

# DEVOIR À LA MAISON N°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

- 1** On sait que la convergence absolue d'une intégrale impropre implique sa convergence. On en déduit que  $E \subset E'$ .
- 2** Supposons  $E$  non vide. Soit  $a \in E$ . Soit également  $x \in [a, +\infty[$ . Comme  $\lambda$  est à valeurs positives, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$|f(t)e^{-\lambda(t)x}| \leq |f(t)e^{-\lambda(t)a}|$$

Par hypothèse,  $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)a}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$  également i.e.  $x \in E$ .  
On a donc montré que pour tout  $a \in E$ ,  $[a, +\infty[ \subset E$ , ce qui signifie que  $E$  est un intervalle non majoré de  $\mathbb{R}$ .

- 3** On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Soit  $a \in E$ .

- Pour tout  $x \in [a, +\infty[$ ,  $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$  est continue sur  $[a, +\infty[$ .
- Pour tout  $(x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+$ ,

$$|f(t)e^{-\lambda(t)x}| \leq |f(t)e^{-\lambda(t)a}|$$

et  $t \mapsto |f(t)e^{-\lambda(t)a}|$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

On en déduit que  $Lf$  est continue sur  $\bigcup_{a \in E} [a, +\infty[ = E$ .

- 4** Si  $f$  est positive, pour tout  $x \in E$ , les fonctions  $t \mapsto |f(t)e^{-\lambda(t)x}|$  et  $t \mapsto e^{-\lambda(t)x}$  sont égales donc  $E = E'$ .
- 5** Dans les trois cas de figure suivants, la fonction  $f$  est positive donc  $E = E'$ .

**5.a** Comme  $\lambda$  est croissante et non majorée,  $\lim_{+\infty} \lambda = +\infty$ .

- On en déduit que  $\int_0^{+\infty} \lambda'(t) dt$ .
- Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $t \mapsto -\frac{1}{x}e^{-\lambda(t)x}$  est une primitive de  $t \mapsto \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x}$  et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x}e^{-\lambda(t)x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On en déduit que  $\int_0^{+\infty} \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x} dt$  diverge si  $x < 0$  et converge si  $x > 0$ .

On peut alors conclure que  $E = E' = \mathbb{R}_+^*$ .

**REMARQUE.** On peut aussi affirmer que si  $x > 0$ ,

$$Lf(x) = \frac{e^{-\lambda(0)x}}{x}$$

**5.b** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $t \in [x, +\infty[ \cap \mathbb{R}_+$ ,

$$e^{t\lambda(t)}e^{-\lambda(t)x} = e^{\lambda(t)(t-x)} \geq 1$$

On en déduit que  $\int_0^{+\infty} e^{t\lambda(t)}e^{-\lambda(t)x} dt$  diverge. Ainsi  $E = E' = \emptyset$ .

**5.c** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $t \in [-x, +\infty[ \cap \mathbb{R}_+$ ,

$$0 \leq \frac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2} e^{-x\lambda(t)} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Or  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  (on peut dire au choix que  $1/(1+t^2) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 1/t^2$  ou que arctan admet une limite finie en  $+\infty$ ), donc  $x \in E$ . Finalement  $E = \mathbb{R}$ .

**6** **6.a** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $x \geq 0$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$0 \leq \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $x \in E$ .

- Si  $x > 0$ , on remarque que  $\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-xt^2} t^2$  donc, quitte à poser  $u = t^2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} = +\infty$ . On peut alors par exemple minorer  $t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$  par 1 au voisinage de  $+\infty$ , ce qui prouve que  $x \notin E$ .

En conclusion,  $E = \mathbb{R}_+$ . Par ailleurs,

$$Lf(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{+\infty} \arctan - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

**6.b** Posons  $\varphi(x, t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$  pour  $(x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto \varphi(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $(x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at^2}$$

Or  $e^{-at^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o(1/t^2)$  donc  $t \mapsto e^{-at^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

On en déduit que  $Lf$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  (et a fortiori dérivable) sur  $\bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} [a, +\infty[ = \mathbb{R}_+^*$ .

**6.c** Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On sait de plus que

$$(Lf)'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

On en déduit que

$$Lf(x) - (Lf)'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$$

En effectuant le changement de variable  $u = t\sqrt{x}$  (licite car linéaire),

$$Lf(x) - (Lf)'(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}$$

en posant  $A = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ . Comme  $A$  est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non constamment nulle sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $A > 0$ .

