

# FONCTIONS VECTORIELLES

## Continuité

### Solution 1

1. En considérant sa dérivée, on montre que l'application  $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - x$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  et croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Elle admet donc un minimum en 0. Puisque  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$  et en particulier, ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . L'exponentielle n'admet donc pas de point fixe sur  $\mathbb{R}$ .

2. On sait que  $\tan x \sim x$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$  puis  $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{x}{\tan x}\right) = e$ . De même,  $\sin x \sim x$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ . Ainsi  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e - 1$ .

On sait que  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \pm\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0$  puis  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{\tan x}} = 1$ . Puisque  $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$  est continue en  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{2}$ . Ainsi  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 1 - \frac{\pi}{2}$ .

3. Tout d'abord,  $e - 1 > 0$  car  $e \geq 2$  et  $1 - \frac{\pi}{2} < 0$  car  $\pi \geq 3$ .

Puisque  $\tan$  ne s'annule pas sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $x \mapsto \frac{x}{\tan x}$  est continue sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . Puisque  $x \mapsto e^x$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \exp\left(\frac{x}{\tan x}\right)$  est continue sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Comme  $\sin$  ne s'annule pas sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$  est continue sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Ainsi  $f$  est continue sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  comme différence de deux fonctions continues sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Puisque  $\lim_0 f > 0$  et  $\lim_{\frac{\pi}{2}} f < 0$ ,  $f$  s'annule sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. Il existe donc  $b \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tel que  $f(b) = 0$ .

4. Tout d'abord,

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b) = e^a (1 + i \tan b) \cos b = e^a \left(1 + i \frac{b}{a}\right) \cos b = \frac{e^a \cos b}{a} (a + ib) = \frac{e^a \cos b}{a} z$$

Puisque  $f(b) = 0$ ,  $e^a = \frac{b}{\sin b}$ . Ainsi

$$\frac{e^a \cos b}{a} = \frac{b}{a \tan b} = 1$$

D'où  $e^z = z$ .

### Solution 2

$f$  est bijective puisque c'est une involution. Puisqu'elle est continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+$ , elle y est strictement monotone. Si  $f$  était strictement décroissante, on aurait  $f(x) \leq f(0)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , ce qui contredirait la surjectivité de  $f$ . Ainsi  $f$  est strictement croissante.

Soit alors  $x \in \mathbb{R}_+$ . Supposons que  $f(x) \neq x$ . On a donc  $f(x) > x$  ou  $f(x) < x$ . Si  $f(x) > x$ , alors  $f \circ f(x) > f(x)$  par stricte croissance de  $f$  et donc  $x > f(x)$ , ce qui est contradictoire. De même, si  $f(x) < x$ ,  $f \circ f(x) < f(x)$  par stricte croissance de  $f$  et donc  $x < f(x)$ , ce qui est à nouveau contradictoire. Ainsi  $f(x) = x$ .

On peut alors conclure que  $f = \text{Id}_{\mathbb{R}_+}$ .

### Solution 3

Comme  $D$  est un hyperplan affine de  $\mathbb{R}^2$ , il existe une forme linéaire  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^2$  et un réel  $\alpha$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}^2, x \in D \iff \varphi(x) = \alpha$ . L'application  $\varphi \circ f$  est continue sur  $I$  et, quitte à échanger  $a$  et  $b$ , on peut supposer  $\varphi \circ f(a) > \alpha$  et  $\varphi \circ f(b) < \alpha$ . En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $c \in I$  tel que  $\varphi \circ f(c) = \alpha$  i.e.  $f(c) \in D$ .

### Solution 4

1. De l'inclusion  $I \subset f(I)$ , on déduit l'existence de  $c$  et  $d$  appartenant à  $[a, b]$  tels que  $f(c) = a$  et  $f(d) = b$ .  $f$  prend donc les valeurs  $a$  et  $b$  sur  $I$ .
2. Notons  $g$  l'application définie par  $g(t) = f(t) - t$  pour  $t \in [a, b]$ . Nous avons  $g(c) = f(c) - c = a - c \leq 0$  et  $g(d) = f(d) - d = b - d \geq 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $t_0 \in [c, d]$  tel que  $g(t_0) = 0$ , c'est-à-dire  $f(t_0) = t_0$ .  $f$  admet donc un point fixe sur  $I$ .

### Solution 5

Soit  $g : x \mapsto f(x) - x$ .

Puisque  $f$  est décroissante,  $f$  admet une limite finie ou une limite égale à  $-\infty$  en  $+\infty$ . Dans les deux cas,  $\lim_{+\infty} g = -\infty$ .

De même,  $f$  admet une limite finie ou une limite égale à  $+\infty$  en  $-\infty$ . Dans les deux cas,  $\lim_{-\infty} g = +\infty$ .

Comme  $g$  est continue,  $g$  s'annule sur  $\mathbb{R}$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

De plus,  $g$  est strictement décroissante donc injective. Elle s'annule donc exactement une fois, ce qui prouve que  $f$  admet un unique point fixe.

## Dérivabilité

### Solution 6

Soit  $M$  une telle application. Tout d'abord,

$$M(0) = M(0 + 0) = M(0)^2$$

Donc  $M(0)$  est une matrice de projecteur.

De plus, pour  $(t, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  :

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \frac{(M(h) - M(0))M(t)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} M'(0)M(t)$$

Donc  $M$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $M'(t) = M'(0)M(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . De même,

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \frac{M(t)(M(h) - M(0))}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} M(t)M'(0)$$

Donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $M'(t) = M(t)M'(0)$ .

Posons  $A = M'(0)$  et considérons alors l'application  $N : t \mapsto M(t) \exp(-tA)$ . Comme le produit matriciel est bilinéaire,  $N$  est également dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, N'(t) = M'(t) \exp(-tA) - M(t)A \exp(-tA) = 0$$

On en déduit que  $N$  est constante égale à  $N(0) = M(0)$ . Par conséquent,  $M(t) = M(0) \exp(tA)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Ce qui précède montre également que  $M(t)$  et  $A$  commutent pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Notamment  $M(0)$  et  $A$  commutent.

