Devoir surveillé n°10

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1

$$
\begin{aligned}
\|PMQ\|_F^2 &= \operatorname{tr}((PMQ)^\top(PMQ)) \\
&= \operatorname{tr}(Q^\top M^\top P^\top PMQ) \\
&= \operatorname{tr}(Q^\top M^\top MQ) \qquad \text{car } P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\
&= \operatorname{tr}(QQ^\top M^\top M) \qquad \text{par propriété de la trace} \\
&= \operatorname{tr}(M^\top M) \qquad \text{car } Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\
&= \|M\|_F
\end{aligned}
$$

2 D'après le théorème spectral, il existe des matrices Q et R dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = QD_AQ^{-1}$ et $B = RD_BR^{-1}$. D'après la question précédente,

$$
\|A-B\|_F = \|Q^{-1}(A-B)R\|_F = \|Q^{-1}AR - Q^{-1}BR\|_F = \|D_AQ^{-1}R - Q^{-1}RD_B\|_F = \|D_AP - PD_B\|_F
$$

en posant $P = Q^{-1}R$. On a bien $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe.

3 Pour $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$
\|M\|_F^2 = \operatorname{tr}(M^\top M) = \sum_{1\le i,j\le n} m_{i,j}^2
$$

D'après la question précédente,

$$
\|A-B\|_F^2 = \sum_{1\le i,j\le n} \left((D_AP)_{i,j} - (PD_B)_{i,j}\right)^2 = \sum_{1\le i,j\le n} \left(\lambda_i(A)p_{i,j} - p_{i,j}\lambda_j(B)\right)^2 = \sum_{1\le i,j\le n} p_{i,j}^2\left(\lambda_i(A) - \lambda_j(B)\right)^2
$$

4 Si M est une matrice bistochastique, tous ses coefficients sont dans $[0,1]$ donc $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est bornée.

De plus, en notant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, les conditions $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = \sum_{j=1}^n m_{j,i} = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ se traduisent par $MU = M^\top U = U$. L'application $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (MU - U, M^\top U - U)$ est linéaire et donc continue puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de dimension finie. Ensuite,

$$
\mathcal{B}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+) \cap \psi^{-1}(\{(0,0)\})
$$

Par ailleurs, $\mathbb{R}_+$ est fermé donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+) = (\mathbb{R}_+)^{[\![1,n]\!]^2}$ est fermé en tant que produit cartésien de fermés. Enfin, $\psi^{-1}(\{(0,0)\})$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé (le singleton $\{(0,0)\}$) par une application continue. On en déduit que $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est fermé en tant qu'intersection de fermés.
Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est compact en tant que fermé borné.
Enfin, l'application f est clairement linéaire donc à nouveau continue : elle admet donc un minimum sur le compact $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

5 Remarquons qu'en posant $L = ((\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2)_{1\le i,j\le n}$, $f(M) = \langle M, L\rangle$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. Ceci prouve en particulier que f est linéaire comme affirmé précédemment.

On en déduit que

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{M}+x\mathrm{E}_{i,i}+x\mathrm{E}_{j,k}-x\mathrm{E}_{i,k}-x\mathrm{E}_{j,i})-f(\mathrm{M}) &= x\left(\langle \mathrm{E}_{i,i},\mathrm{L}\rangle+\langle \mathrm{E}_{j,k},\mathrm{L}\rangle-\langle \mathrm{E}_{i,k},\mathrm{L}\rangle-\langle \mathrm{E}_{j,i},\mathrm{L}\rangle\right)\\
&= x\left(\mathrm{L}_{i,i}+\mathrm{L}_{j,k}-\mathrm{L}_{i,k}-\mathrm{L}_{j,i}\right)\\
&= x\left((\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B}))^2+(\lambda_j(\mathrm{A})-\lambda_k(\mathrm{B}))^2-(\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_k(\mathrm{B}))^2-(\lambda_j(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B}))^2\right)\\
&= 2x\left(\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_j(\mathrm{A})\right)(\lambda_k(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B}))\le 0
\end{aligned}$$

car les valeurs propres sont rangées par ordre décroissant.

