Devoir à la maison n°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 Il suffit d'appliquer la règle de d'Alembert pour conclure que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ vaut 1. Ainsi $\sum \frac{z^n}{n}$ converge pour tout $z \in \mathrm{D}$. D'après le cours

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n} = \ln(1+x)$$

Ainsi

$$\forall z \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$$

2 Pour $t \in [0,1]$,

$$\mathrm{L}(tz) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} t^n$$

Ainsi $\psi : t \mapsto \mathrm{L}(tz)$ est la somme d'une série entière (de la variable t). Son rayon de convergence est $\frac{1}{|z|} > 1$ par la règle de d'Alembert. Notamment, ψ est dérivable sur $[0,1]$ et sa dérivée est

$$\psi' : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = z\sum_{n=0}^{+\infty} (tz)^n = \frac{z}{1-tz}$$

Par produit et composition, $\chi : t \mapsto (1-tz)e^{\mathrm{L}(tz)}$ est dérivable sur $[0,1]$ de dérivée

$$\chi' : t \mapsto -ze^{\mathrm{L}(tz)} + (1-tz)\psi'(t)e^{\mathrm{L}(tz)} = 0$$

Ainsi χ est constante sur $[0,1]$. Notamment, $\chi(0) = \chi(1)$ i.e. $1 = (1-z)e^{\mathrm{L}(z)}$ d'où

$$\exp(\mathrm{L}(z)) = \frac{1}{1-z}$$

3 Par inégalité triangulaire,

$$|\mathrm{L}(z)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|)$$

en utilisant la question **1**.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $z^n \in \mathrm{D}$ donc en appliquant ce qui précède,

$$|\mathrm{L}(z^n)| \leq -\ln(1-|z|^n)$$

Or $-\ln(1-|z|^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^n$ et la série géométrique $\sum |z|^n$ converge donc $\sum -\ln(1-|z|^n)$ converge. On en déduit par majoration de séries à termes positifs que $\sum |\mathrm{L}(z^n)|$ converge. Ainsi $\sum_{n\geq1} \mathrm{L}(z^n)$ converge (absolument).

4 Si $(a_1,\dots,a_n)\in \mathrm{P}_{n,\mathrm{N}}$, alors pour tout $i\in [\![1,\mathrm{N}]\!]$,

$$0\le a_i\le ia_i\le \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} ka_k=n$$

On en déduit que $\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}}\subset [\![0,n]\!]^{\mathrm{N}}$ donc $\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}}$ est fini.
L'application

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}} & \longrightarrow & \mathrm{P}_{n,\mathrm{N}+1}\\ (a_1,\dots,a_{\mathrm{N}}) & \longmapsto & (a_1,\dots,a_{\mathrm{N}},0)\end{array}\right.$$

est bien définie et injective. On en déduit que $p_{n,\mathrm{N}}\le p_{n,\mathrm{N}+1}$. La suite $(p_{n,\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\ge1}$ est donc croissante.
Il est clair que $\mathrm{P}_{0,\mathrm{N}}$ ne contient que la suite nulle donc $p_{0,\mathrm{N}}=1$ pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$. La suite $(p_{0,\mathrm{N}})$ est donc constante à partir du rang 1.
Supposons $n\in\mathbb{N}^*$ et donnons-nous $\mathrm{N}\ge n$. Soit $(a_1,\dots,a_{\mathrm{N}})\in\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}}$. Alors pour tout $k\in[\![n+1,\mathrm{N}]\!]$, $a_k=0$ sinon $\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} ka_k>n$. Ainsi $(a_1,\dots,a_n)\in\mathrm{P}_{n,n}$. Autrement dit l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{P}_{n,n} & \longrightarrow & \mathrm{P}_{n,\mathrm{N}}\\ (a_1,\dots,a_n) & \longmapsto & (a_1,\dots,a_n,0,\dots,0)\end{array}\right.$$

est surjective. Comme elle est évidemment injective, elle est bijective de sorte que $p_{n,n}=\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}}$.

5 Je pense qu'il est plus élégant de raisonner en termes de famille sommable. Le théorème de Fubini nous apprend que si $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$ et $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j$ sont deux séries numériques absolument convergentes, alors la famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_ib_j=\left(\sum_{i=0}^{+\infty}a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}b_j\right)$. Puisque pour tout $k\in[\![1,\mathrm{N}]\!]$, les séries $\sum_{a_k\in\mathbb{N}} z^{ka_k}$ convergent absolument (séries géométriques), on montre par récurrence à l'aide du résultat précédent que la famille $\left(\prod_{k=1}^{\mathrm{N}} z^{ka_k}\right)_{(a_1,\dots,a_{\mathrm{N}})\in\mathbb{N}^{\mathrm{N}}}=\left(z^{\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}ka_k}\right)_{(a_1,\dots,a_{\mathrm{N}})\in\mathbb{N}^{\mathrm{N}}}$ est sommable et que

$$\sum_{(a_1,\dots,a_{\mathrm{N}})\in\mathbb{N}^{\mathrm{N}}} z^{\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}ka_k}=\prod_{k=1}^{\mathrm{N}}\left(\sum_{a_k=0}^{+\infty}z^{ka_k}\right)=\prod_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{1-z^k}$$