**REMARQUE.** Avec l'égalité précédente et la continuité de  $Lf$  en 0,  $\lim_{0^+} (Lf)' = -\infty$ . D'après le théorème de la limite de la dérivée,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{Lf(x) - Lf(0)}{x - 0} = -\infty$  et donc  $Lf$  n'est pas dérivable en 0.

**6.d** D'après ce qui précède, la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, g'(t) = e^{-t}(Lf(t) - (Lf)'(t)) = \frac{Ae^{-t}}{\sqrt{t}}$$

Si l'on se donne  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , on peut alors écrire

$$g(x) - g(y) = A \int_y^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Comme  $Lf$  est continue en 0,  $g$  l'est également et  $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = g(0) = Lf(0) = \frac{\pi}{2}$ . Par ailleurs,  $\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$  converge

puisque  $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ . On en déduit que  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ .

On obtient alors l'égalité voulue en faisant tendre  $y$  vers  $0^+$  dans l'égalité initiale.

**6.e** Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$0 \leq g(x) \leq e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi e^{-x}}{2}$$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = 0$ . Avec la question précédente, on obtient la convergence et l'égalité

$$A \int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Par le changement de variable  $u = \sqrt{t}$ , on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2A$$

et donc  $A^2 = \frac{\pi}{4}$ . Comme  $A > 0$ ,  $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**7** On sait que  $e^t - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$  donc  $\lim_{t \rightarrow 0} f = 0$  et  $f$  se prolonge bien par continuité en 0.

**8** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Remarquons que  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{2}$  donc  $f(t)e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{2}e^{-xt}$ . Si  $x < 0$ , alors  $f(t)e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1/t^2)$  et  $t \mapsto f(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Si  $x \geq 0$ ,  $\frac{t}{2}e^{-xt} \geq t/2 \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  donc  $t \mapsto f(t)e^{-xt}$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

Finalement,  $E = \mathbb{R}_+^*$ .

**9** Pour  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $0 < e^{-t} < 1$  donc

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} = te^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}$$

Remarquons que pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , on obtient par double intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} te^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^2}$$

Fixons  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\int_0^{+\infty} |te^{-nt}e^{-xt}| dt = \int_0^{+\infty} te^{-(n+x)t} dt = \frac{1}{(n+x)^2}$$

et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(n+x)^2}$  converge. En vertu du théorème d'intégration terme à terme, on peut donc dire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

Puisque  $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$  et  $\int_0^{+\infty} te^{-xt} dt = \frac{1}{x^2}$ , on obtient

$$Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

**10** Si on pose  $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{(n+x)^2}$ ,  $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = \frac{1}{n^2}$  de sorte que  $\sum f_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par le théorème d'inversion série limite,  $x \mapsto Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$  admet bien une limite finie en  $0^+$ . Plus précisément,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

**11** Posons  $\varphi(x, t) = f(t)e^{-xt}$  pour  $(x, t) \in E \times \mathbb{R}_+$ .

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto f(t)e^{-xt}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]\alpha, +\infty[$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in ]\alpha, +\infty[$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) = (-t)^n f(t)e^{-xt}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Soit  $a \in ]\alpha, +\infty[$ . Pour tout  $(x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) \right| = t^n |f(t)| e^{-xt} \leq t^n |f(t)| e^{-at}$$

Comme  $\alpha = \inf E$ , il existe  $b \in E$  tel que  $c \in ]\alpha, b[$ . Alors  $t^n |f(t)| e^{-at} = o(|f(t)| e^{-bt})$  (car  $b > a$ ). Comme  $b \in E$ ,  $t \mapsto |f(t)| e^{-bt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Par domination,  $t \mapsto t^n |f(t)| e^{-at}$  l'est également.

