Devoir à la maison n°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 On sait que la convergence absolue d'une intégrale impropre implique sa convergence. On en déduit que $E \subset E'$.

2 Supposons E non vide. Soit $a \in E$. Soit également $x \in [a, +\infty[$. Comme λ est à valeurs positives, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|f(t)e^{-\lambda(t)x}| \leq |f(t)e^{-\lambda(t)a}|$$

Par hypothèse, $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)a}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ également i.e. $x \in E$.
On a donc montré que pour tout $a \in E$, $[a, +\infty[\subset E$, ce qui signifie que E est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

3 On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Soit $a \in E$.

- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est continue sur $[a, +\infty[$.
- Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+$,
$$|f(t)e^{-\lambda(t)x}| \leq |f(t)e^{-\lambda(t)a}|$$
et $t \mapsto |f(t)e^{-\lambda(t)a}|$ est intégrale sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que $\mathrm{L}f$ est continue sur $\bigcup_{a\in E}[a, +\infty[= E$.

4 Si f est positive, pour tout $x \in E$, les fonctions $t \mapsto |f(t)e^{-\lambda(t)x}|$ et $t \mapsto e^{-\lambda(t)x}$ sont égales donc $E = E'$.

5 Dans les trois cas de figure suivants, la fonction f est positive donc $E = E'$.

5.a Comme λ est croissante et non majorée, $\lim_{+\infty} \lambda = +\infty$.

- On en déduit que $\int_0^{+\infty} \lambda'(t)\, dt$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $t \mapsto -\frac{1}{x}e^{-\lambda(t)x}$ est une primitive de $t \mapsto \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x}$ et

$$\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{x}e^{-\lambda(t)x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x}\, dt$ diverge si $x < 0$ et converge si $x > 0$.

On peut alors conclure que $E = E' = \mathbb{R}_+^*$.

Remarque. On peut aussi affirmer que si $x > 0$,

$$\mathrm{L}f(x) = \frac{e^{-\lambda(0)x}}{x}$$

5.b Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in [x, +\infty[\cap \mathbb{R}_+$,

$$e^{t\lambda(t)} e^{-\lambda(t)x} = e^{\lambda(t)(t-x)} \geq 1$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{t\lambda(t)} e^{-\lambda(t)x} \, \mathrm{d}t$ diverge. Ainsi $\mathrm{E} = \mathrm{E}' = \emptyset$.

5.c Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $t \in [-x, +\infty[\cap \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq \frac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2} e^{-x\lambda(t)} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Or $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on peut dire au choix que $1/(1+t^2) \underset{t\to+\infty}{\sim} 1/t^2$ ou que arctan admet une limite finie en $+\infty$), donc $x \in \mathrm{E}$. Finalement $\mathrm{E} = \mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ **6.a** Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \geq 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

  et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $x \in \mathrm{E}$.
- Si $x > 0$, on remarque que $\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-xt^2} t^2$ donc, quitte à poser $u = t^2$, $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} = +\infty$. On peut alors par exemple minorer $t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ par 1 au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve que $x \notin \mathrm{E}$.

En conclusion, $\mathrm{E} = \mathbb{R}_+$. Par ailleurs,

$$\mathrm{L}f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{+\infty} \arctan - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

6.b Posons $\varphi(x,t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at^2}$$

  Or $e^{-at^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc $t \mapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que $\mathrm{L}f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et a fortiori dérivable) sur $\bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*} [a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

6.c Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On sait de plus que

$$(\mathrm{L}f)'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

On en déduit que

$$\mathrm{L}f(x) - (\mathrm{L}f)'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \, \mathrm{d}t$$

En effectuant le changement de variable $u = t\sqrt{x}$ (licite car linéaire),

$$\mathrm{L}f(x) - (\mathrm{L}f)'(x) = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{x}}$$

en posant $\mathrm{A} = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u$. Comme A est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non constamment nulle sur $\mathbb{R}_+$, $\mathrm{A} > 0$.

