

# DEVOIR SURVEILLÉ N°02

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1 – BECEAS Mathématiques pour tous 2018

On note  $[x]$  la partie entière d'un réel  $x$ . On rappelle qu'un nombre entier naturel, au moins égal à 2, est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et lui même (donc 1 n'est pas premier).

On note  $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$  l'ensemble des nombres premiers. On rappelle aussi que tout entier naturel  $n$ , au moins égal à 2, se décompose, de façon unique à l'ordre des facteurs près, comme produit de nombres premiers c'est-à-dire qu'il existe  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $(p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{P}^r$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$  tels que

$$n = \prod_{k=1}^r p_k^{\alpha_k}$$

Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels tels que  $a \leq b$ , la notation  $\sum_{\substack{a \leq p \leq b \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p$  désigne la somme des nombres  $\alpha_p$  pour tous les entiers **premiers**  $p$  de l'intervalle entier  $\llbracket a, b \rrbracket$ . On définit de la même façon  $\sum_{\substack{p \leq b \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p$ ,  $\prod_{\substack{a \leq p \leq b \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p$  etc.

Par exemple,  $\sum_{\substack{4 \leq p \leq 10 \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p = \alpha_5 + \alpha_7$  ou  $\prod_{\substack{p \leq 8 \\ p \in \mathcal{P}}} \alpha_p = \alpha_2 \times \alpha_3 \times \alpha_5 \times \alpha_7$ .

## I Préliminaires

On établit, dans cette partie, quelques résultats préliminaires, indépendants les uns des autres, qui seront utilisés par la suite.

**1** Soit  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  une fonction continue, décroissante et positive de  $[n_0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $S_n = \sum_{k=n_0}^n f(k)$ .

**1.a** Montrer que la suite  $(\gamma_n)_{n \geq n_0}$  de terme général  $\gamma_n = S_n - \int_{n_0}^n f(t) dt$  est monotone et convergente.

**1.b** En déduire l'existence d'un réel, noté  $C$ , pour lequel on a, lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$  :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1)$$

**1.c** Etablir la convergence de l'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt$  et en déduire la convergence de la série  $\sum \frac{1}{k \ln^2(k)}$ .

- 2 Montrer que la série de terme général  $\frac{\ln(k)}{k(k-1)}$  est convergente.

On note  $K = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$  sa somme.

- 3 3.a Prouver, pour tout entier naturel  $n$  au moins égal à 2, l'inégalité :

$$\sum_{k=2}^n \ln(k) \geq n \ln(n) - n + 1$$

3.b En déduire, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , l'estimation :  $\ln(n!) = n \ln(n) + O(n)$ .

- 4 4.a Soit  $\lambda$  un réel strictement positif. Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'existence et l'unicité d'un réel  $x > 0$  tel que  $x \ln(x) - \lambda x = \ln(n)$ . On note  $r_n$  cet unique réel.

4.b Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty$  puis établir l'équivalence  $r_n \sim \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ .

- 5 On note, pour toute partie  $E$  de  $\mathbb{N}^*$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E_n$  l'ensemble des éléments de  $E$  inférieurs ou égaux à  $n$ , c'est à dire que  $E_n = E \cap \llbracket 1, n \rrbracket$ , et l'on pose  $d_n(E) = \frac{1}{n} \text{card}(E_n)$ .

Si la suite  $(d_n(E))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge, on note  $d(E)$  sa limite et on dit que la partie  $E$  de  $\mathbb{N}^*$  admet une densité égale à  $d(E)$ .

5.a Montrer que les ensembles suivants possèdent une densité dont on donnera la valeur.

5.a.i Une partie finie  $F$  de  $\mathbb{N}^*$ .

5.a.ii L'ensemble  $a\mathbb{N}^* := \{ka / k \in \mathbb{N}^*\}$  des multiples non nuls de l'entier  $a \in \mathbb{N}^*$ .

5.a.iii L'ensemble  $C := \{k^2 / k \in \mathbb{N}^*\}$  des entiers non nuls qui sont des carrés.

