Intégrales à paramètres

$\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Passage à la limite

Théorème 1.1 Convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

(H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;

(H2) (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f ;

(H3) f est continue par morceaux sur I ;

(H4) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathrm{I}\ |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

Alors f est intégrable sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} f(t)\, \mathrm{d}t$$

Remarque. L'intégrabilité des f_n sur I est garantie par la condition de domination.

Exemple 1.1

On pose $f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{1}{t^n + e^t}$ et $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\, \mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$. On souhaite déterminer la limite de la suite (I_n).

(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bien continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.

(H2) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \dfrac{1}{1+e} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

(H3) f est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(H4) De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(t)| \leq e^{-t}$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-t}\, \mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{e}$$

Remarque. Comme bien souvent, on peut en fait se passer du théorème de convergence dominée. En effet, en posant

$$\mathrm{J}_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad\qquad \mathrm{K}_n = \int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

on a $\mathrm{I}_n = \mathrm{J}_n + \mathrm{K}_n$. On découpe cette intégrale en deux car le comportement de t^n change selon que $t \leq 1$ ou $t \geq 1$.
On se doute alors que $\mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{e^t} = 1 - e^{-1}$, ce que l'on montre par le théorème des gendarmes. En effet

$$(1-e^{-1}) - \mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{e^t} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^n + e^t} = \int_0^1 \frac{t^n\,\mathrm{d}t}{e^t(t^n+e^t)}$$

On en déduit que

$$0 \leq \mathrm{J}_n - (1-e^{-1}) \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = 1 - \frac{1}{e}$.
On se doute de même que $\mathrm{K}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on utilise à nouveau le théorème des gendarmes : pour tout entier $n \geq 2$,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n + e^t} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \frac{1}{n-1}$$

On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{K}_n = 0$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 1 - e^{-1}$.

Méthode **Convergence dominée pour les séries de fonctions**

On peut justifier une interversion série/intégrale en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles.

Exemple 1.2

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. On souhaite montrer que

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

On remarque déjà que (série géométrique)

$$\forall t \in [0,1[,\ \frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a-1+nb}$$

Posons pour $t \in [0,1[$,

$$\mathrm{S}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{a-1+kb} = t^{a-1} \cdot \frac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)b}}{1+t^b}$$

(H1) Les fonctions S_n sont bien continues (par morceaux) sur $[0,1[$.

(H2) La suite (S_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \dfrac{t^{a-1}}{1+t^b}$ sur $[0,1[$.

(H3) f est bien continue (par morceaux) sur $[0,1[$.

(H4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0,1[$,

$$|\mathrm{S}_n(t)| = \left| t^{a-1} \cdot \frac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)b}}{1+t^b} \right| \leq 2t^{a-1}$$

et $t \mapsto 2t^{a-1}$ est intégrable sur $[0,1[$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 \mathrm{S}_n(t)\ \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$$

ou encore

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{a-1+kb}\ \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\ \mathrm{d}t$$

Comme il s'agit de sommes **finies**, ceci peut encore s'écrire

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{a-1+kb}\ \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\ \mathrm{d}t$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\ \mathrm{d}t$$

ce qui signifie que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{a+nb}$ converge (on le savait déjà par critère spécial des séries alternées) et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\ \mathrm{d}t$$

Remarque. On pouvait aisément se passer du critère spécial des séries alternées. En effet

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb} &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{a-1+kb} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{a-1+kb} \, \mathrm{d}t \qquad \text{(somme finie)} \\
&= \int_0^1 t^{a-1} \frac{1-(-1)^{n+1} t^{(n+1)b}}{1+t^b} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \, \mathrm{d}t - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{a-1+(n+1)b}}{1+t^b} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Alors

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{a-1+(n+1)b}}{1+t^b} \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{a-1+(n+1)b} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{a+(n+1)b}$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1+(n+1)b}}{1+t^b} \, \mathrm{d}t = 0$$

puis

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \, \mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \, \mathrm{d}t$$

Théorème 1.2 Convergence dominée

Soient $f : \mathrm{J} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathrm{J}}$ (éventuellement $a = \pm\infty$). On suppose que :

(H1) pour tout $x \in \mathrm{J}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(H2) pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\lim_{x \to a} f(x,t) = g(t)$ où g est continue par morceaux sur I ;

(H3) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x,t) \in \mathrm{J} \times \mathrm{I}, \ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors g est intégrable sur I et

$$\lim_{x \to a} \int_{\mathrm{I}} f(x,t) \, \mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} g(t) \, \mathrm{d}t$$

Exercice 1.1

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-t}}{x+t} \, \mathrm{d}t$.