On en déduit que  $Lf$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]\alpha, +\infty[$  et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]\alpha, +\infty[, (Lf)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} dt$$

**12** Comme  $f$  est positive,  $E = E'$ . Lorsque  $x + a > 0$ ,  $f(t)e^{-xt} = o(1/t^2)$  donc  $t \mapsto f(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Lorsque  $x + a \leq 0$ ,  $f(t)e^{-xt} \geq t^n$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  donc  $t \mapsto f(t)e^{-xt}$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . On en déduit que  $E = E' = ]-a, +\infty[$ . De plus, on prouve par intégration par parties successives que

$$\forall x \in ]-a, +\infty[, Lf(x) = \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$$

**13.a** Posons  $g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k$  de sorte que  $g(t) = o(t^{n+1})$ . Il existe donc  $M \in \mathbb{R}_+$  et  $c \in ]0, \beta]$  tels que

$$\forall t \in [0, c], |g(t)| \leq Mt^{n+1}$$

Mais la fonction  $t \mapsto g(t)/t^{n+1}$  est continue sur le segment  $[c, \beta]$  donc elle y est également bornée. On en déduit qu'il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall t \in [0, \beta], |g(t)| \leq Ct^{n+1}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_0^\beta g(t) e^{-tx} dt \right| \leq \int_0^\beta |g(t)| e^{-tx} dt \leq C \int_0^\beta t^{n+1} e^{-tx} dt \leq C \int_0^\beta t^{n+1} e^{-ct} dt = \frac{C(n+1)!}{c^{n+2}}$$

ce qui permet de conclure.

**13.b** On a vu que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-tx} dt = \frac{1}{x^{k+1}}$$

On en déduit que

$$L(f)(x) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^{k+1}} = \int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^\beta g(t) e^{-tx} dt + \int_\beta^{+\infty} g(t) e^{-tx} dt$$

D'une part, d'après la question précédente,

$$\int_0^\beta g(t) dt = o(x^{-n-2})$$

D'autre part, donnons-nous  $c \in E$ . Alors  $t \mapsto f(t)e^{-ct}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto t^k e^{-ct}$  l'est également. Ainsi  $g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  comme combinaison linéaire de telles fonctions. Remarquons alors que pour tout  $x \geq c$ ,

$$\left| \int_{\beta}^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt \right| \leq \int_{\beta}^{+\infty} |g(t)|e^{-xt} dt \leq e^{(c-x)\beta} \int_{\beta}^{+\infty} |g(t)|e^{-ct} dt \leq Me^{-\beta x}$$

en posant  $M = e^{c\beta} \int_{\beta}^{+\infty} |g(t)|e^{-ct} dt$ . On en déduit que

$$\int_{\beta}^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-\beta x})$$

A fortiori

$$\int_{\beta}^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(x^{-n-2})$$

ce qui permet de conclure.

**14** **14.a** Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors  $f(t)e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ell e^{-xt}$ . On sait que  $t \mapsto \ell e^{-xt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $t \mapsto f(t)e^{-xt}$  également. Ainsi  $x \in E$ . Finalement,  $\mathbb{R}_+^* \subset E$ .

**14.b** Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . En effectuant le changement de variable  $u = xt$ , on obtient

$$xLf(x) = \int_0^{+\infty} f(u/x)e^{-u} du$$

Pour tout  $u \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(u/x)e^{-u} = \ell e^{-u}$ . De plus,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et admet une limite finie en  $+\infty$  donc elle est bornée sur  $\mathbb{R}_+$  (résultat classique à redémontrer). On en déduit que pour tout  $(u, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ ,  $|f(u/x)e^{-u}| \leq \|f\|_{\infty} e^{-u}$ . Comme  $u \mapsto e^{-u}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xLf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(u/x)e^{-u} du = \int_0^{+\infty} \ell e^{-u} du = \ell$$

**15** Remarquons que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)| dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{n\pi} |f(t)| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Comme la série harmonique diverge vers  $+\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} |f(t)| dt = +\infty$ , de sorte que  $f$  n'est pas intégrable. Ainsi  $0 \notin E$ .

**16** On sait que  $0 \in E$  et que  $E$  est un intervalle donc  $E \subset \mathbb{R}_-^*$  ou  $E \subset \mathbb{R}_+^*$ . Mais  $E$  n'est pas majoré donc  $E \subset \mathbb{R}_+^*$ . Si  $x > 0$ ,  $f(t)e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$  donc  $x \in E$ . Ainsi  $E = ]0, +\infty[$ .

**17** Comme  $1 - \cos$  est une primitive de  $\sin$ , on obtient sous réserve de convergence

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \left[ \frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

- Puisque  $1 - \cos t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2/2$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$ .
- Comme  $1 - \cos$  est bornée,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$ .
- Puisque  $1 - \cos t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2/2$ ,  $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$  donc  $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$  est intégrable en  $0^+$ .
- Comme  $1 - \cos$  est bornée,  $\frac{1 - \cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2)$  donc  $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$  est intégrable en  $+\infty$ .

