

DEVOIR SURVEILLÉ N°13

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. On trouve successivement

$$3^1 \equiv 3[11] \quad 3^2 \equiv -2[11] \quad 3^3 \equiv 5[11] \quad 3^4 \equiv 4[11] \quad 3^5 \equiv 1[11]$$

Ainsi $p = 5$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $2012 \equiv 2[5]$, la question précédente montre que $3^{n+2012} \equiv 3^{n+2}[11]$ ou encore $3^{n+2012} \equiv 9 \times 3^n[11]$. Par ailleurs $5^2 = 25 \equiv 3[11]$ donc $5^{2n} \equiv 3^n[11]$. Ainsi $3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n} \equiv 0[11]$ i.e. 11 divise $3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n}$.

Problème 1

1 **1.a** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'application $x \mapsto x^n$ est une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ . Ainsi $\mathbb{R}_+ \subset T_1(\mathbb{R})$. Réciproquement, si $x \in T_1(\mathbb{R})$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y^2 \geq 0$. Ainsi $T_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$. Par double inclusion, $T_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

1.b Les racines n -ièmes de b sont les complexes $\sqrt[n]{b} e^{\frac{i(0+2k\pi)}{n}}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

1.c La question précédente, montre que tout complexe non nul appartient à $T_1(\mathbb{C})$. Mais 0 appartient évidemment à $T_1(\mathbb{C})$ puisque $0^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

2 **2.a** Soit $A \in T_p(\mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $B^n = A$. Par conséquent, $\det(A) = (\det B)^n$ avec $\det B \in \mathbb{K}$. Ainsi $\det A \in T_1(\mathbb{K})$.

2.b Puisque $T_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$, il suffit de choisir une matrice de déterminant strictement négatif. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3 Supposons qu'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Comme B commute avec B^2 , B commute avec A , ce qui donne $b = c = 0$. Alors $B^2 = A$ donne maintenant $a^2 = -1$ et $d^2 = -2$ ce qui est évidemment impossible. Pourtant $\det(A) = 2 \in \mathbb{R}_+ = T_1(\mathbb{R})$.

4 **4.a** On trouve $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$, $E_1(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_2(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Ainsi $\dim E_1(A) + \dim E_2(A) = 3$ donc A est diagonalisable.

4.b La matrice A est semblable à la matrice $D = \text{diag}(1, 2, 2)$. Il existe donc $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $\Delta = \text{diag}(1, \sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2})$ et $B = P\Delta P^{-1}$, on a bien $B^n = P\Delta^n P^{-1} = PDP^{-1} = A$. Ainsi A est TP.

4.c On peut choisir $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. En choisissant B comme précédemment, on trouve pour $n = 2$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & -3 + 3\sqrt{2} & -2 + \sqrt{2} \\ 2 - 2\sqrt{2} & -3 + 4\sqrt{2} & -2 + \sqrt{2} \\ -2 + 2\sqrt{2} & 3 - 3\sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et pour $n = 3$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt[3]{2} & -3 + 3\sqrt[3]{2} & -2 + \sqrt[3]{2} \\ 2 - 2\sqrt[3]{2} & -3 + 4\sqrt[3]{2} & -2 + \sqrt[3]{2} \\ -2 + 2\sqrt[3]{2} & 3 - 3\sqrt[3]{2} & 2 - \sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$$

5 **5.a** On rappelle que $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle θ (dans une base orthonormée directe). Ainsi $A = R(\pi)$ est la matrice d'une rotation d'angle π .

5.b On sait d'après le cours que R est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A = R(\pi) = R(\pi/n)^n$ donc A est TP \mathbb{R} .

6 **6.a** D'après le cours, N est trigonalisable et son unique valeur propre est 0. Elle est donc semblable à une matrice triangulaire de diagonale nulle. On en déduit immédiatement que $\chi_N = X^p$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $N^p = 0$.

6.b Supposons que N soit TP \mathbb{K} . Notamment, il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $B^p = N$. Alors $B^{p^2} = N^p = 0$. Par conséquent, B est nilpotente. En appliquant la question précédente à B (et non à N !), on obtient $N = B^p = 0$.

7 Comme les polynômes $(X - \lambda_i)^{r_i}$ sont premiers entre eux deux à deux, le lemme des noyaux permet d'affirmer que

$$\text{Ker } \chi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{E}})^{r_i}$$

Or $\chi_u(u) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc $\text{Ker } \chi_u(u) = \mathbb{K}^p$. Ainsi

$$\mathbb{K}^p = \bigoplus_{i=1}^k C_i$$

8 Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Comme $\mathbb{K}[u]$ est une algèbre commutative, u commute avec $(u - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}$. On en déduit que $C_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}$ est stable par u .

9 Soit $x \in C_i$. Alors, par définition de C_i ,

$$(u_{C_i} - \lambda_i \text{Id}_{C_i})^{r_i}(x) = (u - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}(x) = 0$$

Ainsi $(u_{C_i} - \lambda_i \text{Id}_{C_i})^{r_i} = 0$ donc $u_{C_i} - \lambda_i \text{Id}_{C_i}$ est nilpotent.

