Probabilites

Révisions de première année

Solution 1

La probabilité recherchée est $\dfrac{4}{12} \times \dfrac{3}{11} \times \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{55}$.

Solution 2

On définit les événement suivants.

AR La boule tirée dans l'urne A est rouge.

AV La boule tirée dans l'urne A est verte.

X Les deux boules tirées dans l'urne B sont rouges.

La probabilité recherchée est $P(AV|X)$. D'après la formule de Bayes

$$P(AV|X) = \frac{P(X|AV)P(AV)}{P(X|AV)P(AV) + P(X|AR)P(AR)}$$

Il est clair que $P(AV) = \dfrac{3}{5}$ et $P(AR) = \dfrac{2}{5}$.
Par ailleurs, $P(X|AV)$ est la probabilité de tirer successivement et sans remise deux boules rouges dans une urne contenant trois boules rouges et trois boules vertes. Autrement dit, $P(X|AV) = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{5}$.
De même, $P(X|AR)$ est la probabilité de tirer successivement et sans remise deux boules rouges dans une urne contenant quatre boules rouges et deux boules vertes. Autrement dit, $P(X|AR) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$.
Après calcul, on trouve $P(AV|X) = \dfrac{3}{7}$.

Solution 3

On notera U_k l'événement «l'urne choisie est l'urne numéro k» et B l'événement la boule tirée est blanche.

1. On recherche donc $P(B)$. Comme $\{U_k\}_{1 \le k \le n}$ est un système complet d'événements, on obtient avec après la formule des probabilités totales :
$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \mid U_k)P(U_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}$$

2. On recherche $P(U_k \mid B)$. Par définition
$$P(U_k \mid B) = \frac{P(B \cap U_k)}{P(B)} = \frac{P(B \mid U_k)P(U_k)}{P(B)} = \frac{\frac{k}{n} \times \frac{1}{n}}{\frac{n+1}{2n}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

Solution 4

On notera A_n l'événement «le buveur ne boit pas le $n^{\text{ème}}$ jour. L'énoncé signifie que $P(A_{n+1}|A_n) = 0,4$ et $P(A_{n+1}|\overline{A_n}) = 0,8$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus que le buveur ne boit pas le premier jour, autrement dit $P(A_1) = 1$.

1. Pour simplifier, posons $p_n = P(A_n)$. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|\overline{A_n})P(\overline{A_n}) = 0,4p_n + 0,8(1 - p_n) = 0,8 - 0,4p_n$$

2. La suite (p_n) est arithmético-géométrique. On introduit l'unique solution p de l'équation $x = 0,8 - 0,4x$ autrement dit $p = \dfrac{4}{7}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$p_{n+1} - p = (0,8 - 0,4p_n) - (0,8 - 0,4p) = -0,4(p_n - p)$$

Une récurrence évidente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_n - p = (-0,4)^{n-1}(p_1 - p)$$

Autrement dit

$$p_n = \frac{2}{7} + \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} \frac{5}{7}$$

3. Puisque $\left|-\frac{2}{5}\right| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{7}$.

Solution 5

1. S suit évidemment la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$.

2. La loi de F conditionnée par l'événement $\mathrm{S} = s$ est la loi $\mathcal{B}\left(s, \frac{1}{2}\right)$.

3. F est clairement à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Soit donc $k \in [\![0, n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathrm{P}(\mathrm{F} = k) = \sum_{s=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{F} = k | \mathrm{S} = s)\mathrm{P}(\mathrm{S} = s)$$

Il est clair que $\mathrm{P}(\mathrm{F} = k|\mathrm{S} = s) = 0$ pour $s < k$ donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{F} = k) &= \sum_{s=k}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{F} = k|\mathrm{S} = s)\mathrm{P}(\mathrm{S} = s) \\
&= \sum_{s=k}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^s \binom{s}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^s \left(\frac{5}{6}\right)^{n-s} \binom{n}{s} \\
&= \sum_{s=k}^{n} \frac{5^{n-s}}{2^s 6^n} \binom{s}{k}\binom{n}{s} \\
&= \sum_{s=k}^{n} \frac{5^{n-s}}{2^s 6^n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{5^{n-s-k}}{2^{s+k} 6^n} \binom{n-k}{s} \\
&= \binom{n}{k} \frac{5^n}{10^k 6^n} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{1}{10^s} \binom{n-k}{s}
\end{aligned}$$

En appliquant la formule du binôme

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{F} = k) &= \binom{n}{k} \frac{5^n}{10^k 6^n} \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \frac{5^n 11^{n-k}}{10^n 6^n} \\
&= \binom{n}{k} \frac{11^{n-k}}{12^n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{12}\right)^k \left(\frac{11}{12}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que F suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{12}\right)$.

Solution 6

L'événement A est l'événement contraire de l'événement «la famille n'a que des enfants de même sexe», ce dernier événement étant l'union disjointe des événements «la famille a n garçons» et «la famille a n filles». On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - 2 \times \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{1-n}$$

L'événement B est la réunion disjointe des événements «la famille n'a aucune fille» et «la famille a exactement une fille». On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2^n} + \binom{n}{1}\frac{1}{2^n} = (n+1)2^{-n}$$

L'événement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est l'événement «la famille a une unique fille». Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \binom{n}{1}\frac{1}{2^n} = n2^{-n}$$

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$ autrement dit si et seulement si

$$(1 - 2^{1-n})(n+1)2^{-n} = n2^{-n}$$

ou encore, après simplification,

$$2^n - 2n - 2 = 0$$

Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto 2^t - 2t - 2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : t \mapsto 2^t \ln 2 - 2$. f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(2) = 4\ln 2 - 2 > 0$. Ainsi f' est strictement positive sur $[2, +\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Puisque $f(3) = 0$, f s'annule uniquement en 3 sur $[2, +\infty[$, ce qui prouve que A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Solution 7

---

1. **Première méthode :**
Notons B_i (resp. R_i) l'événement «tirer une boule blanche (resp. rouge) au tirage n° i». Soit $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$. Si $k \geq l$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = 0$. Par contre, si $k < l$, en utilisant la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) &= \mathbb{P}(\mathrm{R}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{R}_{k-1} \cap \mathrm{B}_k \cap \mathrm{R}_{k+1} \cdots \cap \mathrm{R}_{l-1} \cap \mathrm{B}_l \cap \mathrm{R}_{l+1} \cap \cdots \cap \mathrm{R}_n) \\
&= \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{1^{\text{er}}\text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{n-3}{n-1}}_{2^{\text{e}}\text{ tirage}} \times \cdots \times \underbrace{\frac{n-k}{n-k+2}}_{(k-1)^{\text{e}}\text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{2}{n-k+1}}_{k^{\text{e}}\text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{n-k-1}{n-k}}_{(k+1)^{\text{e}}\text{ tirage}} \cdots \times \underbrace{\frac{n-l+1}{n-l+2}}_{(l-1)^{\text{e}}\text{ tirage}} \times \underbrace{\frac{1}{n-l+1}}_{l^{\text{e}}\text{ tirage}} \\
&= \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Seconde méthode :
L'univers Ω est l'ensemble des permutations des n boules de sorte que $\operatorname{card}\Omega = n!$ et on munit cet univers de la probabilité uniforme. Soit $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$. Si $k \geq l$, $[\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = l]$ est impossible donc $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = 0$. Supposons maintenant $k < l$. Se donner une issue de $[\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = l]$ revient à se donner une permutation des 2 boules rouges et une permutation des $n - 2$ boules rouges. Ainsicard$([\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = l]) = 2!(n-2)!$. Finalement

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = \frac{2!(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n(n-1)}$$

Troisième méthode :
On considère que l'univers est l'ensemble des tirages de la forme R … RBR … RBR … R. Le cardinal de cet univers est alors le nombre de façons de placer deux boules blanches parmi les n tirages, c'est-à-dire $\binom{n}{2}$. On munit à nouveau cet univers de la probabilité uniforme. A nouveau, si $k \geq l$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = 0$ et, si $k < l$, $[\mathrm{X} = k] \cap [\mathrm{Y} = l]$ est un événement élémentaire de sorte que $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$.

2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \sum_{l=k+1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

Soit $l \in [\![1, n]\!]$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} = l) = \sum_{k=1}^{l-1} \mathrm{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Z} = l) = \frac{2(l-1)}{n(n-1)}$$

Solution 8

---

1. La relation est évidente si $a = b$. Supposons maintenant $a + 1 \leq b$. On utilise la relation du triangle de Pascal.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=a}^{b} \binom{k}{a} &= 1 + \sum_{k=a+1}^{n} \binom{k}{a} \\
&= 1 + \sum_{k=a+1}^{b} \binom{k+1}{a+1} - \binom{k}{a+1} \\
&= 1 + \binom{b+1}{a+1} - \binom{a+1}{a+1} = \binom{b+1}{a+1}
\end{aligned}$$

2. Si on note Ω l'univers de l'expérience aléatoire, alors $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{\mathrm{N}}{n}$.
X est à valeurs dans $[\![n, \mathrm{N}]\!]$. Soit donc $k \in [\![n, \mathrm{N}]\!]$. Choisir n boules dont le plus grand numéro est k revient à choisir $n-1$ boules parmi celles numérotées de 1 à $k-1$. Ainsi $\operatorname{card}(\mathrm{X} = k) = \binom{k-1}{n-1}$ puis $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}$.
Y est à valeurs dans $[\![1, \mathrm{N} - n + 1]\!]$. Soit donc $k \in [\![1, \mathrm{N} - n + 1]\!]$. Choisir n boules dont le plus petit numéro est k revient à choisir $n-1$ boules parmi celles numérotées de $k+1$ à N. Ainsi $\operatorname{card}(\mathrm{Y} = k) = \binom{\mathrm{N}-k}{n-1}$ puis $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = \frac{\binom{\mathrm{N}-k}{n-1}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}$.

3. (X, Y) est à valeurs dans $\left\{(i, j) \in [\![1, \mathrm{N}]\!]^2,\ i - j \geq n - 1\right\}$. Soit donc (i, j) dans cet ensemble.
Choisir n boules dont le plus grand numéro est i et le plus petit j revient à choisir $n-2$ boules parmi celles numérotées de $j+1$ à $i-1$. Ainsi $\operatorname{card}([\mathrm{X} = i] \cap [y = j]) = \binom{i-j-1}{n-2}$ puis $\mathrm{P}(\mathrm{X} = i, \mathrm{Y} = j) = \frac{\binom{i-j-1}{n-2}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}$.
Remarquons que $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ est à valeurs dans $[\![n-1, \mathrm{N}-1]\!]$. Soit $k \in [\![n-1, \mathrm{N}-1]\!]$. Alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} - \mathrm{Y} = k) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}-k} \mathrm{P}(\mathrm{X} - \mathrm{Y} = k, \mathrm{Y} = j) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}-k} \mathrm{P}(\mathrm{X} = j + k, \mathrm{Y} = j) = \frac{(\mathrm{N}-k)\binom{k-1}{n-2}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}$$

4. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} k\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) \\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} k\binom{k-1}{n-1} \\
&= \frac{n}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \binom{k}{n} \\
&= \frac{n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1}}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \\
&= \frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

Pour le calcul de l'espérance de Y, on peut remarquer que $P(Y = k) = P(X = N + 1 - k)$ pour tout $k \in [\![1, N - n + 1]\!]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{N-n+1} kP(Y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{N-n+1} kP(X = N + 1 - k) \\
&= \sum_{k=n}^{N} (N + 1 - k)P(X = k) \\
&= (N + 1) \sum_{k=n}^{N} P(X = k) - E(X) \\
&= N + 1 - \frac{n(N + 1)}{n + 1} = \frac{N + 1}{n + 1}
\end{aligned}$$

5. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=n}^{N} k^2 P(X = k) \\
E(X^2) &= \sum_{k=n}^{N} [k(k + 1) - k]P(X = k) \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} k(k + 1)\binom{k-1}{n-1} - E(X) \\
&= \frac{n(n + 1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} \binom{k+1}{n+1} - \frac{n(N + 1)}{n + 1} \\
&= \frac{n(n + 1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n+1}^{N+1} \binom{k}{n+1} - \frac{n(N + 1)}{n + 1} \\
&= \frac{n(n + 1)}{\binom{N}{n}} \binom{N+2}{n+2} - \frac{n(N + 1)}{n + 1} \\
&= \frac{n(N + 1)(N + 2)}{n + 2} - \frac{n(N + 1)}{n + 1} \\
&= \frac{(Nn + n + N)(N + 1)n}{(n + 1)(n + 2)}
\end{aligned}$$

Enfin

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(Nn + n + N)(N + 1)n}{(n + 1)(n + 2)} - \left(\frac{n(N + 1)}{n + 1}\right)^2 = \frac{n(N + 1)(N - n)}{(n + 2)(n + 1)^2}$$

