Devoir à la maison n°18

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 La fonction $z \mapsto \frac{z}{1-z}$ admet un développement en série entière de rayon de convergence 1. A l'aide de produit de Cauchy, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \mapsto \left(\frac{z}{1-z}\right)^n$ admet un développement en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

2 On sait que pour $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-n} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-n}{k}(-x)^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-n(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!}(-1)^k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{n-1}x^k
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in]-1,1[$

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{n-1}x^{n+k} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}x^k$$

Par ailleurs, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}x^k$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ a_{n,k} = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1} & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$$

On précise que $a_{0,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ puisque $\left(\frac{z}{1-z}\right)^0 = 1$.

3 **3.a** Pour $n > k$, $a_{n,k} = 0$ donc la somme définissant b_k est finie.

3.b On trouve

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_{0,0} = 1 \\
b_1 &= a_{0,1} - a_{1,1} = 0 - 1 = -1 \\
b_2 &= a_{0,2} - a_{1,2} + \frac{1}{2}a_{2,2} = 0 - 1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Remarquons que les $a_{n,k}$ sont positifs d'après l'expression trouvée à la question **2**. La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_{n,k}| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_{n,k}}{n!}|z|^k$ converge puisque, par définition, c'est le développement en série entière de $\frac{1}{n!}\left(\frac{|z|}{1-|z|}\right)^n$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \frac{1}{n!}\left(\frac{|z|}{1-|z|}\right)^n$$

Mais la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}\left(\frac{|z|}{1-|z|}\right)^n$ converge également puisque c'est une série exponentielle. La famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est donc sommable.

$\boxed{5}$ D'après le théorème de Fubini

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

ce qui signifie que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^n = \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) = \mathrm{F}(z)$$

$\boxed{6}$ **6.a** De manière, générale, $|e^{\mathrm{Z}}| = e^{\mathrm{Re}(\mathrm{Z})}$ pour tout $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}$. Ainsi

$$\forall z \neq 1,\ \ln|\mathrm{F}(z)| = \mathrm{Re}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2-2x+1}$$

6.b Remarquons que la condition $z \neq 1$ équivaut à $(x,y) \neq (1,0)$.
En posant $\mu = \ln\lambda$ une équation de C_λ est