Remarque. Avec l'égalité précédente et la continuité de $\mathrm{L}f$ en 0, $\lim_{0^+} (\mathrm{L}f)' = -\infty$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, $\lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{L}f(x) - \mathrm{L}f(0)}{x - 0} = -\infty$ et donc $\mathrm{L}f$ n'est pas dérivable en 0.

6.d D'après ce qui précède, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(t) = e^{-t}(\mathrm{L}f(t) - (\mathrm{L}f)'(t)) = \frac{\mathrm{A}e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

Si l'on se donne $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on peut alors écrire

$$g(x) - g(y) = \mathrm{A}\int_y^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Comme $\mathrm{L}f$ est continue en 0, g l'est également et $\lim_{y\to 0^+} g(y) = g(0) = \mathrm{L}f(0) = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge puisque $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. On en déduit que $\lim_{y\to 0^+}\int_y^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
On obtient alors l'égalité voulue en faisant tendre y vers 0^+ dans l'égalité initiale.

6.e Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq g(x) \leq e^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi e^{-x}}{2}$$

donc $\lim_{+\infty} g = 0$. Avec la question précédente, on obtient la convergence et l'égalité

$$\mathrm{A}\int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Par le changement de variable $u = \sqrt{t}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = 2\mathrm{A}$$

et donc $\mathrm{A}^2 = \frac{\pi}{4}$. Comme $\mathrm{A} > 0$, $\mathrm{A} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\boxed{7}$ On sait que $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} 1$ donc $\lim_0 f = 0$ et f se prolonge bien par continuité en 0.

$\boxed{8}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{2}$ donc $f(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{2}e^{-xt}$. Si $x < 0$, alors $f(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ et $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Si $x \geq 0$, $\frac{t}{2}e^{-xt} \geq t/2 \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Finalement, $\mathrm{E} = \mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{9}$ Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < e^{-t} < 1$ donc

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} = te^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}$$

Remarquons que pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient par double intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} te^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha^2}$$

Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} |te^{-nt}e^{-xt}|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} te^{-(n+x)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+x)^2}$$

et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(n+x)^2}$ converge. En vertu du théorème d'intégration terme à terme, on peut donc dire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

Puisque $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ et $\int_0^{+\infty} te^{-xt} = \frac{1}{x^2}$, on obtient

$$\mathrm{L}f(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

10 Si on pose $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{1}{(n+x)^2}$, $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \dfrac{1}{n^2}$ de sorte que $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème d'interversion série limite, $x \mapsto \mathrm{L}f(x) - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x}$ admet bien une limite finie en 0^+. Plus précisément,

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{L}f(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

11 Posons $\varphi(x,t) = f(t)e^{-xt}$ pour $(x,t) \in \mathrm{E} \times \mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\alpha, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]\alpha, +\infty[$, $t \mapsto \dfrac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x,t) = (-t)^n f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $a \in]\alpha, +\infty[$. Pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x,t)\right| = t^n |f(t)| e^{-xt} \leq t^n |f(t)| e^{-at}$$

  Comme $\alpha = \inf \mathrm{E}$, il existe $b \in \mathrm{E}$ tel que $c \in]\alpha, b[$. Alors $t^n|f(t)|e^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} o\big(|f(t)|e^{-bt}\big)$. Comme $b \in \mathrm{E}$, $t \mapsto |f(t)|e^{-bt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par domination, $t \mapsto t^n|f(t)|e^{-at}$ l'est également.

On en déduit que $\mathrm{L}f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\alpha, +\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]\alpha, +\infty[,\ (\mathrm{L}f)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt}\, \mathrm{d}t$$

12 Comme f est positive, $\mathrm{E} = \mathrm{E}'$. Lorsque $x + a > 0$, $f(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Lorsque $x + a \leq 0$, $f(t)e^{-xt} \geq t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $\mathrm{E} = \mathrm{E}' =]-a, +\infty[$. De plus, on prouve par intégration par parties successives que

$$\forall x \in]-a, +\infty[,\ \mathrm{L}f(x) = \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$$