Réciproquement, soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de projecteur commutant avec  $A$ . Par conséquent,  $M_0$  et  $\exp(tA)$  commutent pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Posons  $M : t \mapsto M_0 \exp(tA)$ .

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, M(s)M(t) = M_0 \exp(sA)M_0 \exp(tA) = M_0^2 \exp(sA) \exp(tA) = M_0 \exp((s+t)A) = M(s+t)$$

Finalement, les applications recherchées sont les applications  $t \mapsto M_0 \exp(tA)$  avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de projecteur commutant avec  $A$ .

### Solution 7

Supposons que  $A^\top$  possède nécessairement une valeur propre  $\lambda$  strictement positive. Notons  $u$  un vecteur propre associé. Posons  $\varphi(t) = u^\top x(t)$ . Comme  $\ell : y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto u^\top y$  est une forme linéaire,  $\varphi$  est également de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = u^\top x'(t) = u^\top Ax(t) = (A^\top u)^\top x(t) = \lambda u^\top x(t) = \lambda \varphi(t)$$

Ainsi  $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Mais comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$ . On ne peut avoir  $\varphi(0) \neq 0$  sinon  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \pm\infty$  puisque  $\lambda > 0$ . Ainsi  $\varphi(0) = 0$  puis  $\varphi(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , ou encore  $\ell(x(t)) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Si  $A^\top$  ne possède aucune valeur propre strictement positive, on peut néanmoins affirmer que  $A^\top$  possède une valeur propre complexe  $\lambda$  non réelle de partie réelle strictement positive car  $\text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A) > 0$ . On note à nouveau  $u$  un vecteur propre associé.



**ATTENTION!**  $u$  est un vecteur à coefficients *complexes* donc on va devoir raisonner un peu différemment que dans le cas précédent.

Comme précédemment,  $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . A nouveau,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$  car  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ . Si  $\varphi(0) \neq 0$ ,  $|\varphi(t)| = |\varphi(0)|e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$  donc  $\varphi(0) = 0$  puis  $\varphi(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On ne peut plus poser  $\lambda : y \mapsto u^\top y$  car  $\lambda$  serait alors à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et ne serait pas une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Néanmoins, il existe  $(v, w) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$  tel que  $u = v + iw$ . Comme  $u^\top x(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et que  $x$  est à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $v^\top x(t) = w^\top x(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On peut donc poser au choix  $\lambda : y \mapsto v^\top y$  ou  $\lambda : y \mapsto w^\top y$ .

### Solution 8

1. En développant par rapport à la dernière ligne,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(x) = (f(b)g(x) - g(b)f(x)) - (f(a)g(x) - g(a)f(x)) + (f(a)g(b) - g(a)f(b))$$

Comme  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$ ,  $\Delta$  l'est également. De plus,

$$\forall x \in ]a, b[, \Delta'(x) = (f(b)g'(x) - g(b)f'(x)) - (f(a)g'(x) - g(a)f'(x)) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$$

2. Par caractère alterné du déterminant,  $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$ . On peut alors appliquer le théorème de Rolle : il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\Delta'(c) = 0$  i.e.  $(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$ .

### Solution 9

Remarquons déjà que  $f(0) = f(2 \times 0) = 2f(0)$  et donc  $f(0) = 0_E$ .

On montre alors aisément par récurrence que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f(x)}{2^n}$ . Par conséquent, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n - 0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(0)$$

Ainsi  $f(x) = xf'(0)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  (déjà montré pour  $x = 0$ ) :  $f$  est bien linéaire.

### Solution 10

1. Comme  $A$  commute avec  $B$ , on montre sans peine que  $A$  commute avec  $B^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  puis que  $A$  commute avec  $P(B)$  pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  i.e.  $A$  commute avec tout élément de  $\mathbb{K}[B]$ . On propose alors deux méthodes pour conclure.

**Première méthode.** Posons  $S_p = \sum_{k=0}^p \frac{B^k}{k!} \in \mathbb{K}[B]$ . Alors  $AS_p = S_pA$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Comme les applications  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AX$  et  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XA$  sont des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, elles sont continues. Puisque  $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p = \exp(B)$ , on obtient en passant à la limite  $A \exp(B) = \exp(B)A$ .

**Deuxième méthode.**  $\mathbb{K}[B]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui est de dimension finie. Ainsi  $\mathbb{K}[B]$  est fermé. Notamment,  $\exp(B) = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p \in \mathbb{K}[B]$ . On en déduit que  $A$  commute avec  $\exp(B)$ .

2. Les applications  $t \mapsto \exp(t(A+B))$ ,  $t \mapsto \exp(-tB)$  et  $t \mapsto \exp(-tA)$  sont dérivables de dérivées respectives  $t \mapsto (A+B)\exp(t(A+B))$ ,  $t \mapsto -B\exp(-tB)$  et  $t \mapsto -A\exp(-tA)$ . Comme l'application  $(M, N, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3 \mapsto MNP$  est trilineaire,  $\varphi$  est dérivable et

$$\forall t \in [0, 1], \varphi'(t) = (A+B)\exp(t(A+B))\exp(-tA)\exp(-tB) - \exp(t(A+B))B\exp(-tB)\exp(-tA) - \exp(t(A+B))\exp(-tB)A\exp(-tA)$$

Il est clair que  $B$  commute avec  $t(A+B)$  et que  $A$  commute avec  $-tB$  et  $t(A+B)$  donc la question précédente montre que

$$\forall t \in [0, 1], \varphi'(t) = (A+B)\exp(t(A+B))\exp(-tA)\exp(-tB) - A\exp(t(A+B))\exp(-tA)\exp(-tB) - B\exp(t(A+B))\exp(-tA)\exp(-tB) = 0$$

3.  $\varphi$  est donc constante sur l'intervalle  $[0, 1]$ . En particulier,

$$\exp(A+B)\exp(-B)\exp(-A) = \varphi(1) = \varphi(0) = I_n$$

En prenant  $B = 0$  qui commute bien avec  $A$ , on obtient  $\exp(A)\exp(-A) = I_n$  et donc également  $\exp(-A)\exp(A) = I_n$ . De la même manière,  $\exp(-B)\exp(B) = I_n$ . En multipliant à droite par l'égalité  $\exp(A+B)\exp(-B)\exp(-A) = \varphi(1) = I_n$  par  $\exp(A)\exp(B)$ , on obtient alors le résultat voulu.