Mais $\mathbb{N}^{\mathrm{N}}=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}}$ (union disjointe) donc, d'après le théorème de sommation par paquets

$$\prod_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{1-z^k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{(a_1,\dots,a_{\mathrm{N}})\in\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}}} z^{\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}ka_k}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,\mathrm{N}}z^n$$

6 Comme $(p_{n,\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\forall(n,\mathrm{N})\in\mathbb{N}^2,\ |(p_{n,\mathrm{N}+1}-p_{n,\mathrm{N}})z^n|=(p_{n,\mathrm{N}+1}-p_{n,\mathrm{N}})|z|^n$$

Fixons $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(p_{n,\mathrm{N}+1}-p_{n,\mathrm{N}})|z|^n$ converge comme différence de deux séries convergentes et

$$\mathrm{S}_{\mathrm{N}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(p_{n,\mathrm{N}+1}-p_{n,\mathrm{N}})|z|^n=\prod_{k=1}^{\mathrm{N}+1}\frac{1}{1-|z|^k}-\prod_{k=1}^{\mathrm{N}+1}\frac{1}{1-|z|^k}=|z|^{\mathrm{N}+1}\prod_{k=1}^{\mathrm{N}+1}\frac{1}{1-|z|^k}$$

Or la suite de terme général $\prod_{k=1}^{\mathrm{N}+1}\frac{1}{1-|z|^k}$ est croissante de limite $\mathrm{P}(|z|)$ donc $\mathrm{S}_{\mathrm{N}}\le|z|^{n+1}\mathrm{P}(|z|)$. Comme $z\in\mathrm{D}$, $\sum_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}\mathrm{S}_{\mathrm{N}}$ converge. On en déduit la sommabilité de la famille $\left((p_{n,\mathrm{N}+1}-p_{n,\mathrm{N}})\,z^n\right)_{(n,\mathrm{N})\in\mathbb{N}^2}$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\sum_{\mathrm{N}=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(p_{n,\mathrm{N}+1}-p_{n,\mathrm{N}})z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\mathrm{N}=0}^{+\infty}(p_{n,\mathrm{N}+1}-p_{n,\mathrm{N}})z^n$$

D'une part, en notant $\mathrm{S}_{\mathrm{N}}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,\mathrm{N}}z^n$,

$$\forall\mathrm{N}\in\mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{+\infty}(p_{n,\mathrm{N}+1}-p_{n,\mathrm{N}})z^n=\mathrm{S}_{\mathrm{N}+1}(z)-\mathrm{S}_{\mathrm{N}}(z)$$

donc, via une série télescopique

$$\sum_{N=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(p_{n,N+1}-p_{n,N})z^n = \lim_{N\to+\infty} S_N(z)-S_0(z) = P(z)-0 = P(z)$$

D'autre part, comme la suite $(p_{n,N})_{N\in\mathbb{N}}$ est constante égale à p_n à partir d'un certain rang,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{N=0}^{+\infty}(p_{n,N+1}-p_{n,N})z^n = z^n\sum_{N=0}^{+\infty} p_{n,N+1}-p_{n,N} = (p_n-p_{n,0})z^n = p_nz^n$$

On en déduit bien que

$$P(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_nz^n$$

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_nx^n$. Ce qui précède montre la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_nz^n$ pour tout $z\in D$ donc $R\geq 1$. Mais pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $N\in\mathbb{N}^*$, $p_{n,N}\geq 1$ car $P_{n,N}$ contient la suite $(n,0\dots,0)$. Ainsi par croissance de $(p_{n,N})_{N\geq1}$, $p_n\geq 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On en déduit que $R\leq 1$. Finalement, $R=1$.

$\boxed{7}$ Fixons $t>0$. Alors

$$\forall\theta\in[-\pi,\pi],\ e^{-in\theta}P(e^{-t+i\theta}) = e^{-in\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}p_ke^{-kt}e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty}e^{-kt}e^{i(k-n)\theta}$$

Posons $u_k:\ \theta\in[-\pi,\pi]\mapsto p_ke^{-kt}e^{i(k-n)\theta}$. Alors pour tout $\theta\in[-\pi,\pi]$, $|u_k(\theta)|=p_ke^{-kt}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}p_ke^{-kt}$ converge ($e^{-t}\in D$) donc la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}}u_k$ converge normalement et donc uniformément sur le *segment* $[-\pi,\pi]$. On peut donc procéder à une interversion série/intégrale

$$\int_{-\pi^\pi} e^{-in\theta}P(e^{-t+i\theta})\,d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}p_ke^{-kt}e^{i(k-n)\theta}\,d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty}2\pi p_ke^{-kt}\delta_{n,k} = 2\pi p_ne^{-nt}$$

On en déduit bien que

$$p_n=\frac{e^{nt}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}P\left(e^{-t+i\theta}\right)\,d\theta$$

$\boxed{8}$ Puisque $|xe^{i\theta}|=x<1$, on peut appliquer la question **2** pour obtenir :

$$\exp(L(xe^{i\theta}))=\frac{1}{1-xe^{i\theta}}$$

On en déduit que

$$\left|\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right| = |\exp(L(xe^{i\theta}))| = \exp\left(\mathrm{Re}(L(e^{i\theta}))\right)$$

