Devoir surveillé n°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. Il est clair que les fonctions f_n sont continues sur $]0,1]$. De plus, par croissances comparées, $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, ce qui garantit la continuité de f_n en 0.
Remarquons ensuite que pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = e^{-x\ln(x)}$. Donc f est continue sur $]0,1]$. Le même argument de croissances comparées prouve la continuité de f en 0.

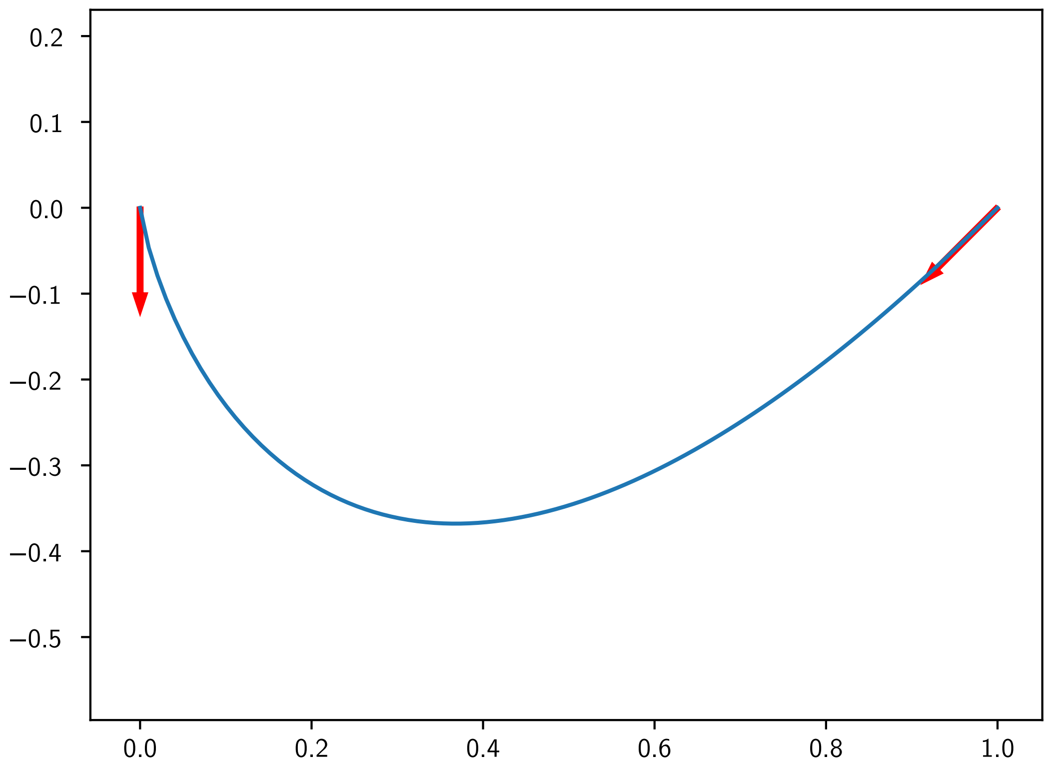
2. Tout d'abord, $\sum f_n(0)$ converge clairement et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = 1 = f(0)$. De plus, pour tout $x \in]0,1]$, la série $\sum f_n(x)$ est une série exponentielle : elle converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = e^{-x\ln(x)} = f(x)$. Ainsi $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers la fonction f sur I.

3. Tout d'abord, comme φ est continue en 0, $\varphi(0) = \lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$. Ensuite, φ est dérivable sur $]0,1]$ et

$$\forall t \in]0,1],\ \varphi'(t) = 1 + \ln(t)$$

On en déduit que φ est décroissante sur $[0, e^{-1}]$ puis croissante sur $[e^{-1}, 1]$.

4. Puisque $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) = 1$, la courbe de φ admet une tangente d'équation $y = x - 1$ en $(1,0)$. De plus, $\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} = -\infty$ donc la courbe de φ admet une tangente verticale en $(0,0)$.



