Devoir surveillé n°14

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – Mines-Ponts Maths2 MP 2013 – Quelques propriétés géométriques du groupe orthogonal

Notations et définitions

Soit E un espace vectoriel euclidien (préhilbertien réel de dimension finie). On note $\langle , \rangle$ le produit scalaire de E et $\| \|$ la norme euclidienne associée. Si H est une partie de E , on appelle enveloppe convexe de H, notée conv(H), la plus petite partie convexe de E contenant H, c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes de E contenant H.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A^\top$ la matrice transposée de A et tr(A) la trace de A. On rappelle que le groupe orthogonal $O_n(R)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $UU^\top = I$. On rappelle également qu'une matrice symétrique réelle est dite positive si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On pourra identifier $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on suppose muni du produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée. On note $\| \|_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|_2 = \sum_{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|=1} \|AX\|$$

Les parties A., B., C. et D. sont indépendantes.

A. Produit scalaire de matrices

On rappelle que tr(A) désigne la trace de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Montrer que pour toute base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a la formule $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, e_i \rangle$.

2 Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noté $\langle , \rangle$.

On note $\| \|_1$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. *L'attention du candidat est attirée sur le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est désormais muni de deux normes différentes $\| \|_1$ et $\| \|_2$.*

3 Si A et B sont symétriques réelles positives, montrer que $\langle A, B \rangle \geq 0$. On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de B.

B. Décomposition polaire

Soit f un endomorphisme de E. On note A la matrice de f dans une base orthonormée de E , et on note f^* l'adjoint de f.

4 Montrer que $A^\top A$ est une matrice symétrique réelle positive. Exprimer $\|A\|_2$ en fonction des valeurs propres de $A^\top A$.

5 Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint positif h de E tel que $f^* \circ f = h^2$.

6 Montrer que la restriction de h à $\operatorname{Im} h$ induit un automorphisme de $\operatorname{Im} h$. On notera cet automorphisme $\tilde{h}$.

7 Montrer que $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\operatorname{Ker} h$ et $(\operatorname{Im} f)^\perp$ ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme v de $\operatorname{Ker} h$ sur $(\operatorname{Im} f)^\perp$ qui conserve la norme.

8 À l'aide de $\tilde{h}$ et v, construire un automorphisme orthogonal u de E tel que $f = u \circ h$.

9 En déduire que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive.
On admet que si A est inversible, cette écriture est unique.

C. Projeté sur un convexe compact

Soit H une partie de E, convexe et compacte, et soit $x \in E$. On note

$$d(x, H) = \inf_{h \in H} \|x - h\|$$

10 Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$. On pourra utiliser pour h_0, h_1 dans H la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par la formule $q(t) = \|x - th_0 - (1-t)h1\|^2$.

11 Montrer que h_0 est caractérisé par la condition $\langle x - h_0, h - h_0 \rangle \leq 0$ pour tout $h \in H$. On pourra utiliser la même fonction q qu'à la question précédente.

Le vecteur h_0 s'appelle projeté de x sur H.

D. Théorème de Carathéodory et compacité

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension n. On dit que $x \in E$ est une combinaison convexe des p éléments $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

12 Montrer que l'enveloppe convexe $\operatorname{conv}(H)$ d'une partie H de E est constituée des combinaisons convexes d'éléments de H.

On souhaite montrer que l'enveloppe convexe $\operatorname{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.
Soit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, x_2, \dots, x_p \in H$ avec $p \geq n+2$.

13 Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0$$

On pourra considérer la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_p - x_1)$.

14 En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H et conclure que conv(H) est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.
On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta\mu_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.

15 Si H est une partie compacte de E, montrer que conv(H) est compacte. On pourra introduire l'ensemble compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\Lambda = \left\{ (t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall i \in \{1, \dots, n+1\}, t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\}$$

E. Enveloppe convexe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

16 Montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$ est compacte.

On note $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \| \|_2)$.

17 Montrer que $\mathrm{conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$ est contenue dans $\mathcal{B}$.

On suppose qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{B}$ telle que M n'appartient pas à $\mathrm{conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$. On note N le projeté de M sur $\mathrm{conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$ défini à la partie C. pour la norme $\| \|_1$, et on pose $\mathrm{A} = (\mathrm{M} - \mathrm{N})^{\top}$. On écrit enfin $\mathrm{A} = \mathrm{US}$, avec $\mathrm{U} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et S symétrique réelle positive (question **9**).

18 Montrer que pour tout $\mathrm{V} \in \mathrm{conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$, $\mathrm{tr}(\mathrm{AV}) \leq \mathrm{tr}(\mathrm{AN}) < \mathrm{tr}(\mathrm{AM})$. En déduire que $\mathrm{tr}(\mathrm{S}) < \mathrm{tr}(\mathrm{USM})$.

19 Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{MUS}) \leq \mathrm{tr}(\mathrm{S})$. On pourra appliquer le résultat de la question **1**.

20 Conclure : déterminer $\mathrm{conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$.

F. Points extrémaux

Un élément $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ est dit extrémal dans $\mathcal{B}$ si l'écriture $\mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{B} + \mathrm{C})$, avec B, C appartenant à $\mathcal{B}$ entraîne $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C}$. Dans cette partie, on cherche à déterminer l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$.

21 On suppose que $\mathrm{U} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $\mathrm{U} = \frac{1}{2}(\mathrm{V} + \mathrm{W})$, avec V, W appartenant à $\mathcal{B}$. Montrer que pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$, les vecteurs VX et WX sont liés. En déduire que U est extrémal dans $\mathcal{B}$. Soit A appartenant à $\mathcal{B}$ mais n'appartenant pas à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

22 Montrer que l'on peut écrire A sous la forme $\mathrm{A} = \mathrm{PDQ}$, où P et Q sont deux matrices orthogonales et où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux $d_1, d_2, \dots, d_n$ sont positifs ou nuls.

23 Montrer que $d_i \leq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, et qu'il existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $d_j < 1$.

24 En déduire qu'il existe deux matrices A_α et $\mathrm{A}_{-\alpha}$ appartenant à $\mathcal{B}$ telles que $\mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{A}_\alpha + \mathrm{A}_{-\alpha})$. Conclure.