Réduction algébrique

Polynômes annulateurs

Solution 1

φ est clairement un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on constate que $\varphi^4 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Ainsi X^4-1 est un polynôme annulateur de φ. Par conséquent, $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-1,1\}$. On trouve que $E_1(\varphi) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-1}(\varphi) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$. Puisque

$$\dim E_1(\varphi) + \dim E_{-1}(\varphi) = 2 < 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

φ n'est pas diagonalisable.

Solution 2

1. Supposons $x \neq 0$ et soit $M \in E_x$. Alors
$$-\frac{1}{x}M(M+I_n) = -\frac{1}{x}(M+I_n)M = I_n$$
donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = -\frac{1}{x}(M+I_n)$.
Soit $M \in E_0$. Alors $M^2 + M = 0$. Si M est inversible, alors, en multipliant par M^{-1}, $M = -I_n$ et $-I_n$ est bien inversible. La seule matrice inversible de E_0 est $-I_n$.

2. Remarquons que $P_x = X^2 + X + x$ est un polynôme annulateur de toutes les matrices de E_x.
Si le discriminant de P_x est strictement négatif i.e. $x > \frac{1}{4}$, alors les matrices de E_x ne possèdent pas de valeur propre réelle et ne sont donc pas diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Si le discriminant de P_x est strictement positif i.e. $x < \frac{1}{4}$, alors P_x est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples donc toutes les matrices de E_x sont diagonalisables.
Si $x = \frac{1}{4}$, $P_{\frac{1}{4}} = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2$. On vérifie que $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ appartient à $E_{\frac{1}{4}}$ mais n'est pas diagonalisable.
Ainsi E_x ne contient que des matrices diagonalisables si et seulement si $x < \frac{1}{4}$.

3. Remarquons que $P_{-2} = (X-1)(X+2)$. Les spectres des matrices de E_{-2} sont inclus dans $\{1,-2\}$. Leurs traces peuvent donc valoir $1+1=2$, $1-2=-1$ et $-2-2=-4$. Il existe effectivement des matrices de E_{-2} dont les traces valent 2, -1 et -4, à savoir $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Ainsi $T = \{2,-1,-4\}$ et $\operatorname{card} T = 3$.

Solution 3

1. On a $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + 2g$ avec $g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top$. Comme $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et g sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f en est un également.

2. Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.
$$\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = 3M$$
$$\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = -M$$
Ainsi
$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$
$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer (détailler si cela ne semble pas clair) que

$$\operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$
$$\operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$$

On en déduit que f est diagonalisable, que ses valeurs propres sont 3 et 1 et que les sous-espaces propres associés respectifs sont $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. Déjà répondu à la question précédente.

4. Comme la trace et le déterminant d'un endomorphisme sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité et comme f est diagonalisable,

$$\operatorname{tr}(f) = 3 \cdot \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + (-1) \cdot \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = 3\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n(n+2)$$
$$\det(f) = 3^{\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \cdot (-1)^{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Solution 4

1. On constate que
$$(\lambda + \mu)\mathrm{M} = \lambda^2\mathrm{A} + \mu^2\mathrm{B} + \lambda\mu(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \mathrm{M}^2 + \lambda\mu\mathrm{I}_p$$
ou encore
$$\mathrm{M}^2 - (\lambda + \mu)\mathrm{M} + \lambda\mu\mathrm{I}_p = 0$$
Comme $\lambda\mu \neq 0$,
$$\frac{1}{\lambda\mu}\mathrm{M}\left((\lambda + \mu)\mathrm{I}_p - \mathrm{M}\right) = \mathrm{I}_p$$
Ceci prouve que M est inversible et que
$$\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{\lambda\mu}\left((\lambda + \mu)\mathrm{I}_p - \mathrm{M}\right)$$

2. A partir des deux premières égalités, on obtient $(\lambda - \mu)\mathrm{A} = \mathrm{M} - \mu\mathrm{I}_p$. Comme $\lambda \neq \mu$, on peut affirmer que $\mathrm{A} = \dfrac{1}{\lambda - \mu}(\mathrm{M} - \mu\mathrm{I}_p)$.

3. Un calcul donne
$$\mathrm{A}^2 = \frac{1}{(\lambda - \mu)^2}(\mathrm{M}^2 - 2\mu\mathrm{M} + \mu^2\mathrm{I}_p)$$
Or on a vu à la première question que $\mathrm{M}^2 = (\lambda + \mu)\mathrm{M} - \lambda\mu\mathrm{I}_p$ donc
$$\mathrm{A}^2 = \frac{1}{(\lambda - \mu)^2}\left((\lambda - \mu)\mathrm{M} - (\lambda\mu - \mu^2)\mathrm{I}_p\right) = \frac{\lambda - \mu}{(\lambda - \mu)^2}(\mathrm{M} - \mu\mathrm{I}_p) = \mathrm{A}$$
Ainsi A est une matrice de projecteur.
De plus, comme $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$,
$$\mathrm{B}^2 = (\mathrm{I}_p - \mathrm{A})^2 = \mathrm{I}_p - 2\mathrm{A} + \mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_p - \mathrm{A} = \mathrm{B}$$
donc B est une matrice de projecteur.

4. D'après la première question, $\mathrm{X}^2 - (\lambda + \mu)\mathrm{X} + \lambda\mu = (\mathrm{X} - \lambda)(\mathrm{X} - \mu)$ est un polynôme annulateur de M. Comme $\lambda \neq \mu$, ce polynôme est scindé à racines simples donc M est diagonalisable. On peut également affirmer que $\operatorname{Sp}(\mathrm{M}) \subset \{\lambda, \mu\}$.
Cette inclusion peut être stricte. Par exemple, si $\mathrm{A} = \mathrm{I}_p$ et $\mathrm{B} = 0$, alors $\mathrm{M} = \lambda\mathrm{I}_p$ et $\operatorname{Sp}(\mathrm{M}) = \{\lambda\}$. De même, si $\mathrm{A} = 0$ et $\mathrm{B} = \mathrm{I}_p$, alors $\mathrm{M} = \mu\mathrm{I}_p$ et $\operatorname{Sp}(\mathrm{M}) = \{\mu\}$.

Solution 5

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(v)$. On montre classiquement que $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Ker}(v - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est stable par u : u induit donc un endomorphisme u_λ de E_λ. Puisque u est diagonalisable, u annule un polynôme scindé à racines simples à coefficients dans $\mathbb{K}$. A fortiori, u_λ annule ce même polynôme et est donc également diagonalisable. Notons $\mathcal{B}_\lambda$ une base de E_λ dans laquelle la matrice de u_λ est diagonale. Notons alors $\mathcal{B}$ la juxtaposition des bases $\mathcal{B}_\lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Comme v est diagonalisable, E est la somme directe des sous-espaces propres de v et $\mathcal{B}$ est donc une base de E. Par construction, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale et celle de v l'est évidemment puisque $\mathcal{B}$ est la juxtaposition de bases de sous-espaces propres de v.

Solution 6

Méthode n°1 : A est diagonalisable donc il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Par conséquent, $\mathrm{A}^\top = (\mathrm{P}^{-1})^\top \mathrm{D}^\top \mathrm{P}^\top = (\mathrm{P}^\top)^{-1}\mathrm{D}\mathrm{P}^\top$. Ainsi $\mathrm{A}^\top$ est également diagonalisable.
Méthode n°2 : A est diagonalisable donc admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples. Alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}^\top) = \mathrm{P}(\mathrm{A})^\top = 0$ donc $\mathrm{A}^\top$ est également diagonalisable.

Solution 7

1. Notons (e_1, e_2, e_3) la base dans laquelle la matrice de g est G. On a $g(e_1) = e_2$ et $g(e_2) = e_3$ donc $(e_1, e_2, e_3) = (e_1, g(e_1), g^2(e_1))$ est une base de E et g est cyclique. On trouve sans peine

$$\chi_g = \mathrm{X}^3 - 6\mathrm{X}^2 + 11\mathrm{X} - 6 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3)$$

Comme χ_g est simplement scindé, g est diagonalisable.

2. Un endomorphisme cyclique n'est pas tojours diagonalisable. Considérons par exemple un endomorphisme f nilpotent d'indice $n-1$. Il existe alors $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. On montre alors classiquement que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Ainsi f est bien cyclique mais f n'est évidemment pas diagonalisable dès que $n \geq 2$.

3. Soit f un endomorphisme diagonalisable dont les valeurs propres sont distinctes deux à deux. Il existe donc une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. De plus, en notant λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i, les λ_i sont deux à deux distincts. Notons $x_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^k(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i$. La matrice de la famille $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est une matrice de Vandermonde associée au n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme les λ_i dont distincts deux à deux, cette matrice est inversible et la famille $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Ainsi f est cyclique.

4. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. On montre que l'ensemble $\{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P}(f)(x_0) = 0_\mathrm{E}\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Puisque les idéaux de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ sont principaux, cet idéal est engendré par un polynôme π_{f,x_0}. Puisque $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E, on a nécessairement $\deg \pi_{f,x_0} = n$. Mais π_f appartient aussi à l'idéal sus-mentionné donc π_{f,x_0} divise π_f. Ainsi $n = \deg \pi_{f,x_0} \leq \deg \pi_f \leq n$ puis $\deg \pi_f = n$. Comme f est diagonalisable, $\deg \pi_f = \mathrm{card}\,\mathrm{Sp}(f)$. On en déduit que $\mathrm{card}\,\mathrm{Sp}(f) = n$ et donc que les valeurs propres de f sont deux à deux distinctes.

Solution 8

On fait l'hypothèse de récurrence $\mathrm{HR}(n)$ suivante :

Si u et v sont deux endomorphismes trigonalisables d'un espace vectoriel E de dimension n tels que $u \circ v = v \circ u$, alors u et v trigonalisent dans une base commune.

Initialisation : $\mathrm{HR}(1)$ est trivialement vraie puisque, dans ce cas, la matrice de tout endomorphisme dans une base quelconque est triangulaire supérieur.
Hérédité : Supposons $\mathrm{HR}(n)$ pour un certain $n \geq 1$. Soient alors E un espace vectoriel de dimension $n+1$ et u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrons tout d'abord que u et v possèdent un vecteur propre commun. Puisque v est trigonalisable, v possède au moins une valeur propre λ. On montre alors classiquement que le sous-espace propre $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Ker}(v - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est stable par u. u induit un endomorphisme u_λ de E_λ. Comme u est trigonalisable, u annule un polynôme scindé à coefficients dans $\mathbb{K}$. A fortiori, u_λ annule ce même polynôme et est donc également trigonalisable. Par conséquent, u_λ possède une valeur propre et donc un vecteur propre e_1. Ce vecteur e_1 est donc également un vecteur propre de u et un vecteur propre de v puisqu'il appartient au sous-espace propre E_λ de v.

