Devoir à la maison n°20

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Par définition de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=1}^{m-1} k\mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=m}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\ &\leq (m-1)\sum_{k=1}^{m-1}\mathbb{P}(X=k) + n\sum_{k=m}^{n}\mathbb{P}(X=k)\\ &= (m-1)\mathbb{P}(X \leq m-1) + n\mathbb{P}(X \geq m)\\ &\leq (m-1) + n\mathbb{P}(X \geq m)\end{aligned}$$

2 Supposons $n \geq 2$ et donnons-nous $k \in [\![2, n]\!]$. Comme ln est croissante sur $[k-1, k]$,

$$\forall t \in [k-1, k],\ \ln(t) \leq \ln(k)$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} \ln(k) = \ln(k)$$

Ainsi

$$\int_{1}^{n} \ln(t)\ \mathrm{d}t \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \ln(t)\ \mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n}\ln(k) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k)$$

Comme une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ est $t \mapsto t\ln(t) - t$,

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n}\ln(k)$$

Cette inégalité est encore vraie si $n = 1$. On peut encore écrire

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!)$$

puis par croissance de l'exponentielle

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n e \leq n!$$

Or $e \geq 1$ donc

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$$

3 Comme u est bornée, U_n est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne inférieure et une borne supérieure, ce qui justifie la définition de $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$.
Puisque $U_{n+1} \subset U_n$, $\inf(U_n) \leq \inf(U_{n+1})$ et $\sup(U_n) \geq \sup(U_{n+1})$. Les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont donc respectivement croissante et décroissante.
Enfin, u étant bornée, les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ le sont également. Elles convergent d'après le théorème de convergence monotone.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Soit v une suite décroissante et plus grande que u. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\forall k \geq n, u_k \leq v_k \leq v_n$$

Ainsi

$$\overline{u}_n = \sup_{k \geq n} u_k \leq v_n$$

Donc $\overline{u} \leq v$: $\overline{u}$ est donc la plus petite suite décroissante et plus grande que u.
De même, soit v une suite croissante et plus petite que u. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\forall k \geq n, u_k \geq v_k \geq v_n$$

Ainsi

$$\overline{u}_n = \inf_{k \geq n} u_k \geq v_n$$

Donc $v \leq \underline{u}$: $\underline{u}$ est donc la plus grande suite croissante et plus petite que u.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout entier $k \geq n$, $u_k \leq v_k$ puis $\sup\limits_{k \geq n} u_n \leq \sup\limits_{k \geq n} v_k$ ou encore $\overline{u}_n \leq \overline{v}_n$. On en déduit que $\lim \overline{u} \leq \lim \overline{v}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{u}_n \leq u_n \leq \overline{u}_n$.
Si $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite. D'après le théorème d'encadrement, u converge également (vers cette même limite).
Supposons que u converge. On sait déjà que $\overline{u}$ et $\overline{u}$ sont respectivement croissante et décroissante. Notons ℓ la limite de u et donnons-nous $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq p$, $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$. Si l'on se donne un entier $n \geq p$, alors pour tout entier $k \geq n$, on a encore $\ell - \varepsilon \leq u_k \leq \ell + \varepsilon$. Ainsi

$$\ell - \varepsilon \leq \inf_{k \geq n} u_k \leq \sup_{k \geq n} u_k \leq \ell + \varepsilon$$

Finalement,

$$\forall n \geq p,\ \ell - \varepsilon \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq \ell + \varepsilon$$

Ceci montre que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ convergent toutes deux vers ℓ. Elles sont donc adjacentes.
On a également montré que dans ce cas, $\lim u = \lim \underline{u} = \lim \overline{u}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Par définition de la division euclidienne

$$m = qn + r = (q-1)n + (n+r)$$

Par définition de la sous-additivité :

$$u_m = u_{(q-1)n+(n+r)} \leq u_{(q-1)n} + u_{n+r}$$

Or on montre aisément par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_{kn} \leq k \leq u_n$. Donc

$$u_m \leq (q-1)u_n + u_{n+r}$$

Ainsi

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{q-1}{m} u_n + \frac{u_{n+r}}{m} = \frac{(q-1)n}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{u_{n+r}}{m}$$

