

DEVOIR À LA MAISON N°16

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

1 **1.a** Supposons que A et B soient les matrices du même endomorphisme u de E dans des bases orthonormales respectives \mathcal{B} et \mathcal{B}' . En notant P la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' , $B = P^{-1}AP$. Comme \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont des bases orthonormales, P est orthogonale. Ainsi A et B sont orthogonalement semblables.

1.b Comme \mathcal{B} est une base orthonormale de E , la matrice de u^* dans la base \mathcal{B} est A^T . Comme l'application $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres,

$$u \in \mathcal{P}(E) \iff u^* \in \mathbb{R}[u] \iff A^T \in \mathbb{R}[A] \iff A \in \mathcal{P}_n$$

et

$$u \in \mathcal{N}(E) \iff u^* \circ u = u \circ u^* \iff A^T A = A A^T \iff A \in \mathcal{N}_n$$

1.c On sait que $\mathbb{R}[u]$ et $\mathbb{R}[A]$ sont des algèbres commutatives donc $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{N}(E)$ et $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{N}_n$.

2 **2.a** Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $u^* = u \in \mathbb{R}[u]$ donc $u \in \mathcal{P}(E)$. De même, si $u \in \mathcal{A}(E)$, alors $u^* = -u \in \mathbb{R}[u]$ donc $u \in \mathcal{P}(E)$.

2.b Soit $A \in \mathcal{P}_n$ triangulaire supérieure. Alors il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A^T = P(A)$. Les matrices triangulaires supérieures forment une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $P(A)$ est également triangulaire supérieure. Or A^T est triangulaire inférieure. On en déduit que A^T est diagonale et donc A également. Réciproquement, si A est une matrice diagonale, alors A est triangulaire supérieure et $A^T = A \in \mathbb{R}[A]$ i.e. $A \in \mathcal{P}_n$. Les matrices triangulaires supérieures de \mathcal{P}_n sont donc exactement les matrices diagonales.

Si $n \geq 2$, il existe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures non diagonales et donc $\mathcal{P}_n \subsetneq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathcal{P}(E) \subsetneq \mathcal{L}(E)$.

2.c On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Il existe donc une base orthonormale $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i \in \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$. On en déduit que la matrice de passage P de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' , à savoir la matrice de la famille \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} , est triangulaire supérieure. La matrice de passage de la base \mathcal{B}' vers la base \mathcal{B} , à savoir P^{-1} est également triangulaire supérieure.

Notons $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors la matrice de u dans la base \mathcal{B}' est $P^{-1}AP$ qui est triangulaire supérieure en tant que produit de telles matrices.

Soit $u \in \mathcal{P}(E)$ trigonalisable. D'après ce qui précède, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice A de u est triangulaire supérieure. Comme $u \in \mathcal{P}(E)$, $A \in \mathcal{P}_n$. D'après la question précédente, A est en fait diagonale et a fortiori symétrique. Ainsi u est autoadjoint. Réciproquement, si u est autoadjoint, alors $u \in \mathcal{P}(E)$ d'après la question **2.a**. Les éléments trigonalisables de $\mathcal{P}(E)$ sont les endomorphismes autoadjoints.

2.d Soit $u \in \text{GL}(E)$. Alors $\chi_u(u) = 0$. De plus, $\chi_u(0) = \det(-u) \neq 0$. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\chi_u = \alpha + XQ$. Comme χ_u annule u , $\alpha \text{Id}_E + u \circ Q(u) = 0$ puis $u^{-1} = -\frac{1}{\alpha}Q(u) \in \mathbb{R}[u]$.

Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $u \in \text{GL}(E)$ et $u^* = u^{-1} \in \mathbb{R}[u]$ de sorte que $u \in \mathcal{P}(E)$.

3 **3.a** Soit $A \in \mathcal{P}_n$.

Existence. Par définition, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A^T = P(A)$. On écrit la division euclidienne de P par $\pi_A : P = Q\pi_A + R$ avec $\deg R < \deg \pi_A$. On a alors $A^T = P(A) = Q(A)\pi_A(A) + R(A) = R(A)$.

