Devoir à la maison n°13

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

$\boxed{1}$ D'après le cours, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $f^{(n)}(0) = n!a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{2}$ **2.a** Pour tout $x \in]-1/2, 1/2[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$$

2.b Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$$

$\boxed{3}$ Comme

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = (2n+2)(2n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est nul.

$\boxed{4}$ **4.a** On raisonne par récurrence. La propriété est vraie au rang $p = 0$ en posant $Q_0 = 1$. Supposons qu'elle le soit à un rang $p \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0,1[;\because\ g^{(p+1)}(x) &= \frac{Q_p'(x)}{(x(x-1))^{2p}} e^{\frac{1}{x(x-1)}} - 2p(2x-1)\frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p+1}} e^{\frac{1}{x(x-1)}} - \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} \cdot \frac{2x-1}{(x(x-1))^2} e^{\frac{1}{x(x-1)}} \\
&= \frac{(x(x-1))^2 Q_p'(x) - 2p(2x-1)x(x-1)Q_p(x) - (2x-1)Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p+2}} e^{\frac{1}{x(x-1)}} \\
&= \frac{(x(x-1))^2 Q_p'(x) - (2x-1)(2px(x-1)+1)Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p+2}} e^{\frac{1}{x(x-1)}} \\
&= \frac{Q_{p+1}(x)}{(x(x-1))^{2p+2}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}
\end{aligned}$$

en posant $Q_{p+1} = (X(X-1))^2 Q_p' - (2X-1)(2pX(X-1)+1)Q_p$.
La propriété est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. De plus,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ Q_p = (X(X-1))^2 Q_{p-1}' - (2X-1)(2(p-1)X(X-1)+1)Q_{p-1}$$

4.b On raisonne à nouveau par récurrence.
Comme $Q_0 = 1$, $Q_1 = -(2X-1)$ et $\deg Q_1 = 1 = 3\times 1 - 2$. Supposons que $\deg Q_p = 3p-2$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\deg\left((X(X-1))^2 Q_p'\right) &= 4 + \deg Q_p' = 4 + 3p - 3 = 3p+1 \\
\deg\left((2X-1)(2pX(X-1)+1)Q_p\right) &= 3 + \deg Q_p = 3 + 3p - 2 = 3p+1
\end{aligned}$$

De plus, si on note α_p le coefficient dominant de Q_p, les coefficients dominants de $(X(X-1))^2 Q_p'$ et $(2X-1)(2pX(X-1)+1)Q_p$ sont respectivement $(3p-1)\alpha_p$ et $4p\alpha_p$ et sont donc distincts. On en déduit que $Q_{p+1} = (X(X-1))^2 Q_p' - (2X-1)(2pX(X-1)+1)Q_p$ est de degré $3p+1 = 3(p+1)-2$.
Il s'ensuit que $\deg Q_p = 3p-2$ pout tout $p \in \mathbb{N}^*$.

5 **5.a** Par croissance comparée, $\lim_{u\to-\infty} u^{2p}e^u = 0$. Comme

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x(x-1)} = \lim_{x\to1^-}\frac{1}{x(x-1)} = -\infty$$

on obtient

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x(x-1)}}}{(x(x-1))^{2p}} = \lim_{x\to1^-}\frac{e^{\frac{1}{x(x-1)}}}{(x(x-1))^{2p}} = 0$$

Enfin, Q_p est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une limite finie en 0^+ et 1^-. On obtient bien

$$\lim_{x\to0^+} g^{(p)}(x) = \lim_{x\to1^-} g^{(p)}(x) = 0$$

5.b Il est clair que $g^{(p)}$ est nulle sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$ pour tout $p\in\mathbb{N}$. On en déduit notamment que

$$\lim_{x\to0^-} g^{(p)}(x) = \lim_{x\to1^+} g^{(p)}(x) = 0$$

Finalement, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$, $]1,+\infty[$ et ses dérivées successives admettent des limites finies en 0 et 1. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^\infty$ la restriction de g à $]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$ admet un unique prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ qui ne peut être que g lui-même puisque g est notamment continue sur $\mathbb{R}$.
g est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et nulle en dehors du segment $[0,1]$: elle appartient donc à $\mathcal{W}$.

