe une base orthonormale \mathcal{B} de \mathbb{R}^m telle que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{m/2} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b_i \neq 0 \text{ pour } i \in \llbracket 1, m/2 \rrbracket.$$

- 10** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $E_1 \subset E$ un sous-espace stable par u et u^* . On note E_2 l'orthogonal de E_1 .

- 10.a** Montrer que E_2 est stable par u et u^* .
- 10.b** Montrer que $(u|_{E_1})^* = (u^*)|_{E_1}$.
- 10.c** Montrer que si, en outre, $u \in \mathcal{N}(E)$, alors $u|_{E_1} \in \mathcal{N}(E_1)$ et $u|_{E_2} \in \mathcal{N}(E_2)$.

Jusqu'à la fin de la partie II, u désigne un élément de $\mathcal{N}(E)$.

- 11** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$; montrer que $\|u(x) - \lambda x\|^2 = \|u^*(x) - \lambda x\|^2$. En déduire que u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres et que ceux-ci sont en somme directe orthogonale.

Si λ est une valeur propre de u , on note $E_{\lambda}(u)$ le sous-espace propre associé. Soit F le supplémentaire orthogonal du sous-espace $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$.

Montrer que F est stable par u et u^* . En considérant la restriction de u à F , montrer que la dimension de F est paire. On notera $\dim F = 2p$.

- 12** On suppose que p est non nul. Soit $v \in \mathcal{N}(F)$. On pose

$$s = \frac{v + v^*}{2} \quad \text{et} \quad a = \frac{v - v^*}{2}$$

- 12.a** Justifier que le polynôme caractéristique de s est scindé. On le note :

$$\chi_s(X) = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{n_i}$$

- 12.b** Montrer que $s \circ a = a \circ s$ et $s \circ v = v \circ s$.

Montrer qu'il existe une base orthonormale \mathcal{B}' de F telle que la matrice de v dans \mathcal{B}' soit diagonale par blocs :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{pmatrix}$$

avec, pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, M_i de la forme $\lambda_i I_{n_i} + A_i$ où A_i est antisymétrique.

- 12.c** On suppose en outre que v n'admet aucune valeur propre réelle. Montrer que les A_i sont inversibles.

- 13** Montrer qu'il existe une base orthonormale \mathcal{B} de E telle que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_p \end{pmatrix}$$

avec D matrice diagonale, $\tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ et $b_i \neq 0$ pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

- 14** Donner une caractérisation des matrices $A \in \mathcal{N}_n$.
15 Préciser la matrice obtenue dans **13** quand $u \in \mathcal{O}(E)$.

III Relation entre \mathcal{P}_n et \mathcal{N}_n

- 16** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

16.a Soit

$$\Delta = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{pmatrix}$$

une matrice réelle diagonale par blocs.

Montrer que $P(\Delta) = \Delta^T$ si et seulement si $P(M_i) = M_i^T$, pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

16.b Donner les expressions de P_A , χ_A et π_A pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ où } b \neq 0$$

Montrer que $P(A) = A^T$ si et seulement si $P(a + ib) = a - ib$ et $P(a - ib) = a + ib$.

Dans les questions qui suivent, on fixe $A \in \mathcal{N}_n$. D'après **14**, A est orthogonalement semblable à une matrice B telle que celle représentée dans **13**.

16.c Montrer que $P(A) = A^T$ si et seulement si :

- $P(\lambda) = \lambda$ pour toute valeur propre réelle λ de A ;
- $P(z) = \bar{z}$ pour toute racine complexe non réelle z de χ_A .

16.d Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré minimal, vérifiant les conditions ci-dessus (sur $P(\lambda)$ et $P(z)$) et que ce polynôme est, en fait, à coefficients réels.

En déduire que $\mathcal{N}_n = \mathcal{P}_n$.

- 17** Montrer que le polynôme P trouvé dans la question **16.d** est, en fait, P_A .

Retrouver, avec la méthode précédente, le polynôme P_A de la question **6**.

- 18** Dans cette question, on suppose $n \geq 3$ et on note $C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice circulante

$$C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

et $J = C(0, 1, 0, \dots, 0)$.

18.a Montrer que $J \in \mathcal{P}_n$.

En déduire que toute matrice circulante appartient à \mathcal{P}_n .

18.b A toute matrice circulante non nulle $A = C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, on associe les polynômes

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \quad \text{et} \quad Q(X) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X^{n-i}$$

Donner l'expression de π_J . Comparer Q et le reste de la division euclidienne de $P_A \circ P$ par π_J .

En déduire les étapes d'une méthode de calcul de P_A . Détailler le calcul pour $A = C(1, 1, 0)$.

19 Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ avec $a_2 \neq 0$.

Montrer qu'il existe un entier $n \geq 3$ et une matrice $A \in \mathcal{P}_n$ telle que $P = P_A$ si et seulement si $(a_1 - 1)^2 - 4a_0a_2 \in [0, 4[$.

Indication : montrer que, si n et A existent, χ_A admet au moins une racine réelle et exactement deux racines complexes, conjuguées l'une de l'autre.