

Bases orthonormales

Exercice 1 ★★

Produit mixte et produit vectoriel

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.

1. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées directes de E . Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.
2. En déduire que $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.
3. Soient x_1, \dots, x_{n-1} $n - 1$ vecteurs de E . Montrer que l'application

$$x \in E \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$$

est une forme linéaire sur E .

4. En déduire qu'il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle u, x \rangle$$

On appelle u le produit vectoriel des vecteurs x_1, \dots, x_{n-1} et on note

$$u = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$

5. Montrer que l'application

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1} \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$

est une application $n - 1$ -linéaire alternée.

Exercice 2 ★★★

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}_n[X]^2$ dans \mathbb{R} définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Donner sans calcul une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3 ★★★

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et e_1, \dots, e_n des vecteurs de E tels que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle^2$$

1. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \langle y | e_i \rangle$$

2. En déduire que

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i$$

3. Etablir que $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de E .

Exercice 4 ★★

Formule de Parseval

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale totale d'un espace préhilbertien réel E . Montrer que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2$$

Sous-espaces orthogonaux

Exercice 5 ★★

Montrer que $s : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^\top \end{cases}$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire défini par $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 ★★

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E .

1. Montrer que $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$ et que, si F et G sont de dimension finie, $G^\perp \subset F^\perp \implies F \subset G$.
2. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et que, si E est de dimension finie, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 7 ★★

Orthogonal et topologie

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E que l'on munit de sa norme euclidienne.

1. Montrer que pour tout $y \in E$, $\varphi_y : x \in E \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue.
2. Montrer que F^\perp est fermé dans E .
3. Montrer que de manière générale, $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.

Projection orthogonale

Exercice 8 ★★

Soit u un vecteur unitaire d'un espace euclidien E . On note U le vecteur colonne représentant u dans une base orthonormée \mathcal{B} de E . Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\text{vect}(u)$ dans \mathcal{B} .

Exercice 9 ★★★

ENS MP

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (e_1, \dots, e_n) une base orthogonale de \mathbb{R}^n .

1. Montrer qu'il existe un vecteur u de \mathbb{R}^n non nul tel que les projetés orthogonaux de e_1, \dots, e_n sur $\text{vect}(u)$ aient la même norme.
2. Montrer que cette norme commune est indépendante du vecteur u choisi et l'exprimer en fonction de $\|e_1\|, \dots, \|e_n\|$.

Exercice 10 ★★

Caractérisations des projections orthogonales

Soient E un espace euclidien et p une projection de E . Etablir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. p est orthogonale ;
2. $\forall x, y \in E, \langle p(x)|y \rangle = \langle x|p(y) \rangle$;
3. $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 11 ★★★

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $u \in O(E)$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}(\text{Id}_E - u) \oplus^\perp \text{Im}(\text{Id}_E - u)$.
2. Soit $x \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$. Montrer que (x_n) converge vers la projection de x sur $\text{Ker}(\text{Id}_E - u)$ parallèlement à $\text{Im}(\text{Id}_E - u)$.

Exercice 12

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est un produit scalaire sur E .
2. Calculer $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F .
5. Montrer que :

$$\forall P \in E, \left| \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt}$$

Exercice 13 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soient $n \geq 3$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à

M .

1. Donner le rang de M .
2. Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
3. Donner la matrice du projecteur orthogonal sur $\text{Im } f$ dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

Optimisation

Exercice 14 ★★★

Calculer le minimum de $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(a, b) \mapsto \int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 dx$$

Exercice 15 ★★★

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) du produit scalaire $(X, Y) \mapsto X^\top Y$. On se donne $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. On pose $E = \{\|AX - B\|^2, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ et $K = \inf E$.

1. Justifier l'existence de K .
2. On considère le système linéaire $(\mathcal{S}) : AX = B$. On appelle *pseudo-solution* de \mathcal{S} tout élément Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AY - B\|^2 = K$. Montrer que si (\mathcal{S}) admet une solution, les pseudo-solutions de (\mathcal{S}) sont les solutions de (\mathcal{S}) .
3. On associe à (\mathcal{S}) le système $(\mathcal{S}') : A^\top AX = A^\top B$. Montrer qu'un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de (\mathcal{S}) si et seulement si il est solution de (\mathcal{S}') .
4. Montrer que $\text{rg } A^\top A = \text{rg } A$.
5. Montrer que si $\text{rg } A = n$, (\mathcal{S}) admet une unique pseudo-solution.