6 Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\int_{x-1}^{1} g(t)\,dt = \int_{x}^{2} g(t-1)\,dt = -\int_{2}^{x} g(t-1)\,dt$$

Comme $x\mapsto -g(x-1)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\psi\colon x\mapsto \int_{x-1}^{1} g(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\psi'(x) = -g(x-1)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ψ l'est également, de même que h.

Remarque. Comme g est continue, positive et non constamment nulle sur $[0,1]$, $\int_0^1 g(t)\,dt > 0$ de sorte que h est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x\in]-\infty,1]$. Alors g est nulle sur $[x-1,0]\subset]-\infty,0]$ donc, d'après une relation de Chasles, $h(x)=1$.
Soit $x\in[2,+\infty]$. Alors g est nulle sur $[1,x-1]\subset[1,+\infty[$ donc $h(x)=0$.

7 **7.a** Soit $p\in\mathbb{N}^*$. D'après la formule de Leibniz,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^{p-k}(-2)^k h^{(p-k)}(2x)h^{(k)}(-2x) = 2^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}h^{(p-k)}(2x)h^{(k)}(x)$$

Notamment,

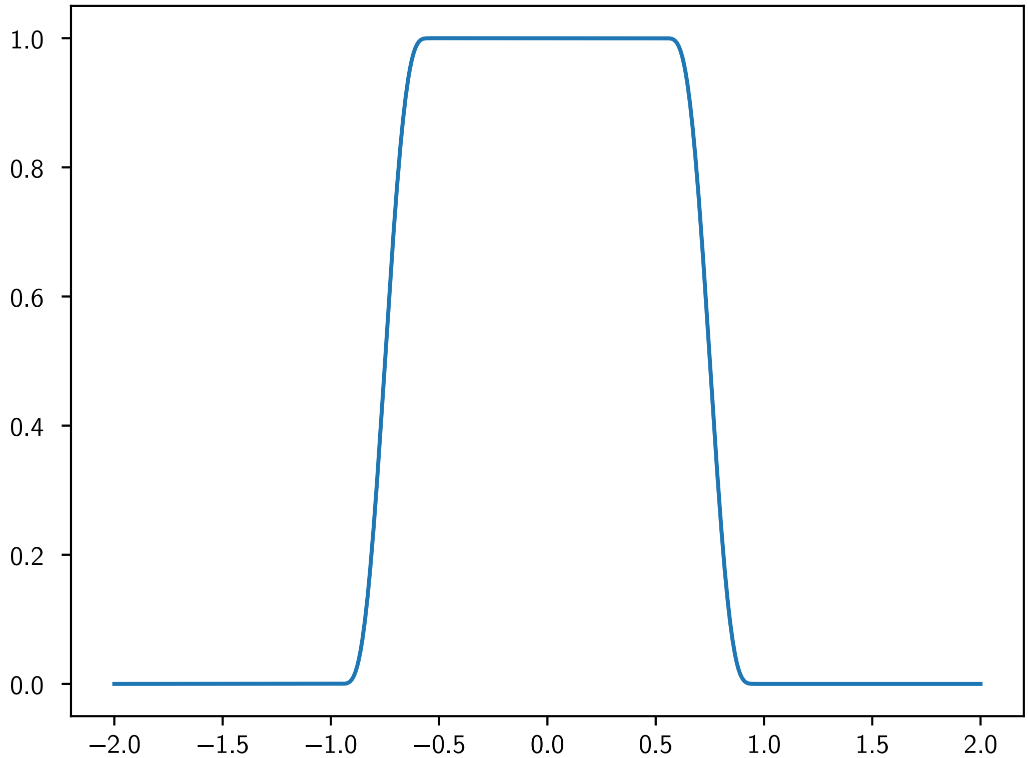
$$\varphi^{(p)}(0) = 2^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k h^{(p-k)}(0)h^{(k)}(0)$$

Mais comme h est constante sur $]-\infty,1]$, ses dérivées d'ordre supérieur ou égal à 1 s'annulent en 0. Ainsi

$$\varphi^{(p)}(0) = 2^p h^{(p)}(0)h(0) = 0$$

car $p\geq1$.

