

DEVOIR SURVEILLÉ N°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Supposons qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ convergent. Par différence, $\int_a^{+\infty} \left(\frac{\lambda - f(t)}{t} - \frac{\lambda - f(t)}{t} \right) dt = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - \mu}{t} dt$ converge. Comme $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, ceci n'est possible que si $\lambda - \mu = 0$ i.e. $\lambda = \mu$.
2. D'après le théorème fondamental de l'analyse, H_λ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto \lambda - f(t)$. Par ailleurs, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$. Par intégration par parties,

$$I(\lambda) = \left[\frac{H_\lambda(t)}{t} \right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$$

Cette intégration par parties est légitime, car H_λ étant bornée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t} = 0$. Ainsi

$$\left[\frac{H_\lambda(t)}{t} \right]_a^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t} - \frac{H_\lambda(a)}{a} = 0$$

puis

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$$

3. a. Posons $G_\lambda(x) = H_\lambda(a+xT) - H_\lambda(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a déjà montré que H_λ était de classe \mathcal{C}^1 donc G_λ également et

$$\forall x \in \mathbb{R}, G'_\lambda(x) = H'_\lambda(a+xT) - H'_\lambda(x) = (\lambda - f(a+xT)) - (\lambda - f(x)) = f(x) - f(a+xT) = 0$$

Ainsi G_λ est constante sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, H_\lambda(a+xT) - H_\lambda(x) &= G_\lambda(0) = H_\lambda(T) - H_\lambda(0) \\ &= \int_a^T (\lambda - f(t)) dt - \int_a^0 (\lambda - f(t)) dt \\ &= \int_0^T (\lambda - f(t)) dt \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \lambda T - \int_0^T f(t) dt \end{aligned}$$

- b. Par télescope

$$H_\lambda(a+nT) - H_\lambda(a) = \sum_{k=0}^{n-1} H_\lambda(a+(k+1)T) - H_\lambda(a+kT) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda T - \int_0^T f(t) dt = n \left(\lambda T - \int_0^T f(t) dt \right)$$

Ainsi la suite $(H_\lambda(a+nT))$ est bornée si et seulement si $\lambda T - \int_0^T f(t) dt$ i.e. si et seulement si $\lambda = \lambda_0 =$

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

c. Dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_{\lambda_0}(x+T) - H_{\lambda_0}(x) = 0$$

Ainsi H_{λ_0} est T -périodique. Comme H_{λ_0} est continue, elle est bornée sur le segment $[0, T]$. Par T -périodicité, elle est bornée sur \mathbb{R} .

d. Remarquons que $\frac{H_{\lambda_0}(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$, donc $t \mapsto \frac{H_{\lambda_0}(t)}{t^2}$ également. Ainsi $I(\lambda_0)$ converge.

D'après la question 1, λ_0 est l'unique valeur de λ pour laquelle $I(\lambda)$ converge.

e. Soit $x \in [a, +\infty[$. Alors

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt + \int_a^x \frac{\lambda_0}{t} dt = - \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt + \lambda_0(\ln x - \ln a)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{\lambda_0 - f(t)}{t} dt = I(\lambda_0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda_0 \ln x = \pm\infty$ car $\lambda_0 \neq 0$. On en déduit que

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln x$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et comme $\sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} = n$. Ainsi

$t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ se prolonge en une application continue sur le segment $[0, \pi/2]$. L'intégrale A_n est donc bien définie.

Le même argument montre également que B_n est bien définie.

5. On utilise le fait que $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$:

$$\varphi(t) = \frac{\sin(t) - t}{t \sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-t^3/6}{t^2} = -\frac{1}{6}$$

6. D'après la question précédente, φ est prolongeable par continuité sur le segment $[0, \pi/2]$. Elle y est donc bornée. Par inégalité triangulaire

$$|A_n - B_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)| |\varphi(t)| dt \leq \frac{\pi}{2} \|\varphi\|_\infty$$

La suite $(A_n - B_n)$ est donc bornée.

