# Devoir à la maison n°22

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

## Problème 1 – Centrale MP 2020 Maths 2

# *Espaces à noyau reproduisant*

Les espaces à noyau reproduisant ont des applications dans divers domaines comme l'apprentissage statistique ou la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Ce problème présente en partie III quelques exemples d'espaces à noyau reproduisant, l'un de ces exemples étant obtenu à partir de l'étude préalable dans la partie II d'un opérateur intégral. La partie IV propose quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant.

L'attention du candidat est attirée sur le fait que l'espace préhilbertien étudié *n'est pas le même* dans les différentes parties du problème.

**Définitions**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire. On dit que E est un espace à noyau reproduisant sur I lorsqu'il vérifie les trois propriétés suivantes :

- l'espace E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ;
- pour tout $x \in \mathrm{I}$, l'application $\mathrm{V}_x : (\mathrm{E}, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{V}_x(f) = f(x)$ est continue ;
- pour tout $x \in \mathrm{I}$, il existe une application $k_x \in \mathrm{E}$ vérifiant,

$$\forall f \in \mathrm{E},\ f(x) = \langle k_x, f\rangle$$

On appelle alors *noyau reproduisant* l'application K définie par

$$\forall (x,t) \in \mathrm{I}^2,\ \mathrm{K}(x,t) = k_x(t)$$

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}1$ par morceaux s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\le i\le p}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la restriction de $f$ à $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_{i-1}, x_i]$.

# I Préliminaires

Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, de norme associée $\|\cdot\|$. Soit $u$ un endomorphisme de E vérifiant,

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

**1** Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par $u$. Montrer que l'orthogonal $\mathrm{F}^\perp$ de F est stable par $u$.

On suppose qu'il existe un vecteur unitaire $x_0 \in \mathrm{F}$ vérifiant

$$\langle u(x_0), x_0\rangle = \sup_{x\in\mathrm{F}, \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$$

Pour tout vecteur unitaire $y \in \mathrm{F}$ orthogonal à $x_0$, on pose, pour tout réel $t$,

$$\gamma(t) = x_0 \cos t + y \sin t$$
$$\varphi(t) = \langle u \circ \gamma(t), \gamma(t)\rangle$$

**2** Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

**3** Calculer $\|\gamma(t)\|$ puis justifier que $\varphi'(0) = 0$.

**4** En déduire que $u(x_0)$ est orthogonal à $y$.

**5** Montrer que $x_0$ est vecteur propre de $u$.

# II Etude d'un opérateur

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, muni du produit scalaire défini par,

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2,\ \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.
Pour tout $s \in [0,1]$, on définit la fonction $k_s$ par,

$$\forall t \in [0,1],\ k_s(t) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t < s \\ s(1-t) & \text{si } t \geq s \end{cases}$$

On note également, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, $\mathrm{K}(s,t) = k_s(t)$.

**6** Soit $s \in ]0,1[$. Tracer la courbe représentative de $k_s$ sur $[0,1]$.

**7** Montrer que K est continue sur $[0,1] \times [0,1]$.

Pour tout $f \in \mathrm{E}$, on pose

$$\forall s \in [0,1],\ \mathrm{T}(f)(s) = \int_0^1 k_s(t) f(t)\ \mathrm{d}t$$

**8** Montrer que T est un endomorphisme continu de E.

Soit F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k$ la fonction définie par $p_k(x) = x^k$.

**9** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathrm{T}(p_k)$. En déduire que F est stable par T.

**10** En déduire $(\mathrm{T}(p))''$ pour tout $p \in \mathrm{F}$.

**11** Soit $f \in \mathrm{E}$. Calculer $\mathrm{T}(f)(0)$ et $\mathrm{T}(f)(1)$.

**12** Pour tout $f \in \mathrm{E}$, montrer que $\mathrm{T}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ puis que $\mathrm{T}(f)'' = -f$.

**13** Montrer que T est injectif.

**14** Déterminer l'image de T.

**15** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre non nulle de T et $f$ un vecteur propre associé. Montrer que $f$ est solution de l'équation différentielle $\lambda f'' = -f$.

**16** Déterminer les valeurs propres de T et montrer que les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$. On note $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\left((g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\right)$ et $\mathrm{H} = \mathrm{G}^\perp$.

**17** Justifier que, pour tout $(f, g) \in \mathrm{E}^2$, on a

$$\langle \mathrm{T}(f), g\rangle = \langle f, \mathrm{T}(g)\rangle$$

*On pourra utiliser la question **12**.*

On admet que,

$$\mathrm{H} \neq \{0\} \implies \exists f \in \mathrm{H} \text{ telle que } \begin{cases} \|f\| = 1 \\ \langle \mathrm{T}(f), f\rangle = \sup\limits_{h\in\mathrm{H}, \|h\|=1} \langle \mathrm{T}(h), h\rangle \end{cases}$$

**18** En déduire que $\mathrm{H} = \{0\}$.

**19** Montrer que la famille de vecteurs $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale.

On admet pour la suite que $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite totale.
Pour tout $f \in \mathrm{E}$, on pose,

$$\forall x \in [0,1],\ \Phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}\langle f, g_k\rangle g_k(x)$$

**20** Montrer que $\Phi$ est continue.

Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_\mathrm{N} = \sum\limits_{k=1}^{\mathrm{N}} \langle f, g_k\rangle g_k$.