7.b Si $x\leq-1$, alors $-2x\geq2$ et on a vu que h était nulle sur $[2,+\infty[$ donc $\varphi(x)=0$. Si $x\geq1$, alors $2x\geq2$ et $\varphi(x)=0$ à nouveau. φ est bien nulle en dehors de $[-1,1]$.



7.c Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $|\varphi^{(k)}|$ est continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$: elle y admet donc un maximum. Comme $[\![0, p-1]\!]$ est fini, λ_p est bien défini.

$\boxed{8}$ **8.a** Il suffit de constater que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

8.b Il suffit de constater que φ est nulle hors du segment $[-1,1]$.

$\boxed{9}$ **9.a** On applique la formule de Leibniz.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ g_n^{(j)}(x) &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\left(\varphi(\beta_n x)\right) \frac{\mathrm{d}^{j-i}}{\mathrm{d}x^{i-j}}\left(\frac{x^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{(n-(i-j))!} x^{n-(i-j)} \\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-i+j}}{(n-i+j)!}\end{aligned}$$

9.b Puisque $j < n$, pour tout $i \in [\![0, j]\!]$, $n - j + i \geq n - j > 0$. On en déduit que $g_n^{(j)}(0) = 0$.

9.c Comme g_n est constamment nulle sur $]-\infty, -1/\beta_n[$ et sur $]1/\beta_n, +\infty[$, $g_n^{(j)}$ est nulle sur $]-\infty, -1/\beta_n[$ et sur $]1/\beta_n, +\infty[$. Par continuité de $g_n^{(j)}$, $g_n^{(j)}$ est nulle sur $]-\infty, -1/\beta_n]$ et sur $[1/\beta_n, +\infty[$.

9.d Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq 1/\beta_n$. Par inégalité triangulaire,

$$|g_n^{(j)}(x)| \leq \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} |\beta_n|^i |\varphi^{(i)}(\beta_n x)| \frac{|x|^{n-j+i}}{(n-j+i)!} \leq \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} |\beta_n|^i |\varphi^{(i)}(\beta_n x)| \frac{|1/\beta_n|^{n-j+i}}{(n-j+i)!} = \beta_n^{j-n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{|\varphi^{(i)}(\beta_n x)|}{(n-j+i)!}$$

Puisque $\beta_n x \in [-1,1]$, on a par définition de λ_n ,

$$\forall i \in [\![0, j]\!],\ |\varphi^{(i)}(\beta_n x)| \leq \lambda_n$$

Ainsi

$$|g_n^{(j)}(x)| \leq \lambda_n \beta_n^{j-n} \sum_{i=0}^{j} \frac{\binom{j}{i}}{(n-j+i)!}$$

puis

$$|u_n g_n^{(j)}(x)| \leq |u_n| \lambda_n \beta_n^{j-n} \sum_{i=0}^{j} \frac{\binom{j}{i}}{(n-j+i)!}$$

Puisque $n-j \geq 1$, $\beta_n^{j-n} \leq 1/\beta_n$. De plus, $(n-j+i)! \geq 1$ pour tout $i \in [\![0, j]\!]$ donc

$$|u_n g_n^{(j)}(x)| \leq \frac{|u_n|\lambda_n}{\beta_n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} = 2^j \frac{|u_n|\lambda_n}{\beta_n} \leq 2^{n-1} \frac{|u_n|\lambda_n}{\beta_n}$$

Enfin, par définition, $\beta_n \geq 4^n |u_n|\lambda_n$ de sorte que

$$|u_n g_n^{(j)}(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{4^n} = 2^{-(n+1)}$$

10 On a déjà vu que $g_n^{(j)}(0) = 0$ pour $n > j$.
Sinon, on peut encore utiliser la formule de Leibniz pour affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{\mathrm{d}^{j-i}}{\mathrm{d}x^{i-j}} \left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{i=j-n}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$$

car les dérivées de $x \mapsto x^n$ d'ordre strictement supérieur à n sont nulles. En évaluant en 0, il reste

$$g_n^{(j)}(0) = \beta_n^{j-n} \varphi^{(j-n)}(0)$$

Or on sait que $\varphi^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $g_n^{(j)}(0) = 0$ pour $j > n$.
Enfin

$$g_n^{(n)}(0) = \varphi(0) = 1$$

11 D'après la question **9**, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\forall n > j,\ \|u_n g_n(j)\|_\infty \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