7. Via le changement de variable linéaire $u = nt$,

$$B_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du = B_1 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du$$

Remarquons que $|\sin|$ est π -périodique donc, avec les notations de la question 3 et $a = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) dt = \frac{2}{\pi} \neq 0$$

On en déduit que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{|\sin(u)|}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_0 \ln(x) = \frac{2}{\pi} \ln(x)$$

et donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u} du \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{n\pi}{2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{\pi}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(n)}{\pi} = +\infty$,

$$B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{\pi}$$

Puisque $(A_n - B_n)$ est bornée et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = +\infty$ d'après l'équivalent précédente,

$$A_n = B_n + (A_n - B_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{\pi}$$

Solution 2

1. Soit $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|x\|_p = 0$. Alors $\sum_{k=1}^n |x_k|^p = 0$. Mais comme tous les termes de cette somme sont positifs, ils sont nuls et x est également nul.
Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$. Alors

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |\lambda x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n |\lambda|^p |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p$$

2. a. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$. L'inégalité est clairement vraie si l'un des deux réels u et v est nul. Supposons donc $u > 0$ et $v > 0$. Par concavité du logarithme

$$\ln\left(\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(u^p) + \frac{1}{q}\ln(v^q) = \ln(u) + \ln(v) = \ln(uv)$$

On en déduit l'inégalité demandée par croissance de l'exponentielle.

- b. Soit $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$. Supposons d'abord $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. D'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|x_k y_k| = |x_k| |y_k| \leq \frac{|x_k|^p}{p} + \frac{|y_k|^q}{q}$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\|x \cdot y\|_1 \leq \frac{\|x\|_p^p}{p} + \frac{\|y\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Revenons maintenant au cas général : x et y sont donc quelconques. Remarquons que l'inégalité demandée est vraie si l'un des vecteurs x et y est nul. Supposons donc x et y non nuls. Alors $\|x\|_p \neq 0$ et $\|y\|_q \neq 0$ par propriété de séparation. Posons alors $x' = \frac{x}{\|x\|_p}$ et $y' = \frac{y}{\|y\|_q}$. Par homogénéité, $\|x'\|_p = \|y'\|_q = 1$. D'après ce qui précède,

$\|x' \cdot y'\|_1 \leq 1$. Mais il est clair que $x' \cdot y' = \frac{x \cdot y}{\|x\|_p \|y\|_q}$ et par homogénéité de $\|\cdot\|_1$, $\|x' \cdot y'\|_1 = \frac{\|x \cdot y\|_1}{\|x\|_p \|y\|_q}$ d'où l'inégalité demandée.

3. C'est du cours lorsque $p = 1$. Supposons donc $p > 1$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$. Posons $q = \frac{p}{p-1}$ de sorte que $q > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1}$$

D'après la question 2.b,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} &\leq \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $(p-1)q = p$ et $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$, ces deux inégalités peuvent également s'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} &\leq \|x\|_p \|x + y\|_p^{p-1} \\ \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} &\leq \|y\|_p \|x + y\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1}$$

Si $\|x + y\|_p = 0$, alors on a clairement $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Sinon, il suffit de diviser l'inégalité précédente par $\|x + y\|_p^{p-1}$ pour aboutir au même résultat.

4. a. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Alors on a clairement

$$\|x\|_\infty^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^p = \|x\|_p^p$$

On en déduit que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.

b. Soit $x \in \mathbb{K}^n$.

$$\|x\|_q^q = \sum_{k=1}^n |x_k|^q \leq \|x\|_\infty^{q-p} \sum_{k=1}^n |x_k|^p = \|x\|_\infty^{q-p} \|x\|_p^p$$

D'après la question 4.a, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ donc $\|x\|_q^q \leq \|x\|_p^q$ puis $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

Posons $M = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_q}{\|x\|_p}$. L'inégalité précédente montre que $M \leq 1$. De plus, cette inégalité est une égalité lorsque x est un vecteur de la base canonique de \mathbb{K}^n donc $M = 1$ et cette borne supérieure est atteinte.

