Devoir à la maison n°19

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 On propose une version itérative.

```python
def factorielle(n):
    f = 1
    for k in range(1,n+1):
        f *= k
    return f
```

On teste la fonction.

```python
>>> factorielle(5)
120
```

2 De manière générale le calcul de `factorielle(n)` coûte n multiplications. En tout, le calcul de `binom(30, 10)` coûte donc 30+20+10=60 multiplications (on néglige l'unique multiplication à l'intérieur du corps de la fonction `binom`). Si l'on remarque que

$$\binom{n}{p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)}{p!}$$

le calcul de $\binom{n}{p}$ ne coûte plus que $2p$ multiplications (20 dans le cas précis). Si l'on remplace \\ par \ dans la dernière ligne de la fonction `binom`, le résultat renvoyé est un flottant.

3 Soient p et n des entiers tels que $1 \leq p \leq n$.

$$p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = n\frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = n\binom{n-1}{p-1}$$

On en déduit la fonction récursive suivante.

```python
def binom_rec(n, p):
    assert 0<=p<=n
    if p==0:
        return 1
    return n*binom_rec(n-1, p-1)//p
```

On teste cette fonction.

```python
>>> binom_rec(6, 4)
15
```

4 On construit de manière itérative la liste des nombres de Bernoulli $b_0, \dots, b_n$ et on renvoie son dernier élément.

```python
def bernoulli(n):
    B=[1]
    for k in range(1,n+1):
        B.append(-sum([binomial(k+1, j)*B[j] for j in range(k)])/(k+1))
    return B[-1]
```

On teste à nouveau cette fonction avec la donnée de l'énoncé.

```
>>> binomial=binom_rec
>>> bernoulli(10)
0.07575757575757564
```

5 Soit $b \in]a,1[$. Par croissances comparées, $\frac{\ln(n)}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^b}\right)$. La série $\sum \frac{1}{n^b}$ est une série à termes positifs convergente donc $\sum \frac{\ln(n)}{n^a}$ converge également.

6 • La série $\sum f_n$ converge simplement vers ζ sur $]1,+\infty[$.

- Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f_n'(x) = -\frac{\ln(n)}{n^x}$.
- Soit $a > 1$. Alors $\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{\ln(n)}{n^a}$ et la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^a}$ converge d'après la question précédente. On en déduit que $\sum f_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 1$.

Par conséquent, ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} \leq 0$$

Ainsi ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$.

Remarque. On aurait aussi pu tout simplement remarquer que les fonctions f_n sont décroissantes sur $]1,+\infty[$. La seule convergence simple de $\sum f_n$ vers ζ garantit la décroissance de ζ sur $]1,+\infty[$.

7 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{1^+} f_n = \frac{1}{n}$. Si $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $]1,+\infty[$, le théorème d'interversion série/limite garantirait la convergence de la série $\sum \frac{1}{n}$, ce qui n'est pas. On en déduit que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

8 D'après ce qui précède, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[2,+\infty[$ par exemple. Or $\lim\limits_{+\infty} f_1 = 1$ et pout tout $n \geq 2$, $\lim\limits_{+\infty} f_n = 0$. D'après le théorème d'interversion série/limite

$$\lim_{+\infty} \zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$

9 La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

puis, en intégrant sur $[n, n+1]$,

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

puis en sommant

$$\zeta(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}^x \leq \mathrm{I}(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x)$$

ou encore

$$\mathrm{I}(x) \leq \zeta(x) \leq \mathrm{I}(x) + 1$$

Or $\mathrm{I}(x) = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$. On en déduit que

$$1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq 1 + (x-1)$$

puis $\lim_{x\to1^+}(x-1)\zeta(x) = 1$ par théorème des gendarmes ou encore $\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

10 La série $\sum \frac{1}{n^x}$ est un série à termes positifs convergente. On en déduit que la famille $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de somme $\zeta(x)$. Ainsi la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in\mathrm{A}} = \left(\frac{1}{a^x}\cdot\frac{1}{b^x}\right)_{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable en tant que produit de deux famille sommables, à savoir $\left(\frac{1}{a^x}\right)_{a\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{b^x}\right)_{b\in\mathbb{N}^*}$. De plus, sa somme est le produit des sommes de ces deux fammilles, à savoir $\zeta(x)^2$.
Posons $\mathrm{A}_n = \{(a,b)\in\mathrm{A},\ ab = n\}$. Alors $\mathrm{A} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{A}_n$. La famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in\mathrm{A}}$ étant sommable, on peut appliquer le théorème de sommation par paquets :

$$\zeta(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(a,b)\in\mathrm{A}_n}\frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{card}\mathrm{A}_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x}$$

Remarque. Puisque la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in\mathrm{A}}$ est positive, on aurait pu appliquer le théorème de sommation par paquets sans hypothèse de sommabilité.