10 Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Comme $u_{C_i} - \lambda_i \text{Id}_{C_i}$ est nilpotent, sa matrice N_i dans une base \mathcal{B}_i de C_i est nilpotente. La matrice de u_{C_i} dans cette base \mathcal{B}_i est alors $\lambda_i I_{p_i} + N_i$. Comme $\mathbb{K}^p = \bigoplus_{i=1}^k C_i$, la concaténation des bases \mathcal{B}_i est une base de \mathbb{K}^p .

Dans cette base, la matrice de u est alors $\text{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$. La matrice A de ce même endomorphisme u dans la base \mathcal{B} est donc semblable à $\text{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$. Il existe donc $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que

$$A = P \text{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k) P^{-1}$$

11 Supposons que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\lambda_i I_{p_i} + N_i$ est TP \mathbb{K} . Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Il existe donc $B_i \in \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ telle que $\lambda_i I_{p_i} + N_i = B_i^N$. Posons $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_k)$. Alors

$$\text{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k) P^{-1} = \text{diag}(B_1^N, \dots, B_k^N) = B^N$$

puis

$$A = P B^N P^{-1} = (P B P^{-1})^N$$

Ainsi A est-elle même TP \mathbb{K} .

12 **12.a** Effectuons la division euclidienne de V par X^p . Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $V = X^p Q + R$. Comme Q est continue en 0, $Q(x) = Q(0) + o(1)$ puis $x^p Q(x) = Q(0)x^p + o(x^p)$ et enfin, $R(x) = -Q(0)x^p + o(x^p)$

car $V(x) = o(x^p)$ par hypothèse. En notant $R = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$, on a donc

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k = -Q(0)x^p + o(x^p)$$

Par unicité du développement limité, tous les a_k sont nuls. Ainsi $R = 0$ puis $V = X^p Q$.

REMARQUE. On n'a pas réellement besoin d'une division euclidienne. En effet, en posant $V = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k X^k$, $V(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k x^k + o(x^p)$. Par unicité du développement limité, $v_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$. Ainsi $V = X^p Q$ avec $Q = \sum_{k=p}^{+\infty} v_k X^{k-p}$.

12.b En considérant le développement limité à l'ordre p de $(1+x)^{\frac{1}{n}}$ au voisinage de 0, il existe $U \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = U(x) + o(x^p)$$

On en déduit que

$$1+x = U(x)^n + o(x^p)$$

12.c Comme $1+x - U(x)^n = o(x^p)$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1+X - U^n = X^p Q$ i.e. $1+X = U^n + X^p Q$.

13 **13.a** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On choisit U et Q comme à la question précédente. On a vu précédemment que $N^p = 0$ car N est nilpotente. En appliquant l'égalité polynomiale $1+X = U^n + X^p Q$ en N , on obtient

$$I_p + N = U(N)^n + N^p Q(N) = U(N)^n$$

Ceci prouve que $I_p + N$ est bien $\text{TP}\mathbb{K}$.

13.b Supposons que λ est $\text{TP}\mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe donc $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda = \mu^n$. Remarquons que N/λ est également nilpotente puisque $(N/\lambda)^p = N^p/\lambda^p = 0$. D'après la question précédente, il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $I_p + \frac{1}{\lambda}N = B^n$. Mais alors

$$\lambda I_p + N = \lambda(I_p + N/\lambda) = \mu^n B^n = (\mu B)^n$$

Ceci prouve que $\lambda I_p + N$ est également $\text{TP}\mathbb{K}$.

14 **14.a** Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Alors toutes ses valeurs propres sont non nulles et son polynôme caractéristique est scindé. En reprenant les notations de la partie précédente, $\lambda_i \text{Id}_{p_i} + N_i$ est $\text{TP}\mathbb{C}$ d'après la question précédente. D'après la question **11**, A est-elle même $\text{TP}\mathbb{C}$.

14.b Si $p = 1$, on a vu précédemment que $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Ainsi toute «matrice» de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est $\text{TP}\mathbb{C}$.

Supposons $p \geq 2$. D'après la question **6.b**, la seule matrice $\text{TP}\mathbb{C}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est la matrice nulle. Or il existe des matrices nilpotentes non nulles dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Il suffit par exemple de considérer la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient «en haut à droite».

15 On peut par exemple considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A = \text{diag}(0, I_3 + N)$. On remarque que N est clairement nilpotente (triangulaire de diagonale nulle).

A n'est pas inversible puisque $\text{rg}(A) = 3 < 4$. A n'est pas diagonalisable car sinon, $I_3 + N$ le serait également et enfin N le serait aussi. Puisque N est nilpotente, elle serait nulle, ce qui n'est pas le cas.

Enfin, le «bloc» 0 est $\text{TP}\mathbb{R}$ car $0 \in T_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ et le bloc $I_3 + N$ est $\text{TP}\mathbb{R}$ car il est unipotent. D'après la question **11**, A est $\text{TP}\mathbb{R}$.