

DEVOIR À LA MAISON N°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

1 Il suffit d'appliquer la règle de d'Alembert pour conclure que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ vaut 1. Ainsi $\sum \frac{z^n}{n}$ converge pour tout $z \in D$. D'après le cours

$$\forall z \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} = \ln(1+z)$$

Ainsi

$$\forall z \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$$

2 Pour $t \in [0, 1]$,

$$L(tz) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} t^n$$

Ainsi $\psi : t \mapsto L(tz)$ est la somme d'une série entière (de la variable t). Son rayon de convergence est $\frac{1}{|z|} > 1$ par la règle de d'Alembert. Notamment, ψ est dérivable sur $[0, 1]$ et sa dérivée est

$$\psi' : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = z \sum_{n=0}^{+\infty} (tz)^n = \frac{z}{1-tz}$$

Par produit et composition, $\chi : t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ est dérivable sur $[0, 1]$ de dérivée

$$\chi' : t \mapsto -ze^{L(tz)} + (1-tz)\psi'(t)e^{L(tz)} = 0$$

Ainsi χ est constante sur $[0, 1]$. Notamment, $\chi(0) = \chi(1)$ i.e. $1 = (1-z)e^{L(z)}$ d'où

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}$$

3 Par inégalité triangulaire,

$$|L(z)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|)$$

en utilisant la question 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $z^n \in D$ donc en appliquant ce qui précède,

$$|L(z^n)| \leq -\ln(1-|z|^n)$$

Or $-\ln(1-|z|^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |z|^n$ et la série géométrique $\sum |z|^n$ converge donc $\sum -\ln(1-|z|^n)$ converge. On en déduit par majoration de séries à termes positifs que $\sum |L(z^n)|$ converge. Ainsi $\sum_{n \geq 1} L(z^n)$ converge (absolument).

4 Si $(a_1, \dots, a_n) \in P_{n,N}$, alors pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$0 \leq a_i \leq ia_i \leq \sum_{k=1}^N ka_k = n$$

On en déduit que $P_{n,N} \subset \llbracket 0, n \rrbracket^N$ donc $P_{n,N}$ est fini.

L'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} P_{n,N} & \longrightarrow & P_{n,N+1} \\ (a_1, \dots, a_N) & \longmapsto & (a_1, \dots, a_N, 0) \end{array} \right.$$

est bien définie et injective. On en déduit que $p_{n,N} \leq p_{n,N+1}$. La suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est donc croissante.

Il est clair que $P_{0,N}$ ne contient que la suite nulle donc $p_{0,N} = 1$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. La suite $(p_{0,N})$ est donc constante à partir du rang 1.

Supposons $n \in \mathbb{N}^*$ et donnons-nous $N \geq n$. Soit $(a_1, \dots, a_N) \in P_{n,N}$. Alors pour tout $k \in \llbracket n+1, N \rrbracket$, $a_k = 0$ sinon $\sum_{k=1}^N ka_k > n$. Ainsi $(a_1, \dots, a_n) \in P_{n,n}$. Autrement dit l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} P_{n,n} & \longrightarrow & P_{n,N} \\ (a_1, \dots, a_n) & \longmapsto & (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0) \end{array} \right.$$

est surjective. Comme elle est évidemment injective, elle est bijective de sorte que $p_{n,n} = p_{n,N}$.

5 Je pense qu'il est plus élégant de raisonner en termes de famille sommable. Le théorème de Fubini nous apprend que si $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$ et $\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j$ sont deux séries numériques absolument convergentes, alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable

et $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right)$. Puisque pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, les séries $\sum_{a_k \in \mathbb{N}} z^{ka_k}$ convergent absolument (sé-

ries géométriques), on montre par récurrence à l'aide du résultat précédent que la famille $\left(\prod_{k=1}^N z^{ka_k} \right)_{(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N} =$

$\left(z^{\sum_{k=1}^N ka_k} \right)_{(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N}$ est sommable et que

$$\sum_{(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N} z^{\sum_{k=1}^N ka_k} = \prod_{k=1}^N \left(\sum_{a_k=0}^{+\infty} z^{ka_k} \right) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-z^k}$$

Mais $\mathbb{N}^N = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} P_{n,N}$ (union disjointe) donc, d'après le théorème de sommation par paquets

$$\prod_{k=1}^N \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(a_1, \dots, a_N) \in P_{n,N}} z^{\sum_{k=1}^N ka_k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$$

