Devoir à la maison n°14

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 **1.a** On utilise l'indication de l'énoncé

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta)\cdot i^k\sin^k(\theta)$$

Comme $i^{2k} = (-1)^k$ et $i^{2k+1} = (-1)^{2k}i$, on obtient en passant à la partie réelle :

$$\cos(n\theta) = \sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)\sin^{2k}(\theta) = \sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)(1-\cos^2(\theta))^k$$

Le polynôme

$$\mathrm{T} = \sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k}\mathrm{X}^{n-2k}(1-\mathrm{X}^2)^k$$

vérifie bien l'égalité ($\star$). Tous les monômes $\mathrm{X}^{n-2k}(1-\mathrm{X}^2)^k$ sont de degré n donc $\deg\mathrm{T}\le n$. Enfin, le coefficient de X^n dans T est $\displaystyle\sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k} > 0$ (somme de termes strictement positifs).

1.b Supposons que deux polynômes S et T vérifient la condition ($\star$). Alors $(\mathrm{S}-\mathrm{T})(\cos\theta) = 0$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$. Ainsi tous les réels de $[-1,1]$ sont racines de $\mathrm{S}-\mathrm{T}$. Comme $\mathrm{S}-\mathrm{T}$ possède une infinité de racines, $\mathrm{S}-\mathrm{T}=0$ i.e. $\mathrm{S}=\mathrm{T}$.

2 **2.a** Soit $x\in[-1,1]$. Posons $\theta = \arccos x$ pour simplifier. Alors

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta)$$

ou encore

$$\mathrm{T}_{n+2}(x) + \mathrm{T}_n(x) = 2x\mathrm{T}_{n+1}(x)$$

2.b On a évidemment $\mathrm{T}_0 = 1$ et $\mathrm{T}_1 = \mathrm{X}$ et, à l'aide de la relation de récurrence précédente, on obtient $\mathrm{T}_2 = 2\mathrm{X}^2 - 1$ et $\mathrm{T}_3 = 4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}$.

2.c Par définition de T_n, $\deg\mathrm{T}_n = n$ de sorte que $\deg(2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}) > \deg\mathrm{T}_n$. En notant c_n le coefficient dominant de T_n, on a donc $c_{n+2} = 2c_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme $\mathrm{T}_1 = \mathrm{X}$, $c_1 = 1$ de sorte que $c_n = 2^{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. De plus, $c_0 = 1$.
On peut aussi remarquer que d'après le calcul effectué à la question **1.a**,

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(1+(-1)^k)\binom{n}{k}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\right)\\
&= \frac{1}{2}\left((1+1)^n + (1-1)^n\right) = \begin{cases}2^{n-1} & \text{si } n\in\mathbb{N}^*\\ 1 & \text{si } n = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

3 **3.a** On rappelle que

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

En particulier,

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \mathrm{T}_n(\cos\theta_k) = \cos(n\theta_k) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = 0$$

De plus, les θ_k sont des éléments distincts deux à deux de $[0, \pi]$ et cos est injective sur $[0, \pi]$ (strictement décroissante) donc les $\cos\theta_k$ sont également distincts deux à deux. Comme $\deg \mathrm{T}_n = n$, ce sont exactement les racines de T_n et ces racines sont simples. Enfin, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} donc

$$\mathrm{T}_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (\mathrm{X} - \cos\theta_k)$$

3.b Pour tout $x \in [-1, 1]$

$$|\mathrm{T}_n(x)| = |\cos(n \arccos x)| \leq 1$$

De plus,

$$\mathrm{T}_n(1) = \cos(n \arccos(1)) = \cos(0) = 1$$

On en déduit que $\|\mathrm{T}_n\|_\infty = 1$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathrm{T}_n(c_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ |\mathrm{T}_n(c_k)| = 1 = \|\mathrm{T}_n\|_\infty$$

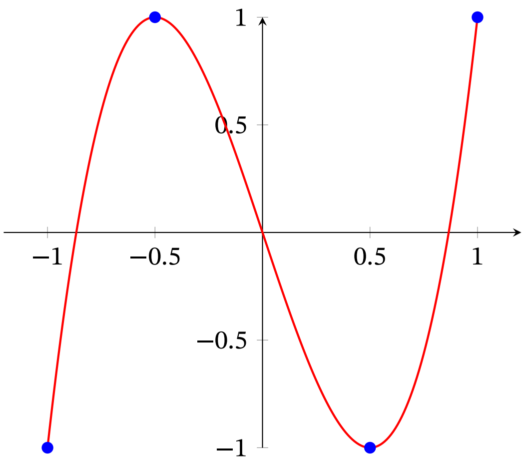
et

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \mathrm{T}_n(c_{k+1}) = (-1)^{k+1} = -(-1)^k = -\mathrm{T}_n(c_k)$$