On en déduit que $\sum u_n g_n^{(j)}$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après la question précédente,

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \sigma^{(j)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n^{(j)}(0) = u_j$$

12 Si $x > a_0 > 0$,

$$f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}(x + a_0 + x - a_0 - 2x) = 0$$

Si $x < a_0 < 0$,

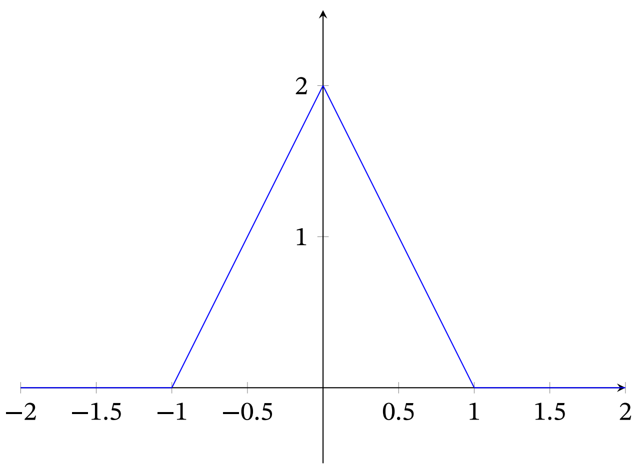
$$f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}(-x - a_0 - x + a_0 + 2x) = 0$$

Si $0 \leq x \leq a_0$,

$$f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}(x + a_0 - x + a_0 - 2x) = \frac{2}{a_0^2}(a_0 - x)$$

Si $-a_0 \leq x \leq 0$,

$$f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}(x + a_0 - x + a_0 + 2x) = \frac{2}{a_0^2}(x + a_0)$$



13 **13.a** Par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) \leq \frac{1}{2a_0^2}\left(|x| + |a_0| + |x| + |-a_0| - 2|x|\right) = \frac{1}{a_0}$$

Toujours par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) \geq \frac{1}{2a_0^2}\left(|x + a_0 + x - a_0| - 2|x|\right) = 0$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq f_0(x) \leq \frac{1}{a_0}$$

A fortiori,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_0(x)| \leq \frac{1}{a_0}$$

13.b Si on pose $\mathrm{A} =]-\infty, -a_0] \cup [a_0, +\infty[$, alors $f_0(x) = kd(x, \mathrm{A})$ quitte à distinguer les cas $x \in]-\infty, a_0]$, $x \in [-a_0, 0]$, $x \in [0, a_0]$ et $x \in [a_0, +\infty[$. On prouve classiquement que $x \in \mathbb{R} \mapsto d(x, \mathrm{A})$ est 1-lipschitzienne. On en déduit que f est k-lipschitzienne.

14 Comme f_0 est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{1}{2a_1}(\mathrm{F}(x + a_1) - \mathrm{F}(x - a_1))$ donc f_1 est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = \frac{1}{2a_1}\left(\mathrm{F}'(x + a_1) - \mathrm{F}'(x - a - 1)\right) = \frac{1}{2a_1}\left(f_0(x + a_1) - f_0(x - a_1)\right)$$

15 Si $x \geq a_0 + a_1$, alors f_0 est nulle sur $[x - a_1, x + a_1] \subset [a_0, +\infty[$. De même, si $x \leq -a_0 - a_1$, alors f_0 est nulle sur $[x - a_1, x + a_1] \subset] - \infty, -a_0]$.

16 Par inégalité triangulaire et d'après la question **13**,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_1(x)| \leq \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1} |f_0(t)|\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1} \frac{1}{a_0}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{a_0}$$

Par ailleurs, comme f_0 est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_1'(x)| = \frac{1}{2a_1}\left|f_0(x + a_1) - f_0(x - a_1)\right| \leq \frac{1}{2a_1} \cdot 2ka_1 = \frac{1}{a_0^2}$$

Mais comme $a_0 \geq a_1$, $\frac{1}{a_0^2} \leq \frac{1}{a_0 a_1}$.