6 Comme $(p_{n,N})_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall (n, N) \in \mathbb{N}^2, |(p_{n,N+1} - p_{n,N})z^n| = (p_{n,N+1} - p_{n,N})|z|^n$$

Fixons $N \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (p_{n,N+1} - p_{n,N})|z|^n$ converge comme différence de deux séries convergentes et

$$S_N = \sum_{n=0}^{+\infty} (p_{n,N+1} - p_{n,N})|z|^n = \prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-|z|^k} - \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-|z|^k} = |z|^{N+1} \prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-|z|^k}$$

Or la suite de terme général $\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-|z|^k}$ est croissante de limite $P(|z|)$ donc $S_N \leq |z|^{N+1} P(|z|)$. Comme $z \in D$, $\sum_{N \in \mathbb{N}} S_N$ converge. On en déduit la sommabilité de la famille $((p_{n,N+1} - p_{n,N})z^n)_{(n,N) \in \mathbb{N}^2}$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (p_{n,N+1} - p_{n,N})z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{N=0}^{+\infty} (p_{n,N+1} - p_{n,N})z^n$$

D'une part, en notant $S_N(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} (p_{n,N+1} - p_{n,N})z^n = S_{N+1}(z) - S_N(z)$$

donc, via une série télescopique

$$\sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(z) - S_0(z) = P(z) - 0 = P(z)$$

D'autre part, comme la suite $(p_{n,N})_{N \in \mathbb{N}}$ est constante égale à p_n à partir d'un certain rang,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{N=0}^{+\infty} (p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n = z^n \sum_{N=0}^{+\infty} p_{n,N+1} - p_{n,N} = (p_n - p_{n,0}) z^n = p_n z^n$$

On en déduit bien que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$$

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n x^n$. Ce qui précède montre la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n z^n$ pour tout $z \in D$ donc $R \geq 1$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, $p_{n,N} \geq 1$ car $P_{n,N}$ contient la suite $(n, 0 \dots, 0)$. Ainsi par croissance de $(p_{n,N})_{N \geq 1}$, $p_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $R \leq 1$. Finalement, $R = 1$.

7 Fixons $t > 0$. Alors

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta}) = e^{-in\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-kt} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kt} e^{i(k-n)\theta}$$

Posons $u_k : \theta \in [-\pi, \pi] \mapsto p_k e^{-kt} e^{i(k-n)\theta}$. Alors pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, $|u_k(\theta)| = p_k e^{-kt}$ et la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k e^{-kt}$ converge ($e^{-t} \in D$) donc la série de fonctions $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$. On peut donc procéder à une interversion série/intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta}) d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} p_k e^{-kt} e^{i(k-n)\theta} d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} 2\pi p_k e^{-kt} \delta_{n,k} = 2\pi p_n e^{-nt}$$

On en déduit bien que

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta}) d\theta$$

8 Puisque $|xe^{i\theta}| = x < 1$, on peut appliquer la question 2 pour obtenir :

$$\exp(L(xe^{i\theta})) = \frac{1}{1 - xe^{i\theta}}$$

On en déduit que

$$\left| \frac{1}{1 - xe^{i\theta}} \right| = |\exp(L(xe^{i\theta}))| = \exp(\operatorname{Re}(L(xe^{i\theta})))$$

Comme $x \geq 0$, $x^n \cos(n\theta) \leq x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\operatorname{Re}(L(xe^{i\theta})) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n} = x \cos \theta + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n} \leq x \cos \theta + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = x \cos \theta - \ln(1-x) - x$$

Par croissance de l'exponentielle

$$\left| \frac{1}{1 - xe^{i\theta}} \right| \leq \exp(x \cos \theta - \ln(1-x) - x) = \frac{\exp(-(1 - \cos \theta)x)}{1-x}$$

Or $1-x > 0$ donc ceci équivaut à

$$\left| \frac{1-x}{1 - xe^{i\theta}} \right| \leq \exp(-(1 - \cos \theta)x)$$

On rappelle que

$$\forall z \in D, P(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - z^n}$$

Ainsi

$$\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1 - x^n}{1 - x^n e^{ni\theta}}$$

puis

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \left| \frac{1-x^n}{1-x^n e^{ni\theta}} \right|$$

Or d'après ce qui précède,

$$\left| \frac{1-x^n}{1-x^n e^{ni\theta}} \right| \leq \exp(-(1-\cos(n\theta))x^n)$$

donc

$$\prod_{n=1}^N \left| \frac{1-x^n}{1-x^n e^{ni\theta}} \right| \leq \exp\left(-\sum_{n=1}^N (1-\cos(n\theta))x^n\right)$$