3.c On sait que $\mathrm{T}_3 = 4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}$ et donc $\mathrm{T}_3' = 12\mathrm{X}^2 - 3 = 12\left(\mathrm{X} - \frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{X} - \frac{1}{2}\right)$. On obtient alors facilement le tableau de variations suivant :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
T_3'		$+$	0	$-$	0	$+$	
T_3	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

puis le graphe suivant (on remarque que T_3 est impair) :



On a clairement $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ et $c_3 = -1$.

$\boxed{4}$ Remarquons déjà que $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur l'intervalle $]-1, 1[$.

Remarquons que

$$\forall t \in]-1, 1[, \ \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{h(t)}{\sqrt{1+t} \cdot \sqrt{1-t}}$$

Comme $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1+t}}$ est continue sur le segment $[-1,1]$, elle y est bornée de sorte que $\dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1^-}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Or $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[0,1[$ par critère de Riemann donc $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ également. On montre de la même manière qu'elle est intégrable sur $]-1,0]$. Finalement, $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

Remarque. On peut aussi affirmer que h étant continue sur le segment $[-1,1]$, elle y est bornée. Ainsi il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\left|\dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \dfrac{\mathrm{M}}{\sqrt{1-t^2}}$. On constate enfin que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$ puisqu'une de ses primitives, à savoir arcsin, admet des limites finies en -1 et 1. Par comparaison, $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

5 Tout d'abord, $\langle f, g\rangle$ est bien défini pour $(f,g) \in \mathrm{E}^2$: il suffit de poser dans la question précédente $h = fg$ qui est bien continue sur $[-1,1]$.

Symétrie Evident.

Bilinéarité La bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale.

Positivité Evident.

Caractère défini Si $h \in \mathrm{E}$ vérifie $\langle h, h\rangle = 0$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{h(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0$. L'intégrale sur $]-1,1[$ d'une fonction continue et positive sur $]-1,1[$ ne peut être nulle que si cette fonction est nulle. On en déduit que

$$\forall t \in]-1,1[,\ \frac{h(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0$$

puis

$$\forall t \in]-1,1[,\ h(t) = 0$$

Mais comme h est continue sur $[-1,1]$, h est finalement nulle sur $[-1,1]$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc un produit scalaire.

6 Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Alors

$$\langle \mathrm{T}_n, \mathrm{T}_m, \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \arccos x)\cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

On effectue alors le changement de variable $x = \cos t$. Comme cos est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$, de dérivée $-\sin$,

$$\langle \mathrm{T}_n, \mathrm{T}_m, \rangle = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)\cos(mt)}{\sqrt{1-\cos^2 t}} \cdot \sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)\cos(mt)}{\sqrt{\sin^2 t}} \cdot \sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t$$

car sin est positive sur $]-\pi,\pi[$.
On procède ensuite à une linéarisation.

$$\langle \mathrm{T}_n, \mathrm{T}_m = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((m+n)t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((m-n)t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit alors aisément que

$$\langle \mathrm{T}_n, \mathrm{T}_m\rangle = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

On en déduit que la famille $(\mathrm{T}_0, \dots, \mathrm{T}_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nul de E_n : c'est donc une base orthogonale (mais pas orthonormale) de E_n.

7 **7.a** Le théorème est le suivant :

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E et x un vecteur de E, il existe un unique vecteur $y \in \mathrm{F}$ tel que $d(x,\mathrm{F}) = \|x - y\|$ (où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associé au produit scalaire), à savoir le projeté orthogonal de x sur F.

Dans le cas qui nous intéresse, E_n est bien de dimension finie, d'où l'existence et l'unicité de $t_n(f)$. On peut préciser que $t_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur E_n.