On en déduit donc la convergence des deux termes du membre de droite de l'égalité. Il en résulte que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge i.e.  $0 \in E'$ .

**18** Posons  $\varphi(x, t) = f(t)e^{-xt}$  pour  $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \varphi(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = -\sin(t)e^{-xt}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Fixons  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors pour tout  $(x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at}$$

et  $t \mapsto e^{-at}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

On en déduit que  $Lf$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, (Lf)'(x) &= - \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt \\ &= -\operatorname{Im} \left( \int_0^{+\infty} e^{it} e^{-xt} dt \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left( \int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left( \frac{1}{x-i} \right) = -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

**19** Il existe donc une constante  $C$  telle que

$$\forall x \in E, Lf(x) = C - \arctan(x)$$

Par ailleurs,  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$  (continue et de limite finie en  $+\infty$ ) donc on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |Lf(x)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt} dt \leq \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{\|f\|_\infty}{x}$$

de sorte que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} Lf = 0$ . On en déduit que  $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$ . Finalement,

$$\forall x \in E, Lf(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

**20** Tout d'abord,  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  puisque  $E' = \mathbb{R}_+$ .

Par le changement de variable  $u = t - n\pi$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \int_0^\pi \frac{\sin(u+n\pi)}{u+n\pi} e^{-(u+n\pi)x} du = (-1)^n e^{-n\pi x} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+n\pi} e^{-ux} du$$

Fixons  $x \in \mathbb{R}_+$  et posons  $u_n = e^{-n\pi x} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+n\pi} e^{-ux} du$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq e^{-(n+1)\pi x} \leq e^{-n\pi x}$$

et, comme  $\sin$  est positive sur  $[0, \pi]$ ,

$$0 \leq \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+(n+1)\pi} e^{-ux} du \leq \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+n\pi} e^{-ux} du$$

On en déduit que  $u_{n+1} \leq u_n$ . Ainsi  $(u_n)$  est décroissante. Par ailleurs, en posant  $F: y \mapsto \int_0^y f(t)e^{-tx} dt$ ,  $F$  admet une limite finie en  $+\infty$  car  $x \in E'$ . On en déduit que  $f_n(x) = F((n+1)\pi) - F(n\pi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  puis que  $u_n = |f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées pour affirmer que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$$

ou encore

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{t} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Cette dernière inégalité étant valide pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a donc

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right\|_{\infty} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Ainsi le reste de la série  $\sum f_n$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+$ . On en déduit que  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

**21** Tout d'abord, on a vu que  $\lim_{0+} Lf = \frac{\pi}{2}$ .

Remarquons maintenant que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{0+} f_n = f_n(0)$ . Pour cela, on peut appliquer le théorème de convergence dominée ou plus simplement constater que pour  $x > 0$

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|(1 - e^{-tx}) dt \leq \|f_n\|_{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (1 - e^{-tx}) dt \leq x \|f_n\|_{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t dt$$

La question précédente nous permet alors d'appliquer le théorème d'interversion série/limite :

$$\lim_{0+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{0+} f_n$$

ou encore

$$\lim_{0+} Lf = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = Lf(0)$$

On en déduit que  $Lf(0) = \frac{\pi}{2}$ .

**22** **22.a** Par linéarité de l'intégrale,  $\int_0^1 P(t)g(t) dt = 0$  pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

**22.b** D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite  $(P_n)$  de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  convergeant uniformément vers  $g$  sur le segment  $[0, 1]$ . Alors pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$|P_n(x)g(x) - g^2(x)| = |P_n(x) - g(x)||f(x)| \leq \|P_n - g\|_{\infty} \|g\|_{\infty}$$

donc

$$\|P_n g - g^2\|_{\infty} \leq \|P_n - g\|_{\infty} \|g\|_{\infty}$$

Comme  $\|P_n - g\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,  $\|P_n g - g^2\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  i.e.  $(P_n g)$  converge uniformément vers  $g^2$  sur  $[0, 1]$ . On en déduit que  $\int_0^1 P_n(t)g(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(t)^2 dt$ . D'après la question précédente,  $\int_0^1 g(t)^2 dt = 0$ . Comme  $g^2$  est positive et continue sur  $[0, 1]$ , elle est nulle sur  $[0, 1]$  et donc  $g$  également.