Par continuité de l'exponentielle, on obtient donc

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} (1-\cos(n\theta))x^n\right) = \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} (1-\cos(n\theta))x^n\right) = \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta)x^n\right)$$

Or d'une part

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

et d'autre part,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(x^n e^{ni\theta}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{in\theta}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)$$

On en déduit bien que

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right)$$

9 On calcule

$$\frac{1}{1-xe^{i\theta}} = \frac{1-xe^{-i\theta}}{(1-xe^{i\theta})(1-xe^{-i\theta})} = \frac{1-x\cos\theta + ix\sin\theta}{1-2x\cos\theta + x^2}$$

donc

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) = \frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta + x^2} = \frac{1-x\cos\theta}{(1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta)}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) &= \frac{(1-2x\cos\theta + x^2) - (1-x)(1-x\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta))} \\ &= \frac{x(1-\cos\theta) + x^2(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta))} \\ &\geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta))} \end{aligned}$$

car $x^2(1-\cos\theta) \geq 0$ et $(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta)) = (1-x)|1-xe^{i\theta}|^2 > 0$.

Si $(1-x)^2 \geq x(1-\cos\theta)$, alors

$$\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta))} \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{3(1-x)^3} \geq \frac{1-\cos\theta}{6(1-x^3)}$$

car $x \geq \frac{1}{2}$. On en déduit que

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right)$$

Si $(1-x)^2 \leq x(1-\cos\theta)$, alors

$$\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta))} \geq \frac{1}{3(1-x)}$$

On en déduit que

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right)$$

10 Tout d'abord, $\varphi_{n,\alpha}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus, $1 - e^{-x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_{n,\alpha} = 1$. Par ailleurs, $\varphi_{n,\alpha}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées car $\alpha > 0$. On en déduit que $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .
A nouveau, $\varphi'_{n,\alpha}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'_{n,\alpha}(x) = \frac{nx^{n-1}(1 - e^{-x}) - \alpha x^n(1 - e^{-x}) - nx^n e^{-x}}{(1 - e^{-x})^{n+1}} \cdot e^{-\alpha x}$$

$$\begin{aligned} nx^{n-1}(1 - e^{-x}) &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} nx^{n-1}(x + \mathcal{O}(x^2)) \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} nx^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\ \alpha x^n(1 - e^{-x}) &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(x^{n+1}) \\ nx^n e^{-x} &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} nx^n(1 + \mathcal{O}(x)) \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} nx^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$nx^{n-1}(1 - e^{-x}) - \alpha x^n(1 - e^{-x}) - nx^n e^{-x} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Comme $(1 - e^{-x})^{n+1} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x^{n+1}$, $\varphi'_{n,\alpha}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(1)$. Par ailleurs, comme $\alpha > 0$, on a encore $\varphi'_{n,\alpha}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées. Ainsi $\varphi'_{n,\alpha}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

11 Soit $t > 0$. Posons $u_k = \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1 - e^{-kt})^n}$. Alors $u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ par croissances comparées ($\alpha t > 0$). Ainsi $\sum u_k$ converge $S_{n,\alpha}(t)$ existe. De plus, $S_{n,\alpha}(t)$ est une somme de termes strictement positifs donc $S_{n,\alpha}(t) > 0$.
Par une relation de Chasles

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} \varphi_{n,\alpha}(x) dx$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties sur le segment $[kt, (k+1)t]$,

$$\int_{kt}^{(k+1)t} \varphi_{n,\alpha}(x) dx = \left[(x - kt) \varphi_{n,\alpha}(x) \right]_{x=kt}^{x=(k+1)t} - \int_{kt}^{(k+1)t} (x - kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx = t \varphi_{n,\alpha}((k+1)t) - \int_{kt}^{(k+1)t} (x - kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx$$

Or

$$t \varphi_{n,\alpha}((k+1)t) = t^{n+1} u_{k+1}$$

Comme la série $\sum u_k$ converge, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x) dx &= \sum_{k=0}^{+\infty} t^{n+1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x - kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx \\ &= t^{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x - kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx \\ &= t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x - kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx \end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_{kt}^{(k+1)t} (x - kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx \right| \leq \int_{kt}^{(k+1)t} |x - kt| |\varphi'_{n,\alpha}(x)| dx \leq t \int_{kt}^{(k+1)t} |\varphi'_{n,\alpha}(x)| dx$$