**21** Montrer que

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \|\mathrm{T}(f_\mathrm{N}) - \Phi\| = 0$$

**22** En déduire $\mathrm{T}(f) = \Phi$.

## III Exemples d'espaces à noyau reproduisant

Dans cette partie, $\mathrm{E}_1$ désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

### III.A Un exemple

**23** Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $E_1$ en posant

$$\forall (f,g) \in (E_1)^2,\ (f \mid g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\ \mathrm{d}t$$

Dans la suite de cette partie, on désigne par N la norme associée à ce produit scalaire.

**24** Montrer que, pour toute fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$, on a

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leq \sqrt{x \int_0^x (f'(t))^2\ \mathrm{d}t}$$

On pose, pour tout $f \in E_1$,

$$U(f)(s) = \int_0^1 k_s'(t)f'(t)\ \mathrm{d}t$$

où $k_s$ a été défini dans la partie précédente.

**25** Soit $f \in E_1$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $U(f) = -T(f'')$. En déduire que $U(f) = f$.

**26** Montrer que U est l'application identité de $E_1$.

**27** Démontrer que l'espace préhilbertien $(E_1, (\cdot \mid \cdot))$ est un espace à noyau reproduisant et que son noyau reproduisant est l'application K définie dans la partie précédente.

### III.B Un contre-exemple

On considère à nouveau l'espace E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

**28** Montrer que $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ n'est pas un espace à noyau reproduisant.

### III.C Fonctions développables en série entière

**29** Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que la série $\sum (a_n)^2$ soit convergente.
Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est supérieur ou égal à 1.

Dans la suite de cette sous-partie, on considère l'ensemble $E_2$ des fonctions de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

où $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\sum (a_n)^2$ converge. Pour $f, g \in E_2$ , on pose

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \quad \text{où} \quad f\colon t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \text{et} \quad g\colon t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

**30** Montrer que $E_2$ muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un espace préhilbertien réel.

**31** Soit $x \in ]-1,1[$. Déterminer $g_x \in E_2$ tel que, pour tout $f \in E_2$,

$$f(x) = \langle g_x, f\rangle$$

**32** En déduire que $E_2$ est un espace à noyau reproduisant et préciser son noyau.

### III.D Autre exemple parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

On se donne dans cette sous-partie un réel $a > 0$.

On considère l'espace $E_3$ des fonctions $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, a]$, et vérifiant $f(0) = 0$. On munit $E_3$ du produit scalaire défini, pour $f, g \in E_3$, par

$$(f \mid g) = \int_0^a f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

**33** Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto \min(x, y)$ est un noyau reproduisant sur $(E_3, (\cdot \mid \cdot))$.

Soit $E_4$ l'espace des fonctions continues sur $[0, a]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et vérifiant de plus $f(a) = 0$. Soit $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\varphi(a) = 0$ et, pour tout $x \in [0, a]$, $\varphi'(x) < 0$.

**34** Déterminer un produit scalaire sur $E_4$ tel que la fonction $(x, y) \mapsto \min(\varphi(x), \varphi(y))$ soit un noyau reproduisant sur l'espace préhilbertien $E_4$.

## IV Quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant

### IV.A Continuité

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace à noyau reproduisant sur un intervalle I, de noyau reproduisant K.

Pour tout $(x, y) \in I^2$, on pose $k_x(y) = K(x, y)$.

Soit $x \in I$ et $V_x$ définie sur E par $V_x(f) = f(x)$. On pose

$$N(V_x) = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$$

**35** Démontrer que

$$N(V_x) = \sqrt{\langle k_x, k_x\rangle}$$

On suppose que K est continue sur $I \times I$.

**36** Démontrer que toutes les fonctions de E sont continues.

### IV.B Construction d'un espace à noyau reproduisant

On note ici E l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On considère une fonction $A : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. On s'intéresse à l'application $T : E \to E$ définie par

$$T(f)(x) = \int_0^1 A(x, t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

On suppose que $\operatorname{Ker} T$ est de dimension finie.

**37** Justifier que T induit un isomorphisme de $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ sur $\operatorname{Im} T$.

On note désormais S la bijection réciproque de cet isomorphisme.

On définit le produit scalaire $\varphi$ sur $\operatorname{Im} T$ en posant, pour tout $(f, g) \in (\operatorname{Im} T)^2$,

$$\varphi(f, g) = \langle S(f), S(g)\rangle$$

On considère l'application K définie sur $[0, 1]^2$ par

$$K(x, y) = \int_0^1 A(x, t)A(y, t)\,\mathrm{d}t$$

**38** Montrer que $(\operatorname{Im} T, \varphi)$ est un espace à noyau reproduisant, de noyau K.