6 Pour tout $j\in[\![1,i-1]\!]$, $m_{j,j}=1$ donc $m_{j,k}=m_{k,j}=0$ pour tout $j\in[\![1,i-1]\!]$ et tout $k\in[\![1,n]\!]$.
Posons

7 Soit $\mathrm{M}\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ un point où f atteint son minimum. En répétant le raisonnement de la question précédente, on prouve qu'il existe une matrice $\mathrm{M}'\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(\mathrm{M}')\le f(\mathrm{M})$ et $m'_{i,i}=1$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. On a nécessairement $\mathrm{M}'=\mathrm{I}_n$ car M' est bistochastique. Ainsi $f(\mathrm{I}_n)\le f(\mathrm{M})$ et en fait $\min_{\mathcal{B}_n(\mathbb{R})} f=f(\mathrm{I}_n)$.

8 On a vu qu'il existait une matrice orthogonale $\mathrm{P}=(p_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ telle que

$$\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}=\sum_{1\le i,j\le n} p_{i,j}^2(\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_j(\mathrm{B}))^2$$

Posons $\mathrm{M}=(p_{i,j}^2)_{1\le i,j\le n}$. Comme P est orthogonale, M est bistochastique. De plus, $\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}=f(\mathrm{M})$. D'après la question précédente,

$$\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}\ge f(\mathrm{I}_n)=\sum_{i=1}^n\left(\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B})\right)^2$$

9 Le seul mot bien parenthésé de longueur 2 est (). Ainsi $\mathrm{C}_1=1$. Les mots bien parenthésés de longueur 4 sont (()) et ()() donc $\mathrm{C}_2=2$. Enfin, les mots bien parenthésés de longueur 6 sont ()()(), (())(), ()(()), (()()) et ((())) donc $\mathrm{C}_3=5$.

10 L'ensemble des mots bien parenthésés de longueur $2n$ est inclus dans l'ensemble des mots de longueur $2n$ dont les caractères sont (et). On en déduit que $\mathrm{C}_n\le 2^{2n}$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum 2^{2n}x^n=\sum(4x)^n$ est clairement 1/4 donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{C}_n x^n$ est supérieur ou égal à 1/4.

11 On utilise la remarque de l'énoncé. Un mot bien parenthésé de longueur $2k$ est de la forme $(m)m'$ où m est un mot bien parenthésé d'une certaine longueur $2i$ où $i\in[\![0,k-1]\!]$ et où m' est alors un mot bien parenthésé de longeur $2k-2-2i=2(k-1-i)$. On en déduit bien que

$$\mathrm{C}_k=\sum_{i=0}^{k-1}\mathrm{C}_i\mathrm{C}_{k-1-i}$$

12 Pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathrm{C}_{k+1}=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_i\mathrm{C}_{k-i}$$

Comme la série entière $\sum \mathrm{C}_k x^k$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1/4, on obtient par produit de Cauchy :

$$\forall x\in\left]-\frac14,\frac14\right[,\ \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{C}_{k+1}x^k=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{C}_k x^k\right)^2$$

puis

$$\forall x\in\left]-\frac14,\frac14\right[,\ \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{C}_{k+1}x^{k+1}=x\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{C}_k x^k\right)^2$$

ou encore

$$\forall x\in\left]-\frac14,\frac14\right[,\ \mathrm{F}(x)-\mathrm{C}_0=x\mathrm{F}(x)^2$$

Comme $\mathrm{C}_0=1$,

$$\forall x\in\left]-\frac14,\frac14\right[,\ \mathrm{F}(x)=1+x\mathrm{F}(x)^2$$

13 Supposons qu'il existe $\alpha \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Comme $f(0) = -1 \neq 0$, $\alpha \neq 0$ et $\mathrm{F}(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}$. En reportant dans l'égalité de la question précédente, on obtient $\frac{1}{2\alpha} = 1 + \alpha \cdot \frac{1}{4\alpha^2}$ i.e. $\alpha = \frac{1}{4}$ ce qui contredit le fait que $\alpha \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Ainsi f ne s'annule pas sur $\alpha \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$.