Comme $\varphi_{n,\alpha'}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ , on peut écrire par inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x - kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \int_{kt}^{(k+1)t} (x - kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx \right| \leq t \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} |\varphi'_{n,\alpha}(x)| dx = t \int_0^{+\infty} |\varphi'_{n,\alpha}(x)| dx$$

Finalement,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x - kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(t)$$

On a donc

$$t^{n+1}S_{n,\alpha}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x) dx + \mathcal{O}(t)$$

ou encore

$$S_{n,\alpha}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-x})^n} dx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

12 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $0 < e^{-x} < 1$

$$\frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = xe^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} xe^{-nx}$$

Par intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} xe^{-nx} dx &= -\frac{1}{n} [xe^{-nx}]_0^{+\infty} + \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto xe^{-nx}$ est positive sur \mathbb{R}_+^* et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

13 Remarquons que $\Phi_X(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta X})$. Or $|e^{i\theta X}| = 1$ donc, par inégalité triangulaire,

$$|\Phi_X(\theta)| = |\mathbb{E}(e^{i\theta X})| \leq \mathbb{E}(|e^{i\theta X}|) = 1$$

14 On applique la formule de transfert :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R}, \Phi_{aX+b}(\theta) &= \mathbb{E}(e^{i\theta(aX+b)}) = e^{ib\theta} \mathbb{E}(e^{ia\theta X}) &= e^{ib\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{ina\theta} \mathbb{P}(X = n) \\ &= e^{ib\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{ina\theta} q^{n-1} p \\ &= e^{i(a+b)\theta} p \sum_{n=0}^{+\infty} e^{ina\theta} q^n \\ &= \frac{pe^{i(a+b)\theta}}{1 - qe^{i\theta}} \end{aligned}$$

15 Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $n^k \mathbb{P}(X = n) = n^k q^{n-1} p$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^k \mathbb{P}(X = n)$ converge.

D'après la formule de transfert, la variable aléatoire positive X^k est d'espérance finie. En prenant $a = 1$ et $b = 0$ dans la question **14**, on obtient

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \Phi_X(\theta) = \frac{pe^{i\theta}}{1 - qe^{i\theta}}$$

On a également

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \Phi_X(\theta) = p \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} e^{in\theta}$$

Posons $f_n : \theta \in \mathbb{R} \mapsto q^{n-1} e^{in\theta}$. Les f_n sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, f_n^{(k)}(\theta) = q^{n-1} i^k n^k e^{in\theta}$$

Notamment

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, |f_n^{(k)}(\theta)| = q^{n-1} n^k$$

Or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} q^{n-1} n^k$ converge via la règle de d'Alembert donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n^{(k)}$ converge normalement sur \mathbb{R} . On en déduit que $\Phi_X = p \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \Phi_X^{(k)}(\theta) = p \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} i^k n^k e^{in\theta}$$

Notamment, par la formule de transfert,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Phi_X^{(k)}(0) = i^k \sum_{n=1}^{+\infty} p q^{n-1} n^k = i^k \mathbb{E}(X^k)$$

16 D'après la question **14** avec $a = 1$ et $b = 0$,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \Phi_X(\theta) = \frac{p e^{i\theta}}{1 - q e^{i\theta}}$$

On montre alors le résultat de l'énoncé par récurrence sur k . Il est clairement vrai pour $k = 0$: il suffit de prendre $P_0 = 1$. Supposons le résultat acquis pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi_X^{(k+1)}(\theta) &= p i^{k+1} e^{i\theta} \frac{P_k(q e^{i\theta})}{(1 - q e^{i\theta})^{k+1}} + p i^k e^{i\theta} \frac{i q e^{i\theta} P'_k(q e^{i\theta})}{(1 - q e^{i\theta})^{k+1}} + p i^k e^{i\theta} \frac{(k+1) P_k(q e^{i\theta}) q i e^{i\theta}}{(1 - q e^{i\theta})^{k+2}} \\ &= p i^{k+1} e^{i\theta} \frac{(1 - q e^{i\theta}) P_k(q e^{i\theta})}{(1 - q e^{i\theta})^{k+2}} + p i^{k+1} e^{i\theta} \frac{(1 - q e^{i\theta}) q e^{i\theta} P'_k(q e^{i\theta})}{(1 - q e^{i\theta})^{k+2}} + p i^{k+1} e^{i\theta} \frac{(k+1) q e^{i\theta} P_k(q e^{i\theta})}{(1 - q e^{i\theta})^{k+2}} \\ &= p i^{k+1} e^{i\theta} \frac{P_{k+1}(e^{i\theta})}{(1 - q e^{i\theta})^{k+2}} \end{aligned}$$

avec $P_{k+1} = (1 - X)P_k + X(1 - X)P'_k + (k+1)XP_k$. On a alors également $P_{k+1}(0) = P_k(0) = 1$. Le résultat est donc établi par récurrence.