On a vu précédemment que $(q-1)n = m - n - r$. De plus, par définition du reste d'une division euclidienne, $0 \leq r \leq n-1$ donc $n \leq n + r \leq 2n - 1$. Ainsi

$$u_{n+r} \leq \max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}$$

Finalement,

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ La suite u étant positive, la suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par 0.
De plus, en prenant $n = 1$ dans la question précédente, on a $r = 0$ et

$$\forall m \geq 2, \frac{u_n}{m} \leq \frac{m-1}{m} u_1 + \frac{u_1}{m} = u_1$$

La suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est donc également majorée.
Reprenons à nouveau la question précédente avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

$$\forall m \geq 2n,\ \frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m}\cdot\frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m} \leq \frac{u_n}{n} + \frac{\mathrm{M}_n}{m}$$

en posant $\mathrm{M}_n = \max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}$. La suite $\left(\frac{u_n}{n} + \frac{\mathrm{M}_n}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge évidemment vers $\frac{u_n}{n}$ donc d'après la question **6**,

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{u_n}{n} + \frac{\mathrm{M}_n}{m} = \lim_{m\to+\infty} \frac{u_n}{n} + \frac{\mathrm{M}_n}{m} = \frac{u_n}{n}$$

Mais d'après la question **5** (encore valide si une suite est plus grande qu'une autre *à partir d'un certain rang*),

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{u_m}{m} \leq \overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{u_n}{n} + \frac{\mathrm{M}_n}{m} = \frac{u_n}{n}$$

9 Posons $\ell = \overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{u_m}{m}$ et $v_n = \frac{u_n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ell \leq v_n \leq \overline{v_n}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim v_n = \ell$.

10 Soit $\omega \in \bigcap_{k=1}^{n}\{\mathrm{X}_k < x\}$. Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{X}_k(\omega) < x$ donc $\mathrm{Y}_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}_k(\omega) < \frac{nx}{n} = x$. Ainsi

$$\bigcap_{k=1}^{n}\{\mathrm{X}_k < x\} \subset \{\mathrm{Y}_n < x\}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{\mathrm{X}_k < x\}\right) \leq \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x)$$

Mais comme $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes,

$$\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{X}_k < x) \leq \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x)$$

Comme les X_k ont tous la même loi,

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{X}_k < x) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 < x) = 1$$

Finalement, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x) \geq 1$ et donc $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x) = 1$.
Soit $\omega \in \bigcap_{k=1}^{n}\{\mathrm{X}_k \geq x\}$. Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{X}_k(\omega) \geq x$ donc $\mathrm{Y}_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}_k(\omega) \geq \frac{nx}{n} = x$. Ainsi

$$\bigcap_{k=1}^{n}\{\mathrm{X}_k \geq x\} \subset \{\mathrm{Y}_n \geq x\}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{\mathrm{X}_k \geq x\}\right) \leq \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \geq x)$$

Mais comme $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes,

$$\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{X}_k \geq x) \leq \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \geq x)$$

Comme les X_k ont tous la même loi,

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{X}_k < x) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 < x) > 0$$

Finalement, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x) > 0$.

$\boxed{11}$ Soit $\omega \in \left(\{Y_m \geq x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\}\right)$. Alors

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) \geq x \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \geq x$$

donc

$$\sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) \geq mx \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \geq nx$$

puis

$$\sum_{k=1}^{m+n} X_k(\omega) \geq mx + nx = (m+n)x$$

et enfin

$$\frac{1}{m+n}\sum_{k=1}^{m+n} X_k(\omega) \geq x$$

ou encore

$$Y_{m+n}(\omega) \geq x$$

Ainsi $\omega \in \{Y_{m+n} \geq x\}$. On en déduit que

$$\left(\{Y_m \geq x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\}\right) \subset \{Y_{m+n} \geq x\}$$

puis

$$\mathbb{P}\left(\{Y_m \geq x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\}\right) \leq \mathbb{P}(Y_{m+n}) \geq x$$