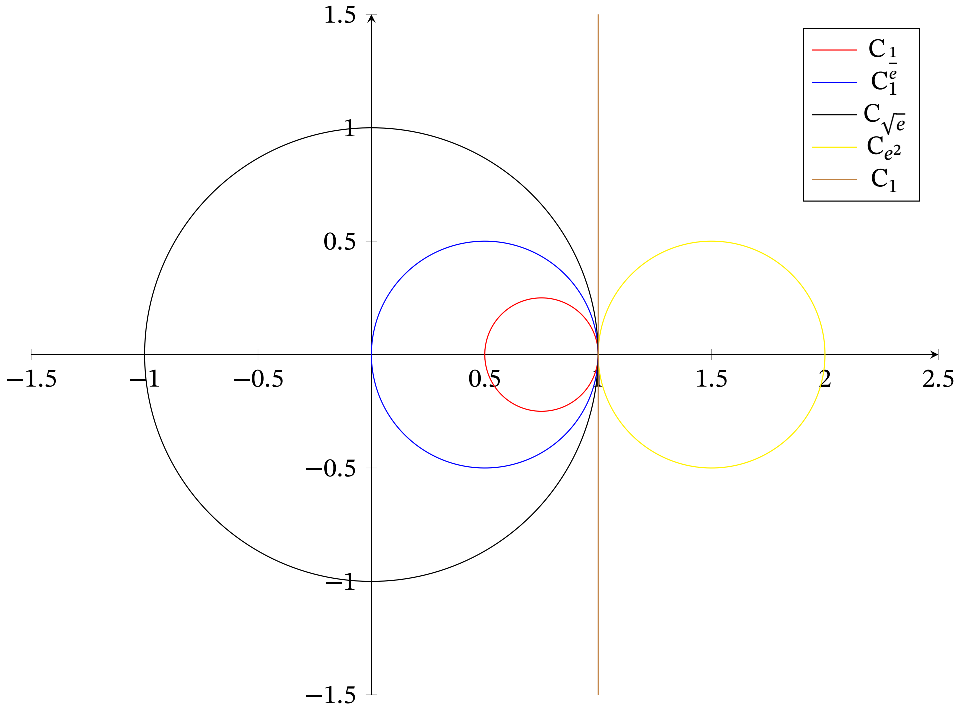
$$x^2+y^2-x = \mu(x^2+y^2-2x+1)$$

ou encore

$$(\mu-1)(x^2+y^2)+(1-2\mu)x+\mu = 0$$

Si $\mu = 1$ i.e. $\lambda = e$, C_e est la droite d'équation $x = 1$ privée du point $(1,0)$.
Sinon, C_λ est le cercle de centre $\left(\frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}, 0\right)$ est de rayon $\frac{1}{2|\mu-1|}$ privé du point $(1,0)$.

6.c



$\boxed{7}$ Pour tout $z \neq 1$,

$$2\ln|\mathrm{F}(z)| = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{z-1} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}-1} = \frac{2|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z)}{|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z)+1}$$

Or pour tout $z \in \Delta'$, $|z| \leq 1$ donc $|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z) + 1 \geq 2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z) > 0$ puis $2\ln|\mathrm{F}(z)| \leq 1$. De plus, $2\ln|\mathrm{F}(z)| = 1 \iff |z| = 1$. Par conséquent, $|\mathrm{F}(z)| \leq \sqrt{e}$ pour tout $z \in \Delta'$ et $|\mathrm{F}(z)| = \sqrt{e} \iff |z| = 1$.
Par conséquent, $\sup_{z\in\Delta'} |\mathrm{F}(z)| = \sqrt{e}$ et cette borne supérieure est atteinte sur Δ' en les points de module 1.

$\boxed{8}$ **8.a** Par opérations, $z \mapsto \dfrac{z}{z-1}$ est continue sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. De plus, exp est continue sur $\mathbb{C}$. Par composition, F est continue sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

8.b Posons $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\mathrm{F}(u_n) = \exp(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi F n'admet pas de limite en 1.

8.c Le contre-exemple précédent n'est plus valide puisque (u_n) n'est pas à valeurs dans Δ'.
Posons cette-fois ci, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors (u_n) est à valeurs dans Δ', $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\mathrm{F}(u_n) = \exp(1-n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Posons également $v_n = e^{\frac{i}{n}}$ de sorte que (v_n) est à valeurs dans Δ' et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. Mais (v_n) est en fait à valeurs dans $\mathbb{U}$ et la question **7** montre que $|\mathrm{F}(v_n)| = \sqrt{e}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On ne peut donc avoir $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
La restriction de F à Δ' n'admet pas non plus de limite.

$\boxed{9}$ On sait déjà que $\mathrm{R} \geq 1$. Supposons que $\mathrm{R} > 1$ et notons S la somme de la série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k z^k$. Alors S serait continue sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. Notamment, S admettrait une limite en 1. Comme F et S sont continues sur $\Delta' = \overline{\Delta}\setminus\{1\}$ et que F et S coïncidents sur Δ, on montre que F et S coïncident sur Δ'. Comme S admet une limite en 1, sa restriction à Δ' également. Ainsi la restriction de F à Δ' admettrait également une limite, ce qui n'est pas. Ainsi $\mathrm{R} = 1$.
Supposons que $\sum |b_n|$ converge. Alors la série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k z^k$ convergerait normalement sur $\overline{\Delta}$ donc S serait continue sur $\overline{\Delta}$. Notamment, la restriction de S à $\Delta' = \overline{\Delta}\setminus\{1\}$ admettrait une limite finie en 1. Comme précédemment, ceci impliquerait que la restriction de F à Δ' admet une limite en 1. Ainsi $\sum |b_n|$ diverge.