14 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)^2 = (2x\mathrm{F}(x) - 1)^2 = 4x^2\mathrm{F}(x)^2 - 4x\mathrm{F}(x) + 1 = 4x(x\mathrm{F}(x)^2 - \mathrm{F}(x)) + 1 = 1 - 4x$$

F est continue sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ en tant que somme d'une série entière. On en déduit que f est également continue sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. De plus, f ne s'annule pas sur cet intervalle donc elle y reste de signe constant. Enfin, $f(0) = -1$ donc f est négative sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Par conséquent,

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ f(x) = -\sqrt{1-4x}$$

puis

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ \mathrm{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

15 Pour tout $u \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1-u} = (1-u)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n u^n$$

où $\binom{1/2}{0} = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\binom{1/2}{n} &= \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (2k-1) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\sqrt{1-u} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} u^n$$

16 Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}$,

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} (4x)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} x^n$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{C}_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

17 Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^{2k+1}\sqrt{4-x^2}$ est impaire et l'intervalle $[-2, 2]$ est centré en 0 donc $m_{2k+1} = 0$.

18 Plus simplement, $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, \mathrm{d}x$ est l'aire du demi-disque centré en l'origine et de rayon 2 donc $m_0 = 1$.

19 Les applications $x \mapsto -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}$ et $x \mapsto x^{2k+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-2,2]$, de dérivées respectives $x \mapsto x\sqrt{4-x^2}$ et $x \mapsto (2k+1)x^{2k}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
2\pi m_{2k+2} &= \int_{-2}^{2} x^{2k+1}\cdot x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\left[x^{2k+2}(4-x^2)^{3/2}\right]_{-2}^{2} + \frac{2k+1}{3}\int_{-2}^{2} x^{2k}(4-x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2k+1}{3}\int_{-2}^{2} x^{2k}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2k+1}{3}(4\cdot 2\pi m_{2k} - 2\pi m_{2k+2})
\end{aligned}$$

ou encore

$$3m_{2k+2} = (2k+1)(4m_{2k} - m_{2k+2})$$

et enfin

$$m_{2k+2} = \frac{2(2k+1)}{k+2}m_{2k}$$

20 On a déjà vu que $m_k = 0$ pour k impair. De plus, si k est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p$ et

$$m_k = m_{2p} = \frac{m_{2p}}{m_0} = \prod_{j=0}^{p-1}\frac{m_{2j+2}}{m_{2j}} = \prod_{j=0}^{p-1}\frac{2(2j+1)}{j+2} = \frac{2^p}{(p+1)!}\prod_{j=0}^{p-1}(2j+1) = \frac{2^p}{(p+1)!}\cdot\frac{(2p)!}{2^p p!} = \mathrm{C}_p$$

21 $\mathrm{M}_n/\sqrt{n}$ est semblable à $\mathrm{diag}(\Lambda_{1,n},\dots,\Lambda_{n,n})$ donc $(\mathrm{M}_n/\sqrt{n})^k$ est semblable à $\mathrm{diag}(\Lambda_{1,n}^k,\dots,\Lambda_{n,n}^k)$. Notamment,

$$\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{M}_n^k}{n^{k/2}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k$$

ou encore

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k = \frac{1}{n^{1+k/2}}\,\mathrm{tr}(\mathrm{M}_n^k)$$

Les coefficients de la variable aléatoire M_n sont bornés donc ceux de M_n^k le sont également, la trace de M_n^k est donc encore bornée. La variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k$ est donc bornée : elle admet une espérance.
Pour une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on prouve par récurrence sur k que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (\mathrm{A}^k)_{i,j} = \sum_{(i_2,\dots,i_k)\in[\![1,n]\!]^{k-1}} \mathrm{A}_{i,i_2}\mathrm{A}_{i_2,i_3}\dots\mathrm{A}_{i_k,j}$$

Notamment

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A}^k) = \sum_{i_1}^{n}\mathrm{A}_{i_1,i_1} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{(i_2,\dots,i_k)\in[\![1,n]\!]^{k-1}}\mathrm{A}_{i_1,i_2}\mathrm{A}_{i_2,i_3}\dots\mathrm{A}_{i_k,i_1} = \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_k)\in[\![1,n]\!]^{k}}\mathrm{A}_{i_1,i_2}\mathrm{A}_{i_2,i_3}\dots\mathrm{A}_{i_k,i_1}$$

Il suffit alors d'appliquer ce résultat à M_n^k et d'utiliser la linéarité de la trace pour obtenir le résultat voulu.