5. Les variations et le signe de φ montrent que $\|\varphi\|_\infty = |\varphi(e^{-1})| = e^{-1}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathrm{I}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n\varphi(x)^n}{n!}$, on en déduit que $\|f_n\|_\infty = \dfrac{(e^{-1})^n}{n!}$. La série exponentielle $\sum \|f_n\|_\infty$ converge i.e. $\sum f_n$ converge normalement sur I.

6. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\phi : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, ϕ est positive donc la convergence de l'intégrale $\Gamma(x)$ équivaut à l'intégrabilité de ϕ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'une part, $\phi(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc ϕ est intégrable en 0^+ si et seulement si $1-x<1$ i.e. $x>0$. D'autre part, $\phi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ par croissances comparées donc ϕ est intégrable en $+\infty$. Finalement, ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x>0$. Autrement dit, le domaine de définition de Γ est $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties et sous réserve de convergence,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\left[t^n e^{-t}\right]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Puisque

$$\lim_{t\to 0} t^n e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} t^n e^{-t} = 0$$

l'intégration par parties précédente est légitime et $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
De plus,

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\left[e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

On en déduit par une récurrence évidente que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. D'abord, $t \mapsto -\ln(t)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, si $u = -\ln(t)$, alors $t = e^{-u}$ de sorte que $\mathrm{d}t = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$. On en déduit par changement de variable que

$$\mathrm{J}_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n(-\ln t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} u^n e^{-nu}e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u}\,\mathrm{d}u$$

On effectue ensuite le changement de variable $v = (n+1)u$ de sorte que

$$\mathrm{J}_n = \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty} v^n e^{-v}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\cdot\Gamma(n+1) = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

On remarque que ce résultat est encore valable pour $n=0$ puisque $\mathrm{J}_0 = 1$. Comme $\sum f_n$ est une série de fonctions continue convergeant normalement vers f sur le segment $[0,1]$, on peut affirmer par théorème d'interversion série/intégrale que

$$\mathrm{J} = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$$

8. Notons $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k}$ et $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^k}$. Alors

$$|\mathrm{J}-\mathrm{S}_n| = |\mathrm{R}_n| = \mathrm{R}_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^n}$$

Il suffit donc de trouver un entier n_0 tel que $\dfrac{1}{n_0(n_0+1)^{n_0}} \leq 10^{-6}$ i.e. $n_0(n_0+1)^{n_0} \geq 10^6$. $n_0 = 9$ fait l'affaire puisqu'alors $n_0(n_0+1)^{n_0} = 9\cdot 10^9 \geq 10^6$.

Solution 2

---

1. Soit $x \in \mathrm{J}$. Puisque $x>0$, la suite de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur J.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{\infty,\mathrm{J}} = \sup_{x\in\mathrm{J}} \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs divergente donc $\sum \|f_n\|_{\infty,\mathrm{J}}$ diverge également. Autrement dit, $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

3. Comme la série $\sum f_n$ converge simplement sur J, il suffit de montrer que la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur J. Posons $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n$. D'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall x \in \mathrm{J},\ |\mathrm{R}_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Ainsi

$$\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathrm{J}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathrm{J}} = 0$ i.e. (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur J. Par conséquent, $\sum f_n$ converge uniformément sur J.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{+\infty} f_n = 0$ et $\lim_{+\infty} f_0 = 1$. Comme $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathrm{J} = [1, +\infty[$, on peut utiliser le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{+\infty} \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$

5. **a.** Il s'agit à nouveau du critère spécial des séries alternées.

b. Remarquons que

$$\forall x \in \mathrm{J},\ \varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right)$$

De plus,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right| = \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{\sqrt{1+nx}-\sqrt{nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+nx}+\sqrt{nx}\right)\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{2(nx)^{3/2}}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathrm{J},\ \left|\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{\mathrm{K}}{x^{3/2}}$$

en posant $\mathrm{K} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. On en déduit bien que

$$\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Solution 3

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme ch est à valeurs dans $[1, +\infty[$, la suite $(\mathrm{P}_n(x))$ l'est également. A fortiori, elle est strictement positive. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\mathrm{P}_{n+1}(x)}{\mathrm{P}_n(x)} = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right) \geq 1$$

donc $(\mathrm{P}_n(x))$ est croissante.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(\mathrm{P}_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\operatorname{ch}(x/k)\right)$$