17 On a vu à la question précédente que $|f_1'| \leq \frac{1}{a_0^2} = k$ donc f_1 est k-lipschitzienne d'après le théorème des accroissements finis.

18 On prouve aisément par récurrence que f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = \frac{1}{2a_n}\left(f_{n-1}(x + a_n) - f_{n-1}(x - a_n)\right)$$

19 Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Tout d'abord f_0 est nulle en dehors de $[-a_0, a_0] = [-\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_0]$. Supposons que f_{n-1} soit nulle en dehors de $[-\mathrm{S}_{n-1}, \mathrm{S}_{n-1}]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq \mathrm{S}_n$, alors f_{n-1} est nulle sur $[x - a_n, x + a_n] \subset [\mathrm{S}_{n-1}, +\infty[$ de sorte que $f_n(x) = 0$. Si $x \leq -\mathrm{S}_n$, alors f_{n-1} est nulle sur $[x - a_n, x + a_n] \subset] - \infty, \mathrm{S}_{n-1}]$ de sorte que $f_n(x) = 0$. f_n est bien nulle en dehors de $[-\mathrm{S}_n, \mathrm{S}_n]$, ce qui achève la récurrence.

20 Tout d'abord, $|f_0(x)| \leq \frac{1}{a_0}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{a_0}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} |f_{n-1}(t)|\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} \frac{1}{a_0}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{a_0}$$

On conclut par récurrence.

C'est reparti pour une récurrence. Tout d'abord, $|f_0(x)| \leq \dfrac{1}{a_0}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall p \leq n-1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f_{n-1}^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}$$

Tout d'abord,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{a_0}$$

Soit ensuite $p \in [\![1, n]\!]$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(p)}(x) = \frac{1}{2a_n}\left(f_{n-1}^{(p-1)}(x+a_n) - f_{n-1}^{(p-1)(x-a_n)}\right)$$

puis, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{2a_n}\left(|f_{n-1}^{(p-1)}(x+a_n)| + |f_{n-1}^{(p-1)(x-a_n)}|\right)$$

Puisque $p-1 \leq n-1$, on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{2a_n} \cdot \frac{2}{a_0 a_1 \dots a_{p-1}} = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_{p-1}}$$

Mais comme $a_p \geq a_> 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$$

21 On raisonne par récurrence. On sait que f_0 est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Supposons que f_{n-1} soit k-lipschitzienne pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par changement de variable

$$f_n(x) - f_n(y) = \frac{1}{2a_0}\int_{-a_n}^{a_n} f_{n-1}(t+x)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2a_0}\int_{-a_n}^{a_n} f_{n-1}(t+y)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a_0}\int_{-a_n}^{a_n} (f_{n-1}(t+x) - f_{n-1}(t+y))\,\mathrm{d}t$$

Par inégalité triangulaire,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{1}{2a_0}\int_{-a_n}^{a_n} |f_{n-1}(t+x) - f_{n-1}(t+y)|\,\mathrm{d}t$$

puis, par k-lipschitzianité de f_{n-1},

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{1}{2a_0}\int_{-a_n}^{a_n} k|x-y|\,\mathrm{d}t = \frac{a_n}{a_0}k|x-y|$$

Enfin, $0 < a_0 \leq a_n$ donc

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x-y|$$

ce qui achève la récurrence.

22

23 **23.a** Soit $x \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire,

$$|k_n(x)| = \frac{1}{2a_n}\left|\int_{x-a_n}^{x+a_n} (f_{n-1}(t) - f_{n-1}(x))\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} |f_{n-1}(t) - f_{n-1}(x)|\,\mathrm{d}t$$

Comme f_{n-1} est k-lipschitzienne,

$$|k_n(x)| \leq \frac{k}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} |x-t|\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2a_n}\int_{-a_n}^{a_n} |t|\,\mathrm{d}t = \frac{ka_n}{2}$$

23.b D'après la question précédente, $\|k_n\|_\infty \leq \dfrac{ka_n}{2}$. Par hypothèse, $\sum a_n$ converge donc $\sum k_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

24 **24.a** Soit $x \in \mathbb{R}$. La série télescopique $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x) - f_{n-1}(x)$ converge vers $s(x)$. Par lien suite/série télescopique, on en déduit que la suite $(f_n)(x)$ converge vers $f_0(x) + s(x)$.

