Devoir à la maison n°18

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Centrale MP 1990

Dans tout le texte, z désigne une variable complexe ; l'exponentielle de z sera notée indifféremment e^z et $\exp z$, la partie réelle de z sera notée $\mathrm{Re}(z)$. On appellera Δ l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à 1. On conviendra de poser $0^0 = 1$.
On définit une application F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ comme suit :

- $\mathrm{F}(1) = 0$;
- pour tout $z \neq 1$, $\mathrm{F}(z) = \exp\left(-\frac{z}{1-z}\right)$.

Le but du problème est d'établir que F est développable en série entière dans Δ et d'étudier quelques propriétés de la suite des coefficients de cette série entière.

La seconde et la troisième partie sont indépendantes.

I PREMIERE PARTIE

$\boxed{1}$ Soit n un entier naturel. Etablir que la fonction qui, à tout $z \neq 1$, associe $\left(\frac{z}{1-z}\right)^n$ admet un développement en série entière dans Δ, développement que l'on notera $\left(\frac{z}{1-z}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$.

$\boxed{2}$ En utilisant le développement en série entière de $(1+x)^\gamma$, où γ est une constante réelle convenable et x une variable réelle comprise strictement entre -1 et 1, déterminer $a_{n,k}$ en fonction de n et de k.

$\boxed{3}$ **3.a** Montrer que l'égalité $b_k = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_{n,k}}{n!}$ définit une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels.

3.b Calculer b_0, b_1, b_2.

$\boxed{4}$ Etant donné z appartenant à Δ, on définit pour tout couple (n,k) d'entiers naturels $u_{n,k} = (-1)^n \frac{a_{n,k}}{n!} z^k$. Montrer que la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

$\boxed{5}$ Déduire de ce qui précède que, pour tout z appartenant à Δ, l'on a : $\mathrm{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$.
On désignera par R le rayon de convergence de cette série entière (on a évidemment $\mathrm{R} \geq 1$).

II DEUXIEME PARTIE

On se propose dans cette partie de déterminer R et de trouver une suite majorant la suite de terme général $|b_n|$.

On désigne par Δ' l'ensemble des z vérifiant $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$. On confondra dans le langage les nombres complexes et les points du plan complexe les représentant.

6 **6.a** Pour tout z complexe, on pose $z = x + iy$, x et y étant réels ; calculer $\ln|F(z)|$ en fonction de x et y.

6.b Etant donné un réel λ strictement positif, on appelle C_λ l'ensemble des z vérifiant $|F(z)| = \lambda$. Déterminer une équation cartésienne de C_λ ; indiquer la nature et la position de C_λ.

6.c Tracer sur un même graphique les C_λ correspondant à $\lambda = \frac{1}{e},\ 1,\ \sqrt{e},\ e,\ e^2$.

7 Quelle est la borne supérieure de $|F(z)|$ lorsque z décrit Δ' ? Est-elle atteinte ? Si oui, en quels points ?

8 **8.a** Montrer que F est continue en tout point autre que 1.

8.b F admet-elle une limite au point 1 ?

8.c La restriction de F à Δ a-t-elle une limite au point 1 ?

9 Déduire de **8** la valeur de R.
La série $\sum |b_n|$ est-elle convergente ?

10 **10.a** On donne r compris strictement entre 0 et 1. Etablir les formules valables pour tout n entier naturel :

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left(\int_0^{\pi} F(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta\right)$$

10.b Etablir la convergence de l'intégrale $\int_0^{\pi} F(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$.

10.c Démontrer que l'on a

$$\lim_{r\to 1^-}\int_0^{\pi} F(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi} F(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$$

11 En déduire la formule :

$$b_n = \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\operatorname{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(2int + \frac{i}{2\tan t}\right)dt\right)$$

12 Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donner une constante majorant $|b_n|$.

13 On pose, pour tout t compris strictement entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et pour tout n entier strictement positif : $u_n(t) = 2nt + \frac{1}{2\tan t}$.
Etudier les variations et le signe des fonctions u_n, u_n', u_n''. Expliciter en fonction de n la valeur T_n de l'unique zéro de u_n'.

14 **14.a** Etablir, pour tout $n > 0$, l'existence et l'unicité d'un couple α_n, β_n de réels tels que :
$0 < \alpha_n < T_n < \beta_n < \frac{\pi}{2}$ et $u_n'(\beta_n) = -u_n'(\alpha_n) = n^{3/4}$.