Comme $x\geq 0$, $x^n\cos(n\theta)\leq x^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi

$$\mathrm{Re}(L(xe^{i\theta}))=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\cos(n\theta)}{n} = x\cos\theta+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n\cos(n\theta)}{n}\leq x\cos\theta+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = x\cos\theta-\ln(1-x)-x$$

Par croissance de l'exponentielle

$$\left|\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right|\leq \exp\left(x\cos\theta-\ln(1-x)-x\right)=\frac{\exp(-(1-\cos\theta)x)}{1-x}$$

Or $1-x>0$ donc ceci équivaut à

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right|\leq\exp(-(1-\cos\theta)x)$$

On rappelle que

$$\forall z\in D,\ P(z)\neq 0 \qquad\text{et}\qquad P(z)=\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-z^n}$$

Ainsi

$$\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}=\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1-x^n}{1-x^ne^{ni\theta}}$$

puis
$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\left|\frac{1-x^n}{1-x^ne^{ni\theta}}\right|$$
Or d'après ce qui précède,
$$\left|\frac{1-x^n}{1-x^ne^{ni\theta}}\right| \leq \exp(-(1-\cos(n\theta))x^n)$$
donc
$$\prod_{n=1}^{N}\left|\frac{1-x^n}{1-x^ne^{i\theta}}\right| \leq \exp(-\sum_{n=1}^{N}(1-\cos(n\theta))x^n)$$
Par continuité de l'exponentielle, on obtient donc
$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))x^n\right) = \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))x^n\right) = \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n\right)$$
Or d'une part
$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$$
et d'autre part,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}\left(x^ne^{ni\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^ne^{in\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)$$
On en déduit bien que
$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right)$$

9 On calcule
$$\frac{1}{1-xe^{i\theta}} = \frac{1-xe^{-i\theta}}{(1-xe^{i\theta})(1-xe^{-i\theta})} = \frac{1-x\cos\theta+ix\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$$
donc
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) = \frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} = \frac{1-x\cos\theta}{(1-x)^2+2x(1-\cos\theta)}$$
Ainsi
$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) &= \frac{(1-2x\cos\theta+x^2)-(1-x)(1-x\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}\\ &= \frac{x(1-\cos\theta)+x^2(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}\\ &\geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}\end{aligned}$$
car $x^2(1-\cos\theta) \geq 0$ et $(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)) = (1-x)\left|1-xe^{i\theta}\right|^2 > 0$.
Si $(1-x)^2 \geq x(1-\cos\theta)$, alors
$$\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))} \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{3(1-x)^3} \geq \frac{1-\cos\theta}{6(1-x^3)}$$
car $x \geq \frac{1}{2}$. On en déduit que
$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right)$$
Si $(1-x)^2 \leq x(1-\cos\theta)$, alors
$$\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))} \geq \frac{1}{3(1-x)}$$
On en déduit que
$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right)$$

10 Tout d'abord, $\varphi_{n,\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $1-e^{-x} \underset{x\to 0^+}{\sim} x$ donc $\lim\limits_{0^+} \varphi_{n,\alpha} = 1$. Par ailleurs, $\varphi_{n,\alpha}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées car $\alpha > 0$. On en déduit que $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
A nouveau, $\varphi'_{n,\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'_{n,\alpha}(x) = \frac{nx^{n-1}(1-e^{-x}) - \alpha x^n(1-e^{-x}) - nx^ne^{-x}}{(1-e^{-x})^{n+1}} \cdot e^{-\alpha x}$$

$$\begin{aligned}
nx^{n-1}(1-e^{-x}) &\underset{x\to 0^+}{=} nx^{n-1}\left(x + \mathcal{O}(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0^+}{=} nx^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\alpha x^n(1-e^{-x}) &\underset{x\to 0^+}{=} \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
nx^ne^{-x} &\underset{x\to 0^+}{=} nx^n(1+\mathcal{O}(x)) \\
&\underset{x\to 0^+}{=} nx^n + \mathcal{O}(x^{n+1})
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$nx^{n-1}(1-e^{-x}) - \alpha x^n(1-e^{-x}) - nx^ne^{-x} \underset{x\to 0^+}{=} \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Comme $(1-e^{-x})^{n+1} \underset{x\to 0^+}{\sim} x^{n+1}$, $\varphi'_{n,\alpha}(x) \underset{x\to 0^+}{=} \mathcal{O}(1)$. Par ailleurs, comme $\alpha > 0$, on a encore $\varphi'_{n,\alpha}(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées. Ainsi $\varphi'_{n,\alpha}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

11 Soit $t > 0$. Posons $u_k = \frac{k^ne^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}$. Alors $u_k \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ par croissances comparées ($\alpha t > 0$). Ainsi $\sum u_k$ converge $\mathrm{S}_{n,\alpha}(t)$ existe. De plus, $\mathrm{S}_{n,\alpha}(t)$ est une somme de termes strictement positifs donc $\mathrm{S}_{n,\alpha}(t) > 0$.
Par une relation de Chasles