11 Remarquons que

$$[\mathrm{X}\in a\mathbb{N}^*] = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty}[\mathrm{X} = na]$$

Par σ-additivité,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}\in a\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X} = na) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\zeta(s)(na)^s} = \frac{1}{\zeta(s)a^x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \frac{1}{a^s}$$

12 L'immplication réciproque est triviale. On ne démontrera que l'implication directe.
On démontre d'abord le lemme suivant : si a et b sont deux entiers premiers entre eux divisant N, alors ab divise N. En effet, il existe alors un entier k tel que $\mathrm{N} = ka$. Comme b divise $\mathrm{N} = ka$ et $a\wedge b = 1$, b divise k d'après le lemme de Gauss. Il est alors clair que ab divise N.
L'implication directe est évidemment vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$. Soient alors $a_1,\dots,a_{n+1}$ des entiers naturels premiers entre eux deux à deux tels que $a_i \mid \mathrm{N}$ pour tout $i\in[\![1,n+1]\!]$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\prod_{i=1}^n a_i$ divise N. On sait également que a_{n+1} divise N. Remarquons que $\prod_{i=1}^n a_i$ et a_{n+1} sont premiers entre eux. Si ce n'était pas le cas, ils posséderaient un diviseur premier commun p. En vertu du lemme d'Euclide, p diviserait l'un des a_i pour $i\in[\![1,n]\!]$ ainsi que a_{n+1}, ce qui contredirait le fait que les a_i sont premiers entre eux deux à deux. Ainsi $\prod_{i=1}^n a_i$ et a_{n+1} sont premiers entre eux et divisent tous deux N. On en déduit avec le lemme que leur produit $\prod_{i=1}^{n+1} a_i$ divise N, ce qui achève la récurrence.
Le resultat est faux si les a_i sont seulement supposés premiers entre eux dans leur ensemble. Par exemple, 2, 3 et 4 divisent 12 et sont premiers entre eux dans leur ensemble mais leur produit ne divise évidemment pas 12.

13 Soit I une partie de $[\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}}[\mathrm{X}\in a_i\mathbb{N}^*]\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}}[a_i \mid \mathrm{X}]\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\left[\prod_{i\in\mathrm{I}} a_i \mid \mathrm{X}\right] \qquad \text{d'après la question précédente}\right)\\
&= \frac{1}{\left(\prod_{i\in\mathrm{I}} a_i\right)^s} \qquad \text{d'après la question } \mathbf{11}\\
&= \prod_{i\in\mathrm{I}}\frac{1}{a_i^s}\\
&= \prod_{i\in\mathrm{I}}\mathbb{P}(\mathrm{X}_i\in a_i\mathbb{N}^*) \qquad \text{d'après la question } \mathbf{11}
\end{aligned}$$

On en déduit que les événements $[X \in a_i\mathbb{N}^*]$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ sont mutuellement indépendants.

14 Remarquons que

$$\mathrm{B}_n = \bigcap_{k=1}^n [X \notin p_k\mathbb{N}^*] = \bigcap_{k=1}^n \overline{[X \in p_k\mathbb{N}^*]}$$

Comme les événements $[X \in p_k\mathbb{N}^*]$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ sont mutuellement indépendants, il en est de même de leurs complémentaires. Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}\left(\overline{[X \in p_k\mathbb{N}^*]}\right) = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(X \in p_k\mathbb{N}^*)) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$$

15 Par définition de B_n, $X(\omega)$ n'est divisible par aucun nombre premier. On en déduit que $X(\omega) = 1$. Ainsi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n \subset [X = 1]$. L'inclusion réciproque est évidente donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n = [X = 1]$. Comme la suite (B_n) est décroissante pour l'inclusion, on obtient par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$$

ou encore

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

16 Remarquons que

$$\ln(u_n) = -\sum_{k=1}^n \ln(1 - \frac{1}{p_n})$$

Comme la suite (p_n) diverge vers $+\infty$, $-\ln(1 - \frac{1}{p_n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_n}$. Par hypothèse, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{p_n}$ converge donc la série $\sum -\ln(1 - \frac{1}{p_n})$ également. On en déduit que la suite $(\ln(u_n))$ converge, puis que (u_n) converge aussi vers un réel l.
Soit $s > 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k > 1$ donc $p_k^s \geq p_k$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \leq \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = u_n$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\zeta(s) \leq l$. Autrement dit, ζ serait majorée. Ceci est impossible car on a vu à la question **9** que $\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$ et donc $\lim_{1^+} \zeta = +\infty$.
On en conclut par l'absurde que $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.