Comme $\operatorname{ch}(x/n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\ln(\operatorname{ch}(x/n)) = \ln(1 + (\operatorname{ch}(x/n) - 1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \operatorname{ch}(x/n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} x^2/2n^2$$

Or $\sum \dfrac{x^2}{n^2}$ est une série à termes psoitifs convergente donc $\sum \ln(\operatorname{ch}(x/n))$ également. La suite de ses sommes partielles i.e. la suite $(\ln(\mathrm{P}_n(x)))$ converge. Par passage à l'exponentielle, la suite $(\mathrm{P}_n(x))$ converge également. On en déduit que $\mathrm{J} = \mathbb{R}$.

3. a. Comme ch est paire, $\mathrm{P}_n(-x) = \mathrm{P}_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par passage à la limite, $\varphi(-x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? φ est donc paire.
Soit x et y deux réels tels que $0 \leq x \leq y$. Par croissance de ch sur $\mathbb{R}_+$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ 0 \leq \operatorname{ch}(x/k \leq \operatorname{ch}(y/k))$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}_n(x) \leq \mathrm{P}_n(y)$$

Enfin, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ par passage à la limite. φ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par parité, elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

b. Posons $g_n : x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x/n))$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\|h_n\|_{\infty,[-a,a]} = h_n(a)$$

On a vu précédemment que $\sum h_n(a)$ convergeait donc $\sum h_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-a, a]$. De plus, les h_n sont continues sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h_n = \ln\circ\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par continuité de l'exponentielle, φ est également continue sur $\mathbb{R}$.

4. a. Comme $1/\operatorname{ch}$ est positive, le calcul de l'intégrale vaudra comme preuve de convergence.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t\ \mathrm{d}t}{1 + \operatorname{sh}^2 t} = [\arctan(\operatorname{sh} t)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

car $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \arctan = \pi/2$ de même que $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{sh} = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \arctan = -\pi/2$.

b. Comme ch est à valeurs dans $[1, +\infty[$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}_n(x) \geq \mathrm{P}_1(x) = \operatorname{ch}(x)$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\mathrm{P}_n(x)} \leq \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$$

et enfin, par passage à la limite

$$0 \leq \frac{1}{\varphi} \leq \frac{1}{\operatorname{ch}}$$

Comme $\dfrac{1}{\operatorname{ch}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\varphi}$ l'est également.

Solution 4

---

1. L'application $(\cdot \mid \cdot)$ est clairement symétrique. Elle est également bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Pour $f \in \mathrm{E}$, $(f \mid f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)^2\ \mathrm{d}t \geq 0$ par positivité de l'intégrale. De plus, si cette dernière intégrale est nulle, alors f^2 est nulle car elle est positive et continue sur $[-1, 1]$. Ainsi $(\cdot \mid \cdot)$ est définie positive. C'est donc un produit scalaire.

2. On note $\|\|$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. Remarquons que $(u \mid v) = 0$ car uv est impaire. Ainsi $(u/\|u\|, v/\|v\|)$ est une base orthonormée de F. On calcule $\|u\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t = 2$ et $\|v\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\ \mathrm{d}t = \frac{2}{3}$.

