

INTÉGRALES À PARAMÈTRES

\mathbb{K} désigne les corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Passage à la limite

Théorème 1.1 Convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que

- (H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;
- (H2) (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f ;
- (H3) f est continue par morceaux sur I ;
- (H4) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

Alors f est intégrable sur I et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

REMARQUE. L'intégrabilité des f_n sur I est garantie par la condition de domination.

Exemple 1.1

On pose $f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{t^n + e^t}$ et $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}$. On souhaite déterminer la limite de la suite (I_n) .

- (H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bien continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+ .
- (H2) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers la fonction

$$f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{1+e} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

- (H3) f est bien continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .
- (H4) De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, |f_n(t)| \leq e^{-t}$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - \frac{1}{e}$$

REMARQUE. Comme bien souvent, on peut en fait se passer du théorème de convergence dominée. En effet, en posant

$$J_n = \int_0^1 f_n(t) dt \qquad K_n = \int_1^{+\infty} f_n(t) dt$$

on a $I_n = J_n + K_n$. On découpe cette intégrale en deux car le comportement de t^n change selon que $t \leq 1$ ou $t \geq 1$.

On se doute alors que $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{e^t} = 1 - e^{-1}$, ce que l'on montre par le théorème des gendarmes. En effet

$$(1 - e^{-1}) - J_n = \int_0^1 \frac{dt}{e^t} - \int_0^1 \frac{dt}{t^n + e^t} = \int_0^1 \frac{t^n dt}{e^t(t^n + e^t)}$$

On en déduit que

$$0 \leq J_n - (1 - e^{-1}) \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 1 - \frac{1}{e}$.

On se doute de même que $K_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on utilise à nouveau le théorème des gendarmes : pour tout entier $n \geq 2$,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n + e^t} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{n-1}$$

On a donc bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1 - e^{-1}$.

Méthode Convergence dominée pour les séries de fonctions

On peut justifier une interversion série/intégrale en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles.

Exemple 1.2

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On souhaite montrer que

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

On remarque déjà que (série géométrique)

$$\forall t \in [0, 1[, \frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a-1+nb}$$

Posons pour $t \in [0, 1[$,

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{a-1+kb} = t^{a-1} \cdot \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)b}}{1+t^b}$$

(H1) Les fonctions S_n sont bien continues (par morceaux) sur $[0, 1[$.

(H2) La suite (S_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ sur $[0, 1[$.

(H3) f est bien continue (par morceaux) sur $[0, 1[$.

(H4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, 1[$,

$$|S_n(t)| = \left| t^{a-1} \cdot \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)b}}{1+t^b} \right| \leq 2t^{a-1}$$

et $t \mapsto 2t^{a-1}$ est intégrable sur $[0, 1[$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 S_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

ou encore

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{a-1+kb} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

Comme il s'agit de sommes **finies**, ceci peut encore s'écrire

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{a-1+kb} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a+kb} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

ce qui signifie que la série $\sum \frac{(-1)^n}{a+nb}$ converge (on le savait déjà par critère spécial des séries alternées) et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

REMARQUE. On pouvait aisément se passer du critère spécial des séries alternées. En effet

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a+kb} &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{a-1+kb} dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{a-1+kb} dt \quad (\text{somme finie}) \\
 &= \int_0^1 t^{a-1} \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)b}}{1 + t^b} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b} dt - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{a-1+(n+1)b}}{1 + t^b} dt
 \end{aligned}$$

Alors

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{a-1+(n+1)b}}{1 + t^b} dt \leq \int_0^1 t^{a-1+(n+1)b} dt = \frac{1}{a + (n+1)b}$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1+(n+1)b}}{1 + t^b} dt = 0$$

puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b} dt$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b} dt$$

Méthode Convergence dominée à intervalle « variable »