Unicité. Soient P_1 et P_2 deux polynômes tels que $A^T = P_1(A) = P_2(A)$, $\deg P_1 < \deg \pi_A$ et $\deg P_2 < \deg \pi_A$. Alors $P_1 - P_2$ annule A de sorte que π_A divise $P_1 - P_2$. Or $\deg(P_1 - P_2) < \deg \pi_A$ donc $P_1 - P_2 = 0$ i.e. $P_1 = P_2$.

De la même manière, pour tout $u \in \mathcal{P}(E)$, il existe un unique $P_u \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P_u < \deg \pi_u$ et $P_u(u) = u^*$.

3.b Soit $A \in \mathcal{P}_n$ telle que P_A est un polynôme constant. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P_A = \alpha$. Ainsi $A^\top = P_A(A) = \alpha I_n$. Réciproquement, s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A = \alpha I_n$, alors en posant $P = \alpha$ on a bien $P(A) = \alpha I_n = A^\top$ et $\deg P \leq 0 < 1 \leq \deg \pi_A$. Ainsi $P_A = P = \alpha$ est un polynôme constant.

L'ensemble des matrices A de \mathcal{P}_n telles que P_A est un polynôme constant est $\text{vect}(I_n)$.

3.c Soit $A \in \mathcal{P}_n$ telle que $\deg P_A = 1$. Posons alors $P_A = \alpha X + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On sait qu'il existe A_1 symétrique et A_2 antisymétrique telles que $A = A_1 + A_2$. Alors

$$A_1 - A_2 = A^\top = P_A(A) = \alpha A + \beta I_n = \alpha A_1 + \alpha A_2 + \beta I_n$$

En transposant, on obtient

$$A_1 + A_2 = \alpha A_1 - \alpha A_2 + \beta I_n$$

En additionnant et en soustrayant ces deux égalités, on obtient

$$A_1 = \alpha A_1 + \beta I_n$$

$$A_2 = -\alpha A_2$$

On a notamment $A_2 = 0$ ou $\alpha = -1$. Si $A_2 = 0$, alors A est symétrique mais non scalaire d'après la question précédente (sinon $\deg P_A \leq 0$). Si $\alpha = -1$, alors $A_1 = \frac{\beta}{2} I_n + A_2$ avec A_2 non nulle (toujours d'après la question précédente).

Réciproquement, si A est symétrique non scalaire, alors on constate que $A^\top = A = P(A)$ avec $P = X$. Comme A est non scalaire, $\deg \pi_A > 1 = \deg X$ et donc $P_A = X$ par unicité de P_A et $\deg P_A = 1$. De même, si $A = kI_n + M$ avec M antisymétrique non nulle, alors $A^\top = kI_n - M = P(A)$ avec $P = -X + 2k$. Comme M n'est pas nulle, A n'est pas scalaire de sorte que $\deg \pi_A > 1 = \deg P$. Par unicité de P_A , $P_A = -X + 2k$ et $\deg P_A = 1$.

En conclusion, les matrices A de \mathcal{P}_n telles que $\deg P_A = 1$ sont les matrices symétriques non scalaires et les matrices de la forme $kI_n + M$ avec M antisymétrique non nulle.

3.d Si A et B sont orthogonalement semblables, alors il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ telle que $B = Q^{-1}AQ = Q^\top A Q$. Supposons que $A \in \mathcal{P}_n$. Alors

$$P_A(B) = P_A(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}P_A(A)Q = Q^\top A^\top A = B^\top$$

Donc $B \in \mathcal{P}_n$. De plus, A et B sont semblables donc $\pi_A = \pi_B$ de sorte que $\deg P_A < \deg \pi_A = \deg \pi_B$. Ainsi $P_B = P_A$ par unicité de P_B .

4 Soit $A \in \mathcal{B}_2$. Comme $\deg \pi_A \leq 2$, $\deg P_A \leq 1$. D'après les questions précédentes, A est symétrique ou de la forme $aI_2 + M$ avec M antisymétrique i.e. de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Réciproquement, si $A \in \mathcal{S}_2$ alors $A \in \mathcal{B}_2$ et si $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, alors $A^\top = P(A)$ avec $P = a$ si $b = 0$ ou $P = -X + 2a$ si $b \neq 0$ donc $A \in \mathcal{B}_2$.