22 L'application qui à un cycle $(i_1,\dots,i_k,i_1)$ de longeur k passant par ℓ sommets distincts associe l'ensemble $\mathrm{I} = \{i_1,\dots,i_k\}$ de ses ℓ sommets distincts ainsi que l'application $j \in [\![1,k]\!] \mapsto i_j \in \mathrm{I}$ est injective. On en déduit que le nombre N de tels cycles est inférieur au cardinal de l'ensemble

$$\left\{(\mathrm{I},f),\ \mathrm{I}\in\mathcal{P}_\ell([\![1,n]\!]),\ f\in\mathrm{I}^{[\![1,k]\!]}\right\}$$

où $\mathcal{P}_\ell([\![1,n]\!])$ désigne l'ensemble des parties à ℓ éléments de $[\![1,n]\!]$. Ainsi

$$\mathrm{N} \leq \binom{n}{\ell}\ell^k \leq n^\ell\ell^k$$

23 Pour un cycle $\imath = (i_1, \dots, i_k, i_1)$, on notera $X_{\vec{\imath}} = X_{i_1,i_2} \dots X_{i_k,i_1}$.
On sait que les $|X_{i,j}|$ sont uniformément majorées par K. On en déduit que pour un cycle $\imath$ de longeur k,

$$|X_{\vec{\imath}}| \leq K^k$$

Par inégalité triangulaire

$$|\mathbb{E}(X_{\vec{\imath}})| \leq \mathbb{E}\left(|X_{\vec{\imath}}|\right) \leq K^k$$

Soit ℓ un entier compris entre 1 et $\frac{k+1}{2}$. D'après la question précédente,

$$0 \leq \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}|=\ell}} |\mathbb{E}(X_{\vec{\imath}})| \leq \frac{1}{n^{1+k/2}} n^\ell \ell^k K^k = \frac{1}{n^{1+k/2-\ell}} (\ell K)^k$$

Comme $1 + k/2 - \ell \geq 1/2$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}|=\ell}} |\mathbb{E}(X_{\vec{\imath}})| = 0$$

Il suffit alors pour conclure de constater que

$$\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}|\leq(k+1)/2}} |\mathbb{E}(X_{\vec{\imath}})| = \sum_{1\leq\ell\leq(k+1)/2} \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}|=\ell}} |\mathbb{E}(X_{\vec{\imath}})|$$

24 Si $(i_1, \dots, i_k, i_1) \in \mathcal{A}_k$, l'une des variables aléatoires apparaissant dans le produit $X_{i_1,i_2} \dots X_{i_k,i_1}$ n'y apparaît qu'une fois. Ce poduit peut alors s'écrire $X_{a,b}Y$ où $X_{a,b}$ et Y sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. On en déduit que $\mathbb{E}(X_{a,b}Y) = \mathbb{E}(X_{a,b})\mathbb{E}(Y) = 0$ car $\mathbb{E}(X_{a,b}) = 0$.

25 Soit $\vec{\imath} \in \mathcal{C}_k$. Notons $\ell = |\vec{\imath}|$ ainsi que d le nombre d'arêtes distinctes. On constate aisément que $\ell = d+1$ (la première arête donne deux sommets distincts et les nouvelles arêtes distinctes donnent chacune un nouveau sommet distinct). Chaque arête apparaît au moins deux fois et l'une apparaît au moins 3 fois. Par ailleurs, le nombre total d'arêtes est k. On en déduit que $2(d-1)+3 \leq k$ i.e. $d \leq \frac{k-1}{2}$. Finalement, $\ell = d+1 \leq \frac{k+1}{2}$.

26 Si k est impair, $\mathcal{B}_k$ est vide. D'après la question **24**,

$$\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{A}_k} |\mathbb{E}(X_{\vec{\imath}})| = 0$$

De plus, d'après la question précédente

$$0 \leq \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{C}_k} |\mathbb{E}(X_{\vec{\imath}})| \leq \sum_{\substack{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}|\leq(k+1)/2}} |\mathbb{E}(X_{\vec{\imath}})|$$

de sorte qu'avec la question **23**,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{C}_k} |\mathbb{E}(X_{\vec{\imath}})| = 0$$

Comme $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}_k$ et $\mathcal{C}_k$ forment une partition de l'ensemble des cycles de longueur k, on en déduit avec la question **21** et une inégalité triangulaire que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Lambda_{i,n}^k\right) = 0$$

27 Comme $\vec{\imath} \in \mathcal{B}_k$, chaque arête de $\vec{\imath}$ apparaît exactement deux fois. Toute parenthèse ouvrée est donc également fermée.