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} \varphi_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties sur le segment $[kt, (k+1)t]$,

$$\int_{kt}^{(k+1)t} \varphi_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = \left[(x-kt)\varphi_{n,\alpha}(x)\right]_{x=kt}^{x=(k+1)t} - \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = t\varphi_{n,\alpha}((k+1)t) - \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$$

Or

$$t\varphi_{n,\alpha}((k+1)t) = t^{n+1}u_{k+1}$$

Comme la série $\sum u_k$ converge, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{+\infty} t^{n+1}u_{k+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= t^{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= t^{n+1}\mathrm{S}_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{kt}^{(k+1)t} |x-kt||\varphi'_{n,\alpha}(x)|\,\mathrm{d}x \leq t\int_{kt}^{(k+1)t} |\varphi'_{n,\alpha}(x)|\,\mathrm{d}x$$

Comme $\varphi_{n,\alpha'}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on peut écrire par inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq t\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} |\varphi'_{n,\alpha}(x)|\,\mathrm{d}x = t\int_0^{+\infty} |\varphi'_{n,\alpha}(x)|\,\mathrm{d}x$$

Finalement,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to 0^+}{=} \mathcal{O}(t)$$

On a donc

$$t^{n+1}\mathrm{S}_{n,\alpha}(t) \underset{t\to0^+}{=} \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x + \mathcal{O}(t)$$

ou encore

$$\mathrm{S}_{n,\alpha}(t) \underset{t\to0^+}{=} \frac{1}{t^{n+1}}\int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\,\mathrm{d}x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

12 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $0 < e^{-x} < 1$

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = xe^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} xe^{-nx}$$

Par intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{n}\left[xe^{-nx}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto xe^{-nx}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

13 Remarquons que $\Phi_\mathrm{X}(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta\mathrm{X}})$. Or $|e^{i\theta\mathrm{X}}| = 1$ donc, par inégalité triangulaire,

$$|\Phi_\mathrm{X}(\theta)| = |\mathbb{E}(e^{i\theta\mathrm{X}})| \leq \mathbb{E}(|e^{i\theta\mathrm{X}}|) = 1$$

14 On applique la formule de transfert :

$$\begin{aligned}\forall\theta\in\mathbb{R},\ \Phi_{a\mathrm{X}+b}(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta(a\mathrm{X}+b)}) = e^{ib\theta}\mathbb{E}(e^{ia\theta\mathrm{X}}) &= e^{ib\theta}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{ina\theta}\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)\\ &= e^{ib\theta}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{ina\theta}q^{n-1}p\\ &= e^{i(a+b)\theta}p\sum_{n=0}^{+\infty} e^{ina\theta}q^n\\ &= \frac{pe^{i(a+b)\theta}}{1-qe^{i\theta}}\end{aligned}$$

15 Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $n^k\mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = n^kq^{n-1}p$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^k\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)$ converge.
D'après la formule de transfert, la variable aléatoire positive X^k est d'espérance finie.
En prenant $a=1$ et $b=0$ dans la question **14**, on obtient

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \Phi_\mathrm{X}(\theta) = \frac{pe^{i\theta}}{1-qe^{i\theta}}$$

On a également

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \Phi_\mathrm{X}(\theta) = p\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}e^{in\theta}$$

Posons $f_n : \theta\in\mathbb{R} \mapsto q^{n-1}e^{in\theta}$. Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ f_n^{(k)}(\theta) = q^{n-1}i^kn^ke^{in\theta}$$

Notamment

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ |f_n^{(k)}(\theta)| = q^{n-1}n^k$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} q^{n-1}n^k$ converge via la règle de d'Alembert donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\Phi_X = p\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ \Phi_X^{(k)}(\theta) = p\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}i^k n^k e^{in\theta}$$

Notamment, par la formule de transfert,

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \Phi_X^{(k)}(0) = i^k\sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}n^k = i^k\mathbb{E}(X^k)$$

$\boxed{\textbf{16}}$ D'après la question **14** avec $a = 1$ et $b = 0$,

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \Phi_X(\theta) = \frac{pe^{i\theta}}{1-qe^{i\theta}}$$

On montre alors le résultat de l'énoncé par récurrence sur k. Il est clairement vrai pour $k = 0$: il suffit de perendre $P_0 = 1$. Supposons le résultat acquis pour un certain $k\in\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\Phi_X^{(k+1)}(\theta) &= pi^{k+1}e^{i\theta}\frac{P_k(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+1}} + pi^k e^{i\theta}\frac{iqe^{i\theta}P'(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+1}} + pi^k e^{i\theta}\frac{(k+1)P_k(qe^{i\theta})qie^{i\theta}}{(1-qe^{i\theta})^{k+2}}\\
&= pi^{k+1}e^{i\theta}\frac{(1-qe^{i\theta})P_k(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+2}} + pi^{k+1}e^{i\theta}\frac{(1-qe^{i\theta})qe^{i\theta}P_k'(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+2}} + pi^{k+1}e^{i\theta}\frac{(k+1)qe^{i\theta}P_k(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+2}}\\
&= pi^{k+1}e^{i\theta}\frac{P_{k+1}(e^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+2}}
\end{aligned}$$

avec $P_{k+1} = (1-X)P_k + X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$. On a alors également $P_{k+1}(0) = P_k(0) = 1$.
Le résultat est donc établi par récurrence.

$\boxed{\textbf{17}}$ Les questions **15** et **16** donnent

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \Phi_X^{(k)}(0) = \frac{i^k P_k(q)}{p^k} = i^k\mathbb{E}(X^k)$$

c'est-à-dire $\mathbb{E}(X^k) = \frac{P_k}{(}q)p^k$. Ainsi

$$\left|\mathbb{E}(X^k) - \frac{1}{p^k}\right| = \frac{|P_k(q)-1|}{p^k} = \frac{|P_k(q)-P_k(0)|}{p^k}$$

En notant $C_k = \max_{[0,1]}|P_k'|$, on obtient par inégalité des accroisements finis $|P_k(q)-P_k(0)| \le C_k q$ car $q\in[0,1]$. Ainsi on a bien

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \left|\mathbb{E}\left(X^k\right) - \frac{1}{p^k}\right| \le \frac{C_k q}{p^k}$$

avec C_k indépendant de p.

$\boxed{\textbf{18}}$ Comme $X\sim\mathcal{G}(p)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$. Ainsi

$$(X-\mathbb{E}(X))^4 = X^4 - \frac{4}{p}X^3 + \frac{6}{p^2}X^2 - \frac{4}{p^3}X + \frac{1}{p^4}$$

puis

$$\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X)^4)\right) = \mathbb{E}(X^4) - \frac{4}{p}\mathbb{E}(X^3) + \frac{6}{p^2}\mathbb{E}(X^2) - \frac{4}{p^3}\mathbb{E}(X) + \frac{1}{p^4} = \mathbb{E}(X^4) - \frac{4}{p}\mathbb{E}(X^3) + \frac{6}{p^2}\mathbb{E}(X^2) - \frac{3}{p^4}$$

Mais d'après la question **17**,

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \frac{1}{p^k} - \frac{C_k q}{p^k} \le \mathbb{E}(X^k) \le \frac{1}{p^k} + \frac{C_k q}{p^k}$$

donc

$$\mathbb{E}\left((\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X})^4)\right) \leq \frac{1}{p^4}+\frac{\mathrm{C}_4 q}{p^4}+\frac{4}{p}\left(\frac{\mathrm{C}_3 q}{p^3}-\frac{1}{p^3}\right)+\frac{6}{p^2}\left(\frac{\mathrm{C}_2 q}{p^2}\right)-\frac{3}{p^4}=\frac{(\mathrm{C}_4+4\mathrm{C}_3+6\mathrm{C}_2)q}{p^4}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}\left((\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X})^4)\right) \leq \frac{\mathrm{K}q}{p^4}$$

En posant $\mathrm{K}=\mathrm{C}_4+4\mathrm{C}_3+6\mathrm{C}_2$.

19 Comme Y^4 admet une espérance finie, Y^2 admet un moment d'ordre 2. La variable aléatoire constante égale à 1 admet également un moment d'ordre 2 donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathrm{Y}^2\cdot 1=\mathrm{Y}^2$ admet une espérance finie et

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)=\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2\cdot 1)\leq \mathbb{E}(\mathrm{Y}^4)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}(1)^{\frac{1}{2}}=\mathbb{E}(\mathrm{Y}^4)^{\frac{1}{2}}$$

De même, comme $|\mathrm{Y}|$ et Y^2 admettent des moments d'ordre 2, $|\mathrm{Y}|\cdot\mathrm{Y}^2=|\mathrm{Y}|^3$ admet une espérance finie et

$$\mathbb{E}(|\mathrm{Y}|^3)=\mathbb{E}(|\mathrm{Y}|\cdot\mathrm{Y}^2)\leq \mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}(\mathrm{Y}^4)^{\frac{1}{2}}\leq \mathbb{E}(\mathrm{Y}^4)^{\frac{1}{4}}\mathbb{E}(\mathrm{Y}^4)^{\frac{1}{2}}=\mathbb{E}(\mathrm{Y}^4)^{\frac{3}{4}}$$

20 L'application $\psi : t\mapsto e^{it}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et $|\psi^{(3)}(t)|=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left|\psi(u)-\psi(0)-\psi'(0)u-\frac{1}{2}\psi''(0)u^2\right|\leq\frac{1\cdot|u|^3}{6}$$

c'est-à-dire

$$\left|e^{iu}-1-iu+\frac{u^2}{2}\right|\leq\frac{|u|^3}{6}$$

21 Puisque Y est centrée, $\mathbb{E}(\mathrm{Y})=0$. Par liénarité de l'espérance,

$$\Phi_{\mathrm{Y}}(\theta)-1+\frac{\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)\theta^2}{2}=\mathbb{E}\left(e^{i\theta\mathrm{Y}}-1-i\theta\mathrm{Y}+\frac{\theta^2\mathrm{Y}^2}{2}\right)$$

