Devoir surveillé n°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 Remarquons que deux endomorphismes semblables ont même trace. En effet, pour $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, on a par propriété de la trace

$$\operatorname{tr}(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}) = \operatorname{tr}(\varphi^{-1} \circ \varphi \circ u) = \operatorname{tr}(u)$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifiant **(C3)**. Par linéarité de la trace, $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(-u) = -\operatorname{tr}(u)$ i.e. $\operatorname{tr}(u) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } u \text{ vérifie } \textbf{(C3)} \text{ alors } \operatorname{tr}(u) = 0}$$

2 E étant de dimension 2, $\chi_u = \mathrm{X}^2 - \operatorname{tr}(u)\mathrm{X} + \det(u) = \mathrm{X}^2 - \delta^2$. Ce polynôme annulant u (Cayley-Hamilton) on en déduit que $u^2 = \delta^2 \operatorname{Id}_{\mathrm{E}}$.
Le spectre est l'ensemble des racines de χ_u et vaut ici $\{\delta, -\delta\}$. Ainsi u possède deux valeurs propres Or $\dim \mathrm{E} = 2$ et les sous-espaces propres de u sont en somme directe, ils ne peuvent qu'être de dimension 1.

$$\boxed{u^2 = \delta^2 \operatorname{Id}_{\mathrm{E}},\ \operatorname{Sp}(u) = \{\delta, -\delta\},\ \dim(\mathrm{E}_{\delta}(u)) = \dim(\mathrm{E}_{-\delta}(u)) = 1}$$

3 Notons e_+ un vecteur propre pour δ et e_- un vecteur propre pour $-\delta$. Comme (e_+, e_-) est libre, $e_+ + e_- \neq 0_{\mathrm{E}}$. Ainsi $\mathrm{D} = \operatorname{vect}(e_+ + e_-)$ est une droite. De plus, $u(\mathrm{D}) = \operatorname{vect}(\delta e_+ - \delta e_-) = \operatorname{vect}(e_+ - e_-)$ car $\delta \neq 0$. Or (e_+, e_-) est libre, ce qui permet de prouver aisément que $e_+ - e_- \notin \mathrm{D}$. Ainsi $u(\mathrm{D}) \not\subset \mathrm{D}$.
Posons $\mathrm{F} = \mathrm{D} = \operatorname{vect}(e_+ + e_-)$ et $\mathrm{G} = u(\mathrm{D}) = \operatorname{vect}(e_+ - e_-)$. La liberté de (e_+, e_-) permet aisémennt de montrer la liberté de $(e_+ + e_-, e_+ - e_-)$. Comme $\dim \mathrm{E} = 2$, $(e_+ + e_-, e_+ - e_-)$ est une base de E de sorte que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
Enfin, $u(\mathrm{F}) = \mathrm{G}$ et $u(\mathrm{G}) = \mathrm{F}$.

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

4 Un calcul par blocs montre que

$$\begin{bmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix} = 0_{n+p}$$

On montre de même que

$$\begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix} = 0_{n+p}$$

$$\boxed{\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix} \text{ est somme de deux matrices de carré nul}}$$

5 On vérifie par un calcul par blocs, par exemple, que $\mathrm{D}^2 = \mathrm{I}_n$. D est donc inversible et $\mathrm{D}^{-1} = \mathrm{D}$. Le calcul par blocs donne aussi

$$\mathrm{DMD}^{-1} = \mathrm{DMD} = \begin{bmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ -\mathrm{A} & 0_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -\mathrm{I}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & -\mathrm{B} \\ -\mathrm{A} & 0_p \end{bmatrix} = -\mathrm{M}$$

Par définition de la similitude,

$$\boxed{\mathrm{M} \text{ et } -\mathrm{M} \text{ sont semblables}}$$

6 $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ indique qu'il y a un bloc de 0 en haut à gauche.
$u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$ indique qu'il y a un bloc de 0 en bas à droite.
Finalement,

$$\boxed{\text{il existe } (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \text{ tel que } \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{bmatrix}}$$