Théorème 1.3 Intégration terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

(H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;

(H2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **intégrable** sur I ;

(H3) $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f ;

(H4) f est continue par morceaux sur I ;

(H5) la série $\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Alors f est intégrable sur I et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 1.3

On souhaite montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\,\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Par développement en série entière

$$\forall t \in]0,1[,\ \frac{\ln(t)}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \ln(t)$$

Posons $f_n : t \in]0,1[\mapsto (-1)^n t^n \ln(t)$. Alors

(H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (par morceaux) sur $]0,1[$;

(H2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0,1[$ puisque $\lim_0 f_n = 0$ si $n > 0$, $f_0(t) \underset{t\to 0^+}{=} o(1/\sqrt{t})$ et $\lim_1 f_n = 0$;

(H3) $\sum f_n$ converge simplement vers $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t}$ sur $]0,1[$;

(H4) f est continue (par morceaux) sur $]0,1[$;

(H5) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ par intégration par parties et $\sum \dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge.

Par intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0,1[$ (ce qu'on aurait pu montrer directement) et

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\,\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

2 Continuité

Théorème 2.1

Soient $f\colon \mathrm{A}\times\mathrm{I}\to\mathbb{K}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que :

(H1) pour tout $x\in\mathrm{A}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(H2) pour tout $t\in\mathrm{I}$, $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur A ;

(H3) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall(x,t)\in\mathrm{A}\times\mathrm{I},\ |f(x,t)|\leq\varphi(t)$$

Alors $\mathrm{F}\colon x\in\mathrm{A}\mapsto\int_{\mathrm{I}}f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Remarque. La dernière condition est une condition dite de **domination**.

Remarque. La continuité étant une notion locale, on peut remplacer la condition de domination sur A par la domination au voisinage de tout point de A. En particulier, il suffit de montrer la domination sur tout compact de A.
Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit de montrer la domination sur tout segment de A.

Exercice 2.1

Montrer que l'application $\mathrm{B}\colon (x,y)\mapsto\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 2.2

Montrer que l'application $\Gamma\colon z\mapsto\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathrm{P}=\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z)>0\}$.

3 Dérivabilité

Théorème 3.1

Soient $f : \mathrm{J} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que :

(H1) pour tout $x \in \mathrm{J}$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;

(H2) pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J ;

(H3) pour tout $x \in \mathrm{J}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(H4) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x,t) \in \mathrm{J} \times \mathrm{I},\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

Alors $\mathrm{F} : x \in \mathrm{J} \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et

$$\forall x \in \mathrm{J},\ \mathrm{F}'(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$$

Remarque. La dérivabilité étant une notion locale, on peut remplacer la domination sur J par la domination sur tout segment de J.

Exercice 3.1

Montrer que $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En déduire $\mathrm{F}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Corollaire 3.1

Soient $f : \mathrm{J} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que :

(H1) pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J ;

(H2) pour tout $x \in \mathrm{J}$ et pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(H3) pour tout $x \in \mathrm{J}$ et pour tout $j \in [\![0,k-1]\!]$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur I ;

(H4) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x,t) \in \mathrm{J} \times \mathrm{I},\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

Alors $\mathrm{F} : x \in \mathrm{J} \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et

$$\forall j \in [\![0,k]\!],\ \forall x \in \mathrm{J},\ \mathrm{F}^{(j)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\ \mathrm{d}t$$

Remarque. A nouveau, la domination sur tout segment de J suffit.

Corollaire 3.2

Soient $f : \mathrm{J} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que :

(H1) pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J ;

(H2) pour tout $x \in \mathrm{J}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(H3) pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction positive φ_k **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x,t) \in \mathrm{J} \times \mathrm{I},\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_k(t)$$

Alors $\mathrm{F} : x \in \mathrm{J} \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathrm{J},\ \mathrm{F}^{(k)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. A nouveau, la domination sur tout segment de J suffit.

Exercice 3.2

Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.