En remarquant que $P(Y = k) = P(X = N + 1 - k)$ pour tout $k \in [\![1, N - n + 1]\!]$ et que $E(Y) = N + 1 - E(X)$

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y - E(Y)^2) \\
&= \sum_{k=1}^{N-n+1} (k - E(Y))^2 P(Y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{N-n+1} (k - (N + 1) + E(X))^2 P(X = N + 1 - k) \\
&= \sum_{k=n}^{N} (E(X) - k)^2 P(X = k) \\
&= V(X) = \frac{(Nn + n + N)(N + 1)n}{(n + 1)(n + 2)}
\end{aligned}$$

6. Tout d'abord

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2) &= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^2\mathrm{P}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}=k)\\
&= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} \frac{k^2(\mathrm{N}-k)\binom{k-1}{n-2}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\left(\mathrm{N}\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^2\binom{k-1}{n-2} - \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^3\binom{k-1}{n-2}\right)
\end{aligned}$$

Posons $\mathrm{S}_m = \displaystyle\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^m\binom{k-1}{n-2}$. On trouve successivement

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_1 &= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k\binom{k-1}{n-2}\\
&= (n-1)\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}\binom{k}{n-1}\\
&= (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_2 &= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^2\binom{k-1}{n-2}\\
&= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k(k+1)\binom{k-1}{n-2} - \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k\binom{k-1}{n-2}\\
&= (n-1)n\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}\binom{k+1}{n} - \mathrm{S}_1\\
&= (n-1)n\sum_{k=n}^{\mathrm{N}}\binom{k}{n} - (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\\
&= (n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} - (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_3 &= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k^3\binom{k-1}{n-2}\\
&= \sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1} k(k+1)(k+2)\binom{k-1}{n-2} - 3\mathrm{S}_2 - 2\mathrm{S}_1\\
&= (n-1)n(n+1)\sum_{k=n-1}^{\mathrm{N}-1}\binom{k+2}{n+1} - 3\left((n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} - (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\right) - 2(n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\\
&= (n-1)n(n+1)\sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}+1}\binom{k}{n+1} - 3(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} + (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\\
&= (n-1)n(n+1)\binom{\mathrm{N}+2}{n+2} - 3(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1} + (n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}
\end{aligned}$$

Il vient enfin

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2) &= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}(\mathrm{NS}_2-\mathrm{S}_3)\\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\left(\mathrm{N}(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1}-\mathrm{N}(n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}-(n-1)n(n+1)\binom{\mathrm{N}+2}{n+2}+3(n-1)n\binom{\mathrm{N}+1}{n+1}-(n-1)\binom{\mathrm{N}}{n}\right)\\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\left((n-1)n(\mathrm{N}+3)\binom{\mathrm{N}+1}{n+1}-(n-1)(\mathrm{N}+1)\binom{\mathrm{N}}{n}-(n-1)n(n+1)\binom{\mathrm{N}+2}{n+2}\right)\\
&= \frac{(n-1)n(\mathrm{N}+3)(\mathrm{N}+1)}{n+1}-(n-1)(\mathrm{N}+1)-\frac{(n-1)n(\mathrm{N}+2)(\mathrm{N}+1)}{n+2}\\
&= \frac{(n-1)(\mathrm{N}+1)(n\mathrm{N}+n-2)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) &= \mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2)-\mathrm{E}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2\\
&= \frac{(n-1)(\mathrm{N}+1)(n\mathrm{N}+n-2)}{(n+1)(n+2)}-(\mathrm{E}(\mathrm{X})-\mathrm{E}(\mathrm{Y}))^2\\
&= \frac{(n-1)(\mathrm{N}+1)(n\mathrm{N}+n-2)}{(n+1)(n+2)}-\left(\frac{n(\mathrm{N}+1)}{n+1}-\frac{\mathrm{N}+1}{n+1}\right)^2\\
&= \frac{2(n-1)(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}-n)}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{V}(\mathrm{X})+\mathrm{V}(\mathrm{Y})-\mathrm{V}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}))\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2(\mathrm{N}n+n+\mathrm{N})(\mathrm{N}+1)n}{(n+1)(n+2)}-\frac{2(n-1)(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}-n)}{(n+1)^2(n+2)}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}n+n+\mathrm{N})-(n-1)(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}-n)}{(n+1)^2(n+2)}\\
&= \frac{(\mathrm{N}+1)(2n^2\mathrm{N}+n^3\mathrm{N}+2n^2+n^3+\mathrm{N}-n)}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}$$

Solution 9

On calcule dans un premier temps $\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})$. L'événement $\mathrm{X}=\mathrm{Y}$ est la réunion disjointes des événements $(\mathrm{X}=k)\cap(\mathrm{Y}=k)$ pour k décrivant $[\![1,n]\!]$. On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}([\mathrm{X}=k]\cap[\mathrm{Y}=k])$$

Or les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$$

On en déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\neq\mathrm{Y})=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=1-\frac{1}{n}$$

Solution 10

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)\\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\mathbb{P}(\mathrm{Y}>k-1)-\mathbb{P}(\mathrm{Y}>k)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\mathbb{P}(\mathrm{Y}>k-1)-\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(\mathrm{Y}>k)\\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (k+1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}>k)-\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\mathbb{P}(\mathrm{Y}>k) \qquad \text{par changement d'indice}\\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (k+1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}>k)-\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k\mathbb{P}(\mathrm{Y}>k)\\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \mathbb{P}(\mathrm{Y}>k)-\mathrm{N}\mathbb{P}(\mathrm{Y}>\mathrm{N})\\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \mathbb{P}(\mathrm{Y}>k) \qquad \text{car } \mathbb{P}(\mathrm{Y}>n)=0
\end{aligned}$$

2. **a.** Soit $k \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$.

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_n \leq k) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \leq k, \mathrm{X}_2 \leq k, \dots, \mathrm{X}_n \leq k) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \leq k)\mathbb{P}(\mathrm{X}_2 \leq k)\dots\mathbb{P}(\mathrm{X}_n \leq k)$$

car les variables $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes. Mais comme chacune de ces variables suit la loi uniforme sur $[\![1,\mathrm{N}]\!]$

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_n \leq k) = \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n$$

b. Pour tout $k \in [\![,\mathrm{N}]\!]$

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_n = k) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_n \leq k) - \mathbb{P}(\mathrm{T}_n \leq k-1) = \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n - \left(\frac{k-1}{\mathrm{N}}\right)^n$$

c.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n - \left(\frac{k-1}{\mathrm{N}}\right)^n\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\frac{k-1}{\mathrm{N}}\right)^n\\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n - \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (k+1)\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n\\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n - \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (k+1)\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n\\
&= \mathrm{N} - a_n(\mathrm{N})
\end{aligned}$$

3. **a.** Soit $k \in [\![0,\mathrm{N}-1]\!]$.

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n > k) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 > k, \mathrm{X}_2 > k, \dots, \mathrm{X}_n > k) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 > k)\mathbb{P}(\mathrm{X}_2 > k)\dots\mathbb{P}(\mathrm{X}_n > k)$$

car les variables $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes. Mais comme chacune de ces variables suit la loi uniforme sur $[\![1,\mathrm{N}]\!]$

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n > k) = \left(\frac{\mathrm{N}-k}{\mathrm{N}}\right)^n$$

b. En utilisant la première question

$$\mathbb{E}(\mathrm{Z}_n) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \left(\frac{\mathrm{N}-k}{\mathrm{N}}\right)^n = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n$$

via un changement d'indice. Autrement dit, $\mathbb{E}(\mathrm{Z}_n) = 1 + a_n(\mathrm{N})$.

4. **a.** Pour $k \in [\![1, \mathrm{N}-1]\!]$, $0 \leq \frac{k}{\mathrm{N}} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^n = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} a_n(\mathrm{N}) = 0$. Or $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \mathrm{N} - a_n(\mathrm{N})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \mathrm{N}$.

b. Par linéarité, $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{T}_n) + \mathbb{E}(\mathrm{Z}_n) - 1 = \mathrm{N}$ en utilisant les questions précédentes.

Solution 11

1. Remarquons d'abord que si $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{A} = \mathrm{C}\mathrm{C}^\top$ est de rang au plus 1. En effet, $\mathrm{Im}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{vect}(\mathrm{C})$. De plus, si $\mathrm{A} = 0$, alors $\|\mathrm{C}\|^2 = \mathrm{C}^\top\mathrm{C} = \mathrm{tr}(\mathrm{C}\mathrm{C}^\top) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0$ donc $\mathrm{C} = 0$. La réciproque est évidente donc $\mathrm{A} = 0 \iff \mathrm{C} = 0$. Posons $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)^\top$. Alors $\mathrm{M} = \mathrm{X}\mathrm{X}^\top$. La matrice M est donc de rang au plus 1 (toutes ses colonnes sont colinéaires à X). Ainsi rg(M) suit une loi de Bernoulli. De plus, d'après note remarque initiale et par indépendance des X_i,

$$\mathbb{P}(\mathrm{rg}\,\mathrm{M} = 0) = \mathbb{P}(\mathrm{M} = 0) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \mathrm{X}_i = 0\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 0) = (1-p)^n$$

Ainsi rg M suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.

2. Remarquons que $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^n \mathrm{X}_i^2$. Mais comme les X_i sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, $\mathrm{X}_i^2 = \mathrm{X}_i$. Finalement, $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^n \mathrm{X}_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et p car les X_i sont indépendantes.

Solution 12

1. U suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{u}{b}\right)$. Son espérance est $\frac{nu}{b}$ et sa variance est $\frac{nu}{b}\left(1 - \frac{u}{b}\right)$.
De même, D et T suivent respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{d}{b}\right)$ et $\mathcal{B}\left(n, \frac{t}{b}\right)$.

2. On peut par exemple remarquer que $\mathrm{P}(\mathrm{U} = n) \neq 0$ et $\mathrm{P}(\mathrm{D} = n) \neq 0$ tandis que $\mathrm{P}(\mathrm{U} = n, \mathrm{D} = n) = 0$. Ainsi $\mathrm{P}(\mathrm{U} = n, \mathrm{D} = n) \neq \mathrm{P}(\mathrm{U} = n)\mathrm{P}(\mathrm{D} = n)$, ce qui prouve que U et D ne sont pas indépendantes.

3. Puisque $\mathrm{U} + \mathrm{D} + \mathrm{T} = n$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{U} + \mathrm{D} = k) = \mathrm{P}(\mathrm{T} = n - k)$$

On en déduit aisément que U + D suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, 1 - \frac{t}{b}\right)$.
De plus,

$$\mathrm{E}(\mathrm{U} + \mathrm{D}) = \mathrm{E}(n - \mathrm{T}) = n - \mathrm{E}(\mathrm{T}) = n - \frac{nt}{b} = \frac{n(b-t)}{b}$$

Enfin,

$$\mathrm{V}(\mathrm{U} + \mathrm{D}) = \mathrm{V}(n - \mathrm{T}) = \mathrm{V}(\mathrm{T}) = \frac{nt}{b}\left(1 - \frac{t}{b}\right)$$

4. On sait que

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{U}, \mathrm{D}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{V}(\mathrm{U} + \mathrm{D}) - \mathrm{V}(\mathrm{U}) - \mathrm{V}(\mathrm{D})\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathrm{U}, \mathrm{D}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{nt}{b}\left(1 - \frac{t}{b}\right) - \frac{nu}{b}\left(1 - \frac{u}{b}\right) - \frac{nd}{b}\left(1 - \frac{d}{b}\right)\right) \\
&= \frac{n}{2b^2}\left(t(b-t) - u(b-u) - d(b-d)\right) \\
&= \frac{n}{2b^2}\left((b-u-d)(u+d) - u(b-u) - d(b-d)\right) \\
&= -\frac{-nud}{b^2}
\end{aligned}$$

Solution 13

1. D'après la formule de transfert

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} |i-j|\mathrm{P}(\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=j)$$

Mais les variables X et Y étant indépendantes,

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} |i-j|\mathrm{P}(\mathrm{X}=i)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=j) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} |i-j|$$

On peut alors découper la somme double

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Z}) &= \frac{1}{(n+1)^2}\left(\sum_{0\le i<j\le n}|i-j| + \sum_{0\le j<i\le n}|i-j| + \sum_{k=0}^{n}|k-k|\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{0\le i<j\le n} j-i\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{0\le i<j\le n} j - \sum_{0\le i<j\le n} i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} j - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\sum_{j=0}^{n} j^2 - \sum_{i=0}^{n}(n-i)i\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(2\sum_{k=0}^{n} k^2 - n\sum_{k=0}^{n} k\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n^2(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{2n}{n+1}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+2)}{3(n+1)}
\end{aligned}$$

2. On remarque que

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}-\mathrm{Z})$$

donc par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \frac{1}{2}(\mathrm{E}(\mathrm{X})+\mathrm{E}(\mathrm{Y})-\mathrm{E}(\mathrm{Z})) = \frac{1}{2}\left(n - \frac{n(n+2)}{3(n+1)}\right) = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$$