Par inégalité triangulaire

$$\left|\Phi_{\mathrm{Y}}(\theta)-1+\frac{\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)\theta^2}{2}\right|\leq\mathbb{E}\left(\left|e^{i\theta\mathrm{Y}}-1-i\theta\mathrm{Y}+\frac{\theta^2\mathrm{Y}^2}{2}\right|\right)$$

D'après la question **20**,

$$\left|e^{i\theta\mathrm{Y}}-1-i\theta\mathrm{Y}+\frac{\theta^2\mathrm{Y}^2}{2}\right|\leq\frac{|\theta|^3|\mathrm{Y}|^3}{6}$$

donc, par croissance de l'espérance,

$$q\mathbb{E}\left(\left|e^{i\theta\mathrm{Y}}-1-i\theta\mathrm{Y}+\frac{\theta^2\mathrm{Y}^2}{2}\right|\right)\leq\frac{|\theta|^3\mathbb{E}(|\mathrm{Y}|^3)}{6}$$

Or, d'après la question **19**, $\mathbb{E}(|\mathrm{Y}|^3)\leq\mathbb{E}(\mathrm{Y}^4)^{\frac{3}{4}}$ donc

$$\left|\Phi_{\mathrm{Y}}(\theta)-1+\frac{\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)\theta^2}{2}\right|\leq\frac{|\theta|^3}{6}\mathbb{E}(\mathrm{Y}^4)^{\frac{3}{4}}\leq\frac{|\theta|^3}{3}\mathbb{E}(\mathrm{Y}^4)^{\frac{3}{4}}$$

22 En utilisant à nouveau l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall u\in\mathbb{R}_-,\ |e^u-1-u|\leq\frac{u^2}{2}$$

car pour tout $u\in\mathbb{R}^-$, $0<\exp''(u)=e^u\leq 1$. Notamment, en utilisant la question **19**,

$$\left|\exp\left(-\frac{\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)\theta^2}{2}\right)-1-\frac{\theta^2\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)}{2}\right|\leq\frac{\theta^4\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)^2}{8}\leq\frac{\theta^4\mathbb{E}(\mathrm{Y}^4)}{8}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left|\Phi_{\mathrm{Y}}(\theta)-\exp\left(-\frac{\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)\theta^2}{2}\right)\right|\leq\left|\Phi_{\mathrm{Y}}(\theta)-1-\frac{\theta^2\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)}{2}\right|+\left|1+\frac{\theta^2\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)}{2}-\exp\left(-\frac{\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)\theta^2}{2}\right)\right|\leq\frac{|\theta|^3}{3}\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^4\right)^{3/4}+\frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^4\right)$$

23 On raisonne par récurrence sur n. L'inégalité est clairement vraie lorsque $n = 1$. Supposons-le vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Donnons-nous des complexes $z_1, \dots, z_{n+1}, u_1, \dots, u_{n+1}$ de module inférieur ou égal à 1. Alors

$$\prod_{k=1}^{n+1} z_k - \prod_{k=1}^{n+1} u_k = z_{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} u_k\right) + (z_{n+1} - u_{n+1})\prod_{k=1}^{n} u_k$$

Par inégalité triangulaire

$$\left|\prod_{k=1}^{n+1} z_k - \prod_{k=1}^{n+1} u_k\right| \leq |z_{n+1}|\left|\prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} u_k\right| + |z_{n+1} - u_{n+1}|\prod_{k=1}^{n} |u_k|$$

Puisque les z_k et les u_k sont de module inférieur ou égal à 1,

$$\left|\prod_{k=1}^{n+1} z_k - \prod_{k=1}^{n+1} u_k\right| \leq \left|\prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} u_k\right| + |z_{n+1} - u_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k - u_k|$$

en utilisant l'hypotèse de récurrence.
Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

24 D'après la question **14** avec $a = k$, $b = -k\mathbb{E}(Z_k) = -\dfrac{k}{1-e^{-kt}}$, $p = 1 - e^{-kt}$ et $q = 1 - p = e^{-kt}$,

$$\Phi_{Y_k}(\theta) = \frac{(1-e^{-kt})e^{\frac{-i\theta k e^{-kt}}{1-e^{-kt}}}}{1 - e^{-kt}e^{ki\theta}}$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta) = \frac{\prod_{k=1}^{n} 1 - e^{-kt}}{\prod_{k=1}^{n} 1 - e^{-k(t-i\theta)}} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{-i\theta k e^{-kt}}{1-e^{-kt}}\right)$$

On sait que

$$\begin{aligned} P(e^{-t}) &= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-e^{-kt}} \\ P(e^{-t+i\theta}) &= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-e^{-k(t-i\theta)}} \\ m_t = S_{1,1}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ke^{-kt}}{1-e^{-kt}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta) = \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})} \exp(-i\theta m_t) = h(t,\theta)$$

25 D'après la question **23**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta) - \prod_{k=1}^{n} \exp\left(-\frac{k^2e^{-kt}(1-e^{-kt})^2}{.}\frac{\theta^2}{2}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{k^2e^{-kt}(1-e^{-kt})^2}{.}\frac{\theta^2}{2}\right)\right|$$