Comme $e_1 \neq 0_E$, on peut compléter ce vecteur en une base $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ de E. Les matrice de u et v dans cette base sont respectivement de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|ccc} \mu & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

avec $A', B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $E' = \operatorname{vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ et soient u' et v' les endomorphismes de E' de matrices respectives A' et B' dans la base $(e_2, \dots, e_{n+1})$ de E'.
On montre alors que si P est un polynôme, alors

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} P(\lambda) & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P(A') & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Comme u est trigonalisable, u annule un polynome scindé à coefficients dans $\mathbb{K}$ et donc A annule ce même polynôme. La remarque précédente montre que A' annule également ce polynôme : A' est donc trigonalisable et u' également. On montre de même que v' est trigonalisable.
Puisque u et v commutent, A et B commutent, ce qui entraîne la commutativité de A' et B' après un calcul par blocs et enfin la commutativité de u' et v'. On peut alors appliquer $HR(n)$: il existe donc une base $(e'_2, \dots, e'_{n+1})$ de E' dans laquelle les matrices de u' et v' sont triangulaires supérieures. Il suffit alors de vérifier que les matrices de u et v dans la base $(e_1, e'_2, \dots, e'_{n+1})$ de E sont également triangulaires supérieures.
Conclusion : Par récurrence, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Solution 9

---

1. On montre par exemple aisément que c'est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $M \in G$. Puisque le morphisme de groupe $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ M & \longmapsto & M^n \end{array}\right.$ ne peut être injectif puisque $\mathbb{Z}$ est infini et que G est fini. Son noyau contient donc un entier non nul n tel que $M^n = I_2$. On peut même supposer n positif quitte à le changer en son opposé.
Puisque le polynôme $X^n - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annule M, M est diagonalisable. On peut également ajouter que ses valeurs propres sont des racines de l'unité et en particulier des complexes de module 1.
Si M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ses valeurs propres ne peuvent être que 1 ou -1. Dans ce cas, M est semblable à I_2, $-I_2$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Dans tous les cas, $M^{12} = I_2$.
Si M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, elle l'est quand même dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont des complexes de module 1 conjugués puisque M est à coefficients réels. M est donc semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Puisque la trace est un invariant de similitude, $2\cos\theta = \operatorname{tr}(M) \in \mathbb{Z}$. Puisque cos est à valeurs dans $[-1, 1]$, $\cos\theta \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$.
    - Si $\cos\theta = \pm 1$, $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = \pm 1$ et on est ramené au cas précédent (en fait, M serait diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et on a supposé que ce n'était pas le cas).
    - Si $\cos\theta = \frac{1}{2}$, alors $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Il est alors clair que $M^{12} = I_2$.
    - Si $\cos\theta = \frac{-1}{2}$, alors $\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. Il est alors clair que $M^{12} = I_2$.
    - Si $\cos\theta = 0$, alors $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Il est alors clair que $M^{12} = I_2$.

Solution 10

---

1. Puisque $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, A est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Ainsi pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = \pm 1$ et, a fortiori, $\lambda_k \equiv 1[2]$. Puisque $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, $\operatorname{tr}(A) \equiv n[2]$.

2. Les valeurs propres de A ne peuvent pas toutes être égales à 1 ou -1 sinon, A serait semblable à I_n ou $-I_n$ et donc égale à I_n ou $-I_n$. En notant a le nombre de valeurs propres égales à 1 et b le nombre de valeurs propres égales à -1. On a donc $a+b=n$, $1 \leq a \leq n-1$ et $1 \leq b \leq n-1$. Ainsi $\operatorname{tr}(A) = a - b$ est compris entre $-n+2$ et $n-2$ i.e. $|\operatorname{tr}(A)| \leq n-2$.

Solution 11

1. Remarquons déjà que

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M_{\sigma(k),k} \in \mathbb{Z}$$

Supposons que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$. Alors $\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Mais d'après la remarque initiale, $\det(M)$ et $\det(M^{-1})$ sont entiers. Ainsi $\det(M) = \pm 1$ i.e. $|\det M| = 1$.
Supposons que $|\det(M)| = 1$. Tout d'abord, $\det(M) \neq 0$ donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$. De plus, d'après la formule de la comatrice, $M^{-1} = \pm \operatorname{com}(M)^{\top}$. Les cofacteurs de M sont, au signe près, des déterminants de matrices extraites de M : ce sont donc des entiers toujours d'après notre remarque initiale. Ainsi M^{-1} est à coefficients entiers et $M \in GL_n(\mathbb{Z})$.
Enfin, $I_n \in GL_n(\mathbb{Z})$ puisque $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $\det(I_n) = 1$. Soit $(M,N) \in GL_n(\mathbb{Z})^2$. Alors $MN \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $|\det(MN)| = |\det(M)||\det(N)| = 1$ donc $MN \in GL_n(\mathbb{Z})$. Enfin, si $M \in GL_n(\mathbb{Z})$, alors $M^{-1} \in GL_n(\mathbb{Z})$ par définition de $GL_n(\mathbb{Z})$. $GL_n(\mathbb{Z})$ est donc bien un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

2. Comme $X^d - 1$ est simplement scindé dans $\mathbb{C}$ et annule M, M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. De plus, ses valeurs propres sont des racines de l'unité : elles sont donc notamment de module 1. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telle que $M = PDP^{-1}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \frac{1}{3^k} P(D - I_n)^k P^{-1}$$

Par inégalité triangulaire, les coefficients diagonaux de $(D - I_n)$ sont de module inférieure ou égale à 2. On en déduit que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{3^k}(D - I_n)^k = 0$$

Enfin, l'application $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto PXP^{-1}$ est linéaire donc continue puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. On en déduit que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$.

3. Considérons l'application φ qui à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ associe la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ dont les coefficients sont les classes de ceux de M dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. La compatibilité de la congruence avec la somme et le produit permet d'affirmer que φ est un morphisme d'anneaux. Le même argument permet aussi d'affirmer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\det(\varphi(M)) = \overline{\det(M)}$ (utiliser la formule définissant le déterminant).
Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Notons d son cardinal. On va montrer que l'application φ induit un morphisme injectif de G dans $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Soit $M \in G$. Notamment, $|\det(M)| = 1$ d'après la première question. Alors $\det(\varphi(M)) = \pm\overline{1} \neq \overline{0}$ donc $\varphi(M) \in GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. On a donc bien $\varphi(G) \subset GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. De plus, $\varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$ pour tout $(M,N) \in G^2$ d'après une remarque précédente. On en déduit que φ induit bien un morphisme de groupe de G dans $GL(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $\varphi(M)$ soit le neutre du groupe $GL(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Ceci signifie que les coefficients de $M - I_n$ dont des multiples de 3 donc $A = \frac{1}{3}(M - I_n)$ est à coefficients entiers. Comme d est l'ordre de G, $M^d = I_n$ et la question précédente permet d'affirmer que (A^k) converge vers 0. Comme A est à coefficients entiers, la suite (A^k) est nulle à partir d'un certain rang i.e. A est nilpotente. Mais on a vu à la question précédente que A était diagonalisable donc A est nulle puis $M = I_n$.
En conclusion, φ induit bien un morphisme injectif de G dans $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Notamment,

$$d = \operatorname{card} G \leq \operatorname{card} GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \leq \operatorname{card} \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 3^{n^2}$$

Solution 12

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et M un vecteur propre associé. Alors $M + \operatorname{tr}(M)I_n = \lambda M$ puis en considérant la trace des deux membres, $(n+1)\operatorname{tr}(M) = \lambda \operatorname{tr}(M)$. Si $\lambda = n+1$ ou $\operatorname{tr}(M) = 0$. Si $\operatorname{tr}(M) = 0$ alors $M = \lambda M$ et donc $\lambda = 1$. Ainsi $\operatorname{Sp}(u) \subset \{1, n+1\}$.
Déterminons les sous-espaces propres associés à ces potentielles valeurs propres. Clairement, le sous-espace associé à la valeur propre 1 est l'hyperplan des matrices de traces nulles. De plus, I_n est clairement un vecteur propre associé à la valeur propre $n+1$ donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $n+1$ est $\operatorname{vect}(I_n)$ puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. On constate que u est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. Si $n = 1$, 1 n'est en fait pas valeur propre puisqu'alors le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle est le sous-espace nul.

Solution 13

Remarquons tout d'abord que pour $S \in GL_n(\mathbb{C})$, $\overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$.
Commençons par le sens le plus simple : supposons qu'il existe $S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = S\overline{S}^{-1}$. Dans ce cas,

$$A\overline{A} = S\overline{S}^{-1}\overline{S\overline{S}^{-1}} = S\overline{S}^{-1}\overline{S}S^{-1} = I_n$$

Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur n.
Si $n = 1$, alors $A = (\lambda)$ avec $|\lambda| = 1$. On a donc $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Il suffit alors de prendre $S = \left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right)$.
On suppose maintenant la propriété vraie à un rang $n - 1 \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A\overline{A} = I_n$.
Montrons d'abord que toutes les valeurs propres de A sont de module 1. Soient $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P + iQ$. Ainsi $(P+iQ)(P-iQ) = I_n$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient $P^2 + Q^2 = I_n$ et $QP - PQ = 0$. Ainsi P et Q commutent et trigonalisent dans une base commune i.e. il existe $R \in GL_n(\mathbb{C})$ et $U, V \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ telles que $P = RUR^{-1}$ et $Q = RVR^{-1}$. Posons $T = U + iV$. On a donc $A = RTR^{-1}$ et $\overline{A} = R\overline{T}R^{-1}$. La diagonale de T contient les valeurs propres de A. Comme $A\overline{A} = I_n$, on en déduit que toutes les valeurs propres de A sont de module 1.
Soit λ une valeur propre de A (il en existe toujours une complexe). On a donc $|\lambda| = 1$. On a à nouveau $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $\mu = e^{\frac{i\theta}{2}}$, de sorte que $\frac{\mu}{\overline{\mu}} = 1$. Soit X un vecteur propre de A associée à la valeur propre λ. Dans ce cas, $\overline{X}$ est également un vecteur propre de X associé à la valeur propre λ. En effet, $AX = \lambda X$ donc $\overline{AX} = \overline{\lambda X}$ puis $A\overline{AX} = \overline{\lambda}A\overline{X}$. Puisque $A\overline{A} = I_n$, on obtient $\overline{X} = \overline{\lambda}A\overline{X}$ puis $A\overline{X} = \lambda\overline{X}$ puisque $\frac{1}{\overline{\lambda}} = \lambda$. On peut supposer X réel. En effet, les vecteurs $X + \overline{X}$ et $i(X - \overline{X})$ sont réels et l'un des deux est non nul. L'un de ces deux vecteurs est donc un vecteur propre réel associé à la valeur propre λ. On peut compléter X en une base de $\mathbb{C}^n$ à l'aide de vecteurs réels (ceux de la base canonique, par exemple). Notons P la matrice de cette base dans la base canonique. Posons $B = P^{-1}AP$. Cette matrice est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \lambda & Y^\top \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right)$ avec $Y \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. On a $B\overline{B} = P^{-1}AP\overline{P}^{-1}\overline{AP} = I_n$ car $\overline{P} = P$ et $\overline{P}^{-1} = P^{-1}$ (P est à coefficients réels). On en déduit que $C\overline{C} = I_n$. D'après notre hypothèse de récurrence, il existe $T \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $C = T\overline{T}^{-1}$.
Montrons qu'il existe $Z \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $Z - \lambda\overline{Z} = Y^\top\overline{T}$. Puisque $B\overline{B} = 0$, on a en particulier $\lambda\overline{Y}^\top T + Y^\top\overline{T} = 0$. Notons $\varphi(z) = z + \lambda\overline{z}$ et $\psi(z) = z - \lambda\overline{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$. φ et ψ sont des endomorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. On vérifie que $\varphi \circ \psi = 0$ en utilisant $|\lambda| = 1$. On a donc $\operatorname{Im}\psi \subset \operatorname{Ker}\varphi$. φ et ψ ne sont pas nuls donc $\dim \operatorname{Im}\psi \geq 1 \geq \dim \operatorname{Ker}\varphi$. Ainsi $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\varphi$. Les composantes de $Y\overline{T}$ sont dans $\operatorname{Ker}\varphi$ donc dans $\operatorname{Im}\psi$, ce qui justifie l'existence de Z.
Posons alors $U = \left(\begin{array}{c|c} \mu & Z^\top \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array}\right)$. On a alors $\overline{U}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{\overline{\mu}} & -\frac{1}{\mu}\overline{Z}^\top\overline{T}^{-1} \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array}\right)$. On vérifie alors que $U\overline{U}^{-1} = B$. Il suffit alors de poser $S = PUP^{-1}$ pour avoir $A = S\overline{S}^{-1}$.

Solution 14

On fait l'hypothèse de récurrence HR(n) suivante :

> Si u et v sont deux endomorphismes trigonalisables d'un espace vectoriel E de dimension n tels que $u \circ v = v \circ u$, alors u et v trigonalisent dans une base commune.

Initialisation : HR(1) est trivialement vraie puisque, dans ce cas, la matrice de tout endomorphisme dans une base quelconque est triangulaire supérieur.

Hérédité : Supposons HR(n) pour un certain $n \geq 1$. Soient alors E un espace vectoriel de dimension $n+1$ et u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrons tout d'abord que u et v possèdent un vecteur propre commun. Puisque v est trigonalisable, v possède au moins une valeur propre λ. On montre alors classiquement que le sous-espace propre $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Ker}(v - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est stable par u. u induit un endomorphisme u_λ de E_λ. Comme u est trigonalisable, u annule un polynôme scindé à coefficients dans $\mathbb{K}$. A fortiori, u_λ annule ce même polynôme et est donc également trigonalisable. Par conséquent, u_λ possède une valeur propre et donc un vecteur propre e_1. Ce vecteur e_1 est donc également un vecteur propre de u et un vecteur propre de v puisqu'il appartient au sous-espace propre E_λ de v.
Comme $e_1 \neq 0_\mathrm{E}$, on peut compléter ce vecteur en une base $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ de E. Les matrice de u et v dans cette base sont respectivement de la forme :

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \ \dots \ * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{A}' \\ 0 & \end{array}\right) \qquad \mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mu & * \ \dots \ * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{B}' \\ 0 & \end{array}\right)$$

avec $\mathrm{A}', \mathrm{B}' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $\mathrm{E}' = \mathrm{vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ et soient u' et v' les endomorphismes de E' de matrices respectives A' et B' dans la base $(e_2, \dots, e_{n+1})$ de E'.
On montre alors que si P est un polynôme, alors

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P}(\lambda) & * \ \dots \ * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{P}(\mathrm{A}') \\ 0 & \end{array}\right)$$

Comme u est trigonalisable, u annule un polynome scindé à coefficients dans $\mathbb{K}$ et donc A annule ce même polynôme. La remarque précédente montre que A' annule également ce polynôme : A' est donc trigonalisable et u' également. On montre de même que v' est trigonalisable.
Puisque u et v commutent, A et B commutent, ce qui entraîne la commutativité de A' et B' après un calcul par blocs et enfin la commutativité de u' et v'. On peut alors appliquer HR(n) : il existe donc une base $(e'_2, \dots, e'_{n+1})$ de E' dans laquelle les matrices de u' et v' sont triangulaires supérieures. Il suffit alors de vérifier que les matrices de u et v dans la base $(e_1, e'_2, \dots, e'_{n+1})$ de E sont également triangulaires supérieures.
Conclusion : Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \geq 1$.

Solution 15

---

1. Soit A une matrice vérifiant la condition de l'énoncé. Le polynôme $\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$ annule A et est scindé à racines simples : A est donc diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \{1, 2\}$.
   - Si la seule valeur propre de A est 1, alors $\mathrm{A} = \mathrm{I}_2$.
   - Si la seule valeur propre de A est 2, alors $\mathrm{A} = 2\mathrm{I}_2$.
   - Si A admet 1 et 2 pour valeurs propres, alors il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$ avec $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Réciproquement les matrices I_2, $2\mathrm{I}_2$ et PBP^{-1} avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ conviennent.
2. Soit A une matrice vérifiant la condition de l'énoncé. Le polynôme $\mathrm{X}^3 - 8\mathrm{X}^2 + 21\mathrm{X} - 18 = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3)^2$ annule A. D'après le lemme des noyaux, $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_2)^2$.
   - Si $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2) = 2$, alors $\mathrm{A} = 2\mathrm{I}_2$.
   - Si $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_2)^2 = 1$, alors il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$ avec $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   - Si $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)^2 = 2$, alors le polynôme $(\mathrm{X}-3)^2$ annule A : A est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{3\}$. Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$.

   Réciproquement, les matrices ci-dessus conviennent.

   Remarque. On peut en fait montrer qu'on peut se ramener à $a = 1$ dans le dernier cas.

Solution 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{M}^3-\mathrm{M}^2-\mathrm{M}-2\mathrm{I}_n = 0$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0$. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-2 = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-j)(\mathrm{X}-\overline{j})$ est un polynôme annulateur de M. On en déduit que $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \subset \{2, j, \overline{j}\}$. De plus, P est simplement scindé donc M est diagonalisable.
Notons p, q, r les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}-2\mathrm{I}_n)$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}-j\mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}-\overline{j}\mathrm{I}_n)$. On a donc $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 2p+qj+r\overline{j} = 0$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on en déduit $2p-\frac{q}{2}-\frac{r}{2} = 0$ et $q-r=0$ puis $2p = q = r$. Ainsi $n = p+q+r = 5p$ est un multiple de 5. On peut alors affirmer que M est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(2, j, j, \overline{j}, \overline{j})$.
Réciproquement soit $n \in \mathbb{N}^*$ un multiple de 5 et considérons une matrice M semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(2, j, j, \overline{j}, \overline{j})$. Alors $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \frac{n}{5}\mathrm{tr}(\mathrm{D}) = 0$. De plus, $\mathrm{P}(\mathrm{M})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs valent $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \mathrm{diag}(\mathrm{P}(2), \mathrm{P}(j), \mathrm{P}(j), \mathrm{P}(\overline{j}), \mathrm{P}(\overline{j})) = \mathrm{diag}(0,0,0,0,0)$. On a donc bien $\mathrm{P}(\mathrm{M}) = 0$.
Remarque. Si n n'est pas un multiple de 5, il n'existe pas de matrice vérifiant les conditions de l'énoncé.

Solution 17

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Alors $\mathrm{X}^5-\mathrm{X}^2 = \mathrm{X}^2(\mathrm{X}^3-1)$ est un polynôme annulateur de M. On en déduit que $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) \subset \{0, 1, j, \overline{j}\}$. Notons $m_0, m_1, m_j, m_{\overline{j}}$ les multiplicités respectives (éventuellement nulles) de $0, 1, j, \overline{j}$. Alors

$$0m_0 + m_1 + jm_j + \overline{j}m_{\overline{j}} = \mathrm{tr}(\mathrm{M}) = n$$

En considérant la partie réelle, on obtient

$$m_1 - \frac{1}{2}m_j - \frac{1}{2}m_{\overline{j}} = n$$

Or $m_1 \leq n$, $m_j \geq 0$ et $m_{\overline{j}} \geq 0$ donc $m_1 = n$ et $m_j = m_{\overline{j}} = 0$. Par ailleurs

$$m_0 + m_1 + m_j + m_{\overline{j}} = n$$

donc $m_0 = 0$. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de M. Par conséquent, M est inversible. Comme $\mathrm{M}^5-\mathrm{M}^2 = 0$, $\mathrm{M}^3-\mathrm{I}_n = 0$ en multipliant par M^{-2}. Par conséquent, X^3-1 est un polynôme annulateur de M scindé à racines simples. On en déduit que M est diagonalisable. Comme 1 est sa seule valeur propre, $\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$.
Réciproquement, I_n vérifie bien les conditions de l'énoncé : c'est donc l'unique matrice vérifiant les conditions de l'énoncé.

