

## Dérivées partielles

### Exercice 1 ★★

CCINP (ou CCP) PSI 2019

Soit la fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$ .

1.  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}^2$  ?
2.  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?
3. Étudier l'existence de dérivées partielles secondes de  $f$  en  $(0, 0)$ .

### Exercice 2 ★★

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes en fonction des dérivées partielles de  $f$ .

1.  $g(x, y) = f(y, x)$
2.  $g(x) = f(x, x)$
3.  $g(x, y) = f(y, f(x, x))$
4.  $g(x) = f(x, f(x, x))$

### Exercice 3 ★★

Etudier l'existence de dérivées partielles pour les fonctions suivantes.

1.  $f(x, y) = \max(|x|, |y|)$ .
2.  $f(x, y) = |x| + |y|$ .
3.  $\begin{cases} f(x, y) = \frac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$ .

### Exercice 4 ★★

On définit une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ .  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^0$  ?  $\mathcal{C}^1$  ?  $\mathcal{C}^2$  ?

### Exercice 5 ★★★

Laplacien en polaires

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On appelle *laplacien* de  $f$  l'application  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ . Donner une expression du laplacien en coordonnées polaires.

### Exercice 6 ★

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $g$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(e^t \cos t, \ln(1 + t^2))$$

Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de  $f$ .

### Exercice 7 ★★

Une équation fonctionnelle

Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  solutions de l'équation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) \quad (*)$$

1. Déterminer les solutions constantes de (\*).
2. Soit  $f$  une solution non constamment nulle de (\*).
  - a. Montrer que  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$ .
  - b. Montrer que  $f$  est une fonction paire.
3. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par
 
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, F(x, y) = f(x + y) + f(x - y)$$
  - a. Justifier que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
  - b. Calculer les dérivées partielles secondes de  $F$ .
  - c. On suppose que  $f$  est une solution non constamment nulle de (\*). Des expressions de  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ , déduire que  $f$  vérifie une équation différentielle de la forme  $z'' - \alpha z = 0$ .
  - d. Donner les solutions de l'équation différentielle  $z'' - \alpha z = 0$  suivant les valeurs de  $\alpha$ .

4. Déterminer toutes les solutions de (\*).

**Exercice 8 ★★**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par 
$$\begin{cases} f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}.$$

1. Etudier la continuité de  $f$ .
2.
  - a. Prouver l'existence de dérivées partielles premières de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
  - b. Etudier la continuité des dérivées partielles premières de  $f$ .
  - c. La fonction  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 9 ★★★★★****Centrale-Supélec MP 2016**

On note  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$ .

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \Delta & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \end{cases}.$

1. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ .
2. Montrer que  $f$  est prolongeable en une application  $\tilde{f}$  continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. Montrer que  $\tilde{f}$  admet des dérivées partielles sur  $\mathbb{R}^2$ .
4. Montrer que  $\tilde{f}$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
5. Montrer que  $\tilde{f}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ . On pourra écrire  $\tilde{f}(x, y)$  comme une intégrale entre 0 et 1.
6. Justifier l'existence pour  $\tilde{f}$  d'un minimum et d'un maximum sur  $\mathbb{R}^2$  et les déterminer.

**Exercice 10 ★★★★★****Mines-Ponts MP 2016**

On se donne  $R \in \mathbb{R}_+^*$  et on définit  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $\Delta f = 0$ . On définit

$$F : \begin{cases} ]-R, R[ \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \longmapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

1. Trouver une relation entre les dérivées partielles de  $F$  et  $f$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . On définit

$$\varphi_n : \begin{cases} ]-R, R[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ r & \longmapsto \int_0^{2\pi} F(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \end{cases}$$

Trouver une équation différentielle vérifiée par  $\varphi_n$  et la résoudre. En déduire  $\varphi_n$ .

**Exercice 11 ★★**

Soit  $U$  un ouvert connexe par arcs de  $\mathbb{R}^n$ . On dit qu'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est harmonique si  $\Delta f = 0$  sur  $U$ . On rappelle que  $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ . Montrer que si  $f$  et  $f^2$  sont harmoniques sur  $U$ , alors  $f$  est constante sur  $U$ .

**Exercice 12****CCINP (ou CCP) MP 2023**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(0, 0) = 0$  et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|$$

On pose  $u : x \mapsto f(x, x)$ ,  $v : x \mapsto f(x, -x)$  et  $w_x : y \mapsto f(x, y)$ .