17 Les questions **15** et **16** donnent

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Phi_X^{(k)}(0) = \frac{i^k P_k(q)}{p^k} = i^k \mathbb{E}(X^k)$$

c'est-à-dire $\mathbb{E}(X^k) = \frac{P_k(q)}{p^k}$. Ainsi

$$\left| \mathbb{E}(X^k) - \frac{1}{p^k} \right| = \frac{|P_k(q) - 1|}{p^k} = \frac{|P_k(q) - P_k(0)|}{p^k}$$

En notant $C_k = \max_{[0,1]} |P'_k|$, on obtient par inégalité des accroissements finis $|P_k(q) - P_k(0)| \leq C_k q$ car $q \in [0, 1]$. Ainsi on a bien

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left| \mathbb{E}(X^k) - \frac{1}{p^k} \right| \leq \frac{C_k q}{p^k}$$

avec C_k indépendant de p .

18 Comme $X \sim \mathcal{G}(p)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$. Ainsi

$$(X - \mathbb{E}(X))^4 = X^4 - \frac{4}{p} X^3 + \frac{6}{p^2} X^2 - \frac{4}{p^3} X + \frac{1}{p^4}$$

puis

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4) = \mathbb{E}(X^4) - \frac{4}{p} \mathbb{E}(X^3) + \frac{6}{p^2} \mathbb{E}(X^2) - \frac{4}{p^3} \mathbb{E}(X) + \frac{1}{p^4} = \mathbb{E}(X^4) - \frac{4}{p} \mathbb{E}(X^3) + \frac{6}{p^2} \mathbb{E}(X^2) - \frac{3}{p^4}$$

Mais d'après la question **17**,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{p^k} - \frac{C_k q}{p^k} \leq \mathbb{E}(X^k) \leq \frac{1}{p^k} + \frac{C_k q}{p^k}$$

donc

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4) \leq \frac{1}{p^4} + \frac{C_4 q}{p^4} + \frac{4}{p} \left(\frac{C_3 q}{p^3} - \frac{1}{p^3} \right) + \frac{6}{p^2} \left(\frac{C_2 q}{p^2} \right) - \frac{3}{p^4} = \frac{(C_4 + 4C_3 + 6C_2)q}{p^4}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4) \leq \frac{Kq}{p^4}$$

En posant $K = C_4 + 4C_3 + 6C_2$.

19 Comme Y^4 admet une espérance finie, Y^2 admet un moment d'ordre 2. La variable aléatoire constante égale à 1 admet également un moment d'ordre 2 donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $Y^2 \cdot 1 = Y^2$ admet une espérance finie et

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(Y^2 \cdot 1) \leq \mathbb{E}(Y^4)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}(1)^{\frac{1}{2}} = \mathbb{E}(Y^4)^{\frac{1}{2}}$$

De même, comme $|Y|$ et Y^2 admettent des moments d'ordre 2, $|Y| \cdot Y^2 = |Y|^3$ admet une espérance finie et

$$\mathbb{E}(|Y|^3) = \mathbb{E}(|Y| \cdot Y^2) \leq \mathbb{E}(Y^2)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}(Y^4)^{\frac{1}{2}} \leq \mathbb{E}(Y^4)^{\frac{1}{4}} \mathbb{E}(Y^4)^{\frac{1}{2}} = \mathbb{E}(Y^4)^{\frac{3}{4}}$$

20 L'application $\psi : t \mapsto e^{it}$ est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} et $|\psi^{(3)}(t)| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left| \psi(u) - \psi(0) - \psi'(0)u - \frac{1}{2}\psi''(0)u^2 \right| \leq \frac{1 \cdot |u|^3}{6}$$

c'est-à-dire

$$\left| e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{|u|^3}{6}$$

21 Puisque Y est centrée, $\mathbb{E}(Y) = 0$. Par linéarité de l'espérance,

$$\Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} = \mathbb{E} \left(e^{i\theta Y} - 1 - i\theta Y + \frac{\theta^2 Y^2}{2} \right)$$

Par inégalité triangulaire

$$\left| \Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| \leq \mathbb{E} \left(\left| e^{i\theta Y} - 1 - i\theta Y + \frac{\theta^2 Y^2}{2} \right| \right)$$