Solution 18

Puisque F est stable par u, on peut considérer l'endomorphisme $u_{|\mathrm{F}}$ induit par u. On remarque que P est aussi un polynôme annulateur de $u_{|\mathrm{F}}$. Les polynômes P_i étant premiers entre eux deux à deux, le lemme des noyaux permet d'affirmer que $\mathrm{F} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,\mathrm{P}_i(u_{|\mathrm{F}})$. Or pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{P}_i(u_{|\mathrm{F}}) = \mathrm{F} \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{P}_i(u) = \mathrm{F} \cap \mathrm{N}_i$. Ainsi $\mathrm{F} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{F} \cap \mathrm{N}_i$.

Solution 19

On remarque que $\mathrm{C}^3-\mathrm{C}^2-3\mathrm{C} = 0$. Ainsi $\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-3\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-3)$ est un polynôme scindé à racines simples (le polynôme de degré 2 n'admet évidemment pas 0 pour racine et est de disciminant strictement positif). Par conséquent C est diagonalisable et donc semblable à une matrice diagonale D. On voit alors aisément que $\mathrm{A} = 3\mathrm{C}-\mathrm{C}^2$ est semblable à la matrice diagonale $3\mathrm{D}-\mathrm{D}^2$ et que $\mathrm{B} = \mathrm{C}^2-2\mathrm{C}$ est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{D}^2-2\mathrm{D}$. A et B sont donc diagonalisables.

Solution 20

Comme $\mathrm{P}(0) = 0$ et $\mathrm{P}'(0) = 0$, 0 est racine simple de P. Il existe donc Q non divisible par X tel que $\mathrm{P} = \mathrm{XQ}$. Comme X est irréductible, X et Q sont premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux,

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{P}(f) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}\,\mathrm{Q}(f)$$

Comme $\mathrm{XQ} = \mathrm{P}$, $\mathrm{Q}(f) \circ f = \mathrm{P}(f) = 0$ donc $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{Q}(f)$. Par ailleurs, il existe $\mathrm{R} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(0) + \mathrm{XR}$. Ainsi

$$\mathrm{Q}(f) = \mathrm{Q}(0)\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + f \circ \mathrm{R}(f)$$

Si on se donne $x \in \operatorname{Ker} Q(f)$, on a donc $Q(0)x + f \circ R(f)(x) = 0_E$ et donc $x = -\dfrac{1}{Q(0)} f(R(f)(x)) \in \operatorname{Im} f$ car $Q(0) \neq 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} Q(f) \subset \operatorname{Im} f$ puis $\operatorname{Ker} Q(f) = \operatorname{Im} f$ par double inclusion, ce qui permet de conclure.

Remarque. Si on suppose E de dimension finie, on peut se passer de montrer l'inclusion $\operatorname{Ker} Q(f) \subset \operatorname{Im} f$. En effet, on sait déjà que

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} Q(f)$$

et le théorème du rang montre que

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

Ainsi $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} Q(f)$ et, comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} Q(f)$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} Q(f)$, ce qui permet de conclure.

Solution 21

$X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-\overline{j})$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples. Ainsi $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, j, \overline{j}\}$ et A est diagonalisable. Notons $m_0, m_j, m_{\overline{j}}$ les multiplicités (éventuellement nulles) de 0, j, $\overline{j}$. Comme A est à coefficients réels, il en est de même de son polynôme caractéristique de sorte que $m_j = m_{\overline{j}}$. De plus, $m_0 + m_j + m_{\overline{j}} = n$ donc $m_0 = n - 2m_j$. Comme A est diagonalisable, $m_0 = \dim \operatorname{Ker} A$. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg} A = n - \dim \operatorname{Ker} A = 2m_j$. Le rang de A est donc bien pair.

Solution 22

Notons $u : P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto P(X+1)$. La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit que $u - \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$ est nilpotent. L'indice de nilpotence est inférieur à $\dim \mathbb{C}_{n-1}[X] = n$ donc $(u - \operatorname{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]})^n = 0$. Ceci donne par la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u^k = 0$$

Puisqu'on a clairement $u^k(P) = P(X+k)$, on en déduit le résultat demandé.

Solution 23

1. **a.** Remarquons que pour $M \in E_2$, $u(M)_1 = M_2$ et $u(M)_2 = M_1$.
   Soient $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et $(A, A') \in E_2^2$. Alors

   $$u(\lambda A + \lambda' A')_1 = (\lambda A + \lambda A')_2 = \lambda A_2 + \lambda' A'_2 = \lambda u(A)_1 + \lambda u(A)_1 u(\lambda A + \lambda' A')_2 \quad = (\lambda A + \lambda A')_1 = \lambda A_1 + \lambda' A'_1 = \lambda u(A)_2 + \lambda u(A)_2$$

   Par conséquent, $u(\lambda A + \lambda' A') = \lambda u(A) + \lambda' u(A')$.
   u est bien linéaire : c'est un endomorphisme de E_2.

   b. D'après la remarque de la question précédente, $u(K_1) = K_3$, $u(K_2) = K_4$, $u(K_3) = K_1$ et $u(K_4) = K_2$. On en déduit que

   $$M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Un calcul montre que $M^2 = I_4$ i.e. $u^2 = \operatorname{Id}_{E_2}$. u est bien un automorphisme de E_2.

   c. Puisque $u^2 = \operatorname{Id}_{E_2}$, u est une symétrie.

   $$\operatorname{Ker}(M - I_4) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1,\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_2}) = \mathrm{vect}(\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_4)$. De même,

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{M} + \mathrm{I}_4) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1,\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - \mathrm{L}_2 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_2}) = \mathrm{vect}(\mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_4)$. Finalement, u est la symétrie par rapport à $\mathrm{vect}(\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_4)$ parallélement à $\mathrm{vect}(\mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_4)$.

2. Notons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de E_n. Dans le cas $n = 2$, par antisymétrie du déterminant,

$$\det(u(\mathrm{A})) = \det_{\mathcal{B}_c}(u(\mathrm{A})_1, u(\mathrm{A})_2) = \det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_1) = -\det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2) = -\det(\mathrm{A})$$

Dans le cas $n = 3$

$$\det(u(\mathrm{A})) = \det_{\mathcal{B}_c}(u(\mathrm{A})_1, u(\mathrm{A})_2, u(\mathrm{A})_3) = \det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2)$$

Par multilinéarité et caractère alterné du déterminant,

$$\det(u(\mathrm{A})) = \det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_1) + \det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$$

Enfin, puisque les 3-cyles sont de signature 1, le caractère antisymétrique du déterminant donne

$$\det(u(\mathrm{A})) = 2\det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3) = 2\det(\mathrm{A})$$

3. On note $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k$. Ainsi

$$\det(u(\mathrm{A})) = \det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{S} - \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{S} - \mathrm{A}_n)$$

A nouveau, le caractère multilinéaire et alterné du déterminant donne

$$\begin{aligned}\det(u(\mathrm{A})) &= \det_{\mathcal{B}_c}(-\mathrm{A}_1, \dots, -\mathrm{A}_n) + sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_c}(-\mathrm{A}_1, \dots, -\mathrm{A}_{k-1}, \mathrm{S}, -\mathrm{A}_{k+1}, \dots, -\mathrm{A}_n) \\ &= (-1)^n \det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n) + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_{k-1}, \mathrm{S}, \mathrm{A}_{k+1}, \dots, \mathrm{A}_n)\end{aligned}$$

Encore une fois le caractère multilinéaire et alterné du déterminant donne

$$\det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_{k-1}, \mathrm{S}, \mathrm{A}_{k+1}, \dots, \mathrm{A}_n) = \det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_{k-1}, \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i, \mathrm{A}_{k+1}, \dots, \mathrm{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_{k-1}, \mathrm{A}_i, \mathrm{A}_{k+1}, \dots, \mathrm{A}_n) = \det_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{A}_1, \dots$$

Finalement,

$$\det(u(\mathrm{A})) = (-1)^n \det(\mathrm{A}) + (-1)^{n-1} n \det(\mathrm{A}) = (-1)^{n-1}(n-1)\det(\mathrm{A})$$

4. **a.** Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}_n$. Posons $\mathrm{B} = u(\mathrm{A})$ et $\mathrm{C} = u(\mathrm{B}) = u^2(\mathrm{A})$. Alors

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{B}_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k\right) - \mathrm{A}_j$$

et

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{C}_j &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k - \mathrm{B}_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{l=1}^{n} \mathrm{A}_l\right) - \mathrm{A}_k\right) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k + \mathrm{A}_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \mathrm{A}_l - 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k + \mathrm{A}_j \qquad = (n-2)\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k + \mathrm{A}_j = (n-2)(\mathrm{B}_j + \mathrm{A}_j) + \mathrm{A}_j \quad = (n-2)u(\mathrm{A})_j + (n-1)\mathrm{A}_j\end{aligned}$$

On en déduit que $u^2(\mathrm{A}) = (n-2)u(\mathrm{A}) + (n-1)\mathrm{A}$. Ceci étant valable pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{E}_n$, $u^2 - (n-2)u + (n-1)\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n} = 0$. Ainsi $\mathrm{X}^2 - (n-2)\mathrm{X} + (n-1) = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-(n-1))$ est un polynôme annulateur de u.

b. Comme $n \neq 0$, $n-1 \neq -1$ et donc le polynôme $(X+1)(X-(n-1))$ est scindé à racines simples : u est diagonalisable.
Pour $A \in E_n$,

$$u(A) = -A \iff \forall j \in [\![1,n]\!],\ u(A)_j = -A_j \iff \sum_{k=1}^{n} A_k = 0$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est donc l'ensemble des matrices dont la somme des colonnes est nulle.
Soit A dans le sous-espace propre associé à la valeur propre $n-1$. Alors, en posant $S = \sum_{k=1}^{n} A_k$,

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ S - A_j = (n-1)A_j$$

ou encore

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ A_j = \frac{1}{n}S$$

Toutes les colonnes de A sont donc égales. Inversement, on vérifie imédiattement que si toutes les colonnes de A sont égales, alors $u(A) = (n-1)A$. Ainsi le sous-espace propre associé à la valeur propre $n-1$ est l'ensemble des matrices ayant toutes leurs colonnes égales.
Remarque. On pourrait préciser que $\dim E_{-1}(u) = n^2 - n$ et $\dim E_{n-1}(u) = n$.

c. **i.** En raisonnant par blocs, les colonnes de AJ_n sont toutes égales à $\sum_{k=1}^{n} A_k$. On en déduit que les colonnes de AU_n sont celles de $u(A)$. Autrement dit, $AU_n = u(A)$.
ii. Un calcul direct donne $J_n^2 = nJ_n$ donc

$$U_n^2 = J_n^2 - 2J_n + I_n = nJ_n - 2J_n + I_n = n(U_n + I_n) - 2(U_n + I_n) + I_n = (n-2)U_n + (n-1)I_n$$

Ainsi pour tout $A \in E_n$,

$$u^2(A) = u(A)U_n = AU_n^2 = (n-2)AU_n + (n-1)A = (n-2)u(A) + (n-1)A$$

On en déduit à nouveau que $u^2 - (n-2)u - (n-1) = 0$ i.e. que $X^2 - (n-2)X - (n-1)$ annule A.
Remarque. L'exercice est vraiment mal posé. En remarquant que $u(A) = AU_n$, toutes les questions précédentes se traitent de manière beaucoup plus naturelle. Par exemple,

$$\det(u(A)) = \det(A)\det(U_n)$$

et $\det(U_n)$ se calcule beaucoup plus facilement par opérations sur lignes ou colonnes.