**23** **23.a** D'après le théorème fondamental de l'analyse,  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $h'(t) = e^{-xt} f(t)$ .

$$Lf(x+a) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+a)t} dt = \int_0^{+\infty} h'(t)e^{-at} dt$$

Sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties :

$$Lf(x+a) = [h(t)e^{-at}]_0^{+\infty} + a \int_0^{+\infty} h(t)e^{-at} dt$$

Comme  $x \in E \subset E'$ ,  $h$  admet une limite finie en  $+\infty$ . Ainsi  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t)e^{-at} = 0$ . Ceci légitime l'intégration par parties précédente. Comme  $h(0) = 0$ , on peut de plus affirmer que

$$Lf(x+a) = a \int_0^{+\infty} h(t)e^{-at} dt$$

**23.b** L'application  $u \mapsto -\frac{\ln(u)}{a}$  est une bijection strictement décroissante de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $]0, 1]$  sur  $[0, +\infty[$ . Via le changement de variable  $t = -\frac{\ln(u)}{a}$ , les intégrales  $\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du$  et  $\int_0^{+\infty} a e^{-(n+1)at} h(t) dt$  sont de même nature et égales en cas de convergence. La question précédente montre la convergence de la seconde intégrale et permet d'affirmer que

$$\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du = -\frac{1}{n+1} Lf(x + (n+1)a) = 0$$

**23.c** Comme  $h$  admet une limite finie en  $+\infty$ ,  $u \in ]0, 1] \mapsto u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right)$  est prolongeable en une fonction continue sur  $[0, 1]$ . D'après la question **22.b**,  $u \mapsto u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right)$  est nulle sur  $]0, 1]$  i.e.  $h$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+$ .

**24** L'application  $L$  est clairement linéaire. Soit  $f \in \text{Ker } L$ . En reprenant les notations de la question précédente, on a donc  $Lf(x + na) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  de sorte que  $h$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi  $h' : u \mapsto e^{-xu} f(u)$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+$  et enfin  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+$ . Ceci prouve que  $L$  est injective.

**25** **25.a** Notons  $M$  un majorant de  $Lf$  sur  $E$ . Soit  $A \in \mathbb{R}_+$ . Comme  $f$  est positive,

$$\forall x \in E, \int_0^A f(t) e^{-x\lambda(t)} dt \leq Lf(x) \leq M$$

Mais  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \int_0^A f(t) e^{-x\lambda(t)} dt = \int_0^A f(t) e^{-\alpha\lambda(t)} dt$ . On pourrait utiliser le théorème de convergence dominée mais on peut aussi tout simplement remarquer que, pour  $x \in ]\alpha, +\infty[$ ,

$$0 \leq \int_0^A f(t) e^{-\alpha\lambda(t)} dt - \int_0^A f(t) e^{-x\lambda(t)} dt = \int_0^A f(t) e^{-\alpha\lambda(t)} (1 - e^{-(x-\alpha)\lambda(t)}) dt \leq (x - \alpha) \int_0^A \lambda(t) f(t) e^{-\alpha\lambda(t)} dt$$

En effet, pour tout  $u \in \mathbb{R}_+$ ,  $1 - e^{-u} \leq u$  par convexité de l'exponentielle. En passant à la limite dans l'inégalité initiale, on obtient donc :

$$\int_0^A f(t) e^{-\alpha\lambda(t)} dt \leq M$$

Enfin, l'application  $A \mapsto \int_0^A f(t) e^{-\alpha\lambda(t)} dt$  est croissante (car  $f$  est positive) et majorée donc elle admet une limite finie en  $+\infty$ . L'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-\alpha\lambda(t)} dt$  converge i.e.  $\alpha \in E' = E$ .

**25.b** Montrons que  $Lf$  est décroissante. Soit  $(x, y) \in E^2$  tel que  $x \leq y$ . Comme  $\lambda$  et  $f$  sont positives,  $f(t) e^{-\lambda(t)x} \geq f(t) e^{-\lambda(t)y}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  puis, par croissance de l'intégrale,  $Lf(x) \geq Lf(y)$ . Notamment,  $Lf$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  en  $\alpha^+$ . Mais d'après la question précédente,  $Lf$  n'est pas bornée sur  $E$ . Or  $Lf$  est minorée par 0 (positivité de l'intégrale) donc elle n'est en fait pas majorée. On en déduit que  $\ell = +\infty$ .