D'après le lemme des coalitions, Y_m et $\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}\left(\{Y_m \geq x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\}\right) = \mathbb{P}(Y_m \geq x)\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right)$$

Comme les X_k sont indépendantes, on a en termes de fonctions génératrices :

$$G_{\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k} = \prod_{k=m+1}^{m+n} G_{X_k}$$

Mais comme les X_k suivent la même loi, elles ont même fonction génératrice. Ainsi

$$G_{\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k} = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k} = G_{\sum_{k=1}^{n} X_k}$$

Par conséquent, $\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\sum_{k=1}^{n} X_k$ ont la même loi. On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq nx\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \geq nx\right)$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq x\right) = \mathbb{P}(Y_n \geq x)$$

Finalement

$$\mathbb{P}(Y_m \geq x)\mathbb{P}(Y_n \geq x) \leq \mathbb{P}(Y_{m+n} \geq x)$$

$\boxed{12}$ Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $\mathbb{P}(X_1 \geq x) = 0$, alors $\mathbb{P}(X_1 < x) = 1$. D'après la question **10**, $\mathbb{P}(Y_n < x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $\mathbb{P}(Y_n \geq x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $\left(\mathbb{P}(Y_n \geq x)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
Si $\mathbb{P}(X_1 \geq x) > 0$, alors $\mathbb{P}(Y_n \geq x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ toujours d'après la question **10**. On peut alors poser $u_n = -\ln \mathbb{P}(Y_n \geq x)$. La suite (u_n) est alors positive puisqu'une probabilité est inférieure ou égale à 1. D'après la question précédente permet alors d'affirmer que $u_{m+n} \leq u_m + u_n$ pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. La question **9** montre que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers un réel ℓ. Il en découle de $\left(\mathbb{P}(Y_n \geq x)^{\frac{1}{n}}\right)$ converge vers $e^{-\ell}$.

13 Le résultat est clair lorsque $s = 1$. Supposons-le vrai pour un certain $s \in \mathbb{N}^*$. Donnons-nous alors une liste a de jetons donnant $s+1$ piles. Soit $z = a_j$ une jeton de la pile $s+1$. A un moment précédent, on a donc mis un jeton $z' = a_i$ sur la pile s tel que $i < j$ et $a_i > a_j$. Considérons la liste a' consistant en la liste a privée des éléments de la pile $s+1$. En appliquant le processus de l'énoncé à a', on va donc aboutir aux mêmes s piles qu'avec la liste a. En appliquant l'hypothèse de récurrence, il existe une suite b' vérifiant :

- b' est décroissante et de longueur s ;
- pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, le jeton b'_i est dans la pile i ;
- $b'_s = z'$.

On construit alors b en posant $b_i = b'_i$ pour $i \in [\![1, s]\!]$ et $b_{s+1} = z$.

- b' est décroissante de longueur s et $b_{s+1} = z = a_j < a_i = b_s$ donc b est décroissante de longueur $s+1$.
- Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $b_i = b'_i$ est bien dans la pile i et b_{s+1} est bien dans la pile $s+1$.
- $b_{s+1} = z$.

Le résultat est donc établi par récurrence.

14 Notons à nouveau s le nombre de piles obtenu à l'aide du processus décrit dans la question précédente. Si $s \geq q+1$, on extrait de a une liste décroissante de longueur s comme dans la question précédente. En prenant les $q+1$ premiers termes de cette liste, on obtient une liste extraite de a décroissante et de longueur $q+1$.
Si $s \leq q$, une des piles contient au moins $p+1$ éléments, sinon le nombre de jetons serait inférieur ou égal à pq. Les éléments de cette pile (du bas vers le haut) forment une suite extraite de a croissante et de longeur supérieure ou égale à $p+1$. En extrayant les $p+1$ premiers termes de cette suite extraite, on obtient une suite extraite de a croissante et de longueur $p+1$.

15 Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors $\mathbb{P}(\{A_1 = i\} \cap \{A_2 = i\}) = 0$ car pour tout $\omega \in \Omega$, $B(\omega)$ est injective. Mais $\mathbb{P}(A_i = 1) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A_2 = i) \neq 0$ car il existe des permutations $\sigma \in S_n$ telles que $\sigma(1) = i$ et $\sigma(2) = i$. Les variables aléatoires $A_1, \dots, A_n$ ne sont donc pas mutuellement indépendantes.

