Devoir à la maison n°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Centrale PSI Maths II 2003

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On considère un espace euclidien E de dimension n. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y et $x \mapsto \|x\|$ la norme associée.

Pour $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on note u^* son adjoint, π_u son polynôme minimal, χ_u son polynôme caractéristique et $\operatorname{Sp} u$ l'ensemble de ses valeurs propres.

L'endomorphisme u de E est dit anti-autoadjoint lorsque $u^* = -u$.

On note $\mathcal{S}(\mathrm{E})$, $\mathcal{A}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ les sous-ensembles de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ formés respectivement des endomorphismes autoadjoints, des endomorphismes anti-autoadjoints et des isométries vectorielles.

Si F est un sous-espace de E stable par u, on note $u_{|\mathrm{F}}$ l'endomorphisme de F induit par u.

On note $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes u de E tels que u^* soit un polynôme en u et $\mathcal{N}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui commutent avec leur adjoint, donc :

$$\mathcal{P}(\mathrm{E}) = \{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}),\ u^* \in \mathbb{R}[u]\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}(\mathrm{E}) = \{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}),\ u^* \circ u = u \circ u^*\}$$

Le but du problème est d'étudier et comparer les deux ensembles $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{N}(\mathrm{E})$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n et $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{O}_n$ les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formés respectivement des matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales.

Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note χ_A son polynôme caractéristique et π_A son polynôme minimal. On note $\mathrm{A}^\top$ la transposée de A.

Deux matrices A et B sont dites orthogonalement semblables lorsqu'il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n$ tel que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A}^\top$ peut s'exprimer comme un polynôme en A, donc :

$$\mathcal{P}_n = \{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{A}^\top \in \mathbb{R}[\mathrm{A}]\}$$

et de manière analogue

$$\mathcal{N}_n = \{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{A}^\top\}$$

Les parties I et II sont indépendantes.

I Généralités sur $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{P}_n$

$\boxed{1}$ **1.a** Soient A et B les deux matrices d'un même endomorphisme de E rapporté à deux bases orthonormales. Montrer que A et B sont orthogonalement semblables.

1.b Soit u un endomorphisme de E et A sa matrice sur $\mathcal{B}$, une base orthonormale de E. Etablir un rapport entre l'appartenance de u à $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ (resp. $\mathcal{N}(\mathrm{E})$) et l'appartenance de A à $\mathcal{P}_n$ (resp. $\mathcal{N}_n$).

Dans la suite du problème, on pourra exploiter ce rapport pour répondre à certaines questions.

1.c Montrer que $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{N}(\mathrm{E})$ et que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{N}_n$.

2 **2.a** Vérifier que $\mathcal{S}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{A}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$.

2.b Quelles sont les matrices triangulaires supérieures qui appartiennent à $\mathcal{P}_n$?
En déduire que si $n \geq 2$, on a $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \neq \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2.c Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ admettant, sur une certaine base $\mathcal{B}$ de E, une matrice triangulaire supérieure. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de E, telle que les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ soient triangulaires supérieures.
Montrer que la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure.
En déduire les éléments $u \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ qui sont trigonalisables.

2.d On suppose que u est un automorphisme de E ; montrer que u admet un polynôme annulateur P tel que $\mathrm{P}(0) \neq 0$. En déduire que u^{-1} peut s'écrire comme un polynôme en u.
En déduire que $\mathcal{O}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$.

3 **3.a** Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_n$ et $\mathrm{A} \neq 0$, alors il existe un unique polynôme réel que l'on note $\mathrm{P_A}$, tel que $\deg \mathrm{P_A} < \deg \pi_\mathrm{A}$ et $\mathrm{P_A}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^\top$.
Si A est la matrice nulle, on convient que $\mathrm{P_A}$ est le polynôme nul.
Enoncer le résultat correspondant pour $u \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$.

3.b Déterminer les matrices A de $\mathcal{P}_n$ pour lesquelles $\mathrm{P_A}$ est un polynôme constant.