14.b Démontrer l'inégalité $u_n''(\beta_n) \geq 2n^{3/2}$.

14.c En déduire une majoration de $\beta_n - \alpha_n$.

15 Pour tout $n > 0$, on appelle respectivement I_n, J_n, K_n et L_n les intégrales de la fonction $t \mapsto \exp(iu_n(t))$ sur les intervalles $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $[0, \alpha_n]$, $[\alpha_n, \beta_n]$, $\left[\beta_n, \frac{\pi}{2}\right]$.

15.a Donner une majoration de $|K_n|$.

15.b En écrivant : $L_n = \displaystyle\int_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{iu_n'(t)} e^{iu_n(t)} iu_n'(t)\, dt$, établir l'inégalité $|L_n| \leq \dfrac{2}{n^{3/4}}$.

15.c Majorer par la même technique $|J_n|$.

15.d Déduire de ce qui précède une majoration de $|b_n|$ du type $Cn^{-3/4}$ où C est une constante entière, qui soit valable pour tout n. On ne cherchera pas la meilleure valeur possible de C.

III TROISIEME PARTIE

Cette partie est indépendante de la précédente. Elle a pour but essentiel une étude sommaire de la variation du signe de b_n en fonction de n.

16 Déterminer une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 vérifiée par $F(x)$ lorsque x décrit $]-1, 1[$.

17 On pose, dans la suite du problème, $c_n = nb_n$ pour tout n.

17.a Etablir la relation de récurrence (R) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{n}\right) c_n - c_{n-1}$$

17.b Déterminer c_n pour n allant de 0 à 6.

17.c Montrer que s'il existe n non nul tel que $c_n = 0$, alors c_{n-1} et c_{n+1} sont non nuls et de signes opposés.

18 On pose, pour tout n entier strictement positif : $d_n = c_n - c_{n-1}$.
On suppose, dans cette seule question, qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $c_n > 0$. En remarquant que $d_{n+1} - d_n = -\dfrac{c_n}{n} = -b_n$, aboutir à une contradiction.

19 On peut donc définir (on ne demande pas de le justifier) une suite $(\theta_n)_{n\geq 1}$ strictement croissante et à valeurs entières, possédant les propriétés suivantes :

- $\theta_1 = 0$;
- $(-1)^n c_{\theta_n} \geq 0$;
- pour tout k tel que $\theta_n < k < \theta_{n+1}$, on a $(-1)^n c_k > 0$.

On note U_n l'intervalle d'entiers $[\![\theta_n, \theta_{n+1}[\![$ et $M_n = \max\limits_{k \in U_n} |c_k|$.
Dans la suite de cette question on suppose que n est pair.

19.a Etablir les inégalités :

$$0 \leq c_{\theta_n} < c_{\theta_n+1} \text{ et } c_{\theta_{n+1}-2} > c_{\theta_{n+1}-1} > 0$$

En déduire une minoration de $\theta_{n+1} - \theta_n$.

19.b Etudier les variations de d_p lorsque p varie de θ_n à θ_{n+1}.

19.c En déduire les variations de c_p quand p décrit U_n.

19.d Etablir que si p, q, r appartiennent à U_n et vérifient $p < q < r$, on a alors : $\dfrac{c_q - c_p}{q - p} > \dfrac{c_r - c_q}{r - q}$.
Faire une figure représentant l'ensemble des points de coordonnées (k, c_k), k décrivant U_n ; interpréter géométriquement l'inégalité précédente.

19.e Indiquer très sommairement ce que deviennent les résultats ci-dessus pour n impair.

20 **20.a** Soit n un entier pair et h un entier vérifiant $0 \leq h < \theta_{n+1} - \theta_n$.
Etablir la relation $c_{\theta_n+h} \leq (h+1) d_{\theta_n}$.

20.b En déduire $d_{\theta_n+h} \geq d_{\theta_n} \left(1 - \dfrac{h(h+1)}{2\theta_n}\right)$.

20.c Soit ω_n le plus petit entier k de U_n tel que $c_k = M_n$.
Donner une minoration de $\omega_n - \theta_n$ ne faisant intervenir que θ_n.

20.d Montrer que la minoration obtenue est valable aussi pour n impair.
Quelle est la limite de $\theta_{n+1} - \theta_n$ quand n tend vers $+\infty$?