7 Supposons F et G non nuls. D'après la question précédente, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{bmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{bmatrix}$. En notant a et b les endomorphismes dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement $\begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ \mathrm{A} & 0_p \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0_n & \mathrm{B} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}$, on a bien $u = a+b$, $a^2 = b^2 = 0$: u vérifie **(C2)**. La question **5** montre de même que u et $-u$ sont semblables : u vérifie **(C3)**.
Si F est nul, alors $\mathrm{G} = \mathrm{E}$ et $\mathrm{Im}(u) = u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F} = \{0\}$. u est l'endomorphisme nul qui vérifie immédiatement **(C2)** et **(C3)**.
C'est la même chose si $\mathrm{G} = \{0\}$ (travailler alors avec $\mathrm{F} = \mathrm{E}$).

$$\boxed{u \text{ vérifie } \textbf{(C2)} \text{ et } \textbf{(C3)}}$$

8 Puisque $f^2 = 0$, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par conséquent, $\dim \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 2\dim(\mathrm{Ker}(f))$$

On a donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq \frac{\dim(\mathrm{E})}{2}}$$

9 Soit $x \in \mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Ker}(b)$. On a $u(x) = a(x) + b(x) = 0$ et comme u est injective $x = 0$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Ker}(b)$ sont en somme directe.
De plus,

$$\forall x \in \mathrm{E},\ x = u(u^{-1}(x)) = a(u^{-1}(x)) + b(u^{-1}(x)) \in \mathrm{Ker}(a) + \mathrm{Ker}(b)$$

car $a^2 = b^2 = 0$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b)}$$

De plus $\mathrm{Im}(a) \subset \mathrm{Ker}(a)$ (car $a^2 = 0$) et $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Ker}(b)$ (car $b^2 = 0$). Ainsi $\mathrm{Im}(a) \cap \mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Ker}(b) = \{0_\mathrm{E}\}$. $\mathrm{Im}(a)$ et $\mathrm{Im}(b)$ sont en somme directe.
De plus,

$$\forall x \in \mathrm{E},\ x = u(u^{-1}(x)) = a(u^{-1}(x)) + b(u^{-1}(x)) \in \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b)$$

donc $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Im}(b)$.
Ainsi

$$\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Im}(a) + \dim \mathrm{Im}(b) = \dim \mathrm{Ker}(a) + \dim \mathrm{Ker}(b)$$

d'ou

$$(\dim \mathrm{Ker}(a) - \dim \mathrm{Im}(a)) + (\dim \mathrm{Ker}(a) - \dim \mathrm{Im}(a)) = 0$$

Comme $\mathrm{Im}(a) \subset \mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Ker}(b)$, il s'agit d'une somme de deux termes positifs. On en déduit que ces termes sont nuls. Ainsi $\dim \mathrm{Im}(a) = \dim \mathrm{Ker}(a)$ et $\dim \mathrm{Im}(b) = \dim \mathrm{Ker}(b)$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Ker}(a) \text{ et } \mathrm{Im}(b) = \mathrm{Ker}(b)}$$

10 On a $u(\mathrm{Ker}(a)) \subset a(\mathrm{Ker}(a)) + b(\mathrm{Ker}(a)) = b(\mathrm{Ker}(a)) \subset \mathrm{Im}(b) = \mathrm{Ker}(b)$ et de même $u(\mathrm{Ker}(b)) \subset \mathrm{Ker}(a)$. Comme $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Ker}(b)$ sont supplémentaires,

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

11 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(v^k) \subset \mathrm{Ker}(v \circ v^k) = \mathrm{Ker}(v^{k+1})$ donc

$$\boxed{(\mathrm{Ker}(v^k))_{k \in \mathbb{N}} \text{ croît pour l'inclusion}}$$

12 L'ensemble $\{\dim \operatorname{Ker}(v^k),\ k \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par $\dim E$. Elle admet donc un plus grand élément d. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ker}(v^p) = d$. Pour $k \geq p$, $\operatorname{Ker}(v^p) \subset \operatorname{Ker}(v^k)$. Ainsi $d = \dim \operatorname{Ker}(v^p) \leq \dim \operatorname{Ker}(v^k)$. Mais par définition de d, $\dim \operatorname{Ker}(v^k) \leq d$ de sorte que $\dim \operatorname{Ker}(v^k) = \dim \operatorname{Ker}(v^p) = d$ puis $\operatorname{Ker}(v^k) = \operatorname{Ker}(v^d)$ puisque $\operatorname{Ker}(v^p) \subset \operatorname{Ker}(v^k)$.
clure que