3.c Déterminer les matrices A de $\mathcal{P}_n$ pour lesquelles $\mathrm{P_A}$ est du premier degré. On rappelle que toute matrice carrée s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

3.d Soient A et B deux matrices orthogonalement semblables.
Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_n$ alors $\mathrm{B} \in \mathcal{P}_n$ et $\mathrm{P_A} = \mathrm{P_B}$.

4 Décrire les éléments A de $\mathcal{P}_2$ et calculer les $\mathrm{P_A}$ correspondants.

5 Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_2 \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{P}_{n_1}$, $\mathrm{A}_2 \in \mathcal{P}_{n_2}$.

5.a On suppose que π_{A_1} et π_{A_2} sont premiers entre eux. Montrer l'existence de deux polynômes U et V tels que :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1} - \left(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1} - \mathrm{P}_{\mathrm{A}_2}\right)\mathrm{U}\pi_{\mathrm{A}_1} = \mathrm{P}_{\mathrm{A}_2} + \left(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1} - \mathrm{P}_{\mathrm{A}_2}\right)\mathrm{V}\pi_{\mathrm{A}_2}$$

Calculer A^m pour m entier positif quelconque, puis $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ pour $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathrm{A}_1} - \left(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1} - \mathrm{P}_{\mathrm{A}_2}\right)\mathrm{U}\pi_{\mathrm{A}_1}$.
En déduire que $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_{n_1+n_2}$.

5.b Expliciter π_A en fonction de π_{A_1} et π_{A_2}.
Comment trouver $\mathrm{P_A}$ connaissant π_{A_1}, π_{A_2} et le polynôme P défini par $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathrm{A}_1} - \left(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1} - \mathrm{P}_{\mathrm{A}_2}\right)\mathrm{U}\pi_{\mathrm{A}_1}$?

6 Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_4$ et calculer $\mathrm{P_A}$ avec la méthode précédente.

II Etude de $\mathcal{N}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{N}_n$

7 Montrer que si $u \in \mathcal{N}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, alors $\mathrm{P}(u) \in \mathcal{N}(\mathrm{E})$.

8 Soient $u \in \mathcal{N}(\mathrm{E})$ et $x \in \mathrm{E}$. Montrer que $\|u(x)\|^2 = \|u^*(x)\|^2$. En déduire que u et u^* ont le même noyau.

9 Soit m un entier, $m > 0$. On suppose donné un endomorphisme f anti-autoadjoint inversible de l'espace $\mathbb{R}^m$ muni de son produit scalaire canonique.

9.a Comparer les déterminants de f et f^*. En déduire que m est pair.

9.b Justifier que f^2 est auto-adjoint puis que f^2 possède un vecteur propre unitaire x_0.
En déduire que $\Pi = \operatorname{vect}(x_0, f(x_0))$ est un plan stable par f.
Donner la forme de la matrice de $f_{|\Pi}$ dans une base orthonormale de Π.

9.c Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^m$ telle que :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{m/2} \end{pmatrix}$$

avec $\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$ et $b_i \neq 0$ pour $i \in [\![1, m/2]\!]$.

10 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{E}_1 \subset \mathrm{E}$ un sous-espace stable par u et u^*. On note E_2 l'orthogonal de E_1.

10.a Montrer que E_2 est stable par u et u^*.

10.b Montrer que $\left(u_{|\mathrm{E}_1}\right)^* = (u^*)_{|\mathrm{E}_1}$.

10.c Montrer que si, en outre, $u \in \mathcal{N}(\mathrm{E})$, alors $u_{|\mathrm{E}_1} \in \mathcal{N}(\mathrm{E}_1)$ et $u_{|\mathrm{E}_2} \in \mathcal{N}(\mathrm{E}_2)$.

Jusqu'à la fin de la partie II, u désigne un élément de $\mathcal{N}(\mathrm{E})$.

11 Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathrm{E}$; montrer que $\|u(x) - \lambda x\|^2 = \|u^*(x) - \lambda x\|^2$. En déduire que u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres et que ceux-ci sont en somme directe orthogonale.

Si λ est une valeur propre de u, on note $\mathrm{E}_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. Soit F le supplémentaire orthogonal du sous-espace $\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$.

Montrer que F est stable par u et u^*. En considérant la restriction de u à F, montrer que la dimension de F est paire. On notera $\dim \mathrm{F} = 2p$.

