Devoir à la maison n°09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I –

I.1 Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A = AI_n \in J$.

I.2 Soit $U \in J$ inversible ; alors $I_n = UU^{-1} \in J$, puis $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

I.3 **I.3.a** Comme $\operatorname{rg} A = r$, il existe des matrices P et Q inversibles telles que $\Delta = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = PAQ$: comme $A \in J$, on a aussi $\Delta \in J$.

I.3.b Soit A_i la matrice diagonale, dont les $n-r$ derniers éléments diagonaux sont nuls, à l'exception du $(r-1+i)^{\text{ème}}$, qui vaut 1, ainsi que les $r-1$ premiers éléments diagonaux. Chaque matrice A_i, étant de rang r, est équivalente à A. Leur somme est diagonale, d'éléments diagonaux tous non nuls, donc inversible.

I.4 L'idéal nul est bilatère. Si J est un idéal bilatère non nul, on choisit A de rang r comme à la question précédente, puis les A_i construites : on a $A_i = P_iAQ_i$, donc chaque A_i est dans J, puis leur somme aussi. Alors, d'après **I.2**, $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie II –

II.1 La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient évidemment à J_E.
De plus, si $M, N \in J_E$, alors $\operatorname{Im}(M-N) \subset \operatorname{Im}(M) + \operatorname{Im}(-N) = \operatorname{Im}(M) + \operatorname{Im}(N) \subset E$ donc $M - N \in J_E$. J_E est donc un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.
Enfin, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M \in J_E$, on a $\operatorname{Im}(MA) \subset \operatorname{Im}(M) \subset E$, donc $B \in J_E$.
J_E est donc bien un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.2 **II.2.a** C'est du cours.

II.2.b Pour tout entier i compris entre 1 et q, $v(e_i) \in \operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Im}(u)$. Comme u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im}(u)$, chaque $v(e_i)$ admet un unique antécédent ε_i dans S par u.

II.2.c Il suffit de considérer l'application linéaire w vérifiant $w(e_i) = \varepsilon_i$ pour tout entier i compris entre 1 et q. Cette application w est déterminée de manière unique puisqu'on l'a définie sur une base de $\mathbb{R}^q$. De plus, v et $u \circ w$ coïncident sur la base canonique de $\mathbb{R}^q$ donc sont égales.

II.2.d Il suffit de considérer les applications linéaires u et v canoniquement associées à A et B. Ce qui précède montre qu'il existe une application linéaire w de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $v = u \circ w$. Notons C la matrice de w dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$. L'égalité $v = u \circ w$ se traduit matriciellement par $B = AC$.

II.3 **II.3.a** L'image d'une matrice est l'espace vectoriel engendré par ses colonnes. Si on note ici C_i la $i^{\text{ème}}$ colonne d'une matrice C, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(D) &= \operatorname{vect}(D_1, \dots, D_n, D_{n+1}, \dots, D_{2n}) = \operatorname{vect}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) \\ &= \operatorname{vect}(A_1, \dots, A_n) + \operatorname{vect}(B_1, \dots, B_n) = \operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B)\end{aligned}$$

II.3.b Il suffit d'appliquer **II.2.d**.

II.3.c On écrit W en blocs : $W = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, on obtient avec un produit par blocs $C = AU + BV$.

II.4 **II.4.a** L'ensemble des rangs des éléments de J est une partie non vide de $\mathbb{N}$, majorée par n, donc admet un plus grand élément r. On note M_0 une matrice de J de rang r. On a alors $\forall M \in J$, $\mathrm{rg}(M) \leq r = \mathrm{rg}(M_0)$.

II.4.b Soit $F = \mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0)$, et C la matrice du projecteur sur F dans la direction d'un quelconque supplémentaire. On a $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0)$, donc l'existence de $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = MU + M_0V$ d'après **II.3.c**. Puisque J est un idéal à droite, $C \in J$. Or $\mathrm{Im}(M) \not\subset \mathrm{Im}(M_0)$ donc $\mathrm{Im}(M_0) \subsetneq F$. Le rang de C est la dimension de F qui est strictement plus grande que r : il y a contradiction.