13 **13.a** Posons $g(t) = f(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k$ de sorte que $g(t) \underset{t\to 0}{=} \mathcal{O}\big(t^{n+1}\big)$. Il existe donc $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ et $c \in]0, \beta]$ tels que

$$\forall t \in [0, c],\ |g(t)| \leq \mathrm{M}t^{n+1}$$

Mais la fonction $t \mapsto g(t)/t^{n+1}$ est continue sur le segment $[c, \beta]$ donc elle y est également bornée. On en déduit qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall t \in [0, \beta],\ |g(t)| \leq \mathrm{C}t^{n+1}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^\beta g(t)e^{-tx}\, \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\beta |g(t)|e^{-tx}\, \mathrm{d}t \leq \mathrm{C} \int_0^\beta t^{n+1}e^{-xt}\, \mathrm{d}t \leq \mathrm{C} \int_0^\beta t^{n+1}e^{-xt}\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{C}(n+1)!}{x^{n+2}}$$

ce qui permet de conclure.

13.b On a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-tx}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}$$

On en déduit que

$$\mathrm{L}(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} = \int_0^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^\beta g(t)e^{-tx}\, \mathrm{d}t + \int_\beta^{+\infty} g(t)e^{-tx}\, \mathrm{d}t$$

D'une part, d'après la question précédente,

$$\int_0^\beta g(t)\, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(x^{-n-2})$$

D'autre part, donnons-nous $c \in \mathrm{E}$. Alors $t \mapsto f(t)e^{-ct}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto t^k e^{-ct}$ l'est également. Ainsi g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison linéaire de telles fonctions. Remarquons alors que pour tout $x \geq c$,

$$\left|\int_\beta^{+\infty} g(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_\beta^{+\infty} |g(t)|e^{-xt} \leq e^{(c-x)\beta}\int_\beta^{+\infty} |g(t)|e^{-ct}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{M}e^{-\beta x}$$

en posant $\mathrm{M} = e^{c\beta}\displaystyle\int_\beta^{+\infty} |g(t)|e^{-ct}\,\mathrm{d}t$. On en déduit que

$$\int_\beta^{+\infty} g(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-\beta x})$$

A fortiori

$$\int_\beta^{+\infty} g(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(x^{-n-2})$$

ce qui permet de conclure.

14 **14.a** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $f(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\sim} \ell e^{-xt}$. On sait que $t \mapsto \ell e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ également. Ainsi $x \in \mathrm{E}$. Finalement, $\mathbb{R}_+^* \subset \mathrm{E}$.

14.b Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En effectuant le changement de variable $u = xt$, on obtient

$$x\mathrm{L}f(x) = \int_0^{+\infty} f(u/x)e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(u/x)e^{-u} = \ell e^{-u}$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite finie en $+\infty$ donc elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (résultat classique à redémontrer). On en déduit que pour tout $(u,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $|f(u/x)e^{-u}| \leq \|f\|_\infty e^{-u}$. Comme $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{L}f(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(u/x)e^{-u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \ell e^{-u}\,\mathrm{d}u = \ell$$

15 Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{n\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Comme la série harmonique diverge vers $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{n\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t = +\infty$, de sorte que f n'est pas intégrable. Ainsi $0 \notin \mathrm{E}$.

16 On sait que $0 \in \mathrm{E}$ et que E est un intervalle donc $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}_-^*$ ou $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}_+^*$. Mais E n'est pas majoré donc $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}_+^*$.
Si $x > 0$, $f(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc $x \in \mathrm{E}$. Ainsi $\mathrm{E} =]0, +\infty[$.

17 Comme $1 - \cos$ est une primitive de sin, on obtient sous réserve de convergence

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

- Puisque $1 - \cos t \underset{t\to0}{\sim} t^2/2$, $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\cos t}{t} = 0$.
- Comme $1 - \cos$ est bornée, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1-\cos t}{t} = 0$.
- Puisque $1 - \cos t \underset{t\to0}{\sim} t^2/2$, $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to0}{\sim}$ donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable en 0^+.
- Comme $1 - \cos$ est bornée, $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$ donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$.

On en déduit donc la convergence des deux termes du membre de droite de l'égalité. Il en résulte que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge i.e. $0 \in \mathrm{E}'$.

