

DEVOIR SURVEILLÉ N°12

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1

1 1.a Première méthode. Pour tout entier $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente, la série $\sum a_n$ converge.

Deuxième méthode. Comme $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* , pour tout entier $n \geq 2$ et tout $t \in [n-1, n]$,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n-1}$$

puis, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n-1}$$

et enfin

$$0 \leq -a_n \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Comme la suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge, il en est de même de la série télescopique $\sum \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum -a_n$ converge et donc $\sum a_n$ aussi.

1.b En notant $S = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n a_k = S + o(1)$$

ou encore

$$H_n - 1 - \int_1^n \frac{dt}{t} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} S + o(1)$$

ou enfin

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + A + o(1)$$

avec $A = 1 + S$. A fortiori, $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + o(\ln n)$ i.e. $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

2 Posons $u_n = \frac{H_n}{(n+1)^r}$. Remarquons tout d'abord que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^r}$.

- Si $r = 0$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $r = 1$, $\frac{1}{n^{1/2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$ par croissances comparées. Or $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge et (u_n) est positive donc $\sum u_n$ diverge.
- Enfin, si $r \geq 2$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ par croissances comparées et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série convergente à termes positifs donc $\sum u_n$ converge.

3 **3.a** Le rayon de convergence de la série entière $\sum t^n$ vaut 1 et pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{t^n}{n}$ vaut 1 et pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\ln(1-t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$$

3.b Par produit de Cauchy, la série entière $\sum \left(\sum_{k=1}^n 1 \cdot \frac{1}{k} \right) t^n$ possède un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et

$$\forall t \in]-1, 1[, -\frac{\ln(1-t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n$$

4 **4.a** Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $t \mapsto t^p (\ln t)^q$ est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$. De plus, par croissances comparées, $t^p (\ln t)^q \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$ et $1/2 < 1$ donc $t \mapsto t^p (\ln t)^q$ est intégrable sur $]0, 1[$. On en déduit que $I_{p,q}$ existe.

4.b Soit $(p, q, \varepsilon) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times]0, 1[$. Les applications $t \mapsto \frac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t \mapsto (\ln t)^q$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon, 1]$, de dérivées respectives $t \mapsto t^p$ et $t \mapsto \frac{q(\ln t)^{q-1}}{t}$. Par intégration par parties,

$$I_{p,q}^\varepsilon = \frac{1}{p+1} [t^{p+1} (\ln t)^q]_\varepsilon^1 - \frac{q}{p+1} \int_\varepsilon^1 t^p (\ln t)^{q-1} dt = -\frac{\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^q}{p+1} - \frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^\varepsilon$$

4.c Par convergence des intégrales $I_{p,q}$ et $I_{p,q-1}$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{p,q}^\varepsilon = I_{p,q} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{p,q-1}^\varepsilon = I_{p,q-1}$$

Par ailleurs, par croissances comparées,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^q = 0$$

En passant à la limite dans l'égalité de la question précédente, on obtient donc

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$$

4.d On montre alors par récurrence sur q que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q} I_{p,0} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$$

5 Pour tout $t \in]0, 1[$,

$$g(t) = (\ln t)^{r-1} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$$

où $g_n : t \mapsto a_n (\ln t)^{r-1} t^n$. On applique alors le théorème d'intégration terme à terme.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue par morceaux sur $]0, 1[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est intégrable sur $]0, 1[$ comme vu à la question **4.a**.
- g est continue par morceaux sur $]0, 1[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme g_n est de signe constant sur $]0, 1[$,

$$\int_0^1 |g_n(t)| dt = \left| \int_0^1 g_n(t) dt \right| = |a_n I_{n,r-1}| = \frac{|a_n| (r-1)!}{(n+1)^r}$$

Par hypothèse $\sum \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument donc $\sum \int_0^1 |g_n(t)| dt$ converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 g(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t) dt$$

ou encore

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_{n,r-1} = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty}$$