16 Comme B suit une loi uniforme sur S_n, $\mathbb{P}(A^s) = \dfrac{\operatorname{card} S_{n,s}}{\operatorname{card} S_n}$ où $S_{n,s}$ est l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ telles que $\sigma(s_1) < \sigma(s_2) < \cdots < \sigma(s_k)$. Se donner une telle permutation revient à choisir les k images de $s_1, \dots, s_k$ dans $[\![1, n]\!]$ puis à se donner une bijection de $[\![1, n]\!] \setminus \{s_1, \dots, s_k\}$ sur $[\![1, n]\!] \setminus \{\sigma(s_1), \dots, \sigma(s_k)\}$. Ainsi $\operatorname{card} S_{n,s} = \dbinom{n}{k}(n-k)! = \dfrac{n!}{k!}$. Puisque $\operatorname{card} S_n = n!$, on obtient $\mathbb{P}(A^s) = \dfrac{1}{k!}$.

17 Notons f l'application qui à $\sigma \in S_n$ associe la longueur de la plus longue liste extraite de $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$. Alors $C_n = f(B)$. Considérons également l'application Φ qui $\sigma \in S_n$ associe la permutation σ' définie par $\sigma'(k) = \sigma(n+1-k)$. Alors Φ est une involution de S_n donc une bijection. De plus, Φ établit une bijection entre les suites croissantes $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ et $(\sigma'(1), \dots, \sigma'(n))$. On en déduit que $D_n = f \circ \Phi(B)$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\{C_n = k\} = \{B \in f^{-1}(\{k\})\} \qquad \text{et} \qquad \{D_n = k\} = \{B \in \Phi^{-1}(f^{-1}(\{k\}))\}$$

Or B suit une loi uniforme sur S_n donc

$$\mathbb{P}(C_n = k) = \frac{\operatorname{card} f^{-1}(\{k\})}{\operatorname{card} S_n} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(D_n = k) = \frac{\operatorname{card} \Phi^{-1}(f^{-1}(\{k\}))}{\operatorname{card} S_n}$$

Comme Φ est bijective, $\operatorname{card} f^{-1}(\{k\}) = \operatorname{card} \Phi^{-1}(f^{-1}(\{k\}))$ donc $\mathbb{P}(C_n = k) = \mathbb{P}(D_n = k)$. Ainsi C_n et D_n ont la même loi.
Notons p le plus grand entier naturel tel que $p^2+1 \leq n$ i.e. $p = \left\lfloor \sqrt{n-1} \right\rfloor$. La plus longue liste croissante (resp décroissante) extraite de A est plus longue que la plus longue liste croissante (resp. décroissante) extraite des p^2+1 éléments de A. Mais l'une de ces deux dernières listes est de longueur supérieure ou égale à $p+1$ d'après la question **14** et ces deux listes sont de longueur au moins 1. Ainsi $C_n + D_n \geq p+1+1 = p+2$. Par linéarité et croissance de l'espérance

$$\mathbb{E}(C_n) + \mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(C_n + D_n) \geq p+2$$

Or C_n et D_n ont la même loi donc la même espérance. Ainsi

$$\mathbb{E}(C_n) \geq \frac{p+2}{2} = \frac{\left\lfloor \sqrt{n-1} \right\rfloor + 2}{2} > \frac{\sqrt{n-1}+1}{2}$$

De plus,

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\leq 1$$

donc $\sqrt{n-1}+1\geq\sqrt{n}$. Finalement,

$$\mathbb{E}(\mathrm{C}_n)\geq\frac{\sqrt{n}}{2}$$

18 Notons E_k l'ensemble des suites strictement croissantes de longueur k extraites de la liste $(1,2,\dots,n)$. Alors

$$\{\mathrm{C}_n\geq k\}\subset\bigcup_{s\in\mathrm{E}_k}\mathrm{A}^s$$

puis

$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_n\geq k)\leq\mathbb{P}\left(\bigcup_{s\in\mathrm{E}_k}\mathrm{A}^s\right)\leq\sum_{s\in\mathrm{E}_k}\mathbb{P}(\mathrm{A}_s)$$