28 Il suffit de dénombrer le nombre de choix d'arêtes possibles pour chacune des $k/2$ parenthèses ouvrantes puisqu'alors les parenthèses fermantes fixent automatiquement l'arête correspondante. Il faut déjà choisir les deux sommets de la première parenthèse ouvrante, ce qui offre $n(n-1)$ choix. Pour chacune $k/2-1$ des parenthèses ouvrantes suivantes, le premier sommet de l'arête correspondante est déjà fixé par le deuxième sommet de l'arête précédente. On en déduit que le nombre de cycles correspondant à un mot parenthésé bien fixé est $\prod_{j=0}^{\frac{k}{2}}(n-j)$.

29 Notons $\mathrm{A}(\vec{\imath})$ l'ensemble des arêtes distinctes d'un cycle $\vec{\imath}$. Soit $\vec{\imath} \in \mathcal{B}_k$. Alors

$$\mathrm{X}_{\vec{\imath}} = \prod_{a \in \mathrm{A}(\vec{\imath})} \mathrm{X}_a^2$$

Par indépendance des X_a,

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}_{\vec{\imath}}) = \prod_{a \in \mathrm{A}(\vec{\imath})} \mathbb{E}(\mathrm{X}_a^2)$$

Par hypothèse, $\mathbb{E}(\mathrm{X}_a) = 0$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X}_a) = 1$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{X}_a^2) = 1$. Ainsi

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}_{\vec{\imath}}) = 1$$

Remarquons qu'on a nécessairement $|\vec{\imath}| = 1 + k/2$ puisque chaque arête apparaît exactement deux fois. Ce qui précède montre alors que $\operatorname{card} \mathcal{B}_k = \mathrm{C}_{k/2} \prod_{j=0}^{k/2} (n-j)$ de sorte que

$$\sum_{\vec{\imath} \in \mathcal{B}_k} \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\vec{\imath}}) = \mathrm{C}_{k/2} \prod_{j=0}^{k/2} (n-j) \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{1+k/2} \mathrm{C}_{k/2}$$

En utilisant à nouveau le fait que $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}_k$ et $\mathcal{C}_k$ partitionnent l'ensemble des cycles de longueur k, on obtient le résultat escompté via la question **21**.

30 Si on pose $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k$, alors, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\Lambda_{i,n})\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{d} a_k m_k$$

puisque $m_k = 0$ pour k impair et $m_k = \mathrm{C}_{k/2}$ pour k pair. Par linéarité de l'intégrale

$$\sum_{k=0}^{d} a_k m_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} \left(\sum_{k=0}^{d} a_k x^k\right) \sqrt{4-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} \mathrm{P}(x) \sqrt{4-x^2}\, \mathrm{d}x$$

31 Alors

$$\sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ |\Lambda_{i,n}| < \mathrm{A}}} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ |\Lambda_{i,n}| \geq \mathrm{A}}} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)} \geq \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ |\Lambda_{i,n}| \geq \mathrm{A}}} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)} \geq \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ |\Lambda_{i,n}| \geq \mathrm{A}}} \mathrm{A}^{p+2q} |\Lambda_{i,n}|^p$$

ou encore

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ |\Lambda_{i,n}| \geq \mathrm{A}}} |\Lambda_{i,n}|^p \leq \frac{1}{\mathrm{A}^{p+2q}} \sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}$$

Il suffit alors d'utiliser la croissance de l'espérance.

32 On sait d'après la question **29** que

$$\frac{1}{\mathrm{A}^{p+2q}} \cdot \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{C}_{p+q}}{\mathrm{A}^{p+2q}} = m_{2(p+q)} \mathrm{A}^{p+2q}$$

D'après la question **19**, $m_{2k+2} \leq 4 m_{2k}$ de sorte que $m_{2k} \leq 4^k m_0 = 2^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\frac{m_{2(p+q)}}{\mathrm{A}^{p+2q}} \leq \frac{2^{2(p+q)}}{\mathrm{A}^{p+2q}}$$