6 **6.a** D'après la question **3.b**, la fonction $f : t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et

$$\forall t \in] -1, 1[, f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n$$

De plus, d'après la question **2**, la série $\sum \frac{H_n}{(n+1)^r}$ converge car $r \geq 2$. Comme elle est à termes positifs, elle converge donc aussi absolument et on peut utiliser la question précédente.

$$-\int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$$

ou encore

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt$$

6.b On procède à une intégration par parties. Les applications $t \mapsto (\ln t)^{r-1}$ et $t \mapsto -\frac{1}{2}(\ln(1-t))^2$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$, de dérivées respectives $t \mapsto (r-1) \frac{(\ln t)^{r-2}}{t}$ et $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$. Ainsi

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt = -\frac{1}{2} [(\ln t)^{r-1} (\ln(1-t))^2]_0^1 + \frac{r-1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$$

Cette intégration par parties est légitime puisque, par croissances comparées,

- $(\ln t)^{r-1} (\ln(1-t))^2 \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^2 (\ln t)^{r-1} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$;
- $(\ln t)^{r-1} (\ln(1-t))^2 \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (t-1)^{r-1} (\ln(1-t))^2 \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 0$.

On peut alors affirmer que

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt = \frac{r-1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$$

puis que

$$S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$$

6.c Notamment,

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln(1-t))^2}{t} dt$$

Par le changement de variable $u = 1 - t$, on obtient

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u} du$$

Par un développement en série entière

$$\forall u \in]0, 1[, \frac{(\ln u)^2}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n (\ln u)^2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 |u^n (\ln u)^2| du = \int_0^1 u^n (\ln u)^2 du = I_{n,2} = \frac{2}{(n+1)^3}$$

et $\sum \frac{2}{(n+1)^3}$ converge. D'après le théorème d'intégration terme à terme :

$$S_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3)$$

7 **7.a** La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$. De plus, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$ donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable en 0^+ . Enfin, $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

7.b On effectue le changement de variable $u = \alpha t$. Alors

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u} du = \frac{1}{\alpha^x} \Gamma(x)$$

Les deux intégrales sont de même nature, ce qui justifie a posteriori la convergence de $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t} dt$.

8 **8.a** Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$. De plus, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ et $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$ avec $1-x < 1$ et $1-y < 1$ donc $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable en 0^+ et en 1^- . La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est donc intégrable sur $]0, 1[$, ce qui justifie l'existence de $\beta(x, y)$.

8.b Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = 1 - t$.

8.c Par intégration par parties (légitime car le crochet «converge») :

$$\begin{aligned} \beta(x+1, y) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt \\ &= -\frac{1}{y} [t^x(1-t)^y]_0^1 + \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt \\ &= \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t) dt \\ &= \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt - \frac{x}{y} \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt \\ &= \frac{x}{y} \beta(x, y) - \frac{x}{y} \beta(x+1, y) \end{aligned}$$

On en déduit bien que

$$\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y)$$

8.d D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} \beta(x+1, y+1) &= \frac{x}{x+y+1} \beta(x, y+1) \\ &= \frac{x}{x+y+1} \beta(y+1, x) \\ &= \frac{x}{x+y+1} \cdot \frac{y}{y+x} \beta(y, x) \\ &= \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y) \end{aligned}$$

9 **9.a** Supposons que la relation (\mathcal{R}) soit vrai pour $x > 1$ et $y > 1$. Soient alors $x > 0$ et $y > 0$. Alors $x+1 > 1$ et $y+1 > 1$ donc

$$\beta(x+1, y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)}$$

En vertu des relations fonctionnelles vérifiées par les fonctions β et Γ , ceci équivaut à :

$$\frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y) = \frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}$$

et donc

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

9.b Si on pose $\varphi : u \mapsto \frac{u}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u}$, alors φ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$ et $\varphi'(u) = \frac{1}{(1+u)^2}$. Par changement de variables,

$$\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1+u} \right)^{x-1} \left(1 - \frac{u}{1+u} \right)^{y-1} \cdot \frac{1}{(1+u)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} dy$$