7.b Remarquons que $(T_0/\|T_0\|_2, \dots, T_n/\|T_n\|_2)$ est une base orthnormale de E_n. Comme $t_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur E_n, on a donc

$$t_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \left\langle f, \frac{T_k}{\|T_k\|_2} \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|_2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|_2^2} T_k$$

$\boxed{8}$ Comme $t_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur E_n, les vecteurs $t_n(f)$ et $f - t_n(f)$ sont orthogonaux. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|f\|_2^2 = \|(f - t_n(f)) + t_n(f)\|_2^2 = \|f - t_n(f)\|_2^2 + \|t_n(f)\|_2^2$$

Puisque

$$t_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|_2} \cdot \frac{T_k}{\|T_k\|_2}$$

et que $(T_0/\|T_0\|_2, \dots, T_n/\|T_n\|_2)$ est une base orthonormale de E_n,

$$\|t_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|_2} \right)^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$$

Ainsi

$$d_2(f, E_n) = \|f - t_n(f)\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \|t_n(f)\|_2^2} = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}$$

$\boxed{9}$ **9.a** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2} = \|t_n(f)\|_2^2 \leq \|f - t_n(f)\|_2^2 + \|t_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2} \geq 0$, la suite (S_n) est croissante et majorée par $\|f\|_2^2$: elle converge. Ceci signifie que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \dfrac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$ converge.

9.b Comme la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \dfrac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$ converge, son terme général tend vers 0. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle f, T_n \rangle^2 = \frac{\langle f, T_n \rangle^2}{\|T_n\|_2^2} \cdot \|T_n\|_2^2 = \frac{\pi}{2} \frac{\langle f, T_n \rangle^2}{\|T_n\|_2^2}$$

donc la suite de terme général $\langle f, T_n \rangle^2$ tend vers 0 également. On en déduit aussi que la suite de terme général $\langle f, T_n \rangle$ converge aussi vers 0. En revenant à la définition du produit scalaire, la suite de terme général $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ converge vers 0.

$\boxed{10}$ **10.a** Pour tout $t \in [-1, 1]$, $|h(t)| \leq \|h\|_\infty$ donc

$$\|h\|_2^2 = \int_{-1}^{1} \frac{h(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \leq \|h\|_\infty^2 \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \|h\|_\infty^2 \|T_0\|_2^2 = \pi \|h\|_\infty^2$$

donc $\|h\|_2 \leq \sqrt{\pi}\|h\|_\infty$.

10.b Comme f est continue sur $[-1, 1]$, d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) convergeant uniformément vers f sur $[-1, 1]$ i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - P_N\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$. Posons $p = \max(0, \deg P_N)$ de sorte que $P_N \in E_p$. Par définition de $t_p(f)$,

$$\|f - t_p(f)\|_2 = \inf_{P \in E_p} \|f - P\|_2 \leq \|f - P_N\|_2 \leq \sqrt{\pi}\|f - P_N\|_\infty < \varepsilon$$

Or comme la suite (E_n) est croissante pour l'inclusion, la suite de terme général $d_2(f, E_n) = \|f - t_n(f)\|_2$ est décroissante. On en déduit que

$$\forall n \geq p,\ \|f - t_n(f)\|_2 \leq \|f - t_p(f)\|_2 < \varepsilon$$

Par définition de la limite, la suite de terme général $\|f - t_n(f)\|_2$ converge vers 0.

$\boxed{11}$ **11.a** On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f - t_n(f)\|_2^2 = d_2(f, \mathrm{E}_n)^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, \mathrm{T}_k \rangle^2}{\|\mathrm{T}_k\|_2^2}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - t_n(f)\|_2 = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, \mathrm{T}_k \rangle^2}{\|\mathrm{T}_k\|_2^2} = \|f\|_2^2$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f, \mathrm{T}_k \rangle^2}{\|\mathrm{T}_k\|_2^2} = \|f\|_2^2$$

puis

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f, \mathrm{T}_k \rangle^2}{\|\mathrm{T}_k\|_2^2}} = \|f\|_2$$

11.b Ceci signifie que $\langle h, \mathrm{T}_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\|h\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle h, \mathrm{T}_k \rangle^2}{\|\mathrm{T}_k\|_2^2}} = 0$$

donc h est nulle sur $[-1, 1]$.

$\boxed{12}$ **12.a** • $0 \in \mathrm{K}$ donc $\mathrm{K} \neq \varnothing$.

- Par inégalité triangulaire, pour tout $\mathrm{Q} \in \mathrm{K}$,

$$\|\mathrm{Q}\|_\infty = \|(\mathrm{Q} - f) + f\|_\infty \leq \|\mathrm{Q} - f\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$$

  donc K est bornée.
- L'application $\psi : \mathrm{Q} \in \mathrm{E}_n \mapsto \|f - \mathrm{Q}\|_\infty$ est continue (on montre classiquement que la norme $\|\cdot\|_\infty$ est 1-lipschitzienne par inégalité triangulaire). Ainsi K est fermé comme image réciproque du fermé $]-\infty, \|f\|_\infty]$ par l'application continue ψ.

