Devoir surveillé n°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

Partie I –

I.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. ln est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$ de dérivée $t \mapsto \frac{1}{t}$. De plus, pour tout $t \in]k, k+1[$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. D'après l'inégalité des accoissements finis, on a bien

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

I.2 **I.2.a** La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{H}_n = +\infty$.

I.2.b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **I.1**,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

ce qui donne

$$\mathrm{H}_n - 1 \leq \ln(n) \leq \mathrm{H}_n - \frac{1}{n}$$

On en déduit l'inégalité demandée.

I.2.c Pour tout $n \geq 2$,

$$1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} = 1$$

ou encore

$$\mathrm{H}_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$$

I.3 **I.3.a** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \geq 0$ d'après la question **I.1**.
La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante.

I.3.b Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n) \geq \frac{1}{n} \geq 0$ d'après la question **I.2.b**. Ainsi $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée : elle converge vers un réel γ.
Puisque $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0, $\gamma \geq 0$. De plus, $u_1 = 1$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante donc $\gamma \leq 1$.

I.4 **I.4.a** Il s'agit d'intégrer deux fois par parties. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_k &= \frac{1}{2}\left[\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 f'(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(t-k-\frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f'(k+1)-f'(k)}{8} - \left[\left(t-k-\frac{1}{2}\right) f(t)\right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f'(k+1)-f'(k)}{8} - \frac{f(k+1)+f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

I.4.b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les égalités précédentes pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{J}_k = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1}[f'(k+1)-f'(k)] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}[f(k+1)+f(k)] + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On remarque un télescopage dans la première somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f'(k+1)-f'(k) = f'(n)-f'(1)$$

On utilise un changement d'indice dans la seconde somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k)+f(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=2}^{n} f(k) = 2\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) - f(n)$$

Enfin, la relation de Chasles pour les intégrales montre que

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit alors la relation demandée.

I.5 **I.5.a** Remarquons tout d'abord que f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(t) = \dfrac{2}{t^3}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$-\frac{1}{2} \leq t-k-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

donc

$$0 \leq \left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

Puisque f'' est positive sur $[k, k+1]$, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$0 \leq \left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 f''(t) \leq \frac{1}{4}f''(t) = \frac{1}{2t^3}$$

La croissance de l'intégrale montre alors que

$$0 \leq \mathrm{J}_k \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{4t^3}$$

I.5.b L'intégrale de la question **I.5.a** se calcule aisément de sorte que

$$0 \leq \mathrm{J}_k \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \leq \frac{1}{8k^2}$$

Puisque la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{8k^2}$ converge, il en est de même de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathrm{J}_k$.

I.5.c Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier supérieur ou égal à n. En reprenant la question **I.5.b**,

$$0 \leq \sum_{k=n}^{p} \mathrm{J}_k \leq \frac{1}{8}\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

puis, par télescopage,

$$0 \leq \sum_{k=n}^{p} \mathrm{J}_k \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right)$$

Par passage à la limite (justifié puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{J}_n$ converge)

$$0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{J}_k \leq \frac{1}{8n^2}$$

I.5.d D'après la question **I.4.b** appliquée à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{H}_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8} - \frac{1}{n^2} + \ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{J}_k$$

En notant $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{J}_k$ et $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{J}_k$, ceci s'écrit également

$$u_n = \frac{5}{8} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} + \mathrm{S} - \mathrm{R}_n$$

D'après la question **I.3.b**, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \gamma$. De plus, (R_n) converge vers 0 (reste d'une série convergente ou théorème des gendarmes appliqué au résultat de la question **I.5.c**). Un passage à la limite donne donc

$$\gamma = \frac{5}{8} + \mathrm{S}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} - \mathrm{R}_n$$

ou encore

$$\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} - \mathrm{R}_n$$

La question **I.5.c** montre que $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On en déduit le développement asymtotique demandé.

Partie II –

II.1 **II.1.a** Puisque (u_n) est de limite γ d'après la question **I.3.b**, (x_n) est également de limite γ.