9.c Par positivité de l'intégrande,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \int_0^t e^{-u} u^{x+y-1} du \leq \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x+y-1} du$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y)$$

9.d Posons $\varphi : (a, u) \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)$. Remarquons que $F_{x,y}$ est continue (et a fortiori continue par morceaux) sur \mathbb{R}_+ en tant que primitive.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $u \mapsto \varphi(a, u)$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+ .
- Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $a \mapsto \varphi(a, u)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Pour tout $(a, u) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$|\varphi(x, y)| \leq \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$$

d'après la question précédente. De plus, $u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ d'après le changement de variable effectué à la question **9.b**.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, G est continue (et a fortiori définie) sur \mathbb{R}_+ .

9.e Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Par définition de $F_{x,y}$ et Γ ,

$$\varphi(a, u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \int_0^{(1+u)a} e^{-t} t^{x+y-1} dt \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+y-1} dt = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$$

Les hypothèses de la question précédente permettent également d'appliquer le théorème de convergence dominée. Ainsi

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y) du = \Gamma(x, y) \beta(x, y)$$

9.f Soit $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < c \leq d$.

- D'après l'hypothèse de domination de la question précédente, pour tout $a \in [c, d]$, $u \mapsto \varphi(a, u)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .
- Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $a \mapsto \varphi(a, u)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ car $F_{x,y}$ l'est en tant que primitive d'une fonction continue.
- Pour tout $a \in [c, d]$ et tout $u \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}(a, u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} (1+u) F'_{x,y}((1+u)a) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} (1+u) e^{-(1+u)a} ((1+u)a)^{x+y-1} = u^{x-1} a^{x+y-1} e^{-(1+u)a}$$

donc pour tout $a \in [c, d]$, $u \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial a}(a, u)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

- Pour tout $a \in [c, d]$ et tout $u \in \mathbb{R}_+$,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial a}(a, u) \right| \leq u^{x-1} d^{x+y-1} e^{-c} e^{-cu} = \psi(u)$$

De plus, comme $c > 0$, $\psi(u) = o(1/u^2)$ par croissances comparées donc ψ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

On en déduit que G est de classe \mathcal{C}^1 sur tout segment $[c, d]$ inclus dans \mathbb{R}_+^* donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

9.g La question précédente montre également que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, G'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial a}(a, u) du = \int_0^{+\infty} u^{x-1} a^{x+y-1} e^{-(1+u)a} du = a^{x+y-1} e^{-a} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-au} du$$

On effectue le changement de variable $t = au$ et on obtient

$$G'(a) = a^{x+y-1} e^{-a} \int_0^{+\infty} (t/a)^{x-1} e^{-t} \frac{dt}{a} = a^{y-1} e^{-a} \Gamma(x)$$

9.h En notant $H(a) = \int_0^a t^{y-1} e^{-t} dt$ pour $a \in \mathbb{R}_+$, la relation de la question précédente s'écrit en vertu du théorème fondamental de l'analyse :

$$\forall a > 0, G'(a) = H'(a)\Gamma(x)$$

Il existe donc une constante C telle que

$$\forall a > 0, G(a) = H(a)\Gamma(x) + C$$

Mais les fonctions G et H sont continues en 0 donc $C = G(0) - H(0)\Gamma(x) = 0$. Ainsi

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, G(a) = H(a)\Gamma(x)$$

On vu d'une part que $\lim_{a \rightarrow +\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x, y)$. De plus,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} H(a) = \int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} dt = \Gamma(y)$$

Un passage à la limite donne donc

$$\Gamma(x+y)\beta(x, y) = \Gamma(y)\Gamma(x)$$

ce qui est bien la relation \mathcal{R} .

