Semaine du 05/02

1 Cours

Révisions de probabilités MPSI

Expérience aléatoire Univers, issue, événement, événement élémentaire, événement contraire, événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.

Espaces probabilisés finis Probabilité. Définition et propriétés (réunion, différence, croissance, événement contraire). Distribution de probabilités sur un ensemble. Probabilité uniforme.

Probabilités conditionelles Définition. Si A est un événement de probabilité non nulle, $\mathbb{P}_A$ est une probabilité. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes.

Evénements indépendants Couple d'événements indépendants. Famille d'événements mutuellement indépendants.

Variable aléatoire Définition. Loi d'une variable aléatoire. Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale. Loi conditionnelle.

Couples et n-uplets de variables aléatoires Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle. Extension aux n-uplets de variables aléatoires. Couples de variables aléatoires indépendantes. Variables aléatoires mutuellement indépendantes. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi binomiale de paramètres n et p. Les images de deux variables aléatoires indépendantes sont indépendantes. Lemmes des coalitions.

Espérance, covariance, variance Définition et propriétés de l'espérance. Espérance des lois usuelles. Formule de transfert. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Définition et propriétés de la covariance. Variables aléatoires décorélées. Deux variables aléatoires indépendantes sont décorélées. Variance et écart-type : définition et propriétés. Variance des lois usuelles. Variance d'une somme de variables aléatoires décorélées.

Inégalités Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Probabilités (MP)

Ensembles dénombrables Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble st fini ou dénombrable si et seulement s'il est en biejction avec une partie de $\mathbb{N}$. Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Univers probabilisé Tribu. Stabilité par passage au complémentaire, intersection et union finie ou dénombrable. Espace probabilisable. Probabilité sur un espace probabilisable. Continuité croissante/décroissante. Si (A_n) est une suite d'événements, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Evénements négligeables/presque sûrs. Une union finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable. Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre. Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ indexée par Ω et de somme 1. Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable. Probabilité définie sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.

Probabilité conditionnelle et indépendance Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes. Evénéments indépendants. Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ sont indépendants.

2 Méthodes à maîtriser

- Modéliser une expérience aléatoire **concrète** (lancers de dés, tirages de boules, …) à l'aide d'événements et de variables aléatoires : il s'agit essentiellement de **nommer** les événements et les variables aléatoires pertinents.
- **Partitionner** un événement pour en calculer la probabilité.
- Calculer les lois marginales à partir de la loi conjointe : $\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.
- Utiliser la formule de transfert pour calculer l'**espérance** de l'**image** $Y = f(X)$ d'une variable aléatoire X de loi connue. Il est alors inutile de déterminer la loi de Y.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire à l'aide de la formule de transfert : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ et $\mathbb{E}(X^2)$ se calcule avec la formule de transfert.

- Appliquer la formule des probabilités totales à un système complet d'événements, typiquement $\{X = x\}_{x \in X(\Omega)}$ où X est une variable aléatoire. Application aux chaînes de Markov.

- Connaître les lois usuelles ainsi que leurs espérances et leurs variances.

- **Renverser** le conditionnement à l'aide de la formule de Bayes.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 95, 98, 99, 101, 104, 105, 107, 109