Devoir à la maison n°11

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Centrale Maths I PC 2019

Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On note $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

La matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{M}^\top$.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathcal{A}$. (Remarquer qu'on ne demande pas que Id_{E} appartienne à $\mathcal{A}$).

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est *commutative* si pour tous u et v dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout u de $\mathcal{A}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}$, $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{A}$, $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'application $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(\mathrm{E}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est *strict* si F est différent de E.

On désigne par $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

I Exemples de sous-algèbres

I.A Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\boxed{1}$ Les sous-ensembles $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

$\boxed{2}$ Les sous-ensembles $\mathrm{S}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?

$\boxed{3}$ On suppose $n \geq 3$. Les sous-ensembles $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

I.B Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F, c'est-à-dire $\mathcal{A}_\mathrm{F} = \{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mid u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}\}$.

$\boxed{4}$ Montrer que $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

$\boxed{5}$ Montrer que $\dim \mathcal{A}_\mathrm{F} = n^2 - pn + p^2$.
On pourra considérer une base de E *dans laquelle la matrice de tout élément de* $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ *est triangulaire par blocs.*

$\boxed{6}$ Déterminer $\max\limits_{1\leq p\leq n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

I.C Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

$\boxed{7}$ Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

$\boxed{8}$ Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{9}$ Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geq 2$.
Pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i, j) de $\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geq j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $\mathrm{J} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \dots n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

II.A Calcul des puissances de J

10 Préciser les matrices J et J^2. (on pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n \geq 3$).

11 Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leq k \leq n-1$.

12 Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ et les J^k, où $0 \leq k \leq n-1$?

II.B Une base de $\mathcal{A}$

13 Montrer que $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.

14 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.

15 Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.C Diagonalisation de J

16 Déterminer le polynôme caractéristique de J.

17 Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

18 La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

19 Déterminer les valeurs propres complexes de J et les espaces propres associés.

II.D Diagonalisation de $\mathcal{A}$

20 Le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

21 Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

22 Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$?

III Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égale à $n^2 - n + 1$.

Dans toute cette partie, $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ strictement incluse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note d sa dimension. On a donc $d < n^2$.

III.A Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

La trace de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée tr(M).

23 Montrer que l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $(A, B) \mapsto \langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On désigne $\mathcal{A}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note r sa dimension.

24 Quelle relation a-t-on entre d et r ?

Jusqu'à la fin de cette partie, on fixe une base $(A_1, \dots, A_r)$ de $\mathcal{A}^\perp$.

25 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\langle A_i \mid M \rangle = 0$.

26 Montrer que pour toute matrice $N \in \mathcal{A}$ et tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $N^\top A_i \in \mathcal{A}^\perp$.

III.B Conclusion

Soit $\mathcal{A}^\top = \{M^\top \mid M \in \mathcal{A}\}$.

27 Montrer que $\mathcal{A}^\top$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que $\mathcal{A}$.

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. On rappelle qu'à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est associé canoniquement l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X \mapsto MX$.

28 Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $F = \text{vect}(A_1X, \dots, A_rX)$. Montrer que F est stable par les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{A}^\top$.

29 Montrer que $d \leq n^2 - n + 1$ et conclure.

IV Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie V.

Théorème de Burnside

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E, alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents, alors $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

30 Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geq 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leq n - 1$.

31 Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

32 Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$

où $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(u)$.

33 Montrer que $\{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\{D(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

34 Montrer que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

35 Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des éléments de $\mathcal{A}$ appartiennent à $T_n^+(\mathbb{C})$.

V Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie IV.

On fixe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$.

On dira qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

V.A Recherche d'un élément de rang 1

36 Soient x et y deux éléments de E, x étant non nul. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.
On pourra considérer dans E *le sous-espace vectoriel* $\{u(x) \mid u \in \mathcal{A}\}$.

37 Soit $v \in \mathcal{A}$ de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$0 < \operatorname{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \operatorname{rg}(v)$$

Considérer x *et* y *dans* E *tels que la famille* $(v(x), v(y))$ *soit libre, justifier l'existence de* $u \in \mathcal{A}$ *tel que* $u \circ v(x) = y$ *et considérer l'endomorphisme induit par* $v \circ u$ *sur* $\operatorname{Im}(v)$.

38 En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans $\mathcal{A}$.

V.B Conclusion

Soit $u_0 \in \mathcal{A}$ de rang 1. On peut donc choisir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ soit une base de $\ker u_0$.

39 Montrer qu'il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

40 Conclure.