**26** **26.a** Pour  $x > 1$ ,  $f(t) e^{-x\lambda(t)} = \frac{\cos(t)}{(1+t)^x} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^x)$  donc  $t \mapsto f(t) e^{-x\lambda(t)}$  est intégrable en  $+\infty$  et  $x \in E$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \frac{|\cos(t)|}{1+t} dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos(t)|}{1+t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\cos t|}{1+t+k\pi} dt \quad \text{par changement de variable } t \mapsto t - k\pi \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(k+1)\pi} \int_0^\pi |\cos t| dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A}{1+(k+1)\pi} \quad \text{en notant } A = \int_0^\pi |\cos t| dt \end{aligned}$$

**REMARQUE.** On peut montrer que  $A = 2$  mais ce n'est pas nécessaire. Il suffit juste de savoir que  $A > 0$ .



Or la série à termes positifs  $\sum \frac{A}{1+(n+1)\pi}$  diverge vers  $+\infty$  puisque  $\frac{A}{1+(n+1)\pi} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n\pi}$ . On en déduit par minoration que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} \frac{|\cos(t)|}{1+t} dt = +\infty$$

Par conséquent,  $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{1+t} dt$  diverge. Ainsi  $1 \notin E$ . Comme  $E$  est un intervalle,  $E = ]1, +\infty[$ .

**26.b** Sous réserve de convergence, on obtient par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(1+t)^x} dt = \left[ \frac{\sin t}{(1+t)^x} \right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}} dt$$

Si  $x > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^x} = 0$  et  $\frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^{x+1})$  avec  $x+1 > 1$  donc  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}} dt$  converge. On en déduit que  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(1+t)^x} dt$  converge i.e.  $x \in E'$ .

De plus,  $\int_0^A \cos(t) dt = \sin(A)$  et  $A$  n'admet pas de limite en  $+\infty$  donc  $\int_0^{+\infty} \cos(t) dt$  diverge i.e.  $0 \notin E'$ .

Si  $x < 0$ ,

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/2} \frac{\cos t}{(1+t)^x} dt \geq (1+2n\pi)^{-x} \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/2} \cos t dt = (1+2n\pi)^{-x}$$

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/2} \frac{\cos t}{(1+t)^x} dt = +\infty$ , ce qui empêche la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(1+t)^x} dt$  (cette limite serait alors nulle). Ainsi  $x \ni nE'$ .

Finalement,  $E' = ]0, +\infty[$ .

**26.c** D'après l'intégration par parties effectué à la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, Lf(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}} dt$$

Posons  $\varphi : (x, t) \mapsto \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}}$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto \varphi(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Soit  $a > 0$ . Pour tout  $(x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+$ ,

$$|\varphi(x, t)| \leq \frac{1}{(1+t)^{a+1}}$$

et  $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^{a+1}}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

On en déduit que  $Lf$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et notamment en 1. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 1} Lf(x) = Lf(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^2} dt$$

**27** Par croissances comparées,  $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1/t^2)$ , ce qui garantit la convergence de  $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ .

**28** • Pour tout  $(P, Q) \in \mathcal{P}^2$ ,

$$(Q, P) = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt = (P, Q)$$

- Pour tout  $(P, Q, R) \in \mathcal{P}^2$  et tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ ,

$$(P, \lambda Q + \mu R) = \lambda(P, Q) + \mu(Q, R)$$

par linéarité de l'intégrale.

- Pour tout  $P \in \mathbb{P}$ ,

$$(P, P) = \int_0^{+\infty} |P(t)|^2 e^{-t} dt \geq 0$$

par positivité de l'intégrale.

- Soit  $P \in \mathcal{P}$  tel que  $(P, P) = 0$ . Comme  $t \mapsto |P(t)|^2 e^{-t}$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$ , elle est nulle sur  $\mathbb{R}_+$  par stricte positivité de l'intégrale. Comme l'exponentielle ne s'annule pas, le polynôme  $P$  admet une infinité de racines (tous les réels positifs) : c'est le polynôme nul.

On en déduit que  $(\cdot, \cdot)$  est bien un produit scalaire.