18 Posons $\varphi(x,t) = f(t)e^{-xt}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+$,

$$|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at}$$

et $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que $\mathrm{L}f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (\mathrm{L}f)'(x) &= -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t\\ &= -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right) = -\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

19 Il existe donc une constante C telle que

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{L}f(x) = \mathrm{C} - \arctan(x)$$

Par ailleurs, f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (continue et de limite finie en $+\infty$) donc on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |\mathrm{L}f(x)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty}{x}$$

de sorte que $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{L}f = 0$. On en déduit que $\mathrm{C} = \lim\limits_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$. Finalement,

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{L}f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

20 Tout d'abord, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ puisque $\mathrm{E}' = \mathbb{R}_+$.
Par le changement de variable $u = t - n\pi$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u+n\pi)}{e}^{-(u+n\pi)x}\,\mathrm{d}u = (-1)^n e^{-n\pi x} \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+n\pi}e^{-ux}\,\mathrm{d}u$$

Fixons $x \in \mathbb{R}_+$ et posons $u_n = e^{-n\pi x} \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+n\pi}e^{-ux}\,\mathrm{d}u$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq e^{-(n+1)\pi x} \leq e^{-n\pi x}$$

et, comme sin est positive sur $[0,\pi]$,

$$0 \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+(n+1)\pi}e^{-ux}\,\mathrm{d}u \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+n\pi}e^{-ux}\,\mathrm{d}u$$

On en déduit que $u_{n+1} \leq u_n$. Ainsi (u_n) est décroissante. Par ailleurs, en posant $\mathrm{F} : y \mapsto \int_0^{y} f(t)e^{-tx}\,\mathrm{d}t$, F admet une limite finie en $+\infty$ car $x \in \mathrm{E}'$. On en déduit que $f_n(x) = \mathrm{F}((n+1)\pi) - \mathrm{F}(n\pi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis que $u_n = |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées pour affirmer que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|$$

ou encore

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{t} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Cette dernière inégalité étant valide pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a donc

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right\|_\infty \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi le reste de la série $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

21 Tout d'abord, on a vu que $\lim\limits_{0^+} \mathrm{L}f = \frac{\pi}{2}$.
Remarquons maintenant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{0^+} f_n = f_n(0)$. Pour cela, on peut appliquer le théorème de convergence dominée ou plus simplement constater que pour $x > 0$

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|(1-e^{-tx})\,dt \leq \|f_n\|_\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (1-e^{-tx})\,dt \leq x\|f_n\|_\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t\,dt$$

La question précédente nous permet alors d'appliquer le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{0^+} f_n$$

ou encore

$$\lim_{0^+} \mathrm{L}f = \sum_{n=0} +\infty f_n(0) = \mathrm{L}f(0)$$

On en déduit que $\mathrm{L}f(0) = \frac{\pi}{2}$.

22 **22.a** Par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 \mathrm{P}(t)g(t)\,dt = 0$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

22.b D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ convergeant uniformément vers g sur le segment $[0,1]$. Alors pour tout $x \in [0,1]$,

$$|\mathrm{P}_n(x)g(x) - g^2(t)| = |\mathrm{P}_n(x) - g(x)||f(t)| \leq \|\mathrm{P}_n - g\|_\infty \|g\|_\infty$$

donc

$$\|\mathrm{P}_n g - g^2\|_\infty \leq \|\mathrm{P}_n - g\|_\infty \|g\|_\infty$$

Comme $\|\mathrm{P}_n - g\|_\infty\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\|\mathrm{P}_n g - g^2\|_\infty\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $(\mathrm{P}_n g)$ converge uniformément vers g^2 sur $[0,1]$. On en déduit que $\int_0^1 \mathrm{P}_n(t)g(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g(t)^2\,dt$. D'après la question précédente, $\int_0^1 g(t)^2\,dt = 0$. Comme g^2 est positive et continue sur $[0,1]$, elle est nulle sur $[0,1]$ et donc g également.