1. Calculer les dérivées de  $u$ ,  $v$  et  $w_x$ .
2. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe un unique  $y_x \in \mathbb{R}$  tel que  $|y_x| \leq |x|$  et  $w_x(y_x) = 0$ .
3. On pose  $\varphi : x \mapsto y_x$ . On suppose que  $\varphi$  est dérivable. Exprimer  $\varphi'(x)$  en fonction des dérivées partielles de  $f$  en  $(x, \varphi(x))$ . Montrer que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

## Différentiation

### Exercice 13 ★★★★★

Banque Mines-Ponts MP 2019

On note  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  et  $E^*$  son dual.  
On définit

$$D = \{\varphi \in E^*, \forall (f, g) \in E^2, \varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)\}$$

1. Montrer que  $D$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$  non réduit à 0.
2. Montrer que l'application  $a \in \mathbb{R}^n \mapsto (f \in E \mapsto df(0) \cdot a)$  est injective.
3. Donner une base de  $D$ .

*Indication :* On pourra utiliser la relation fondamentale de l'analyse pour  $t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx)$ .

### Exercice 14 ★★★

Banque Mines-Ponts MP 2018

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  différentiable, telle que  $df(x)$  soit injective pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , et vérifiant  $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme associée au produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ .

Le but de cet exercice est de montrer que  $f$  est surjective. On pose pour cela  $g : x \rightarrow \|f(x) - a\|^2$  où  $a \in \mathbb{R}^n$ .

1. Justifier que  $g$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^n$  et calculer  $dg(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .
2. Montrer que  $g$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}^n$ .
3. Conclure.

### Exercice 15 ★★★

Soit  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dérivable telle que pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $A(s)$  et  $A(t)$  commutent.

1. Justifier que  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \exp(M)$  est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en 0.
2. En déduire que  $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(A(t))$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = A'(t) \exp(A(t)) = \exp(A(t)) A'(t)$$

### Exercice 16 ★★

Montrer que  $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^2$  est différentiable sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et calculer sa différentielle en tout point de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice 17 ★★★

Soit  $\Omega$  un ouvert non vide et borné d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé  $E$  de dimension finie. On se donne  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\overline{\Omega}$ , différentiable sur  $\Omega$  et constante sur  $\text{Fr}(\Omega) = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ . Montrer que  $df$  s'annule sur  $\Omega$ .

### Exercice 18

CCINP (ou CCP) MP 2023

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est muni d'une norme sous-multiplicative  $\|\cdot\|$ , c'est-à-dire que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

1. Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\|H\| < 1$ . Montrer que  $I_n - H$  est inversible, d'inverse  $\sum_{n=0}^{\infty} H^n$ .
2. Montrer que  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  est ouvert dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
3. Soit  $f : M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$ .
  - a. Montrer que  $f$  est différentiable en  $I_n$  et que  $df(I_n)(H) = -H$ .
  - b. Montrer que  $f$  est différentiable en tout point de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ . On remarquera que  $(M + H)^{-1} = (M(I_n + M^{-1}H))^{-1}$ .

## Gradient

### Exercice 19 ★★

Soit  $f$  un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien  $E$  et  $u \in E$ . On pose

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle + \langle u, x \rangle$$

1. Justifier que  $\varphi$  est différentiable sur  $E$ .
2. Calculer le gradient de  $\varphi$  en tout point de  $E$ .

**Exercice 20 ★★★**

Soit  $f$  un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien  $E$  de dimension non nulle.

Pour  $x \in E \setminus \{0_E\}$ , on pose  $\varphi(x) = \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2}$ .

On n'utilisera pas le théorème spectral dans tout cet exercice.

1. Calculer le gradient de  $\varphi$  en tout point de  $E \setminus \{0_E\}$ .
2. Montrer que  $x \in E \setminus \{0_E\}$  est un vecteur propre de  $f$  si et seulement si  $\nabla\varphi(x) = 0$ .
3. Montrer que  $\varphi$  admet un maximum sur  $E \setminus \{0_E\}$ .
4. En déduire que  $f$  admet un vecteur propre.

**Jacobienne****Exercice 21 ★★**

Soit la fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$g(x, y) = \left( x + 2 \sin y, y + \frac{1}{3} \sin x \right)$$

1. Justifier que  $g$  est différentiable en tout point et écrire la matrice jacobienne de  $g$  en un point  $(x, y)$ . En déduire que  $dg$  est à valeurs dans  $GL(\mathbb{R}^2)$ .
2. Montrer que  $g$  est une bijection.
3. On admet que  $g^{-1}$  est différentiable. Déterminer la matrice jacobienne de  $g^{-1}$  au point  $(0, 0)$ .

**Exercice 22 ★**

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \sin(x^2 - y^2) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + y, x - y) \end{cases}$$

1. Justifier que les fonctions  $f$  et  $g$  sont différentiables en tout point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et écrire les matrices jacobienes de ces deux fonctions au point  $(x, y)$ .
2. Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , déterminer l'image du vecteur  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  par l'application linéaire  $d(f \circ g)(x, y)$ 
  - a. en calculant  $f \circ g$ ;
  - b. en utilisant le produit de deux matrices jacobienes.