Si l'on souhaite étudier la convergence d'une suite d'intégrale $\left(\int_{I_n} f_n \right)$, on peut se ramener au cas d'application du théorème de convergence dominée en considérant un intervalle I contenant tous les I_n ainsi que les fonctions $g_n : t \in I \mapsto \begin{cases} f_n(t) & \text{si } t \in I_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 1.1

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Théorème 1.2 Convergence dominée

Soient $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} et $a \in \bar{J}$ (éventuellement $a = \pm\infty$). On suppose que :

- (H1) pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (H2) pour tout $t \in I$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = g(t)$ où g est continue par morceaux sur I ;
- (H3) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors g est intégrable sur I et

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I g(t) dt$$

Exercice 1.2

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-t}}{x+t} dt$.

Théorème 1.3 Intégration terme à terme (cas positif)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R}_+ . On suppose que

- (H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;
- (H2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **intégrable** sur I ;
- (H3) $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f ;
- (H4) f est continue par morceaux sur I ;

Alors on a cette égalité dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

Théorème 1.4 Intégration terme à terme (cas général)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que

- (H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;
- (H2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **intégrable** sur I ;
- (H3) $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f ;
- (H4) f est continue par morceaux sur I ;
- (H5) la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge.

Alors f est intégrable sur I et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

Exemple 1.3

On souhaite montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Par développement en série entière

$$\forall t \in]0, 1[, \frac{\ln(t)}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \ln(t)$$

Posons $f_n : t \in]0, 1[\mapsto (-1)^n t^n \ln(t)$. Alors

(H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$;

(H2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0, 1[$ puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_n = 0$ si $n > 0$, $f_0(t) = o(1/\sqrt{t})$ et $\lim_{t \rightarrow 1^-} f_n = 0$;

(H3) $\sum f_n$ converge simplement vers $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t}$ sur $]0, 1[$;

(H4) f est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$;

(H5) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(t)| dt = -\int_0^1 t^n \ln(t) dt = \frac{1}{(n+1)^2}$ par intégration par parties et $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge.

Par intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0, 1[$ (ce qu'on aurait pu montrer directement) et

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

2 Continuité

Théorème 2.1

Soient $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ où I est un intervalle de \mathbb{R} et A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que :

(H1) pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;

(H2) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ;

(H3) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors $F : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

REMARQUE. La dernière condition est une condition dite de **domination**.

REMARQUE. La continuité étant une notion locale, on peut remplacer la condition de domination sur A par la domination au voisinage de tout point de A . En particulier, il suffit de montrer la domination sur tout compact de A .

Si A est un intervalle de \mathbb{R} , il suffit de montrer la domination sur tout segment de A .

Exercice 2.1

Montrer que l'application $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 2.2

Montrer que l'application $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est continue sur $P = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

3 Dérivabilité

Théorème 3.1

Soient $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} . On suppose que :

- (H1) pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I ;
- (H2) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J ;
- (H3) pour tout $x \in J$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (H4) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J et

$$\forall x \in J, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

REMARQUE. La dérivabilité étant une notion locale, on peut remplacer la domination sur J par la domination sur tout segment de J .

Exercice 3.1

Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée. En déduire $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Corollaire 3.1

Soient $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} . On suppose que :

- (H1) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^k sur J ;
- (H2) pour tout $x \in J$ et pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (H3) pour tout $x \in J$ et pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- (H4) il existe une fonction positive φ **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k sur J et

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall x \in J, F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$$

REMARQUE. A nouveau, la domination sur tout segment de J suffit.

Corollaire 3.2

Soient $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} . On suppose que :

- (H1) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur J ;
- (H2) pour tout $x \in J$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (H3) pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction positive φ_k **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t)$$

Alors $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur J et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in J, F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$$

REMARQUE. A nouveau, la domination sur tout segment de J suffit.

REMARQUE. On peut aussi remplacer la dernière hypothèse de domination par l'hypothèse suivante : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

- $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout entier $k \geq n$, il existe une fonction positive φ_k **intégrable** sur I telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t)$$

Exercice 3.2

Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .