Devoir à la maison n°17

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – D'après E3A MP 2015

Pour tout nombre réel $R > 0$, on note $D(0, R)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R.
Dans tout le problème, on note f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z - 1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

I Inverse d'une série entière

On considère une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul (possiblement infini) et de somme $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose $a_0 = 1$.
On se propose de montrer qu'il existe un réel R' tel que $0 < R' \leq R$ et une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R' telle qu'en posant $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$:

$$\forall z \in D(0, R'),\ S(z)T(z) = 1$$

Soit ρ un nombre réel tell que $0 < \rho < R$.

1 Justifier que la suite $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2 En déduire qu'il existe un nombre réel $K > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leq \left(\frac{K}{\rho}\right)^n$$

On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n-j}$$

3 Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |b_n| \leq \left(\frac{2K}{\rho}\right)^n$$

4 En déduire que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ a un rayon de convergence non nul.

On pose alors $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

5 Soit R' le minimum des rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$. Justifier que ST est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R}')$ et expliciter les coefficients de cette série entière.

6 Conclure.

II Rationnalité des nombres de Bernoulli

7 Résoudre l'équation $f(z) = 0$ sur $\mathbb{C}$.

8 Justifier qu'il existe une fonction g définie sur le disque $\mathrm{D}(0, 2\pi)$ définie par :

$$\forall z \in \mathrm{D}(0, 2\pi),\ g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

9 Justifier que f est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini et préciser les coefficients de cette série entière.

10 Justifier qu'il existe $\mathrm{R} > 0$ telle que g soit développable en série entière sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$.
On notera $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$ pour $z \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R})$.

11 Démontrer que la fonction G définie par :

$$\forall t \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ \mathrm{G}(t) = t + 2g(t)$$

est une fonction paire. Que peut-on en déduire sur les coefficients γ_n du développement en série entière de g ?

Dans toute la suite de cette partie, on admet que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n z^n$ admet un rayon de convergence égal à 2π. Ainsi

$$\forall z \in \mathrm{D}(0, 2\pi),\ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$$

12 Expliciter γ_0, γ_1, γ_2 et γ_3. On pourra utiliser un développement limité de g.

13 Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!} = 0$$

14 Justifier que, pour tout entier naturel n, γ_n est un nombre rationnel.

III Expression des nombres de Bernoulli

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = 1 - e^t$.

15 Expliciter un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, centré en 0 tel que

$$\forall t \in \mathrm{I},\ |e^t - 1| < 1$$

16 Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1. On note $\mathrm{S}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Montrer que $\mathrm{S} \circ h$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

17 Démontrer que pour tout $t \in \mathrm{I}$, $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^k}{k+1}$. On justifiera la convergence de cette série.

$\boxed{18}$ **18.a** Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de h^k en 0 et en déduire que $(h^k)^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier naturel $n < k$.

18.b De manière plus générale, montrer que pour toute fonction H de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et tous entiers naturels n, k tels que $k > n$, $(\mathrm{H}h^k)^{(n)}(0) = 0$.

18.c En déduire que

$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(h^k)^{(n)}(0)}{k+1}$$

On pourra décomposer $g(t)$ pour $t \in \mathrm{I}$ sous la forme

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1}\mathrm{H}(t)$$

avec H une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

$\boxed{19}$ **19.a** Démontrer que pour tous entiers naturels n et k

$$(h^k)^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^n$$

19.b Quelle expression de γ_n peut-on en déduire pour tout entier naturel n ?