**Solution 11**

Notons  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{R}^2$  et posons  $\varphi(t) = \det_{\mathcal{B}}(f(t), f(b) - f(a))$ . Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$  (resp. dérivable sur  $]a, b[$ ) et  $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \det(x, f(b) - f(a))$  est linéaire,  $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$  (resp. dérivable sur  $]a, b[$ ). De plus,

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \det_{\mathcal{B}}(f(b), f(b) - f(a)) - \det_{\mathcal{B}}(f(a), f(b) - f(a)) = \det_{\mathcal{B}}(f(b) - f(a), f(b) - f(a)) = 0$$

D'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ . Or

$$\forall t \in ]a, b[, \varphi'(t) = \det_{\mathcal{B}}(f'(t), f(b) - f(a))$$

donc

$$\varphi'(c) = \det_{\mathcal{B}}(f'(c), f(b) - f(a)) = 0$$

donc  $f'(c)$  est colinéaire à  $f(b) - f(a)$ .

**Solution 12**

1. Soit  $u : t \in I \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ . Comme le produit vectoriel est bilinéaire et que  $f$  et  $f'$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et

$$\forall t \in I, u'(t) = f'(t) \wedge f'(t) + f(t) \wedge f''(t) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

car  $f'(t)$  est colinéaire avec lui-même de même et  $f''(t)$  est colinéaire avec  $f(t)$ . On en déduit que  $u$  est constante sur  $I$ . Comme  $(f(t_0), f'(t_0))$  est libre,  $u(t_0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ . Pour tout  $t \in I$ ,  $f(t)$  est orthogonal à  $u(t) = u(t_0)$ . Ainsi  $f$  est à valeurs dans le plan vectoriel admettant  $u(t_0)$  comme vecteur normal.

2. Notons  $\mathcal{B}$  une base orthonormale du plan précédent. Alors l'aire  $A(t)$  du triangle défini dans l'énoncé et  $A(t) = \frac{1}{2} \det_{\mathcal{B}}(f(t), f'(t))$ . Comme  $\det_{\mathcal{B}}$  est bilinéaire, on montre comme précédemment que  $A$  est de classe  $\mathcal{C}_1$  sur  $I$  et que

$$\forall t \in I, A'(t) = \frac{1}{2} \det_{\mathcal{B}}(f'(t), f'(t)) + \det_{\mathcal{B}}(f(t), f''(t)) = 0$$

pour les mêmes raisons que précédemment. Ainsi  $A$  est constante sur  $I$ .

**Solution 13**

Notons  $C_1(t), \dots, C_n(t)$  les colonnes de  $A(t)$ . En notant  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$\forall t \in I, \varphi(t) = \det_{\mathcal{B}}(C_1(t), \dots, C_n(t))$$

Comme  $A$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , les  $C_i$  le sont également et, par multilinéarité de  $\det_{\mathcal{B}}$ ,  $\varphi$  l'est aussi. De plus,

$$\forall t \in I, \varphi'(t) = \det_{\mathcal{B}}(C'_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)) + \dots + \det_{\mathcal{B}}(C_1(t), \dots, C_{n-1}(t), C'_n(t))$$

En notant  $B_j(t)$  la matrice  $A(t)$  dans laquelle on a remplacé la  $j^{\text{ème}}$  colonne par  $C'_j(t)$ , on a donc

$$\forall t \in I, \varphi'(t) = \sum_{j=1}^n \det(B_j(t))$$

En développant  $\det(B_j(t))$  par rapport à sa  $j^{\text{ème}}$  colonne,

$$\forall t \in I, \det(B_j(t)) = \sum_{i=1}^n (A'(t))_{i,j} \text{com}(A(t))_{i,j}$$

Ainsi

$$\forall t \in I, \varphi'(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (A'(t))_{i,j} \text{com}(A(t))_{i,j} = \text{tr}(\text{com}(A(t))^T A'(t))$$

**Solution 14**

1. Soit  $HR(n)$  l'hypothèse de récurrence :

«Il existe un polynôme  $P_{n-1}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$ .»

$HR(1)$  est vraie : il suffit de prendre  $P_0 = 1$ .

Supposons  $HR(n)$  pour un certain  $n \geq 1$ . Alors pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P'_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n} - \frac{2nxP_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(1+x^2)P'_{n-1}(x) - 2nxP_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Il suffit donc de prendre  $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$ .

Par récurrence,  $HR(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Si  $P_{n-1}$  et  $Q_{n-1}$  sont deux polynômes vérifiant la condition de l'énoncé, alors ils coïncident sur  $\mathbb{R}$ . Ils sont donc égaux. D'où l'unicité.

2. Commençons par la parité. Soit  $HR(n)$  l'hypothèse de récurrence :

« $P_n$  a la parité de  $n$ .»

$HR(0)$  est vraie puisque  $P_0 = 0$  est pair. Supposons  $HR(n-1)$  pour un certain  $n \geq 1$ .