5. a. Posons $p' = \frac{p}{r}$ et $q' = \frac{q}{r}$ de sorte que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$. D'après la question 2.b

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k|^r \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^{rp'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^{rq'} \right)^{\frac{1}{q'}}$$

Puisque $rp' = p$ et $rq' = q$, on obtient l'inégalité demandée en élevant la dernière inégalité à la puissance $\frac{1}{r}$.

b. Puisque $p < q$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ i.e. $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$.

Soit $x \in \mathbb{K}^n$ et $y = (1, \dots, 1)$. D'après la question précédente,

$$\|x \cdot y\|_p \leq \|x\|_q \|y\|_r$$

Ce qui s'écrit encore

$$\|x\|_p \leq \|x\|_q n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

Posons $M = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_p}{\|x\|_q}$. L'inégalité précédente montre que $M \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$. De plus, cette inégalité est une égalité

lorsque $|x_k| = 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc $M = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$ et cette borne supérieure est atteinte.

6. On a vu à la question 4.a que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.

De plus,

$$\|x\|_p^p = \sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq n \|x\|_\infty^p$$

donc $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}$. Finalement

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Solution 3

1. Si PQ est nul, alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et alors $\sum u_n$ converge.
Sinon, en notant d le degré de PQ, $PQ(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(n^d)$. Comme (a_n) est bornée, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(n^d/2^n)$. Par croissances comparées, on peut par exemple affirmer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1/n^2)$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
2. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont évidentes (à faire néanmoins). Si l'on se donne $P \in E$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$, alors $P(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car une somme de termes positifs ne peut être nulle que si chacun des termes est nul. Ainsi P possède une infinité de racines : il est nul.
3. Tout d'abord, la symétrie, la bilinéarité et la positivité restent conservées même si les a_n sont positifs ou nul.
On va montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit encore un produit scalaire si et seulement si il existe une infinité d'entiers n tels que $a_n > 0$.
Si c'est le cas, un polynôme P vérifiant $\langle P, P \rangle = 0$ s'annule encore en tous les entiers n tels que $a_n > 0$. Il possède donc encore une infinité de racines et il est nul.
Si ce n'est pas le cas, notons A l'ensemble fini des entiers n tels que $a_n > 0$. Posons alors $P = \prod_{n \in A} (X - n)$. On vérifie alors que $\langle P, P \rangle = 0$ mais P n'est pas nul.
4. Posons $P_k = X^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Il est clair que $N_2(P_k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus,

$$\forall k \in \mathbb{N}, N_1(P_k)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{2k}}{2^n} \geq \frac{2^{2k}}{2^2}$$

car une somme de termes positifs est supérieure à chacun de ses termes (ici le terme d'indice $n = 2$). Ainsi $N_1(P_k) \geq 2^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis $\frac{N_1(P_k)}{N_2(P_k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ de sorte que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Problème 1

Remarquons déjà que dans tout le problème, $t \mapsto \frac{f(t) - f(2t)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

I.1 I.1.a Etude en $+\infty$. Clairement, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$ donc $f(2t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$ puis $\frac{f(t) - f(2t)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^3)$.

Puisque $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, $t \mapsto \frac{f(t) - f(2t)}{t}$ l'est également.

Etude en 0^+ . Puisque $\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \mathcal{O}(u)$, $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + \mathcal{O}(t^2)$ puis $f(2t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + \mathcal{O}(t^2)$ et enfin $\frac{f(t) - f(2t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(t)$.

Comme $t \mapsto t$ est intégrable sur $]0, 1]$, $t \mapsto \frac{f(t) - f(2t)}{t}$ l'est également.

