

# DEVOIR À LA MAISON N°06

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – CCP PC Maths I 2013

L'objectif du problème est d'étudier des conditions pour que deux matrices admettent un *vecteur propre commun* et d'en déduire une *forme normale pour des vecteurs propres*. Les parties 1 et 3 traitent chacune de cas particuliers en dimension 3 et  $n$ . Elles sont indépendantes l'une de l'autre. La partie 2 aborde la situation générale en faisant apparaître une condition nécessaire et certaines autres conditions suffisantes à l'existence d'un vecteur propre commun.

Les parties 2, 3 et 4 sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.

*Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.*

Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note :

$$\text{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), MX = 0\}$$

$$\text{Im}(M) = \{MX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$$

$$\text{Sp}(M) \text{ le spectre de } M$$

$$E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n)$$

$$\text{Im}_\lambda(M) = \text{Im}(M - \lambda I_n)$$

Soient  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . On définit  $[A, B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  par la formule :  $[A, B] = AB - BA$ .

Soient  $f$  et  $g$ , deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $e \in E$ . On définit l'endomorphisme  $[f, g]$  de  $E$  par la formule :  $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ .

### Partie I – Etude dans un cas particulier

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{On note } \mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3) \text{ où } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On note aussi } u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

#### I.1 I.1.a Déterminer le spectre de A.

- I.1.b** Vérifier que la famille  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de A.
- I.1.c** A est-elle diagonalisable ?
- I.1.d** Montrer qu'aucun des éléments de  $\mathcal{F}$  n'est un vecteur propre commun à A et B.
- I.2** **I.2.a** Déterminer le spectre de B.
- I.2.b** Montrer que  $\text{Im}_2(B) = \text{vect}(u_4)$  et que  $\dim(E_2(B)) = 2$ .
- I.2.c** B est-elle diagonalisable ?
- I.3** **I.3.a** Montrer que  $E_1(A) \cap E_2(B) = \text{vect}(u_5)$ .
- I.3.b** Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B.
- I.4** **I.4.a** Vérifier que  $[A, B] = C$ .
- I.4.b** Montrer que C est semblable à la matrice D et déterminer le rang de C.

## Partie II – Condition nécessaire et conditions suffisantes

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ .

**II.1** Dans cette question, on suppose que  $e$  est un vecteur propre commun à A et B.

**II.1.a** Montrer que  $e \in \text{Ker}([A, B])$ .

**II.1.b** Vérifier que  $\text{rg}([A, B]) < n$ .

Dans toute la suite de cette partie 2, on suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

On dit que A et B vérifient la *propriété  $\mathcal{H}$*  s'il existe  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A, B])$$

**II.2** Montrer que si  $[A, B] = 0$ , alors A et B vérifient la propriété  $\mathcal{H}$ .

**II.3** Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété  $\mathcal{H}$ .

**II.3.a** Pour tout  $X \in E_\lambda(A)$ , on pose  $\psi(X) = BX$ . Montrer que  $\psi$  définit un endomorphisme de  $E_\lambda(A)$ .

**II.3.b** En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et B.

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{P}_k$  la *propriété suivante* :

Pour tout  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension  $k$  et pour tout couple d'endomorphismes  $(\varphi, \psi)$  de E tels que  $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$ , il existe un vecteur propre commun à  $\varphi$  et  $\psi$ .

**II.4** Vérifier la propriété  $\mathcal{P}_1$ .

**II.5** Dans cette question, on suppose que  $\mathcal{P}_k$  est vérifiée pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et que A et B ne vérifient pas la propriété  $\mathcal{H}$ .

On note  $C = [A, B]$ , on suppose que  $\text{rg}(C) = 1$  et on considère  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de A.

**II.5.a** Justifier l'existence de  $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  tel que  $Au = \lambda u$  et  $Cu \neq 0$ .

**II.5.b** Vérifier que  $\text{Im}(C) = \text{vect}(v)$  où  $v = Cu$ .

**II.5.c** Montrer que  $\text{Im}(C) \subset E_\lambda(A)$ .

**II.5.d** Etablir les inégalités suivantes :  $1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n-1$ .

**II.5.e** Pour tout  $X \in \text{Im}_\lambda(A)$ , on pose  $\varphi(X) = AX$  et  $\psi(X) = BX$ .

Montrer que  $[A, A - \lambda I_n] = 0$  et  $[B, A - \lambda I_n] = -C$ .

En déduire que  $\varphi$  et  $\psi$  définissent des endomorphismes de  $\text{Im}_\lambda(A)$ .

**II.5.f** Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à  $\varphi$  et  $\psi$ ; en déduire qu'il en est de même pour  $A$  et  $B$ .

**II.6** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

### Partie III – Etude d'un autre cas particulier

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à  $2n$ .

Pour  $P \in E$ , on désigne par  $P'$  le polynôme dérivé de  $P$ .