24.b On a vu précédemment que $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{a_0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, $|w(x)| \leq \dfrac{1}{a_0}$.

24.c On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|$$

A nouveau, par passage à la limite,

$$|w(x) - w(y)| \leq k|x - y|$$

24.d Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq \mathrm{S}$. A fortiori, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x| \geq \mathrm{S} \geq \mathrm{S}_n$ donc $f_n(x) = 0$. Par passage à la limité, $w(x) = 0$. w est donc nulle en dehhors de $[-\mathrm{S}, \mathrm{S}]$.

$\boxed{25}$ **25.a** On sait que $\sum f_n - f_{n-1}$ converge normalement et donc uniformément vers $w - f_0$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la suite des sommes partielles i.e. $(f_n - f_0)$ converge uniformément vers $w - f_0$ sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit immédiatement que (f_n) converge uniformément vers w sur $\mathbb{R}$. A fortiori, (f_n) converge uniformément vers w sur le segment $[-\mathrm{S}, \mathrm{S}]$. Par théorème d'interversion série/intégrale,

$$\int_{-\mathrm{S}}^{\mathrm{S}} w(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\mathrm{S}}^{\mathrm{S}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

25.b Evident.

$\boxed{26}$ **26.a**

26.b On a clairement $w = f_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} k_n$.

26.c La série $\sum_{n\geq 2} k_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $w - f_1$. Les fonctions k_n pour $n \geq 2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et la série $\sum_{n\geq 2} k'_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\sum_{n=2}^{+\infty} k_n = w - f_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme f_1 est également $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il en est de même de w.

26.d Soit $x \in \mathbb{R}$. La question précédente permet également d'affirmer que

$$w'(x) = f_1'(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} k'_n(x) = f_1'(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} f'_n(x) - f'_{n-1}(x)$$

Par lien suite/série télescopique, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f'_n(x))$ converge donc vers $w'(x)$. Or on a vu précédemment que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f'_n(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1}$$

Par passage à la limite,

$$|w'(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1}$$

$\boxed{27}$ **27.a**

27.b Avec un lien suite/série télescopique,

$$w = f_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} k_n$$

27.c Pour $n \geq p + 1$, les fonctions k_n sont de classe $\mathcal{C}^p$. Ce qui précède montre que pour tout $j \in [\![0, p]\!]$, $\sum_{n\geq p+1} k_n^{(j)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Remarque. En fait, pour $j \in [\![0, p-1]\!]$, il suffit de la convergence simple de $\sum_{n\geq p+1} k_n^{(j)}$ et de la convergence uniforme de $\sum_{n\geq p+1} k_n^{(p)}$.

On en déduit que $\sum_{n=p+1}^{+\infty} k_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$. Comme f_p est également de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$, $w = f_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} k_n$ est également de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$.

27.d Soit $x \in \mathbb{R}$. On prouve comme précédemment que

$$w^{(p)}(x) = \lim_{n\to+_infty} f_n^{(p)}(x)$$

Or pour tout $n \geq p$,

$$|f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}$$

donc, par passage à la limite,

$$|w^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_p}$$

28 Comme $f \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$, il existe $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leq \mathrm{AB}^n \mathrm{M}_n$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |g^{(n)}(x)| = |a^n f^{(n)}(x)| \leq \mathrm{A}(|a|\mathrm{B})^n \mathrm{M}_n$$

donc $g \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$.