D'après la question **16**, $\mathbb{P}(\mathrm{A}_s)=\dfrac{1}{k!}$ pour tout $s\in\mathrm{E}_k$ donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_n\geq k)\leq\frac{\operatorname{card}\mathrm{E}_k}{k!}=\frac{\binom{n}{k}}{k!}$$

19 Il suffit de prendre $k=\lceil\alpha e\sqrt{n}\rceil$. Alors

$$\{\mathrm{C}_n\geq k\}\subset\{\mathrm{C}_n\geq\alpha e\sqrt{n}\}\subset\{\mathrm{C}_n>k-1\}$$

Mais comme C_n est à valeurs entières, $\{\mathrm{C}_n>k-1\}=\{\mathrm{C}_n\geq k\}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_n\geq\alpha e\sqrt{n})=\mathbb{P}(\mathrm{C}_n\geq k)\leq\frac{\binom{n}{k}}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{(k!)^2}$$

D'une part,

$$\frac{n!}{(n-k)!}\leq n^k$$

et d'autre part, d'après la question **2**,

$$\frac{1}{(k!)^2}\leq\frac{e^{2k}}{k^{2k}}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_n\geq\alpha e\sqrt{n})\leq\frac{n^ke^{2k}}{k^{2k}}=\left(\frac{e\sqrt{n}}{k}\right)^{2k}$$

Or $\alpha e\sqrt{n}\leq k$ donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_n\geq\alpha e\sqrt{n})\leq\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2k}$$

Comme $\alpha>1$, $\dfrac{1}{\alpha}<1$ et comme $2k\geq 2\alpha e\sqrt{n}$, $\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{2k}\leq\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}$. Enfin,

$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_n\geq\alpha e\sqrt{n})\leq\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}$$

20 D'après la question **1**,

$$\mathbb{E}(\mathrm{C}_n)\leq k-1+\mathbb{P}(\mathrm{C}_n\geq k)$$

On rappelle que $\mathbb{P}(\mathrm{C}_n\geq k)=\mathbb{P}(\mathrm{C}_n\geq\alpha e\sqrt{n})$ de sorte que

$$\frac{\mathbb{E}(\mathrm{C}_n)}{\sqrt{n}}\leq\alpha e+\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}$$

Posons $\alpha = \dfrac{1+n^{-1/4}}{\sqrt{n}}$ de sorte que

$$\frac{\mathbb{E}(\mathrm{C}_n)}{\sqrt{n}} \leq (1+n^{-1/4})e + \varepsilon_n$$

avec

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+n^{-1/4}}\right)^{2(1+n^{-1/4})e\sqrt{n}}$$

Remarquons que

$$\ln(\varepsilon_n) = -\frac{1}{2}\ln(n) - 2(1+n^{-1/4})e\ln(1+n^{-1/4})$$

Or $(1+n^{-1/4})\ln(1+n^{-1/4}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\ln(\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Comme (ε_n) converge, elle est bornée et donc la suite de terme général $\dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{C}_n)}{\sqrt{n}}$ est majorée. On en déduit l'existence de $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{C}_n)}{\sqrt{n}}$. D'après la question **5**,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\mathbb{E}(\mathrm{C}_n)}{\sqrt{n}} \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} (1+n^{-1/4})e + \varepsilon_n$$

Mais comme la suite de terme général $(1+n^{-1/4})e + \varepsilon_n$ converge, on a d'après la question **6**,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} (1+n^{-1/4})e + \varepsilon_n = \lim_{n\to+\infty} (1+n^{-1/4})e + \varepsilon_n = e$$

Finalement,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\mathbb{E}(\mathrm{C}_n)}{\sqrt{n}} \leq e$$

Remarque. Puisque $\dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{C}_n)}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{2}$, on peut montrer de la même manière que $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{C}_n)}{\sqrt{n}}$ existe et que $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{C}_n)}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{2}$.