Ainsi

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{S}_2 \cup \text{vect}(I_2, J_2)$$

$$\text{avec } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 **5.a** D'après le théorème de Bézout, il existe $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $U\pi_{A_1} + V\pi_{A_2} = 1$. On en déduit que

$$(P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1} + (P_{A_1} - P_{A_2})V\pi_{A_2} = (P_{A_1} - P_{A_2})$$

ou encore

$$P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1} = P_{A_2} + (P_{A_1} - P_{A_2})V\pi_{A_2}$$

Une récurrence évidente montre que

$$\forall m \in \mathbb{N}, A^m = \begin{pmatrix} A_1^m & 0 \\ 0 & A_2^m \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(A_1) & 0 \\ 0 & P(A_2) \end{pmatrix}$$

Comme π_{A_1} annule A_1 , $P(A_1) = P_{A_1}(A_1) = A_1^\top$. Mais on a également $P = P_{A_2} + (P_{A_1} - P_{A_2})V\pi_{A_2}$ et π_{A_2} annule A_2 donc $P(A_2) = A_2^\top$. On en déduit que $P(A) = A^\top$. Autrement dit, $A \in \mathcal{P}_{n_1+n_2}$.

5.b Pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(A) = 0 \iff (Q(A_1) = 0 \text{ et } Q(A_2) = 0)$. En termes d'idéaux annulateurs,

$$\pi_A \mathbb{K}[X] = \pi_{A_1} \mathbb{K}[X] \cap \pi_{A_2} \mathbb{K}[X] = (\pi_{A_1} \vee \pi_{A_2}) \mathbb{K}[X]$$

On en déduit que $\pi_A = \pi_{A_1} \vee \pi_{A_2} = \pi_{A_1} \pi_{A_2}$ car $\pi_{A_1} \wedge \pi_{A_2} = 1$.

D'après la question **3.a**, P_A est le reste de la division euclidienne de P par $\pi_A = \pi_{A_1} \pi_{A_2}$.

6 Remarquons que $A = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix}$. D'après la question **4**, I_2 et J_2 appartient à \mathcal{S}_2 . De plus, $P_{I_2} = 1$ et $P_{J_2} = -X$ de sorte que $P_{I_2} \wedge P_{J_2} = 1$. D'après la question **5.a**, $A \in \mathcal{P}_4$.

On détermine sans peine $\pi_{I_2} = X - 1$ et $\pi_{J_2} = X^2 + 1$. Avec les notations précédentes, on peut donc prendre $U = -\frac{1}{2}(X + 1)$ et $V = \frac{1}{2}$. On en déduit que

$$P = P_{I_2} - (P_{I_2} - P_{J_2})U\pi_{I_2} = 1 + \frac{1}{2}(X + 1)^2(X - 1) = \frac{1}{2}(X^3 + X^2 - X + 1)$$

Or $\pi_A = \pi_{I_2} \pi_{J_2} = X^3 - X^2 + X - 1$ donc

$$P = \frac{1}{2}\pi_A + X^2 - X + 1$$

de sorte que $P_A = X^2 - X + 1$.

REMARQUE. On peut vérifier à l'aide d'un calcul par blocs que

$$P_A(A) = \begin{pmatrix} P_A(I_2) & 0 \\ 0 & P_A(J_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -J_2 \end{pmatrix} = A^\top$$

7 Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Comme u et u^* commutent, il en est de même de $P(u)$ et $P(u^*)$. On prouve aisément que $P(u^*) = P(u)^*$ donc $P(u) \in \mathcal{N}(E)$.

8 Par définition de l'adjoint

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^* \circ u(x) \rangle = \langle x, u \circ u^*(x) \rangle = \langle u^*(x), u^*(x) \rangle = \|u^*(x)\|^2$$

9 9.a Si A est la matrice de f dans une base orthonormale, A^\top est la matrice de f^* dans cette même base. Ainsi

$$\det(f) = \det(A) = \det(A^\top) = \det(f^*) = \det(-f) = (-1)^m \det(f)$$

Comme f est inversible, $\det(f) \neq 0$ de sorte que $(-1)^m = 1$ i.e. m est pair.