29 La fonction nulle appartient évidemment à $\mathcal{C}(\mathrm{M})$.
Soit $(f, g) \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$. Il existe donc $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leq \mathrm{AB}^n \mathrm{M}_n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |g^{(n)}(x)| \leq \mathrm{CD}^n \mathrm{M}_n$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|(\lambda f + \mu g)^{(n)}(x)| = |\lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x)| \leq |\lambda||f^{(n)}(x)| + |\mu||g^{(n)}(x)| \leq |\lambda|\mathrm{AB}^n \mathrm{M}_n + |\mu|\mathrm{CD}^n \mathrm{M}_n \leq (|\lambda|\mathrm{A} + \mu\mathrm{C})\mathrm{E}^n \mathrm{M}_n$$

en posant $\mathrm{E} = \max\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$. Ains $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$.
On en déduit que $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

30 **30.a** On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{M}_n^2 \leq \mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_{n+1}$ i.e. $\frac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-1}} \leq \frac{\mathrm{M}_{n+1}}{\mathrm{M}_n}$. La suite $\left(\frac{\mathrm{M}_{n+1}}{\mathrm{M}_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Soit alors $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq p$. Comme $n - p \leq n$, $\frac{\mathrm{M}_{n-p+1}}{\mathrm{M}_{n-p}} \leq \frac{\mathrm{M}_{n+1}}{\mathrm{M}_n}$ i.e. $\frac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-p}} \leq \frac{\mathrm{M}_{n+1}}{\mathrm{M}_{n+1-p}}$. La suite $\left(\frac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-p}}\right)_{n\geq p}$ est donc croissante. Notamment, pour tout entier $n \geq p$, $\frac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-p}} \geq \frac{\mathrm{M}_p}{\mathrm{M}_0} = \mathrm{M}_p$. On a donc montré que pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$, $\mathrm{M}_k \mathrm{M}_{n-k} \leq \mathrm{M}_n$.

30.b Soit $(f, g) \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$. Il existe donc $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leq \mathrm{AB}^n \mathrm{M}_n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |g^{(n)}(x)| \leq \mathrm{CD}^n \mathrm{M}_n$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned}
|(fg)^{(n)}(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |f^{(k)}(x)||g^{(n-k)}(x)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{ACB}^k \mathrm{D}^{n-k} \mathrm{M}_k \mathrm{M}_{n-k} \\
&\leq \mathrm{AC}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}^k \mathrm{D}^{n-k}\right) \mathrm{M}_n = \mathrm{AC}(\mathrm{B}+\mathrm{D})^n \mathrm{M}_n
\end{aligned}$$

Donc $fg \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$.

31 Tout d'abord, $U_n \geq 1 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, $U_0 = 0! = 1$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_{n-1}U_{n+1} - U_n^2 = (n-1)!(n+1)! - (n!)^2 = (n-1)!n!((n+1)-n) = (n-1)!n! \geq 0$$

32 **32.a** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k + \int_\alpha^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

32.b Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-\alpha| \leq \frac{1}{2B}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire,

$$|f(x)| \leq \int_\alpha^x \frac{|x-t|^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_\alpha^x \frac{1}{(2B)^n n!} AB^{n+1}(n+1)!\,\mathrm{d}t = \frac{|x-\alpha|AB(n+1)}{2^n} \leq \frac{(n+1)A}{2^{n+1}}$$

Par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)A}{2^{n+1}} = 0$ donc $f(x) = 0$.

Remarque. On aurait pu utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange plutôt que la formule de Taylor avec reste intégral.

32.c Soit $f \in \mathcal{C}(U)$. Supposons que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On va montrer par récurrence que f est nulle sur $[-n/2B, n/2B]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est clairement vrai pour $n = 0$ puisque $f(0) = 0$. Supposons que ce soit vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $f^{(k)}(n/2B) = f^{(k)}(-n/2B)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La question précédente montre alors que f est nulle sur $[-1/2B, 1/2B] + n/2B$ et sur $[-1/2B, 1/2B] - n/2B$. Comme f est déjà nulle sur $[-n/2B, n/2B]$, elle est finalement nulle sur $[-(n+1)/2B, (n+1)/2B]$, ce qui achève la récurrence.
Finalement, f est nulle sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n/2B, n/2B] = \mathbb{R}$.

33 Soit $f \in \mathcal{C}(M) \cap \mathcal{W}$.