23 **23.a** D'après le théorème fondamental de l'analyse, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $h'(t) = e^{-xt}f(t)$.

$$\mathrm{L}f(x+a) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+a)t}\,dt = \int_0 h'(t)e^{-at}$$

Sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties :

$$\mathrm{L}f(x+a) = \left[h(t)e^{-at}\right]_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} h(t)e^{-at}\,dt$$

Comme $x \in \mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$, h admet une limite finie en $+\infty$. Ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)e^{-at} = 0$. Ceci légitime l'intégration par parties précédente. Comme $h(0) = 0$, on peut de plus affirmer que

$$\mathrm{L}f(x+a) = a\int_0^{+\infty} h(t)e^{-at}\,dt$$

23.b L'application $u \mapsto -\frac{\ln(u)}{a}$ est une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$. Via le changement de variable $t = -\frac{\ln(u)}{a}$, les intégrales $\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right)\,\mathrm{d}u$ et $\int_0^{+\infty} ae{-}(n+1)ath(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et égales en cas de convergence. La question précédente montre la convergence de la seconde intégrale et permet d'affirmer que

$$\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\mathrm{L}f(x+(n+1)a) = 0$$

23.c Comme h admet une limite finie en $+\infty$, $u \in]0,1] \mapsto u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right)$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$. D'après la question **22.b**, $u \mapsto u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right)$ est nulle sur $]0,1]$ i.e. h est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{\textbf{24}}$ L'application L est clairement linéaire. Soit $f \in \operatorname{Ker}\mathrm{L}$. En reprenant les notations de la question précédente, on a donc $\mathrm{L}f(x+na) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ de sorte que h est nulle sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $h' : u \mapsto e^{-xu}f(u)$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$ et enfin f est nulle sur $\mathbb{R}_+$. Ceci prouve que L est injective.

$\boxed{\textbf{25}}$ **25.a** Notons M un majorant de Lf sur E. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$. Comme f est positive,

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \int_0^{\mathrm{A}} f(t)e^{-x\lambda(t)}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{L}f(x) \leq \mathrm{M}$$

Mais $\lim_{x\to\alpha^+}\int_0^{\mathrm{A}} f(t)e^{-x\lambda(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{A}} f(t)e^{-\alpha\lambda(t)}$. On pourrait utiliser le théorème de convergence dominée mais on peut aussi tout simplement remarquer que, pour $x \in]\alpha,+\infty[$,

$$0 \leq \int_0^{\mathrm{A}} f(t)e^{-\alpha\lambda(t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\mathrm{A}} f(t)e^{-\alpha\lambda(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{A}} f(t)e^{-\alpha\lambda(t)}(1-e^{-(x-\alpha)\lambda(t)})\,\mathrm{d}t \leq (x-\alpha)\int_0^{\mathrm{A}} \lambda(t)f(t)e^{-\alpha\lambda(t)}\,\mathrm{d}t$$

En effet, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $1-e^{-u} \leq u$ par convexité de l'exponentielle.
En passant à la limite dans l'inégalité initiale, on obtient donc :

$$\int_0^{\mathrm{A}} f(t)e^{-\alpha\lambda(t)}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{M}$$

Enfin, l'application $\mathrm{A} \mapsto \int_0^{\mathrm{A}} f(t)e^{-\alpha\lambda(t)}\,\mathrm{d}t$ est croissante (car f est positive) et majorée donc elle admet une limite finie en $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\alpha\lambda(t)}\,\mathrm{d}t$ converge i.e. $\alpha \in \mathrm{E}' = \mathrm{E}$.

25.b Montrons que Lf est décroissante. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ tel que $x \leq y$. Comme λ et f sont positives, $f(t)e^{-\lambda(t)x} \geq f(t)e^{-\lambda(t)y}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ puis, par croissance de l'intégrale, $\mathrm{L}f(x) \geq \mathrm{L}f(y)$. Notamment, L$f$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ en α^+. Mais d'après la question précédente, Lf n'est pas bornée sur E. Or Lf est minorée par 0 (positivité de l'intégrale) donc elle n'est en fait pas majorée. On en déduit que $\ell = +\infty$.