Solution 24

1. Un calcul par blocs donne $\chi_A = X(X^2+1) = X(X-i)(X+i)$. Comme $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des racines de χ_A, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, i, -i\}$.
Enfin, χ_A est scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}$) donc A est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

2. Comme $X^3 + X = X(X-i)(X+i)$ est un polynôme annulateur de M scindé à racines simples, M est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, i, -i\}$. 0 ne peut être la seule valeur propre de M car sinon M serait semblable à la matrice nulle et donc nulle. De plus, comme M est à coefficients réels, χ_M l'est également de sorte que les valeurs propres non réelles de M sont conjuguées. Ainsi $\mathrm{Sp}(M) = \{0, i, -i\}$. On en déduit que M est bien semblable à D.

3. Comme A et M sont toutes deux semblables à D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, A et M sont également semblables l'une à l'autre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car la similitude est une relation d'équivalence.
Montrons que M est également semblable à A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Comme A est semblable à D, $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(D) = 2$ puis $\dim \mathrm{Ker}(u) = 1$ d'après le théorème du rang. Notons e_1 un vecteur directeur de la droite $\mathrm{Ker}(u)$.
Comme $X^3 + X = X(X^2+1)$ est un polynôme annulateur de u et comme X et X^2+1 sont premiers entre eux, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 +$

$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$). Notons e_2 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $e_3 = u(e_2)$. Comme $u^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ commute avec u, son noyau est stable par u de sorte que $e_3 = u(e_2) \in \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
Montrons que (e_2, e_3) est une base de $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Tout d'abord, $\dim \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(u) = 2$ donc il suffit de montrer que (e_2, e_3) est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha e_2 + \beta e_3 = 0$ ou encore $\alpha e_2 + \beta u(e_2) = 0$. En appliquant u, on obtient $\alpha u(e_2) + \beta u^2(e_2) = 0$. Comme $e_2 \in \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, $u^2(e_2) = -u_2$ donc $\alpha e_3 - \beta e_2 = 0$. Ainsi $\begin{cases} \alpha e_2 + \beta e_3 = 0 \\ -\beta e_2 + \alpha e_3 = 0 \end{cases}$. En éliminant e_3, on obtient $(\alpha^2+\beta^2)e_2 = 0$ et donc $\alpha^2+\beta^2 = 0$ puis $\alpha = \beta = 0$ car α et β sont réels. Ainsi (e_2, e_3) est bien libre et c'est une base de $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
Comme $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Enfin, $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$ donc la matrice de u dans cette base est A. On en déduit que M est semblable à A.

Polynôme minimal

Solution 25

Remarquons que $\mathrm{X}^n - 1$ est un polynôme annulateur de A donc le polynôme minimal π_A divise $\mathrm{X}^n - 1$. De plus, il n'existe pas de polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à n sinon la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \dots, \mathrm{A}^{n-1})$ serait libre. On en déduit que $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n - 1$. Or π_A divise χ_A et $\deg \chi_\mathrm{A} = n$ donc $\chi_\mathrm{A} = \pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n - 1$. Les valeurs propres de A sont donc les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et sont toutes de multiplicités 1. Ainsi

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \frac{e^{2i\pi} - 1}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = 0$$

Solution 26

On notera classiquement π_M le polynôme minimal d'une matrice M.

1. Posons $n = \deg \pi_\mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n \pi_\mathrm{A}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$. Comme A est inversible, le coefficient constant de π_A est non nul et $\deg \mathrm{P} = n$. P est un polynôme annulateur de A^{-1} donc $\pi_{\mathrm{A}^{-1}}$ divise P. En particulier, $\deg \pi_{\mathrm{A}^{-1}} \leq n$. De même, en posant $p = \deg \pi_{\mathrm{A}^{-1}}$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^p \pi_{\mathrm{A}^{-1}}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$, $\deg \mathrm{Q} = p$ et on trouve que π_A divise Q. En particulier, $\deg \pi_\mathrm{A} \leq p$.
   Finalement, $\deg \Pi_{\mathrm{A}^{-1}} = \deg \mathrm{P}$. En notant a le coefficient constant (non nul) de π_A, on a $\pi_{\mathrm{A}^{-1}} = \frac{1}{a}\mathrm{P}$ car $\pi_{\mathrm{A}^{-1}}$ est unitaire par convention.

2. Puisque pour tout polynôme P et toute matrice M à coefficients réels

   $$\mathrm{P}(\mathrm{M}) = 0 \iff \mathrm{P}(\mathrm{M})^\top = 0 \iff \mathrm{P}(\mathrm{M}^\top) = 0$$

   A et $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^{-1}$ ont le même polynôme minimal. Si ce polynôme minimal était de degré impair, il admettrait une racine réelle λ. Ainsi A admettrait λ pour valeur propre. Soit X un vecteur propre associé à cette valeur propre. On a donc $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ et donc $\|\mathrm{AX}\| = \|\lambda \mathrm{X}\| = |\lambda|\|\mathrm{X}\|$ où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Mais comme A est orthogonale, $\|\mathrm{AX}\| = \|\mathrm{X}\|$ d'où $\lambda = \pm 1$ ($\|\mathrm{X}\| \neq 0$ car un vecteur propre est non nul). Ceci contredit l'énoncé. C'est donc que le polynôme minimal de A est de degré pair.

Solution 27

1. On procède par récurrence. Tout d'abord,

   $$f^0 \circ g - g \circ f^0 = 0 = 0f^0$$

   Supposons que $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors en composant par f à gauche,

   $$f^{n+1} \circ g - f \circ g \circ f^n = nf^{n+1}$$

   Mais

   $$f \circ g = g \circ f + f$$

   donc

   $$f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} - f^{n+1} = nf^{n+1}$$

   ou encore

   $$f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = (n+1)f^{n+1}$$

   Ainsi $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

2. D'après la question précédente, les applications $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(f)\circ g - g\circ P(f)\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & f\circ P'(f)\end{array}\right.$ coïncident sur la base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Elles sont donc égales et on en déduit le résultat voulu.

3. Si on applique la question précédente à $P = \pi_f$ le polynôme minimal de f, on obtient $f\circ\pi'_f(f) = 0$. Le polynôme $X\pi'_f$ annule donc f de sorte que π_f divise $X\pi'_f$. En considérant le degré p de π_f et le coefficient dominant, on a donc $p\pi_f = X\pi'_f$. Ainsi $\dfrac{\pi'_f}{\pi_f} = \dfrac{p}{X}$ de sorte que $\pi_f = X^p$. f est donc nilpotent.

Solution 28

1. Les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires et les autres colonnes sont toutes colinéaires à la seconde. Ainsi $\mathrm{rg}(A) = 2$ puis $\dim\mathrm{Ker}(A) = n-2$.

2. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.

3. Comme A est diagonalisable, la multiplicité de la valeur propre 0 est la dimension du sous-espace propre associé, c'est-à-dire $n-2$.

4. Remarquons que $\chi_A(1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & \cdots & \ddots & -n \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Via l'opération $C_1 \leftarrow 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$, $\chi_A(1) = \begin{vmatrix} \alpha & -2 & \cdots & \ddots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha$ où $\alpha = -\sum_{k=2}^n k^2 < 0$. Comme $\lim_{x\to+\infty}\chi_A(x) = +\infty$, χ_A admet une racine $\lambda > 1$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi il existe $\mu\in\mathbb{R}$ tel que $\chi_A = X^{n-2}(X-\lambda)(X-\mu)$. Mais $\mathrm{tr}(A) = 1 = \lambda+\mu$ donc $\mu = 1-\lambda$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{0,\lambda,1-\lambda\}$ avec $\lambda > 1$.

5. Comme A est diagonalisable, π_A est scindé à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de A. Ainsi $\pi_A = X(X-\lambda)(X-1+\lambda) = X^3 - X^2 + \lambda(1-\lambda)X$ est un polynôme annulateur de A. Or $\chi_A = X^{n-2}(X-\lambda)(X-1+\lambda)$ donc, comme vu à la question précédente,
$$\lambda(1-\lambda) = \chi_A(1) = -\sum_{k=2}^n k^2$$
Finalement, un polynôme annulateur de A est $X^3 - X^2 - \left(\sum_{k=2}^n k^2\right)X$.

Solution 29

1. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$$u^2(M) = u(M) + \mathrm{tr}(u(M))I_n = u(M) + (n+1)\,\mathrm{tr}(M)I_n = (n+2)u(M) - (n+1)M$$
Ainsi $X^2 - (n+2)X + (n+1)$ est un polynôme annulateur de u.

2. On constate que $X^2 - (n+2)X + (n+1) = (X-1)(X-(n+1))$ est scindé à racines simples donc u est diagonalisable.

3. Le polynôme minimal π_u divise $(X-1)(X-(n+1))$. Or on a clairement $u \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et, comme $n\geq 2$, $u\neq (n+1)\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $\pi_u \neq X-1$ et $\pi_u \neq X-(n+1)$. Ainsi $\pi_u = (X-1)(X-(n+1))$.
Notamment $\mathrm{Sp}(u) = \{1, n+1\}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est clairement l'hyperplan des matrices de trace nulle. Le sous-espace propre associé à la valeur popre $n+1$ est donc une droite. Comme u est diagonalisable, les multiplicités des valeurs propres de u dans le polynôme caractéristique sont égales aux dimensions des sous-espaces propres. Ainsi $\chi_u = (X-1)^{n^2-1}(X-(n+1))$.
Remarque. On peut vérifier que le sous-espace propre asssocié à la valeur propre 1 est $\mathrm{vect}(I_n)$.

