

# DEVOIR SURVEILLÉ N°06

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

**1** Remarquons que deux endomorphismes semblables ont même trace. En effet, pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\varphi \in GL(E)$ , on a par propriété de la trace

$$\text{tr}(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}) = \text{tr}(\varphi^{-1} \circ \varphi \circ u) = \text{tr}(u)$$

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant (C3). Par linéarité de la trace,  $\text{tr}(u) = \text{tr}(-u) = -\text{tr}(u)$  i.e.  $\text{tr}(u) = 0$ .

Si  $u$  vérifie (C3) alors  $\text{tr}(u) = 0$

**2**  $E$  étant de dimension 2,  $\chi_u = X^2 - \text{tr}(u)X + \det(u) = X^2 - \delta^2$ . Ce polynôme annulant  $u$  (Cayley-Hamilton) on en déduit que  $u^2 = \delta^2 \text{Id}_E$ .

Le spectre est l'ensemble des racines de  $\chi_u$  et vaut ici  $\{\delta, -\delta\}$ . Ainsi  $u$  possède deux valeurs propres. Or  $\dim E = 2$  et les sous-espaces propres de  $u$  sont en somme directe, ils ne peuvent qu'être de dimension 1.

$$u^2 = \delta^2 \text{Id}_E, \text{Sp}(u) = \{\delta, -\delta\}, \dim(E_\delta(u)) = \dim(E_{-\delta}(u)) = 1$$

**3** Notons  $e_+$  un vecteur propre pour  $\delta$  et  $e_-$  un vecteur propre pour  $-\delta$ . Comme  $(e_+, e_-)$  est libre,  $e_+ + e_- \neq 0_E$ . Ainsi  $D = \text{vect}(e_+ + e_-)$  est une droite. De plus,  $u(D) = \text{vect}(\delta e_+ - \delta e_-) = \text{vect}(e_+ - e_-)$  car  $\delta \neq 0$ . Or  $(e_+, e_-)$  est libre, ce qui permet de prouver aisément que  $e_+ - e_- \notin D$ . Ainsi  $u(D) \not\subset D$ .

Posons  $F = D = \text{vect}(e_+ + e_-)$  et  $G = u(D) = \text{vect}(e_+ - e_-)$ . La liberté de  $(e_+, e_-)$  permet aisément de montrer la liberté de  $(e_+ + e_-, e_+ - e_-)$ . Comme  $\dim E = 2$ ,  $(e_+ + e_-, e_+ - e_-)$  est une base de  $E$  de sorte que  $E = F \oplus G$ . Enfin,  $u(F) = G$  et  $u(G) = F$ .

$u$  est échangeur

**4** Un calcul par blocs montre que

$$\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} = 0_{n+p}$$

On montre de même que

$$\begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} = 0_{n+p}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} \text{ est somme de deux matrices de carré nul}$$

**5** On vérifie par un calcul par blocs, par exemple, que  $D^2 = I_n$ .  $D$  est donc inversible et  $D^{-1} = D$ . Le calcul par blocs donne aussi

$$DMD^{-1} = DMD = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ -A & 0_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -B \\ -A & 0_p \end{pmatrix} = -M$$

Par définition de la similitude,

$M$  et  $-M$  sont semblables

**6** Notons  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  et  $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_p)$ . Comme  $u(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G}$ , on peut poser  $A = \text{mat}_{\mathcal{G}}(u(\mathcal{F})) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$  et comme  $u(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F}$ , on peut poser  $B = \text{mat}_{\mathcal{F}}(u(\mathcal{G})) \in \mathcal{M}_{n,p}$ . On a alors  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$ . Finalement,

il existe  $(A, B) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  tel que  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$

**7** Supposons  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  non nuls. D'après la question précédente, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est  $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$ . En notant  $a$  et  $b$  les endomorphismes dont les matrices dans la base  $\mathcal{B}$  sont respectivement  $\begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ , on a bien  $u = a + b$ ,  $a^2 = b^2 = 0$  :  $u$  vérifie **(C2)**. La question 5 montre de même que  $u$  et  $-u$  sont semblables :  $u$  vérifie **(C3)**.

