Semaine du 29/01

1 Cours

Séries entières

Rayon de convergence Définition. Lemme d'Abel. Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence. Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R, elle converge absolument lorsque $|z| < \mathrm{R}$ et elle diverge grossièrement lorsque $|z| > \mathrm{R}$. Utilisation de la règle de d'Alembert. Comparaisons de séries entières ($|a_n| \leq |b_n| \implies \mathrm{R}_a \geq \mathrm{R}_b$, $a_n = \mathcal{O}(b_n) \implies \mathrm{R}_a \geq \mathrm{R}_b$, $|a_n| \sim |b_n| \implies \mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$). Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Opérations Rayon de convergence d'une somme de deux séries entières. Produit de Cauchy de deux séries entières : rayon de convergence et somme.

Régularité de la somme Une série entière converge normalement sur tout disque fermé centré en l'origine et inclus dans le disque ouvert de convergence. La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence. Primitivation terme à terme d'une série entière de la variable réelle sur son intervalle ouvert de convergence. Une série entière de la variable réelle est $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence et les dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme. Si $\sum a_n x^n$ admet un rayon de convergence strictement positif, alors en notant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si les sommes de deux séries entières coïncident sur un voisinage de 0, alors leurs coefficients sont égaux. Théorème de convergence radiale d'Abel : si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et si $\sum a_n \mathrm{R}^n$ converge, alors $\lim_{x \to \mathrm{R}^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{R}^n$.

Développement en série entière Définition. Série de Taylor. Développements en série entière usuels.

2 Méthodes à maîtriser

- Déterminer un rayon de convergence :
  - utiliser la définition ;
  - utiliser la règle de d'Alembert ;
  - utiliser les règles de comparaison pour majorer/minorer le rayon de convergence ;
  - si (a_n) est bornée, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 ;
  - si (a_n) ne converge pas vers 0, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est inférieur ou égal à 1.
- Si l'on dispose d'une relation de récurrence sur les coefficients d'un développement en série entière, déterminer une équation différentielle dont la somme de la série entière est solution.
- Développer en série entière une fonction donnée :
  - utiliser une équation différentielle pour en déduire une relation de récurrence sur les coefficients de la série entière ;
  - s'il s'agit d'une fraction rationnelle, décomposer en éléments simples et utiliser le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et de ses dérivées.
- Calculer la somme d'une série entière :
  - reconnaître des développements en série entière usuels ;
  - faire apparaître un produit de Cauchy ;
  - dans le cas $\sum \mathrm{P}(n) z^n$ où P est un polynôme, utiliser le développement en série entière de $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ et de ses dérivées ;
  - dans le cas $\sum \mathrm{F}(n) z^n$ où F est une fraction rationnelle, décomposer en éléments simples puis utiliser le développement en série entière de $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ et de ses dérivées/primitives.
- Calculer des sommes de séries numériques à l'aide du théorème de convergence radiale d'Abel : par exemple, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 22, 23, 24, 47, 51