$\boxed{10}$ **10.a** Fixons $n \in \mathbb{N}$ et posons $\varphi_k : \theta \mapsto b_k r^k e^{i(k-n)\theta}$ de telle sorte que

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(\theta)$$

Tout d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est continue sur le segment $[0, 2\pi]$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|\varphi_k\|_\infty = b_k r^k$. Ainsi $\sum \|\varphi_k\|_\infty$ converge puisque $0 < r < 1$ et que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$ vaut 1. Par conséquent, la série $\sum \varphi_k$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$. Par interversion série/intégrale,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \varphi_k(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k r^k \cdot 2\pi\delta_{k,n} \\
&= 2\pi b_n r^n
\end{aligned}$$

La fonction $\theta \mapsto \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}$ est 2π-périodique donc

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{0} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{p} i\mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Par changement de variable $\theta \mapsto -\theta$,

$$\int_{-\pi}^{0} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \mathrm{F}(re^{-i\theta})e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Mais comme les b_n sont réels, $\mathrm{F}(re^{-i\theta}) = \overline{\mathrm{F}(re^{i\theta})}$. Finalement,

$$\int_{-\pi}^{0} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \overline{\mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \overline{\int_0^{\pi} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta}$$

puis

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta + \overline{\int_0^{\pi} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta} = 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)$$

10.b $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est continue sur $]0,\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{U}\setminus\{1\}$ et F est continue sur $\mathbb{U}\setminus\{1\}$ donc $\theta \mapsto \mathrm{F}(e^{i\theta})e^{-in\theta}$ est continue sur $]0,\pi]$. De plus, $|\mathrm{F}|$ est majorée par $\sqrt{e}$ sur Δ' donc $\theta \mapsto \mathrm{F}(e^{i\theta})e^{-in\theta}$ est bornée sur $]0,\pi]$. Comme toute constante est intégrale sur l'intervalle borné $]0,\pi]$, $\theta \mapsto \mathrm{F}(e^{i\theta})e^{-in\theta}$ est intégrable sur $]0,\pi]$. A fortiori, l'intégrale $\int_0^{\pi} \mathrm{F}(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$ converge.

10.c Pour tout $\theta \in]0,\pi]$, $\lim_{r\to1^-} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta} = \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}$ par continuité de F sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. De plus, comme $|\mathrm{F}|$ est majorée par $\sqrt{e}$ sur Δ',

$$\forall r \in [0,1[,\ \forall \theta \in]0,\pi],\ \left|\mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\right| \le \sqrt{e}$$

Enfin, $\theta \mapsto \sqrt{e}$ est évidemment intégrable sur $]0,\pi]$ donc, par théorème de convergence dominée,

$$\lim_{r\to1^-} \int_0^{\pi} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \mathrm{F}(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

11 On rappelle que

$$b_n r^n = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{F}(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)$$

En passant à la limite lorsque r tend vers 1^-, on obtient,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{F}(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)$$

De plus,

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos(\theta/2)+i\sin(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\,\mathrm{cotan}(\theta/2)$$

donc

$$\mathrm{F}(e^{i\theta}) = \sqrt{e}\exp\left(-\frac{i}{2}\,\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}\right)$$

Par conséquent,

$$b_n = \frac{\sqrt{e}}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} \exp\left(-in\theta - \frac{i}{2}\,\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}t\right)$$

Par changement de variable $t = \theta/2$, on obtient

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-2int - \frac{i}{2}\,\mathrm{cotan}\,t\right)\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Re}\left(\exp\left(-2int - \frac{i}{2}\,\mathrm{cotan}\,t\right)\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Re}\left(\exp\left(2int + \frac{i}{2}\,\mathrm{cotan}\,t\right)\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(2int + \frac{i}{2}\,\mathrm{cotan}\,t\right)\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

12

$$
\begin{aligned}
|b_n| &= \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\left|\operatorname{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(2int+\frac{i}{2}\operatorname{cotan} t\right)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\
&\leq \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(2int+\frac{i}{2}\operatorname{cotan} t\right)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\exp\left(2int+\frac{i}{2}\operatorname{cotan} t\right)\right|\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \sqrt{e}
\end{aligned}
$$

13 Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$
\begin{aligned}
u_n(t) &= 2nt + \frac{1}{2}\operatorname{cotan}(t) \\
u_n'(t) &= 2n - \frac{1}{2\sin^2 t} \\
u_n''(t) &= \frac{\cos t}{\sin^3 t} > 0
\end{aligned}
$$

Ainsi u_n' est strictement croissante et s'annule en $\mathrm{T}_n = \arcsin\frac{1}{2\sqrt{n}}$. On en déduit le tableau de variation suivant :

t	0		T_n		$\frac{\pi}{2}$
$u_n''(t)$	||	$+$		$+$	||
$u_n'(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4n-1}{2}$
$u_n(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$u_n(\mathrm{T}_n)$	$\nearrow$	$n\pi$