**Espace tangent****Exercice 23 ★★**

1. Montrer que si  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  (espace des matrices antisymétriques), alors  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $e^{tA} \in O_n(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à  $O_n(\mathbb{R})$  au point  $I_n$ .

**Exercice 24 ★★**

Soit  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^3 + 3xy + z = 0\}$  et  $u = (0, -1, 1)$ . Déterminer l'ensemble des points de  $S$  en lesquels le vecteur  $u$  est tangent à  $S$ .

**Exercice 25 ★★★**

Soit  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 8yz\}$ . Déterminer les points de  $S$  en lesquels le plan tangent contient la droite  $D$  d'équations  $\begin{cases} y = 1 \\ x + 4z + 2 = 0 \end{cases}$ .

## Optimisation

### Exercice 26 ★★

Déterminer les extrema locaux des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes :

1.  $f(x, y) = x^3 + y^3$ .
2.  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ .
3.  $f(x, y) = 2y^4 - 3xy^2 + x^2$ .
4.  $f(x, y) = x^3 - y^2 - x$ .

### Exercice 27 ★★

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x^2(1+y)^3 + y^4 \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  admet un unique point critique sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. Montrer que  $f$  admet un minimum local mais pas global en ce point critique.

### Exercice 28 ★★

CCINP (ou CCP) MP 2018

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère un endomorphisme auto-adjoint  $f$  de  $E$  dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que :  $\forall h \in E \setminus \{0_E\}, (f(h) | h) > 0$ .
2. Soient  $u \in E$  fixé et  $g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) | x) - (u | x)$ .
  - a. Montrer que  $g$  est différentiable sur  $E$  et calculer sa différentielle en tout point de  $E$ .
  - b. Montrer qu'il existe un unique vecteur  $z_0 \in E$  point critique de  $g$ .
  - c. Montrer que  $g$  admet un minimum global en  $z_0$ .

### Exercice 29 ★★

CCP PSI 2015

On considère les ensembles

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$$

et

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < y < 1\}$$

ainsi que la fonction  $F$  définie sur  $K$  par

$$F(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. La fonction  $F$  admet-elle des extrema locaux sur  $T$ ?
2. La fonction  $F$  admet-elle un minimum sur  $K$ ? un maximum sur  $K$ . Si oui, déterminer leurs valeurs.

### Exercice 30 ★★

Déterminer le minimum et le maximum éventuels de  $f : (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y) \sin(x+y)$  sur  $K = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$ .

### Exercice 31 ★★★

Mines-Ponts MP 2018

Soit  $E$  un espace euclidien, que l'on munit de sa norme euclidienne, et  $f : E \rightarrow E$  différentiable, telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $df(x)$  soit injective, et vérifiant  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$ .

Le but de cet exercice est de montrer que  $f$  est surjective. On pose pour cela  $g : x \in E \mapsto \|f(x) - a\|^2$  où  $a \in E$ .

1. Pour  $x \in E$ , calculer  $dg(x)$ .
2. Montrer que  $g$  admet un minimum sur  $E$ .
3. Conclure.

**Exercice 32 ★★****CCP PSI 2021**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extrema de  $f$ .

1. Déterminer les points critiques de  $f$ .
2. Expliciter des points  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  arbitrairement proches de  $(0, 0)$  tels que  $f(x, y) < 0$ .  
Expliciter de même des points  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  arbitrairement proches de  $(0, 0)$  tels que  $f(x, y) > 0$ .  
La fonction  $f$  admet-elle en  $(0, 0)$  un maximum local, un minimum local, aucun des deux ?

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, g(u, v) = f(1 + u, 1 + v) - f(1, 1)$$

3. Calculer, pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,  $g(u, v)$ , puis, pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ,  $g(r \cos \theta, r \sin \theta)$ .
4. Prouver que pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , on a

$$g(r \cos \theta, r \sin \theta) \geq 3r^2 \left( \frac{1}{2} - 2r \right)$$

Que peut-on en conclure ?

5. La fonction  $f$  possède-t-elle un ou des extrema globaux ?

**Exercice 33 ★★★****Entropie**

Soit un entier  $n \geq 2$ . On pose

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, f(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i)$$

On note

$$C = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

1. Justifier que  $f$  admet un maximum sur  $C$ .
2. Déterminer la valeur de ce maximum et le point où il est atteint.

**Exercice 34 ★★**

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$ . Déterminer le minimum et le maximum éventuels de  $f$  sur  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ .

**Exercice 35 ★**

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$ . Déterminer les extrema locaux éventuels de  $f$ .