Comme $\mathrm{A} > 2$, $\lim_{q \to +\infty} \frac{2^{2(p+q)}}{\mathrm{A}^{p+2q}} = 0$ et donc $\lim_{q \to +\infty} \frac{m_{2(p+q)}}{\mathrm{A}^{p+2q}} = 0$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{m_{2(p+q)}}{\mathrm{A}^{p+2q}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme
$$\frac{1}{\mathrm{A}^{p+2q}}\cdot\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}|\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\mathrm{C}_{p+q}}{\mathrm{A}^{p+2q}}=m_{2(p+q)}\mathrm{A}^{p+2q}$$
il existe $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n\geq\mathrm{N}$,
$$\frac{1}{\mathrm{A}^{p+2q}}\cdot\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}|\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)\leq m_{2(p+q)}\mathrm{A}^{p+2q}+\frac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon$$
Mais d'après la question précédente, pour tout $n\geq\mathrm{N}$,
$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\|\Lambda_{i,n}|\geq\mathrm{A}}}|\Lambda_{i,n}|^p\right)\leq\varepsilon$$
D'après la définition de la limite,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\|\Lambda_{i,n}|\geq\mathrm{A}}}|\Lambda_{i,n}|^p\right)=0$$

33 Comme f est bornée, $f(x)\underset{x\to\pm\infty}{=}\mathcal{O}(1)$. A fortiori, $f(x)\underset{x\to\pm\infty}{=}\mathcal{O}(x^p)$. De même, $\mathrm{P}(x)\underset{x\to\pm\infty}{=}\mathcal{O}(x^p)$ car $\deg\mathrm{P}=p$. On en déduit qu'il existe $\mathrm{B}\geq\mathrm{A}$ et $\mathrm{C}_1\in\mathbb{R}_+$ tels que
$$\forall x\in\mathbb{R},\ |x|\geq\mathrm{B}\implies|f(x)-\mathrm{P}(x)|\leq\mathrm{C}_1|x|^p$$
De plus, $x\mapsto\dfrac{f(x)-\mathrm{P}(x)}{x^p}$ est continue sur l'union des deux compacts $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ et $[-\mathrm{B},-\mathrm{A}]$ donc elle y est bornée. Il existe donc une constante $\mathrm{C}_2\in\mathbb{R}_+$ telle que
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{A}\leq|x|\leq\mathrm{B}\implies|f(x)-\mathrm{P}(x)|\leq\mathrm{C}_2|x|^p$$
En prenant $\mathrm{K}=\max(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2)$, on a donc
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus]-\mathrm{A},\mathrm{A}[,\ |f(x)-\mathrm{P}(x)|\leq\mathrm{K}|x|^p$$

34 D'après la question précédente,
$$0\leq\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\|\Lambda_{i,n}|\geq\mathrm{A}}}|f-\mathrm{P}|(\Lambda_{i,n})\right)\leq\frac{\mathrm{K}}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\|\Lambda_{i,n}|\geq\mathrm{A}}}|\Lambda_{i,n}|^p\right)$$
On conclut avec le théorème des gendarmes et la question **32**.

35

36 Si $\mathrm{X}(\Omega)$ est fini, le résultat est clair puisque $\mathrm{X}\mathbb{1}_{|\mathrm{X}|\leq\mathrm{C}}=\mathrm{X}$ dès lors que $\mathrm{C}\geq\max\limits_{x\in\mathrm{X}(\Omega)}|x|$. Sinon, $\mathrm{X}(\Omega)$ est dénombrable et on peut noter $\mathrm{X}(\Omega)=\{x_k,\ k\in\mathbb{N}\}$. Comme $|\mathrm{X}\mathbb{1}_{|\mathrm{X}|\leq\mathrm{C}}|\leq|\mathrm{X}|$, $\mathrm{X}\mathbb{1}_{|\mathrm{X}|\leq\mathrm{C}}$ est d'espérance finie. On peut alors appliquer la formule de transfert :
$$\mathbb{E}(\mathrm{X}\mathbb{1}_{|\mathrm{X}|\leq\mathrm{C}})=\sum_{k=0}^{+\infty}x_k\mathbb{1}_{[-\mathrm{C},\mathrm{C}]}(x_k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=x_k)$$
Posons $g_k:\ \mathrm{C}\in\mathbb{R}_+\mapsto x_k\mathbb{1}_{[-\mathrm{C},\mathrm{C}]}(x_k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=x_k)$. Alors $\|g_k\|_\infty\leq|x_k|\mathbb{P}(\mathrm{X}=x_k)$. Comme X est d'espérance finie, $\sum g_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour $\mathrm{C}\geq|x_k|$, $g_k(\mathrm{C})=x_k\mathbb{P}(\mathrm{X}=x_k)$ de sorte que $\lim\limits_{+\infty}g_k=x_k\mathbb{P}(\mathrm{X}=x_k)$. Par théorème d'interversion série/limite
$$\mathbb{E}(\mathrm{X}\mathbb{1}_{|\mathrm{X}|\leq\mathrm{C}})=\sum_{k=0}^{+\infty}g_k(\mathrm{C})\underset{\mathrm{C}\to+\infty}{\longrightarrow}\sum_{k=0}^{+\infty}x_k\mathbb{P}(\mathrm{X}=x_k)=\mathbb{E}(\mathrm{X})$$

37 D'après la question précédente,
$$\mathbb{E}(\mathrm{X}_{i,j}\mathbb{1}_{|\mathrm{X}_{i,j}|\leq\mathrm{C}})\underset{\mathrm{C}\to+\infty}{\longrightarrow}\mathbb{E}(\mathrm{X}_{i,j})$$

Comme $(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leq C})^2 = X_{i,j}^2\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leq C}$, la question précédente montre à nouveau que

$$\mathbb{E}\left((X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leq C})^2\right) \underset{C\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X_{i,j}^2)$$

On en déduit que

$$\mathbb{V}(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leq C}) = \mathbb{E}\left((X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leq C})^2\right) - \mathbb{E}(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leq C})^2 \underset{C\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X_{i,j}^2) - \mathbb{E}(X_{i,j})^2 = \mathbb{V}(X_{i,j}) = 1$$

Par conséquent, $\sigma_{i,j}(C) \underset{C\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

38 Comme $\sigma_{i,j}(C) \underset{C\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on peut garantir que $\sigma_{i,j}(C) \geq \frac{1}{2} > 0$ pour C suffisamment grand par exemple. Les variables aléatoires $\hat{X}_{i,j}(C)$ sont alors bien définies. Elle sont clairement centrées et de variance 1. Les $X_{i,j}$ étant indépendantes pour $1 \leq i \leq j$, les $\hat{X}_{i,j}$ le sont également. Enfin, $|X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leq C}| \leq C$ donc $X_{i,j}$ est bornée. Comme $\mathbb{E}(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leq C})$ et $\sigma_{i,j}(C)$ sont des constantes, $\hat{X}_{i,j}$ est aussi bornée.

39 Comme $\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leq C} = 1 - \mathbb{1}_{|X_{i,j}|<C}$,

$$X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leq C} = X_{i,j} - X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}$$

et par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leq C}) = \mathbb{E}(X_{i,j}) - \mathbb{E}(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}) = -\mathbb{E}(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C})$$

Ainsi

$$\hat{X}_{i,j}(C) = \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\left(X_{i,j} - X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C} + \mathbb{E}(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C})\right)$$

puis

$$X_{i,j} - \hat{X}_{i,j}(C) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right)X_{i,j} + \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C} - \mathbb{E}(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C})\right)$$

40 Posons $Y_{i,j}(C) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right)X_{i,j}$ et $Z_{i,j}(C) = \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C} - \mathbb{E}(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C})\right)$ de sorte que

$$(X_{i,j} - \hat{X}_{i,j}(C))^2 = Y_{i,j}(C)^2 + 2Y_{i,j}(C)Z_{i,j}(C) + Z_{i,j}(C)^2$$

$X_{i,j}$ est centré réduite et $\sigma_{i,j}(C) \underset{C\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc

$$\mathbb{E}(Y_{i,j}(C)^2) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right)^2 \underset{C\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Comme $Z_{i,j}(C)$ est centrée,

$$\mathbb{E}(Z_{i,j}^2) = \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)^2}\mathbb{E}(X_{i,j}^2\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}) = \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)^2}\mathbb{E}(X_{i,j}^2\mathbb{1}_{|X_{i,j}^2|>C^2})$$