14 **14.a** u_n' est continue et strictement croissante sur $]0, \mathrm{T}_n]$ et

$$-\infty = \lim_0 u_n' < -n^{\frac{3}{4}} < u_n'(\mathrm{T}_n) = 0$$

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe un unique $\alpha_n \in]0, \mathrm{T}_n[$ tel que $u_n'(\alpha_n) = -n^{\frac{3}{4}}$.
De même, u_n' est continue et strictement croissante sur $[\mathrm{T}_n, \pi/2[$ et

$$u_n'(\mathrm{T}_n) = 0 < n^{\frac{3}{4}} < n < \frac{4n-1}{2} = \lim_{\pi/2} u_n'$$

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe un unique $\beta_n \in]\mathrm{T}_n, \pi/2[$ tel que $u_n'(\beta_n) = n^{\frac{3}{4}}$.

14.b Comme $u_n'(\beta_n) = 0$,

$$\frac{1}{\sin^2\beta_n} = 2n$$

Ainsi

$$u_n''(\beta_n)^2 = \frac{\cos^2\beta_n}{\sin^6\beta_n} = \frac{1}{\sin^4\beta_n}\left(\frac{1}{\sin^2\beta_n} - 1\right) = 4n^2(2n-1) = 8n^3 - 4n^4 \geq 4n^3$$

Comme u_n'' est psoitive, $u_n''(\beta_n) \geq 2n^{\frac{3}{2}}$.

14.c On vérifie aisément que u_n'' est décroissante sur $]0,\beta_n]$. Ainsi

$$\forall t\in[\alpha_n,\beta_n],\ u_n''(t)\geq u_n''(\beta_n)\geq 2n^{\frac{3}{2}}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$2n^{\frac{3}{4}}=u_n'(\beta_n)-u_n'(\alpha_n)\geq 2n^{\frac{3}{2}}(\beta_n-\alpha_n)$$

puis

$$\beta_n-\alpha_n\leq\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$$

15 **15.a** Par inégalité triangulaire,

$$|\mathrm{K}_n|\leq\beta_n-\alpha_n\leq\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$$

15.b On intégre par parties

$$\mathrm{L}_n=\left[\frac{1}{iu_n'(t)}e^{iu_n(t)}\right]_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{u_n''(t)}{iu_n'(t)^2}e^{iu_n(t)}\,\mathrm{d}t=\frac{2e^{in\pi}}{(4n-1)i}-\frac{e^{iu_n(\beta_n)}}{in^{\frac{3}{4}}}+\int_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{u_n''(t)}{iu_n'(t)^2}e^{iu_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

Par inégalité triangulaire,

$$|\mathrm{L}_n|\leq\frac{2}{4n-1}+\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}+\int_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{u_n''(t)}{u_n'(t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{4n-1}+\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}-\left[\frac{1}{u_n'(t)}\right]_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}$$

15.c En raisonnant de la même manière, on obtient

$$|\mathrm{J}_n|\leq\frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}$$

15.d Par inégalité triangulaire,

$$|\mathrm{I}_n|=|\mathrm{J}_n+\mathrm{K}_n+\mathrm{L}_n|\leq|\mathrm{J}_n|+|\mathrm{K}_n|+|\mathrm{L}_n|\leq\frac{5}{n^{\frac{3}{4}}}$$

Puisque $|\operatorname{Re}(\mathrm{Z})|\leq|\mathrm{Z}|$, on obtient à nouveau par inégalité triangulaire,

$$|b_n|\leq\frac{2\sqrt{e}}{\pi}\cdot\frac{5}{n^{\frac{3}{4}}}=\frac{10\sqrt{e}}{\pi n^{\frac{3}{4}}}$$

16 On vérifie aisément que

$$\forall x\in]-1,1[,\ (1-x)^2\mathrm{F}'(x)+\mathrm{F}(x)=0$$

17 **17.a** On sait que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_nx^n$ vaut 1. Ainsi

$$\forall x\in]-1,1[,\ \mathrm{F}'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nb_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)b_{n+1}x^n$$

$$\begin{aligned}\forall x\in]-1,1[,\ (1-x)^2\mathrm{F}'(x)+\mathrm{F}(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)b_{n+1}x^n-2\sum_{n=1}^{+\infty}nb_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}nb_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)b_{n+1}x^n-2\sum_{n=1}^{+\infty}nb_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)b_{n-1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n\\&=b_1+b_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+1)b_{n+1}-(2n-1)b_n+(n-1)b_{n-1}\right]x^n=0\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (n+1)b_{n+1}-(2n-1)b_n+(n-1)b_{n-1}=0$$

