

# DEVOIR À LA MAISON N°19

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – CCINP Maths I MP

On note  $\zeta$  la fonction zêta de Riemann définie sur  $]1, +\infty[$  par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Le problème est constitué de trois parties indépendantes dans une large mesure.

### I Algorithmique : calcul de zêta aux entiers pairs

La suite des nombres de Bernoulli notée  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par :

$$b_0 = 1, \quad \forall n \geq 1, \quad b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$$

**Leonhard Euler** (1707-1783) a démontré la formule suivante qui exprime les nombres  $\zeta(2k)$  à l'aide des nombres de Bernoulli :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} b_{2k}}{(2k)!}$$

Dans cette partie (informatique pour tous), on se propose de programmer le calcul des nombres de Bernoulli  $b_n$  afin d'obtenir des valeurs exactes de  $\zeta(2k)$ .

Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python. On sera très attentif à la rédaction du code notamment à l'indentation.

**1** Ecrire une fonction `factorielle(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier  $n \in \mathbb{N}$ .

**2** On considère la fonction Python suivante `binom(n, p)` qui renvoie le coefficient binomial  $\binom{n}{p}$  :

Combien de multiplications sont effectuées lorsque l'on exécute `binom(30, 10)` ?

Expliquer pourquoi il est possible de réduire ce nombre de multiplications à 20 ? Quel serait le type du résultat renvoyé si l'on remplaçait la dernière ligne de la fonction `binom` par

`return factorielle(n) / (factorielle(p) * factorielle(n - p))` ?

**3** Démontrer que, pour  $n \geq p \geq 1$ , on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{p-1}{n-1}$$

En déduire une fonction récursive `binom_rec(n, p)` qui renvoie le coefficient binomial  $\binom{n}{p}$ .

- 4** Ecrire une fonction non récursive `bernoulli(n)` qui renvoie une valeur approchée du nombre rationnel  $b_n$ . On pourra utiliser librement une fonction `binomial(n, p)` qui renvoie le coefficient binomial  $\binom{n}{p}$ .

Par exemple, `bernoulli(10)` renvoie 0,075 757 575 757 575 76 qui est une valeur approchée de  $b_{10} = \frac{5}{66}$ .

## II Généralités sur la fonction zêta

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_n$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

- 5** Pour tout  $a > 1$  réel, démontrer que la série  $\sum \frac{\ln n}{n^a}$  converge.
- 6** Démontrer que la fonction  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]1, +\infty[$  puis qu'elle est décroissante.
- 7** La série de fonctions  $\sum f_n$  converge-t-elle uniformément sur  $]1, +\infty[$  ?
- 8** Déterminer la limite de  $\zeta$  en  $+\infty$ .
- 9** Soit  $x > 1$ . On pose :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

Démontrer que :

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1$$

En déduire un équivalent de  $\zeta$  au voisinage de 1.

- 10** Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $d_n$  le nombre de diviseurs de l'entier  $n$ . On pose  $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  et on prend  $x > 1$ . Justifier que la famille  $\left( \frac{1}{(ab)^x} \right)_{(a,b) \in A}$  est sommable et que sa somme vaut  $\zeta(x)^2$ . En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}$$

On pourra considérer la réunion  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$  où  $A_n = \{(a, b) \in A, ab = n\}$ .

## III Produit eulérien

Soit  $s > 1$  un réel fixé. On définit une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}.$$

On rappelle qu'un entier  $a$  divise un entier  $b$  s'il existe un entier  $c$  tel que  $b = ac$ . On note alors  $a \mid b$ .

- 11** Soit  $a \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que  $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^s}$ .
- 12** Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  dans  $\mathbb{N}^*$  des entiers premiers entre eux deux à deux et  $N \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer par récurrence sur  $n$  que :

$$(a_1 \mid N, a_2 \mid N, \dots, a_n \mid N) \iff a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \mid N$$

Le résultat persiste-t-il si les entiers  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?

- 13** En déduire que si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des entiers de  $\mathbb{N}^*$  premiers entre eux deux à deux, alors les événements  $[X \in a_1\mathbb{N}^*], \dots, [X \in a_n\mathbb{N}^*]$  sont mutuellement indépendants.  
On pourra noter  $(b_1, \dots, b_r)$  une sous-famille de  $(a_1, \dots, a_n)$ .

On note  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$  la suite croissante des nombres premiers.

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_n$  l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  tels que  $X(\omega)$  n'est divisible par aucun des nombres premiers  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

- 14** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$$

- 15** Soit  $\omega$  dans  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$ . Que vaut  $X(\omega)$ ? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

On se propose, en application, de prouver que la série  $\sum \frac{1}{p_n}$  des inverses des nombres premiers diverge.

On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série  $\sum \frac{1}{p_n}$  converge.

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

- 16** Justifier que  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$  et que l'on a pour tout réel  $s > 1$ ,  $\ell \geq \zeta(s)$ .  
Conclure.