Exercice 16 ★★★

ENS MP 2010

Soient E un espace euclidien et x_1, \dots, x_p des vecteurs de E . Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en un unique point que l'on précisera.

Exercice 17 ★★★

Soient E un espace euclidien et x_1, \dots, x_p des vecteurs de E . Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en $m = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$.

Exercice 18 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$. On rappelle que $A_0 = 1$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$.

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer A_n en distinguant deux cas selon la parité de n .
3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Calculer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Exercice 19 ★★★

Soient H et K deux hyperplans d'un espace euclidien E . On note s_H et s_K les réflexions par rapport à H et K . Montrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.

Exercice 20 ★★

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Trouver les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$\forall u, v \in E, f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$$

2. Trouver les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$\forall u, v \in E, f(u \wedge v) = -f(u) \wedge f(v)$$

Exercice 21 ★★

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercice 22 ★★

Déterminer les réels a, b, c pour que $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une rotation.

Exercice 23 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension 2.

1. On sait que la matrice d'une réflexion de E dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$. Quelle est l'interprétation géométrique de θ ?
2. Déterminer une condition portant sur l'angle entre leurs axes pour que la somme de deux réflexions soit encore une réflexion.

Exercice 24 ★★

Petites Mines 2009

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E . On pose $v = \text{Id}_E - u$. Montrer que $\text{Im } v$ et $\text{Ker } v$ sont orthogonaux et supplémentaires.

Exercice 25 ★★

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ engendré par la famille (e_1, e_2, e_3) où

$$e_1 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e_2 : t \mapsto \cos(2\pi t) \quad e_3 : t \mapsto \sin(2\pi t)$$

1. Montrer que $\Phi : (f, g) \mapsto 2 \int_0^1 f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur E .
2. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E .
3. Pour tout réel x , on définit l'application τ_x qui à tout élément f de E associe g tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(x - t)$$

- a. Montrer que τ_x est un endomorphisme de E . Donner sa matrice relativement à \mathcal{B} .
- b. Montrer que τ_x est une isométrie vectorielle de E .
- c. Caractériser géométriquement τ_x .

Exercice 26 ★★

Déterminer l'image de la droite d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et d'axe dirigé par $\vec{a}(1, 1, 1)$.

Exercice 27 ★★

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de E de la réflexion s_1 par rapport au plan d'équation $x + y - 2z = 0$.
2. Quelle est la nature de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner ses éléments caractéristiques.
3. Trouver les réflexions s_2 et s_3 telles que $s_1 \circ s_2 = f$ et $s_3 \circ s_1 = f$. Préciser leur plan de réflexion.

Exercice 28 ★

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note A la matrice de f dans une base orthonormale \mathcal{B} de E . Montrer que f est une symétrie orthogonale si et seulement si A est une matrice orthogonale symétrique.

Exercice 29 ★★

Mines MP 2011

Soient E un espace euclidien de dimension 3 ainsi que deux éléments f et g de $\text{SO}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que f et g sont soit deux rotations de même axe soit des symétries par rapport à des droites orthogonales entre elles.

Exercice 30 ★★

Banque Mines-Ponts MP 2018

Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E .

1. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$.
2. En déduire que $(f - \text{Id}_E)^2 = 0 \implies f = \text{Id}_E$.

Exercice 31 ★★

Soient E un plan vectoriel euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion. Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

Exercice 32 ★★★

Soit $O = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale réelle de taille n où A et D sont deux blocs carrés de tailles respectives p et q . Montrer que $(\det A)^2 = (\det D)^2$.

Exercice 33 ★

Soient A et B les matrices, dans deux bases orthonormales, d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que $\text{tr}(A^T A) = \text{tr}(B^T B)$.

Exercice 34 ★★

1. Soit X une matrice colonne réelle de taille n . Montrer que $X^T X \in \mathbb{R}_+$ et que $X^T X = 0$ implique $X = 0$.
2. Soit M une matrice antisymétrique réelle de taille n . Montrer que $I_n + M$ est inversible.
3. On pose $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Montrer que A est orthogonale.

