

# DEVOIR À LA MAISON N°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – Centrale PSI Maths 1 2012

- Dans le problème,  $\lambda$  désigne *toujours* une application continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$ , croissante et non majorée.
- Dans le problème,  $f$  désigne *toujours* une application continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ .
- On note  $E$  l'ensemble des réels  $x$  pour lesquels l'application  $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .
- On note  $E'$  l'ensemble des réels  $x$  pour lesquels l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x} dt$  converge.

On se propose ci-après d'étudier la transformation  $f \mapsto Lf$  défini en **1**, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser la transformation  $L$  pour l'étude d'un opérateur.

### I Préliminaires, définition de la transformation $L$

- 1** Quelle inclusion existe-t-il entre les ensembles  $E$  et  $E'$  ?

Désormais, pour  $x \in E'$ , on notera

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x} dt$$

- 2** Montrer que si  $E$  n'est pas vide, alors  $E$  est un intervalle non majoré de  $\mathbb{R}$ .
- 3** Montrer que si  $E$  n'est pas vide, alors  $Lf$  est continue sur  $E$ .

### II Exemples dans le cas de $f$ positive

- 4** Comparer  $E$  et  $E'$  dans le cas où  $f$  est positive.

- 5** Dans les trois cas suivants, déterminer  $E$ .

**5.a**  $f(t) = \lambda'(t)$  avec  $\lambda$  supposée de classe  $C^1$ .

**5.b**  $f(t) = e^{t\lambda(t)}$ .

**5.c**  $f(t) = \frac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}$ .

- 6** Dans cette question, on étudie le cas  $\lambda(t) = t^2$  et  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ .

**6.a** Déterminer  $E$ . Que vaut  $Lf(0)$  ?

**6.b** Prouver que  $Lf$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**6.c** Montrer l'existence d'une constante  $A > 0$  telle que pour tout  $x > 0$ , on ait

$$Lf(x) - (Lf)'(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}$$

**6.d** On note  $g(x) = e^{-x}Lf(x)$  pour  $x \geq 0$ . Montrer que

$$\forall x \geq 0, g(x) = \frac{\pi}{2} - A \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

**6.e** En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

### III Etude d'un premier exemple

Dans cette partie,  $\lambda(t) = t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $f(t) = \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ .

**7** Montrer que  $f$  se prolonge par continuité en 0. On note encore  $f$  le prolongement obtenu.

**8** Déterminer  $E$ .

**9** A l'aide d'un développement en série, montrer que pour tout  $x > 0$ , on a

$$Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

**10** Est-ce que  $Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$  admet une limite finie en  $0^+$  ?

### IV Généralités dans le cas typique

Dans cette partie,  $\lambda(t) = t$  pour  $t \in \mathbb{R}^+$ .

**11** Montrer que si  $E$  n'est pas vide et si  $\alpha$  est sa borne inférieure (on convient que  $\alpha = -\infty$  si  $E = \mathbb{R}$ ) alors  $Lf$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]\alpha, +\infty[$  et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.

**12** Dans le cas particulier où  $f(t) = e^{-at}t^n$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{R}$ , expliciter  $E$ ,  $E'$  et calculer  $Lf(x)$  pour  $x \in E'$ .

**13 Comportement en l'infini.**

On suppose ici que  $E$  n'est pas vide et que  $f$  admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  suivant :

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k + O(t^{n+1})$$

**13.a** Montrer que pour tout  $\beta > 0$ , on a, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , le développement asymptotique suivant :

$$\int_0^\beta \left( f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-tx} dt = O(x^{-n-2})$$

**13.b** En déduire que lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on a le développement asymptotique :

$$Lf(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$$

**14 Comportement en 0.**

On suppose ici que  $f$  admet une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ .

**14.a** Montrer que  $E$  contient  $\mathbb{R}_+^*$ .

**14.b** Montrer que  $xLf(x)$  tend vers  $\ell$  en  $0^+$ .

## V Etude d'un deuxième exemple

Dans cette partie,  $\lambda(t) = t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$  pour tout  $t > 0$ ,  $f$  étant prolongée par continuité en 0.

- 15** Montrer que  $E$  ne contient pas 0.
- 16** Montrer que  $E = ]0, +\infty[$ .
- 17** Montrer que  $E'$  contient 0.
- 18** Calculer  $(Lf)'(x)$  pour  $x \in E$ .
- 19** En déduire  $(Lf)(x)$  pour  $x \in E$ .
- 20** On note pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \geq 0$ ,  $f_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$ . Montrer que  $\sum (f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ .
- 21** Que vaut  $Lf(0)$ ?

