Interrogation écrite n°12

NOM : Prénom : Note :

1. Résoudre le système différentiel $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$.

   Posons $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. *Alors le système* $(\mathcal{S})$ *équivaut à* $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. *On trouve* $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1, 2\}$, $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ *et* $\mathrm{E}_2(\mathrm{A})\,\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. *On montre alors classiquement que l'ensemble des solutions est*

   $$\mathrm{vect}\left(t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

   ∎

2. Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = e^t$.

   L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\mathrm{vect}(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t})$. *En appliquant la méthode de variation des constantes, on trouve que* $t \mapsto \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{4}e^t$ *est une solution particulière. Comme* 1 *est racine de l'équation caractéristique, on peut également rechercher une solution particulière de la forme* $t \mapsto ae^t$ *et on trouve* $a = \frac{1}{2}$. *L'ensemble des solutions est donc*

   $$\left(t \mapsto \frac{t}{2}e^t\right) + \mathrm{vect}(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t})$$

   ∎

3. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de (u_n).

   Remarquons qu'en posant $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

   On reconnaît une somme de Riemann. Comme f *est continue sur* $[0,1]$,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = \ln(2)$$

   ∎

4. Soit E un espace euclidien, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ dérivable et de norme constante. Montrer que $x'(t) \perp x(t)$ pour tout $t \in \mathrm{I}$.

5. *Posons* $f : t \in \mathrm{I} \mapsto \|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$. *Par bilinéarité du produit scalaire,* f *est dérivable sur* I *et*

$$\forall t \in \mathrm{I},\ f'(t) = \langle x'(t), x(t) \rangle + \langle x(t), x'(t) \rangle = 2\langle x(t), x'(t) \rangle$$

   Comme f *est constante,* f' *est nulle sur* I *de sorte que* $x'(t) \perp x(t)$ *pour tout* $t \in \mathrm{I}$. ∎

6. Montrer que $f : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^2$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Alors pour tout* $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$f(\mathrm{M}+\mathrm{H}) = f(\mathrm{M}) + \mathrm{MH} + \mathrm{HM} + \mathrm{H}^2$$

   En choisissant une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|\mathrm{H}^2\| \leq \|\mathrm{H}\|^2$ *donc*

$$f(\mathrm{M}+\mathrm{H}) \underset{\mathrm{H}\to 0}{=} f(\mathrm{M}) + \mathrm{MH} + \mathrm{HM} + o(\mathrm{H})$$

   De plus, $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{MH} + \mathrm{HM}$ *est linéaire. Ainsi* f *est différentiable en* M *et* $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ *est l'endomorphisme* $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{MH} + \mathrm{HM}$.
   ∎