Exercice 35 ★★★★★

ENS MP 2010

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ laissant stable $(\mathbb{R}_+)^n$.

Exercice 36 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A = \text{com}(A)$ si et seulement si $A = 0$ ou $A \in \text{SO}(n)$.

Adjoint

Exercice 37 ★★

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On pose

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|f(x)\|$$

Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \|f\| = \|f^*\|$$

Exercice 38 ★★

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E .

1. Montrer que $\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker}(u)$.
2. En déduire que $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^*) = \text{rg}(u^* \circ u) = \text{rg}(u \circ u^*)$.

Exercice 39 ★★★

X PC 2012

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $\text{Im } u = \text{Ker } u$. Montrer que $u + u^*$ est inversible.

Exercice 40 ★

Autour de l'adjoint

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Etablir que

$$\text{Ker}(f + f^*) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^*)$$

Exercice 41 ★★

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. On pose pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$. Calculer l'adjoint de g_A .

Exercice 42 ★★

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E .

1. Montrer que $\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp$ et que $\text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$.
2. En déduire que $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^*)$.

Exercice 43 ★★★

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u^* \circ u + \alpha u + \beta u^* = 0$$

1. On suppose $\alpha \neq \beta$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et p un projecteur orthogonal de E tels que $u = \lambda p$.
2. On suppose $\alpha = \beta$. Montrer que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont orthogonaux.

Exercice 44 ★★

Soit E un espace euclidien. Montrer que $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2 \mapsto \text{tr}(f^* \circ g)$ est un produit scalaire sur E .

Exercice 45 ★★

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E .

1. Montrer que $\text{tr}(f) = \text{tr}(f^*)$.
2. Montrer que $\det(f) = \det(f^*)$.
3. Montrer que $\chi_f = \chi_{f^*}$.
4. Montrer que $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(f^*)$.
5. Montrer que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, $\dim E_\lambda(f) = \dim E_\lambda(f^*)$.

Exercice 46 ★★★★★

Endomorphismes normaux

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . On suppose que u est un endomorphisme *normal*, c'est-à-dire que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. On suppose dans cette question uniquement que $\dim E = 2$ et que χ_u est irréductible. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . Montrer que la matrice de u dans la base \mathcal{B} est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Montrer que F^\perp est également stable par u et que les restrictions u_F et u_{F^\perp} de u à F et F^\perp sont des endomorphismes normaux de F et F^\perp .
On pourra considérer la matrice de u dans une base adaptée.
3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Exercice 47 ★★

Endomorphismes normaux

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. Montrer que u et u^* ont les mêmes éléments propres.
2. Montrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Exercice 48 ★★★

Mines-Ponts MP 2016

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On considère des vecteurs unitaires a et b de E formant une famille libre.

Réduire l'endomorphisme

$$\phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b \end{cases}$$

Exercice 49 ★★

CCP MP 2016

Soit (u_1, \dots, u_n) une base de E . On pose $f(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$ pour $x \in E$.

1. Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint défini positif.
2. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, défini positif telle que $g^2 = f^{-1}$.
3. Montrer que $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une base orthonormale de E .

Exercice 50 ★★

Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif

Soit f un endomorphisme auto-adjoint positif d'un espace euclidien E . Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint g de E tel que $f = g^2$.

Exercice 51 ★

Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E . Montrer que $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$.

Exercice 52 ★★

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint de E . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle \geq 0$.
- (ii) Il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g^* \circ g$.
- (iii) Il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h^* = h$ et $f = h^2$.

Exercice 53 ★★★

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint de E . On note $X = \{x \in E, \langle f(x), x \rangle \leq 1\}$. Montrer que X est compacte si et seulement si f est défini positif.

Exercice 54 ★★★

ENS MP 2010

Montrer que $\Phi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui à une matrice associe sa plus grande valeur propre est une application convexe.

Exercice 55 ★★★

ENS MP 2010

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de B .

Exercice 56 ★★★

Soient A, B deux matrices réelles symétriques positives de taille n et $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que tout vecteur propre de A^k est vecteur propre de A .
2. Montrer que si $A^k = B^k$, alors $A = B$.
3. Que se passe-t-il sans l'hypothèse A, B symétriques positives ?

