# Polynômes annulateurs

**Exercice 1 ★★** **CCP PSI 2015**

L'endomorphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est-il diagonalisable ?

**Exercice 2 ★★** **CCP MP 2018**

Soient $x$ un nombre réel et $E_x$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M + xI_n = 0$.

1. Si $x \neq 0$, montrer qu'une matrice $M \in E_x$ est inversible et exprimer son inverse. Quelles sont les matrices inversibles appartenant à $E_0$ ?
2. Pour quelles valeurs de $x$ tous les éléments de $E_x$ sont ils diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?
3. Déterminer l'ensemble T des traces des éléments de $E_{-2}$. Quel est son cardinal ?

**Exercice 3 ★★** **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + 2M^\top \end{array} \right.$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f$.
3. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?
4. Calculer $\mathrm{tr}(f)$ et $\det(f)$.

**Exercice 4** **CCP MP 2022**

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2$ ainsi que $\lambda$ et $\mu$ deux complexes distincts et non nuls tels que

$$I_p = A + B$$
$$M = \lambda A + \mu B$$
$$M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$$

1. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.
2. Exprimer A en fonction de M et $I_p$.
3. Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.
4. M est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

**Exercice 5 ★★★**

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $u$ et $v$ diagonalisent dans une base commune.

**Exercice 6 ★**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si A est diagonalisable, alors $A^\top$ l'est aussi.

**Exercice 7 ★★★★** **Banque Mines-Ponts MP 2022**

Soit E un espace vectoriel de dimension $n$. Un endomorphisme $f$ de E est dit *cyclique* s'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

1. On supose dans cette qustion que $n = 3$ et on considère un endomorphisme $g$ de E dont la matrice dans une base de E est $\mathrm{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Montrer que $g$ est cyclique et diagonalisable.
2. Un endomorphisme $f$ cyclique est-il toujours diagonalisable ?
3. Soit $f$ un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres distinctes deux à deux. Est-il cyclique ?
4. Soit $f$ un endomorphisme diagonalisable et cyclique. Ses valeurs propres sont-elles distinctes deux à deux ?

**Exercice 8 ★★★**

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes trigonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $u$ et $v$ trigonalisent dans une base commune.

**Exercice 9 ★★★★** **Mines-Ponts MP 2015**

On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversible et dont l'inverse appartient aussi à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.
2. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{G}$, $\mathrm{M}^{12} = \mathrm{I}_2$.

**Exercice 10 ★★** **CCINP (ou CCP) MP 2019**

Soit $n \geqslant 2$ entier. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{A} \neq \pm \mathrm{I}_n$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) \equiv n[2]$.
2. Montrer que $|\mathrm{tr}(\mathrm{A})| \leq n - 2$.

**Exercice 11** **Centrale-Supélec MP 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ (\mathrm{M}, \mathrm{M}^{-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2\}$$

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det \mathrm{M}| = 1$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que $\mathrm{M}^d = \mathrm{I}_n$. On pose $\mathrm{A} = \frac{1}{3}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_n)$. Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{A}^k)_{k \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer qu'il existe un entier $\mathrm{K}_n$ majorant le cardinal des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

**Exercice 12 ★★** **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Soit l'endomorphisme

$$u : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} + \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n \end{array} \right.$$

Déterminer les valeurs propres de $u$, ainsi que les espaces propres associés.

**Exercice 13** **X MP 2010**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{I}_n$ si et seulement si il existe $\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{S}\overline{\mathrm{S}}^{-1}$.

**Exercice 14 ★★★**

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes trigonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $u$ et $v$ trigonalisent dans une base commune.

**Exercice 15**

1. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que
$$A^2 - 3A + 2I_2 = 0$$
2. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que
$$A^3 - 8A^2 + 21A - 18I_2 = 0$$

**Exercice 16 ★** **TPE MP 2010**

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^3 - M^2 - M - 2I_n = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

**Exercice 17 ★★**

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^5 = M^2$ et $\mathrm{tr}(M) = n$.

**Exercice 18**

Soient $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire annulateur de $u$. La décomposition de P en facteurs irréductibles unitaires s'écrit $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $N_i = \mathrm{Ker}\, P_i(u)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par $u$. Montrer que $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F \cap N_i$.

**Exercice 19** **TPE-EIVP PSI 2017**

Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = A + B$, $C^2 = 2A + 3B$, $C^3 = 5A + 6B$. A et B sont-elles diagonalisables ?