3. Puisque $\mathrm{Z}^2 = \mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-2\mathrm{XY}$, on obtient par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}^2) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2)+\mathrm{E}(\mathrm{Y}^2)-2\mathrm{E}(\mathrm{XY})$$

Mais les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$. Puisqu'elles sont de même loi

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}^2) = 2\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - 2\mathrm{E}(\mathrm{X})^2 = 2\mathrm{V}(\mathrm{X})$$

Remarque. On peut montrer que

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{n(n+2)}{12}$$

Solution 14

D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Solution 15

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule numéro k a été tirée lors des n tirages et 0 sinon. Chaque X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$. Puisque $\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$, on obtient par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\mathrm{X}_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)$$

On montre classiquement que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$. Ainsi $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

Solution 16

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui à une permutation associe 1 si k est un point fixe et 0 sinon. On a donc $\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.
On détermine ensuite la loi de X_k par dénombrement. Le nombre de permutations fixant k est $(n-1)!$ et comme la probabilité sur S_n est uniforme, $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Ainsi X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$ de sorte que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = \frac{1}{n}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \delta(\mathrm{X}_k) = 1$$

Pour le calcul de la variance, il faut prendre garde au fait que les variables aléatoires X_k ne sont pas indépendantes. Néanmoins

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k, \sum_{l=1}^{n} \mathrm{X}_l\right) = \sum_{1\le k,l\le n} \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) + \sum_{1\le k\ne l\le n} \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l)$$

Puisque les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli, $\mathbb{V}(\mathrm{X}_k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et pour $k \neq l$,

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_k\mathrm{X}_l) - \mathbb{E}(\mathrm{X}_k)\mathbb{E}(\mathrm{X}_l) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1, \mathrm{X}_l = 1) - \frac{1}{n}^2$$

A nouveau, on calcule $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1, \mathrm{X}_l = 1)$ par dénombrement. Le nombre de permutations pour lesquelles k et l sont fixes est $(n-2)!$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1, \mathrm{X}_l = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$. Ainsi $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_l) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$. Finalement,

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sum_{1\le k\ne l\le n} \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{n} + n(n-1)\frac{1}{n^2(n-1)} = 1$$

car $\mathrm{card}\left(\left\{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ k \neq l\right\}\right) = n(n-1)$.

Solution 17

Notons F la variable aléatoire qui désigne le nombre de «faces» obtenus avec n lancers. Alors $\mathrm{F} \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $p = 1/2$. Donc $\mathrm{E}(\mathrm{F}) = np =$

$n/2$ et $V(F) = np(1-p) = n/4$.
Notons $X = F/n$ la fréquence des «faces» parmi les n lancers.

$$E(X) = E\left(\frac{F}{n}\right) = \frac{E(F)}{n} = \frac{1}{2},$$
$$V(X) = V\left(\frac{F}{n}\right) = \frac{V(F)}{n^2} = \frac{1}{4n}.$$

D'après l'inégalité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Dans notre cas,

$$P(|X - 0,5| > \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Par passage au contraire cela s'écrit

$$1 - P(|X - 0,5| \leqslant \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

ou encore

$$P(|X - 0,5| \leqslant \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

En prenant $\varepsilon = 0,05$, on a donc

$$P(0,45 \leq X \leq 0,55) \geq 1 - \frac{100}{n}$$

En prenant $n = 1000$, on a alors bien

$$P(0,45 \leq X \leq 0,55) \geq 0,9$$

Dénombrabilité

Solution 18

On rappelle que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
Supposons qu'il existe une telle application f. Alors $f(\mathbb{Q})$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis. En effet, $f(\mathbb{Q}) = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{f(x)\}$. Par ailleurs, $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ donc $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est également au plus dénombrable. Enfin, $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{Q}) \cup f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est au plus dénombrable comme réunion de deux tels ensembles.
On remarque maintenant que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ comme image de l'intervalle $\mathbb{R}$ par une application continue. Mais les intervalles non réduits à un point ne sont pas finis ou dénombrables donc $f(\mathbb{R})$ est un point $\{a\}$. Mais alors $f(\mathbb{Q}) = f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{a\}$ et donc $\{a\} \subset \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \varnothing$, ce qui est absurde.

Solution 19

Notons A l'ensembles des polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$ et A_d l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$ de degré d. Remarquons que l'ensemble des entiers algébriques est

$$E = \bigcup_{P\in A} P^{-1}(\{0\}) = \bigcup_{d\in\mathbb{N}} \bigcup_{P\in A_d} P^{-1}(\{0\})$$

Pour tout $P \in A$, l'ensemble $P^{-1}(\{0\})$ est fini. De plus, l'ensemble A_d est dénombrable puisqu'il est en bijection avec $\mathbb{Z}^d$ via l'application

$$\begin{cases} \mathbb{Z}^d & \longrightarrow & A_d \\ (a_0, \dots, a_{d-1}) & \longmapsto & X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \end{cases}$$

et que $\mathbb{Z}^d$ est lui-même dénombrable comme produit cartésien fini d'ensembles dénombrables. Ainsi pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{P\in A_d} P^{-1}(\{0\})$ est au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis. Finalement, E est également au plus dénombrable comme union dénombrable de tels ensembles. De plus, E n'est clairement pas fini puisque $\mathbb{Z} \subset E$ (tout entier relatif n est racine du polynôme $X-n$) donc E est dénombrable.

Solution 20

Supposons (i) et montrons (ii). On sait qu'il existe une bijection de A sur $\mathbb{N}$. Cette bijection est a fortiori une injection de A dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}$.
Supposons (ii) et montrons (i). Il existe une injection f de A sur un ensemble dénombrable B. Par définition, il existe une bijection g de B sur $\mathbb{N}$. Alors $g \circ f$ est une injection de A sur $\mathbb{N}$ donc une bijection de A sur $g \circ f(\mathrm{A})$, qui est une partie de $\mathbb{N}$. Ainsi A est dénombrable.
Supposons (i) et montrons (iii). On sait qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur A. Cette bijection est a fortiori une surjection de l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}$ sur A.
Supposons (iii) et montrons (i). Il existe une surjection g d'un ensemble dénombrable B sur A. Par définition, il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ sur B. Alors $f \circ g$ est une surjection de $\mathbb{N}$ sur A. Considérons une application qui à tout élément de A associe l'un de ses antécédents par $f \circ g$ (il en existe toujours au moins un par surjectivité de $f \circ g$). Par construction, cette application est une bijection de A sur une partie de $\mathbb{N}$ (l'ensemble des antécédents choisis) de sorte que A est dénombrable.

Solution 21

Remarquons que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\mathrm{S}_\varepsilon = \{j \in \mathrm{J},\ |a_j| \geq \varepsilon\}$ est fini car $(a_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est sommable. Il suffit alors de remarquer que $\mathrm{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{S}_{1/n}$ de sorte que S est au plus dénombrable en tant que réunion dénombrable d'ensembles finis.

Généralités

Solution 22

1. **a.** La suite (B_n) est décroissante pour l'inclusion. Ainsi, par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{B}_n$$

b. Par ailleurs,

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} \mathrm{A}_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)$$

Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$ est majorée par le reste d'une série convergente donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = 0$.

2. **a.** Soit $k \in [\![n, n+p]\!]$. Par convexité de l'exponentielle,

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}_k}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_k) \leq \exp(-\mathbb{P}(\mathrm{A}_k))$$

Ainsi

$$\prod_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}_k}) \leq \prod_{k=n}^{n+p} \exp(-\mathbb{P}(\mathrm{A}_k))$$

Comme les $\overline{\mathrm{A}_k}$ sont mutuellement indépendants,

$$\prod_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}_k}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{\mathrm{A}_k}\right)$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{\mathrm{A}_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right)$$

b. Posons $\mathrm{C}_{n,p} = \bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{\mathrm{A}_k}$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. La suite $(\mathrm{C}_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_n}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{\mathrm{A}_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_{n,p}\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n,p})$$

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge vers $+\infty$, $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k) = +\infty$ et donc $\lim_{p\to+\infty} \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right) = 0$. D'après la question précédente, $\lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{C}_{n,p}) = 0$. On en déduit que $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_n}) = 0$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{B}_n}\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_n}) = 0$$

Finalement, $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 0$ et donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1$.

Solution 23

---

1. L'événement $\mathrm{A}_{k,p}$: «le joueur J_k gagne au $p^{\text{ème}}$ tour» correspond à

   - les joueurs $\mathrm{J}_1, \dots, \mathrm{J}_n$ perdent leurs $p-1$ premiers tours ;
   - les joueurs $\mathrm{J}_1, \dots, \mathrm{J}_{k-1}$ perdent lors du $p^{\text{ème}}$ tour ;
   - le joueur J_k gagne.

   Ainsi
   $$\mathbb{P}(\mathrm{A}_{k,p}) = (q_1 \dots q_n)^{p-1}(q_1 \dots q_{k-1})p_k$$
   Comme $\mathrm{G}_k = \bigsqcup_{p\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_{k,p}$,
   $$\mathbb{P}(\mathrm{G}_k) = \sum_{p=1}^{+\infty} (q_1 \dots q_n)^{p-1}(q_1 \dots q_{k-1})p_k = \frac{(q_1 \dots q_{k-1})p_k}{1 - q_1 \dots q_n}$$

2. Posons pour simplifier, $u_k = \prod_{i=1}^{k} q_k$ (en convenant que $u_0 = 1$). Alors
   $$\mathbb{P}(\mathrm{G}_k) = \frac{u_{k-1} - u_k}{1 - u_n}$$
   En notant $\mathrm{G} = \bigsqcup_{k=1}^{n} \mathrm{G}_k$ l'événement «l'un des joueurs gagne» i.e. «le jeu se finit», on a par téléscopage
   $$\mathbb{P}(\mathrm{G}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_{k-1} - u_k}{1 - u_n} = \frac{u_0 - u_n}{1 - u_n} = 1$$
   Le jeu se finit donc presque sûrement.

3. Le jeu est équitable si et seulement si $\mathbb{P}(\mathrm{G}_{k+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{G}_k)$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ i.e. $p_k = q_k p_{k+1}$ ou encore $\frac{1}{p_{k+1}} = \frac{1}{p_k} - 1$. Ceci équivaut à $\frac{1}{p_k} = \frac{1}{p_1} - (k-1)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Pour que les p_k soient bien des probabilités, il faut que $\frac{1}{p_k} \geq 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ i.e. $\frac{1}{p_1} \geq k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ ou encore $p_1 \geq \frac{1}{n}$.

4. Notons T le nombre de coups joués. Comme T est une variable aléatoire positive, elle admet une espérance (éventuellement infinie). Remarquons que pour $(p,k) \in \mathbb{N}^* \times [\![1, n]\!]$, $\{\mathrm{T} = n(p-1)+k\} = \mathrm{A}_{k,p}$. Remarquons également que
   $$\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{k=1}^{n} \{n(p-1)+k,\ p \in \mathbb{N}^*\}$$

Par sommation par paquets (licite car tous les termes sont positifs),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{T}) &= \sum_{t=1}^{+\infty} t\mathbb{P}(\mathrm{T}=t)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{+\infty}(n(p-1)+k)\mathbb{P}(\mathrm{T}=n(p-1)+k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{+\infty} u_n^{p-1}(u_{k-1}-u_k)(n(p-1)+k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{+\infty} u_n^{p}(u_{k-1}-u_k)(np+k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(u_{k-1}-u_k)\left[n\sum_{p=0}^{+\infty} pu_n^p + k\sum_{p=0}^{+\infty} u_p^n\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n}(u_{k-1}-u_k)\left[\frac{nu_n}{(1-u_n)^2}+\frac{k}{1-u_n}\right]\\
&= \frac{nu_n}{(1-u_n)^2}\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}-u_k + \frac{1}{1-u_n}\sum_{k=1}^{n} k(u_{k-1}-u_k)\\
&= \frac{nu_n}{1-u_n}+\frac{1}{1-u_n}\left(\sum_{k=1}^{n}((k-1)u_{k-1}-ku_k)+\sum_{k=1}^{n}u_{k-1}\right)\\
&= \frac{nu_n}{1-u_n}+\frac{1}{1-u_n}\left(-nu_n+\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right)\\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}u_k}{1-u_n}
\end{aligned}$$

Solution 24

---

1. On note B_n l'événement «A_1 touche la cible au tour $2n+1$» et C_n l'événément «A_2 touche la cible au tour $2n$. On note également D_n l'événement «A_1 l'emporte au tour $2n+1$. Alors

$$\mathrm{D}_n = \left(\bigcap_{i=}^{n-1}\overline{\mathrm{B}_i}\right)\cap\left(\bigcap_{i=0}^{n-1}\overline{\mathrm{C}_i}\right)\cap \mathrm{B}_n$$

Par indépendance des tirs,

$$\mathbb{P}(\mathrm{D}_n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_i})\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}(\overline{\mathrm{C}_i})\right)\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = (1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1$$

2. Notons E_n l'événement «A_2 l'emporte au tour $2n+2$». De la même manière

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_{2n+2}) = (1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n p_2$$

3. Notons D l'événement «A_1 l'emporte» et E l'événement «A_2 l'emporte». Alors $\mathrm{D} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{D}_n$ et $\mathrm{E} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_n$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathrm{D}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{D}_n) = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$
$$\mathbb{P}(\mathrm{E}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{E}_n) = \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

Notons F l'événement «le jeu dure indéfininiment». Alors $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{D}\sqcup\mathrm{E}$ donc

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{F}}) = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} + \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

En posant $q_i = 1 - p_i$, on a donc

$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{F}}) = \frac{1 - q_1 + q_1(1 - q_2)}{1 - q_1 q_2} = 1$$

puis $\mathbb{P}(\mathrm{F}) = 0$.