En posant $c_n=nb_n$, on a donc bien

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ c_{n+1}=\left(2-\frac{1}{n}\right)c_n-c_{n-1}$$

17.b On obtient

$$c_0 = 0 \qquad c_1 = b_1 = -1 \qquad c_2 = -1 \qquad c_3 = -\frac{1}{2} \qquad c_4 = \frac{1}{6} \qquad c_5 = \frac{19}{24} \qquad c_6 = \frac{151}{120}$$

17.c Si $c_n = 0$, alors c_{n+1} et c_{n-1} sont opposés. Si l'un des deux est nul, les deux sont nuls. La relation de récurrence permet alors de montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $c_k = 0$ ce qui est faux. Ainsi c_{n+1} et c_{n-1} sont non nuls et de signes opposés.

18 Si la suite (c_n) est positive à partir d'un certain rang, (d_n) est décroissante à partir d'un certain rang. Ainsi (d_n) converge ou diverge vers $-\infty$.
Si (d_n) converge, alors la série télescopique $\sum d_{n+1} - d_n$ converge. Ceci signifie que la série $\sum b_n$ converge. Comme les c_n sont positifs à partir d'un certain rang, les b_n également. On aurait donc convergence de la série $\sum |b_n|$ mais on a vu que ce n'était pas le cas.
On en déduit que (d_n) diverge vers $-\infty$. Mais dans ce cas, $c_{n+1} - c_n = d_{n+1} \leq -1$ à partir d'un certain rang N donc $c_n \leq c_{\mathrm{N}} - \mathrm{N}$ pour $n \geq \mathrm{N}$ et (c_n) diverge vers $-\infty$. Ceci contredit le fait que (c_n) est positive à partir d'un certain rang.

19 **19.a** Remarquons déjà que $n \geq 2$ de sorte que $\theta_n \geq \theta_2 = 4$ car c_1, c_2, c_3 sont négatifs et c_4 est positif.
Comme n est pair, $c_{\theta_n} \geq 0$ et

$$c_{\theta_n+1} - c_{\theta_n} = \left(1 - \frac{1}{\theta_n}\right)c_{\theta_n} - c_{\theta_n-1} \geq -c_{\theta_n-1}$$

Par définition de la suite (θ_n), $c_{\theta_n-1} < 0$ donc $c_{\theta_n+1} > c_{\theta_n}$. Ainsi

$$0 \leq c_{\theta_n} < c_{\theta_n+1}$$

Par définition de la suite (θ_n), $c_{\theta_{n+1}-1} > 0$ et

$$c_{\theta_{n+1}-2} - c_{\theta_{n+1}-1} = \left(1 - \frac{1}{\theta_{n+1} - 1}\right)c_{\theta_{n+1}-1} - c_{\theta_{n+1}}$$

Or $c_{\theta_{n+1}} \leq 0$, $1 - \dfrac{1}{\theta_{n+1} - 1} > 0$ car $\theta_{n+1} > \theta_n > 4$ et $c_{\theta_{n+1}-1} > 0$ donc $c_{\theta_{n+1}-2} - c_{\theta_{n+1}-1} > 0$. Ainsi

$$c_{\theta_{n+1}-2} > c_{\theta_{n+1}-1} > 0$$

Comme $c_{\theta_{n+1}-2} > 0$, $\theta_{n+1}-2 \geq \theta_n$. De plus, on ne peut avoir $\theta_{n+1}-2 = \theta_n$ car cela contredirait les inégalités précédentes. Ainsi $\theta_{n+1} - \theta_n \geq 3$.

19.b On rappelle que $d_{p+1} - d_p = -\dfrac{c_p}{p} \leq 0$ pour $p \in \mathrm{U}_n$ donc (d_p) est décroissante sur U_n.