**Exercice 20 ★★★**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

**Exercice 21 ★★**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

**Exercice 22 ★★★**

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$,
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X + k) = 0$$

**Exercice 23** ★★ **E3A MP 2019**

Soient $n$ un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $\mathrm{E}_n=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice identité de $\mathrm{E}_n$ sera notée $\mathrm{I}_n$.
Pour $\mathrm{A}\in\mathrm{E}_n$ et $j\in[\![1,n]\!]$, on note $\mathrm{A}_j$ la $j$-ème colonne de la matrice A.
Soit $u$ l'application qui à toute matrice A de $\mathrm{E}_n$ associe la matrice B dont les colonnes $\mathrm{B}_j$ sont

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ \mathrm{B}_j=\mathrm{S}-\mathrm{A}_j=\sum_{k=1,k\neq j}^{n}\mathrm{A}_k \text{ où } \mathrm{S}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_k$$

**1.** Dans cette question, $n=2$ et $\mathrm{E}_2$ est muni de la base $\mathcal{B}=(\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_2,\mathrm{K}_3,\mathrm{K}_4)$ où

$$\mathrm{K}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad \mathrm{K}_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\qquad \mathrm{K}_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad \mathrm{K}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

**a.** Vérifier que $u$ est un endomorphisme de $\mathrm{E}_2$.

**b.** Déterminer la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que $u$ est un automorphisme de $\mathrm{E}_2$.

**c.** Reconnaître la nature géométrique de l'automorphisme $u$ en précisant ses éléments caractéristiques.

**2.** Exprimer $\det(u(\mathrm{A}))$ en fonction de $\det(\mathrm{A})$ dans les case $n=2$ et $n=3$.

**On revient au cas général** et on admettra que $u$ est un endomorphisme de $\mathrm{E}_n$.

**3.** Montrer à l'aide d'opérations sur les colonnes et en utilisant S que l'on a

$$\det(u(\mathrm{A}))=(-1)^{n-1}(n-1)\det(\mathrm{A})$$

**4.** **a.** Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de l'endomorphisme $u$.

**b.** En déduire les éléments propres de l'endomorphisme $u$. Est-il diagonalisable ?

**5.** Soinet $\mathrm{J}_n$ la matrice de $\mathrm{E}_n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $\mathrm{U}_n=\mathrm{J}_n-\mathrm{I}_n$.

**a.** Déterminer les colonnes du produit matriciel $\mathrm{AU}_n$ à l'aide de celles de A.

**b.** Retrouver alors le résultat de la question **4.a**.

**Exercice 24** **Mines Télécom MP 2022**

Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

**1.** A est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres complexes et déterminer une matrice D diagonable semblable à A.

**2.** Soit $\mathrm{M}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\mathrm{M}^3+\mathrm{M}=0$. Montrer que M est semblable à D.

**3.** A et M sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ? $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ?

## Polynôme minimal

**Exercice 25** **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A}^n=\mathrm{I}_n$ et telle que la famille $(\mathrm{I}_n,\mathrm{A},\mathrm{A}^2,\dots,\mathrm{A}^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\operatorname{tr}(\mathrm{A})=0$.

**Exercice 26** **ENS MP 2011**

**1.** Soit A une matrice inversible réelle. Exprimer le polynôme minimal de $\mathrm{A}^{-1}$ en fonction de celui de A.

**2.** Soit A une matrice orthogonale réelle telle que 1 et $-1$ ne soient pas racines de son polynôme minimal. Montrer que A et $\mathrm{A}^{-1}$ ont même polynôme minimal. Montrer que le degré de ce polynôme minimal est pair.

**Exercice 27**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f,g\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que $f\circ g-g\circ f=f$.

**1.** Montrer que $f^n\circ g-g\circ f^n=nf^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**2.** En déduire que $\mathrm{P}(f)\circ g-g\circ\mathrm{P}(f)=f\circ\mathrm{P}'(f)$ pour tout $\mathrm{P}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

**3.** Montrer que $f$ est nilpotent.

**Exercice 28 ★★** **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ n & & & \end{pmatrix}$ où $n \geq 3$.

1. Quel est le rang de A ? la dimension du noyau de A ?
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?
4. Montrer qu'il existe $\lambda \in ]1, +\infty[$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1-\lambda\}$.
5. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.

**Exercice 29 ★★**

On considère un entier $n \geq 2$. Soit l'endomorphisme

$$u : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{tr}(M) I_n \end{array} \right.$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de $u$ de degré 2.
2. $u$ est-il diagonalisable ?
3. Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de $u$.

**Exercice 30 ★★** **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Donner le rang de B en fonction du rang de A.
2. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

3. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B l'est aussi, et donner ses valeurs propres.