4. Le jeu est équitable à condition que $\mathbb{P}(\mathrm{D}) = \mathbb{P}(\mathrm{E})$ i.e. $p_1 = (1 - p_1)p_2$ i.e. $p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$. Si $p_1 > 1/2$, alors $1 - p_1 < 1/2$ donc $\frac{p_1}{1 - p_1} > 1$ et il est impossible d'avoir $p_2 > 1$. Le jeu n'est donc pas équitable.

Solution 25

L'événement A peut aussi se formuler comme : «n'obtenir que des piles à partir d'un certain rang». Ainsi $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} \mathrm{P}_k$ en notant P_k l'événement «obtenir un pile au lancer numéro k». Notons $\mathrm{A}_n = \bigcap_{k\geq n} \mathrm{P}_k$ de telle sorte que $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. Pour tout couple $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p$,

$$\mathrm{A}_n \subset \bigcap_{k=n}^{p} \mathrm{F}_k$$

donc

$$0 \leq \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{p} \mathrm{F}_k\right) = \frac{1}{2^{p-n+1}}$$

donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = 0$ en faisant tendre n vers l'infini. Finalement, $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0$ car A est négligeable comme réunion dénombrable d'événemenst négligeables.

Probabilités conditionnelles

Solution 26

1. On a clairement $p_0 = 0$ et $p_1 = 1 - p$.

2. Comme $\mathrm{D}_n \subset \mathrm{D}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (p_n) est croissante. Comme elle est majorée par 1 (c'est une suite de probabilités), elle converge.

3. Notons A l'événement «la fleur F_0 a des descendants».

- Si la fleur F_0 n'a pas de descendants, alors sa lignée est éteinte à l'instant $n + 1$ i.e. $\mathbb{P}(\mathrm{D}_{n+1} \mid \overline{\mathrm{A}}) = 1$.
- Si la fleur F_0 a des descendants, sa lignée est éteinte à l'instant $n + 1$ si chacun de ses deux descendants à sa lignée éteinte à l'instant $n + 1$. Les deux lignées étant indépendantes, on a par translation $\mathbb{P}(\mathrm{D}_{n+1} \mid \mathrm{A}) = p_n^2$.

D'après la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(\mathrm{D}_{n+1}) = \mathbb{P}(\mathrm{D}_{n+1} \mid \overline{\mathrm{A}})\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) + \mathbb{P}(\mathrm{D}_{n+1} \mid \mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{A}) = (1 - p) + pp_n^2$$

4. On sait que (p_n) converge vers $\ell \in [0, 1]$. Elle converge alors nécessairement vers un point fixe de $f : x \mapsto px^2 + 1 - p$. Si $p = 0$, ce point fixe est évidemment 1, sinon c'est une racine du trinôme $p\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1 - p$, à savoir 1 ou $\frac{1-p}{p}$. Si $p < \frac{1}{2}$, $\frac{1-p}{p} > 1$ donc $\ell = 1$. Sinon $\frac{1-p}{p} \leq 1$ et, comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on prouve aisément que $\left[0, \frac{1-p}{p}\right]$ est stable par f. Comme $p_0 = 0 \in \left[0, \frac{1-p}{p}\right]$, (p_n) est à valeurs dans $\left[0, \frac{1-p}{p}\right]$ et donc $\ell = \frac{1-p}{p}$.

Pour récapituler, (p_n) converge vers 1 si $p < \frac{1}{2}$ et 0 sinon.

On peut vérifier à l'aide d'une simulation avec Python.

```
>>> import numpy.random as rd
>>>
>>> def proba_simulee(p):
...     N=100
...     morts=0
...     nb=10000
...     for _ in range(nb):
...         n=1
...         cpt=0
...         while n!=0 and n<N:
...             n=sum(2*rd.binomial(1,p,n))
...             cpt+=1
...         if n==0:
...             morts+=1
...     return morts/nb
...
>>> def proba_theorique(p):
...     return 1 if p<1/2 else (1-p)/p
...
>>> nb_tests=20
>>> [(i/nb_tests, proba_simulee(i/nb_tests), proba_theorique(i/nb_tests)) for i in
 ↪ range(nb_tests+1)]
[(0.0, 1.0, 1), (0.05, 1.0, 1), (0.1, 1.0, 1), (0.15, 1.0, 1), (0.2, 1.0, 1), (0.25, 1.0, 1),
 ↪ (0.3, 1.0, 1), (0.35, 1.0, 1), (0.4, 1.0, 1), (0.45, 1.0, 1), (0.5, 0.9893, 1.0), (0.55,
 ↪ 0.8185, 0.8181818181818181818), (0.6, 0.6606, 0.6666666666666667), (0.65, 0.5432,
 ↪ 0.5384615384615384), (0.7, 0.4315, 0.42857142857142866), (0.75, 0.3384, 0.3333333333333333),
 ↪ (0.8, 0.2465, 0.24999999999999994), (0.85, 0.1801, 0.17647058823529416), (0.9, 0.1165,
 ↪ 0.11111111111111108), (0.95, 0.0549, 0.052631578947368474), (1.0, 0.0, 0.0)]
```

Solution 27

Notons F (resp. P) l'événement «on a obtenu face (resp. pile) au premier lancer» ainsi que G_n l'événement «on a obtenu exactement n points au cours du jeu». D'après la formule des probabilités totales :

$$g_{n+2} = \mathbb{P}(G_{n+2}) = \mathbb{P}(G_{n+2} \mid P_1)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(G_{n+2} \mid F_1)\mathbb{P}(F_1)$$

Or il est clair que $\mathbb{P}(G_{n+2} \mid P_1) = g_{n+1}$ et $\mathbb{P}(G_{n+2} \mid F_1) = g_n$. Ainsi

$$g_{n+2} = pg_{n+1} + qg_n$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - pX - q = X^2 - pX + p - 1$. Son discriminant est $p^2 - 4p + 4 = (p-2)^2$ donc ses racines sont $p-1$ et 1. On en déduit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_n = A + B(p-1)^n$$

Or $g_0 = 1$ et $g_1 = \mathbb{P}(P_1) = p$. On en déduit que

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + B(p-1) = p \end{cases}$$

On en déduit que $A = \dfrac{1}{2-p}$ et $B = \dfrac{1-p}{2-p}$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = \frac{1-(p-1)^{n+1}}{2-p}$$

Remarque. On peut être plus rigoureux pour déterminer la relation de récurrence. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_k = 2) = q$. Posons $S_p = \sum_{k=1}^{p} X_k$ pour $p \in \mathbb{N}$ (en particulier, $S_0 = 0$). Alors

$$G_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{S_p = n\}$$

puis

$$G_{n+2} = (G_{n+2} \cap \{X_1 = 1\}) \sqcup (\mathbb{P}(G_{n+2} \cap \{X_1 = 2\})$$

Or pour $j \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
G_{n+2} \cap \{X_1 = j\} &= \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \left(\{S_p = n+2\} \cap \{X_1 = j\}\right) && \text{par distributivité de l'intersection sur l'union} \\
&= \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left(\{S_p = n+2\} \cap \{X_1 = j\}\right) && \text{car } S_0 = 0 \text{ et } n+2 > 0 \\
&= \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left(\left\{\sum_{k=2}^{p} X_k = n+2-j\right\} \cap \{X_1 = j\}\right) \\
&= \left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left\{\sum_{k=2}^{p} X_k = n+2-j\right\}\right) \cap \{X_1 = j\} && \text{par distributivité de l'intersection sur l'union}
\end{aligned}$$

D'après le lemme des coalitions, $\sum_{k=2}^{p} X_k$ et X_1 sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}\left(G_{n+2} \cap \{X_1 = j\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left\{\sum_{k=2}^{p} X_k = n+2-j\right\}\right) \mathbb{P}\left(\{X_1 = j\}\right)$$

Or $\sum_{k=2}^{p} X_k$ a la même loi que S_{p-1}. En effet, les X_k étant indépendantes et de même loi,

$$G_{\sum_{k=2}^{p} X_k} = \prod_{k=2}^{p} G_{X_k} = \prod_{k=1}^{p-1} G_{X_k} = G_{S_{p-1}}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left\{\sum_{k=2}^{p} X_k = n+2-j\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \{S_{p-1} = n+2-j\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{S_p = n+2-j\}\right) = g_{n+2-j}$$

Finalement

$$g_{n+2} = \mathbb{P}\left(G_{n+2} \cap \{X_1 = 1\}\right) + \left(G_{n+2} \cap \{X_1 = 2\}\right) = g_{n+1}\mathbb{P}(X_1 = 1) + g_n\mathbb{P}(X_1 = 2) = pg_{n+1} + qg_n$$

Solution 28

Notons A l'événement «obtenir deux piles consécutifs». Dans la suite, on notera F_n (resp. P_n) l'événement «on a obtenu "pile" (resp. "face") au $n^{\text{ème}}$ lancer.
On va plutôt s'intéresser à l'événement $\overline{A}$ et on note $q = \mathbb{P}(\overline{A})$. Remarquons que F_1, $P_1 \cap F_2$ et $P_1 \cap P_2$ forment un système complet d'événements.
On écrit la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A} \mid F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(\overline{A} \mid P_1 \cap F_1)\mathbb{P}(P_1 \cap F_1) + \mathbb{P}(\overline{A} \mid P_1 \cap P_2)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$$

- Si on a obtenu un face au premier lancer, il suffit de ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des lancers suivants. Autrement dit, $\mathbb{P}(\overline{A} \mid F_1) = q$.
- Si on a obtenu un pile puis un face, il suffit encore de ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des lancers suivants. Autrement dit, $\mathbb{P}(\overline{A} \mid P_1 \cap F_1) = q$.
- Enfin, il est clair que $\mathbb{P}(\overline{A} \mid P_1 \cap P_2) = 0$.

Ainsi $q = (1-p)q + p(1-p)q$ ou encore $qp^2 = 0$. Comme $p > 0$, $q = 0$ puis $\mathbb{P}(A) = 1$.

Variables aléatoires

Solution 29

1. Posons $\mathrm{I}_k = \int_0^1 x^k(1-x)^r \,\mathrm{d}x$. Comme les I_k sont clairement positifs, il s'agit de montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r\mathrm{I}_k$ converge et a pour somme 1.

   Première méthode :
   On prouve par une suite d'intégration par parties que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_k = \frac{k!}{\prod_{i=1}^{k+1}(r+i)}$$

   On fait apparaître un télescopage en remarquant que $r = (r+k+1)-(k+1)$. Ainsi $r\mathrm{I}_k = u_k - u_{k+1}$ en posant $u_k = \dfrac{k!}{\prod_{i=1}^{k}(r+i)}$.
   On montre maintenant que la suite (u_k) converge vers 0. En effet,

$$\ln(u_k) = -\sum_{i=1}^{k} \ln\left(1+\frac{r}{i}\right)$$

   Or $\ln\left(1+\frac{r}{i}\right) \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{r}{i}$, donc, par sommation de relations de comparaison pour des séries à termes positifs divergente,

$$\ln(u_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\sum_{i=1}^{k}\frac{r}{i}$$

   Comme la série harmonique diverge vers $+\infty$, la suite $(\ln(u_k))$ diverge vers $-\infty$ et la suite (u_k) converge donc vers 0.
   La série télescopique $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k - u_{k+1}$ i.e. la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r\mathrm{I}_k$ converge donc et a pour somme $u_0 = 1$.

   Deuxième méthode :
   On utilise le théorème de convergence dominée. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1[, 0 \leq \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}(1-x)^r \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k-1}(1-x)^r = (1-x)^{r-1}$$

   Or la fonction $x \mapsto (1-x)^{r-1}$ est intégrable sur $[0,1[$ par critère de Riemann ($r-1>-1$). On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = r\int_0^1 (1-x)^{r-1}\,\mathrm{d}x = 1$$

2. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ converge, c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r(k+1)\mathrm{I}_k$ converge, l'espérance étant alors la somme de cette série. Les calculs précédents montrent que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (k+1)\mathrm{I}_k = \frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1}(r+i)}$$

   Si $r \leq 1$,

$$(k+1)\mathrm{I}_k \geq \frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1}(1+i)} = \frac{1}{k+2}$$

   donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r(k+1)\mathrm{I}_k$ diverge par comparaison à la série harmonique.
   On montre maintenant la convergence dans le cas $r > 1$.