Exercice 57 ★★★

Soient A et B deux matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{tr}(AB) \geq 0$.

Exercice 58 ★★

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose

$$N(A) = \sqrt{\max \text{Sp}(A^T A)}$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $n = p$, N est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 59 ★★★★★

ENS MP 2006

Soit $(a, b, c, A, B, C) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|$$

Montrer que

$$|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|$$

Exercice 60

ENS PSI 2016

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\text{Sp}(M^T M) \setminus \{0\} = \text{Sp}(M M^T) \setminus \{0\}$$

Exercice 61 ★★★★★

Banque Mines-Ponts MP 2021

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

- (i) $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A)^2, \lambda + \mu \neq 0$;
- (ii) $\forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists ! M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), AM + MA = B$.

Exercice 62 ★★★

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ le système

$$\begin{cases} X^T Y X = I_n \\ Y^T X Y = I_n \end{cases}$$

Exercice 63 ★★★

Banque Mines-Ponts MP 2021

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les coefficients diagonaux sont nuls et D une matrice diagonale.

Montrer que $S + D$ est semblable à D si, et seulement si, S est nulle.

Exercice 64 ★★★

Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- 1. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
- 2. Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 65

CCINP (ou CCP) PC 2019

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^n = 0$.

- 1. Montrer que si M est symétrique, alors $M = 0$.
- 2. Montrer que si $M^T M = M M^T$, alors $M = 0$.

Exercice 66 ★★★★★

Décomposition polaire

- 1. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = S^2$.
- 2. Montrer qu'il existe un couple $(Q, S) \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = QS$.
- 3. Montrer l'unicité du couple (Q, S) de la question précédente.
- 4. On se donne maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(Q, S) \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = QS$. On pourra utiliser des arguments topologiques. A-t-on encore unicité du couple (Q, S) ?

Exercice 67 ★★

Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 68 ★★

Décomposition en valeurs singulières

Pour une matrice diagonale D et $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera D^α la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les puissances $\alpha^{\text{èmes}}$ de ceux de D .

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que $A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. On pose $r = \text{rg}(A^T A)$. Justifier qu'il existe une matrice $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs telles que

$$V^T A^T A V = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

3. On pose $V = (V_1, V_2)$ avec $V_1 \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $V_2 \in \mathcal{M}_{n,n-r}(\mathbb{R})$. Montrer que $AV_2 = 0$.
4. On pose $U_1 = AV_1 D^{-1/2}$. Montrer qu'il existe $U_2 \in \mathcal{M}_{m,r-m}(\mathbb{R})$ telle que $U = (U_1, U_2) \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$.

5. Vérifier que $A = U \Sigma V^T$ avec $\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} D^{1/2} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$.

Exercice 69

Mines Télécom MP 2022

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et semblable à une matrice réelle triangulaire supérieure.

1. Déterminer le spectre de A .
2. Montrer que $A^n = 0$.
3. Montrer que $A^2 = 0$.
4. Montrer que $A = 0$.

Exercice 70 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2022

Soit $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice avec des 1 sur la diagonale, sur la première colonne et sur la première ligne, puis des 0 partout ailleurs.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Cas $n = 2$: calculer les éléments propres de A .
3. Cas $n \neq 2$:
 - a. Montrer que 1 est une valeur propre de A .
 - b. Montrer que si λ est une valeur propre de A autre que 1, alors $(\lambda - 1)^2 = n - 1$.
 - c. Expliciter les éléments propres de A .
 - d. Calculer le déterminant de A en fonction de n .

Exercice 71 ★★★

Signature d'une matrice symétrique

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On dit que B est *congruente* à A s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^T A P$. Montrer que la congruence est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On appelle *signature* de A le couple (p, q) où p est le nombre de valeurs propres strictement positives de A (comptées avec multiplicité) et q est le nombre de valeurs propres strictement négatives de A (comptées avec multiplicité).

a. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de signature (p, q) . Montrer que A est congruente à $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. En déduire que si A et B ont même signature, alors elles sont congruentes.

3. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de signature (p, q) .

a. Démontrer qu'il existe trois sous-espaces vectoriels E_+ , E_- et E_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

- $\forall X \in E_+ \setminus \{0\}, X^T S X > 0$;
- $\forall X \in E_- \setminus \{0\}, X^T S X < 0$;
- $\forall X \in E_0, X^T S X = 0$;
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E_+ \oplus E_- \oplus E_0$;
- $\dim E_+ = p, \dim E_- = q$.

b. On suppose qu'il existe trois sous-espaces vectoriels F , G et H de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

- $\forall X \in F \setminus \{0\}, X^T S X > 0$;
- $\forall X \in G \setminus \{0\}, X^T S X < 0$;
- $\forall X \in H, X^T S X = 0$;
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F \oplus G \oplus H$.

Montrer que $\dim F = p$ et $\dim G = q$.

4. En déduire que deux matrices symétriques congruentes ont même signature.

Exercice 72 ★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi : (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto X^T A Y$ est un produit scalaire si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 73 ★★★

Réduction simultanée

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$P^T A P = I_n \quad \text{et} \quad P^T B P = D$$

Exercice 74 ★★★

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = \exp(A)$. Cette matrice A est-elle unique ?

Exercice 75 ★★

Déterminant de Gram

Soit (f_1, \dots, f_n) une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien E . On note $A = (\langle f_i, f_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\det(A) = 0$ si et seulement si la famille (f_1, \dots, f_n) est liée.

Exercice 76 ★★

Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique positive sont positifs.

Polynômes orthogonaux

Exercice 77 ★★★

On pose $Q_n = (X^2 - 1)^n = (X + 1)^n(X - 1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On notera $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$ par la suite.
2. Soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k < n$. Montrer que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$.
3. On pose $P_n = Q_n^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit $L : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$. Montrer que L est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, P_k est un vecteur propre de L .

Exercice 78 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose $L(P) = P'' - 2XP'$. Pour tous $P, Q \in E$, on note

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Montrer que L est diagonalisable. On précisera ses valeurs propres.
3. Montrer que L est auto-adjoint pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
4. Montrer que l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de E diagonalise L i.e. est une base de vecteurs propres de L .

Divers

Exercice 79 ★★

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Une application $u : E \rightarrow E$ est dite *antisymétrique* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, u(y) \rangle + \langle y, u(x) \rangle = 0$$

On note $A(E)$ l'ensemble des applications antisymétriques de E .

REMARQUE. Rien à voir avec les applications *multilinéaires* antisymétriques !

1. Soit $u \in A(E)$. Montrer que u est linéaire.
2. Soit $u : E \rightarrow E$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
 - (i) u est linéaire et $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$;
 - (ii) u est antisymétrique ;
 - (iii) u est linéaire et sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.
3. Montrer que $A(E)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel et déterminer sa dimension.
4. Soit $u \in A(E)$. Montrer que $\text{Im } u$ est l'orthogonal de $\text{Ker } u$.
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors F^\perp est également stable par u .

Exercice 80 ★★★

Montrer que le rang d'une matrice antisymétrique réelle est pair.

Exercice 81 ★★★★★

Banque Mines-Ponts MP 2018

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit \mathcal{E} l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = A^2 + A - I_n$.

On appelle a l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A .

1. Décrire a si A est symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.
2. Décrire a si on ne suppose plus A symétrique, avec $A \in \mathcal{E}$.

Exercice 82 ★★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$$

1. Montrer que la matrice de u dans une base orthonormale de E est antisymétrique.
2. Montrer que $(\text{Ker } u)^\perp$ est stable par u .
3. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ avec N inversible.
4. Montrer que le rang de u est pair.

Exercice 83 ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On travaille dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$.
3.
 - a. Quel est l'orthogonal de l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ?
 - b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients de A ?
4. Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$.
5. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Exercice 84 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension n et u_1, \dots, u_{n+1} des vecteurs non nuls de E faisant un angle constant α_n (non nul) deux à deux. Que vaut α_n ?

Exercice 85 ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{rg}(A^T A) = \text{rg}(AA^T) = \text{rg } A$.

Exercice 86 ★★★

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

$$\text{pour } P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \text{ et } Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n.$$

2. On pose $F = \text{vect}(1 + X^n, n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. Conclusion ?