12.b Comme E_n est de dimension finie, K est compact comme partie fermé et bornée de E_n. De plus, on a vu que $\mathrm{K} \neq \varnothing$.

$\boxed{13}$ **13.a** Tout d'abord, comme $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}_n$, $d_\infty(f, \mathrm{E}_n) \leq d_\infty(f, \mathrm{K})$.
Soit alors $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_n$.

- Si $\mathrm{P} \in \mathrm{K}$, alors

$$\|f - \mathrm{P}\|_\infty \geq d_\infty(f, \mathrm{K})$$

- Si $\mathrm{P} \notin \mathrm{K}$,

$$\|f - \mathrm{P}\|_\infty > \|f\|_\infty$$

  Or il est clair que $0 \in \mathrm{K}$ donc $\|f\|_\infty = \|f - 0\|_\infty \geq d_\infty(f, \mathrm{K})$. Ainsi

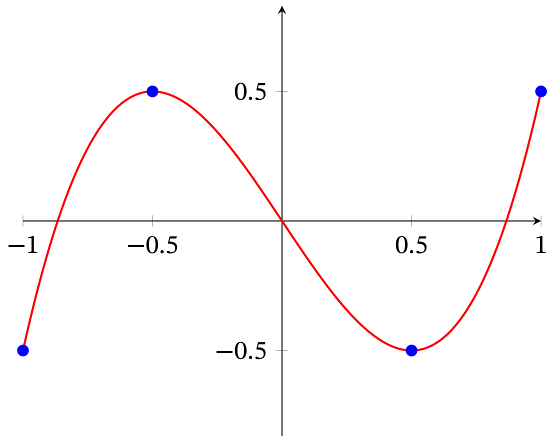
$$\|f - \mathrm{P}\|_\infty > d_\infty(f, \mathrm{K})$$

Finalement, pour tout $f \in \mathrm{E}_n$, $\|f - \mathrm{P}\|_\infty \geq d_\infty(f, \mathrm{K})$ donc $d_\infty(f, \mathrm{E}_n) \geq d_\infty(f, \mathrm{K})$.
Il en résulte que $d_\infty(f, \mathrm{E}_n) = d_\infty(f, \mathrm{K})$.

13.b Puisque K est compact, l'application continue $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}_n \mapsto \|f - \mathrm{Q}\|_\infty$ admet un minimum sur K. Autrement dit, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{K}$ tel que $\|f - \mathrm{P}\|_\infty = d_\infty(f, \mathrm{K})$. Mais comme $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}_n$, $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_n$ et la question précédente montre que

$$\|f - \mathrm{P}\|_\infty = d_\infty(f, \mathrm{K}) = d_\infty(f, \mathrm{E}_n)$$

$\boxed{14}$ **14.a** Il suffit par exemple de poser $\Phi = \dfrac{1}{2}\mathrm{T}_3$.



14.b D'après la question **3.b**, en posant $c_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$,

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!],\ |\mathrm{T}_{n+1}(c_k)| = \|\mathrm{T}_{n+1}\|_\infty$$

et

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathrm{T}_{n+1}(c_{k+1}) = -\mathrm{T}_n(c_k)$$

En posant $x_i = c_{n+1-i}$ on a alors :

- $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$ par stricte décroissance de cos sur $[0, \pi]$;
- $\forall i \in [\![0, n+1]\!],\ |\mathrm{T}_{n+1}(x_i)| = \|\mathrm{T}_{n+1}\|_\infty$;
- $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \mathrm{T}_{n+1}(x_{i+1}) = -\mathrm{T}_n(x_i)$.

Ainsi T_{n+1} équioscille sur les $n+2$ points $x_0, \dots, x_{n+1}$.

$\boxed{15}$ **15.a** Comme $f - \mathrm{P}$ équioscille sur les $n+2$ points $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$,

$$|f(x_i) - \mathrm{P}(x_i)| = \|f - \mathrm{P}\|_\infty$$

Mais comme $f(x_i) - \mathrm{P}(x_i) > 0$,

$$f(x_i) - \mathrm{P}(x_i) = \|f - \mathrm{P}\|_\infty$$

Remarquons que

$$\mathrm{Q}(x_i) - \mathrm{P}(x_i) = (f(x_i) - \mathrm{P}(x_i)) - (f(x_i) - \mathrm{Q}(x_i))$$

