

DEVOIR À LA MAISON N°01

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1

Partie I – Intégrales de Wallis

I.1 Le calcul ne pose aucune difficulté, on trouve $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

I.2 On intègre par parties

$$\begin{aligned}
 I_{n+2} &= [-\cos(t) \sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^n(t) dt \\
 &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t) dt \\
 &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n(t) - \sin^{n+2}(t)) dt \\
 &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
 \end{aligned}$$

D'où la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

I.3 D'après la relation de récurrence établie précédemment :

$$\begin{aligned}
 I_{2n} &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 3 \times 1}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2} I_0 \\
 &= \frac{(2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{[(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2]^2} I_0 \\
 &= \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
 I_{2n+1} &= \frac{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 5 \times 3} I_1 \\
 &= \frac{[(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2]^2}{(2n+1) \times (2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times \cdots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} I_1 \\
 &= \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} I_1 = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}
 \end{aligned}$$

I.4 Puisque $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \sin(t) \leq 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$$

Ainsi après intégration sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, $I_{n+1} \leq I_n$. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. On a donc en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$

Soit encore, d'après la relation de récurrence obtenue ci-dessus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n$$

I.5 Par une récurrence sans difficulté, on prouve à l'aide de l'inégalité précédente que pour tout n positif, $I_n > 0$. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

d'où, en appliquant le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

et donc $I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.

I.6 On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1}$$

La suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante égale à $\frac{\pi}{2}$ car $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

I.7 On a $(n+1)I_{n+1}I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nI_n^2$ d'après ce qui précède. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

Puisque la fonction racine carrée est continue en $\frac{\pi}{2}$ et que I_n est positive,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Ainsi } I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Partie II – Formule de Stirling

II.1 On a $v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$. Or

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\text{donc } v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

II.2 Comme $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathcal{O}(1/n^2)$ et que la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge. Par télescopage, cela signifie que la suite $(\ln(u_n))_{n \geq 1}$ converge vers une limite $\lambda \in \mathbb{R}$. Par continuité de l'exponentielle, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\ell = e^\lambda > 0$.

II.3 On déduit de la question précédente que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{\ell}$.

En utilisant l'expression factorielle de I_{2n} trouvée en **I.3**, on obtient $I_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi \ell}{\sqrt{2n}}$. Or d'après la question **I.7**, on

$$\text{a } I_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}. \text{ On en déduit } \ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \text{ Ainsi } n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$