9.b Par propriété de l'adjonction,

$$(f^2)^* = (f^*)^2 = (-f)^2 = f^2$$

Ainsi f^2 est autoadjoint et a fortiori diagonalisable. Comme $m > 0$, f^2 admet donc au moins une valeur propre et donc un vecteur propre x_0 . Quitte à diviser x_0 par sa norme, on peut supposer x_0 unitaire.

Notamment, $f^2(x_0) \in \text{vect}(x_0)$. On en déduit que

$$f(\Pi) = \text{vect}(f(x_0), f^2(x_0)) \subset \text{vect}(f(x_0), x_0) = \Pi$$

donc Π est stable par f .

Remarquons que $f(x_0) \neq 0$ car f est injective et $x_0 \neq 0$. De plus, comme $f^* = -f$,

$$\langle f(x_0), x_0 \rangle = \langle x_0, f^*(x_0) \rangle = -\langle x_0, f(x_0) \rangle$$

donc $\langle f(x_0), x_0 \rangle = 0$. Ainsi $f(x_0) \perp x_0$. A fortiori, $(x_0, f(x_0))$ est libre et Π est bien un plan.

Comme f est anti-autoadjoint, $f|_\Pi$ l'est également et la matrice de $f|_\Pi$ dans une base orthonormale de Π est antisymétrique.

Cette matrice est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

9.c Il suffit de raisonner par récurrence. Dans le cas où $m = 2$, le résultat est clair puisque la matrice de f dans une base orthonormale est antisymétrique. Supposons le résultat acquis lorsque $m = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $m = 2(k + 1)$

avec $k \in \mathbb{N}^*$. On construit comme précédemment un plan Π . La matrice de $f|_\Pi$ est alors de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$. On sait de

plus que Π^\perp est stable par $f^* = -f$ et donc par f . Comme $\dim \Pi^\perp = 2k$, la matrice de $f|_{\Pi^\perp}$ dans une base orthonormale adéquate est de la forme voulue par hypothèse de récurrence. En concaténant les bases de Π et Π^\perp , on obtient une base de \mathbb{R}^m dans laquelle la matrice de f est de la forme voulue.

10 **10.a** Comme E_1 est stable par u , $E_2 = E_1^\perp$ est stable par u^* . De même, E_1 est stable par u^* donc $E_2 = E_1^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$.

10.b Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

A fortiori, pour tout $(x, y) \in E_1^2$,

$$\langle u|_{E_1}(x), y \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, (u^*)|_{E_1}(y) \rangle$$

On en déduit que $(u|_{E_1})^* = u^*|_{E_1}$.

10.c D'après la question précédente, si $u \in \mathcal{N}(E)$, alors

$$(u|_{E_1})^* \circ u|_{E_1} = (u^*)|_{E_1} \circ u|_{E_1} = (u^* \circ u)|_{E_1} = (u \circ u^*)|_{E_1} = u|_{E_1} \circ (u^*)|_{E_1} = u|_{E_1} \circ (u|_{E_1})^*$$

donc $u|_{E_1} \in \mathcal{N}(E_1)$. De la même manière, $u|_{E_2} \in \mathcal{N}(E_2)$.

11 Comme u et u^* commutent, $u - \lambda \text{Id}_E$ et $(u - \lambda \text{Id}_E)^* = u^* - \lambda \text{Id}_E$ commutent également. On en déduit que $u - \lambda \text{Id}_E \in \mathcal{N}(E)$. D'après la question 8,

$$\|u(x) - \lambda x\|^2 = \|(u - \lambda \text{Id}_E)(x)\|^2 = \|(u - \lambda \text{Id}_E)^*(x)\|^2 = \|(u^* - \lambda \text{Id}_E)(x)\|^2 = \|u^*(x) - \lambda x\|^2$$

Ainsi $u(x) - \lambda x = 0 \iff u^*(x) - \lambda x = 0$. Par conséquent, $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}(u^* - \lambda \text{Id}_E)$. On en déduit que u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres.