**Exercice 36 ★★**

Etudier les extrema globaux de  $f : (x, y) \mapsto 2x - y$  sous la contrainte  $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ .

**Exercice 37 ★★****CCINP MP Maths 1 2023**

Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ .

1. Etablir que l'équation  $e^{-x} = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .
2. Démontrer que  $f$  admet un unique point critique  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .
3. A l'aide de la matrice hessienne, démontrer que  $f$  admet un extremum local en  $(x_0, y_0)$ . Est-ce un minimum ou un maximum ?

**Exercice 38 ★★★**

On n'utilisera pas le théorème spectral dans cet exercice. Soit  $u$  un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien  $E$  de dimension non nulle. On pose  $f(x) = \langle u(x), x \rangle$  pour tout  $x \in E$ . On note  $S$  la sphère unité de  $E$  (pour la norme euclidienne associée au produit scalaire de  $E$ ).

1. Justifier que  $f$  admet un maximum sur  $S$ .
2. Soit  $a \in S$  tel que  $f(a) = \max_S f$ . Justifier que  $a$  est un vecteur propre de  $u$ .

## Equations aux dérivées partielles

### Exercice 39 ★★

Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

### Exercice 40 ★★

Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  l'équation

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

### Exercice 41 ★★

Résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) :  $\frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = x + y$  d'inconnue  $f \in$

$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  en effectuant le changement de variable  $\begin{cases} x = u \\ y = \frac{u^2}{2} + v \end{cases}$ .

Déterminer la solution vérifiant  $f(0, y) = y$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 42 ★★★

Soient  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *homogène de degré  $\alpha$*  si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t > 0, \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

Montrer que  $f$  est homogène de degré  $\alpha$  si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

### Exercice 43 ★★★

Soient  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *homogène de degré  $\alpha$*  si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t > 0, \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

1. Montrer que si  $f$  est homogène de degré  $\alpha$ , alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y) \quad (*)$$

2. Réciproquement, on suppose que  $f$  vérifie la relation (\*).

a. On fixe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et on pose  $\varphi(t) = f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y)$  pour  $t > 0$ . Montrer que  $\varphi$  vérifie une équation différentielle du premier ordre sans second membre et préciser celle-ci.

b. En déduire que  $f$  est homogène de degré  $\alpha$ .

3. Montrer que si  $f$  est homogène de degré  $\alpha$ , les dérivées partielles de  $f$  sont également homogènes et préciser leur degré.

**Exercice 44 ★★★★★****Problème de Dirichlet et principe du maximum**

Soient  $U$  un ouvert borné non vide de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). On note  $\partial U = \bar{U} \setminus U$  la frontière de  $U$ .

On se donne une fonction  $f$  à valeurs réelles continue sur  $\bar{U}$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ . On pose alors

$$\forall x \in U, \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

1. Montrer que  $f$  admet un maximum sur  $\bar{U}$ . On note alors  $\bar{x}$  un point de  $\bar{U}$  où ce maximum est atteint.
2. On suppose que  $\Delta f > 0$  sur  $U$ . Montrer que  $\bar{x} \in \partial U$ .

A partir de maintenant, on suppose  $\Delta f = 0$  sur  $U$ .

3. On se donne  $\varepsilon > 0$  et on pose

$$\forall x \in \bar{U}, f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2 = f(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Montrer que  $f_\varepsilon$  est continue sur  $\bar{U}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  et que  $\Delta f_\varepsilon > 0$  sur  $U$ .

4. En déduire que le maximum de  $f$  sur  $\bar{U}$  est atteint sur  $\partial U$ .
5. Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions continues sur  $\bar{U}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  et vérifiant  $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$  sur  $U$ . On suppose en outre que  $f_1 = f_2$  sur  $\partial U$ . Montrer que  $f_1 = f_2$  sur  $U$ .

**Exercice 45 ★★****CCP PC 2018**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On note  $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et  $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . On considère  $\phi: f \in E \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} - af$ .

1. Montrer que  $\phi$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .
2. On pose  $f(x, y) = \sin(y) \exp(ax)$  pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Calculer  $\phi(f)$ .
3. Soit  $G = \{(x, y) \mapsto \alpha(y) \exp(ax), \alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$ . Montrer que  $G \subset \text{Ker}(\phi)$ .  $\phi$  est-elle injective ?
4. Soit  $A \in F$ . On pose  $f(x, y) = \exp(ax) \int_0^y A(t, y) \exp(-at) dt$  pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que  $f \in E$  et que  $\phi(f) = A$ .
5. Montrer que  $G = \text{Ker}(\phi)$ .
6. Trouver toutes les fonctions  $f \in E$  telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - af(x, y) = 2x - 3y$$