Semaine du 18/03

1 Cours

Intégrales à paramètres

Passage à la limite Théorème de convergence dominée : cas discret et cas continu. Théorème d'intégration terme à terme.

Continuité Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

Dérivabilité Classe $\mathcal{C}^1$ d'une intégrale à paramètre, extension pour la classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) ou $\mathcal{C}^\infty$.

Fonctions à valeurs vectorielles

Les fonction considérées sont des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

Dérivabilité Définition. La dérivabilité implique la continuité. Une fonction est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en a. Coordonnées de la dérivée dans une base. Opérations : dérivabilité et dérivée d'une combinaison linéaire, de $\mathrm{L} \circ f$ où L est linéaire, de $\mathrm{B}(f, g)$ où B est bilinéaire (cas du produit scalaire), de $\mathrm{M}(f_1, \dots, f_n)$ où M est multilinéaire, de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et opérations.

Intégration Fonctions continues par morceaux. Définition de l'intégrale sur un segment à partir des fonctions coordonnées (indépendante de la base choisie). Propriétés : linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Sommes de Riemann. Dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

Suites et séries de fonctions Interversion limite/intégration, série/intégration, limite/dérivation, série/dérivation. Dérivabilité et dérivée de $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(t\mathrm{A})$ où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tu)$ où $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2 Méthodes à maîtriser

- Utiliser le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite d'une suite d'intégrales (dans le cas où on ne peut pas appliquer le théorème pour les suites de fonctions convergeant uniformément sur un segment).
- Exprimer une intégrale sous forme d'une somme de série : écrire l'intégrande sous forme d'une somme de série de fonctions (typiquement à l'aide d'un développement en série entière) et appliquer le théorème d'intégration terme à terme (dans le cas où on ne peut appliquer le théorème pour les séries de fonctions convergeant uniformément sur un segment).
- Pour les théorèmes de continuité ou de dérivabilité d'une intégrale à paramètre, il suffit d'avoir la domination sur tout segment.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 29, 30, 49, 50

Retour sur le DS n°09 : série de fonctions

1. Rappeler le théorème permettant d'affirmer que la somme d'une série de fonctions est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle.
2. On considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence 1. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1 - x^n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$. On justifiera **avec soin** les éventuelles majorations.

Retour sur le DS n°09 : inégalité arithmético-géométrique

1. Rappeler l'inégalité de Jensen **avec ses hypothèses**.
2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels positifs. Montrer que $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$.