- Si  $n$  est pair,  $n-1$  est impair donc  $P_{n-1}$  est impair d'après  $HR(n-1)$ . Mais alors  $P'_{n-1}$  et  $XP_{n-1}$  sont pairs. Or  $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$  donc  $P_n$  est pair.
- Si  $n$  est impair,  $n-1$  est pair donc  $P_{n-1}$  est pair d'après  $HR(n-1)$ . Mais alors  $P'_{n-1}$  et  $XP_{n-1}$  sont impairs. Or  $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$  donc  $P_n$  est impair.

Donc  $HR(n)$  est vraie. Par récurrence,  $HR(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Occupons-nous maintenant du degré et du coefficient dominant. Soit  $HR(n)$  l'hypothèse de récurrence :

« $\deg P_n = n$  et le coefficient dominant de  $P_n$  est  $(n+1)!$  si  $n$  est pair,  $-(n+1)!$  si  $n$  est impair.»

$HR(0)$  est vraie puisque  $P_0 = 1$ . Supposons  $HR(n-1)$  pour un certain  $n \geq 1$ . On a donc  $\deg P_{n-1} = n-1$ .

- Si  $n$  est pair,  $n-1$  est impair et le coefficient dominant de  $P_{n-1}$  est  $-n!$ . On a  $\deg P'_{n-1} = n-2$  (éventuellement  $-\infty$  si  $n=1$ ) et le coefficient dominant de  $P'_{n-1}$  est  $-(n-1)n!$  (pas de coefficient dominant si  $n=1$ ). Donc  $\deg(1+X^2)P'_{n-1} = n$  (éventuellement  $-\infty$  si  $n=1$ ) et le coefficient dominant de  $(1+X^2)P'_{n-1}$  est  $-(n-1)n!$  (pas de coefficient dominant si  $n=1$ ). De même,  $\deg 2nXP_{n-1} = n$  et le coefficient dominant de  $2nXP_{n-1}$  est  $-2nn!$ . Puisque  $-(n-1)n! + 2nn! = (n+1)! \neq 0$ , on en déduit que  $\deg P_n = n$  et que le coefficient dominant de  $P_n$  est  $(n+1)!$ .
- Si  $n$  est impair,  $n-1$  est pair et le coefficient dominant de  $P_{n-1}$  est  $n!$ . On a  $\deg P'_{n-1} = n-2$  (éventuellement  $-\infty$  si  $n=1$ ) et le coefficient dominant de  $P'_{n-1}$  est  $(n-1)n!$  (pas de coefficient dominant si  $n=1$ ). Donc  $\deg(1+X^2)P'_{n-1} = n$  (éventuellement  $-\infty$  si  $n=1$ ) et le coefficient dominant de  $(1+X^2)P'_{n-1}$  est  $(n-1)n!$  (pas de coefficient dominant si  $n=1$ ). De même,  $\deg 2nXP_{n-1} = n$  et le coefficient dominant de  $2nXP_{n-1}$  est  $2nn!$ . Puisque  $(n-1)n! - 2nn! = -(n+1)! \neq 0$ , on en déduit que  $\deg P_n = n$  et que le coefficient dominant de  $P_n$  est  $-(n+1)!$ .

Ainsi  $HR(n)$  est vraie. Par conséquent,  $HR(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Comme  $\deg P_{n-1} = n-1 < 2n$  pour  $n \geq 1$ ,  $P_{n-1}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n} \cdot (1+x^2)^n$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

4. Remarquons tout d'abord que les zéros de  $f^{(n)}$  sont les zéros de  $P_{n-1}$ . Soit  $HR(n)$  l'hypothèse de récurrence :

« $f^{(n)}$  s'annule au moins  $n-1$  fois.»

$HR(1)$  est évidemment vraie. Supposons  $HR(n)$  pour un certain  $n \geq 1$ . Si  $n=1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(2)}(x) = 0$ , donc  $f^{(2)}$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$  d'après une généralisation classique du théorème de Rolle. Si  $n > 1$ ,  $f^{(n)}$  possède au moins  $n-1$  zéros que nous noterons  $x_1 < \dots < x_{n-1}$ . En appliquant le théorème de Rolle à  $f^{(n)}$  sur chacun des intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$ , on montre que  $f^{(n+1)}$  s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles  $]x_i, x_{i+1}[$ . En appliquant la même généralisation du théorème de Rolle à  $f^{(n)}$  sur les intervalles  $] -\infty, x_1[$  et  $]x_{n-1}, +\infty[$ , on montre que  $f^{(n+1)}$  s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles  $] -\infty, x_1[$  et  $]x_{n-1}, +\infty[$ . On fait le compte : on a montré que  $f^{(n+1)}$  s'annule au moins  $n$  fois. Ainsi  $HR(n)$  est vraie. Par récurrence  $HR(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ . Comme les zéros de  $f^{(n+1)}$  sont les zéros de  $P_n$ , on a prouvé que  $P_n$  admet au moins  $n$  racines réelles distinctes. Comme  $\deg P_n = n$ ,  $P_n$  admet au plus  $n$  racines comptées avec multiplicité. On en déduit que toutes les racines de  $P_n$  sont réelles et simples.

## Solution 15

1. On note  $HR(n)$  la propriété à démontrer.

$HR(0)$  est vraie en posant  $P_0 = 1$ . Supposons  $HR(n)$  vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors il existe  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2n}}$$

En dérivant, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(t) = \frac{(t^2 P_n'(t) - 2nt P_n(t) + P_n(t))e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(n+1)}}$$

En posant  $P_{n+1} = X^2 P_n' - 2nX P_n + P_n$ , on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(t) = \frac{P_{n+1}(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(n+1)}}$$

Ainsi  $HR(n+1)$  est vraie.

