Devoir à la maison n°19

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – CCINP Maths I MP 2021

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Le problème est constitué de trois parties indépendantes dans une large mesure.

I Algorithmique : calcul de zêta aux entiers pairs

La suite des nombres de Bernoulli notée $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$b_0 = 1, \qquad \forall n \geq 1,\ b_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}b_k$$

Leonhard Euler (1707-1783) a démontré la formule suivante qui exprime les nombres $\zeta(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}\pi^{2k}b_{2k}}{(2k)!}$$

Dans cette partie (informatique pour tous), on se propose de programmer le calcul des nombres de Bernoulli b_n afin d'obtenir des valeurs exactes de $\zeta(2k)$.

Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python. On sera très attentif à la rédaction du code notamment à l'indentation.

1 Ecrire une fonction `factorielle(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

2 On considère la fonction Python suivante `binom(n, p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$:

```python
def binom(n, p):
    if not (0 <= p <= n):
        return 0
    return factorielle(n) // (factorielle(p) * factorielle(n - p))
```

Combien de multiplications sont effectuées lorsque l'on exécute `binom(30, 10)` ?

Expliquer pourquoi il est possible de réduire ce nombre de multiplications à 20. Quel serait le type du résultat renvoyé si l'on remplaçait la dernière ligne de la fonction `binom` par
`return factorielle(n) / (factorielle(p) * factorielle(n - p))` ?

3 Démontrer que, pour $n \geq p \geq 1$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

En déduire une fonction récursive `binom_rec(n, p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

4 Ecrire une fonction non récursive `bernoulli(n)` qui renvoie une valeur approchée du nombre rationnel b_n. On pourra utiliser librement une fonction `binomial(n, p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Par exemple, `bernoulli(10)` renvoie 0,075 757 575 757 575 76 qui est une valeur approchée de $b_{10} = \frac{5}{66}$.

II Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

5 Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.

6 Démontrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ puis qu'elle est décroissante.

7 La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?

8 Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

9 Soit $x > 1$. On pose :

$$\mathrm{I}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

Démontrer que :

$$\mathrm{I}(x) \leq \zeta(x) \leq \mathrm{I}(x) + 1$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

10 Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $\mathrm{A} = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in\mathrm{A}}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}$$

On pourra considérer la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$ où $\mathrm{A}_n = \{(a, b) \in \mathrm{A},\ ab = n\}$.

III Produit eulérien

Soit $s > 1$ un réel fixé. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}.$$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. On note alors $a \mid b$.

11 Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^s}$.

12 Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer par récurrence sur n que :

$$(a_1 \mid \mathrm{N}, a_2 \mid \mathrm{N}, \dots, a_n \mid \mathrm{N}) \iff a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n \mid \mathrm{N}$$

Le résultat persiste-t-il si les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?

13 En déduire que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[\mathrm{X} \in a_1\mathbb{N}^*], \dots, [\mathrm{X} \in a_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants.
On pourra noter $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de $(a_1, \dots, a_n)$.

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $\mathrm{X}(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$.

14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$$

15 Soit ω dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n$. Que vaut $\mathrm{X}(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

16 Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $\ell \geq \zeta(s)$.
Conclure.