II.1.b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $p \geq n+1$, un télescopage donne

$$\sum_{k=n+1}^{p} y_k = x_p - x_n$$

Par passage à la limite lorsque p tend vers $+\infty$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k = \gamma - x_n$$

II.1.c Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Pour tout entier $k \geq n+1$,

$$\begin{aligned}
y_k &= x_k - x_{k-1} \\
&= \mathrm{H}_k - \ln(k) - \frac{1}{2k} - \mathrm{H}_{k-1} + \ln(k-1) + \frac{1}{2(k-1)} \\
&= \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k-1)} + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée.

II.2 Tout d'abord

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k-1} &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \\
&\underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&\underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} -\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{3k^3}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Après calcul, on trouve bien

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{3k^3}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

II.3 La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^3}$ est une série à termes positifs convergente donc, d'après la question **II.1.c**,

$$\gamma - x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$$

Or par comparaison à une intégrale,

$$\int_{n+1}^{p+1}\frac{dt}{t^3} \leq \sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^3} \leq \int_{n}^{p}\frac{dt}{t^3}$$

ou encore

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(p+1)^2}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{p^2}\right)$$

puis par passage à la limite

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2n^2}$$

On en déduit sans peine que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

de sorte que

$$\gamma - x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$

ce qui s'écrit encore

$$\gamma - x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque

$$x_n = u_n - \frac{1}{2n} = \mathrm{H}_n - \ln(n) - \frac{1}{2n}$$

on en déduit le développement asymptotique demandé.

Problème 2

Partie I – Cas d'une série géométrique

I.1 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est une série géométrique de raison q. On sait qu'elle converge si et seulement si $|q| < 1$.

I.2 On sait que

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = q^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

I.3 Remarquons que $\mathrm{R}_n = \frac{q}{1-q}q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge et a pour somme $\frac{1}{1-q}$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{R}_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{R}_n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Partie II – Cas d'une série de Riemann

II.4 La série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

II.5 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \le \mathrm{R}_n \le \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

ou encore

$$\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n+1}^{+\infty} \le \mathrm{R}_n \le \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n}^{+\infty}$$

ou enfin

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \le \mathrm{R}_n \le \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

En multipliant par $n^{\alpha-1}$, on obtient

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \le n^{\alpha-1}\mathrm{R}_n \le \frac{1}{\alpha-1}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}\mathrm{R}_n = \frac{1}{\alpha-1}$ via le théorème des gendarmes. Autrement dit, $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

II.6 La série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui ne converge que si $\alpha - 1 > 1$. Puisque c'est une série à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{R}_n$ est de même nature : elle ne converge donc que si $\alpha > 2$.

Partie III – Cas de la série harmonique alternée

III.7 On trouve évidemment $\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

III.8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la question précédente montre que

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{k-1} \,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k \,\mathrm{d}x$$

On reconnaît là la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x$ donc

$$\mathrm{S}_n = -\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} \,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{1+x}$$

On calcule aisément

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

de sorte que

$$\mathrm{S}_n = -\ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

III.9 Pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

donc, par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$. La suite de terme général $(-1)^n$ étant bornée, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$. La question précédente permet d'affirmer que (S_n) converge vers $-\ln(2)$. Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge et a pour somme $-\ln(2)$.

III.10 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{R}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - \mathrm{S}_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x}$$

A l'aide d'une intégration par parties,

$$\mathrm{R}_n = (-1)^{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}\right]_0^1 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(n+1)(1+x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$$

A nouveau, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq x^{n+1}$$

donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

On en déduit donc que $\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. On sait également que $\frac{(-1)^n}{n+1} \underset{n\to+\infty n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi

$$\frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et finalement

$$\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Les constantes recherchées sont donc $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 2$.

III.11 La question précédente montre que $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}a_{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Posons $v_n = \mathrm{R}_n - \frac{1}{2}a_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge. Par ar ailleurs, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_{n+1}$ converge également. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{R}_n = \frac{1}{2}a_{n+1} + v_n$ donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{R}_n$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.