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{N},\ \forall k \geq p,\ \operatorname{Ker}(v^k) = \operatorname{Ker}(v^p)}$$

Mais pour $k < p$, $\operatorname{Ker}(v^k) \subset \operatorname{Ker}(v^p)$ par croissance de la suite $(\operatorname{Ker}(v^k))$. Finalement,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(v^p) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(v^k)}$$

Si p convient, tout entier plus grand que p convient aussi et on peut supposer p pair quitte à le changer en $p+1$.

13 Par définition,

$$\operatorname{Ker}(v^{2p}) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(v^k) = \operatorname{Ker} v^p$$

De plus, par croissance de la suite $(\operatorname{Ker}(v^k))_{k\in\mathbb{N}}$, $\operatorname{Ker}(v^p) \subset \operatorname{Ker}(v^{2p})$. Ainsi

$$E_\lambda^c(f) = \operatorname{Ker}(v^p) = \operatorname{Ker}(v^{2p})$$

Soit $x \in E_\lambda^c(f) \cap \operatorname{Im}(v^p)$. Il existe y tel que $x = v^p(y)$ et $v^{2p}(y) = v^p(x) = 0$ montre que $y \in \operatorname{Ker}(v^{2p}) = \operatorname{Ker}(v^p)$ et donc que $x = v^p(y) = 0$. On a donc $E_\lambda^c(f) \cap \operatorname{Im}(v^p) = \{0_E\}$.
Par théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker}(v^p) + \dim \operatorname{Im}(v^p) = \dim E$$

Ainsi

$$E = \operatorname{Ker}(v^p) \oplus \operatorname{Im}(v^p) = E_\lambda^c(f) \oplus \operatorname{Im}(v^p)$$

Enfin, $v^p = (f - \lambda \operatorname{Id}_E)^p$ et f appartiennent à l'algèbre commutative $\mathbb{K}[f]$. Comme $v^p = (f - \lambda \operatorname{Id}_E)^p$ et f commutent, $\operatorname{Ker}(v^p) = E_\lambda^c(f)$ et $\operatorname{Im}(v^p)$ sont stables par f.

$$\boxed{E_\lambda^c(f) \text{ et } \operatorname{Im}(v^p) \text{ sont des supplémentaires de E stables par } f.}$$

14 Supposons, par l'absurde, que λ soit valeur propre de $f_{|\operatorname{Im}(v^p)}$. Il existe alors $x \in \operatorname{Im}(v^p)$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$ c'est à dire tel que $x \in \operatorname{Ker}(v) \subset E_\lambda^c(f)$. Comme $E_\lambda^c(f)$ et $\operatorname{Im}(v^p)$ sont en somme directe, $x = 0$ et ceci est contradictoire. Ainsi λ n'est pas valeur propre de $f_{|\operatorname{Im}(v^p)}$.
$(X-\lambda)^p$ annule $f_{|E_\lambda^c(f)}$ car $E_\lambda^c(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^p$. La seule valeur propre possible pour $f_{|E_\lambda^c(f)}$ est donc λ.

$$\boxed{\lambda \notin \operatorname{Sp}(f_{|\operatorname{Im}(v^p)}) \text{ et } \operatorname{Sp}(f_{|E_\lambda^c(f)}) \subset \{\lambda\}}$$

Si $E_\lambda^c(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, alors $f_{|E_\lambda^c(f)}$ possède au moins une valeur propre car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$. Ainsi $\operatorname{Sp}(f_{|E_\lambda^c(f)}) = \{\lambda\}$.