10 On sait que Γ est de classe \mathcal{C}^∞ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En dérivant cette relation on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$$

En divisant par $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \psi(x+1) = \frac{1}{x} + \psi(x)$$

11 11.a Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \mapsto \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* car Γ l'est. La relation \mathcal{R} montre alors que $\frac{\partial \beta}{\partial y}$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \Gamma(x) \frac{\Gamma'(y)\Gamma(x+y) - \Gamma(y)\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)^2} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \left(\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)} \right) = \beta(x, y)(\psi(y) - \psi(x+y))$$

11.b Soit $(y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $y_1 \leq y_2$. Pour tout $t \in]0, 1[$, $1-t \in]0, 1[$ de sorte que $(1-t)^{y_1-1} \geq (1-t)^{y_2-1}$ puis $t^{x-1}(1-t)^{y_1-1} \geq t^{x-1}(1-t)^{y_2-1}$. Par croissance de l'intégrale, $\beta(x, y_1) \geq \beta(x, y_2)$. Ainsi $y \mapsto \beta(x, y)$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

11.c La question précédente montre que $\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) \leq 0$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Comme β est strictement positive sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ (stricte positivité de l'intégrale), la question **11.a** montre que $\psi(y) \leq \psi(x+y)$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. La fonction ψ est donc croissante sur \mathbb{R}_+^* .

12 12.a Soit $n \in \mathbb{N}$. Par télescopage, avec la question **10**,

$$\psi(n+1) - \psi(1) = \sum_{k=1}^n \psi(k+1) - \psi(k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Soit $x > -1$. On a de même

$$\psi(n+x+1) - \psi(x+1) = \sum_{k=1}^n \psi(k+x+1) - \psi(k+x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+x}$$

On en déduit immédiatement la relation demandée.

12.b Comme $x > -1$, $n+x+1 \geq n$ et donc, par croissance de ψ , $\psi(n+x+1) - \psi(n) \geq 0$. Par définition de la partie entière, $x \leq E(x) + 1 = p$. Par croissance de ψ ,

$$\psi(n+x+1) - \psi(n) = \psi(n+p+1) - \psi(n) = \sum_{k=n}^{n+p} \psi(k+1) - \psi(k) = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} = H_{n+p} - H_{n-1}$$

Enfin, la somme $\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k}$ comporte $p+1$ termes tous inférieurs ou égaux à $\frac{1}{n}$ donc

$$H_{n+p} - H_{n-1} = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} \leq \frac{p+1}{n}$$

12.c Soit $x > -1$. D'après la question **12.a**,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

D'après la question précédente et le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(n+x+1) - \psi(n) = 0$$

On en déduit que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) = \psi(1+x) - \psi(1)$$

13 **13.a** Posons $g_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. La série $\sum g_n$ converge simplement sur $] -1, +\infty[$ d'après la question précédente. De plus, la suite $(1/n)$ converge donc la série télescopique $\sum g_n(-1)$ converge. Ainsi $\sum g_n$ converge simplement sur $] -1, +\infty[$.

Pour tout $n \geq 2$, g_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$. Soient $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $g_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}k!}{(n+x)^{k+1}}$ pour tout $x \in] -1, +\infty[$. Notamment, $\|g_n^{(k)}\|_{\infty,] -1, +\infty[} = \frac{1}{(n-1)^{k+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^k}$. Comme $k+1 \geq 2$, la série $\sum g_n^{(k)}$ converge normalement et donc uniformément sur $] -1, +\infty[$.