Par récurrence,  $HR(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Notons  $g$  la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}^*$ .  $g$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  par opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par croissances comparées,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g^{(n)}(t) = 0$  et on a évidemment  $\lim_{t \rightarrow 0^-} g^{(n)}(t) = 0$  puisque  $g^{(n)}$  est nulle sur  $\mathbb{R}^*$ . Ainsi

$\lim_{t \rightarrow 0} g^{(n)}(t) = 0$ . Ceci prouve que  $g$  est prolongeable par continuité en 0 en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Mais puisque  $f$  est continue en 0 (étudier les limites en  $0^+$  et  $0^-$ ),  $f = g$  et donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Solution 16

Notons  $a$  et  $b$  les abscisses respectives de A et B. Pour simplifier, nous supposons  $a < b$ . Le fait que B soit sur la tangente à  $\mathcal{C}$  en A se traduit par :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) \text{ ou encore } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$$

De même, on cherche donc un point M d'abscisse  $c$  vérifiant :

$$f(a) = f(c) + f'(c)(a - c)$$

Définissons une fonction  $g$  sur  $I$  par  $\begin{cases} g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{pour } x \in I \setminus \{a\} \\ g(a) = f'(a) \end{cases}$ .  $g$  est continue sur  $]a, b]$  comme quotient de fonctions continues

dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme  $f$  est dérivable en  $a$ ,  $g$  est continue en  $a$ .  $g$  est donc continue sur  $[a, b]$ . De plus,  $g$  est dérivable sur  $]a, b[$  comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Enfin,  $g(b) = g(a) = f'(a)$ . D'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $g'(c) = 0$ . Or pour  $x \in ]a, b[$ ,  $g'(x) = \frac{f'(x)(x - a) - f(x) + f(a)}{(x - a)^2}$ . On a donc

$$f'(c)(c - a) - f(c) + f(a) = 0$$

ce qui est bien l'égalité annoncée plus haut.

## Intégration

### Solution 17

1. Comme  $\|\cdot\|$  est une norme d'algèbre,  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Or  $\|A\| < 1$  donc la série géométrique  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|A\|^k$  converge. Par majoration, la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|A^k\|$  converge également i.e. la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} A^k$  converge absolument. Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension finie, la

série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} A^k$  converge. L'endomorphisme  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX$  est continu puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension finie. Ceci nous permet d'affirmer que

$$A \sum_{k=0}^{+\infty} A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k+1}$$

puis que

$$(I_n - A) \sum_{k=0}^{+\infty} A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k - \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k+1} = I_n$$

donc  $I_n - A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ .

2. Remarquons déjà que  $z \neq 0$  puisque  $|z| > \|A\| \geq 0$ . Remarquons alors que  $zI_n - A = z\left(I_n - \frac{1}{z}A\right)$  et que  $\left\|\frac{1}{z}A\right\| = \frac{\|A\|}{|z|} < 1$ . D'après la question précédente,  $I_n - \frac{1}{z}A$  est inversible et

$$\left(I_n - \frac{1}{z}A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{z^k}$$

Comme  $zI_n - A = z\left(I_n - \frac{1}{z}A\right)$ ,  $zI_n - A$  est également inversible et

$$(zI_n - A)^{-1} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{z^{k+1}}$$

3. D'après la question précédente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^{k+1} (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^{k+1} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{r^{p+1} e^{i(p+1)\theta}} d\theta = r^k \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{r^p} e^{i(k-p)\theta} d\theta$$

Posons  $u_p : \theta \mapsto \frac{A^p}{r^p} e^{i(k-p)\theta}$ . Alors  $\|u_p\|_{\infty} = \frac{\|A^p\|}{r^p} \leq \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^p$  donc la série  $\sum_{p \in \mathbb{N}} u_p$  converge normalement et donc uniformément sur le segment  $[-\pi, \pi]$ . Par interversion série/intégrale,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{r^p} e^{i(k-p)\theta} d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A^p}{r^p} e^{i(k-p)\theta} d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{r^p} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-p)\theta} d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{r^p} \cdot 2\pi \delta_{k,p} = 2\pi \frac{A^k}{r^k}$$

On en déduit le résultat voulu.

4. Posons  $\chi_A = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$ . Alors

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^{k+1} (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta} \sum_{k=0}^n \alpha_k re^{ik\theta} (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta} \chi_A(re^{i\theta}) (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta} \det(re^{i\theta} I_n - A) (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta} \text{com}(re^{i\theta} I_n - A)^{\top} d\theta \end{aligned}$$

d'après la formule de la comatrice.

5. Remarquons que chaque coefficient de  $\text{com}(re^{i\theta} - A)^\top$  est un polynôme en  $re^{i\theta}$ . Ainsi les coefficients de  $re^{i\theta} \text{com}(re^{i\theta} - A)^\top$  sont des polynômes en  $re^{i\theta}$  de coefficients constants nuls. Leur intégrale sur  $[-\pi, \pi]$  est donc nulle. On en déduit que  $\chi_A(A) = 0$ .

### Solution 18

1. Pour simplifier, posons  $M = \max_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|$ . Par inégalité triangulaire,

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt$$

De plus,

$$\forall t \in [a, b], f(t) = f(a) + \int_a^t f'(u) \, du = \int_a^t f'(u) \, du$$

A nouveau par inégalité triangulaire,

$$\forall t \in [a, b], \|f(t)\| \leq \int_a^t \|f'(u)\| \, du \leq M(t - a)$$

En reprenant ce qui précède

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b M(t - a) \, dt = \frac{M(b - a)^2}{2}$$

2. D'après la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) \, dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) \, dt$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq \left\| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) \, dt \right\| + \left\| \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) \, dt \right\| \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \|f(t)\| \, dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \|f(t)\| \, dt$$

D'une part

$$\forall t \in \left[ a, \frac{a+b}{2} \right], f(t) = f(a) + \int_a^t f'(u) \, du = \int_a^t f'(u) \, du$$

donc

$$\forall t \in \left[ a, \frac{a+b}{2} \right], \|f(t)\| \leq \int_a^t \|f'(u)\| \, du \leq M(t - a)$$

puis

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \|f(t)\| \, dt \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(t - a) \, dt = \frac{M(b - a)^2}{8}$$