En passant à la limte quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\left|h(t,\theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{k^2e^{-kt}(1-e^{-kt})^2}{.}\frac{\theta^2}{2}\right)\right|$$

sous réserve de convergence du majorant. Comme $Z_k \sim \mathcal{G}(1-e^{-kt})$,

$$\mathbb{E}(Y_k^2) = k^2\mathbb{V}(Z_k) = \frac{k^2e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^2}$$

de sorte que

$$\left|h(t,\theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}(Y_k^2)\theta^2}{2}\right)\right|$$

D'après la question **22**,

$$\left|h(t,\theta)-e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\theta|^3}{3}\left(\mathbb{E}\left(Y_k^4\right)\right)^{3/4}+\frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}\left(Y_k^4\right)$$

D'après la question **18**,

$$\mathbb{E}(Y_k^4)=k^4\mathbb{E}((Z_k-\mathbb{E}(Z_k))^4)\leq\frac{Kk^4e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^4}$$

donc

$$\left|h(t,\theta)-e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\theta|^3}{3}\cdot\frac{K^{\frac{3}{4}}k^3e^{-\frac{3kt}{4}}}{(1-e^{-kt})^3}+\frac{\theta^4}{8}\cdot\frac{Kk^4e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^4}=\frac{|\theta|^3}{3}K^{\frac{3}{4}}S_{3,\frac{3}{4}}(t)+\frac{\theta^4}{8}KS_{4,1}(t)\leq|\theta|^3K^{\frac{3}{4}}S_{3,\frac{3}{4}}(t)+\theta^4KS_{4,1}(t)$$

$\boxed{26}$ D'après la question **11**,

$$S_{2,1}(t)\underset{t\to0^+}{=}\frac{1}{t^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\,dx+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

En utilisant le résultat admis à la question **12**,

$$S_{2,1}(t)\underset{t\to0^+}{=}\frac{\pi^2}{3t^3}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

A fortiori

$$S_{2,1}(t)\underset{t\to0^+}{\sim}\frac{\pi^2}{3t^3}$$

puis

$$\sigma_t=\sqrt{S_{2,1}(t)}\underset{t\to0^+}{\sim}\frac{\pi}{\sqrt{3}t^{3/2}}$$

En prenant $\theta=\dfrac{u}{\sigma_t}$ dans la question **25**, on obtient :

$$\left|h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)-e^{-u^2/2}\right|\leq K^{3/4}\frac{|u|^3}{\sigma_t^3}S_{3,3/4}(t)+K\frac{u^4}{\sigma_t^4}S_{4,1}(t)$$

D'après la question **11**,

$$S_{3,3/4}(t)\underset{t\to0^+}{=}\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^4}\right)\qquad\text{et}\qquad S_{4,1}(t)\underset{t\to0^+}{=}\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^5}\right)$$

Puisque $\sigma_t\underset{t\to0^+}{\sim}\dfrac{\pi}{\sqrt{3}t^{3/2}}$,

$$\frac{S_{3,3/4}(t)}{\sigma_t^3}\underset{t\to0^+}{=}\mathcal{O}(\sqrt{t})\qquad\text{et}\qquad\frac{S_{4,1}(t)}{\sigma_t^4}\underset{t\to0^+}{=}\mathcal{O}(t)$$

Finalement,

$$h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)-e^{-u^2/2}\underset{t\to0^+}{=}\mathcal{O}(\sqrt{t})$$

puis

$$h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)\underset{t\to0^+}{\longrightarrow}e^{-u^2/2}$$

D'après les questions **11** et **12**

$$m_t=S_{1,1}(t)\underset{t\to0^+}{=}\frac{\pi^2}{6t^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$$

Comme $\sigma_t\underset{t\to0^+}{\sim}\dfrac{\pi}{\sqrt{3}t^{3/2}}$,

$$\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t-\frac{\pi^2}{6t^2}\right)\underset{t\to0^+}{=}\mathcal{O}(\sqrt{t})$$

Notamment

$$\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t-\frac{\pi^2}{6t^2}\right)\underset{t\to0^+}{\longrightarrow}0$$

puis

$$\zeta(t,u)\underset{t\to0^+}{\longrightarrow}1$$

On obtient in fine

$$j(t,u)\underset{t\to0^+}{\longrightarrow}e^{-u^2/2}$$

27 Puisque $1-\cos\theta \underset{\theta\to 0}{\sim} \dfrac{\theta^2}{2}$, la fonction $\psi : \theta \mapsto \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ peut se prolonger en une fonction continue sur le segment $[-\pi,\pi]$. Elle y amet donc un minimum α. Puisque ψ est strictement positive sur $[-\pi,\pi]$ ($\psi(0)=\dfrac{1}{2}>0$), $\alpha>0$. On en déduit que pour tout $\theta\in[-\pi,\pi]$, $1-\cos\theta\geq\alpha\theta^2$.
Remarquons déjà que

$$\forall t>0,\ \forall\theta\in[-\pi,\pi],\ |h(t,\theta)| = \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right|$$

D'après la question **9**, dès que $e^{-t}\in\left[\dfrac{1}{2},1\right[$ i.e. $t\in]0,\ln 2]$,

$$|h(t,\theta)|\leq\exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-e^{-t})^3}\right) \text{ ou } |h(t,\theta)|\leq\exp\left(-\frac{1}{3(1-e^{-t})}\right)$$