Si  $\mathcal{F}$  est nul, alors  $\mathcal{G} = E$  et  $\text{Im}(u) = u(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F} = \{0\}$ .  $u$  est l'endomorphisme nul qui vérifie immédiatement **(C2)** et **(C3)**. C'est la même chose si  $\mathcal{G} = \{0\}$  (travailler alors avec  $\mathcal{F} = E$ ).

$u$  vérifie **(C2)** et **(C3)**

**8** Puisque  $f^2 = 0$ ,  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ . Par conséquent,  $\dim \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ . D'après le théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \leq 2 \dim(\text{Ker}(f))$$

On a donc

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \text{ et } \dim(\text{Ker}(f)) \geq \frac{\dim(E)}{2}$$

**9** Soit  $x \in \text{Ker}(a) \cap \text{Ker}(b)$ . On a  $u(x) = a(x) + b(x) = 0$  et comme  $u$  est injective  $x = 0$ . Ceci montre que  $\text{Ker}(a)$  et  $\text{Ker}(b)$  sont en somme directe.

De plus,

$$\forall x \in E, x = u(u^{-1}(x)) = a(u^{-1}(x)) + b(u^{-1}(x)) \in \text{Ker}(a) + \text{Ker}(b)$$

car  $a^2 = b^2 = 0$ . Ainsi

$$E = \text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)$$

De plus  $\text{Im}(a) \subset \text{Ker}(a)$  (car  $a^2 = 0$ ) et  $\text{Im}(b) \subset \text{Ker}(b)$  (car  $b^2 = 0$ ). Ainsi  $\text{Im}(a) \cap \text{Im}(b) \subset \text{Ker}(a) \cap \text{Ker}(b) = \{0_E\}$ .  $\text{Im}(a)$  et  $\text{Im}(b)$  sont en somme directe.

De plus,

$$\forall x \in E, x = u(u^{-1}(x)) = a(u^{-1}(x)) + b(u^{-1}(x)) \in \text{Im}(a) + \text{Im}(b)$$

donc  $E = \text{Im}(a) \oplus \text{Im}(b)$ .

Ainsi

$$\dim E = \dim \text{Im}(a) + \dim \text{Im}(b) = \dim \text{Ker}(a) + \dim \text{Ker}(b)$$

d'où

$$(\dim \text{Ker}(a) - \dim \text{Im}(a)) + (\dim \text{Ker}(b) - \dim \text{Im}(b)) = 0$$

Comme  $\text{Im}(a) \subset \text{Ker}(a)$  et  $\text{Im}(b) \subset \text{Ker}(b)$ , il s'agit d'une somme de deux termes positifs. On en déduit que ces termes sont nuls. Ainsi  $\dim \text{Im}(a) = \dim \text{Ker}(a)$  et  $\dim \text{Im}(b) = \dim \text{Ker}(b)$ . Par conséquent,

$$\text{Im}(a) = \text{Ker}(a) \text{ et } \text{Im}(b) = \text{Ker}(b)$$

**10** On a  $u(\text{Ker}(a)) \subset a(\text{Ker}(a)) + b(\text{Ker}(a)) = b(\text{Ker}(a)) \subset \text{Im}(b) = \text{Ker}(b)$  et de même  $u(\text{Ker}(b)) \subset \text{Ker}(a)$ . Comme  $\text{Ker}(a)$  et  $\text{Ker}(b)$  sont supplémentaires dans  $E$ ,

$u$  est échangeur

**11** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Ker}(v^k) \subset \text{Ker}(v \circ v^k) = \text{Ker}(v^{k+1})$  donc

$$(\text{Ker}(v^k))_{k \in \mathbb{N}} \text{ croît pour l'inclusion}$$

**12** L'ensemble  $\{\dim \text{Ker}(v^k), k \in \mathbb{N}\}$  est une partie de  $\mathbb{N}$  majorée par  $\dim E$ . Elle admet donc un plus grand élément  $d$ . Il existe donc  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Ker}(v^p) = d$ . Pour  $k \geq p$ ,  $\text{Ker}(v^p) \subset \text{Ker}(v^k)$ . Ainsi  $d = \dim \text{Ker}(v^p) \leq \dim \text{Ker}(v^k)$ . Mais par définition de  $d$ ,  $\dim \text{Ker}(v^k) \leq d$  de sorte que  $\dim \text{Ker}(v^k) = \dim \text{Ker}(v^p) = d$  puis  $\text{Ker}(v^k) = \text{Ker}(v^p)$  puisque  $\text{Ker}(v^p) \subset \text{Ker}(v^k)$ .