Solution 30

1. On sait que le rang de B est le rang de la famille de ses colonnes. Comme les n dernières colonnes de B sont également les n dernières, le rang de B est celui de $\begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ 0 \end{pmatrix}$. Mais le rang de B est également le rang de la famille de ses lignes donc $\operatorname{rg} \mathrm{B} = \operatorname{rg} \mathrm{A}$.

2. Une récurrence simple montre que $\mathrm{B}^p = \begin{pmatrix} \mathrm{A}^p & \mathrm{A}^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. De plus, $\mathrm{B}^0 = \mathrm{I}_{2n} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$.

   Soit $\mathrm{P} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \mathrm{X}^p \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{B}) &= a_0 \mathrm{I}_{2n} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \mathrm{B}^p \\
&= a_0 \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \begin{pmatrix} \mathrm{A}^p & \mathrm{A}^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & \mathrm{P}(\mathrm{A}) - a_0 \mathrm{I}_n \\ 0 & a_0 \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & \mathrm{P}(\mathrm{A}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{P}(0) \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   car $a_0 = \mathrm{P}(0)$.

3. Comme A est diagonalisable, le polynôme minimal π_A de A est scindé à racines simples.
   Supposons que A n'est pas inversible. Alors $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ donc 0 est racine de π_A i.e. $\pi_\mathrm{A}(0) = 0$. D'après la question précédente, $\pi_\mathrm{A}(\mathrm{B}) = 0$ et donc B est diagonalisable puisque π_A est scindé à racines simples.
   Supposons que A est inversible. Alors 0 n'est pas racine de π_A. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}\pi_\mathrm{A}$ est donc encore scindé à racines simples et annule B d'après la question précédente. B est encore diagonalisable.

Solution 31

1. Il suffit de développer le déterminant définissant χ_A par rapport à sa dernière colonne.

2. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a donc $u(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Ainsi $e_k = u^{k-1}(e_1)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Il s'ensuit que $(u^k(e_1))_{0 \le k \le n-1}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. En particulier, c'est une famille libre. Posons $p = \deg \pi_\mathrm{A}$ et supposons $p < n$. Posons $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^p + \sum_{k=0}^{p-1} c_k \mathrm{X}^k$. On sait que $\pi_\mathrm{A} = \pi_u$ annule u. Ainsi $u^p + \sum_{k=0}^{p-1} c_k u^k = 0$. En particulier, $u^p(e_1) + \sum_{k=0}^{p-1} c_k u^k(e_1) = 0$. La famille $(u^k(e_1))_{0 \le k \le p}$ est donc liée ce qui contredit la liberté de la famille $(u^k(e_1))_{0 \le k \le n-1}$. Par conséquent, $p = n$.
   Ainsi $\deg \pi_\mathrm{A} = \deg \chi_\mathrm{A}$, π_A divise χ_A et π_A et χ_A sont unitaires, ce qui permet d'affirmer que $\pi_\mathrm{A} = \chi_\mathrm{A}$.

3. On sait que $\chi_{\mathrm{A}^\top} = \chi_\mathrm{A} = \mathrm{P}$. Ainsi $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\top)$ est l'ensemble des racines de P. Soit donc λ une racine de P.

   Alors $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}^\top)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, n-2]\!],\ x_{k+1} = \lambda x_k \\ -\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k = \lambda x_{n-1} \end{cases}$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases}\forall k \in [\![0, n-1]\!], \; x_k = \lambda^k x_0 \\ \mathrm{P}(\lambda)x_0 = 0\end{cases}$$

La dernière égalité est toujours vraie puisque λ est racine de P. On en déduit que $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}^\top) = \mathrm{vect}\big((1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})\big)$.

Solution 32

1. **a.** Soit $x \in \mathrm{E}$. Vérifions que $\mathrm{I}_{u,x}$ est un idéal de$\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

- Il est clair que $0 \in \mathrm{I}_{u,x}$.
- Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{I}_{u,x}^2$. Alors
$$(\mathrm{P}+\mathrm{Q})(u)(x) = \mathrm{P}(u)(x) + \mathrm{Q}(u)(x) = 0_\mathrm{E}$$
donc $\mathrm{P}+\mathrm{Q} \in \mathrm{I}_{u,x}$.
- Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \times \mathrm{I}_{u,x}$. Alors
$$(\mathrm{PQ})(u)(x) = \mathrm{P}(u)(\mathrm{Q}(u)(x)) = \mathrm{P}(u)(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$$
donc $\mathrm{PQ} \in \mathrm{I}_{u,x}$.

Puisque π_u est un polynôme annulateur de u, a fortiori, $\pi_u(u)(x) = 0_\mathrm{E}$ donc $\pi_u \in \mathrm{I}_{u,x}$. Comme $\pi_{u,x}$ est un générateur de $\mathrm{I}_{u,x}$, π_u est un multiple de $\pi_{u,x}$.

b. Soit $x \in \mathrm{E}$. $\mathrm{E}_{u,x}$ est l'image de l'application linéaire $\begin{cases}\mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(u)(x)\end{cases}$: c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Soit $y \in \mathrm{E}_{u,x}$. Alors il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $y = \mathrm{P}(u)(x)$. Notons Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $\pi_{u,x}$. Alors $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\pi_{u,x} + \mathrm{R}$ puis $y = \mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{R}(u)(x)$ puisque $\mathrm{Q}\pi_{u,x} \in \mathrm{I}_{u,x}$. Or $\deg \mathrm{R} \leq \deg \pi_{u,x} - 1$ donc $y \in \mathrm{vect}(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$, ce qui prouve que $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$ est une famille génératrice de $\mathrm{E}_{u,x}$.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\deg \pi_{u,x}-1} \lambda_k u^k(x) = 0_\mathrm{E}$. Posons $\mathrm{R} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg \pi_{u,x}-1} \lambda_k \mathrm{X}^k$. On a donc $\mathrm{R}(u)(x) = 0_\mathrm{E}$ i.e. $\mathrm{R} \in \mathrm{I}_{u,x}$. R est donc un multiple de $\pi_{u,x}$ et comme $\deg \mathrm{R} < \deg \pi_{u,x}$, $\mathrm{R} = 0$ i.e. $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, \deg \pi_{u,x} - 1]\!]$. Ceci prouve que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$ est libre.

Finalement, $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$ est une base de $\mathrm{E}_{u,x}$. On en déduit que $\dim \mathrm{E}_{u,x} = \deg \pi_{u,x}$.

c. Soit $y \in \mathrm{E}_{u,x}$. Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $y = \mathrm{P}(u)(x)$. Alors $u(y) = (\mathrm{XP})(u)(x)$ appartient également à $\mathrm{E}_{u,x}$. Ainsi $\mathrm{E}_{u,x}$ est stable par u.

Soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{I}_{u,x}$. Alors $\mathrm{Q}(u)(y) = (\mathrm{PQ})(u)(x) = \mathrm{P}(u)(\mathrm{Q}(u)(x)) = \mathrm{P}(u)(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$ donc Q est un polynôme annulateur de $u_{|\mathrm{E}_{u,x}}$. Réciproquement soit Q un polynôme annulateur de $u_{|\mathrm{E}_{u,x}}$. En particulier, $\mathrm{Q}(u)(x) = 0_\mathrm{E}$ donc $\mathrm{Q} \in \mathrm{I}_{u,x}$. Ainsi $\mathrm{I}_{u,x}$ est l'idéal annulateur de $u_{|\mathrm{E}_{u,x}}$ de sorte que $\pi_{u,x} = \pi_{u_{|\mathrm{E}_{u,x}}}$.

2. **a.** Posons $\mathrm{P}_i = \displaystyle\prod_{j \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}} \pi_{u,x_j}$ pour $i \in [\![1, p]\!]$. Alors

$$\mathrm{P}(u)(x) = \sum_{i=1}^p \mathrm{P}(u)(x_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{P}_i(u)\left(\pi_{u,x_i}(x_i)\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{P}_i(u)(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$$

donc $\mathrm{P} \in \mathrm{I}_{u,x}$ de sorte que $\pi_{u,x}$ divise P.

b. Soit $(y_1, \dots, y_p) \in \displaystyle\prod_{i=1}^p \mathrm{E}_{u,x_i}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^p y_i = 0_\mathrm{E}$. Il existe des polynômes $\mathrm{Q}_1, \dots, \mathrm{Q}_p$ de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $y_i = \mathrm{Q}(u)(x_i)$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. On a donc

$$\sum_{j=1}^p \mathrm{Q}_j(u)(x_j) = 0_\mathrm{E}$$

Fixons $i \in [\![1, p]\!]$. En appliquant $\mathrm{P}_i(u)$ à l'égalité précédente, on obtient

$$\sum_{j=1}^p \mathrm{P}_i(u)\left(\mathrm{Q}_j(u)(x_j)\right) = 0_\mathrm{E}$$

Mais comme pour $j \neq i$
$$\mathrm{P}_i(u)\left(\mathrm{Q}_j(u)(x_j)\right) = \mathrm{Q}_j(u)\left(\mathrm{P}_i(u)(x_j)\right) = \mathrm{Q}_j(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$$
il reste $(\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i)(u)(x_i) = 0_\mathrm{E}$. On en déduit que π_{u,x_i} divise $\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i$. Or π_{u,x_i} est premier avec P_i donc π_{u,x_i} divise Q_i par le théorème de Gauss. Ainsi $y_i = \mathrm{Q}_i(u)(x_i) = 0_\mathrm{E}$.
Ceci montre que $\mathrm{E}_{x_1}, \dots, \mathrm{E}_{x_p}$ sont en somme directe.

c. Par définition, $\pi_{u,x}(x) = 0_\mathrm{E}$ i.e. $\sum_{i=1}^{p} \pi_{u,x}(x_i) = 0_\mathrm{E}$. Mais pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\pi_{u,x}(x_i) \in \mathrm{E}_{u,x_i}$. Puisque $\mathrm{E}_{u,x_1}, \dots, \mathrm{E}_{u,x_p}$ sont en somme directe, $\pi_{u,x}(x_i) = 0_\mathrm{E}$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Ainsi π_{u,x_i} divise $\pi_{u,x}$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Mais comme $\pi_{u,x_1}, \dots, \pi_{u,x_p}$ sont premiers entre eux deux à deux, P divise $\pi_{u,x}$. Or on a déjà vu que $\pi_{u,x}$ divisait P donc $\mathrm{P} = \pi_{u,x}$ puisqu'il s'agit de deux polynômes unitaires.