D'après la question 20,

$$\left| e^{i\theta Y} - 1 - i\theta Y + \frac{\theta^2 Y^2}{2} \right| \leq \frac{|\theta|^3 |Y|^3}{6}$$

donc, par croissance de l'espérance,

$$q \mathbb{E} \left(\left| e^{i\theta Y} - 1 - i\theta Y + \frac{\theta^2 Y^2}{2} \right| \right) \leq \frac{|\theta|^3 \mathbb{E}(|Y|^3)}{6}$$

Or, d'après la question 19, $\mathbb{E}(|Y|^3) \leq \mathbb{E}(Y^4)^{\frac{3}{4}}$ donc

$$\left| \Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| \leq \frac{|\theta|^3}{6} \mathbb{E}(Y^4)^{\frac{3}{4}} \leq \frac{|\theta|^3}{3} \mathbb{E}(Y^4)^{\frac{3}{4}}$$

22 En utilisant à nouveau l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall u \in \mathbb{R}_-, |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2}$$

car pour tout $u \in \mathbb{R}^-$, $0 < \exp''(u) = e^u \leq 1$. Notamment, en utilisant la question 19,

$$\left| \exp \left(-\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right) - 1 - \frac{\theta^2 \mathbb{E}(Y^2)}{2} \right| \leq \frac{\theta^4 \mathbb{E}(Y^2)^2}{8} \leq \frac{\theta^4 \mathbb{E}(Y^4)}{8}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left| \Phi_Y(\theta) - \exp \left(-\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right) \right| \leq \left| \Phi_Y(\theta) - 1 - \frac{\theta^2 \mathbb{E}(Y^2)}{2} \right| + \left| 1 + \frac{\theta^2 \mathbb{E}(Y^2)}{2} - \exp \left(-\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right) \right| \leq \frac{|\theta|^3}{3} \mathbb{E}(Y^4)^{\frac{3}{4}} + \frac{\theta^4}{8} \mathbb{E}(Y^4)$$

23 On raisonne par récurrence sur n . L'inégalité est clairement vraie lorsque $n = 1$. Supposons-le vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Donnons-nous des complexes $z_1, \dots, z_{n+1}, u_1, \dots, u_{n+1}$ de module inférieur ou égal à 1. Alors

$$\prod_{k=1}^{n+1} z_k - \prod_{k=1}^{n+1} u_k = z_{n+1} \left(\prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n u_k \right) + (z_{n+1} - u_{n+1}) \prod_{k=1}^n u_k$$

Par inégalité triangulaire

$$\left| \prod_{k=1}^{n+1} z_k - \prod_{k=1}^{n+1} u_k \right| \leq |z_{n+1}| \left| \prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n u_k \right| + |z_{n+1} - u_{n+1}| \prod_{k=1}^n |u_k|$$

Puisque les z_k et les u_k sont de module inférieur ou égal à 1,

$$\left| \prod_{k=1}^{n+1} z_k - \prod_{k=1}^{n+1} u_k \right| \leq \left| \prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n u_k \right| + |z_{n+1} - u_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k - u_k|$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

24 D'après la question 14 avec $a = k$, $b = -k\mathbb{E}(Z_k) = -\frac{k}{1-e^{-kt}}$, $p = 1 - e^{-kt}$ et $q = 1 - p = e^{-kt}$,

$$\Phi_{Y_k}(\theta) = \frac{(1 - e^{-kt})e^{\frac{-i\theta k e^{-kt}}{1-e^{-kt}}}}{1 - e^{-kt}e^{ki\theta}}$$

donc

$$\prod_{k=1}^n \Phi_{Y_k}(\theta) = \frac{\prod_{k=1}^n (1 - e^{-kt})}{\prod_{k=1}^n (1 - e^{-k(t-i\theta)})} \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{-i\theta k e^{-kt}}{1 - e^{-kt}}\right)$$

On sait que

$$\begin{aligned} P(e^{-t}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - e^{-kt}} \\ P(e^{-t+i\theta}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - e^{-k(t-i\theta)}} \\ m_t &= S_{1,1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k e^{-kt}}{1 - e^{-kt}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \Phi_{Y_k}(\theta) = \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})} \exp(-i\theta m_t) = h(t, \theta)$$