**Exercice 31 ★★** **Matrice compagnon**

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
2. Montrer que $\pi_A = \chi_A$.
3. Déterminer les sous-espaces propres de $A^\top$.

**Exercice 32** **Endomorphismes cycliques**

Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **a.** Pour $x \in \mathrm{E}$, on note $\mathrm{I}_{u,x} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \mathrm{P}(u)(x) = 0_\mathrm{E}\}$. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{I}_{u,x}$ est un idéal de $\mathbb{K}[x]$. On note $\pi_{u,x}$ son unique générateur unitaire. Justifier que $\pi_{u,x}$ divise $\pi_u$.

   **b.** Pour $x \in \mathrm{E}$, on note $\mathrm{E}_{u,x} = \{\mathrm{P}(u)(x), \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{E}_{u,x}$ est un sous-espace vectoriel de E et que $(u^k(x))_{0 \leq k \leq \deg \pi_{u,x}-1}$ en est une base. En déduire la dimension de $\mathrm{E}_{u,x}$.

   **c.** Montrer que $\mathrm{E}_{u,x}$ est stable par $u$ et que $\pi_{u_{|\mathrm{E}_{u,x}}} = \pi_{u,x}$.

2. Soient $x_1, \dots, x_p$ tels que les polynômes $\pi_{u,x_1}, \dots, \pi_{u,x_p}$ soient deux à deux premiers entre eux. On pose $x = \sum_{i=1}^p x_i$ et $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^p \pi_{u,x_i}$.

   **a.** Montrer que $\pi_{u,x}$ divise P.

   **b.** Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{E}_{x_1}, \dots, \mathrm{E}_{x_p}$ sont en somme directe.

   **c.** En déduire que $\pi_{u,x} = \mathrm{P}$ et $\mathrm{E}_{u,x} = \bigoplus_{i=1}^p \mathrm{E}_{u,x_i}$.

3. En considérant la décomposition en facteurs irréductibles de $\pi_u$, montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

4. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

   (i) $\pi_u = \chi_u$.

   (ii) Il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{E}_{u,x} = \mathrm{E}$.

   (iii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de $u$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   On dit dans ce cas que $u$ est un endomorphisme *cyclique*.

**Exercice 33** ★

Soient un entier $n \geq 2$ et $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer le polynôme minimal de U.
2. Réduire U.

**Exercice 34** ★★ **CCINP (ou CCP) PSI 2021**

On définit : $\forall m \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A}_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$. Déterminer le polynome minimal de $\mathrm{A}_m$.

**Exercice 35** ★★★

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A admet le même polynôme minimal considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Exercice 36** ★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

On considère un entier $n \geq 2$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A}^n = \mathrm{I}_n$ et telle que la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \dots, \mathrm{A}^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0$.

**Exercice 37** **CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Énoncer le lemme de décomposition des noyaux appliqué à $f$ dans le cas de deux polynômes premiers entre eux.
2. On suppose que le polynôme minimal de $f$ est donné par $\mu_f = (\mathrm{X}^2+1)(\mathrm{X}^2+4)$. A l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls de E, $x$ et $y$, tels que : $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.
3. On suppose que E est de dimension 4. Montrer que $(x, f(x), y, f(y))$ est une base de E. Donner alors la matrice de $f$ dans cette base.

**Exercice 38** ★★ **CCINP MP 2023**

Soient un entier $n \geq 3$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$ tel que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de $f$ ?
2. Justifier que le polynôme caractéristique de $f$ peut s'écrire $\chi_f = \mathrm{X}^{n-2}\mathrm{P}$ où P est un polynôme unitaire de degré 2.
3. Calculer $f(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ ainsi que $f^2(e_n)$.
4. Déterminer $\chi_f$.
5. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ? Quel est son polynôme minimal ?

**Exercice 39** ★★

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On suppose que AB est inversible et diagonalisable. Montrer que BA est diagonalisable.

## Exponentielles

**Exercice 40**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\exp(\mathrm{A})^{\mathrm{T}} = \exp(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$.
2. On suppose A symétrique dans cette question. Montrer que $\exp(\mathrm{A})$ est également symétrique.
3. Montrer que $\det(\exp(\mathrm{A})) > 0$.
4. On suppose A antisymétrique dans cette question. Montrer que $\exp(\mathrm{A}) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 41** ★

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(\mathrm{A})$ de deux manières.

**Exercice 42** ★

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(\mathrm{A})$ de deux manières.

**Exercice 43** ★★

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ nilpotent où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Ker}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(\exp(u) - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{Im}(u)$.