## VI Injectivité dans le cas typique

Dans cette partie,  $\lambda(t) = t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ .

- 22** Soit  $g$  une application continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\int_0^1 t^n g(t) dt = 0$$

**22.a** Que dire de  $\int_0^1 P(t)g(t) dt$  pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ ?

**22.b** En déduire que  $g$  est l'application nulle.

- 23** Soient  $f$  fixée telle que  $E$  soit non vide,  $x \in E$  et  $a > 0$ . On pose  $h(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u) du$  pour tout  $t \geq 0$ .

**23.a** Montrer que  $Lf(x + a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t) dt$ .

**23.b** On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $Lf(x + na) = 0$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du$  converge et qu'elle est nulle.

**23.c** Qu'en déduit-on pour la fonction  $h$ ?

- 24** Montrer que l'application qui à  $f$  associe  $Lf$  est injective.

## VII Etude en la borne inférieure de $E$

- 25** Cas positif.

On suppose que  $f$  est positive et que  $E$  n'est ni vide ni égal à  $\mathbb{R}$ . On note  $\alpha$  sa borne inférieure.

**25.a** Montrer que si  $Lf$  est bornée sur  $E$ , alors  $\alpha \in E$ .

**25.b** Si  $\alpha \notin E$ , que dire de  $Lf(x)$  quand  $x$  tend vers  $\alpha^+$ ?

**26** Dans cette question,  $f(t) = \cos(t)$  et  $\lambda(t) = \ln(1+t)$ .

**26.a** Déterminer  $E$ .

**26.b** Déterminer  $E'$ .

**26.c** Montrer que  $Lf$  admet une limite en  $\alpha$ , borne inférieure de  $E$ , et la déterminer.

## VIII Une utilisation de la transformation L

Dans cette partie,  $\mathcal{P}$  désigne l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients complexes et on utilise la transformation L appliqué à des éléments de  $\mathcal{P}$  pour l'étude d'un opérateur  $U$ .

**27** Soient  $P, Q$  deux éléments de  $\mathcal{P}$ . Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \overline{P(t)}Q(t)e^{-t} dt$  converge.

**28** Pour tout couple  $(P, Q) \in \mathcal{P}^2$ , on note

$$(P, Q) = \int_0^{+\infty} \overline{P(t)}Q(t)e^{-t} dt$$

Vérifier que  $(\cdot, \cdot)$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{P}$ .

**29** On note  $D$  l'endomorphisme de dérivation et  $U$  l'endomorphisme de  $\mathcal{P}$  défini par

$$U(P)(t) = e^t D(te^{-t} P'(t))$$

Vérifier que  $U$  est endomorphisme de  $\mathcal{P}$ .

**30** Montrer que pour tous  $P, Q$  de  $\mathcal{P}$  on a

$$(U(P), Q) = (P, U(Q))$$

**31** Montrer que  $U$  admet des valeurs propres dans  $\mathbb{C}$ , qu'elles sont réelles et que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

**32** Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $U$  et  $P$  un vecteur propre associé.

**32.a** Montrer que  $P$  est solution d'une équation différentielle linéaire simple que l'on précisera.

**32.b** Quel lien y-a-t-il entre  $\lambda$  et le degré de  $P$ ?

**33** **Description des éléments propres de  $U$ .**

On considère sur  $[0, +\infty[$  l'équation différentielle

$$(E_n) : tP'' + (1-t)P' + nP = 0$$

avec  $n \in \mathbb{N}$  et d'inconnue  $P \in \mathcal{P}$ .

**33.a** En appliquant la transformation L avec  $\lambda(t) = t$  à  $(E_n)$ , montrer que si  $P$  est solution de  $(E_n)$  sur  $[0, +\infty[$ , alors son image  $Q$  par L est solution d'une équation différentielle  $(E'_n)$  d'ordre 1 sur  $]1, +\infty[$ .

**33.b** Résoudre l'équation  $(E'_n)$  sur  $]1, +\infty[$  et en déduire les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme  $U$ .

**33.c** Quel est le lien entre ce qui précède et les fonctions polynomiales définies pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $P_n(t) = e^t D^n(e^{-t} t^n)$ ?