Interrogation écrite n°05

NOM : Prénom : Note :

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} 2x \equiv 4[9] \\ 7x \equiv 2[12] \end{cases}$.

   2 est inversible modulo 9 d'inverse 5 et 5 est inversible modulo 12 d'inverse 7 donc le système $(\mathcal{S})$ équivaut à $\begin{cases} x \equiv 5 \times 4[9] \\ x \equiv 7 \times 2[12] \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x \equiv 2[9] \\ x \equiv 2[12] \end{cases}$. Ainsi x est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si 12 et 9 divise $x-2$, ce qui équivaut au fait que $9 \vee 12 = 36$ divise $x-2$. L'ensemble des solutions est donc $2 + 36\mathbb{Z}$. ∎

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

$$
\begin{aligned}
\chi_A = \begin{vmatrix} X & -2 & 1 \\ -3 & X+2 & 0 \\ 2 & -2 & X-1 \end{vmatrix} &\underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 1 \\ X-1 & X+2 & 0 \\ X-1 & -2 & X-1 \end{vmatrix} \\
&= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & X+2 & 0 \\ 1 & -2 & X-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & X+4 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)(X+4)(X-2)
\end{aligned}
$$

Comme χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable. ∎

3. Décomposer $\mathrm{P} = \mathrm{X}^6 + 1$ en un produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   On remarque que $e^{\frac{i\pi}{6}}$ *est racine de* P. *Comme* P *est pair et à coefficients réels, on en déduit que* $e^{\frac{i\pi}{6}}$, $e^{-\frac{i\pi}{6}}$, $-e^{\frac{i\pi}{6}}$, $-e^{-\frac{i\pi}{6}}$. *On remarque également que* i *et* $-i$ *sont racines de* P. *Comme* $\deg \mathrm{P} = 6$, *on a bien toutes les racines de* P *et elles sont toutes simples. On obtient la décomposition en facteurs irréductibles de* P *dans* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *en regroupant les racines conjuguées :*

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X} - i)(\mathrm{X} + i)(\mathrm{X} - e^{\frac{i\pi}{6}})(\mathrm{X} - e^{-\frac{i\pi}{6}})(\mathrm{X} + e^{\frac{i\pi}{6}})(\mathrm{X} + e^{-\frac{i\pi}{6}}) = (\mathrm{X}^2 + 1)(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}\sqrt{3} + 1)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}\sqrt{3} + 1)$$

∎

4. Calculer $\varphi(1400)$ ou φ désigne l'indicatrice d'Euler.

$$\varphi(1400) = \varphi(2^3 \times 5^2 \times 7) = \varphi(2^3)\varphi(5^2)\varphi(7) = (2^3 - 2^2)(5^2 - 5^1)(7 - 1) = 480$$

∎

5. On admet que $\varphi : \mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P} - (\mathrm{X}+1)\mathrm{P}'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. φ est-il diagonalisable ?

   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(\mathrm{X}^k) = (1-k)\mathrm{X}^k - k\mathrm{X}^{k-1}$. *La matrice de* φ *dans la base canonique est donc triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les* $1-k$ *pour* $k \in [\![0, n]\!]$. *Ainsi* $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1-k,\ k \in [\![0, n]\!]\}$ *et* $\operatorname{card} \mathrm{Sp}(\varphi) = n + 1 = \dim \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. φ *est donc bien diagonalisable.* ∎