**29** La linéarité de  $U$  découle directement de la linéarité de la dérivation. De plus, un simple calcul donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, U(P)(t) = e^t(e^{-t}P'(t) - te^{-t}P'(t) + te^{-t}P''(t)) = P'(t) - tP'(t) + tP''(t)$$

Ainsi  $U(P) \in \mathcal{P}$ . On en déduit que  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ .

**30** A l'aide d'une intégration par parties,

$$\begin{aligned} (U(P), Q) &= \int_0^{+\infty} U(P)(t)Q(t)e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} U(\bar{P})(t)Q(t)e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} D(te^{-t}P'(t))Q(t) dt \\ &= [te^{-t}P'(t)Q(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} te^{-t}P'(t)Q(t) dt \end{aligned}$$

Par croissances comparées,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t}P'(t)Q(t) = 0$  donc

$$(U(P), Q) = - \int_0^{+\infty} P'(t)tQ(t)e^{-t} dt$$

On procède à nouveau à une intégration par parties :

$$(U(P), Q) = - [P(t)tQ(t)e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} P(t)D(tQ(t)e^{-t}) dt$$

Le crochet est à nouveau nul par croissances comparées, ce qui donne :

$$(U(P), Q) = (P, U(Q))$$

**31** Si  $P$  et  $Q$  sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes  $\lambda$  et  $\mu$ , la question précédente donne  $\lambda(P, Q) = \mu(P, Q)$  et donc  $(P, Q) = 0$ .

**REMARQUE.** On peut aussi remarquer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $U$ .  $U$  induit donc un endomorphisme auto-adjoint de l'espace euclidien  $\mathbb{R}_n[X]$ . On sait alors que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. En fait, on vient de montrer que le résultat est encore valide pour un endomorphisme auto-adjoint d'un espace préhilbertien réel de dimension non nécessairement finie.

**32** **32.a** D'après un calcul effectué précédemment,  $U(P) = \lambda P$  équivaut à

$$\forall t \in \mathbb{R}, P'(t) - tP'(t) + tP''(t) = \lambda P(t)$$

**32.b** Si on note  $n$  le degré de  $P$  est  $\alpha$  son coefficient dominant. Alors les coefficients de  $X^n$  dans l'égalité précédente sont respectivement  $-\alpha$  et  $\lambda\alpha$  d'où  $\lambda = -n$ .

**33** **33.a** A l'aide d'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \forall x > 0, L(XP')(x) &= -LP(x) - x(LP)'(x) \\ \forall x > 0, L(XP'')(x) &= -L(P')(x) - xLP(x) - x^2(LP)'(x) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\forall x > 0, x(1-x)(LP)'(x) + (1-x)LP(x) + nLP(x) = 0$$

Ainsi  $Q = LP$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation différentielle

$$(E'_n): x(1-x)y' + (n+1-x)y = 0$$

**33.b** Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{x - (n+1)}{x(1-x)} = -\frac{n+1}{x} + \frac{n}{1-x}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de  $(E'_n)$  sur  $]1, +\infty[$  est la droite engendré par  $f_n : x \mapsto \frac{(x-1)^n}{x^{n+1}}$ .

On a vu à la question **32.b** que  $\text{Sp}(U) \subset -\mathbb{N}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $L$  est injective,  $P \in \text{Ker}(U + n \text{Id}_{\mathcal{P}})$  si et seulement si  $LP$  est solution de  $E'_n$ . D'après la question précédente, ceci équivaut à  $LP \in \text{vect}(f_n)$ .

Remarquons alors que

$$\forall x > 0, f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}$$

En prenant  $a = 0$  dans la question **12**, on obtient par linéarité de  $L$  que  $f_n = LQ_n$  avec  $Q_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$ . L'injectivité de  $L$  prouve donc que  $\text{Ker}(U + n \text{Id}_{\mathcal{P}}) = \text{vect}(Q_n)$ . Ces noyaux sont non vides de sorte que  $\text{Sp}(U) = -\mathbb{N}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_{-n}(U) = \text{vect}(Q_n)$ .

**33.c** D'après la formule de Leibniz,

$$\forall t \in \mathbb{R}, P_n(t) = e^t \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-t} \frac{n!}{k!} t^k = n! Q_n(t)$$

On a donc  $E_{-n}(U) = \text{vect}(P_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .