

## Bases orthonormales

### Exercice 1 ★★

### Produit mixte et produit vectoriel

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension  $n \geq 1$ .

1. Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases orthonormées directes de  $E$ . Montrer que  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$ .
2. En déduire que  $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$ .
3. Soient  $x_1, \dots, x_{n-1}$   $n - 1$  vecteurs de  $E$ . Montrer que l'application

$$x \in E \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$$

est une forme linéaire sur  $E$ .

4. En déduire qu'il existe un unique vecteur  $u \in E$  tel que

$$\forall x \in E, \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle u, x \rangle$$

On appelle  $u$  le produit vectoriel des vecteurs  $x_1, \dots, x_{n-1}$  et on note

$$u = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$

5. Montrer que l'application

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1} \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$

est une application  $n - 1$ -linéaire alternée.

### Exercice 2 ★★★

1. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}_n[X]^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. Donner sans calcul une base orthonormale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

### Exercice 3 ★★★

Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $e_1, \dots, e_n$  des vecteurs de  $E$  tels que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle^2$$

1. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \langle y | e_i \rangle$$

2. En déduire que

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i$$

3. Etablir que  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  est une base orthonormée de  $E$ .

### Exercice 4 ★★

### Formule de Parseval

Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base orthonormale totale d'un espace préhilbertien réel  $E$ . Montrer que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2$$

## Sous-espaces orthogonaux

### Exercice 5 ★★

Montrer que  $s : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^\top \end{cases}$  est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  pour le produit scalaire défini par  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$  pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice 6 ★★

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel  $E$ .

1. Montrer que  $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$  et que, si  $F$  et  $G$  sont de dimension finie,  $G^\perp \subset F^\perp \implies F \subset G$ .
2. Montrer que  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .
3. Montrer que  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$  et que, si  $E$  est de dimension finie,  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

### Exercice 7 ★★

### Orthogonal et topologie

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel  $E$  que l'on munit de sa norme euclidienne.

1. Montrer que pour tout  $y \in E$ ,  $\varphi_y : x \in E \mapsto \langle x, y \rangle$  est continue.
2. Montrer que  $F^\perp$  est fermé dans  $E$ .
3. Montrer que de manière générale,  $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$ .

## Projection orthogonale

### Exercice 8 ★★

Soit  $u$  un vecteur unitaire d'un espace euclidien  $E$ . On note  $U$  le vecteur colonne représentant  $u$  dans une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur  $\text{vect}(u)$  dans  $\mathcal{B}$ .

### Exercice 9 ★★★

### ENS MP

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Montrer qu'il existe un vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^n$  non nul tel que les projetés orthogonaux de  $e_1, \dots, e_n$  sur  $\text{vect}(u)$  aient la même norme.
2. Montrer que cette norme commune est indépendante du vecteur  $u$  choisi et l'exprimer en fonction de  $\|e_1\|, \dots, \|e_n\|$ .

### Exercice 10 ★★

### Caractérisations des projections orthogonales

Soient  $E$  un espace euclidien et  $p$  une projection de  $E$ . Etablir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1.  $p$  est orthogonale ;
2.  $\forall x, y \in E, \langle p(x)|y \rangle = \langle x|p(y) \rangle$  ;
3.  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .

### Exercice 11 ★★★

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit  $u \in O(E)$ .

1. Montrer que  $E = \text{Ker}(\text{Id}_E - u) \oplus^\perp \text{Im}(\text{Id}_E - u)$ .
2. Soit  $x \in E$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$ . Montrer que  $(x_n)$  converge vers la projection de  $x$  sur  $\text{Ker}(\text{Id}_E - u)$  parallèlement à  $\text{Im}(\text{Id}_E - u)$ .

### Exercice 12

### CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ .

1. Montrer que  $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. Calculer  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Donner une base orthonormée de  $F = \mathbb{R}_2[X]$ .
4. Déterminer le projeté orthogonal de  $X^3$  sur  $F$ .
5. Montrer que :

$$\forall P \in E, \left| \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt}$$

**Exercice 13 ★★**

CCINP (ou CCP) MP 2021

Soient  $n \geq 3$ ,  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $M$ .

1. Donner le rang de  $M$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $M$  et les sous-espaces propres associés.
3. Donner la matrice du projecteur orthogonal sur  $\text{Im } f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

## Optimisation

**Exercice 14 ★★★**

Calculer le minimum de  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$(a, b) \mapsto \int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 dx$$

**Exercice 15 ★★★**

Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . On munit  $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ) du produit scalaire  $(X, Y) \mapsto X^\top Y$ . On se donne  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ . On pose  $E = \{\|AX - B\|^2, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$  et  $K = \inf E$ .

1. Justifier l'existence de  $K$ .
2. On considère le système linéaire  $(\mathcal{S}) : AX = B$ . On appelle *pseudo-solution* de  $\mathcal{S}$  tout élément  $Y$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $\|AY - B\|^2 = K$ . Montrer que si  $(\mathcal{S})$  admet une solution, les pseudo-solutions de  $(\mathcal{S})$  sont les solutions de  $(\mathcal{S})$ .
3. On associe à  $(\mathcal{S})$  le système  $(\mathcal{S}') : A^\top AX = A^\top B$ . Montrer qu'un élément  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est pseudo-solution de  $(\mathcal{S})$  si et seulement si il est solution de  $(\mathcal{S}')$ .
4. Montrer que  $\text{rg } A^\top A = \text{rg } A$ .
5. Montrer que si  $\text{rg } A = n$ ,  $(\mathcal{S})$  admet une unique pseudo-solution.

**Exercice 16 ★★★**

ENS MP 2010

Soient  $E$  un espace euclidien et  $x_1, \dots, x_p$  des vecteurs de  $E$ . Pour  $x \in E$ , on pose  $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$ . Montrer que  $f$  atteint son minimum en un unique point que l'on précisera.

**Exercice 17 ★★★**

Soient  $E$  un espace euclidien et  $x_1, \dots, x_p$  des vecteurs de  $E$ . Pour  $x \in E$ , on pose  $f(x) = \sum_{i=1}^p \|x - x_i\|^2$ . Montrer que  $f$  atteint son minimum en  $m = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$ .

**Exercice 18 ★★**

CCINP (ou CCP) MP 2021

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ . On rappelle que  $A_0 = 1$ . Pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ , on pose  $\langle P, Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ .

1. Vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Calculer  $A_n$  en distinguant deux cas selon la parité de  $n$ .
3. Trouver une base orthonormée de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
4. Calculer  $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$ .

## Isométries vectorielles et matrices orthogonales

**Exercice 19 ★★★**

Soient  $H$  et  $K$  deux hyperplans d'un espace euclidien  $E$ . On note  $s_H$  et  $s_K$  les réflexions par rapport à  $H$  et  $K$ . Montrer que  $s_H$  et  $s_K$  commutent si et seulement si  $H = K$  ou  $H^\perp \subset K$ .

### Exercice 20 ★★

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Trouver les  $f \in \mathcal{L}(E)$  tels que

$$\forall u, v \in E, f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$$

2. Trouver les  $f \in \mathcal{L}(E)$  tels que

$$\forall u, v \in E, f(u \wedge v) = -f(u) \wedge f(v)$$

### Exercice 21 ★★

Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation  $x + 2y - 3z = 0$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 22 ★★

Déterminer les réels  $a, b, c$  pour que  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$  soit la matrice d'une rotation.

### Exercice 23 ★★★

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 2.

1. On sait que la matrice d'une réflexion de  $E$  dans une base orthonormée est de la forme  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ . Quelle est l'interprétation géométrique de  $\theta$ ?
2. Déterminer une condition portant sur l'angle entre leurs axes pour que la somme de deux réflexions soit encore une réflexion.

### Exercice 24 ★★

Petites Mines 2009

Soit  $u$  une isométrie vectorielle d'un espace euclidien  $E$ . On pose  $v = \text{Id}_E - u$ . Montrer que  $\text{Im } v$  et  $\text{Ker } v$  sont orthogonaux et supplémentaires.

### Exercice 25 ★★

Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  engendré par la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  où

$$e_1 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e_2 : t \mapsto \cos(2\pi t) \quad e_3 : t \mapsto \sin(2\pi t)$$

1. Montrer que  $\Phi : (f, g) \mapsto 2 \int_0^1 f(t)g(t) dt$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. Montrer que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base orthonormée de  $E$ .
3. Pour tout réel  $x$ , on définit l'application  $\tau_x$  qui à tout élément  $f$  de  $E$  associe  $g$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(x - t)$$

- a. Montrer que  $\tau_x$  est un endomorphisme de  $E$ . Donner sa matrice relativement à  $\mathcal{B}$ .
- b. Montrer que  $\tau_x$  est une isométrie vectorielle de  $E$ .
- c. Caractériser géométriquement  $\tau_x$ .

### Exercice 26 ★★

Déterminer l'image de la droite d'équation  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  par la rotation d'angle  $\frac{\pi}{6}$  et d'axe dirigé par  $\vec{a}(1, 1, 1)$ .

### Exercice 27 ★★

Soit  $E = \mathbb{R}^3$  muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de  $E$  de la réflexion  $s_1$  par rapport au plan d'équation  $x + y - 2z = 0$ .
2. Quelle est la nature de l'endomorphisme  $f$  de  $E$  dont la matrice dans la base canonique est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Donner ses éléments caractéristiques.
3. Trouver les réflexions  $s_2$  et  $s_3$  telles que  $s_1 \circ s_2 = f$  et  $s_3 \circ s_1 = f$ . Préciser leur plan de réflexion.

### Exercice 28 ★

Soient  $E$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $A$  la matrice de  $f$  dans une base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Montrer que  $f$  est une symétrie orthogonale si et seulement si  $A$  est une matrice orthogonale symétrique.

### Exercice 29 ★★

Mines MP 2011

Soient  $E$  un espace euclidien de dimension 3 ainsi que deux éléments  $f$  et  $g$  de  $\text{SO}(E)$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ .  
Montrer que  $f$  et  $g$  sont soit deux rotations de même axe soit des symétries par rapport à des droites orthogonales entre elles.

### Exercice 30 ★★

Banque Mines-Ponts MP 2018

Soit  $f$  une isométrie vectorielle d'un espace euclidien  $E$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$ .
2. En déduire que  $(f - \text{Id}_E)^2 = 0 \implies f = \text{Id}_E$ .

### Exercice 31 ★★

Soient  $E$  un plan vectoriel euclidien orienté,  $r$  une rotation de  $E$  et  $s$  une réflexion. Calculer  $s \circ r \circ s$  et  $r \circ s \circ r$ .

### Exercice 32 ★★★

Soit  $O = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  une matrice orthogonale réelle de taille  $n$  où  $A$  et  $D$  sont deux blocs carrés de tailles respectives  $p$  et  $q$ . Montrer que  $(\det A)^2 = (\det D)^2$ .

### Exercice 33 ★

Soient  $A$  et  $B$  les matrices, dans deux bases orthonormales, d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que  $\text{tr}(A^T A) = \text{tr}(B^T B)$ .

### Exercice 34 ★★

1. Soit  $X$  une matrice colonne réelle de taille  $n$ . Montrer que  $X^T X \in \mathbb{R}_+$  et que  $X^T X = 0$  implique  $X = 0$ .
2. Soit  $M$  une matrice antisymétrique réelle de taille  $n$ . Montrer que  $I_n + M$  est inversible.
3. On pose  $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ . Montrer que  $A$  est orthogonale.

### Exercice 35 ★★★★★

ENS MP 2010

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer toutes les matrices de  $O_n(\mathbb{R})$  laissant stable  $(\mathbb{R}_+)^n$ .

### Exercice 36 ★★★

Soient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A = \text{com}(A)$  si et seulement si  $A = 0$  ou  $A \in \text{SO}(n)$ .

## Adjoint

### Exercice 37 ★★

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. On pose

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|f(x)\|$$

Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \|f\| = \|f^*\|$$

### Exercice 38 ★★

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker}(u)$ .
2. En déduire que  $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^*) = \text{rg}(u^* \circ u) = \text{rg}(u \circ u^*)$ .

**Exercice 39 ★★★**

**X PC 2012**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  tel que  $\text{Im } u = \text{Ker } u$ . Montrer que  $u + u^*$  est inversible.

**Exercice 40 ★**

**Autour de l'adjoint**

Soient  $E$  un espace euclidien et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ . Etablir que

$$\text{Ker}(f + f^*) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^*)$$

**Exercice 41 ★★**

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de son produit scalaire usuel. On pose pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $g_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$ . Calculer l'adjoint de  $g_A$ .

**Exercice 42 ★★**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ .

1. Montrer que  $\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp$  et que  $\text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$ .
2. En déduire que  $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^*)$ .

**Exercice 43 ★★★**

Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$u^* \circ u + \alpha u + \beta u^* = 0$$

1. On suppose  $\alpha \neq \beta$ . Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $p$  un projecteur orthogonal de  $E$  tels que  $u = \lambda p$ .
2. On suppose  $\alpha = \beta$ . Montrer que  $\text{Im}(u)$  et  $\text{Ker}(u)$  sont orthogonaux.

**Exercice 44 ★★**

Soit  $E$  un espace euclidien. Montrer que  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2 \mapsto \text{tr}(f^* \circ g)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

**Exercice 45 ★★**

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ .

1. Montrer que  $\text{tr}(f) = \text{tr}(f^*)$ .
2. Montrer que  $\det(f) = \det(f^*)$ .
3. Montrer que  $\chi_f = \chi_{f^*}$ .
4. Montrer que  $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(f^*)$ .
5. Montrer que pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ ,  $\dim E_\lambda(f) = \dim E_\lambda(f^*)$ .

**Exercice 46 ★★★★★**

**Endomorphismes normaux**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . On suppose que  $u$  est un endomorphisme *normal*, c'est-à-dire que  $u^* \circ u = u \circ u^*$ .

1. On suppose dans cette question uniquement que  $\dim E = 2$  et que  $\chi_u$  est irréductible. Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Montrer que la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .
2. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Montrer que  $F^\perp$  est également stable par  $u$  et que les restrictions  $u_F$  et  $u_{F^\perp}$  de  $u$  à  $F$  et  $F^\perp$  sont des endomorphismes normaux de  $F$  et  $F^\perp$ .  
On pourra considérer la matrice de  $u$  dans une base adaptée.
3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme  $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  ou  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .

**Exercice 47 ★★**

**Endomorphismes normaux**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  tel que  $u^* \circ u = u \circ u^*$ .

1. Montrer que  $u$  et  $u^*$  ont les mêmes éléments propres.
2. Montrer que les sous-espaces propres de  $u$  sont deux à deux orthogonaux.

## Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

### Exercice 48 ★★★

Mines-Ponts MP 2016

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension finie. On considère des vecteurs unitaires  $a$  et  $b$  de  $E$  formant une famille libre.

Réduire l'endomorphisme

$$\phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b \end{cases}$$

### Exercice 49 ★★

CCP MP 2016

Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une base de  $E$ . On pose  $f(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$  pour  $x \in E$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme auto-adjoint défini positif.
2. Montrer qu'il existe  $g \in \mathcal{L}(E)$  auto-adjoint, défini positif telle que  $g^2 = f^{-1}$ .
3. Montrer que  $(g(u_1), \dots, g(u_n))$  est une base orthonormale de  $E$ .

### Exercice 50 ★★

Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif

Soit  $f$  un endomorphisme auto-adjoint positif d'un espace euclidien  $E$ . Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint  $g$  de  $E$  tel que  $f = g^2$ .

### Exercice 51 ★

Soit  $f$  un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que  $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$ .

### Exercice 52 ★★

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $f$  un endomorphisme auto-adjoint de  $E$ . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle \geq 0$ .
- (ii) Il existe  $g \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f = g^* \circ g$ .
- (iii) Il existe  $h \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $h^* = h$  et  $f = h^2$ .

### Exercice 53 ★★★

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $f$  un endomorphisme auto-adjoint de  $E$ . On note  $X = \{x \in E, \langle f(x), x \rangle \leq 1\}$ . Montrer que  $X$  est compacte si et seulement si  $f$  est défini positif.

### Exercice 54 ★★★

ENS MP 2010

Montrer que  $\Phi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  qui à une matrice associe sa plus grande valeur propre est une application convexe.

### Exercice 55 ★★★

ENS MP 2010

Soient  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$ . Trouver les valeurs propres de  $B$ .

### Exercice 56 ★★★

Soient  $A, B$  deux matrices réelles symétriques positives de taille  $n$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que tout vecteur propre de  $A^k$  est vecteur propre de  $A$ .
2. Montrer que si  $A^k = B^k$ , alors  $A = B$ .
3. Que se passe-t-il sans l'hypothèse  $A, B$  symétriques positives ?

### Exercice 57 ★★★

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{tr}(AB) \geq 0$ .

### Exercice 58 ★★

Pour  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on pose

$$N(A) = \sqrt{\max \text{Sp}(A^T A)}$$

1. Montrer que  $N$  est une norme sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que si  $n = p$ ,  $N$  est une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 59 ★★★★★**

ENS MP 2006

Soit  $(a, b, c, A, B, C) \in \mathbb{R}^6$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|$$

Montrer que

$$|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|$$

**Exercice 60**

ENS PSI 2016

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\text{Sp}(M^T M) \setminus \{0\} = \text{Sp}(M M^T) \setminus \{0\}$$

**Exercice 61 ★★★★★**

Banque Mines-Ponts MP 2021

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

- (i)  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\forall (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A)^2, \lambda + \mu \neq 0$ ;
- (ii)  $\forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists ! M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), AM + MA = B$ .

**Exercice 62 ★★★**

Résoudre dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  le système

$$\begin{cases} X^T Y X = I_n \\ Y^T X Y = I_n \end{cases}$$

**Exercice 63 ★★★**

Banque Mines-Ponts MP 2021

Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique dont les coefficients diagonaux sont nuls et  $D$  une matrice diagonale.

Montrer que  $S + D$  est semblable à  $D$  si, et seulement si,  $S$  est nulle.

**Exercice 64 ★★★**

Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Soit  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

- 1. Montrer qu'il existe  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A$ .
- 2. Montrer qu'il existe une unique matrice  $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A$ .

**Exercice 65**

CCINP (ou CCP) PC 2019

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que  $M^n = 0$ .

- 1. Montrer que si  $M$  est symétrique, alors  $M = 0$ .
- 2. Montrer que si  $M^T M = M M^T$ , alors  $M = 0$ .

**Exercice 66 ★★★★★**

Décomposition polaire

- 1. Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une matrice  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $A^T A = S^2$ .
- 2. Montrer qu'il existe un couple  $(Q, S) \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  tel que  $A = QS$ .
- 3. Montrer l'unicité du couple  $(Q, S)$  de la question précédente.
- 4. On se donne maintenant  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe un couple  $(Q, S) \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  tel que  $A = QS$ . On pourra utiliser des arguments topologiques. A-t-on encore unicité du couple  $(Q, S)$ ?

**Exercice 67 ★★**

Montrer que  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .



**Exercice 68 ★★**

**Décomposition en valeurs singulières**

Pour une matrice diagonale  $D$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on notera  $D^\alpha$  la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les puissances  $\alpha^{\text{èmes}}$  de ceux de  $D$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ .

1. Justifier que  $A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .
2. On pose  $r = \text{rg}(A^T A)$ . Justifier qu'il existe une matrice  $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et une matrice  $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$  diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs telles que

$$V^T A^T A V = \left( \begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

3. On pose  $V = (V_1, V_2)$  avec  $V_1 \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$  et  $V_2 \in \mathcal{M}_{n,n-r}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $AV_2 = 0$ .
4. On pose  $U_1 = AV_1 D^{-1/2}$ . Montrer qu'il existe  $U_2 \in \mathcal{M}_{m,r-m}(\mathbb{R})$  telle que  $U = (U_1, U_2) \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ .

5. Vérifier que  $A = U \Sigma V^T$  avec  $\Sigma = \left( \begin{array}{c|c} D^{1/2} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ .

**Exercice 69**

**Mines Télécom MP 2022**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  antisymétrique et semblable à une matrice réelle triangulaire supérieure.

1. Déterminer le spectre de  $A$ .
2. Montrer que  $A^n = 0$ .
3. Montrer que  $A^2 = 0$ .
4. Montrer que  $A = 0$ .

**Exercice 70 ★★**

**CCINP (ou CCP) MP 2022**

Soit  $n \geq 2$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice avec des 1 sur la diagonale, sur la première colonne et sur la première ligne, puis des 0 partout ailleurs.

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable.
2. Cas  $n = 2$  : calculer les éléments propres de  $A$ .
3. Cas  $n \neq 2$  :
  - a. Montrer que 1 est une valeur propre de  $A$ .
  - b. Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  autre que 1, alors  $(\lambda - 1)^2 = n - 1$ .
  - c. Expliciter les éléments propres de  $A$ .
  - d. Calculer le déterminant de  $A$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 71 ★★★**

**Signature d'une matrice symétrique**

1. Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ . On dit que  $B$  est *congruente* à  $A$  s'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $B = P^T A P$ . Montrer que la congruence est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On appelle *signature* de  $A$  le couple  $(p, q)$  où  $p$  est le nombre de valeurs propres strictement positives de  $A$  (comptées avec multiplicité) et  $q$  est le nombre de valeurs propres strictement négatives de  $A$  (comptées avec multiplicité).

a. Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  de signature  $(p, q)$ . Montrer que  $A$  est congruente à  $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

b. En déduire que si  $A$  et  $B$  ont même signature, alors elles sont congruentes.

3. Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  de signature  $(p, q)$ .

a. Démontrer qu'il existe trois sous-espaces vectoriels  $E_+$ ,  $E_-$  et  $E_0$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tels que

- $\forall X \in E_+ \setminus \{0\}, X^T S X > 0$ ;
- $\forall X \in E_- \setminus \{0\}, X^T S X < 0$ ;
- $\forall X \in E_0, X^T S X = 0$ ;
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E_+ \oplus E_- \oplus E_0$ ;
- $\dim E_+ = p, \dim E_- = q$ .

b. On suppose qu'il existe trois sous-espaces vectoriels  $F$ ,  $G$  et  $H$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tels que

- $\forall X \in F \setminus \{0\}, X^T S X > 0$ ;
- $\forall X \in G \setminus \{0\}, X^T S X < 0$ ;
- $\forall X \in H, X^T S X = 0$ ;
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F \oplus G \oplus H$ .

Montrer que  $\dim F = p$  et  $\dim G = q$ .

4. En déduire que deux matrices symétriques congruentes ont même signature.

**Exercice 72 ★★**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\varphi : (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto X^T A Y$  est un produit scalaire si et seulement si  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 73 ★★★**

**Réduction simultanée**

Soient  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale telles que

$$P^T A P = I_n \quad \text{et} \quad P^T B P = D$$

**Exercice 74 ★★★**

1. Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\exp(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .
2. Soit  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telle que  $B = \exp(A)$ . Cette matrice  $A$  est-elle unique ?

**Exercice 75 ★★**

**Déterminant de Gram**

Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien  $E$ . On note  $A = (\langle f_i, f_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

1. Montrer que  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $\det(A) = 0$  si et seulement si la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est liée.

**Exercice 76 ★★**

Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique positive sont positifs.

## Polynômes orthogonaux

### Exercice 77 ★★★

On pose  $Q_n = (X^2 - 1)^n = (X + 1)^n(X - 1)^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ . On notera  $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$  par la suite.
2. Soit  $n$  et  $k$  deux entiers tels que  $0 \leq k < n$ . Montrer que  $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$ .
3. On pose  $P_n = Q_n^{(n)}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
4. Soit  $L : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ . Montrer que  $L$  est un endomorphisme auto-adjoint de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
5. Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_k$  est un vecteur propre de  $L$ .

### Exercice 78 ★★★

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Pour tout  $P \in E$ , on pose  $L(P) = P'' - 2XP'$ . Pour tous  $P, Q \in E$ , on note

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$$

1. Vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. Montrer que  $L$  est diagonalisable. On précisera ses valeurs propres.
3. Montrer que  $L$  est auto-adjoint pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
4. Montrer que l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de  $E$  diagonalise  $L$  i.e. est une base de vecteurs propres de  $L$ .

## Divers

### Exercice 79 ★★

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$ . Une application  $u : E \rightarrow E$  est dite *antisymétrique* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, u(y) \rangle + \langle y, u(x) \rangle = 0$$

On note  $A(E)$  l'ensemble des applications antisymétriques de  $E$ .

**REMARQUE.** Rien à voir avec les applications *multilinéaires* antisymétriques !

1. Soit  $u \in A(E)$ . Montrer que  $u$  est linéaire.
2. Soit  $u : E \rightarrow E$ . Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
  - (i)  $u$  est linéaire et  $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$ ;
  - (ii)  $u$  est antisymétrique ;
  - (iii)  $u$  est linéaire et sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.
3. Montrer que  $A(E)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et déterminer sa dimension.
4. Soit  $u \in A(E)$ . Montrer que  $\text{Im } u$  est l'orthogonal de  $\text{Ker } u$ .
5. Montrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$  alors  $F^\perp$  est également stable par  $u$ .

### Exercice 80 ★★★

Montrer que le rang d'une matrice antisymétrique réelle est pair.

### Exercice 81 ★★★★★

**Banque Mines-Ponts MP 2018**

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A^T = A^2 + A - I_n$ .

On appelle  $a$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

1. Décrire  $a$  si  $A$  est symétrique, avec  $A \in \mathcal{E}$ .
2. Décrire  $a$  si on ne suppose plus  $A$  symétrique, avec  $A \in \mathcal{E}$ .

### Exercice 82 ★★★

### CCINP (ou CCP) MP 2021

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$$

1. Montrer que la matrice de  $u$  dans une base orthonormale de  $E$  est antisymétrique.
2. Montrer que  $(\text{Ker } u)^\perp$  est stable par  $u$ .
3. Montrer qu'il existe une base orthonormale de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$  avec  $N$  inversible.
4. Montrer que le rang de  $u$  est pair.

### Exercice 83 ★★★

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On travaille dans l'espace des matrices  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que l'application  $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Que peut-on dire de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$ .
3.
  - a. Quel est l'orthogonal de l'espace  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  des matrices symétriques ?
  - b. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Exprimer la distance de  $A$  à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  en fonction des coefficients de  $A$  ?
4. Soit  $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$ .
5. Montrer que pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

### Exercice 84 ★★★

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $u_1, \dots, u_{n+1}$  des vecteurs non nuls de  $E$  faisant un angle constant  $\alpha_n$  (non nul) deux à deux. Que vaut  $\alpha_n$  ?

### Exercice 85 ★★★

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{rg}(A^T A) = \text{rg}(AA^T) = \text{rg } A$ .

### Exercice 86 ★★★

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  en posant

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

$$\text{pour } P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \text{ et } Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n.$$

2. On pose  $F = \text{vect}(1 + X^n, n \in \mathbb{N}^*)$ . Montrer que  $F$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Montrer que  $F^\perp = \{0\}$ . Conclusion ?