Il est clair que $\mathrm{E}_{u,x} \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{u,x_i}$. De plus,
$$\dim \mathrm{E}_{u,x} = \deg \pi_{u,x} = \deg \mathrm{P} = \sum_{i=1}^{p} \deg \pi_{u,x_i} = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{E}_{u,x_i} = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{u,x_i}\right)$$
donc $\mathrm{E}_{u,x} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{u,x_i}$.

3. La décomposition en facteurs irréductibles de π_u s'écrit
$$\pi_u = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{M}_i^{\alpha_i}$$
où $\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_p$ sont des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ distincts deux à deux et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des entiers naturels non nuls. En particulier, les polynômes $\mathrm{M}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathrm{M}_p^{\alpha_p}$ sont premiers entre eux deux à deux. Le lemme des noyaux permet alors d'affirmer que
$$\mathrm{E} = \operatorname{Ker} \pi_u(u) = \bigoplus_{j=1}^{p} \operatorname{Ker} \mathrm{M}_j^{\alpha_j}(u)$$
Supposons qu'il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $\operatorname{Ker} \mathrm{M}_i^{\alpha_i - 1}(u) = \operatorname{Ker} \mathrm{M}_i^{\alpha_i}(u)$. Alors le lemme des noyaux permet d'affirmer que le polynôme $\frac{\pi_u}{\mathrm{M}_i}$ est un polynôme annulateur de u, ce qui contredit la minimalité de π_u. Ainsi pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\operatorname{Ker} \mathrm{M}_i^{\alpha_i - 1}(u) \subsetneq \operatorname{Ker} \mathrm{M}_i^{\alpha_i}(u)$.
Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe donc $x_i \in \left(\operatorname{Ker} \mathrm{M}_i^{\alpha_i}(u)\right) \setminus \left(\operatorname{Ker} \mathrm{M}_i^{\alpha_i - 1}(u)\right)$.
Fixons $i \in [\![1, p]\!]$. Puisque $\mathrm{M}_i^{\alpha_i}(u)(x_i) = 0_\mathrm{E}$, π_{u,x_i} divise $\mathrm{M}_i^{\alpha_i}$. Puisque M_i est irréductible, il existe un entier naturel $\beta_i \leq \alpha_i$ tel que $\pi_{u,x_i} = \mathrm{M}_i^{\beta_i}$. Mais puisque $\mathrm{M}_i^{\alpha_i - 1}(u)(x_i) \neq 0_\mathrm{E}$, $\beta_i = \alpha_i$. Ainsi $\pi_{u,x_i} = \mathrm{M}_i^{\alpha_i}$.
Posons alors $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$. D'après la question précédente,
$$\pi_{u,x} = \prod_{i=1}^{p} \pi_{u,x_i} = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{M}_i^{\alpha_i} = \pi_u$$

4. On procède par implications circulaires.

$(i) \implies (ii)$ Supposons que $\pi_u = \chi_u$. On sait qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$. En particulier, $\dim \mathrm{E}_{u,x} = \deg \pi_{u,x} = \deg \pi_u = \deg \chi_u = n$. Ainsi $\mathrm{E}_{u,x} = \mathrm{E}$.

$(ii) \implies (iii)$ Supposons qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{E}_{u,x} = \mathrm{E}$. Alors $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\mathrm{E}_{u,x} = \mathrm{E}$. En posant $u^n(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x)$, la matrice de u dans cette base est bien de la forme voulue.

$(iii) \implies (i)$ Supposons qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme de l'énoncé. Si on note x le premier vecteur de cette base, alors cette base est $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$. Ainsi $\mathrm{E} = \operatorname{vect}(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1} \subset \mathrm{E}_{u,x}$. Puisqu'on a évidemment $\mathrm{E}_{u,x} \subset \mathrm{E}$, on a alors $\mathrm{E}_{u,x} = \mathrm{E}$. En particulier, $\deg \pi_{u,x} = \dim \mathrm{E}_{u,x} = n$. Puisque $\pi_{u,x}$ divise π_u qui lui-même divise χ_u et que $\deg \chi_u = n$, il s'ensuit que $\pi_{u,x} = \pi_u = \chi_u$.

Solution 33

1. On constate que $U^2 = nU$ donc $X^2 - nX = X(X-n)$ est un polynômale annulateur de U. Or ni X ni $X - n$ n'annulent U. Donc $\pi_U = X(X-n)$.

2. On en déduit que U est diagonalisable (π_U est scindé à racines simples) et $\mathrm{Sp}(U) = \{0, n\}$. De plus, il est clair que $\mathrm{rg}\, U = 1$ donc $\dim E_0(u) = \dim \operatorname{Ker} U = n-1$. Par conséquent, $\dim E_n(U) = 1$. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On vérifie que $e_1 - e_i$ appartient à $E_0(U)$ pour $i \in [\![2, n]\!]$. Ces vecteurs sont clairement linéairement indépendants et $\dim E_0(U) = n-1$ donc ils forment une base de $E_0(U)$. Soit $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1. Alors $v \in E_n(U)$ et $\dim E_n(U) = 1$ donc (v) est une base de $E_n(U)$. En notant $P = \begin{pmatrix} e_1 - e_2 & \dots & e_1 - e_n & v \end{pmatrix}$ et D la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (n, n) qui vaut 1, on a $U = PDP^{-1}$.

Solution 34

1. On calcule le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
\chi_{A_m}(X) &= \begin{vmatrix} X+m+1 & -m & -2 \\ m & X-1 & -m \\ 2 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X+m-1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ X+m-1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\
&= (X+m-1) \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 1 & -m & X+m-3 \end{vmatrix} && \text{en factorisant la première colonne} \\
&= (X+m-1) \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 0 & X-1 & -m \\ 0 & 0 & X+m-1 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= (X+m-1)^2(X-1)
\end{aligned}$$

On traite d'abord le cas $m = 0$. Alors $\chi_{A_0} = (X-1)^3$. Comme π_{A_0} divise χ_{A_0} et est unitaire, π_{A_0} vaut $(X-1)$, $(X-1)^2$ ou $(X-1)^3$. On $M \neq I_3$, $\pi_{A_0} \neq X - 1$. Un calcul montre que $(A_0 - I_3)^2 = 0$ donc $\pi_{A_0} = (X-1)^2$.
On suppose ensuite $m \neq 0$. Puisque $\mathrm{Sp}(A_m) = \{1, 1-m\}$ et π_{A_m} divise χ_{A_m}, π_{A_m} vaut $(X-1)(X+m-1)$ ou $(X-1)(X+m-1)^2$. Un calcul donne

$$(A - I_3)(A + (m-1)I_3) = \begin{pmatrix} m(2-m) & 0 & m(m-2) \\ 0 & 0 & 0 \\ m(2-m) & 0 & m(m-2) \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est nulle que si $m = 2$. On en déduit que $\pi_{A_2} = (X+1)(X-1)$ et si $m \neq 2$, $\pi_{A_m} = (X-1)(X+m-1)^2$.
On récapitule :

- $\pi_{A_0} = (X-1)^2$;
- $\pi_{A_2} = (X-1)(X+1)$;
- $\pi_{A_m} = (X-1)(X+m-1)^2$ si $m \notin \{0, 2\}$.

Solution 35

Notons $\pi_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme minimal de A considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\pi_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme minimal de A considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\pi_{\mathbb{R}}$ peut être vu comme un polynômes à coefficients complexes annulant A donc $\pi_{\mathbb{C}}$ divise $\pi_{\mathbb{R}}$ (dans $\mathbb{C}[X]$).
Notons $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de $\pi_{\mathbb{C}}$. Comme $\pi_{\mathbb{C}}$ annule A et A est à coefficients réels, on montre aisément que $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$ annule également A. On en déduit que π_A divise $\overline{\pi_A}$ (dans $\mathbb{C}[X]$). Mais comme $\pi_{\mathbb{C}}$ et $\overline{\pi_{\mathbb{C}}}$ sont unitaires et de même degré, ils sont égaux. On en déduit que $\pi_{\mathbb{C}}$ est à coefficients réels et annule A. Ainsi $\pi_{\mathbb{R}}$ divise $\pi_{\mathbb{C}}$ (dans $\mathbb{R}[X]$ et a fortiori dans $\mathbb{C}[X]$). Finalement, $\pi_{\mathbb{C}}$ et $\pi_{\mathbb{R}}$ se divisent l'un l'autre (dans $\mathbb{C}[X]$) et sont unitaires donc ils sont égaux.

Solution 36

$X^n - 1$ est un polynôme annulateur de A. Comme $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est libre, il n'existe pas de polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à n. Ainsi $\pi_A = X^n - 1$. De plus $\pi_A \mid \chi_A$ et $\deg \chi_A = n$ donc $\chi_A = \pi_A = X^n - 1$. Le coefficient de X^{n-1} dans χ_A est $-\operatorname{tr}(A)$. Comme $n \geq 2$, $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Solution 37

---

1. Cf. cours.

2. Comme $\mu_f(f) = 0$, le lemme des noyaux montre que

$$E = \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E)$$

Si on avait $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) = \{0\}$, on aurait $\operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E) = E$ et $X^2 + 4$ serait donc un polynôme annulateur de E, ce qui contredirait la défininition du polynôme minimal. Ainsi $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) \neq \{0\}$. On prouve de la même manière que $\operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E) \neq \{0\}$. Il existe donc des vecteurs non nuls x et y de E appartenant respectivement à $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f + 4\operatorname{Id}_E)$. On a alors $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.

3. Montrons que $(x, f(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$. On sait que déjà que $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$. Comme $f^2 + \operatorname{Id}_E$ commute avec f, $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$ est stable par f de sorte que $f(x) \in \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha x + \beta f(x) = 0$. En appliquant f, on obtient $\alpha f(x) + \beta f^2(x) = 0$ ou encore $\alpha f(x) - \beta x = 0$. Alors

$$\alpha(\alpha x + \beta f(x)) - \beta(\alpha f(x) - \beta x) = (\alpha^2 + \beta^2)x = 0$$

Comme $x \neq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ puis $\alpha = \beta = 0$ car α et β sont réels. Ainsi $(x, f(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$.
On montre de la même manière que $(y, f(y))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E)$. Ainsi $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) \geq 2$ et $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E) \geq 2$. Or $E = \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E)$ donc $\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E) = 4$. On en déduit que $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) = \dim \operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E) = 2$ puis que $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ sont des bases respectives de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E)$. A nouveau, $E = \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + 4\operatorname{Id}_E)$ donc $(x, f(x), y, f(y))$ est une base de E (adaptée à la décomposition en somme directe précédente).
La matrice de f dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 38

---

1. Comme les a_i ne sont pas nuls, les $n-1$ premières colonnes de $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sont non nulles et colinéaires et la dernière colonne n'est pas colinéaire aux précédentes. On en déduit que $\operatorname{rg}(f) = 2$.

2. D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} f = n - 2$. On en déduit que 0 est une valeur propre de f de multiplicité supérieure ou égale à $n - 2$. Ainsi X^{n-2} divise χ_f. Comme χ_f est unitaire de degré n, il existe bien $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire tel que $\chi_f = X^{n-2}P$ et $\deg P = 2$.

   Remarque. Comme $\operatorname{mat}_{cB}(f)$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable de même que f. On en déduit que 0 est valeur propre de multiplicité exactement $n - 2$. Ainsi 0 n'est pas racine de P ou encore $P(0) \neq 0$.

3. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = X^2 + \alpha X + \beta$. On sait que le coefficient de X^{n-1} dans χ_f est $-\operatorname{tr}(f)$ donc $\alpha = -\operatorname{tr}(f) = -a_1$.

4. Il est clair que

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \;\; f(e_i) = a_{n+1-i}e_n \qquad \text{et} \qquad f(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}e_i$$

On en déduit que

$$f^2(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n+1-i}^2 e_n + a_1 f(e_n) = a_1 f(e_n) + \mathrm{S}e_n$$

en posant $\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n+1-i}^2 = \sum_{i=2}^{n} a_i^2$.

5. D'après la question précédente, le sous-espace vectoriel $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(e_n, f(e_n))$ est stable par f. De plus, $f(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}e_i$ n'est pas colinéaire à e_n car $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et les a_i sont non nuls. Ainsi $(e_n, f(e_n))$ est une base de G et la matrice de l'endomorphisme f_{G} de G induit par f est $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{S} \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$. D'après le cours, $\chi_{f_{\mathrm{G}}} = \mathrm{X}^2 - a_1\mathrm{X} - \mathrm{S}$ divise $\chi_f = \mathrm{X}^{n-2}\mathrm{P}$. Comme $\chi_{f_{\mathrm{G}}}(0) = -\mathrm{S} \neq 0$, $\chi_{f_{\mathrm{G}}}$ est premier avec X^{n-2}. On en déduit que $\chi_{f_{\mathrm{G}}}$ divise P d'après le lemme de Gauss. Comme $\chi_{f_{\mathrm{G}}}$ et P sont unitaires et de degré 2, $\chi_{f_{\mathrm{G}}} = \mathrm{P}$ puis $\chi_f = \mathrm{X}^{n-2}(\mathrm{X}^2 - a_1\mathrm{X} - \mathrm{S})$.

6. La matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique réelle donc diagonalisable, de même que f. Le polynôme P est de discriminant $a_1^2 + 4\mathrm{S} > 0$ donc il est scindé à racines simples. De plus, 0 n'est pas racine de P. Comme f est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et possède les mêmes racines que χ_f. On en déduit que $\pi_f = \mathrm{XP} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2 - a_1\mathrm{X} - \mathrm{S})$.

Solution 39

Comme AB est diagonalisable, son polynôme minimal π_{AB} est scindé à racines simples. De plus, AB est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de A et n'est donc pas une racine de π_{AB}.
Comme $\pi_{\mathrm{AB}}(\mathrm{AB}) = 0$, $\mathrm{B}\pi_{\mathrm{AB}}(\mathrm{AB})\mathrm{A} = 0$ ou encore $\mathrm{P}(\mathrm{BA}) = 0$ avec $\mathrm{P} = \mathrm{X}\pi_{\mathrm{AB}}$. Or π_{AB} est scindé à racines simples et 0 n'est pas racine de π_{AB} donc P est encore scindé à racines simples. On en déduit que BA est diagonalisable.

Exponentielles

Solution 40

1. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, l'endomorphisme $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^{\mathrm{T}}$ est continu. En notant $\mathrm{S}_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) &= (\lim_{p\to+\infty} \mathrm{S}_p)^{\mathrm{T}} \\
&= \lim_{p\to+\infty} \mathrm{S}_p^{\mathrm{T}} && \text{par continuité de la transposition} \\
&= \lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right)^{\mathrm{T}} \\
&= \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{(\mathrm{A}^k)^{\mathrm{T}}}{k!} && \text{par linéarité de la transposition} \\
&= \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^k}{k!} && \text{par propriété de la transposition} \\
&= \exp(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})
\end{aligned}$$

2. Puisque A est symétrique, $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$. Ainsi, d'après la question précédente,

$$(\exp(\mathrm{A}))^{\mathrm{T}} = \exp(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \exp(\mathrm{A})$$

de sorte que exp(A) est symétrique.

3. Puisque $\frac{1}{2}$A commute avec elle-même

$$\exp(A) = \exp(A/2 + A/2) = \exp(A/2)^2$$

Par propriété du déterminant,

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(A/2)^2) = \det(\exp(A/2))^2 \geq 0$$

De plus, $\exp(A)$ est inversible puisque $\exp(A)\exp(-A) = \exp(0) = I_n$ (A et $-A$ commutent) donc $\det(\exp(A)) \neq 0$. Ainsi $\det(\exp(A)) > 0$.

4.

$$\begin{aligned}
\exp(A)^T \exp(A) &= \exp(A^T)\exp(A) && \text{d'après la première question} \\
&= \exp(-A)\exp(A) && \text{car A est antisymétrique} \\
&= \exp(-A + A) && \text{car A et } -A \text{ commutent} \\
&= \exp(0) = I_n
\end{aligned}$$

Ainsi $\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$. Mais la question précédente prouve que $\det(\exp(A)) > 0$ donc $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

Solution 41

Méthode n°1
On sait que $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$. On effectue la division euclidienne de X^n par χ_A. Il existe un polynôme Q_n et deux réels a_n et b_n tels que

$$X^n = \chi_A Q_n + a_n X + b_n$$

Après évaluation en 2 et 3, on obtient le système $\begin{cases} 2a_n + b_n = 2^n \\ 3a_n + b_n = 3^n \end{cases}$. On en déduit que $a_n = 3^n - 2^n$ et $b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$. Ainsi, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = \chi_A(A)Q_n(A) + a_n A + b_n I_2 = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)I_2$$

Par conséquent,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}\right)A + \left(3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}\right)I_2 = (e^3 - e^2)A + (3e^2 - 2e^3)I_2 = \begin{pmatrix} 2e^2 - e^3 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^3 - e^2 \end{pmatrix}$$

Méthode n°2
Comme χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable. De plus, $\operatorname{Sp}(A) = \{2, 3\}$. On calcule sans peine $E_2(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, on a $A = PDP^{-1}$ puis

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Un rapide calcul donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 2e^2 - e^3 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^3 - e^2 \end{pmatrix}$$

Solution 42

Méthode n°1
On calcule $\chi_A = (X-2)^2(X-3)$. On effectue la division euclidienne de X^n par χ_A. Il existe un polynôme deux polynômes Q_n et R_n tels que

$$X^n = \chi_A Q_n + R_n \qquad \text{et} \qquad \deg R_n < 3$$

Alors 2 est racine double de $X^n - R_n$ et 3 est racine simple de $X^n - R^n$ ce qui donne

$$(X^n - R_n)(2) = (X^n - R_n)(3) = (X^n - R_n)'(3) = 0$$

En notant $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$ avec $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$, on obtient le système

$$\begin{cases} 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \\ \qquad 6a_n + b_n = 3n^{n-1}n \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} a_n = 3^{n-1}n - 3^n + 2^n \\ b_n = 6 \cdot 3^n - 5 \cdot 3^{n-1}n - 6 \cdot 2^n \\ c_n = 9 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^{n-1}n - 8 \cdot 3^n \end{cases}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = \chi_A(A)Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$$

Par conséquent,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\right) A^2 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}\right) A + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!}\right) I_3 = e^2 A^2 + (e^3 - 6e^2)A + (9e^2 - 2e^3)I_3 = \begin{pmatrix} -6e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 10e^2 \\ -6e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 9e^2 \\ -7e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & -6e^3 + 11e^2 \end{pmatrix}$$

Méthode n°2

Comme χ_A est scindé, A est trigonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 3\}$. On calcule sans peine $E_2(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Enfin, on recherche $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$AU = 2U + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On trouve $U = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $A = PTP^{-1}$ en posant

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$. Or

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\exp(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} -6e^2+3e^3 & -4e^2+4e^3 & -6e^3+10e^2 \\ -6e^2+3e^3 & -3e^2+4e^3 & -6e^3+9e^2 \\ -7e^2+3e^3 & -4e^2+4e^3 & -6e^3+11e^2 \end{pmatrix}$$

Solution 43

Notons p l'indice de nilpotence de u. Alors

$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{u^n}{n!}$$

Remarquons que

$$\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{u^n}{n!} = \left(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{u^{n-1}}{n!}\right) \circ u = u \circ \left(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{u^{n-1}}{n!}\right)$$

On en déduit automatiquement que $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et $\mathrm{Im}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \subset \mathrm{Im}(u)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{u^k(x)}{k!} = 0_{\mathrm{E}}$$

Supposons $u(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Notons alors ℓ le plus grand entier naturel non nul vérifiant $u^\ell(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$. En appliquant $u^{\ell-1}$ à la dernière relation, on obtient $u^\ell(x) = 0_{\mathrm{E}}$, ce qui est contradictoire. On en déduit que $u(x) = 0_{\mathrm{E}}$ i.e. $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Par double inclusion, $\mathrm{Ker}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Ker}(u)$.
D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{rg}(u)$. Or $\mathrm{Im}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \subset \mathrm{Im}(u)$ donc $\mathrm{Im}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Im}(u)$.