II.4.c Pour un quelconque élément M de J, on doit donc avoir $\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Im}(M_0)$. Ceci signifie que $J \subset J_{\mathrm{Im}(M_0)}$.

II.4.d Réciproquement, si $A \in J_{\mathrm{Im}(M_0)}$, on a $\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{Im}(M_0)$. D'après **II.2.d**, il existe C telle que $A = M_0C$, et donc $A \in J$. On conclut : $J = J_{\mathrm{Im}(M_0)}$.

II.5 On vient de montrer qu'un idéal à droite est bien de la forme J_E où E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On peut conclure grâce à **II.1** que les idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont exactement les J_E où E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Partie III –

III.1 La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient évidemment à J^E.
De plus, si $M, N \in J^E$, $E \subset \mathrm{Ker}(M) + \mathrm{Ker}(N) =\subset \mathrm{Ker}(M) + \mathrm{Ker}(-N) \subset \mathrm{Ker}(M - N)$ donc $M - N \in J^E$. J^E est donc un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.
Enfin, si $M \in J^E$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $E \subset \mathrm{Ker}(M) \subset \mathrm{Ker}(AM)$ donc $AM \in J^E$.
J^E est donc bien un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.2 **III.2.a** $S = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_r)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$. On a vu que u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$. Comme $(e_1, \dots, e_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$.

III.2.b On pose $f_i = u(e_i)$ pour tout entier i compris entre 1 et r et on complète $(f_1, \dots, f_r)$ en une base $(f_1, \dots, f_p)$ de $\mathbb{R}^p$. On définit alors une application w de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ de la manière suivante. Pour $1 \leq i \leq r$, on pose $w(f_i) = v(e_i)$ et pour $i > r$, on pose $w(f_i) = 0$. On constate alors que si $1 \leq i \leq r$, $w(u(e_i)) = w(f_i) = v(e_i)$ et si $i > r$, $w(u(e_i)) = v(e_i) = 0$ car $e_i \in \mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

III.2.c Il suffit de considérer les applications linéaires u et v canoniquement associées à A et B. Ce qui prède montre qu'il existe une application linéaire w de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que $v = w \circ u$. Notons C la matrice de w dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$. L'égalité $v = w \circ u$ se traduit matriciellement par $B = CA$.

III.3 On prend cette fois $D = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. On a pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $DX = \begin{pmatrix} AX \\ BX \end{pmatrix}$, de sorte que $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B)$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(C) \subset \mathrm{Ker}(D)$, on trouve $W = (U, V) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$ telle que $C = WD$, et ainsi $C = UA + VB$.

III.4 Si un idéal à gauche J est non nul, soit $d = \dim \mathrm{Ker}(M_0)$ la plus petite dimension du noyau d'un élément de J. Si, pour un M de J, $\mathrm{Ker}(M_0) \subsetneq \mathrm{Ker}(M)$, soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de noyau $\mathrm{Ker}(M) \cap \mathrm{Ker}(M_0)$ (une matrice de projecteur, par exemple) ; par **III.3**, on trouve $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = UM + VM_0$, et donc $C \in J$. Or $\mathrm{Ker}(M) \cap \mathrm{Ker}(M_0) \subsetneq \mathrm{Ker}(M_0)$ donc la dimension du noyau de C est strictement plus petite que d, absurde. C'est donc que pour tout M de J, $\mathrm{Ker}(M_0) \subset \mathrm{Ker}(M)$.
Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(M_0) \subset \mathrm{Ker}(M)$, par **III.2.c**, on trouve $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = CM_0$, donc $M \in J$. On a montré que $J = J^{\mathrm{Ker}(M_0)}$.
² On vient de montrer qu'un idéal à gauche est bien de la forme J^E où E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On peut conclure grâce à **III.1** que les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les J^E où E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.