5.b Soient  $E_1, E_2$  des parties **disjointes** de  $\mathbb{N}^*$  possédant une densité. Les parties  $\mathbb{N}^* \setminus E_1$  et  $E_1 \cup E_2$  possèdent-elles une densité ? Et si oui, que valent-elles ?

5.c L'application  $d$  est-elle une probabilité sur l'ensemble  $\mathbb{N}^*$  muni de la tribu formée de toutes ses parties ?

- 6 6.a Justifier, pour tout entier naturel  $m$  non nul, l'inégalité :  $2 \binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m+1}$ .

6.b Montrer que, pour tout entier naturel  $r$  non nul, l'entier  $\prod_{\substack{r+1 < p \leq 2r+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p$  divise l'entier  $\binom{2r+1}{r}$  (le produit s'effectuant donc sur tous les entiers **premiers** de  $\llbracket r+2, 2r+1 \rrbracket$ ).

6.c Etablir, pour tout entier  $n$  au moins égal à 2, l'inégalité  $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^n$  (le produit s'effectuant donc sur tous les entiers **premiers** au plus égaux à  $n$ ).

On raisonnera par récurrence forte et, ayant supposé l'inégalité vraie jusqu'au rang  $n$ , on examinera, en particulier, le cas où  $n+1$  est un entier premier égal à  $2r+1$ .

On en déduit ainsi l'inégalité  $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \ln(p) \leq n \ln(4)$ .

- 7 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note, pour tout nombre premier  $p$  et tout entier  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 2$ ,  $v_p(r)$  l'exposant de  $p$  dans la décomposition en nombres premiers de  $r$ , et on pose  $v_p(1) = 0$ .

Par exemple, puisque  $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ ,  $v_2(300) = 2$ ,  $v_3(300) = 1$ ,  $v_5(300) = 2$  et  $v_p(300) = 1$  pour  $p \notin \{2, 3, 5\}$ .

Soit  $p$  un nombre premier. On note, pour tout entier naturel  $k$  non nul,  $\alpha_k$  (rep.  $\beta_k$ ) le nombre d'entiers  $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $p^k$  divise  $d$  (resp. tel que  $v_p(d) = k$ ).

Bien sûr, dès que  $k$  est assez grand,  $\alpha_k = \beta_k = 0$ .

7.a Prouver, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'égalité  $\alpha_k = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ .

**7.b** Justifier l'égalité  $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\beta_k$ .

**7.c** En déduire, en reliant  $\beta_k$  aux  $\alpha_i$ , l'égalité  $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ .

**7.d** En déduire l'encadrement :  $\frac{n}{p} - 1 \leq v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1} (= \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)})$ .

**8** Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites réelles. On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .  
Prouver, pour tout entier  $n \geq 2$ , l'égalité

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_n A_n$$

**9** Soit  $(a_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  une suite positive de limite  $+\infty$  et  $(b_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  une suite bornée. Soit  $(X_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ . On suppose que, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{E}(X_N) = a_N + b_N$  et, quand  $N$  tend vers  $+\infty$ ,  $\mathbb{V}(X_N) = O(a_N)$ .

**9.a** Justifier, pour tout entier  $N$  assez grand, l'inclusion entre événements

$$\left[ |X_N - \mathbb{E}(X_N)| \leq \frac{1}{2} a_N^{2/3} \right] \subset \left[ |X_N - a_N| \leq a_N^{2/3} \right]$$

**9.b** En déduire que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}) = 0$$

## II Deux résultats asymptotiques

**10** **10.a** Etablir, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'égalité :  $\ln(n!) = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} v_p(n!) \ln(p)$ .

**10.b** En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'encadrement :

$$\frac{\ln(n!)}{n} - K \leq \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} \leq \frac{\ln(n!)}{n} + \ln(4)$$

où le réel  $K$  est défini dans la question 2.