D'autre part

$$\forall t \in \left[ \frac{a+b}{2}, b \right], f(t) = f(b) - \int_t^b f'(u) \, du = - \int_t^b f'(u) \, du$$

donc

$$\forall t \in \left[ \frac{a+b}{2}, b \right], \|f(t)\| \leq \int_t^b \|f'(u)\| \, du \leq M(b - t)$$

puis

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b \|f(t)\| \, dt \leq \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b - t) \, dt = \frac{M(b - a)^2}{8}$$

On en déduit finalement que

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq 2 \cdot \frac{M(b - a)^2}{8} = \frac{M(b - a)^2}{4}$$



## Sommes de Riemann

### Solution 19

On peut écrire  $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k(n-k)} = n^2 \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}$ . On reconnaît une somme de Riemann.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \, dx$$

On met le trinôme sous la racine sous forme canonique :

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - (2x-1)^2} \, dx$$

Effectuons le changement de variables  $u = 2x - 1$  :

$$I = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} \, du$$

Or  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} \, du$  est l'aire du demi-disque unité et vaut donc  $\frac{\pi}{2}$ . On en déduit que  $I = \frac{\pi}{8}$  puis que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{8} n^2$ .

### Solution 20

Les racines de  $X^{2n} - 1$  sont les complexes  $z_k = e^{i \frac{k\pi}{n}}$  pour  $k \in \llbracket -n+1, n \rrbracket$ . Mais pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $z_{-k} = \overline{z_k}$  donc

$$X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} (X-z_k)(X-\overline{z_k}) = (X^2-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

Notons  $I$  l'intégrale à calculer. On a

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r \cos \theta + 1) \, d\theta$$

Par parité de cos, on peut affirmer que

$$I = \int_0^{\pi} \ln(r^2 - 2r \cos \theta + 1) \, d\theta$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons :

$$S_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left( r^2 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$$

Comme  $\theta \mapsto \ln(r^2 - 2r \cos \theta + 1)$  est continue sur  $[0, \pi]$ , la suite  $(S_n)$  converge vers  $I$  d'après le théorème sur les sommes de Riemann. Mais d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\pi}{n} \ln \left( \prod_{k=0}^{n-1} r^2 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{n} \ln \left( (r-1)^2 \prod_{k=1}^{n-1} r^2 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{n} \ln \left( (r-1)^2 \frac{r^{2n}-1}{r^2-1} \right) \\ &= \frac{\pi}{n} \ln \left( \frac{r-1}{r+1} r^{2n} - 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{n} \ln(r^{2n}-1) + \frac{\pi}{n} \ln \frac{r-1}{r+1} \end{aligned}$$

Tout d'abord,  $\frac{\pi}{n} \ln \frac{r-1}{r+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Puis

$$\frac{\pi}{n} \ln(r^{2n}-1) = 2\pi \ln r + \frac{\pi}{n} \ln \left( 1 - \frac{1}{r^{2n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\pi \ln r$$

On en déduit que  $I = 2\pi \ln r$ .

**Solution 21**

1. On reconnaît une somme de Riemann. Puisque  $x \mapsto \ln(1+x)$  est continue sur  $[0, 1]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \ln(1+x) \, dx = [(1+x) \ln(1+x) - (1+x)]_0^1 = 2 \ln 2 - 1 = \ln(4) - 1$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln(4) + \ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \ln(k) \\ &= \ln(4) + \ln(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) \\ &= \ln(4) + \ln(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) \\ &= \ln(4) + \ln(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n) \\ &= \ln(4) - S_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite  $(\ln(u_n))$  converge vers 1. On en déduit que la suite  $(u_n)$  converge vers  $e$ .

**Solution 22**

On pense évidemment à une somme de Riemann. On aurait eu directement le résultat si le terme général de la somme avait été  $f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)$  ou  $f\left(\frac{k+1}{n}\right)g\left(\frac{k+1}{n}\right)$ . L'idée est donc de se ramener à une telle somme. Le fait que  $g$  est supposée être de classe  $\mathcal{C}^1$  et non  $\mathcal{C}^0$  donne un indice.

Posons pour commencer

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) \\ T_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) \\ |S_n - T_n| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| \right| \end{aligned}$$

Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  sur le segment  $[0, 1]$  elle y est bornée. Notons alors  $M$  un majorant de  $|f|$ .

Comme  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[0, 1]$ , sa dérivée  $g'$  y est continue.  $g'$  est donc bornée sur le segment  $[0, 1]$ . En notant  $K$  un majorant de  $|g'|$ , l'inégalité des accroissements finis montre que  $g$  est  $K$ -lipschitzienne sur  $[0, 1]$ .

En reprenant l'inégalité précédente, on obtient donc

$$|S_n - T_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{MK}{n} = \frac{MK}{n}$$

ou encore

$$T_n - \frac{MK}{n} \leq S_n \leq T_n + \frac{MK}{n}$$

Or on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_0^1 f(t)g(t) \, dt$  d'après le théorème sur les sommes de Riemann appliqué à la fonction continue  $fg$  et que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{MK}{n} = 0$  donc le théorème des gendarmes montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(t)g(t) \, dt$$

## Formules de Taylor

### Solution 23

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$  donc on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour  $f$  sur  $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$  au premier ordre :

$$\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0) \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

où  $M$  est un majorant de  $|f''|$  sur  $[0, 1]$ . Par inégalité triangulaire, on a :

$$\left| S_n - f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{M}{2} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^4}$$

Or on sait que  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  et  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . Ainsi

$$\left| S_n - f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} \right| \leq \frac{M}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{f'(0)}{2}$ .