Pour tout polynôme  $P$  de  $E$ , on pose  $f(P) = P'$  et  $g(P) = X^{2n}P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

**III.1** Soient  $(a_0, a_1, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$  et  $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ . Montrer que  $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$ .

**III.2** Montrer que  $f$  et  $g$  définissent des endomorphismes de  $E$ .

**III.3** **III.3.a** Vérifier que si  $P$  est un vecteur propre de  $g$ , alors  $\deg(P) \geq n$ .

**III.3.b** Montrer que  $X^n$  est un vecteur propre de  $g$ .

**III.4** **III.4.a** Vérifier que  $\text{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$ .

**III.4.b** Montrer que  $\text{Sp}(f^i) = \{0\}$ .

**III.5** Montrer que  $f^i$  et  $g$  possèdent un vecteur propre commun si et seulement si  $i \geq n + 1$ .

$\mathcal{B}_c$  désigne la base canonique de  $E$  définie par :  $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^{2n})$ .

On note  $A_n$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}_c$  et  $B_n$  celle de  $g$  dans la même base.

**III.6** Déterminer  $A_n$  et  $B_n$ .

**III.7** Dans cette question, on suppose que  $n = 1$ .

**III.7.a** Montrer que  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et en déduire l'expression de  $A_1^2$  et  $A_1^3$ .

**III.7.b** Déterminer le rang de  $[A_1^i, B_1]$  pour  $i = 1$  et  $i = 2$ .

**III.7.c** En déduire que la condition nécessaire de la question **II.1.b** n'est pas suffisante et que la condition suffisante de la question **II.6** n'est pas nécessaire.

### Partie IV – Forme normale pour un vecteur propre

Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . On note

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0 \right\}$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $X$  un vecteur propre de  $A$ .

On dit que  $X$  est *sous forme normale* si :

- $X \in \mathcal{N}$

ou

- il existe  $\lambda' \in \text{Sp}(A)$  et il existe  $U \in \mathcal{N}$  tel que  $X = (A - \lambda' I_n)U$ .

**IV.1** Dans cette question, on suppose que  $A$  possède une valeur propre  $\lambda$  telle que  $\dim(E_\lambda(A)) \geq 2$ .  
Montrer que  $A$  admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**IV.2** On note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  antisymétriques, c'est-à-dire telles que  $M^\top = -M$ .

Pour tout  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ , on pose :  $\varphi(M) = AM + MA^\top$  et  $\psi(M) = AMA^\top$ .

**IV.2.a** Montrer que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0\}$ .

**IV.2.b** Montrer que les colonnes d'une matrice  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  sont des éléments de  $\mathcal{N}$ .

**IV.2.c** Montrer que  $\varphi$  et  $\psi$  définissent des endomorphismes de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

**IV.2.d** Vérifier que  $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ .

**IV.3** Dans cette question, on suppose que  $A$  possède au moins deux valeurs propres distinctes, notées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

On considère  $X_1$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_1$  et  $X_2$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_2$ .

On note  $B = X_1 X_2^\top - X_2 X_1^\top$ .

**IV.3.a** Montrer que  $B$  vérifie chacune des propriétés suivantes :

- $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ ;
- $B \neq 0$ ;
- $AB + BA^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)B$ ;
- $ABA^\top = (\lambda_1 \lambda_2)B$ .

**IV.3.b** En déduire que  $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0$ .

**IV.3.c** Dans cette question, on suppose que  $(A - \lambda_2 I_n)B = 0$ . Montrer qu'au moins l'une des colonnes de  $B$  est un vecteur propre de  $A$  sous forme normale.

**IV.3.d** Dans cette question, on suppose que  $(A - \lambda_2 I_n)B \neq 0$ . Montrer que  $A$  possède un vecteur propre sous forme normale.

**IV.4** Dans cette question, on suppose que  $A$  ne possède qu'une seule valeur propre  $\lambda$ .

**IV.4.a** Montrer l'existence d'une matrice  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  non nulle vérifiant chacune des propriétés suivantes :

- il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que :  $AB + BA^\top = \alpha B$ ;
- il existe  $\beta \in \mathbb{C}$  tel que :  $ABA^\top = \beta B$ .

**IV.4.b** Vérifier que  $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0$ .

**IV.4.c** Montrer qu'il existe  $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0$ .

**IV.4.d** Dans cette question, on suppose que  $(A - \delta I_n)B = 0$ . Montrer que  $A$  possède un vecteur propre sous forme normale.

**IV.4.e** Dans cette question, on suppose que  $(A - \delta I_n)B \neq 0$  et  $\delta = \lambda$ . Montrer que  $A$  possède un vecteur propre sous forme normale.

**IV.4.f** Dans cette question, on suppose que  $(A - \delta I_n)B \neq 0$  et  $\delta \neq \lambda$ . Montrer que  $A - \delta I_n$  est une matrice inversible et en déduire que  $(A - \gamma I_n)B = 0$ .

**IV.4.g** Que conclure ?