D' après la question **36**,

$$\mathbb{E}(X_{i,j}^2\mathbb{1}_{|X_{i,j}^2|>C^2}) \underset{C\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et $\sigma_{i,j}(C)^2 \underset{C\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi

$$\mathbb{E}(Z_{i,j}(C)^2) \underset{C\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Enfin, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\mathbb{E}(Y_{i,j}(C)Z_{i,j}(C))\right| \leq \mathbb{E}(Y_{i,j}(C)^2)\mathbb{E}(Z_{i,j}(C)^2)$$

donc

$$\mathbb{E}(Y_{i,j}(C)Z_{i,j}(C)) \underset{C\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left((X_{i,j} - \hat{X}_{i,j}(C))^2\right) \underset{C\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

41

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right)-\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\hat{\Lambda}_{i,n})\right)\right| &\leq \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|f(\Lambda_{i,n})-f(\hat{\Lambda}_{i,n})\right|\right) && \text{par inégalités triangulaires}\\
&\leq \frac{\mathrm{K}}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\Lambda_{i,n}-\hat{\Lambda}_{i,n}\right|\right) && \text{car } f \text{ est K-lipschitzienne}\\
&\leq \frac{\mathrm{K}}{n}\mathbb{E}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Lambda_{i,n}-\hat{\Lambda}_{i,n})^2}\right) && \text{par inégalité de Cauchy-Schwarz sur } \mathbb{R}^n\\
&= \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Lambda_{i,n}-\hat{\Lambda}_{i,n})^2}\right)\\
&\leq \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\left(\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{M}_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{\mathrm{M}}_n\right\|_{\mathrm{F}}\right) && \text{d'après la question } \mathbf{8}\\
&= \frac{\mathrm{K}}{n}\mathbb{E}(\|\mathrm{M}_n-\hat{\mathrm{M}}_n(\mathrm{C})\|_{\mathrm{F}}) && \text{par homogénéité de la norme}
\end{aligned}
$$

42 Fixons $\varepsilon > 2$. Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$
\mathbb{E}(1\cdot\|\mathrm{M}_n-\hat{\mathrm{M}}_n(\mathrm{C})\|_{\mathrm{F}})^2 \leq \mathbb{E}(1^2)\mathbb{E}(\|\mathrm{M}_n-\hat{\mathrm{M}}_n(\mathrm{C})\|_{\mathrm{F}}^2) = \sum_{1\leq i,j\leq n}\mathbb{E}((\mathrm{X}_{i,j}^2-\hat{\mathrm{X}}_{i,j}(\mathrm{C}))^2) = n^2\mathbb{E}((\mathrm{X}_{1,1}^2-\hat{\mathrm{X}}_{1,1}(\mathrm{C}))^2)
$$

car les $\mathrm{X}_{i,j}$ sont de même loi. On en déduit avec la question **40** que pour C assez grand

$$
\frac{\mathrm{K}}{n}\mathbb{E}(\|\mathrm{M}_n-\hat{\mathrm{M}}_n(\mathrm{C})\|_{\mathrm{F}}) \leq \frac{\varepsilon}{2}
$$

Remarquons aussi que $|\mathrm{X}_{i,j}(\mathrm{C})\mathbb{1}_{|\mathrm{X}_{i,j}|\leq\mathrm{C}}| \leq \mathrm{C}$ puis $|\mathbb{E}(\mathrm{X}_{i,j}(\mathrm{C})\mathbb{1}_{|\mathrm{X}_{i,j}})| \leq \mathbb{E}(|\mathrm{X}_{i,j}(\mathrm{C})\mathbb{1}_{|\mathrm{X}_{i,j}|\leq\mathrm{C}}|) \leq \mathrm{C}$ et enfin

$$
|\hat{\mathrm{X}}_{i,j}(\mathrm{C})| \leq \frac{2\mathrm{C}}{\sigma_{i,j}(\mathrm{C})}
$$

Comme $\sigma_{i,j}(\mathrm{C}) \underset{\mathrm{C}\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, les $\hat{\mathrm{X}}_{i,j}(\mathrm{C})$ sont uniformément bornées. Comme f également bornée, on peut donc affirmer que

$$
\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\hat{\Lambda}_{i,n})\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x
$$

Il existe donc $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq \mathrm{N}$,

$$
\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\hat{\Lambda}_{i,n})\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}
$$

Avec la question précédente et une inégalité triangulaire, on a donc pour tout $n \geq \mathrm{N}$,

$$
\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon
$$

On en déduit que

$$
\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x
$$