15 On sait qu'il existe deux entiers p et q tels que $E_\lambda^c(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^p$ et $E_\mu^c(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^q$. Comme $\lambda \neq \mu$, $(X-\lambda)^p$ et $(X-\mu)^q$ sont premiers entre eux et le lemme des noyaux nous dit alors que $E_\lambda^c(f)$ et $E_\mu^c(f)$ sont en somme directe.
Les seules valeurs propres possibles de f sont λ et μ. Comme χ_f est scindé dans $\mathbb{C}$, il existe des entiers q et r tels que

$$\chi_f = (X-\lambda)^r (X-\mu)^s$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$E = \operatorname{Ker} \chi(f)$$

Comme $(X-\lambda)^r$ et $(X-\mu)^s$ sont premiers entre eux, le lemme des noyaux donne

$$E = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^q \oplus \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E)^r$$

Comme $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^q \subset E_\lambda^c(f)$ et $\operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E)^r \subset E_\mu^c(f)$ par définition, on obtient

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{E}^c_\lambda(f) \oplus \mathrm{E}^c_\mu(f)}$$

16 Tout d'abord,

$$u^2 = a^2 + a \circ b + b \circ a + b^2 = a \circ b + b \circ a$$

Ainsi

$$u^2 \circ a = a^2 \circ b + a \circ b \circ a = a \circ b \circ a$$

et

$$a \circ u^2 = a \circ b \circ a + b \circ a^2 = a \circ b \circ a$$

de sorte que

$$\boxed{a \circ u^2 = u^2 \circ a}$$

On montre de la même manière que

$$\boxed{b \circ u^2 = u^2 \circ b}$$

17 Comme a commute avec u^2, il commute avec toutes les itérées de u^2 et donc avec u^p puisque p est pair. On en déduit que $\mathrm{G} = \mathrm{Im}(u^p)$ est stable par a. On montre de même que G est stable par b.
Comme $a^2 = b^2 = 0$, on en déduit que

$$\boxed{a_{\mathrm{G}}^2 = b_{\mathrm{G}}^2 = 0}$$

18 Notons $\mathrm{F} = \mathrm{E}^c_0(u)$. F et G sont stables par u.
D'après la question **14**, 0 est la seule valeur propre de l'endomorphisme u_{F} de F induit par u donc u_{F} est nilpotent.
Toujours d'après la question **14**, 0 n'est pas valeur propre l'endomorphisme u_{G} de G induit par u donc u_{G} est inversible.
D'après le résultat admis, il existe une décomposition $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2$ telle que $u(\mathrm{F}_1) \subset \mathrm{F}_2$ et $u(\mathrm{F}_2) \subset \mathrm{F}_1$.
Avec la question précédente, u_{G} vérifie **(C2)** et comme c'est un automorphisme, la troisième partie s'applique. Il existe une décomposition $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \oplus \mathrm{G}_2$ telle que $u(\mathrm{G}_1) \subset \mathrm{G}_2$ et $u(\mathrm{G}_2) \subset \mathrm{G}_1$.
Comme F et G sont en somme directe, on montre aisément que F_1 et G_1 sont en somme directe de même que F_2 et G_2. En posant $\mathrm{H}_1 = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{G}_1$ et $\mathrm{H}_2 = \mathrm{F}_2 \oplus \mathrm{G}_2$, on a bien

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = (\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2) \oplus (\mathrm{G}_1 \oplus \mathrm{G}_2) = (\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{G}_1) \oplus (\mathrm{F}_2 \oplus \mathrm{G}_2) = \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2$$

et

$$u(\mathrm{H}_1) = u(\mathrm{F}_1) + u(\mathrm{G}_1) \subset \mathrm{F}_2 + \mathrm{G}_2 = \mathrm{H}_2 \qquad \text{et} \qquad u(\mathrm{H}_2) = u(\mathrm{F}_2) + u(\mathrm{G}_2) \subset \mathrm{F}_1 + \mathrm{G}_1 = \mathrm{H}_1$$

$$\boxed{u \text{ est échangeur}}$$

19 Puisque $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$, on a également $-u \circ \varphi = \varphi \circ u$. On en déduit que

$$\varphi^2 \circ u = \varphi \circ (\varphi \circ u) = -\varphi \circ u \circ \varphi = -(\varphi \circ u) \circ \varphi = u \circ \varphi^2$$