$\boxed{\textbf{26}}$ **26.a** Pour $x > 1$, $f(t)e^{-x\lambda(t)} = \frac{\cos(t)}{(1+t)^x} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^x)$ donc $t \mapsto f(t)e^{-x\lambda(t)}$ est intégrable en $+\infty$ et $x \in \mathrm{E}$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} \frac{|\cos(t)|}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\cos(t)|}{1+t}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\cos t}{1+t+k\pi} && \text{par changement de variable } t \mapsto t-k\pi\\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+(k+1)\pi}\int_0^{\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{A}}{1+(k+1)\pi} \qquad \text{en notant } \mathrm{A} = \int_0^{\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t$$

Remarque. On peut montrer que $\mathrm{A} = 2$ mais ce n'est pas nécessaire. Il suffit juste de savoir que $\mathrm{A} > 0$.

Or la série à termes positifs $\sum \frac{A}{1+(n+1)\pi}$ diverge vers $+\infty$ puisque $\frac{A}{1+(n+1)\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n\pi}$. On en déduit par minoration que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{|\cos(t)|}{1+t}\, dt = +\infty$$

Par conséquent, $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{1+t}\, dt$ diverge. Ainsi $1 \notin E$. Comme E est un intervalle, $E =]1, +\infty[$.

26.b Sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(1+t)^x}\, dt = \left[\frac{\sin t}{(1+t)^x}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}}\, dt$$

Si $x > 0$, $\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^x} = 0$ et $\frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^{x+1})$ avec $x+1 > 1$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}}\, dt$ converge. On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(1+t)^x}\, dt$ converge i.e. $x \in E'$.

De plus, $\int_0^A \cos(t)\, dt = \sin(A)$ et A n'admet pas de limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} \cos(t)\, dt$ diverge i.e. $0 \notin E'$.
Si $x < 0$,

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/2} \frac{\cos t}{(1+t)^x}\, dt \geq (1+2n\pi)^{-x} \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/2} \cos t\, dt = (1+2n\pi)^{-x}$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/2} \frac{\cos t}{(1+t)^x}\, dt = +\infty$, ce qui empêche la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(1+t)^x}\, dt$ (cette limite serait alors nulle). Ainsi $x \ni nE'$.
Finalement, $E' =]0, +\infty[$.

26.c D'après l'intégration par parties effectué à la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ Lf(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}}\, dt$$

Posons $\varphi : (x,t) \mapsto \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $a > 0$. Pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+$,

$$|\varphi(x,t)| \leq \frac{1}{(1+t)^{a+1}}$$

  et $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^{a+1}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que Lf est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et notamment en 1. Ainsi

$$\lim_{x\to1} Lf(x) = Lf(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^2}\, dt$$

27 Par croissances comparées, $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$, ce qui garantit la convergence de $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$.

28
- Pour tout $(P,Q) \in \mathcal{P}^2$,

$$(Q,P) = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt = (P,Q)$$

- Pour tout $(P,Q,R) \in \mathcal{P}^2$ et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$,

$$(P, \lambda Q + \mu R) = \lambda(P,Q) + \mu(Q,R)$$

  par linéarité de l'intégrale.

- Pour tout $P \in ¶$,
$$(P, P) = \int_0^{+\infty} |P(t)|^2 e^{-t}\, dt \geq 0$$
par positivité de l'intégrale.
- Soit $P \in \mathcal{P}$ tel que $(P, P) = 0$. Comme $t \mapsto |P(t)|^2 e^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, elle est nulle sur $\mathbb{R}_+$ par stricte positivité de l'intégrale. Comme l'exponentielle ne s'annulle pas, le polynôme P admet une infinité de racines (tous les réels positifs) : c'est le polynôme nul.

On en déduit que $(\cdot, \cdot)$ est bien un produit scalaire.

29 La linéarité de U découle directement de la linéarité de la dérivation. De plus, un simple calcul donne :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ U(P)(t) = e^t(e^{-t}P'(t) - te^{-t}P'(t) + te^{-t}P''(t)) = P'(t) - tP'(t) + tP''(t)$$

Ainsi $U(P) \in \mathcal{P}$. On en déduit que $U \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$.