19.c On a vu plus haut que

$$c_{\theta_n+1} - c_{\theta_n} > 0 > c_{\theta_{n+1}-1} - c_{\theta_{n+1}-2}$$

c'est-à-dire

$$d_{\theta_n+1} > 0 > d_{\theta_{n+1}-1}$$

Ainsi (d_p) prend des valeurs positives et négatives sur U_n. Comme (d_p) est décroissante sur U_n, $(d_p) = (c_p - c_{p-1})$ sera d'abord positive puis négative. Ainsi (c_p) sera d'abord croissante puis décroissante.

19.d Remarquons que, par décroissance de (d_p) sur U_n

$$c_q - c_p = \sum_{k=p+1}^{q} d_k \geq (q-p)d_q$$

donc

$$\frac{c_q - c_p}{q - p} \geq d_q$$

De même,

$$c_r - c_q = \sum_{k=q+1}^{r} d_k \leq (q-p)d_{q+1}$$

donc

$$\frac{c_r - c_q}{r - q} \leq d_{q+1}$$

Or $d_{q+1} - d_q = \dfrac{c_q}{q} < 0$ car $\theta_n < q < \theta_{n+1}$. On en déduit que $d_{q+1} > d_q$ puis que

$$\frac{c_q - c_p}{q - p} > \frac{c_r - c_q}{r - q}$$

Ceci signifie que la suite (c_n) est strictement concave sur U_n.

19.e On prouverait de même que, pour n impair, (c_n) est décroissante puis croissante et qu'elle est strictement convexe.

20 **20.a** Par décroissance de (d_p) sur U_n,

$$c_{\theta_n+h} - c_{\theta_n-1} = \sum_{k=\theta_n}^{\theta_n+h} d_k \leq (h+1)d_{\theta_n}$$

Or $c_{\theta_n-1} < 0$ par définition de la suite (θ_n) donc

$$c_{\theta_n+h} \leq (h+1)d_{\theta_n}$$

20.b D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, h-1]\!]$

$$\frac{c_{\theta_n+k}}{\theta_n+k} \leq \frac{(k+1)d_{\theta_n}}{\theta_n+k} \leq \frac{(k+1)d_{\theta_n}}{\theta_n}$$

On rappelle que $d_{p+1} - d_p = -\dfrac{c_p}{p}$ donc

$$d_{\theta_n+k} - d_{\theta_n+k+1} \leq \frac{(k+1)d_{\theta_n}}{\theta_n}$$

Par télescopage,

$$\sum_{k=0}^{h-1} d_{\theta_n+k} - d_{\theta_n+k+1} \leq \sum_{k=0}^{h-1} \frac{(k+1)d_{\theta_n}}{\theta_n}$$

ou encore

$$d_{\theta_n} - d_{\theta_n+h} \leq \frac{h(h+1)d_{\theta_n}}{\theta_n}$$

puis

$$d_{\theta_n+h} \geq d_{\theta_n}\left(1 - \frac{h(h+1)}{2\theta_n}\right)$$

20.c Puisque n est pair, les c_p pour $p \in \mathrm{U}_n$ sont positifs. Ainsi $\mathrm{M}_n = \max\limits_{p\in\mathrm{U}_n} c_p$. En particulier, $c_{\omega_n} \geq c_{\omega_n+1}$ i.e. $d_{\omega_n+1} \leq 0$. En prenant $h = \omega_n + 1 - \theta_n$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$d_{\theta_n}\left(1 - \frac{(\omega_n+1-\theta_n)(\omega_n+2-\theta_n)}{2\theta_n}\right) \leq d_{\omega_n+1} \leq 0$$

Comme $d_{\theta_n} \geq 0$,

$$1 - \frac{(\omega_n+1-\theta_n)(\omega_n+2-\theta_n)}{2\theta_n} \leq 0$$

ou encore

$$2\theta_n \leq (\omega_n+1-\theta_n)(\omega_n+2-\theta_n) \leq (\omega_n+2-\theta_n)^2$$

On en déduit que

$$\omega_n \geq \theta_n + \sqrt{2\theta_n} - 2$$

20.d On constate que

$$\theta_{n+1} - \theta_n \geq \omega_n - \theta_n \geq \sqrt{2\theta_n} - 2$$

Comme (θ_n) est une suite strictement croissante d'entiers, elle diverge vers $+\infty$. Par minoration,

$$\lim_{n\to+\infty} \theta_{n+1} - \theta_n = +\infty$$