**10.c** Conclure, quand l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$ , à l'évaluation asymptotique

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)$$

**11** On note  $\chi$  l'application qui, à chaque entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , associe 1 si  $k$  est premier (i.e.  $k \in \mathcal{P}$ ) et 0 sinon.

**11.a** En posant, pour tout entier naturel  $k$  non nul,  $a_k = \chi(k) \frac{\ln(k)}{k}$ ,  $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$ , en utilisant 8, établir, pour tout  $n \geq 2$ , l'égalité :

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k) \ln(k+1)} A_k + \frac{A_n}{\ln(n)}$$

**11.b** Etablir, quand l'entier  $k$  tend vers  $+\infty$ , l'égalité :

$$\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k) \ln(k+1)} A_k = \frac{1}{k \ln(k)} + O\left(\frac{1}{k \ln^2(k)}\right)$$

**11.c** En déduire, quand l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$ , l'égalité :

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + O(1)$$

### III

On note, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\omega(n)$  le nombre d'entiers **premiers** distincts qui divisent l'entier  $n$ . On a donc  $\omega(2^5) = 1$ ,  $\omega(2^2 \cdot 5^3) = 2$ ,  $\omega(2 \cdot 5^2 \cdot 11^5) = 3$  etc.

*L'objet de la suite du problème est le contrôle asymptotique, en un certain sens, de la suite  $(\omega(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .*

- 12** **12.a** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , dont la décomposition en nombres premiers est  $n = \prod_{k=1}^r p_k^{\alpha_k}$ .

On a donc  $\omega(n) = r$ .

Prouver l'inégalité :  $\omega(n) = r \leq \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$ .

- 12.b** A l'aide de **4**, prouver la domination :  $\omega(n) = O\left(\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}\right)$ .

*On observera que  $n \geq 2 \prod_{k=1}^{r-1} (2k+1)$  puis on prouvera, pour un réel  $\lambda$  qu'on déterminera, l'inégalité :*  
 $\ln(n) \geq (r-1) \ln(r-1) - \lambda(r-1)$ .

- 13** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On munit l'ensemble  $\llbracket 1, N \rrbracket$  de la probabilité uniforme et, pour tout  $r \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on note  $X_{N,r}$  la variable aléatoire suivante :

$$X_{N,r} : \begin{cases} \llbracket 1, N \rrbracket & \longrightarrow \mathbb{R} \\ d & \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ divise } d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

et on note  $X_N = \sum_{\substack{p \leq N \\ p \in \mathcal{P}}} X_{N,p}$  (on effectue donc la somme sur tout les entiers  $p$  **premiers** de  $\llbracket 1, N \rrbracket$ ).

On a donc, pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $X_N(n) = \omega(n)$ .

On note  $\mathbb{E}(Y)$  et  $\mathbb{V}(Y)$  l'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $Y$  sur l'espace précédent (elles dépendent, bien sûr, de l'entier  $N$ ).

- 13.a** Vérifier, pour tout  $r \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , l'égalité :  $\mathbb{E}(X_{N,r}) = \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{r} \right\rfloor$ .

- 13.b** Prouver l'égalité :  $\mathbb{E}(X_N^2) = \mathbb{E}(X_N) + \sum_{\substack{1 \leq p, q \leq N \\ (p,q) \in \mathcal{P}^2, p \neq q}} \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor$ .

- 13.c** En déduire, quand l'entier  $N$  tend vers  $+\infty$ , l'ordre de grandeur :  $\mathbb{V}(X_N) = O(\ln(\ln(N)))$ .

- 13.d** En déduire, à l'aide d'un résultat de la partie I, le résultat :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{card} \{n \in \llbracket 1, N \rrbracket, |\omega(n) - \ln(\ln(N))| > (\ln(\ln(N)))^{2/3}\} = 0$$

*Ainsi, en examinant le cas où  $N = 10^{99}$ , on peut s'attendre à ce que, «le plus souvent», un entier d'au plus 100 chiffres, possède entre 3 et 8 facteurs premiers distincts. Étonnant non ?*