Première méthode : On peut à nouveau faire apparaître un télescopage en remarquant que

$$r(k+1)\mathrm{I}_{k+1} = \frac{r}{r-1}(v_k - v_{k+1})$$

avec $v_k = \dfrac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k}(r+i)}$. En posant $s = r-1 > 0$, on a donc

$$v_k = (r+1)\frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1}(s+i)}$$

Quitte à changer r en s dans la question précédente, on a $v_k = (r+1)u_{k+1}$ de sorte que (v_k) converge encore vers 0. La série télescopique $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k - v_{k+1}$ converge donc et a pour somme $v_0 = 1$. La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} r(k+1)\mathrm{I}_k$ converge donc également et a pour somme $\dfrac{r}{r-1}$ qui est donc l'espérance de X.

Deuxième méthode : On peut encore utiliser le théorème de convergence dominée. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}(1-x)^r \leq \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}(1-x)^r = (1-x)^{r-2}$$

Or la fonction $x \mapsto (1-x)^{r-2}$ est intégrable sur $[0,1[$ par critère de Riemann ($r-2 > -1$). On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = r\int_0^1 (1-x)^{r-1}\,\mathrm{d}x = 1$$

Solution 30

Le fait qu'une suite réelle (u_n) converge vers 0 s'écrit :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ -\varepsilon \leq u_p \leq \varepsilon$$

On montre aisément que ceci équivaut à

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ -\frac{1}{2^k} \leq u_p \leq \frac{1}{2^k}$$

On en déduit que

$$\mathrm{A} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} \left\{\mathrm{X}_p \in \left[-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right]\right\}$$

Comme les X_p sont des variables aléatoires, les $\left\{\mathrm{X}_p \in \left[-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right]\right\}$ sont des événements. Ainsi A est un événement comme réunions et intersections dénombrables d'événements.

Solution 31

1. Le premier tirag eétant effectué, on tire des jetons jusqu'à obtention d'un jeton différent du premier jeton tiré. A chaque tentative, la probabilité de réussite est de $\dfrac{2}{3}$. On en déduit que $\mathrm{Y}-1 \sim \mathcal{G}(2/3)$.

2. Par conséquent, Y est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et

$$\forall n \geq 2,\ \mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}-1=n-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{n-1}}$$

3. On sait alors que $\mathbb{E}(\mathrm{Y}-1) = \dfrac{3}{2}$ et $\mathbb{V}(\mathrm{Y}-1) = \dfrac{3}{4}$. Donc $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \dfrac{5}{2}$ et $\mathbb{V}(\mathrm{Y}) = \dfrac{3}{4}$.

4. Remarquons que (Y,Z) est à valeurs dans $\left\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2,\ 2 \leq k < \ell\right\} \cup \{(+\infty,+\infty)\}$. De plus, pour $2 \leq k < \ell$,

$$\mathbb{P}((\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = (k,\ell)) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)\mathbb{P}(\mathrm{Z}=\ell \mid \mathrm{Y}=k) = \frac{2}{3^{k-1}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}}$$

5. Z est à valeurs dans $[\![3, +\infty]\!]$. Pour tout entier $\ell \geq 3$,

$$\mathbb{P}(Z = \ell) = \sum_{k=2}^{\ell-1} \mathbb{P}((Y, Z) = (k, \ell)) = \sum_{k=2}^{\ell-1} \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}} = \frac{2^{\ell-1}}{3^{\ell-1}} \left(1 - \frac{1}{2^{\ell-2}}\right)$$

On peut vérifier avec Python.

```python
from random import randint

def Z():
    X=randint(1,3)
    Y=randint(1,3)
    n=2
    while X==Y:
        Y=randint(1,3)
        n+=1
    Z=randint(1,3)
    n+=1
    while Y==Z or X==Z:
        Z=randint(1,3)
        n+=1
    return n

def frequencies(l):
    proba_theorique = lambda i: 2**(i-1)/3**(i-1)*(1-1/2**(i-2))
    proba_empirique = lambda i: l.count(i)/len(l)
    return [(proba_theorique(i), proba_empirique(i)) for i in range(3,max(l)+1)]
```

```
>>> frequencies([Z() for _ in range(100000)])
[(0.2222222222222222, 0.22267), (0.2222222222222222, 0.22117), (0.1728395061728395, 0.17327),
 ↪ (0.1234567901234568, 0.12389), (0.0850480109739369, 0.08669), (0.05761316872427984, 0.05584),
 ↪ (0.03871361073007164, 0.03852), (0.025910684346898336, 0.02558), (0.017307659740215753,
 ↪ 0.01737), (0.011549729885349455, 0.01163), (0.007703583276412622, 0.00785),
 ↪ (0.005136976635223854, 0.00512), (0.003425069240465493, 0.00335), (0.0022835188770824145,
 ↪ 0.00239), (0.001522392379201194, 0.00155), (0.0010149437398495463, 0.00111),
 ↪ (0.0006766343222492809, 0.00064), (0.00045109126894938174, 0.00051), (0.00030072808622731934,
 ↪ 0.00026), (0.00020048558201634563, 0.00028), (0.00013365711841027467, 9e-05),
 ↪ (8.910476685108673e-05, 7e-05), (5.9403184982136813e-05, 4e-05), (3.9602125681895316e-05,
 ↪ 8e-05), (2.6401417908087134e-05, 2e-05), (1.760094553433262e-05, 0.0),
 ↪ (1.1733963776979923e-05, 0.0), (7.82264254712823e-06, 0.0), (5.215095041132692e-06, 1e-05)]
```

Solution 32

On rappelle que pour $|q| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

1. On doit avoir $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j, Y = k) = 1$. Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j+k}{2^{j+k}} = 2\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k}\right) = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 8$$

donc $a = \dfrac{1}{8}$.

2. Pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = j) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j, Y = k) = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j+k}{2^{j+k}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^j}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k} + j\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{j+3}}(2+2j) = \frac{j+1}{2^{j+2}}$$

Par symétrie, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{k+1}{2^{k+2}}$$

3. On remarque par exemple que

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$$

Ainsi X et Y ne sont pas indépendantes.

4. Remarquons que

$$\{X = Y\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{X = n\} \cap \{Y = n\}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = n) = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n}{2^{2n}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{9}$$

Lois usuelles

Solution 33

Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ puisque X et Y le sont. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $\{Z \geq k\} = \{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}$ donc par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{P}\left(\{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}\right) = \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k)$$

Puisque $\{X \geq k\} = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty} \{X = k\}$,

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p_1)^{n-1}p_1 = (1-p_1)^{k-1}$$

Remarque. On aurait pu se passer du calcul de somme de série puisqu'une loi géométrique représente la loi du premier succès.

De la même manière

$$\mathbb{P}(Y \geq k) = (1-p_2)^{k-1}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = (1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}$$

On constate enfin que

$$\{Z \geq k\} = \{Z = k\} \sqcup \{Z \geq k+1\}$$

donc

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1) = (1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1} - (1-p_1)^k(1-p_2)^k$$

Solution 34

1. Remarquons que

$$\{X = Y\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\{X = n\} \cap \{Y = n\}\right)$$

Ainsi par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left((1-p)^{n-1}p\right)^2 = p^2\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^{2n} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

2. X + Y est à valeurs dans $⟦2, +\infty⟦$. Soit $n \in ⟦2, +\infty⟦$. Remarquons que

$$\{X+Y=n\} = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} (\{X=k\} \cap \{Y=n-k\})$$

A nouveau par indépednace de X et Y,

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}p = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

Remarque. On aurait aussi pu utiliser les fonctions génératrices de X et Y.

3. Puisque $\{Z > n\} = \bigsqcup_{k \geq n+1} \{Z=k\}$,

$$\mathbb{P}(Z > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p = p(1-p)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = (1-p)^n$$

Remarque. Ceci est cohérent avec l'interprétation de la loi géométrique comme loi du premier succès.

4. On remarque que

$$\{Z > X+Y\} = \bigsqcup_{n \geq 2} (\{Z > n\} \cap \{X+Y=n\})$$

Par indépendance de Z et X + Y,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z > X+Y) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > n)\mathbb{P}(X+Y=n) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^n (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \\
&= p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)(1-p)^{2n-2} \\
&= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{2n} \\
&= p^2(1-p)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{2(n-1)} \\
&= \frac{p^2(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2}
\end{aligned}$$

car $\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$ pour $t \in]-1, 1[$. En simplifiant

$$\mathbb{P}(Z > X+Y) = \frac{(1-p)^2}{(2-p)^2}$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> import numpy.random as rd
>>>
>>> p=.2
>>> n=10000
>>> X=rd.geometric(p,n)
>>> Y=rd.geometric(p,n)
```

```
>>> Z=rd.geometric(p,n)
>>> sum(Z>X+Y)/n
0.2008
>>> (1-p)**2/(2-p)**2
0.19753086419753088
```

Solution 35

1. La loi de X est une loi géométrique de paramètre 1/2.

2. Notons B l'événement consitant à obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience. Alors

$$\mathrm{B} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\mathrm{B} \cap \{\mathrm{X} = n\})$$

Or

$$\mathbb{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{X} = n) = \mathbb{P}_{\mathrm{X}=n}(\mathrm{B})\mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n}$$

Comme

$$\forall x \in]-1,1[, \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on obtient par intégration

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

On peut vérifier avec Python.