30 A l'aide d'une intégration par parties,

$$\begin{aligned}(U(P), Q) &= \int_0^{+\infty} U(P)(t)Q(t)e^{-t}\, ddt \\ &= \int_0^{+\infty} U(\overline{P})(t)Q(t)e^{-t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} D(te^{-t}P'(t))Q(t)\, dt \\ &= \left[te^{-t}P'(t)Q(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} te^{-t}P'(t)Q(t)\, dt\end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t}P'(t)Q(t) = 0$ donc

$$(U(P), Q) = -\int_0^{+\infty} P'(t)tQ(t)e^{-t}\, dt$$

On procède à nouveau à une intégration par parties :

$$(U(P), Q) = -\left[P(t)tQ(t)e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} P(t)D(tQ(t)e^{-t})\, dt$$

Le crochet est à nouveau nul par croissances comparées, ce qui donne :

$$(U(P), Q) = (P, U(Q))$$

31 Si P et Q sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes λ et μ, la question précédente donne $\lambda(P, Q) = \mu(P, Q)$ et donc $(P, Q) = 0$.

Remarque. On peut aussi remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par U. U induit donc un endomorphisme auto-adjoint de l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$. On sait alors que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. En fait, on vient de montrer que le résultat est encore valide pour un endomorphisme auto-adjoint d'un espace préhilbertien réel de dimension non nécessairement finie.

32 **32.a** D'après un calcul effectué précédemment, $U(P) = \lambda P$ équivaut à

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P'(t) - tP'(t) + tP''(t) = \lambda P(t)$$

32.b Si on note n le degré de P est α son coefficient dominant. Alors les coefficients de X^n dans l'égalité précédente sont respectivement $-n\alpha$ et $\lambda\alpha$ d'où $\lambda = -n$.

33 **33.a** A l'aide d'intégration par parties, on obtient

$$\forall x > 0,\ L(XP')(x) = -LP(x) - x(LP)'(x)$$
$$\forall x > 0,\ L(XP'')(x) = -L(P')(x) - xLP(x) - x^2(LP)'(x)$$

ce qui donne

$$\forall x > 0,\ x(1-x)(LP)'(x) + (1-x)LP(x) + nLP(x) = 0$$

Ainsi $Q = LP$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$(E_n'):\ x(1-x)y' + (n+1-x)y = 0$$

33.b Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{x-(n+1)}{x(1-x)} = -\frac{n+1}{x} + \frac{n}{1-x}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E'_n) sur $]1,+\infty[$ est la droite engendré par $f_n : x \mapsto \frac{(x-1)^n}{x^{n+1}}$.
On a vu à la question **32.b** que $\mathrm{Sp}(\mathrm{U}) \subset -\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme L est injective, $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{U} + n\,\mathrm{Id}_{\mathcal{P}})$ si et seulement si LP est solution de E'_n. D'après la question précédente, ceci équivaut à $\mathrm{LP} \in \mathrm{vect}(f_n)$.
Remarquons alors que

$$\forall x > 0,\ f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}$$

En prenant $a = 0$ dans la question **12**, on obtient par linéarité de L que $f_n = \mathrm{LQ}_n$ avec $\mathrm{Q}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{\mathrm{X}^k}{k!}$. L'injectivité de L prouve donc que $\mathrm{Ker}(\mathrm{U} + n\,\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}) = \mathrm{vect}(\mathrm{Q}_n)$. Ces noyaux sont non vides de sorte que $\mathrm{Sp}(\mathrm{U}) = -\mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}_{-n}(\mathrm{U}) = \mathrm{vect}(\mathrm{Q}_n)$.

33.c D'après la formule de Leibniz,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}_n(t) = e^t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-t} \frac{n!}{k!} t^k = n!\mathrm{Q}_n(t)$$

On a donc $\mathrm{E}_{-n}(\mathrm{U}) = \mathrm{vect}(\mathrm{P}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.