Semaine du 15/01

1 Cours

Endomorphismes d'un espace euclidien

Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien Théorème de Riesz : représentation des formes linéaires d'un espace euclidien. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Propriétés de l'adjonction : linéarité, adjoint d'une composée, involutivité. Si u est un endomorphisme d'un espace euclidien de base **orthornomée** $\mathcal{B}$, alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)^{\top}$. Si F est un sous-espace stable par un endomorphisme u, alors $\mathrm{F}^{\perp}$ est stable par u^*.

Matrices orthogonales Une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $\mathrm{M}^{\top}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$. Une matrice est orthogonale si et seulement si la famille de ses lignes ou de ses colonnes est orthonormée pour le produit canonique. Groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Matrices orthogonales positives et négatives. Groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Isométries vectorielles Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations des isométries parmi les endomorphismes d'un espace euclidien : conservation du produit scalaire, l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée est une base orthonormée, l'adjoint est égal à l'inverse. Groupe orthogonal O(E). Isométries vectorielles directes et indirectes. Groupe spécial orthogonal SO(E).

2 Méthodes à maîtriser

- Connaître les différentes caractérisations des isométries vectorielles : adjoint, conservation du produit scalaire, conservation de la norme, conservation du caracère orthonormé des bases.
- Déterminer l'adjoint d'un endomorphisme en utilisant la définition.
- Utiliser le lien entre adjonction et transposition.
- Utiliser de préférence des bases orthonormées par défaut.
- Calculer la matrice d'un projecteur orthogonal ou d'une symétrie orthogonale.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 63, 78

Compacité du groupe orthogonal Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Retour sur l'interro n°08 Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que l'application $\varphi : x \in \mathrm{E} \mapsto \|f(x)\|$ admet un maximum sur $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E},\ \|x\| \leq 1\}$.

Retour sur l'interro n°08 On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel. On considère le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur le plan F d'équation $x + y + z = 0$. Calculer la matrice M de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.