3. Le projeté orthogonal de w sur F est donc

$$p = \frac{(w \mid u)}{\|u\|^2}u + \frac{(w \mid v)}{\|v\|^2}v$$

Or

$$(w \mid u) = \int_{-1}^{1} e^t \, dt = e^1 - e^{-1}$$
$$(w \mid v) = \int_{-1}^{1} te^t \, dt = \left[te^t\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} et^t \, dt = 2e^{-1}$$

Ainsi p est la fonction

$$t \mapsto \frac{e^1 - e^{-1}}{2} + 3e^{-1}t$$

Le réel recherché est également

$$\inf_{f \in F} \|w - f\|^2 = d(w, F)^2$$

Or on sait d'après le cours que

$$d(w, F)^2 = \|w - p\|^2$$

Mais comme $p \perp w - p$, le théorème de Pythagore donne

$$d(w, F)^2 = \|w\|^2 - \|p\|^2$$

De plus,

$$p = \frac{(w \mid u)}{\|u\|^2}u + \frac{(w \mid v)}{\|v\|^2}v$$

et $u \perp v$ donc le théorème de Pythagore donne

$$\|p\|^2 = \frac{(w \mid u)^2}{\|u\|^2} + \frac{(w \mid v)^2}{\|v\|^2} = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})^2 + 6e^{-2} = \frac{1}{2}e^2 - 1 + \frac{13}{2}e^{-2}$$

Enfin

$$\|w\|^2 = \int_{-1}^{1} e^{2t} \, dt = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2})$$

puis

$$d(w, F)^2 = 1 - 7e^{-2}$$

Solution 5

---

1. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement symétrique. Par linéarité de l'intégrale, elle est aussi bilinéaire. Pour tout $P \in E$, $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P(t)^2_d iff t \geq 0$ par positivité de l'intégrale. De plus, si cette intégrale est nulle $t \mapsto P(t)^2$ est nulle sur $[0, 1]$ car elle est positive et continue sur $[0, 1]$. Par conséquent, $P(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi P possède une infinité de racines de sorte que $P = 0$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive ; c'est donc un produit scalaire.

2. On a $\dim F^\perp = \dim E - \dim F = n + 1 - p$.

3. D'après la question précédente, $\dim(\mathbb{R}_1[X])^\perp = 1$. On cherche alors $P = X^2 + aX + b$ de sorte que $\langle P, 1 \rangle = \langle P, X \rangle = 0$. Ces conditions équivalent à

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = 0$$

ce qui équivaut à $(a, b) = (-1, 1/6)$. Finalement $(X^2 - X + 1/6)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]^\perp$.

4. **a.** Si $\deg L \leq n - 1$, alors $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \{0\}$. On en déduit que $\deg L = n$.

b. **i.** Posons $L = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [\![-n-1, -1]\!]$,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x + k + 1}$$

Ainsi φ est bien une fraction rationnelle.

ii. Posons $Q = \prod_{k=0}^{n}(X+k+1)$. En réduisant la fraction précédente au même dénominateur, $\varphi = \frac{P}{Q}$ où P est une combinaison linéaire de polynômes de degré n. On en déduit que $\deg P \leq n$. De plus, $\langle L, X^k\rangle = 0$ i.e. $\varphi(k) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. On en déduit que $P(k) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Enfin, φ n'est pas la fraction rationnelle nulle puisque $a_n \neq 0$ donc $P \neq 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$P = \lambda \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$$

Les zéros de φ sont donc les entiers $k \in [\![0, n-1]\!]$ et ils sont tous simples. Les pôles de φ sont les $-k-1$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et ils sont tous simples également.

iii. D'après la question précédente,

$$\varphi(X) = \lambda \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}{\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)}$$

c. D'après la question précédente, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\varphi(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_k}{X+j+1}$$

De plus, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$\lambda_j = [(X+j+1)\varphi(X)]\,(-j-1) = \lambda \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(-j-1-k)}{\prod_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\neq j}}(-j+k)} = \lambda(-1)^{n-j}\frac{(n+j)!}{(j!)^2(n-j)!}$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$

$$a_j = b_j = \lambda(-1)^{n-j}\frac{(n+j)!}{(j!)^2(n-j)!}$$

de sorte que

$$L = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \lambda(-1)^{n-j}\frac{(n+j)!}{(j!)^2(n-j)!}X^j$$

Comme $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp} = 1$, (L) est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

Remarque. On peut convenir que $\lambda = 1$.