INTERROGATION ÉCRITE N°08

NOM : Prénom : Note :

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(\mathrm{M})$ *est continue car* $\det(\mathrm{M})$ *est polynomial en les coefficients de* M.
   Or $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est l'image réciproque de l'ouvert* $\mathbb{R}^*$ *par l'application continue* $\det$ *donc* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est ouvert.* ∎

2. Montrer que $\mathbb{U}$ est connexe par arcs.

   Comme $\mathbb{R}$ *est un intervalle, il est connexe par arcs. Ainsi* $\mathbb{U}$ *est connexe par arcs en tant qu'image de* $\mathbb{R}$ *par l'application continue* $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta}$. ∎

3. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que l'application $\varphi : x \in \mathrm{E} \mapsto \|f(x)\|$ admet un maximum sur $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E},\ \|x\| \leq 1\}$.

   Comme E *est de dimension finie, l'endomophisme* f *est continu. Par inégalité triangulaire, la norme est* 1*-lipschitzienne et donc continue sur* E. *Ainsi* φ *est continue par composition. Enfin,* B *est une boule fermée donc elle est fermée et bornée. Comme* E *est de dimension finie,* B *est compacte. On en déduit que l'application continue* φ *admet un maximum sur le compact* B. ∎

4. On admet que l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Déterminer un base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

   On va utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$ *en un base orthonormée* (P_0, P_1, P_2) *de* $\mathbb{R}_2[X]$.

   On pose tout d'abord $P_0 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Il est clair que* $\langle 1, X\rangle = 0$ *donc il suffit de poser*

$$P_1 = \frac{X}{\|X\|} = X\sqrt{3/2} = \frac{X\sqrt{6}}{2}$$

   Enfin, on pose

$$Q = X^2 - \langle X^2, P_0\rangle P_0 - \langle X^2, P_1\rangle P_1 = X^2 - \langle X^2, P_0\rangle P_0 = X^2 - \frac{1}{3}$$

   et

$$P_2 = \frac{Q}{\|Q\|} = \sqrt{45/8}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{4}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$$

∎

5. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel. On considère le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur le plan F d'équation $x + y + z = 0$. Calculer la matrice M de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   Remarquons que $u = \text{vect}(1, 1, 1)$ *est un vecteur directeur de* $F^\perp$. *Ainsi le projeté orthogonal d'un vecteur* $v = (x, y, z)$ *sur* $F^\perp$ *est*

$$w = \frac{1}{\|u\|^2}\langle u, v\rangle u = \frac{x + y + z}{3}(1, 1, 1)$$

   On en déduit que

$$p(v) = v - w = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$$

   puis que

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

∎