Devoir surveillé n°12

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – Centrale MP 2015 Maths2 – Autour des sommes d'Euler

Dans tout le problème, on note pour tout entier $n \geq 1$, $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

On note ζ la fonction définie pour $x > 1$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite (H_n) et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour r entier naturel supérieur ou égal à 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ à l'aide de la valeur de la fonction ζ en certains points entiers.

I Représentation intégrale de sommes de séries

1 **1.a** Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge.

1.b Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \mathrm{A} + o(1)$.
En déduire que $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

2 Soit r un entier naturel. Pour quelles valeurs de r la série $\sum_{n\geq1} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite on notera $\mathrm{S}_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ lorsque la série converge.

3 **3.a** Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions $t \mapsto \ln(1-t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ ainsi que leur rayon de convergence.

3.b En déduire que la fonction

$$t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser son développement en série entière à l'aide des réels H_n.

4 Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) et pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on note :

$$\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{I}^{\varepsilon}_{p,q} = \int_{\varepsilon}^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t$$

4.a Montrer que l'intégrale $\mathrm{I}_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p,q).

4.b Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon \in]0,1[,\ \mathrm{I}^{\varepsilon}_{p,q} = -\frac{q}{p+1}\mathrm{I}^{\varepsilon}_{p,q-1} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}$$

4.c En déduire que l'on a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_{p,q} = -\frac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p,q-1}$$

4.d En déduire une expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ en fonction des entiers p et q.

5 Soit r un entier naturel non nul et f une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$.

On suppose que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et que $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument.

Montrer que :

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t)\ \mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}$$

6 **6.a** Déduire des questions précédentes que pour tout entier $r \geq 2$:

$$\mathrm{S}_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int_0^1 (\ln t)^{r-1}\frac{\ln(1-t)}{1-t}\ \mathrm{d}t$$

6.b Etablir que l'on a alors $\mathrm{S}_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!}\int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\ \mathrm{d}t$.

6.c En déduire que $\mathrm{S}_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\ \mathrm{d}t$ puis trouver la valeur de S_2 en fonction de $\zeta(3)$.

II La fonction β

7 ***La fonction*** Γ

7.a Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$.

On admettra que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

7.b Soient x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}\ \mathrm{d}t$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

8 ***La fonction*** β ***et son équation fonctionnelle***

Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on définit $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t$.

8.a Justifier l'existence de $\beta(x,y)$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

8.b Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

8.c Soient $x > 0$ et $y > 0$. Etablir que $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$.

8.d En déduire que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x+1,y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y)$.

9 ***Relation entre la fonction β et la fonction Γ***

On veut montrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, relation qui sera notée $(\mathcal{R})$.

9.a Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation $(\mathcal{R})$ pour $x > 1$ et $y > 1$.
Dans toute la suite de cette question, on supposera que $x > 1$ et $y > 1$.

9.b Montrer que $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u$.
On pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{u}{1+u}$.

9.c On note $\mathrm{F}_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{F}_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y).$$

9.d Soit $\mathrm{G}(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{F}_{x,y}((1+u)a)\,\mathrm{d}u$.
Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

9.e Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathrm{G}(a) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$.

9.f Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[c,d]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, puis que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

9.g Exprimer pour $a > 0$, $\mathrm{G}'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1}.

9.h Déduire de ce qui précède la relation $(\mathcal{R})$.

III La fonction digamma

On définit la fonction ψ (appelée fonction digamma) sur $\mathbb{R}_+^*$ comme étant la dérivée de $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$.
Pour tout réel $x > 0$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

10 Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$

11 ***Sens de variation de ψ***

11.a A partir de la relation $(\mathcal{R})$, justifier que $\dfrac{\partial\beta}{\partial y}$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
Etablir que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial y}(x,y) = \beta(x,y)\left(\psi(y) - \psi(x+y)\right)$.

11.b Soit $x > 0$ fixé. Quel est le sens de variations sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $y \mapsto \beta(x,y)$?

11.c Montrer que la fonction ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

12 ***Une expression de ψ comme somme d'une série de fonctions***

12.a Montrer que pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$$

12.b Soit n un entier ≥ 2 et x un réel > -1. On pose $p = \mathrm{E}(x) + 1$, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.
Prouver que :

$$0 \leq \psi(n+x+1) - \psi(n) \leq \mathrm{H}_{n+p} - \mathrm{H}_{n-1} \leq \frac{p+1}{n}$$

12.c En déduire que, pour tout réel $x > -1$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

13 ***Un développement en série entière***

On note g la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

13.a Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, +\infty[$.
Préciser notamment la valeur de $g^{(k)}(0)$ en fonction de $\zeta(k+1)$ pour tout entier $k \geq 1$.

13.b Montrer que pour tout entier n et pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\left|g(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leq \zeta(2)|x|^{n+1}$$

Montrer que g est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

13.c Prouver que pour tout x dans $]-1, 1[$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n$$

IV Une expression de S_r en fonction de valeurs entières de ζ

Dans cette partie, on note B la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $B(x) = \dfrac{\partial^2\beta}{\partial y^2}(x, 1)$.

14 ***Une relation entre* B *et* ψ**

Justifier que B est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
A l'aide de la relation trouvée au **11**, établir que pour tout réel $x > 0$:

$$xB(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(1+x))$$

En déduire que B est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

15 ***Expression de* S_r *à l'aide de la fonction* B**

15.a Montrer que pour tout réel $x > 0$, $B(x) = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1-t))^2\, t^{x-1}\, dt$.

15.b Donner sans justification une expression, à l'aide d'une intégrale, de $B^{(p)}(x)$, pour tout entier naturel p et tout réel $x > 0$.

15.c En déduire que pour tout entier $r \geq 2$, $S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!}\lim\limits_{x\to 0^+} B^{(r-2)}(x)$.

15.d Retrouver alors la valeur de S_2 déjà calculée au **6.c**.

16 Soit φ la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $\varphi(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(1+x))$.

16.a Monter que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et donner pour tout entier naturel $n \geq 2$ la valeur de $\varphi^{(n)}(0)$ en fonction des dérivées successives de ψ au point 1.

16.b Conclure que, pour tout entier $r \geq 3$,

$$2S_r = r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2}\zeta(k+1)\zeta(r-k)$$