Or

$$f(x_i) - \mathrm{Q}(x_i) \leq \|f - \mathrm{Q}\|_\infty < \|f - \mathrm{P}\|_\infty = f(x_i) - \mathrm{P}(x_i)$$

donc

$$\mathrm{Q}(x_i) - \mathrm{P}(x_i) > 0$$

15.b Remarquons que pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$,

$$|f(x_i) - \mathrm{P}(x_i)| = \|f - \mathrm{P}\|_\infty > \|f - \mathrm{Q}\|_\infty \geq 0$$

donc les $f(x_i) - \mathrm{P}(x_i)$ ne sont pas nuls. On a donc pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$, $f(x_i) - \mathrm{P}(x_i) > 0$ ou $f(x_i) - \mathrm{P}(x_i) < 0$. Comme $f - \mathrm{P}$ équioscille sur $x_0 < \cdots < x_{n+1}$, $f(x_i) - \mathrm{P}(x_i)$ et $f(x_{i+1}) - \mathrm{P}(x_{i+1})$ sont de signes opposés.
La question précédente montre que $f(x_i) - \mathrm{P}(x_i)$ et $\mathrm{Q}(x_i) - \mathrm{P}(x_i)$ sont de même signe donc $\mathrm{Q}(x_i) - \mathrm{P}(x_i)$ et $\mathrm{Q}(x_{i+1}) - \mathrm{P}(x_{i+1})$ sont de signes opposés (et non nuls). Comme $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit que $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$ s'annule sur $]x_i, x_{i+1}[$. Comme $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$, $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$ s'annule $n+1$ fois. Or $\mathrm{P} - \mathrm{Q} \in \mathrm{E}_n$ donc $\mathrm{P} - \mathrm{Q} = 0$ i.e. $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$. Ceci contredit le fait que $\|f - \mathrm{Q}\|_\infty < \|f - \mathrm{P}\|_\infty$. Autrement dit, pour tout $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}_n$, $\|f - \mathrm{P}\|_\infty \leq \|f - \mathrm{Q}\|_\infty$. Or $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_n$ donc $\|f - \mathrm{P}\|_\infty = d_\infty(f, \mathrm{E}_n)$ et P est un PMA d'ordre n de f.

$\boxed{16}$ On sait que T_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n donc $q_n \in \mathrm{E}_n$. Comme T_{n+1} équioscille sur $n+2$ points, il en est de même de $f - q_n = 2^{-n}\mathrm{T}_n$. D'après la question précédente, q_n est un PMA d'ordre n de f.

$\boxed{17}$ Il existe alors $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}_n$ tel que $\mathrm{P} = f - \mathrm{Q}$. Donc

$$\|\mathrm{P}\|_\infty = \|f - \mathrm{Q}\|_\infty \geq d_\infty(f, \mathrm{E}_n)$$

Or q_n est un PMA d'ordre n de f donc

$$d_\infty(f, \mathrm{E}_n) = \|f - q_n\|_\infty = \|2^{-n}\mathrm{T}_{n+1}\|_\infty = 2^{-n}\|\mathrm{T}_n\|_\infty$$

On en déduit que

$$2^{-n}\|\mathrm{T}_{n+1}\|_\infty \leq \|\mathrm{P}\|_\infty$$

18 **18.a** Notons a le coefficient dominant de f. Alors f/a est un polynôme unitaire de degré $n+1$. D'après la question **16**, $q_n = f/a - 2^{-n}\mathrm{T}_{n+1}$ est un PMA d'ordre n de f/a. Autrement dit

$$\forall \mathrm{Q} \in \mathrm{E}_n,\ \|f/a - q_n\|_\infty = \leq \|f/a - \mathrm{Q}\|_\infty$$

Par homogénéité de la norme,

$$\forall \mathrm{Q} \in \mathrm{E}_n,\ \|f - aq_n\|_\infty \leq \|f - a\mathrm{Q}\|_\infty$$

Or l'application $\mathrm{Q} \mapsto a\mathrm{Q}$ est une permutation de E_n donc

$$\forall \mathrm{Q} \in \mathrm{E}_n,\ \|f - aq_n\|_\infty \leq \|f - \mathrm{Q}\|_\infty$$

Ainsi $aq_n = f - 2^{-n}a\mathrm{T}_{n+1} \in \mathrm{E}_n$ est un PMA d'ordre n de f.

18.b D'après la question précédente, un PMA d'ordre 2 de f est $f - 5 \cdot 2^{-2}\mathrm{T}_3$, c'est-à-dire le polynôme

$$5\mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X} - 3 - 5 \cdot \frac{1}{4}\left(4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}\right) = \frac{23}{4}\mathrm{X} - 3$$