On peut conclure que

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall k \geq p, \text{Ker}(v^k) = \text{Ker}(v^p)$$

Mais pour  $k < p$ ,  $\text{Ker}(v^k) \subset \text{Ker}(v^p)$  par croissance de la suite  $(\text{Ker}(v^k))$ . Finalement,

$$\text{Ker}(v^p) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(v^k)$$

Si  $p$  convient, tout entier plus grand que  $p$  convient aussi et on peut supposer  $p$  pair quitte à le changer en  $p + 1$ .

**13** Par définition,

$$\text{Ker}(v^{2p}) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(v^k) = \text{Ker } v^p$$

De plus, par croissance de la suite  $(\text{Ker}(v^k))_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\text{Ker}(v^p) \subset \text{Ker}(v^{2p})$ . Ainsi

$$E_\lambda^c(f) = \text{Ker}(v^p) = \text{Ker}(v^{2p})$$

Soit  $x \in E_\lambda^c(f) \cap \text{Im}(v^p)$ . Il existe  $y$  tel que  $x = v^p(y)$  et  $v^{2p}(y) = v^p(x) = 0$  montre que  $y \in \text{Ker}(v^{2p}) = \text{Ker}(v^p)$  et donc que  $x = v^p(y) = 0$ . On a donc  $E_\lambda^c(f) \cap \text{Im}(v^p) = \{0_E\}$ .

Par théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(v^p) + \dim \text{Im}(v^p) = \dim E$$

Ainsi

$$E = \text{Ker}(v^p) \oplus \text{Im}(v^p) = E_\lambda^c(f) \oplus \text{Im}(v^p)$$

Enfin,  $v^p = (f - \lambda \text{Id}_E)^p$  et  $f$  appartiennent à l'algèbre commutative  $\mathbb{K}[f]$ . Comme  $v^p = (f - \lambda \text{Id}_E)^p$  et  $f$  commutent,  $\text{Ker}(v^p) = E_\lambda^c(f)$  et  $\text{Im}(v^p)$  sont stables par  $f$ .

$$E_\lambda^c(f) \text{ et } \text{Im}(v^p) \text{ sont des supplémentaires de } E \text{ stables par } f.$$

**14** Supposons, par l'absurde, que  $\lambda$  soit valeur propre de  $f|_{\text{Im}(v^p)}$ . Il existe alors  $x \in \text{Im}(v^p)$  non nul tel que  $f(x) = \lambda x$  c'est à dire tel que  $x \in \text{Ker}(v) \subset E_\lambda^c(f)$ . Comme  $E_\lambda^c(f)$  et  $\text{Im}(v^p)$  sont en somme directe,  $x = 0$  et ceci est contradictoire. Ainsi  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $f|_{\text{Im}(v^p)}$ .

$(X - \lambda)^p$  annule  $f|_{E_\lambda^c(f)}$  car  $E_\lambda^c(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)^p$ . La seule valeur propre possible pour  $f|_{E_\lambda^c(f)}$  est donc  $\lambda$ .

$$\lambda \notin \text{Sp}(f|_{\text{Im}(v^p)}) \text{ et } \text{Sp}(f|_{E_\lambda^c(f)}) \subset \{\lambda\}$$

Si  $E_\lambda^c(f)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , alors  $f|_{E_\lambda^c(f)}$  possède au moins une valeur propre car son polynôme caractéristique est scindé dans  $\mathbb{C}$ . Ainsi  $\text{Sp}(f|_{E_\lambda^c(f)}) = \{\lambda\}$ .

**15** On sait qu'il existe deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $E_\lambda^c(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)^p$  et  $E_\mu^c(f) = \text{Ker}(f - \mu \text{Id}_E)^q$ . Comme  $\lambda \neq \mu$ ,  $(X - \lambda)^p$  et  $(X - \mu)^q$  sont premiers entre eux et le lemme des noyaux nous dit alors que  $E_\lambda^c(f)$  et  $E_\mu^c(f)$  sont en somme directe.