```
>>> from random import random
>>> from math import log
>>>
>>> def simul():
...     nb=1
...     while random()<.5:
...         nb+=1
...     return random()<1/nb
...
>>> N=10**5
>>> sum([simul() for n in range(N)])/N
0.69218
>>> log(2)
0.6931471805599453
```

Solution 36

1. X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = (1-p)^{n-1}p$$

2. **a.** U et V sont respectivement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$. Soit alors $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$.
Traitons d'abord le cas où $m = 0$. Alors

$$\{(U, V) = (n, 0)\} = \{X = n\} \cap \{Y = n\}$$

donc, par indépendance de X et Y

$$\mathbb{P}((U, V) = (n, 0)) = \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = p^2(1-p)^{2n-2}$$

Traitons maintenant le cas $m > 0$. Alors

$$\{(U, V) = (n, m)\} = (\{X = n + m\} \cap \{Y = n\})$$

A nouveau, par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}((U, V) = (n, m)) = \mathbb{P}(X = n + m)\mathbb{P}(Y = n) = p^2(1-p)^{2n+m-2}$$

En intervertissant X et Y, on trouve que si $m < 0$,

$$\mathbb{P}((U, V) = (n, m)) = p^2(1-p)^{2n-m-2}$$

Dans tous les cas,

$$\mathbb{P}((U, V) = (n, m)) = p^2(1-p)^{2n+|m|-2}$$

On retrouve alors les lois marginales.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(U = n, V = m) \\
&= p^2(1-p)^{2n-2} + 2\sum_{m=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n+m-2} \\
&= p^2(1-p)^{2n-2} + 2p^2(1-p)^{2n-1}\sum_{m=1}^{+\infty}(1-p)^{m-1}
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(1-p)^{m-1} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

donc

$$\mathbb{P}(U = n) = p(1-p)^{2n-2}(2-p) = \left((1-p)^2\right)^{n-1}\left(1-(1-p)^2\right)$$

Notamment, U suit la loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^2$.
De la même manière

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U = n, V = m) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n+|m|-2} \\
&= p^2(1-p)^{|m|}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2(n-1)} \\
&= p^2(1-p)^{|m|} \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)^{|m|}}{2-p}
\end{aligned}$$

b. Il s'agit d'une simple vérification :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = m) = p(1-p)^{2n-2}(2-p) \cdot \frac{p(1-p)^{|m|}}{2-p} = p^2(1-p)^{2n+|m|-2} = \mathbb{P}(\{U = n\} \cap \{V = m\})$$

3. L'énoncé suppose implicitement que U et V sont respectivement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$. Puisque $X = U + \max(V, 0)$ et $Y = U - \min(V, 0)$, X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Posons $p_n = \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par indépendance de U et V d'une part et de X et Y d'autre part,

$$\mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = 0) = \mathbb{P}(U = n, V = 0) = \mathbb{P}(X = n, Y = n) = p_n^2$$

De même,

$$\mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(V = 1) = \mathbb{P}(U = n, V = 1) = \mathbb{P}(X = n + 1, Y = n) = p_n p_{n+1}$$

Par hypothèse ces deux quantités ne sont pas nulles, donc en divisant membre à membre

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$$

La suite de terme général $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ est donc constante i.e. la suite (p_n) est géométrique. En notant $1 - p$ sa raison, $p_n = (1 - p)^{n-1} p_1$. Mais comme $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, $p_1 = p$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

donc X et Y suivent bien la loi géométrique de paramètre p.
On a vu plus haut que $1 - p = \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$ i.e. $p = 1 - \frac{\mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(V = 0)}$.

Solution 37

---

1. **a.** Les variables aléatoires Y_k sont mutuellement indépendantes.
On a clairement $Y_1 = 1$.

b. Y_k suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n}$. On en déduit que $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{n}{n-k+1}$ et que $\mathbb{V}(Y_k) = \frac{\frac{k-1}{n}}{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2} = \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}$.

2. On a clairement $X = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n H_n$$

3. Par comparaison série/intégrale, on obtient classiquement $H_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$. Par conséquent, $\mathbb{E}(X) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \ln n$.

Solution 38

---

1. D'après une identité de polarisation :

$$2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{V}(V + Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)$$

Or une loi de Poisson a une variance égale à son espérance donc

$$2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X + Y) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 0$$

par linéarité de l'espérance.

2. Soient λ et μ deux réels strictement positifs. Posons $a_n = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ et $b_n = \dfrac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Posons également $p_{i,j} = a_i b_j$ pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ de manière générale sauf

$$p_{0,1} = a_0 b_1 - \alpha \qquad p_{1,0} = a_1 b_0 + \alpha \qquad p_{0,2} = a_0 b_2 + \alpha \qquad p_{2,0} = a_2 b_0 - \alpha$$

où l'on choisit par exemple $\alpha = \min\{a_0 b_1, a_2 b_0\}$. La famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille sommable de somme 1 via Fubini. La famille $(p_{i,j})$ est donc également une famille sommable de réels positifs (on a choisit α pour cela) de somme 1. Il existe donc une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ telle que $\mathbb{P}(Z = (i, j)) = p_{i,j}$. Posons $Z = (X, Y)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{n,k} = a_n \qquad \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{k,n} = b_n$$

de telle sorte que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} p_{k,n-k} = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

via la formule du binôme de Newton (l'égalité reste encore valable pour $n = 1$ et $n = 2$ car les α se simplifient). Ainsi $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
Enfin, X et Y ne sont pas indépendantes. Par exemple, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = p_{0,1}$ et $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) = a_0 b_1 \neq p_{0,1}$ puisque $\alpha > 0$.

Solution 39

1. Si n voitures sont passés en 1H, chacune de ces voitures a une probabilité $\dfrac{1}{m}$ de chosir le gucihet n°1. Ainsi la loi de X conditionnée par l'événement $N = n$ est une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{m}$. Autrement dit

$$\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}$$

2. D'après la formule des probailités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n)\mathbb{P}(N = n)$$

Or $\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = 0$ lorsque $k > n$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n)\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n + k)\mathbb{P}(N = n + k) \\
&= \sum_{n=}^{+\infty} \binom{n+k}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

3. On reconnaît la somme d'une série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \frac{1}{n!} = e^{\lambda\left(1-\frac{1}{m}\right)}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\frac{\lambda}{m}}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{1}{k!}$$

Par conséquent, X suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{m}$.

4. C'est du cours : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \dfrac{\lambda}{m}$.

Solution 40

1. L'application $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t^n e^{-t^2} \underset{\pm\infty}{=} \dfrac{1}{t^2}$ par croissances comparées. donc l'intégrale I_n converge par comparaison à une intégrale de Riemann.

2. Remarquons que

- $t \mapsto t^{n+1}/(n+1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- $t \mapsto e^{-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t^2} = 0$.

Donc, par intégration par parties

$$I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t^{n+2}}{n+1}e^{-t^2}\, dt$$

ou encore

$$2I_{n+2} = (n+1)I_n$$

Comme $t \mapsto te^{-t^2}$ est impaire, $I_1 = 0$. Ainsi $I_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, On montre également que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

3. On utilise la formule de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)I_n \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n I_n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n} I_{2n}}{(2n)!} \\
&= e^{-\lambda}\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^{2n}n!} \\
&= e^{-\lambda}\sqrt{\pi}e^{\frac{\lambda^2}{4}} \\
&= \sqrt{\pi}e^{-\lambda+\frac{\lambda^2}{4}}
\end{aligned}$$

L'utilisation de la formule de transfert est justifiée a posteriori puisque le calcul précédent montre que la série à termes postifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n)I_n$ converge.

Espérance et variance

Solution 41

On utilise la formule de transfert. En posant $q = 1 - p$,

$$\mathbb{E}(1/X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}q^{k-1}p = \frac{p}{q}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{k+1}}{k+1}$$

On sait que la série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} x^k$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\frac{1}{1-x}$. Par intégration d'une série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{q^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-q) = -\ln(p)$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(1/X) = -\frac{p\ln p}{q} = -\frac{p\ln p}{1-p}$$

Solution 42

Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}\mathbb{P}(X>n) &= \sum_{n=0}^{N}(1-\mathbb{P}(X\leq n))\\
&= N+1-\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\\
&= N+1-\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N}\mathbb{P}(X=k)\\
&= N+1-\sum_{k=0}^{N}(N+1-k)\mathbb{P}(X=k)\\
&= (N+1)\left(1-\sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X=k)\right)+\sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(X=k)\\
&= (N+1)\mathbb{P}(X>N)+\sum_{k=0}^{N}k\mathbb{P}(X=k)
\end{aligned}$$

Supposons que X admette une espérance finie. Alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(X=k)$ converge. Alors son reste est défini et tend vers 0. De plus,

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty}k\mathbb{P}(X=k) \geq (N+1)\sum_{k=N+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = (N+1)\mathbb{P}(X>N) \geq 0$$

donc, par encadrement,

$$\lim_{N\to+\infty}(N+1)\mathbb{P}(X>N) = 0$$

On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X>N)$ converge et que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>n)$.
Supposons maintenant que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X>n)$ converge. On remarque alors tout simplement que

$$\sum_{k=0}^{N}k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{N}\mathbb{P}(X>n)-(N+1)\mathbb{P}(X>N) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>n)$$

Ainsi la suite des sommes partielles de la série à termes *positifs* $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(X=k)$ est majorée. Cette série converge donc, ce qui signifie que X admet une espérance finie.

Solution 43

1. Z est à valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\{Z\geq k\} = \bigcup_{I\in\mathcal{P}_k(\mathbb{N})}\bigcap_{i\in I}E_i$$

où $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de cardinal k. L'ensemble $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ est dénombrable puisque l'application qui une partie $\{x_1, \dots, x_k\}$ de $\mathbb{N}$ (avec $x_1 < \dots < x_k$) associe $(x_1, \dots, x_k)$ est une injection de $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}^k$. Par conséquent, $\{Z \geq k\}$ est un événement en tant qu'union dénombrable d'événements. Ensuite

$$\{Z = k\} = \{Z \geq k\} \setminus \{Z \geq k+1\}$$

donc $\{Z = k\}$ est aussi un événement.
Enfin

$$\{Z = \infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{Z \geq k\}$$

donc $\{Z = \infty\}$ est aussi un événement comme intersection dénombrable d'événement.
Ceci prouve que Z est bien une variable aléatoire.

2. Remarquons que

$$\overline{F} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k$$

donc F est un événement. De plus,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(E_k)$$

Comme la série $\sum \mathbb{P}(E_n)$ converge, la suite de ses restes converge vers 0 i.e.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(E_k) = 0$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) = 0$$

La suite $\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion donc, par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(\overline{F}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) = 0$$

puis $\mathbb{P}(F) = 1$.

3.

Solution 44

---

1. On pose $q = 1 - p$. Notons U le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier «pile» et V le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le deuxième «pile» après avoir obtenu le premier «pile». Alors U et V sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p. On rappelle que $G_U(t) = G_V(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} q t^n$. Comme U et V sont indépendantes, $G_{U+V}(t) = G_U(t) G_V(t)$ donc, par produit de Cauchy,

$$G_{U+V}(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) q^{n-2} p t^n$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbb{P}(U + V = n) = (n-1) q^{n-2} p^2$. Or il est clair que $X = U + V - 2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(U + V = n + 2) = (n+1) q^n p^2$$

2. Par linéarité de l'espérance, X est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(V) - 2 = \frac{2}{p} - 2 = \frac{2q}{p}$$

3. La loi de Y conditionnée par l'événement $X = n$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid X = n)\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)q^n p^2 = p^2 \frac{q^k}{1-q} = pq^k$$

Autrement dit, $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p. Ainsi $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$.

4. Tout d'abord, Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$ puisque $Y \leq X$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$[Z = k] = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty} [X = n] \cap [Y = n - k]$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = n - k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n - k \mid X = n)\mathbb{P}(X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)q^n p^2 \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} q^n p^2 = p^2 \cdot \frac{q^k}{1-q} = pq^k
\end{aligned}$$

Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z = k] \cap [Y = n]) &= \mathbb{P}([X = n + k] \cap [Y = n]) \\
&= \mathbb{P}(Y = n \mid X = n + k)\mathbb{P}(X = n + k) \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)q^{n+k} p^2 \\
&= pq^k \cdot pq^n = \mathbb{P}(Z = k)\mathbb{P}(Y = n)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que Z et Y sont indépendantes.

Solution 45

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}([X > n] \cap [Y > n]) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(Y > n)$$

De plus

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = p(1-p)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

De même, $\mathbb{P}(Y > n) = (1 - q)^n$. D'après la formule d'antiréparatition,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n (1-q)^n = \frac{1}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{1}{p+q-pq}$$

Solution 46

Tout d'abord, $X \sim \mathcal{G}(1/2)$. Ensuite, la loi de Y conditionnée par l'événement $\{X = n\}$ est la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On en déduit que Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que, d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid X = n)\mathbb{P}(X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini positif,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n}\frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \\
&= -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

On peut vérifier avec Python.

```
from random import random, randint
def simul():
    n=1
    while random()<.5:
        n+=1
    return randint(1,n)