### Solution 24

1. Comme  $f$  est nulle sur  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ ,  $f^{(n)}(x) = 0$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x > \frac{1}{2}$ . Comme  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$ , les  $f^{(n)}$  sont continues et donc  $f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre  $\frac{1}{2}$  et 0 :

$$\left| f(0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k k!} f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2^n n!} \sup_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} |f^{(n)}|$$

On a vu précédemment que  $f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ . Par ailleurs,  $\sup_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} |f^{(n)}| \leq \sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}|$  (on a même égalité). Enfin,  $f(0) = 1$  par hypothèse donc on obtient le résultat voulu.

2. Soit  $n \geq 1$ . Supposons  $\sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| = 2^n n!$  et posons

$$g(x) = f(x) - (1 - 2x)^n, \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

On a donc  $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - (-1)^n 2^n n!$ . Montrons par récurrence finie décroissante sur  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  que  $g^{(k)}$  est de signe constant sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ . D'après notre hypothèse, c'est clair pour  $k = n$ . Supposons  $g^{(k)}$  de signe constant pour un certain  $k$  tel que  $1 < k \leq n$ . Alors  $g^{(k-1)}$  est monotone. Or

$$g^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x) - \frac{n!}{(n-k+1)!} (1-2x)^{n-k+1}$$

donc  $g^{(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  (puisque  $n - k + 1 > 0$ ). Ainsi  $g^{(k-1)}$  est de signe constant sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ . Donc, par récurrence,  $g'$  est de signe constant sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  et  $g$  est monotone sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ . Comme  $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ,  $g$  est nulle sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ . Or  $g^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = -(-1)^n 2^n n! \neq 0$ . Il y a donc contradiction.

### Solution 25

Soit  $x \in \left]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}\right[$ . L'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et  $x$  au rang  $n$  donne :

$$|f(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{[0; x]} |f^{(n)}| \leq |\lambda x|^n < 1.$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient  $f(x) = 0$ .

Montrons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$  que  $f$  est nulle sur  $\left]-\frac{k}{\lambda}; \frac{k}{\lambda}\right[$ . On a vu que c'était vrai pour  $k = 1$ . Supposons-le vrai pour un  $k \in \mathbb{N}^*$ . Considérons les fonctions :

$$g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f\left(x - \frac{k}{\lambda}\right) \quad x \mapsto f\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)$$

Comme  $f$  est nulle sur  $\left]-\frac{k}{\lambda}; \frac{k}{\lambda}\right[$  par hypothèse de récurrence et que les  $f^{(n)}$  sont continues, on a donc :

$$f^{(n)}\left(-\frac{k}{\lambda}\right) = f^{(n)}\left(\frac{k}{\lambda}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire

$$g_1^{(n)}(0) = g_2^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus  $\sup_{\mathbb{R}} |g_1^{(n)}| = \sup_{\mathbb{R}} |g_2^{(n)}| = \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}|$ . Donc  $g_1$  et  $g_2$  vérifient les mêmes hypothèses que  $f$  : elles sont donc nulles sur  $\left]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}\right[$ . Par conséquent,  $f$  est nulle sur  $\left]-\frac{k+1}{\lambda}; \frac{k+1}{\lambda}\right[$ .

Par récurrence,  $f$  est donc nulle sur tout intervalle  $\left]-\frac{k}{\lambda}; \frac{k}{\lambda}\right[$  où  $k \in \mathbb{N}^*$  : elle est donc nulle sur  $\mathbb{R}$ .

### Solution 26

On a clairement  $\varphi(b) = 0$ . On choisit donc  $A$  tel que  $\varphi(a) = 0$ . Il suffit ainsi de choisir  $A$  tel que :

$$A \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k - f(b) \quad (*)$$

Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a, b]$  et  $n+1$  fois dérivable sur  $]a, b[$ ,  $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . D'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ . Or, pour  $x \in ]a, b[$  :

$$\varphi'(x) = - \sum_{k=0}^n f^{(k+1)}(x) k! (b-x)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - A \frac{(b-x)^n}{n!}$$

Par télescopage, on obtient :

$$\varphi'(x) = - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n - A \frac{(b-x)^n}{n!}$$

Comme  $\varphi'(c) = 0$ , on obtient :

$$A + f^{(n+1)}(c) = 0$$

Il suffit alors d'utiliser la relation (\*) pour obtenir l'égalité voulue.

### Solution 27

1. Soit l'hypothèse de récurrence : « $\forall x \in ]-1, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ ».

**Initialisation** : Pour tout  $x \in ]-1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^0 0!}{(1+x)^0}$ . Donc HR(1) est vraie.

**Hérédité** : On suppose HR( $n$ ) vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a donc pour tout  $x \in ]-1, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ . En dérivant, on obtient

$$\forall x \in ]-1, +\infty[, f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

**Conclusion** : HR( $n$ ) est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2. Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 à un ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  quelconque. Pour  $t \in [0, 1]$ ,  $|f^{(n+1)}(t)| \leq n!$  donc

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k \right| \leq n! \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

On en déduit que

$$|\ln 2 - u_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

3. Il est immédiat que  $(u_n)$  converge vers  $\ln(2)$ .

**REMARQUE.** On peut alors noter  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ .

## Solution 28

1. Si  $M_0 = 0$ , alors  $f$  est constamment nulle donc  $M_0 = M_1 = M_2 = 0$  et l'inégalité est vérifiée.  
Si  $M_2 = 0$ , alors  $f$  est affine. Mais comme  $f$  est bornée,  $f$  est constante. On a donc  $M_1 = 0$  et l'inégalité est encore vérifiée.
2. Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre  $x$  et  $x+h$ , ce qui donne le résultat voulu.
3. Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |f'(x)h| &\leq |f'(x)h + f(x) - f(x+h)| + |f(x+h) - f(x)| \\ &\leq \frac{M_2 h^2}{2} + |f(x+h)| + |f(x)| \\ &\leq \frac{M_2 h^2}{2} + 2M_0 \end{aligned}$$

Puisque  $h > 0$ ,

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2M_0}{h}$$

4.  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $g'(t) = b - \frac{a}{t^2}$ . On a donc  $g'(t) \leq 0$  pour  $0 < t \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$  et  $g'(t) \geq 0$  pour  $t \geq \sqrt{\frac{a}{b}}$ . On en déduit que  $g$  admet un minimum en  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  et que celui-ci vaut  $g\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = 2\sqrt{ab}$ .