12 On suppose que p est non nul. Soit $v \in \mathcal{N}(\mathrm{F})$. On pose

$$s = \frac{v + v^*}{2} \qquad \text{et} \qquad a = \frac{v - v^*}{2}$$

12.a Justifier que le polynôme caractéristique de s est scindé. On le note :

$$\chi_s(\mathrm{X}) = \prod_{i=1}^{k} (\mathrm{X} - \lambda_i)^{n_i}$$

12.b Montrer que $s \circ a = a \circ s$ et $s \circ v = v \circ s$.
Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de v dans $\mathcal{B}'$ soit diagonale par blocs :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{M}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{M}_k \end{pmatrix}$$

avec, pour $i \in [\![1, k]\!]$, M_i de la forme $\lambda_i \mathrm{I}_{n_i} + \mathrm{A}_i$ où A_i est antisymétrique.

12.c On suppose en outre que v n'admet aucune valeur propre réelle. Montrer que les A_i sont inversibles.

13 Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_p \end{pmatrix}$$

avec D matrice diagonale, $\tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ et $b_i \neq 0$ pour $i \in [\![1, p]\!]$.

14 Donner une caractérisation des matrices $\mathrm{A} \in \mathcal{N}_n$.

15 Préciser la matrice obtenue dans **13** quand $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.

III Relation entre $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{N}_n$

16 Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

16.a Soit

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{M}_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{M}_k \end{pmatrix}$$

une matrice réelle diagonale par blocs.
Montrer que $\mathrm{P}(\Delta) = \Delta^{\mathsf{T}}$ si et seulement si $\mathrm{P}(\mathrm{M}_i) = \mathrm{M}_i^{\mathsf{T}}$, pour $i \in [\![1, k]\!]$.

16.b Donner les expressions de P_A, χ_A et π_A pour une matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ où } b \neq 0$$

Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^{\mathsf{T}}$ si et seulement si $\mathrm{P}(a+ib) = a - ib$ et $\mathrm{P}(a-ib) = a+ib$.
Dans les questions qui suivent, on fixe $\mathrm{A} \in \mathcal{N}_n$. D'après **14**, A est orthogonalement semblable à une matrice B telle que celle représentée dans **13**.

16.c Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^{\mathsf{T}}$ si et seulement si :

- $\mathrm{P}(\lambda) = \lambda$ pour toute valeur propre réelle λ de A ;
- $\mathrm{P}(z) = \overline{z}$ pour toute racine complexe non réelle z de χ_A.

16.d Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, de degré minimal, vérifiant les conditions ci-dessus (sur $\mathrm{P}(\lambda)$ et $\mathrm{P}(z)$) et que ce polynôme est, en fait, à coefficients réels.
En déduire que $\mathcal{N}_n = \mathcal{P}_n$.

17 Montrer que le polynôme P trouvé dans la question **16.d** est, en fait, P_A.
Retrouver, avec la méthode précédente, le polynôme P_A de la question **6**.

18 Dans cette question, on suppose $n \geq 3$ et on note $\mathrm{C}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice circulante

$$\mathrm{C}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

et $J = C(0, 1, 0, \dots, 0)$.

18.a Montrer que $J \in \mathcal{P}_n$.
En déduire que toute matrice circulante appartient à $\mathcal{P}_n$.

18.b A toute matrice circulante non nulle $A = C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, on associe les polynômes

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \qquad \text{et} \qquad Q(X) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X^{n-i}$$

Donner l'expression de π_J. Comparer Q et le reste de la division euclidienne de $P_A \circ P$ par π_J.
En déduire les étapes d'une méthode de calcul de P_A. Détailler le calcul pour $A = C(1, 1, 0)$.

19 Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ avec $a_2 \neq 0$.

Montrer qu'il existe un entier $n \geq 3$ et une matrice $A \in \mathcal{P}_n$ telle que $P = P_A$ si et seulement si $(a_1 - 1)^2 - 4a_0 a_2 \in [0, 4[$.

Indication : montrer que, si n et A existent, χ_A admet au moins une racine réelle et exactement deux racines complexes, conjuguées l'une de l'autre.