25 D'après la question 23, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \prod_{k=1}^n \Phi_{Y_k}(\theta) - \prod_{k=1}^n \exp\left(-\frac{k^2 e^{-kt}(1 - e^{-kt})^2 \theta^2}{2}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{k^2 e^{-kt}(1 - e^{-kt})^2 \theta^2}{2}\right) \right|$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\left| h(t, \theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2 \theta^2}{2}} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{k^2 e^{-kt}(1 - e^{-kt})^2 \theta^2}{2}\right) \right|$$

sous réserve de convergence du majorant. Comme $Z_k \sim \mathcal{G}(1 - e^{-kt})$,

$$\mathbb{E}(Y_k^2) = k^2 \mathbb{V}(Z_k) = \frac{k^2 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2}$$

de sorte que

$$\left| h(t, \theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2 \theta^2}{2}} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}(Y_k^2) \theta^2}{2}\right) \right|$$

D'après la question 22,

$$\left| h(t, \theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2 \theta^2}{2}} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\theta|^3}{3} (\mathbb{E}(Y_k^4))^{3/4} + \frac{\theta^4}{8} \mathbb{E}(Y_k^4)$$

D'après la question 18,

$$\mathbb{E}(Y_k^4) = k^4 \mathbb{E}((Z_k - \mathbb{E}(Z_k))^4) \leq \frac{Kk^4 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^4}$$

donc

$$\left| h(t, \theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2 \theta^2}{2}} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\theta|^3}{3} \cdot \frac{K^{\frac{3}{4}} k^3 e^{-\frac{3kt}{4}}}{(1 - e^{-kt})^3} + \frac{\theta^4}{8} \cdot \frac{Kk^4 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^4} = \frac{|\theta|^3}{3} K^{\frac{3}{4}} S_{3, \frac{3}{4}}(t) + \frac{\theta^4}{8} KS_{4,1}(t) \leq |\theta|^3 K^{\frac{3}{4}} S_{3, \frac{3}{4}}(t) + \theta^4 KS_{4,1}(t)$$

26 D'après la question 11,

$$S_{2,1}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{t^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} dx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

En utilisant le résultat admis à la question 12,

$$S_{2,1}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{\pi^2}{3t^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

A fortiori

$$S_{2,1}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi^2}{3t^3}$$

puis

$$\sigma_t = \sqrt{S_{2,1}(t)} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{3/2}}$$

En prenant $\theta = \frac{u}{\sigma_t}$ dans la question 25, on obtient :

$$\left| h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) - e^{-u^2/2} \right| \leq K^{3/4} \frac{|u|^3}{\sigma_t^3} S_{3,3/4}(t) + K \frac{u^4}{\sigma_t^4} S_{4,1}(t)$$

D'après la question 11,

$$S_{3,3/4}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^4}\right) \quad \text{et} \quad S_{4,1}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^5}\right)$$

Puisque $\sigma_t \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{3/2}}$,

$$\frac{S_{3,3/4}(t)}{\sigma_t^3} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(\sqrt{t}) \quad \text{et} \quad \frac{S_{4,1}(t)}{\sigma_t^4} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(t)$$

Finalement,

$$h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) - e^{-u^2/2} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(\sqrt{t})$$

puis

$$h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} e^{-u^2/2}$$

D'après les questions 11 et 12

$$m_t = S_{1,1}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{\pi^2}{6t^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$$

Comme $\sigma_t \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{3/2}}$,

$$\frac{u}{\sigma_t} \left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2} \right) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(\sqrt{t})$$

Notamment

$$\frac{u}{\sigma_t} \left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2} \right) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$$

puis

$$\zeta(t, u) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 1$$

On obtient in fine

$$j(t, u) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} e^{-u^2/2}$$

27 Puisque $1 - \cos \theta \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \frac{\theta^2}{2}$, la fonction $\psi : \theta \mapsto \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$ peut se prolonger en une fonction continue sur le segment $[-\pi, \pi]$. Elle y a donc un minimum α . Puisque ψ est strictement positive sur $[-\pi, \pi]$ ($\psi(0) = \frac{1}{2} > 0$), $\alpha > 0$. On en déduit que pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, $1 - \cos \theta \geq \alpha \theta^2$.