On sait que les sous-espaces propres de u sont en somme directe. De plus, si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u , alors, pour $(x, y) \in E_\lambda(u) \times E_\mu(u)$,

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

car $E_\mu(u) = E_\mu(u^*)$. Comme $\lambda \neq \mu$, $\langle x, y \rangle = 0$. Par conséquent $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$.

Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u) = \text{Sp}(u^*)$, $E_\lambda(u) = E_\lambda(u^*)$ est stable par u et u^* . On en déduit que $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ est stable par u et

u^* . Ainsi $F = \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) \right)^\perp$ est stable par les adjoints respectifs de u et u^* , c'est-à-dire u^* et u .

On remarque alors que $u|_F$ n'admet pas de valeur propre car $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ et F sont en somme directe. Notamment, $\chi_{u|_F}$

est de degré pair (un polynôme réel de degré impair admet toujours une racine réelle en vertu du théorème des valeurs intermédiaires ; considérer les limites en $+\infty$ et $-\infty$). Donc $\dim F = \deg \chi_{u|_F}$ est paire.

12 **12.a** s est clairement auto-adjoint donc diagonalisable. A fortiori, χ_s est scindé.

12.b Comme v et v^* commutent, on vérifie sans peine que s et a commutent de même que s et v .

Comme s est diagonalisable, ses sous-espaces propres F est la somme directe orthogonale de ses sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(s)$ pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. De plus, $\dim E_{\lambda_i}(s) = n_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

Fixons $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. $E_{\lambda_i}(s)$ est stable par s et $s|_{E_{\lambda_i}(s)} = \lambda_i \text{Id}_{E_{\lambda_i}(s)}$. Comme a commute avec s , $E_{\lambda_i}(s)$ est stable par a . De plus, a est anti-autoadjoint donc $a|_{E_{\lambda_i}(s)}$ également en vertu de la question 10.a. La matrice de $a|_{E_{\lambda_i}(s)}$ dans une base orthonormale \mathcal{B}_i de $E_{\lambda_i}(s)$ est donc une matrice antisymétrique A_i . Enfin, s et v commutent donc $E_{\lambda_i}(s)$ est également stable par v et $v|_{E_{\lambda_i}(s)} = s|_{E_{\lambda_i}(s)} + a|_{E_{\lambda_i}(s)}$. On en déduit que la matrice de $v|_{E_{\lambda_i}(s)}$ dans la base \mathcal{B}_i est $M_i = \lambda_i I_{n_i} + A_i$.

La concaténation \mathcal{B}' des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ forme une base orthonormale de F dans laquelle la matrice de v est de la forme voulue.

12.c Avec les notations de la question précédente, il s'agit donc de montrer que $a|_{E_{\lambda_i}(s)}$ est inversible. Soit donc $x \in \text{Ker } a|_{E_{\lambda_i}(s)}$. Alors $x \in E_{\lambda_i}(s)$ i.e. $s(x) = \lambda_i x$ et $a(x) = 0$. On en déduit que $v(x) = s(x) + a(x) = \lambda_i x$. Mais comme v n'admet pas de valeur propre réelle, $x = 0_E$. On a donc montré que $\text{Ker } a|_{E_{\lambda_i}(s)} = \{0\}$ i.e. A_i est inversible.

13 Notons $S = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. S est stable par u et les sous-espaces propres de u sont orthogonaux deux à deux donc

il existe une base orthonormale de S adaptée à cette décomposition en somme directe. La matrice de $u|_S$ dans cette base orthonormale est une matrice diagonale D .

De plus, $u|_F \in \mathcal{N}(F)$ donc la question précédente montre qu'il existe une base orthonormale de F dans laquelle la matrice de $u|_F$ est diagonale par blocs de la forme $M_j = \lambda_j I_{n_j} + A_j$ où A_k est antisymétrique. De plus, $F \cap S = \{0\}$ donc $u|_F$ n'admet aucune valeur propre réelle et les matrices A_i sont donc inversibles. D'après la question 9, chaque matrice A_j

est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$ où $n_i \neq 0$. En en déduit que

chaque matrice $M_j = \lambda_j I_{n_j} + A_j$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_j & -b_i \\ b_i & \lambda_j \end{pmatrix}$.