On en déduit que $g = \sum_{n=2}^{+\infty} g_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, g^{(k)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} g_n^{(k)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}k!}{(n+x)^{k+1}} = (-1)^{k+1}k! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}}$$

Notamment,

$$g^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}k! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}} = (-1)^{k+1}k!(\zeta(k+1) - 1)$$

13.b Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in] -1, 1[$. Par inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \max_{[-1,1]} |g^{(n+1)}| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Mais d'après la question précédente,

$$\forall t \in [-1, 1], |g^{(n+1)}(t)| = (n+1)! \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{(j+t)^{n+2}} \leq (n+1)! \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{(j-1)^2} = (n+1)! \zeta(2)$$

On en déduit l'inégalité demandée.

13.c Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x|^{n+1} = 0$ pour $x \in] -1, 1[$, la question précédente montre que

$$\forall x \in] -1, 1[, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

On sait également que $g(0) = 0$ donc, avec la question **13.a**,

$$\forall x \in] -1, 1[, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} (\zeta(n+1) - 1) x^n$$

Or la série $\sum (-1)^n x^n$ converge pour $x \in] -1, 1[$, ce qui nous autorise à écrire

$$\forall x \in] -1, 1[, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n \frac{1}{1+x} - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n$$

Par conséquent,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) = 1 - \frac{1}{1+x} + g(x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n$$

14 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $y \mapsto \beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* car Γ l'est également. Notamment, $B : x \mapsto \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, 1)$ est définie sur \mathbb{R}_+^* .

On a établi à la question **11.a** que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \beta(x, y)(\psi(y) - \psi(x + y))$$

L'application ψ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* car Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* . On peut donc dériver par rapport à y la relation précédente :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y)(\psi(y) - \psi(x + y)) + \beta(x, y)(\psi'(y) - \psi'(x + y))$$

puis en évaluant en $y = 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, B(x) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, 1)(\psi(1) - \psi(x + 1)) + \beta(x, 1)(\psi'(1) - \psi'(1 + x))$$

Mais toujours d'après la question **11.a**

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, 1) = \beta(x, 1)(\psi(1) - \psi(1 + x))$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, B(x) = \beta(x, 1)(\psi(1) - \psi(x + 1))^2 + \beta(x, 1)(\psi'(1) - \psi'(1 + x))$$

Enfin

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \beta(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, B(x) = \frac{1}{x}(\psi(1) - \psi(x + 1))^2 + \frac{1}{x}(\psi'(1) - \psi'(1 + x))$$

Comme Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* , ψ l'est également de même que B .

15 **15.a** Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\varphi(y, t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$.

- Pour tout $t \in]0, 1[$, $y \mapsto \varphi(y, t)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \varphi(y, t)$, $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, t) = \ln(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(y, t) = \ln(1-t)^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ sont continues par morceaux sur $]0, 1[$.
- On a déjà vu que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \varphi(y, t)$ était intégrable sur $]0, 1[$. De plus, pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -t^x$ donc $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, t)$ est intégrable en 0^+ (elle y est prolongeable par continuité). De plus, en se donnant $z \in]0, y[$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, t) \underset{t \rightarrow 1^-}{=} o\left(\frac{1}{(1-t)^{1-z}}\right)$ par croissances comparées. On en déduit que $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, t)$ est intégrable en 1^- .
Finalement, $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$.
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in]0, 1[$ et tout $y \in [a, +\infty[$,

$$|\ln(1-t)^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}| \leq |\ln(1-t)|^2 t^{x-1}(1-t)^{a-1} = \xi(t)$$

A nouveau, ξ est intégrable sur $]0, 1[$ car $\xi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x+1}$ et $\xi(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{=} o\left(\frac{1}{(1-t)^{1-z}}\right)$ où $0 < z < a$.

On en déduit que $y \mapsto \beta(x, y)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* (ce que l'on savait déjà) mais surtout que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(y, t) dt = \int_0^1 \ln(1-t)^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

Notamment, en évaluant en $y = 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, B(x) = \int_0^1 \ln(1-t)^2 t^{x-1} dt$$

15.b En employant à nouveau le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, on montrerait que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, B^{(p)}(x) = \int_0^1 \ln(1-t)^2 \ln(t)^p t^{x-1} dt$$

15.c Soit un entier $r \geq 2$. On va appliquer le théorème de convergence dominée.