Remarquons déjà que

$$\forall t > 0, \forall \theta \in [-\pi, \pi], |h(t, \theta)| = \left| \frac{P(e^{-t} e^{i\theta})}{P(e^{-t})} \right|$$

D'après la question 9, dès que $e^{-t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ i.e. $t \in]0, \ln 2]$,

$$|h(t, \theta)| \leq \exp\left(-\frac{1 - \cos \theta}{6(1 - e^{-t})^3}\right) \text{ ou } |h(t, \theta)| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1 - e^{-t})}\right)$$

D'après ce qui précède, on a donc

$$|h(t, \theta)| \leq \exp\left(-\frac{\alpha \theta^2}{6(1 - e^{-t})^3}\right) \text{ ou } |h(t, \theta)| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1 - e^{-t})}\right)$$

Par convexité de l'exponentielle, $e^{-t} \geq 1 - t$ i.e. $0 < 1 - e^{-t} \leq t$ pour $t > 0$. On en déduit que

$$|h(t, \theta)| \leq \exp\left(-\frac{\alpha \theta^2}{6t^3}\right) \text{ ou } |h(t, \theta)| \leq \exp\left(-\frac{1}{3t}\right)$$

Or $\sigma_t \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}t^{3/2}}$ donc il existe $t_0 \in]0, \ln 2]$ tel que

$$\forall t \in]0, t_0], \sigma_t \leq \frac{3}{2\sqrt{3}t^{3/2}}$$

Ainsi il existe des constantes A et B strictement positives telles que pour tout $t \in]0, t_0]$,

$$\frac{1}{6t^3} \geq A\sigma_t^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3t} \geq B\sigma_t^{2/3}$$

On en déduit que pour tout $t \in]0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$|h(t, \theta)| \leq \exp(-\alpha A \theta^2 \sigma_t^2) \text{ ou } |h(t, \theta)| \leq \exp(-B \sigma_t^{2/3})$$

Enfin, pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\frac{|\theta|}{\pi} \leq 1$ i.e. $\frac{|\theta|^{2/3}}{\pi^{2/3}} \leq 1$ donc pour tout $t \in]0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$|h(t, \theta)| \leq \exp(-\alpha A \theta^2 \sigma_t^2) \text{ ou } |h(t, \theta)| \leq \exp\left(-B \sigma_t^{2/3} \frac{|\theta|^{2/3}}{\pi^{2/3}}\right)$$

En posant $\beta = -\alpha A > 0$ et $\gamma = \frac{B}{\pi^{2/3}} > 0$, on a bien

$$|h(t, \theta)| \leq e^{-\beta(\sigma_t \theta)^2} \quad \text{ou} \quad |h(t, \theta)| \leq e^{-\gamma(\sigma_t |\theta|)^{2/3}}$$

28 Posons

$$\tilde{j}(t, u) = j(t, u) \mathbb{1}_{[-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]}(u)$$

Ainsi

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t, u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{j}(t, u) du$$

Comme $\sigma_t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} +\infty$, la question 26 permet d'affirmer que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \tilde{j}(t, u) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} e^{-u^2/2}$$

Par ailleurs, pour tout $t \in]0, t_0]$ et tout $u \in [-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]$, on a d'après la question 27,

$$|j(t, u)| = \left| h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) \right| \leq \max(e^{-\beta u^2}, e^{-\gamma u^{2/3}})$$

Comme $u \mapsto \tilde{j}(t, u)$ est nulle en dehors du segment $[-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]$, on a donc

$$\forall t \in]0, t_0], \forall u \in \mathbb{R}, |\tilde{j}(t, u)| \leq \max(e^{-\beta u^2}, e^{-\gamma u^{2/3}})$$

Or la fonction $u \mapsto \max(e^{-\beta u^2}, e^{-\gamma u^{2/3}})$ est intégrable sur \mathbb{R} . Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{j}(t, u) du \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du$$

ou encore

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t, u) du \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \sqrt{2\pi}$$

en utilisant le résultat admis en début d'énoncé.

29 D'après la question 7,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0, p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})} d\theta = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m_t-n)\theta} h(t, \theta) d\theta$$

On prend $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ i.e. $n = \frac{\pi^2}{6t^2}$ comme l'indique l'énoncé. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(i\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\theta\right) h(t, \theta) d\theta$$

On effectue alors le changement de variable $u = \sigma_t \theta$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi\sigma_t} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} \exp\left(i\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) du = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi\sigma_t} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t, u) du$$

D'après la question précédente,

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t, u) du \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \sqrt{2\pi}$$

De plus,

$$e^{nt} = \exp\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}\right)$$

D'après l'équivalent admis,

$$\begin{aligned} P(e^{-t}) &\underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \exp\left(\frac{\pi^2}{6t}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}(6n)^{1/4}} \exp\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}\right) \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \sigma_t &\underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{3/2}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(6n)^{3/4}}{\sqrt{3\pi}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}(6n)^{1/4}} \exp\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3\pi}}{(6n)^{3/4}} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n}$$