Autrement dit, il existe une base orthonormale de F dans laquelle la matrice de $u|_F$ est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ avec $b_i \neq 0$. Comme E est la somme directe orthogonale de S et F , il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme voulue.

14 Les matrices de \mathcal{N}_n sont des matrices orthogonalement semblables à une matrice de la forme de la question précédente. La réciproque ne pose pas de problème (elles commutent clairement avec leurs transposées).

15 Si $u \in \mathcal{O}(E)$, un calcul par blocs montre que D et les τ_i sont des matrices orthogonales. On en déduit que les coefficients diagonaux de D valent ± 1 et que les blocs τ_i sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$.

16 **16.a** Il est clair que $P(M)$ est la matrice diagonale diagonale par blocs ayant pour blocs $P(M_1), \dots, P(M_k)$ et que Δ^T est la matrice diagonale diagonale par blocs ayant pour blocs M_1^T, \dots, M_k^T . On en déduit la condition demandée.

16.b On a déjà vu que $P_A = -X + 2a$. On trouve $\chi_A = (X - a)^2 + b^2$. Comme $b \neq 0$, A n'est pas scalaire de sorte que $\deg \pi_A > 1$. Comme π_A divise χ_A , $\pi_A = \chi_A$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P(A) &= A^T \\ \Leftrightarrow P(A) &= P_A(A) \\ \Leftrightarrow (P - P_A)(A) &= 0 \\ \Leftrightarrow \pi_A &= (X - (a + ib))(X - (a - ib)) \mid P - P_A \\ \Leftrightarrow (P - P_A)(a + ib) &= 0 \text{ ET } (P - P_A)(a - ib) = 0 && \text{car } a - ib \neq a + ib \\ \Leftrightarrow P(a + ib) &= P_A(a + ib) = a - ib \text{ ET } P(a - ib) = P_A(a - ib) = a + ib && \text{car } P_A = -X + 2a \end{aligned}$$

16.c Tout d'abord,

$$P(A) = A^T \Leftrightarrow P(B) = B^T \Leftrightarrow P(D) = D^T \text{ ET } \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(\tau_k) = \tau_k^T$$

Or les valeurs propres réelles de A sont exactement les coefficients diagonaux de D donc

$$P(D) = D^T \Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A), P(\lambda) = \lambda$$

Les valeurs propres complexes de A sont les valeurs propres complexes des matrices τ_k , c'est-à-dire les $a_k \pm ib_k$. La question précédente montre alors que

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(\tau_k) = \tau_k^T \Leftrightarrow \forall z \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \setminus \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A), P(z) = \bar{z}$$

16.d Il suffit de prendre le polynôme interpolateur de Lagrange P vérifiant les conditions de la question précédente. C'est l'unique polynôme de degré n vérifiant ces n conditions. Remarquons alors que le polynôme \bar{P} vérifie les mêmes conditions et que $\deg \bar{P} = \deg P$. Ainsi $\bar{P} = P$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. On en déduit que $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{P}_n$. On a déjà vu que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{N}_n$ donc $\mathcal{N}_n = \mathcal{P}_n$.

16.e Comme P est un polynôme de degré minimal vérifiant $P(A) = A^T$, $P = P_A$.

En reprenant la matrice A de la question 6, on a $\text{Sp}(A) = \{1, i, -i\}$. On en déduit que P_A est le polynôme interpolateur de Lagrange, vérifiant $P_A(1) = 1$, $P_A(i) = -i$ et $P_A(-i) = i$. On a donc

$$P_A = 1 \cdot \frac{(X - i)(X + i)}{(1 - i)(1 + i)} - i \cdot \frac{(X - 1)(X + i)}{(i - 1)(i + i)} + i \cdot \frac{(X - 1)(X - i)}{(-i - 1)(-i - i)} = X^2 - X + 1$$

17 **17.a** On a $J \in \mathcal{O}_n \subset \mathcal{N}_n = \mathcal{P}_n$ ou encore $J^{n-1} = J^T$ donc $J \in \mathcal{P}_n = \mathcal{N}_n$. En posant $P = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$, $C(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) = P(J) \in \mathcal{N}_n = \mathcal{P}_n$ d'après la question 7.