- Pour tout $t \in]0, 1[$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1-t)^2 \ln(t)^{r-2} t^{x-1} = \frac{\ln(1-t)^2 \ln(t)^{r-2}}{t}$.
- Pour tout $t \in]0, 1[$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|\ln(1-t)^2 \ln(t)^{r-2} t^{x-1}| \leq \frac{|\ln(1-t)|^2 |\ln(t)|^{r-2}}{t} = \xi(t)$$

De plus, $\xi(t) \sim_{t \rightarrow 0^+} t |\ln(t)|^{r-2}$ donc $\xi(t) = o(1/t^{1/2})$ par croissances comparées et ξ est intégrable en 0^+ . De plus, $\xi(t) \sim_{t \rightarrow 1^-} \ln(1-t)^2 (1-t)^{r-2}$ donc $\xi(t) = o(1/(1-t)^{1/2})$ par croissances comparées et ξ est intégrable en 1^- . Finalement, ξ est intégrable sur $]0, 1[$.

D'après le théorème de convergence dominée et la question précédente,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} B^{(r-2)}(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)^2 \ln(t)^{r-2}}{t} dt$$

On conclut avec la question **6.b**.

15.d Notamment, $S_2 = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} B(x)$. D'après la question **14.n** pour tout $x > 0$,

$$B(x) = (\psi(1+x) - \psi(1)) \frac{\psi(1+x) - \psi(1)}{x} - \frac{\psi'(1+x) - \psi'(1)}{x}$$

On sait que ψ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(1+x) - \psi(1) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\psi(1+x) - \psi(1)}{x} = \psi'(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\psi'(1+x) - \psi'(1)}{x} = \psi''(1)$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} B(x) = -\psi''(1)$. Le développement en série entière obtenu à la question ?? nous informe de plus que $\frac{\psi''(1)}{2} = (-1)^{2+1} \zeta(2+1) = -\zeta(3)$. On retrouve alors $S_2 = \zeta(3)$.

16 **16.a** On a déjà vu que ψ était de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* . On en déduit que φ est bien de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$. Soit un entier $n \geq 2$. Posons $\xi(x) = \psi(1+x) - \psi(1)$. D'après la formule de Leibniz,

$$\varphi^{(n)}(0) = -\psi_{(n+1)}(1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \xi^{(k)}(0) \xi^{(n-k)}(0) = -\psi_{(n+1)}(1) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \psi^{(k)}(1) \psi^{(n-k)}(1)$$

16.b Soit un entier $r \geq 3$. Comme $\varphi(x) = xB(x)$ pour tout $x > 0$, on a à nouveau d'après la formule de Leibniz :

$$\forall x > 0, \varphi^{(r-1)}(x) = xB^{(r-1)}(x) + (r-1)B^{(r-2)}(x)$$

On montre comme à la question **15.c** que $B^{(r-1)}$ admet une limite finie en 0^+ , ce qui permet alors d'affirmer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} B^{(r-2)}(x) = \frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{r-1}$$

D'après la question **15.c** et la question précédente,

$$2S_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \varphi^{(r-1)}(0) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \left(-\psi_{(r)}(1) \sum_{k=1}^{r-2} \binom{r-1}{k} \psi^{(k)}(1) \psi^{(r-1-k)}(1) \right)$$

Or la question **13.c** montre que $\frac{\psi^{(k)}(1)}{k!} = (-1)^{k+1} \zeta(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\begin{aligned} 2S_r &= \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \left(-(-1)^{r+1} r! \zeta(r+1) + \sum_{k=1}^{r-2} \binom{r-1}{k} (-1)^{k+1} k! \zeta(k+1) (-1)^{r-k} (r-1-k)! \zeta(r-k) \right) \\ &= r \zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1) \zeta(r-k) \end{aligned}$$