D'après ce qui précède, on a donc

$$|h(t,\theta)|\leq\exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6(1-e^{-t})^3}\right) \text{ ou } |h(t,\theta)|\leq\exp\left(-\frac{1}{3(1-e^{-t})}\right)$$

Par convexité de l'exponentielle, $e^{-t}\geq 1-t$ i.e. $0<1-e^{-t}\leq t$ pour $t>0$. On en déduit que

$$|h(t,\theta)|\leq\exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6t^3}\right) \text{ ou } |h(t,\theta)|\leq\exp\left(-\frac{1}{3t}\right)$$

Or $\sigma_t \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{3}t^{3/2}}$ donc il existe $t_0\in]0,\ln 2]$ tel que

$$\forall t\in]0,t_0],\sigma_t\leq\frac{3}{2\sqrt{3}t^{3/2}}$$

Ainsi il existe des constantes A et B strictement positives telles que pour tout $t\in]0,t_0]$,

$$\frac{1}{6t^3}\geq A\sigma_t^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{3t}\geq B\sigma_t^{2/3}$$

On en déduit que pour tout $t\in]0,t_0]$ et tout $\theta\in[-\pi,\pi]$

$$|h(t,\theta)|\leq\exp\left(-\alpha A\theta^2\sigma_t^2\right) \text{ ou } |h(t,\theta)|\leq\exp\left(-B\sigma_t^{2/3}\right)$$

Enfin, pour $\theta\in[-\pi,\pi]$, $\dfrac{|\theta|}{\pi}\leq 1$ i.e. $\dfrac{|\theta|^{2/3}}{\pi^{2/3}}\leq 1$ donc pour tout $t\in]0,t_0]$ et tout $\theta\in[-\pi,\pi]$

$$|h(t,\theta)|\leq\exp\left(-\alpha A\theta^2\sigma_t^2\right) \text{ ou } |h(t,\theta)|\leq\exp\left(-B\sigma_t^{2/3}\frac{|\theta|^{2/3}}{\pi^{2/3}}\right)$$

En posant $\beta=-\alpha A>0$ et $\gamma=\dfrac{B}{\pi^{2/3}}>0$, on a bien

$$|h(t,\theta)|\leq e^{-\beta(\sigma_t\theta)^2} \qquad \text{ou} \qquad |h(t,\theta)|\leq e^{-\gamma(\sigma_t|\theta|)^{2/3}}$$

28 Posons

$$\tilde{j}(t,u)=j(t,u)\mathbb{1}_{[-\pi\sigma_t,\pi\sigma_t]}(u)$$

Ainsi

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\,du=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{j}(t,u)\,du$$

Comme $\sigma_t \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$, la question **26** permet d'affirmer que

$$\forall u\in\mathbb{R},\ \tilde{j}(t,u)\xrightarrow[t\to 0^+]{} e^{-u^2/2}$$

Par ailleurs, pour tout $t\in]0,t_0]$ et tout $u\in[-\pi\sigma_t,\pi\sigma_t]$, on a d'après la question**27**,

$$|j(t,u)|=\left|h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)\right|\leq\max(e^{-\beta u^2},e^{-\gamma u^{2/3}})$$

Comme $u \mapsto \tilde{j}(t,u)$ est nulle en dehors du segment $[-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]$, on a donc

$$\forall t \in]0, t_0],\ \forall u \in \mathbb{R},\ |\tilde{j}(t,u)| =\leq \max(e^{-\beta u^2}, e^{-\gamma u^{2/3}})$$

Or la fonction $u \mapsto \max(e^{-\beta u^2}, e^{-\gamma u^{2/3}})$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{j}(t,u)\ \mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u$$

ou encore

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\ \mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$$

en utilisant le résultat admis en début d'énoncé.

29 D'après la question **7**,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t > 0,\ p_n = \frac{e^{nt}\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{\mathrm{P}\left(e^{-t+i\theta}\right)}{\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)}\ \mathrm{d}\theta = \frac{e^{nt}\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m_t-n)\theta} h(t,\theta)\ \mathrm{d}\theta$$

On prend $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{6n}}$ i.e. $n = \dfrac{\pi^2}{6t^2}$ comme l'indique l'énoncé. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{e^{nt}\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(i\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\theta\right) h(t,\theta)\ \mathrm{d}\theta$$

On effectue alors le changement de variable $u = \sigma_t\theta$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{e^{nt}\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)}{2\pi\sigma_t} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} \exp\left(i\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right)\ \mathrm{d}u = \frac{e^{nt}\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)}{2\pi\sigma_t} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\ \mathrm{d}u$$

D'après la question précédente,

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\ \mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$$

De plus,

$$e^{nt} = \exp\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}\right)$$

D'après l'équivalent admis,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(e^{-t}) &\underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \exp\left(\frac{\pi^2}{6t}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}(6n)^{1/4}} \exp\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}\right)\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}\sigma_t &\underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{3/2}}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(6n)^{3/4}}{\sqrt{3\pi}}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}(6n)^{1/4}} \exp\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3\pi}}{(6n)^{3/4}} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n}$$