17.b On a classiquement $\pi_J = X^{n-1}$. D'une part,

$$P_A \circ P(J) = P_A(A) = A^T$$

D'autre part,

$$Q(J) = \alpha_0 I_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i J^{n-i} = \alpha_0 I_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (J^i)^T = P(J)^T = A^T$$

Ainsi $(P_A \circ P - Q)(J) = 0$ et π_J divise $P_A \circ P - Q$. Comme $\deg Q \leq n-1 < n = \deg \pi_J$, Q est le reste de la division euclidienne de $P_A \circ P$ par π_J .

On cherche $P_A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On calcule $P_A \circ P$ que l'on réduit modulo $X^n - 1$: il suffit pour cela de réduire les puissances de X modulo n . On identifie alors les coefficients du polynôme obtenu avec ceux de Q ce qui fournit un système de n équations à n inconnues permettant de calculer les a_k .

Si $A = C(1, 1, 0)$, on a donc $P = 1 + X$, $Q = 1 + X^2$ et $\pi_J = X^3 - 1$. On pose $P_A = aX^2 + bX + c$. On a alors

$$P_A \circ P = aX^2 + (2a + b)X + a + b + c$$

Ce polynôme est déjà réduit modulo $X^3 - 1$. L'égalité $P_A \circ P = Q$ donne $a = 1$, $b = -2$ et $c = 2$. Ainsi $P_A = X^2 - 2X + 2$.

18 On pose $\Delta = (a_1 - 2)^2 - 4a_0a_2$.

Supposons qu'un tel entier n et une telle matrice A existent. Si χ_A était scindé dans \mathbb{R} , alors A serait trigonalisable dans \mathbb{R} et donc A serait symétrique d'après la question 2.c. On aurait donc $P_A = X$ ou P_A constant (si A est scalaire), ce qui contredit le fait que $\deg P_A = 2$. Ainsi A possède une valeur propre complexe non réelle $a + ib$ ($b \neq 0$). On sait alors d'après la question 16.c que $P(a + ib) = a - ib$. En identifiant parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\begin{cases} a_0 + a_1a + a_2a^2 - a_2b^2 = a \\ a_1b + 2a_2ab = -b \end{cases}$$

La deuxième équation fournit $a = -\frac{a_1 + 1}{2a_2}$. En reportant dans la première, on obtient $b^2 = \frac{4 - \Delta}{a^2}$. Or $b^2 > 0$ donc

$\Delta < 4$. De plus, ce qui précède montre que les seules valeurs propres complexes de A sont $a \pm ib$ avec $a = -\frac{a_1 + 1}{2}$ et

$b = \frac{\sqrt{4 - \Delta}}{2a_2}$. Le polynôme $Q = -X + 2a$ échange alors ces deux valeurs propres complexes. Si A ne possédait pas de valeurs propres réelles, on aurait $Q(A) = A^T$ d'après la question 16.c. Ceci est impossible par minimalité du degré de P_A . Ainsi A possède une valeur propre réelle. La même question 16.c montre alors que $P - X$ admet une racine réelle (la valeur propre en question). On en déduit que le discriminant de $P - X$ est positif i.e. $\Delta \geq 0$.

Supposons que $\Delta \in [0, 4[$. Alors $P - X$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta \geq 0$. Il admet donc au moins une solution réelle λ . Par ailleurs en posant $a = -\frac{a_1 + 1}{2a_2}$ et $b = \frac{\sqrt{4 - \Delta}}{2a_2} \neq 0$, on vérifie que $P(a \pm ib) = a \mp ib$. D'après la

question 16.c, on a donc $P(A) = A^T$ en posant $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$. Comme $b \neq 0$, A possède trois valeurs propres distinctes

λ , $a + ib$ et $a - ib$. On en déduit que $\deg \pi_A = 3$. Ainsi $\deg P < \deg \pi_A$ puis $P = P_A$.