def esperance(N):
    return sum([simul() for _ in range(N)])/N
```

```
>>> esperance(10000)
1.4955
```

Fonctions génératrices

Solution 47

Comme les X_k sont indépendantes,

$$G_S(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k(t-1)} = e^{\Lambda(t-1)}$$

en notant $\Lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. On en déduit que S suit la loi de Poisson de paramètre Λ.

Solution 48

On a alors $G_{X_i}(t) = (1-p+pt)^{n_i}$. Comme les X_i sont indépendantes,

$$G_S(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = (1-p+pt)^n$$

en posant $n = \sum_{i=1}^{n} n_i$. Ainsi $S \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Solution 49

1. Remarquons que S est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{S = n\} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} (\{N = n\} \cap \{S_k = n\})$$

en posant $S_k = \sum_{i=0}^{k} X_i$. Les S_k sont des variables aléatoires comme sommes *finies* de variables aléatoires réelles donc les ensembles $\{S_k = n\}$ sont des événements. Ainsi $\{S = n\}$ est bien un événement comme réunion dénombrable d'événements. S est donc bien une variable aléatoire.

2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Puisque $(N = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = m, N = n)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires S et $\sum_{k=1}^{n} X_k$ coïncident sur l'événement $N = n$ donc

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m, N = n\right)$$

puis par indépendance des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, N$

$$\mathbb{P}(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right)\mathbb{P}(N = n)$$

Soit $t \in [0,1]$.

$$G_S(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = m)t^m = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right)\mathbb{P}(N = n)t^m$$

Cette égalité et le fait que la famille $\left(\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right)\mathbb{P}(N = n)t^m\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de réels positifs permettent d'appliquer le théorème de Fubini de sorte que

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right) t^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{\sum_{k=1}^{n} X_k}(t)$$

Or $G_{\sum_{k=1}^{n} X_k} = G_X^n$ car $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi que X donc

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G_X(t)^n = G_N \circ G_X(t)$$

3. Puisque X et N admettent des espérances finies, G_X est dérivable en 1 et G_N est dérivable en $1 = G_X(1)$. Il s'ensuit que G_S est dérivable en 1 et que

$$G_S'(1) = G_X'(1)G_N'(G_X(1)) = G_X'(1)G_N'(1)$$

Autrement dit, S admet une espérance finie et $E(S) = E(X)E(N)$.

4. Puisque X et N admettent des moments d'ordre deux, G_X est deux fois dérivable en 1 et G_N est deux fois dérivable en $1 = G_X(1)$. Il s'ensuit que G_S est deux fois dérivable en 1 et donc que S admet un moment d'ordre deux. De plus

$$G_S''(1) = G_X'(1)^2 G_N''(G_X(1)) + G_X''(1)G_N'(G(1)) = G_X'(1)^2 G_N''(1) + G_X''(1)G_N'(1)$$

puis

$$\begin{aligned}
V(S) &= G_S''(1) + G_S'(1) - G_S'(1)^2 \\
&= G_X'(1)^2 G_N''(1) + G_X''(1)G_N'(1) + G_X'(1)G_N'(1) - G_X'(1)^2 G_N'(1)^2 \\
&= G_X'(1)^2 (G_N''(1) + G_N'(1) - G_N'(1)^2) + G_N'(1)(G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2) \\
&= E(X)^2 V(N) + E(N)V(X)
\end{aligned}$$

Solution 50

---

1. Posons $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{(n^2+n+1)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que $R = +\infty$.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+2n+1}{n!} t^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-2)!} t^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+2}}{n!} t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\
&= t^2 e^t + 2te^t + e^t = (t^2+2t+1)e^t
\end{aligned}$$

3. **a.** On doit avoir $G_X(1) = 1$ donc $\lambda = \dfrac{1}{4e}$.

b. On sait que $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$. Or $G_X'(t) = \lambda(t^2+4t+3)e^t$ donc $\mathbb{E}(X) = 2$.
Par ailleurs, $\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$. Or $G_X''(t) = \lambda(t^2+6t+7)e^t$ donc $\mathbb{V}(X) = \dfrac{7}{2} + 2 - 2^2 = \dfrac{3}{2}$.

Solution 51

---

1. D'après le cours, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et son développement en série entière est :

$$\forall t \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

On en déduit que G_X est développable en série entière sur $]-2,2[$ et que son développement en série entière est :

$$\forall t \in]-2,2[,\ G_X(t) = \frac{1}{2-t} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{2^{n+1}}$$

2. D'après le cours, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto (1+t)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et son développement en série entière est :

$$\forall t \in]-1,1[,\ (1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}t^n \text{ où } \binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)$$

Notamment, pour $\alpha = 1/2$, la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et son développement en série entière est :

$$\forall t \in]-1,1[,\ (1+t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} t^n$$

De plus, $\binom{1/2}{0} = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\binom{1/2}{n} &= \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(k-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k-1}{2} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n(2n-1)n!}\prod_{k=1}^{n}(2k-1) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n(2n-1)n!}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n(2n-1)n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n n!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

On remarque que cette expression est encore valide pour $n = 0$. On en déduit que

$$\forall t \in]-1,1[,\ (1+t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n} t^n$$

3. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\forall t \in]-2,2[,\ \mathrm{G_Y}(t) &= 2-\sqrt{2}\sqrt{1-t/2} \\
&= 2-\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}(-t/2)^n \\
&= 2+\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{8^n(2n-1)}\binom{2n}{n}t^n \\
&= 2-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{8^n(2n-1)}\binom{2n}{n}t^n
\end{aligned}$$

4. D'après les questions précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

et

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y} = 0) = 2-\sqrt{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = \frac{\sqrt{2}}{8^n(2n-1)}\binom{2n}{n}$$

5. Comme X et Y sont indépendantes,

$$\forall t \in]-1,1[,\ \mathrm{G_S}(t) = \mathrm{G_{X+Y}}(t) = \mathrm{G_X}(t)\mathrm{G_Y}(t) = \frac{1}{1-t/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-t/2)^{-1/2}$$

On sait d'une part que

$$\forall t \in]-2,2[,\ \frac{1}{1-t/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{2^n}$$

D'autre part, on a vu précédemment que

$$\forall t \in]-1,1[,\ (1+t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}t^n$$

donc, en dérivant terme à terme,

$$\begin{aligned}
\forall t \in]-1,1[,\ \frac{1}{2}(1+t)^{-1/2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}t^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{4^{n+1}(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{4^{n+1}(2n+1)}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}t^n \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\binom{2n}{n}t^n
\end{aligned}$$

puis

$$\forall t \in]-1,1[, (1+t)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}t^n$$

puis enfin

$$\forall t \in]-2,2[, (1-t/2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8^n}\binom{2n}{n}t^n$$

Finalement,

$$\forall t \in]-1,1[,\ \mathrm{G_S}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{8^n\sqrt{2}}\binom{2n}{n}\right)t^n$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\mathrm{S}=n) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{8^n\sqrt{2}}\binom{2n}{n}$$

6. **a.** X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = \frac{1}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi X + 1 est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}+1=n) = \mathbb{P}(\mathrm{X}=n-1) = \frac{1}{2^n}$. Ainsi $\mathrm{X} \sim \mathcal{G}(1/2)$.

b. D'après la cours, $\mathbb{E}(\mathrm{X}+1) = \frac{1}{1/2} = 2$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X}+1) = \frac{1-1/2}{(1/2)^2} = 2$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\mathrm{X}+1) = \mathbb{E}(\mathrm{X})+\mathbb{E}(1) = \mathbb{E}(\mathrm{X})+1$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 1$. De plus, $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{V}(\mathrm{X}+1) = 2$.

c. La fonction $\mathrm{G_Y}$ est dérivable sur $]-2,2[$ et

$$\forall t \in]-2,2[,\ \mathrm{G_Y'}(t) = \frac{1}{2\sqrt{2-t}}$$

Notamment, $\mathrm{G_Y}$ est dérivable en 1 et $\mathrm{G_Y'}(1) = \frac{1}{2}$. D'après le cours, Y admet une espérance et $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \frac{1}{2}$.
La fonction $\mathrm{G_Y}$ est en fait deux fois dérivable sur $]-2,2[$ et

$$\forall t \in]-2,2[,\ \mathrm{G_Y''}(t) = \frac{1}{4}(2-t)^{-3/2}$$

Or

$$\forall t \in]-2,2[,\ \mathrm{G_Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y}=n)t^n$$

donc, par dérivation d'une série entière :

$$\forall t \in]-2,2[,\ G''_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(Y=n)t^{n-2}$$

Notamment,

$$G''_Y(1) = \frac{1}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(Y=n)$$

D'après la formule de transfert, $Y(Y-1)$ admet une espérance et $\mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{1}{4}$.

d. Comme $Y^2 = Y(Y-1)+Y$, Y^2 admet également une espérance et

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(Y(Y-1)) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

On en déduit que

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

e. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Temps d'arrêt

Solution 52

On note respectivement P_n et F_n le nombre de «piles» et de «faces» obtenus en n coups. En remarquant que $P_n + F_n = n$, l'événement $P_n = 2F_n$ est également l'événement $3F_n = n$. Remarquons que, F_n étant à valeurs entières, l'événement $3F_n = n$ est vide si n n'est pas multiple de 3. Si on note A l'événement dont on recherche la probabilité, alors $\overline{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{F_{3n} = n\}$. $F_{3n} = n$

Notons $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ F_{3n} = n\}$. On convient que $T = \infty$ siF_{3n} n'est jamais égal à n.
Posons $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_{3n} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{2^{3n}}$ et $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T=n)$.
On vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{n-k})\mathbb{P}(T=k)$$

$S_1 = 1 + S_1S_2$
$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{2^{3n}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$
Finalement
$\mathbb{P}(T=\infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T=n) = 1 - S_2 = \frac{1}{S_1} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+3}$

Solution 53

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. T_1 suit la loi géométrique de paramètre p.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\{T_r = n\} = \{S_{n-1} = r-1\} \cap \{X_n = 1\}$$

Or S_{n-1} et X_n sont indépendantes d'après le lemme des coalitions donc

$$\mathbb{P}(T_r = n) = \mathbb{P}(S_{n-1} = r-1)\,\mathbb{P}(X_n = 1)$$

De plus, S_{n-1} suit la loi de Bernoulli de paramètres $n-1$ et p en tant que somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p donc

$$\mathbb{P}(T_r = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(n-1)-(r-1)} \cdot p = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

3. Première méthode. On remarque que

$$\overline{\{T_r = +\infty\}} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{T_r = n\}$$

donc

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(T_r = +\infty) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_r = n) \\ &= \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= p^r \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} (1-p)^{n-r} \end{aligned}$$

On sait que pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

donc en dérivant $r-1$ fois

$$\frac{(r-1)!}{(1-x)^r} = \sum_{n=r-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-r+1)!} x^{n-r+1}$$

ou encore

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n=r-1}^{+\infty} \binom{n}{r-1} x^{n-r+1} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} x^{n-r}$$

Notamment,

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} (1-p)^{n-r} = \frac{1}{(1-(1-p))^r} = \frac{1}{p^r}$$

On en déduit que $1 - \mathbb{P}(T_r = +\infty) = 1$ i.e. $\mathbb{P}(T_r = +\infty) = 0$.

Deuxième méthode. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\{T_r = +\infty\} \subset \{T_r > n\} = \{S_n \leq r\}$$

donc

$$\mathbb{P}(T_r = +\infty) \leq \mathbb{P}(S_n \leq r)$$

Or

$$\mathbb{P}(S_n \leq r) = \sum_{k=0}^{r} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} p^r (1-p)^{n-r}$$

Pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$ donc, par croissances comparées,

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} p^r (1-p)^{n-r} = 0$$

Par somme finie,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \leq r) = 0$$

On en déduit à nouveau que $\mathbb{P}(T_r = +\infty) = 0$.

Solution 54

1. Dans la suite, on notera F_n (resp. P_n) l'événement «on a obtenu "pile" (resp. "face") au $n^{\text{ème}}$ lancer.

   - $\{X = 2\} = P_1 \cap P_2$ donc $p_2 = \frac{4}{9}$.
   - $\{X = 3\} = F_1 \cap P_2 \cap P_3$ donc $p_3 = \frac{4}{27}$.

2. Remarquons que F_1, $P_1 \cap F_2$ et $P_1 \cap P_2$ forment un système complet d'événements. On écrit la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X = n+2) = \mathbb{P}(X = n+2 \mid F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap F_1)\mathbb{P}(P_1 \cap F_1) + \mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap P_2)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$$

   - Lorsque l'on a obtenu face au premier lancer, on doit alors obtenir le premier double pile à la fin des $n+1$ lancers restants. Ainsi $\mathbb{P}(X = n+2 \mid F_1) = p_{n+1}$.
   - Lorsque on a déjà obtenu deux piles consécutifs lors des deux premiers lancers, il est désormais impossible d'obtenir le premier double pile au $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer. Ainsi $d\mathrm{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap P_2) = 0$.
   - Lorsque l'on a ontenu un pile puis un face lors des deux premiers lancers, on doit alors obtenir le premier double pile à la fin des n lancers restants. Ainsi $\mathbb{P}(X = n+2 \mid P_1 \cap F_1) = p_n$.

   Finalement, $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$.

3. Au vu des valeurs de p_2 et p_3, on doit choisir $p_1 = 0$.

4. Le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence précédente est $X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{2}{9}$. Ses racines sont $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \mathrm{A}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \mathrm{B}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

   En particulier,

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\mathrm{A} - \frac{1}{3}\mathrm{B} = p_1 = 0 \\ \frac{4}{9}\mathrm{A} + \frac{1}{9}\mathrm{B} = p_2 = \frac{4}{9} \end{cases}$$

   ce qui donne $\mathrm{A} = \frac{2}{3}$ et $\mathrm{B} = \frac{4}{3}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

5. On sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$ pour $q \in]-1,1[$. On en déduit sans peine que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = \frac{15}{4}$$

Solution 55

1. S_0 est constante égale à 0. Le support de S_1 est clairement $\{-1,1\}$, $\mathbb{P}(S_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(S_1 = -1) = 1-p$.