$$\boxed{\varphi^2 \circ u = u \circ \varphi^2}$$

20 Comme E est $\mathbb{C}$-espace vectoriel, φ^2 possède une valeur propre λ. La question **13** donne $\mathrm{E} = \mathrm{E}^c_\lambda(\varphi^2) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$ où $v = \varphi^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ et $\mathrm{E}^c_\lambda(\varphi^2) = \mathrm{Ker}\, v^p$ pour un bon entier p.
Notons $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(v^p)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Im}(v^p)$. F et G sont stables par φ puisque φ commute avec v^p. Comme u commute avec φ^2 et donc avec v^p, ils sont également stables par u.
Comme F et G sont stables par φ et u, on vérifie aisément que les endomorphismes u_{F} et u_{G} induits par u vérifient encore la condition **(C3)**.
L'indécomposabilité de u indique alors que F ou G est nul. Comme λ est valeur propre de φ^2, F n'est pas nul donc $\mathrm{G} = \mathrm{Im}\, v^p$ l'est. On en déduit que $(\mathrm{X} - \lambda)^p$ est un polynôme annulateur de φ^2 puis que λ est l'unique valeur propre de φ^2. Comme φ est inversible, φ^2 l'est également et $\lambda \neq 0$.
Soit α une racine carrée (complexe) de λ. Puisque $\lambda \neq 0$, $\alpha \neq 0$. De plus, $(\mathrm{X}^2 - \lambda)^p = (\mathrm{X} - \alpha)^p(\mathrm{X} + \alpha)^p$ annule φ donc $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-\alpha, \alpha\}$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{\alpha, -\alpha\} \text{ avec } \alpha^2 = \lambda \neq 0 \text{ unique valeur propre de } \varphi^2}$$

21 Comme $\alpha \neq -\alpha$ et $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-\alpha, \alpha\}$, on peut appliquer la question **15** et obtenir

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}^c_\alpha(\varphi) \oplus \mathrm{E}^c_{-\alpha}(\varphi)$$

Montrons ensuite que $u(\mathrm{E}^c_\alpha(\varphi)) \subset \mathrm{E}^c_{-\alpha}(\varphi)$ et $u(\mathrm{E}^c_{-\alpha}(\varphi)) \subset \mathrm{E}^c_\alpha(\varphi)$.
Notons que l'hypothèse **(C3)** donne $u \circ \varphi = -\varphi \circ u$ puis

$$u \circ (\varphi - \alpha \,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = -(\varphi + \alpha \,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \circ u$$

On montre alors aisément par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u \circ (\varphi - \alpha \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^k = (-1)^k (\varphi + \alpha \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^k \circ u$$

On sait qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{E}^c_\alpha(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^p$. La relation précédente appliquée à $k = p$ donne $u(\mathrm{E}^c_\alpha(\varphi)) \subset \mathrm{E}^c_{-\alpha}(\varphi)$. De même, en appliquant la relation précédente à $k = q$ où $\mathrm{E}^c_{-\alpha}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi + \alpha \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^q$, on obtient $u(\mathrm{E}^c_{-\alpha}(\varphi)) \subset \mathrm{E}^c_\alpha(\varphi)$.

$\boxed{u \text{ est échangeur}}$

22 On procède par récurrence sur la dimension de l'espace.
Initialisation. On suppose que u est un endomorphisme d'un espace E de dimension 1 qui vérifie **(C3)**. Comme $\dim \mathrm{E} = 1$, l'algèbre $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est commutative et la condition **(C3)** donne $u = 0$. On peut alors condidérer la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{E} \oplus \{0_\mathrm{E}\}$ pour en conclure que u est échangeur.
Hérédité : supposons le résultat vrai jusqu'au rang n. Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension $n+1$ et qui vérifie **(C3)**. Si u est indécomposable, il est échangeur avec ce qui précède.
Sinon, il existe une décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ avec F et G non nuls stables par u et tels que u_F et u_G vérifient **(C3)**. L'hypothèse de récurrence s'applique à u_F et u_G et permet de décomposer F et G. Comme en question **18**, on en déduit une décomposition de E qui montre que u est échangeur.

$\boxed{\textbf{(C3)} \text{ implique } \textbf{(C1)}}$