

## Convergence dominée

### Exercice 1

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

### Exercice 2 ★★

On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^x} dt$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Calculer  $f(2)$ .
3. Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 3

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout  $x \in [0, n]$ ,

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$$

En déduire la limite de  $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 4

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n f(t) e^{-nt} dt$$

### Exercice 5 ★★

CCP MP

On pose  $f_n : x \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Étudier la convergence simple de la suite  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. La suite  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , sur  $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$  où  $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ?
3. Soit  $g$  continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) g(t) dt = g(0)$$

### Exercice 6

Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) PSI 2019

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$ .

1. Pour quelles valeurs de  $n$  l'intégrale est-elle définie ?
2. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .
3. Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$ .
4. Montrer que la série  $\sum (-1)^n u_n$  converge et calculer sa somme  $S$  sous la forme d'une intégrale.
5. Calculer  $S$ .

### Exercice 7

Mines-Télécom MP 2018

Convergence et somme de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ , où  $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$ . On pourra travailler sur les sommes partielles de la série.

### Exercice 8 ★★

Soit  $f$  une application continue sur  $[0, 1]$ . On pose  $I_n = \int_0^1 f(t^n) dt$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

### Exercice 9 ★★

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^n} dt$ .

### Exercice 10

Mines Télécom MP 2022

On pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} dx$ .

1. Montrer que  $I_n$  est bien définie.

2. Montrer que  $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du$ .

### Exercice 11

Soit  $f$  une application continue sur  $[0, 1]$ . Montrer que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y \int_0^1 x^y f(x) dx = f(1)$$

## Intégration terme à terme

### Exercice 12

Mines-Ponts MP

On définit une fonction  $f$  par  $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{sh}(x\sqrt{t}) dt$ .

1. Donner l'ensemble de définition de  $f$ .

2. Montrer que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer ce développement en série entière.

3. Exprimer  $f$  à l'aide des fonctions usuelles.

### Exercice 13 ★

ENSEA/ENSIIE MP 2015

1. Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

2. Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$

### Exercice 14 ★

CCINP (ou CCP) PSI 2019

Soit  $\sum a_n$  une série complexe absolument convergente.

1. Calculer  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ .

3. Pour  $x$  réel, on pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ . Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

### Exercice 15 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2021

1. Montrer que  $I = \int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx$  est bien définie.

2. Donner la décomposition en série entière de  $x \mapsto \ln(1-x)$  et préciser son rayon de convergence.

3. Écrire  $I$  comme somme d'une série.

4. Donner la valeur exacte de  $I$  sachant que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Exercice 16 ★★****CCINP (ou CCP) MP 2021**

Soit  $I = \int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$ .

1. Montrer que  $I$  converge.

2. Montrer que  $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ .

**Exercice 17 ★★****CCINP (ou CCP) MP 2018**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ .

1. Donner le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum a_n x^n$ .

2. Rappeler le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un segment.

3. En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour  $|x| < R$ .

**Exercice 18 ★★****CCINP (ou CCP) MP 2019**

1. Montrer l'intégrabilité de  $f : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}$  sur  $]0, 1]$ .

2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n : x \in ]0, 1] \mapsto x^{2n} (\ln x)^2$ . Montrer l'intégrabilité de  $u_n$  sur  $]0, 1]$  et calculer  $\int_0^1 u_n(x) dx$ .

3. Déterminer une expression de  $I = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx$  sous forme de somme.

4. Soit  $\varepsilon > 0$ . Proposer une méthode de calcul de  $I$  à  $\varepsilon$  près.

**Exercice 19****Mines Télécom MP 2022**

Etablir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

**Exercice 20****Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2022**

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

**Continuité****Exercice 21 ★★★**

On pose

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)}$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .

2. Montrer que  $g$  est continue sur  $] -\infty, 1[$ .

3. Montrer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{x} + o(1) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{=} \frac{1}{1-x} + o(1)$$

**Exercice 22 ★****Transformée de Fourier**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On pose

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$$

Justifier que  $\hat{f}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

## Dérivation

### Exercice 23

Mines-Ponts MP 2018

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t) dt}{1+t^2} = \int_0^x \frac{\ln(t) dt}{t^2-1}$$

### Exercice 24

Mines-Ponts MP 2017

A toute fonction  $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , on associe la fonction  $R(h)$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, R(h)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x \sin t) dt$$

A toute fonction  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , on associe fonction  $S(g)$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S(g)(x) = g(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x \sin t) dt$$

1. Montrer que  $R$  et  $S$  sont des applications linéaires à valeurs dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ .
2. On pose  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer une relation entre  $W_n$  et  $W_{n+2}$ .
3. Soit  $P$  un polynôme. Montrer que  $S \circ R(P) = P$ .
4. Montrer que pour  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ ,  $S \circ R(g) = g$ .

### Exercice 25 ★★

On pose

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t) dt$$

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Calculer  $f'(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et en déduire  $f(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

### Exercice 26

CCP MP

On pose  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t+1} dt$ .

1. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Donner une équation différentielle vérifiée par  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Donner un équivalent de  $g$  en  $+\infty$ .

### Exercice 27 ★★

Mines Télécom MP 2016

Soit  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$ .

1. Montrer que  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et paire.
2. Montrer que  $|\sin u| \leq |u|$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et déterminer  $F''$ .
4. Déterminer la fonction  $F$ .

### Exercice 28 ★★

Centrale MP 2011

Soit  $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$  et  $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ .

1. Montrer que  $f^2 + g$  est constante. Quelle est sa valeur ?
2. En déduire la valeur de  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

**Exercice 29 ★★**

CCINP (ou CCP) MP 2021

On pose  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ .

On rappelle que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

1.
  - a. Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
  - b. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2.
  - a. Montrer que  $f$  est solution de (E) :  $y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ .
  - b. Déterminer la fonction  $f$ .

**Exercice 30**

Mines-Ponts MP

On pose  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{tx}}{t} e^{-t} dt$ . Déterminer le domaine de définition de  $F$  et expliciter  $F(x)$ .

**Exercice 31 ★★★**

Intégrale de Poisson

On pose pour  $f(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$ .

1. Justifier que  $f$  est définie sur  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .
2. Montrer que pour tout  $x \in D \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = f(1/x) + 2\pi \ln |x|$ .
3. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $] -1, 1[$ .
4. Montrer que  $f'$  est nulle sur  $] -1, 1[$ .
5. En déduire la valeur de  $f(x)$  pour  $x \in D$ .

**Exercice 32**

CCINP (ou CCP) MP 2022

1. Montrer que pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $|\arctan(u)| \leq |u|$ .

2. On pose  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$ .

- a. Domaine de définition de  $F$ ?
- b. Domaine de continuité de  $F$ ?
- c. Domaine de dérivabilité de  $F$ ?
- d. Déterminer  $F'$ .
- e. En déduire  $F$ .

**Divers**

**Exercice 33 ★★★**

Banque Mines-Ponts MP 2014

On pose  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Déterminer des équivalents simples de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.

**Exercice 34 ★★**

On pose  $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Déterminer un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .
3. Déterminer un équivalent de  $f$  en  $0^+$ .

**Exercice 35 ★★★★★****Transformée de Laplace**

Soit  $f$  continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{R}$  tel que  $t \mapsto f(t)e^{-pt}$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et on pose

$$\alpha = \inf \{ p \in \mathbb{R}, t \mapsto f(t)e^{-pt} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Pour  $p \in \mathbb{R}$ , on pose  $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$  lorsque cela est possible.

1. Justifier que  $F$  est définie sur  $]\alpha, +\infty[$ .
2. *Théorème de la valeur initiale.* On suppose que  $\lim_{0^+} f = \ell \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = \ell$ .
3. *Théorème de la valeur finale.* On suppose  $\lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\alpha \leq 0$  et  $\lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p) = \ell$ .