   Le support de S_2 est clairement $\{-2,0,2\}$, $\mathbb{P}(S_2 = 2) = p^2$, $\mathbb{P}(S_2 = 2) = (1-p)^2$ et $\mathbb{P}(S_2 = 0) = 2p(1-p)$.

2. Notons X_n le déplacement vers du point mobile à l'instant n de sorte que $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1-p$. On suppose implictement les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes. Alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ (somme nulle si $n = 0$). Remarquons

que $\frac{1}{2}(X_n+1)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Ainsi $R_n = \frac{1}{2}(S_n+n)$ suit une loi binomiale de paramètres n et p. En particulier, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(R_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Par conséquent, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(S_n = 2k-n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On remarque que si n est pair, S_n ne prend que des valeurs paires et que si n est impair, S_n ne prend que des valeurs impaires. Plus précisément,

$$\forall k \in [\![-n,n]\!],\ \mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k}(1-p)^{n-k}$$

et

$$\forall k \in [\![-n-1,n]\!],\ \mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k+1) = \binom{2n+1}{n+k+1} p^{n+k+1}(1-p)^{n-k}$$

3. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{2n+1} = 0$$

et

$$p_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in [0,1]$. La suite (p_n) est donc bornée de sorte que le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n t^n$ vaut au moins 1.
On montre classiquement que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^n$$

donc

$$\forall t \in]-1,1[,\ P(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} (4p(1-p)t^2)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)t^2}}$$

car $0 \leq p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$.

5. Comme les événements $\{T = n\}$ sont disjoints, la série à termes positifs $\sum q_n$ converge. On en déduit que la série entière $\sum q_n t^n$ converge normalement sur $[-1,1]$. Notamment sa somme Q est continue sur $[-1,1]$.

6. En faisant intervenir un produit de Cauchy de deux séries entières, il suffit en fait de prouver que $p_0 = 1$ (ce qui est clair) et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} q_k$$

Remarquons que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\{S_n = 0\} &= \bigsqcup_{k=1}^{n} \{S_n = 0\} \cap \{T = k\} \\ &= \bigsqcup_{k=1}^{n} \left\{\sum_{j=k+1}^{n} X_j = 0\right\} \cap \{T = k\}\end{aligned}$$

Remarquons que l'événement $\{T = k\}$ peut se décrire uniquement à l'aide de $X_1, \dots, X_k$:

$$\{T = k\} = \left\{\sum_{j=1}^{k} X_j = 0\right\} \cap \left[\bigcap_{\ell=1}^{k-1} \left\{\sum_{j=1}^{\ell} X_j \neq 0\right\}\right]$$

donc les événements $\left\{\sum_{j=k+1}^{n} X_j = 0\right\}$ et $\{T = k\}$ sont indépendants d'après le lemme des coalitions. Ainsi

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\sum_{j=k+1}^{n} X_j = 0\right) q_k$$

Or $\sum_{j=k+1}^{n} X_j$ suit la même loi que S_{n-k} donc

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} q_k$$

7. Pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$Q(t) = 1 - \frac{1}{P(t)} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)t^2}$$

En primitivant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ 1 - \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)} x^n$$

On en déduit que

$$\forall t \in]-1, 1[,\ Q(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} p^n (1-p)^n t^{2n}$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} p^n (1-p)^n \text{ et } \mathbb{P}(T = 2n-1) = 0$$

Enfin $q_0 = 0$.

8. L'événement de l'énoncé est $\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{T = n\}$. Comme Q est continue en 1,

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{T = n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = Q(1) = \lim_{t \to 1} 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)t^2} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)} = 1 - |2p - 1|$$

On remarque notamment que cette probabilité vaut 1 lorsque $p = \frac{1}{2}$.

9. Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - |2p - 1| > 0$ donc T n'est pas d'espérance finie.
Si $p = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. On peut alors considérer que $\mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}$ et Q est alors la fonction génératrice de T. On remarque que Q n'est pas dérivable en 1. En effet,

$$\forall t \in]-1, 1[,\ \frac{Q(t) - Q(1)}{t - 1} = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{1 - t} = \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} \underset{t \to 1}{\longrightarrow} = +\infty$$

Solution 56

1. **a.** Le nombre de tirages possibles est $\binom{2n}{n}$.

b. Notons A l'ensemble des tirages possibles et A_k le nombre de tirages dans lesquels figurent k boules blanches. Alors $A = \bigsqcup_{k=0}^{n} A_k$. De plus, se donner un tirage dans A_k équivaut à choisir k boules parmi les n boules blanches et $n-k$ boules parmi les n noires. Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \operatorname{card}(A) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(A_k) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

2. **a.** Pour que la puce se retrouve en O, il faut qu'elle est sauté autant de fois à gauche qu'à droite et le nombre de sauts doit donc être pair. Ainsi $\mathbb{P}(C_{2n+1}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, si le nombre de sauts est $2n$, il y faut placer n sauts à droite parmi les $2n$ sauts, le reste des sauts étant à gauche. Ainsi $\mathbb{P}(C_{2n}) = \binom{2n}{\cdot}\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

b. D'après la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2} = \frac{2^{2n}}{=}\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

puis

$$\mathbb{P}(C_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_{2n}) = 0$.

3. **a.** Pour se retrouver à l'origine, il faut, pour les mêmes raisons que précédemment, un nombre pair de déplacements horizontaux et un nombre pair de déplacements verticaux. Ainsi pour se retrouver à l'origine en $2n$ coups :

- on fixe un nombre $2k$ ($k \in [\![0, n]\!]$) de déplacements horizontaux (les $2n-2k$ déplacements restants sont horizontaux) ;
- on choisit k déplacements à doite parmi les $2k$ déplacements horizontaux (les k déplacements restants étant à gauche) ;
- on choisit $n-k$ déplacements vers le haut parmi les $2n-2k$ déplacements verticaux (les $n-k$ déplacements restants étant vers le bas).

Finalement

$$\mathbb{P}(C_{2n}) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{2n-k}{n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}^2$$

b. On avait trouvé précédemment

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

donc

$$\binom{2n}{n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^{2n}}{\pi n}$$

puis

$$\mathbb{P}(C_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}$$

et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_{2n}) = 0$.

Inégalités

Solution 57

1. On fixe $t \in \mathbb{R}$. Soit $x \in [-1,1]$. Alors $\frac{1}{2}(1-x) \geq 0$, $\frac{1}{2}(1+x) \geq 0$ et $\frac{1}{2}(1-x)+\frac{1}{2}(1+x)=1$. Comme la fonction exp est convexe, par inégalité de Jensen,

$$\exp\left(\frac{1}{2}(1-x)(-t)+\frac{1}{2}(1+x)t\right) \leq \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t)+\frac{1}{2}(1+x)\exp(t)$$

ou encore

$$e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t}+\frac{1}{2}(1+x)e^{t}$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait que

$$\operatorname{ch}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad e^{\frac{t^2}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

Or

$$(2n)! = 2^n n! \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$$

donc $(2n)! \geq 2^n n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\operatorname{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

3. Fixons $t \in \mathbb{R}$. Puisque X est à valeurs dans $[-1,1]$.

$$e^{t\mathrm{X}} \leq \frac{1}{2}(1-\mathrm{X})e^{-t}+\frac{1}{2}(1+\mathrm{X})e^{t}$$

d'après la première question. Par croissance est linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}}) \leq \frac{1}{2}(1-\mathbb{E}(\mathrm{X}))e^{-t}+\frac{1}{2}(1+\mathbb{E}(\mathrm{X}))e^{t}$$

Or X est centrée donc $\mathbb{E}(\mathrm{X})=0$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}}) \leq \frac{e^{-t}+e^{t}}{2} = \operatorname{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

4. Soit $(t,\varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Puisque $x \mapsto e^{tx}$ est strictement croissante ($t>0$), $[\mathrm{Y} \geq \varepsilon] = [e^{t\mathrm{Y}} \geq e^{t\varepsilon}]$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{Y} \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{t\mathrm{Y}} \geq e^{t\varepsilon})$. Comme $e^{t\mathrm{Y}}$ est positive, l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}(e^{t\mathrm{Y}} \geq e^{t\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{t\mathrm{Y}})}{e^{t\varepsilon}}$$

On en déduit bien que

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y} \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\mathbb{E}(e^{t\mathrm{Y}})$$

5. Soit $(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(\mathrm{S} \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\mathbb{E}(e^{t\mathrm{S}})$$

Comme les variables aléatoires $\exp(t\mathrm{X}_k)$ sont indépendantes,

$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{S}_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{t\mathrm{X}_k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}_k})$$

Remarquons maintenant que les X_k/c_k sont à valeurs dans $[-1,1]$. Ainsi

$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}_k/c_k}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

Quitte à remplacer t par tc_k, on en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{t\mathrm{X}_k}) \leq e^{\frac{t^2c_k^2}{2}}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(\mathrm{S} \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon}\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{t^2c_k^2}{2}} = e^{\frac{t^2a}{2}-t\varepsilon}$$

en posant $a = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$. La fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{t^2 a}{2} - t\varepsilon$ admet un minimum en $\frac{\varepsilon}{a}$ et celui-ci vaut $-\frac{\varepsilon^2}{2a}$ donc

$$\mathbb{P}(S \geq \varepsilon) \leq e^{-\frac{\varepsilon^2}{2a}}$$

Enfin, les variables $-X_k$ vérifient les mêmes hypothèses que les variables X_k donc on a également

$$\mathbb{P}(S \leq -\varepsilon) = \mathbb{P}(-S \geq \varepsilon) \leq e^{\frac{-\varepsilon^2}{2a}}$$

Comme $[|S| \geq \varepsilon]$ est l'union disjointe de $[S \leq -\varepsilon]$ et $[S \geq \varepsilon]$,

$$\mathbb{P}(|S| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(S \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(S \leq -\varepsilon) \leq 2e^{\frac{-\varepsilon^2}{2a}}$$

Solution 58

---

1. Soit $(x, t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$. La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ et les réels $\frac{1-x}{2}$ et $\frac{1+x}{2}$ sont positifs et de somme 1. Par convexité

$$\exp\left(-t\frac{1-x}{2} + t\frac{1+x}{2}\right) \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}$$

ou encore

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}$$

2. Comme X est bornée, e^{tX} également donc elle admet une espérance. Comme X est à valeurs dans $[-1, 1]$, on peu appliquer la question précédente pour affirmer que

$$e^{tX} \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^{t}$$

Par linéarité et croissance de l'espérance

$$\mathbb{E}(E^{tx}) \leq e^{-t}\frac{1-\mathbb{E}(X)}{2} + e^{t}\frac{1+\mathbb{E}(X)}{2}$$

Or X est centrée donc $\mathbb{E}(X) = 0$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \mathrm{ch}(t)$$

Remarquons alors que

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

En effet, $2^n n!$ est le produit des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à $2n$ donc $2^n n! \leq (2n)!$.

Remarque. On peut également étudier la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t^2}{2} - \ln(\mathrm{ch}\, t)$ pour établir cette inégalité.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par indépendance de $X_1, \dots, X_n$,

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_i})$$

Comme X_i/a_i est centrée et que $|X_i/ai_|| \leq 1$,

$$\mathbb{E}(E^{tX_i}) = \mathbb{E}(e^{ta_i \cdot \frac{X_i}{a_i}}) \leq e^{\frac{(ta_i)^2}{2}} = e^{\frac{t^2 a_i^2}{2}}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{t^2 a_i^2}{2}} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$

4. Puisque $\{|S_n| \geq a\} = \{S_n \geq a\} \sqcup \{-S_n \geq a\}$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a) = \mathbb{P}(S_n \geq a) + \mathbb{P}(-S_n \geq a)$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Par stricte croissance de $x \mapsto e^{tx}$,

$$\{S_n \geq a\} = \left\{e^{tS_n} \geq e^{ta}\right\} \qquad \text{et} \qquad \{-S_n \geq a\} = \left\{e^{-tS_n} \geq e^{ta}\right\}$$

Les variables aléatoires e^{tS_n} et e^{-tS_n} sont positives donc d'après l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(e^{tS_n} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{ta}} \qquad \text{et} \mathbb{P}(e^{-tS_n} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{-tS_n})}{e^{ta}}$$

D'après la question précédente,

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq e^{\frac{st^2}{2}}$$

Mais comme les $-X_i$ vérifient les mêmes hypothèses que les X_i, on a également

$$\mathbb{E}(e^{-tS_n}) \leq e^{\frac{st^2}{2}}$$

Finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq 2\exp\left(\frac{st^2}{2} - ta\right)$$

L'application $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{st^2}{2} - ta$ admet un minimum en $\frac{a}{s}$ valant $-\frac{a^2}{2s}$. Donc, par croissance de l'exponentielle,

$$\mathbb{E}(e^{-tS_n}) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2s}}$$

Solution 59

---

1. **a.** Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Alors $(X+u)^2 = X^2 + 2uX + u^2$ puis par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}((X+u)^2) = \mathbb{E}(X^2) + 2u\mathbb{E}(X) + u^2$$

Or $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2)$ donc

$$\mathbb{E}((X+u)^2) = \mathbb{V}(X) + u^2$$

b. Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Remarquons que

$$\{X \geq \lambda\} = \{X + u \geq \lambda + u\} \subset \{(X+u)^2 \geq (\lambda+u)^2$$

L'inclusion est justifiée par le fait que $\lambda + u \geq 0$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \mathbb{P}((X+u)^2 \geq (\lambda+u)^2)$$

Comme $(X+u)^2$ est une variable aléatoire positive et comme $(\lambda+u)^2 > 0$, d'après l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}((X+u)^2 \geq (\lambda+u)^2) \leq \frac{\mathbb{E}((X+u)^2)}{(\lambda+u)^2}$$

D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(X) + u^2}{(\lambda+u)^2}$$

c. On choisit u de façon à minimiser $\frac{\mathbb{V}(X)+u^2}{\lambda+u^2}$. Une rapide étude de la fonction $u \mapsto \frac{\mathbb{V}(X)+u^2}{(\lambda+u)^2}$ montre qu'elle atteint son minimum en $u = \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda}$. On prend donc $u = \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda}$ dans l'inégalité précédente, ce qui donne

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X)^2/\lambda^2}{(\lambda + \mathbb{V}(X)/\lambda)^2} = \frac{\lambda^2\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X)^2}{(\lambda^2 + \mathbb{V}(X))^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2 + \mathbb{V}(X)}$$

2. Posons $Y = \mathbb{X} - \mathbb{E}(X)$ de sorte que $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X)$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq \lambda) = \mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\lambda^2 + \mathbb{V}(Y)} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2 + \mathbb{V}(X)}$$