Devoir à la maison n°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Fonction dilogarithme

Partie I – Définition et étude de la fonction dilogarithme

On pose pour $t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$

$$f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t}$$

I.1 Justifier que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$. Dans la suite, on notera encore f ce prolongement.

On note alors pour $x \in]-\infty, 1[$

$$\mathrm{L}(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

I.2 Justifier que L peut se prolonger en une fonction continue sur $]-\infty, 1]$. On note encore L ce prolongement.

I.3 Justifier que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et donner sa dérivée.

I.4 Déterminer le sens de variation de L.

I.5 Déterminer la limite de L en $-\infty$.

Partie II – Relations fonctionnelles et valeurs particulières

II.6 **II.6.a** A l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\mathrm{L}(1) = \int_0^{+\infty} \frac{x\, \mathrm{d}x}{e^x - 1}$$

II.6.b On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{I}_k = \int_0^{+\infty} xe^{-kx}\, \mathrm{d}x$$

Justifier la convergence de cette intégrale et calculer I_k.

II.6.c Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \dfrac{x}{e^x - 1} \leq 1$.

II.6.d En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \mathrm{L}(1) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k \leq \frac{1}{n}$$

II.6.e On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $\mathrm{L}(1)$.

II.7 **II.7.a** Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) = \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2)$$

II.7.b En déduire la valeur de $\mathrm{L}(-1)$.

II.8 **II.8.a** Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(1-x) = \mathrm{C} - \ln(x)\ln(1-x)$$

puis déterminer la valeur de C.

II.8.b En déduire la valeur de $\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Partie III – Une équation différentielle

On considère les équations différentielles

$$\mathcal{E} : \ xy'' + y' = \frac{1}{1-x}$$

et

$$\mathcal{E}' : \ xz' + z = \frac{1}{1-x}$$

III.9 Résoudre $\mathcal{E}'$ sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0,1[$.

III.10 En déduire les solutions de $\mathcal{E}$ sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0,1[$. On exprimera ces solutions à l'aide de la fonction L.

III.11 Déterminer les éventuelles solutions de $\mathcal{E}$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.