Les seules valeurs propres possibles de  $f$  sont  $\lambda$  et  $\mu$ . Comme  $\chi_f$  est scindé dans  $\mathbb{C}$ , il existe des entiers  $q$  et  $r$  tels que

$$\chi_f = (X - \lambda)^r (X - \mu)^s$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$E = \text{Ker} \chi_f$$

Comme  $(X - \lambda)^r$  et  $(X - \mu)^s$  sont premiers entre eux, le lemme des noyaux donne

$$E = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)^q \oplus \text{Ker}(f - \mu \text{Id}_E)^r$$

Comme  $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)^q \subset E_\lambda^c(f)$  et  $\text{Ker}(f - \mu \text{Id}_E)^r \subset E_\mu^c(f)$  par définition, on obtient

$$E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)$$

**16** Tout d'abord,

$$u^2 = a^2 + a \circ b + b \circ a + b^2 = a \circ b + b \circ a$$

Ainsi

$$u^2 \circ a = a^2 \circ b + a \circ b \circ a = a \circ b \circ a$$

et

$$a \circ u^2 = a \circ b \circ a + b \circ a^2 = a \circ b \circ a$$

de sorte que

$$a \circ u^2 = u^2 \circ a$$

On montre de la même manière que

$$b \circ u^2 = u^2 \circ b$$

**17** Comme  $a$  commute avec  $u^2$ , il commute avec toutes les itérées de  $u^2$  et donc avec  $u^p$  puisque  $p$  est pair. On en déduit que  $G = \text{Im}(u^p)$  est stable par  $a$ . On montre de même que  $G$  est stable par  $b$ . Comme  $a^2 = b^2 = 0$ , on en déduit que

$$a_G^2 = b_G^2 = 0$$

**18** Notons  $F = E_0^c(u)$ .  $F$  et  $G$  sont stables par  $u$ .

D'après la question **14**,  $0$  est la seule valeur propre de l'endomorphisme  $u_F$  de  $F$  induit par  $u$  donc  $u_F$  est nilpotent.

Toujours d'après la question **14**,  $0$  n'est pas valeur propre l'endomorphisme  $u_G$  de  $G$  induit par  $u$  donc  $u_G$  est inversible.

D'après le résultat admis, il existe une décomposition  $F = F_1 \oplus F_2$  telle que  $u(F_1) \subset F_2$  et  $u(F_2) \subset F_1$ .

Avec la question précédente,  $u_G$  vérifie **(C2)** et comme c'est un automorphisme, la troisième partie s'applique. Il existe une décomposition  $G = G_1 \oplus G_2$  telle que  $u(G_1) \subset G_2$  et  $u(G_2) \subset G_1$ .

Comme  $F$  et  $G$  sont en somme directe, on montre aisément que  $F_1$  et  $G_1$  sont en somme directe de même que  $F_2$  et  $G_2$ . En posant  $H_1 = F_1 \oplus G_1$  et  $H_2 = F_2 \oplus G_2$ , on a bien

$$E = F \oplus G = (F_1 \oplus F_2) \oplus (G_1 \oplus G_2) = (F_1 \oplus G_1) \oplus (F_2 \oplus G_2) = H_1 \oplus H_2$$

et

$$u(H_1) = u(F_1) + u(G_1) \subset F_2 + G_2 = H_2 \quad \text{et} \quad u(H_2) = u(F_2) + u(G_2) \subset F_1 + G_1 = H_1$$

$$u \text{ est échangeur}$$

**19** Puisque  $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ , on a également  $-u \circ \varphi = \varphi \circ u$ . On en déduit que

$$\varphi^2 \circ u = \varphi \circ (\varphi \circ u) = -\varphi \circ u \circ \varphi = -(\varphi \circ u) \circ \varphi = u \circ \varphi^2$$

$$\varphi^2 \circ u = u \circ \varphi^2$$

**20** Comme  $E$  est  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel,  $\varphi^2$  possède une valeur propre  $\lambda$ . La question **13** donne  $E = E_\lambda^c(\varphi^2) \oplus \text{Im}(v^p)$  où  $v = \varphi^2 - \lambda \text{Id}_E$  et  $E_\lambda^c(\varphi^2) = \text{Ker } v^p$  pour un bon entier  $p$ .

Notons  $F = \text{Ker}(v^p)$  et  $G = \text{Im}(v^p)$ .  $F$  et  $G$  sont stables par  $\varphi$  puisque  $\varphi$  commute avec  $v^p$ . Comme  $u$  commute avec  $\varphi^2$  et donc avec  $v^p$ , ils sont également stables par  $u$ .