Finalement, $t \mapsto \frac{f(t) - f(2t)}{t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* : l'intégrale $I(f)$ converge (absolument).

I.1.b Décomposition en éléments simples :

$$\frac{f(t) - f(2t)}{t} = \frac{1}{t(t^2 + 1)} - \frac{1}{t(4t^2 + 1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + 1} - \frac{1}{t} + \frac{4t}{4t^2 + 1} = \frac{4t}{4t^2 + 1} - \frac{t}{t^2 + 1}$$

Une primitive de $t \mapsto \frac{f(t) - f(2t)}{t}$ est donc

$$t \mapsto \frac{1}{2} \ln(4t^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4t^2 + 1}{t^2 + 1}\right)$$

Ainsi

$$I(f) = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{4t^2 + 1}{t^2 + 1}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2$$

I.2

$$\frac{f(t) - f(2t)}{t} = \frac{1}{t^2 + 1} - \frac{2}{4t^2 + 1}$$

Ainsi

$$I(f) = [\arctan(t) - \arctan(2t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

I.3 Remarquons que

$$\frac{f(t) - f(2t)}{t} = \frac{1}{t} \left(\frac{t^2}{t^2 + 1} - \frac{4t^2}{4t^2 + 1} \right) = \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} - 1 + \frac{1}{4t^2 + 1} \right) = - \left(\frac{1}{t(t^2 + 1)} - \frac{1}{t(4t^2 + 1)} \right)$$

On se ramène donc à la question **I.1** : $I(f)$ converge et $I(f) = -\ln 2$.

I.4 Lorsque $n \geq 3$,

$$\frac{f(t) - f(2t)}{t} = \frac{t^{n-1}}{1 + t^2} - \frac{2^n t^{n-1}}{1 + 4t^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4 - 2^n}{4t^{n-3}}$$

car $4 - 2^n \neq 0$. Or $n - 3 \geq 0$ donc $t \mapsto t^{n-3}$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+^* . L'intégrale $I(f)$ diverge.

Partie II –

II.5 Etude en $+\infty$. Par croissances comparées, $\frac{f(t) - f(2t)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1/t^2)$. Par conséquent, $t \mapsto \frac{f(t) - f(2t)}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Etude en 0^+ . On sait que $e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - t + o(t)$ et $e^{-2t} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - 2t + o(t)$ donc $\frac{f(t) - f(2t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + o(1)$ i.e.

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(2t)}{t}$. Ainsi f est intégrable sur $]0, 1]$.

Finalement, $t \mapsto \frac{f(t) - f(2t)}{t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* : l'intégrale $I(f)$ converge (absolument).

II.6

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du && \text{par le changement de variable } u = 2t \\
&= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du && \text{via la relation de Chasles} \\
&= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{du}{u}
\end{aligned}$$

II.7 h est continue sur \mathbb{R}^* . Il suffit de constater que $\lim_{t \rightarrow 0} h = -1$ pour affirmer que h est prolongeable en une fonction continue sur \mathbb{R} .

II.8 On note H une primitive du prolongement continu de h sur \mathbb{R} . Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{du}{u} = H(2\varepsilon) - H(\varepsilon) + \ln 2$$

Comme H est continue (et même de classe \mathcal{C}^1) sur \mathbb{R} en tant que primitive d'une fonction continue sur \mathbb{R} ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H(2\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H(\varepsilon) = H(0)$$

Par conséquent,

$$I(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} dt = \ln 2$$

II.9 On effectue le changement de variable $t = -\ln u$. Celui-ci est valide car $-\ln$ est une bijection strictement décroissante de classe \mathcal{C}^1 de $]0, 1]$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_1^0 \frac{u - u^2}{-\ln u} \cdot \frac{-du}{u} = \int_0^1 \frac{u - 1}{\ln u} du$$

Ainsi

$$J = I(f) = \ln 2$$