5. L'inégalité

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2M_0}{h}$$

étant valable pour tout  $h > 0$ , elle est notamment valable pour  $h$  minimisant le membre de droite. Il suffit alors d'appliquer la question précédente avec  $a = 2M_0$  et  $b = \frac{M_2}{2}$ . On en déduit que

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{2M_0 \times \frac{M_2}{2}} = 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a par passage à la borne supérieure :

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$$

## Solution 29

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La formule de Taylor avec reste intégral assure que  $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ . En effectuant le changement de variable  $t = xu$ , on obtient

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$$

Comme  $f^{(n+1)}$  est positive,

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$$

De même,

$$R_n(r) = \frac{r^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru) du$$

Mais  $f^{(n+1)}$  est croissante sur  $I$  puisque  $f^{(n+2)}$  est positive sur  $I$ . Ainsi puisque  $x < r$ ,  $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(ru)$  pour tout  $u \in [0, 1]$  puis

$$\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du \leq \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru) du$$

On en déduit l'inégalité demandée.

2. Soit  $x \in I$ . Il existe  $r \in ]0, R[$  tel que  $|x| < r$ . D'après la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} R_n(r)$$

D'une part, l'expression intégrale de  $R_n(r)$  montre que  $R_n(r) \geq 0$ . D'autre part,  $f(r) = S_n(r) + R_n(r)$  et  $S_n(r) \geq 0$  en tant que somme de termes positifs. Ainsi  $R_n(r) \leq f(r)$ . La suite  $(R_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc bornée. Puisque  $|x| < r$ ,  $\frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} R_n(r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On en déduit que  $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  i.e.  $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x)$ .

### Solution 30

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$  donc on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour  $f$  sur  $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$  au premier ordre :

$$\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0) \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

où  $M$  est un majorant de  $|f''|$  sur  $[0, 1]$ . Par inégalité triangulaire, on a :

$$\left| S_n - f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{M}{2} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^4}$$

Or on sait que  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  et  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . Ainsi

$$\left| S_n - f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} \right| \leq \frac{M}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{f'(0)}{2}$ .

### Solution 31

1. Il est clair que  $\lim_0 g = 0$ .  $g$  est donc prolongeable par continuité en 0.

2.  $g$  est dérivable sur  $]0, 1]$  et pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,

$$g'(x) = 1 + \ln(x)$$

Ainsi  $g'$  est strictement négative sur  $]0, e^{-1}[$ , s'annule en  $e^{-1}$  et est strictement positive sur  $]e^{-1}, 1]$ .  
 $g$  est donc strictement décroissante sur  $[0, e^{-1}]$  et strictement croissante sur  $[e^{-1}, 1]$ .

3. Tout d'abord,  $-g(x) - x = -x(\ln x + 1) \geq 0$  pour tout  $x \in ]0, e^{-1}]$ . En particulier,  $-g(t_0) \geq t_0$ . On a évidemment  $t_0 \leq t_n \leq e^{-1}$  pour  $n = 0$ . Supposons que ce soit vrai pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Par croissance de  $-g$  sur  $[0, e^{-1}]$ ,  $-g(t_0) \leq -g(t_n) \leq -g(e^{-1})$  donc a fortiori  $t_0 \leq t_{n+1} \leq e^{-1}$ . On a donc bien montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_0 \leq t_n \leq e^{-1}$$

4. Fixons  $x \in [t_0, e^{-1}]$ . Comme  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  (et même  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur  $[x, e^{-1}]$ , on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.

$$|g(x) - g(e^{-1}) - g'(e^{-1})(x - e^{-1})| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2 \max_{[x, e^{-1}]} |g''|}{2}$$

Or  $g'(e^{-1}) = 1 + \ln(e^{-1}) = 0$  et

$$\max_{[x, e^{-1}]} |g''| = \max_{t \in [x, e^{-1}]} \frac{1}{t} = \frac{1}{x \leq \frac{1}{t_0}}$$

On en déduit que

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

5. D'après la question précédente,

$$|t_1 - e^{-1}| = |g(t_0) - g(e^{-1})| \leq \frac{|t_0 - e^{-1}|^2}{2t_0} = \frac{(e^{-1} - t_0)^2}{2t_0}$$

Donc l'inégalité à établir est vraie lorsque  $n = 1$ .

Supposons qu'elle le soit pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$|t_{n+1} - e^{-1}| = |g(t_n) - g(e^{-1})| \leq \frac{|t_n - e^{-1}|^2}{2t_0} \leq \frac{1}{2t_0} \left( 2t_0 \left( \frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} \right)^{2^n} \right)^2 = 2t_0 \left( \frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} \right)^{2^{n+1}}$$

Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

6. Remarquons que

$$\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} = \frac{e^{-1}}{2t_0} - \frac{1}{2}$$

Puisque  $t_0 \in \left] \frac{e^{-1}}{3}, e^{-1} \right[$ ,

$$\frac{1}{2} < \frac{e^{-1}}{2t_0} < \frac{3}{2}$$

Ainsi

$$0 < \frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} < 1$$

Posons  $q = \frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}$ . La suite géométrique  $(q^n)$  converge donc vers 0. Sa suite extraite  $(q^{2^n})$  converge également vers 0. Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 q^n$$

la suite  $(t_n)$  converge vers  $e^{-1}$ .