Comme  $F$  et  $G$  sont stables par  $\varphi$  et  $u$ , on vérifie aisément que les endomorphismes  $u_F$  et  $u_G$  induits par  $u$  vérifient encore la condition **(C3)**.

L'indécomposabilité de  $u$  indique alors que  $F$  ou  $G$  est nul. Comme  $\lambda$  est valeur propre de  $\varphi^2$ ,  $F$  n'est pas nul donc  $G = \text{Im } v^p$  l'est. On en déduit que  $(X - \lambda)^p$  est un polynôme annulateur de  $\varphi^2$  puis que  $\lambda$  est l'unique valeur propre de  $\varphi^2$ . Comme  $\varphi$  est inversible,  $\varphi^2$  l'est également et  $\lambda \neq 0$ .

Soit  $\alpha$  une racine carrée (complexe) de  $\lambda$ . Puisque  $\lambda \neq 0$ ,  $\alpha \neq 0$ . De plus,  $(X^2 - \lambda)^p = (X - \alpha)^p(X + \alpha)^p$  annule  $\varphi$  donc  $\text{Sp}(\varphi) \subset \{-\alpha, \alpha\}$ .

$$\text{Sp}(\varphi) \subset \{\alpha, -\alpha\} \text{ avec } \alpha^2 = \lambda \neq 0 \text{ unique valeur propre de } \varphi^2$$

**21** Comme  $\alpha \neq -\alpha$  et  $\text{Sp}(\varphi) \subset \{-\alpha, \alpha\}$ , on peut appliquer la question **15** et obtenir

$$E = E_{\alpha}^c(\varphi) \oplus E_{-\alpha}^c(\varphi)$$

Montrons ensuite que  $u(E_{\alpha}^c(\varphi)) \subset E_{-\alpha}^c(\varphi)$  et  $u(E_{-\alpha}^c(\varphi)) \subset E_{\alpha}^c(\varphi)$ .

Notons que l'hypothèse **(C3)** donne  $u \circ \varphi = -\varphi \circ u$  puis

$$u \circ (\varphi - \alpha \text{Id}_E) = -(\varphi + \alpha \text{Id}_E) \circ u$$

On montre alors aisément par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u \circ (\varphi - \alpha \text{Id}_E)^k = (-1)^k (\varphi + \alpha \text{Id}_E)^k \circ u$$

On sait qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $E_{\alpha}^c(\varphi) = \text{Ker}(\varphi - \alpha \text{Id}_E)^p$ . La relation précédente appliquée à  $k = p$  donne  $u(E_{\alpha}^c(\varphi)) \subset E_{-\alpha}^c(\varphi)$ . De même, en appliquant la relation précédente à  $k = q$  où  $E_{-\alpha}^c(\varphi) = \text{Ker}(\varphi + \alpha \text{Id}_E)^q$ , on obtient  $u(E_{-\alpha}^c(\varphi)) \subset E_{\alpha}^c(\varphi)$ .

$u$  est échangeur

**22** On procède par récurrence sur la dimension de l'espace.

**Initialisation.** On suppose que  $u$  est un endomorphisme d'un espace  $E$  de dimension 1 qui vérifie **(C3)**. Comme  $\dim E = 1$ , l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  est commutative et la condition **(C3)** donne  $u = 0$ . On peut alors considérer la décomposition  $E = E \oplus \{0_E\}$  pour en conclure que  $u$  est échangeur.

**Hérédité :** supposons le résultat vrai jusqu'au rang  $n$ . Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace  $E$  de dimension  $n + 1$  et qui vérifie **(C3)**. Si  $u$  est indécomposable, il est échangeur avec ce qui précède.

Sinon, il existe une décomposition  $E = F \oplus G$  avec  $F$  et  $G$  non nuls stables par  $u$  et tels que  $u_F$  et  $u_G$  vérifient **(C3)**. L'hypothèse de récurrence s'applique à  $u_F$  et  $u_G$  et permet de décomposer  $F$  et  $G$ . Comme en question **18**, on en déduit une décomposition de  $E$  qui montre que  $u$  est échangeur.

**(C3) implique (C1)**