INTERROGATION ÉCRITE N°07

NOM : Prénom : Note :

1. Montrer qu'une boule ouverte d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ est un ouvert.

   Considérons la boule ouverte $\mathrm{B}(a,r)$ *où* $a \in \mathrm{E}$ *et* $r \in \mathbb{R}_+^*$. *Soit* $x \in \mathrm{B}(a,r)$. *Posons* $\varepsilon = r - \|x-a\|$. *Soit* $y \in \mathrm{B}(x,\varepsilon)$. *Alors*

   $$\|y-a\| \leq \|y-x\| + \|x-a\| < \varepsilon + \|x-a\| = r$$

   Ainsi $y \in \mathrm{B}(a,r)$. *On en déduit que* $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \subset \mathrm{B}(a,r)$, *ce qui prouve que* $\mathrm{B}(a,r)$ *est un ouvert.* ∎

2. Soit $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n+x}$. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors la suite* $(f_n(x))$ *est décroissante de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées,* $\sum (-1)^n f_n(x)$ *converge. Ainsi* $\sum (-1)^n f_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+^*$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et*

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n'(x) = -\frac{1}{(n+x)^2}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\|(-1)^n f_n'\|_\infty = \frac{1}{n^2}$$

   donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n f_n$ *converge normalement et, a fortiori, uniformément sur* $\mathbb{R}_+^*$.

   On en déduit que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n(x) = \mathrm{S}(x) - \frac{1}{x}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Enfin, comme* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, S *l'est également.* ∎

3. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par encadrement de la partie entière,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

   puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x - \frac{1}{n} < u_n \leq x$$

   Par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$. On en déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ∎

4. Soit $\zeta :\ x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

   Posons $f_n :\ x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$. Alors $\|f_n\|_{\infty,[2,+\infty[} = \dfrac{1}{n^2}$. On en déduit que $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[2, +\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{+\infty} f_n = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$.Par théorème d'interversion série/limite,

$$\lim_{+\infty} \zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{+\infty} f_n = 1$$

∎

5. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\left\|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right\|_\infty = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Montrer que l'endomorphisme $D :\ P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'$ n'est pas continu.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|X^k\|_\infty = 1$ et $\|D(X^k)\|_\infty = \|kX^{k-1}\|_\infty = k$. Ainsi $\dfrac{\|D(X^k)\|_\infty}{\|X^k\|_\infty} = k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit que D n'est pas un endomorphisme continu de $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$. ∎