Semaine du 27/11

1 Cours

Réduction algébrique

Polynômes d'endomorphismes Définition. Algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ pour $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$ pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Polynômes annulateurs Définition. Les valeurs propres sont **des** racines d'un polynôme annulateur. Lemme des noyaux. Une matrice/un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Si un endomorphisme est diagonalisable, tout endomorphisme induit l'est également. Théorème de Cayley-Hamilton. Une matrice/un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé. Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est trigonalisable, il existe des sous-espaces supplémentaires sur lesquels les endomorphismes induits par u sont la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent. Interprétation matricielle.

Sous-espaces caractéristiques Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme ou d'une matrice à polynôme caractéristique scindé. Les sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E à polynôme caractéristique scindé sont supplémentaires dans E. Dimension d'un sous-espace caractéristique. Toute matrice à polynôme caractéristique scindé est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont triangulaires et à coefficients diagonaux tous égaux.

Polynômes minimaux Idéal annulateur d'une matrice/d'un endomorphisme. Polynôme minimal d'une matrice/d'un endomorphisme. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. Le spectre est l'ensemble des racines du polynôme minimal. Une matrice/un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Une matrice/un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé. Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et $d = \deg \pi_u$, alors $\dim \mathbb{K}[u] = d$ et $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $d = \deg \pi_{\mathrm{A}}$, alors $\dim \mathbb{K}[\mathrm{A}] = d$ et $(\mathrm{A}^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$.

Suites de fonctions

Modes de convergence Convergence simple. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Théorèmes d'interversion

- Théorème de la double limite : si (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur un intervalle I, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en $a \in \bar{\mathrm{I}}$, alors (ℓ_n) admet une limite, f admet une limite en a et $\lim\limits_a f = \lim\limits_{n \to +\infty} \ell_n$.
- Continuité : si (f_n) est une suite de fonctions continues sur un intervalle I convergeant uniformément vers une fonction f sur I, alors f est continue sur I. Il suffit en fait d'avoir la convergence uniforme sur tout segment.
- Primitivisation : si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur tout segment d'un intervalle I, alors, pour tout $a \in \mathrm{I}$, $\left(x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sur tout segment de I.
- Intégration : si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f sur le segment $[a, b]$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Dérivation : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ convergeant simplement vers une fonction f sur un intervalle I et si (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur tout segment de I, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$. Adaptation aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

2 Méthodes à maîtriser

- Déterminer des valeurs propres à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Caractériser la diagonalisabilité/trigonalisabilité à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Automatisme : $\mathrm{P}(u) = 0 \iff \pi_u \mid \mathrm{P}$.
- Calculer l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Calculer les puissances d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur (division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur P puis considérer les racines de P).
- Déterminer le polynôme minimal d'une matrice : il divise le polynôme caractéristique et il admet pour racines les valeurs propres, ce qui ne laisse qu'un nombre fini de possibilités.
- Montrer qu'une suite de fonctions (f_n) converge simplement : étude de la suite numérique $(f_n(x))$ à x fixé (éventuellement une suite récurrente suivant la définition de la suite de fonctions).

- Montrer qu'une suite de fonctions (f_n) converge uniformément :
  1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f.
  2. Montrer que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$: pour cela, on peut
     - étudier $f_n - f$ pour déterminer explicitement $\sup |f_n - f|$;
     - majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une quantité indépendante de x tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément, on peut au choix :
  - Calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$, où f est la limite simple de (f_n), et montrer que cette quantité ne tend pas vers 0.
  - Déterminer une suite (x_n) telle que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0.
  - Mettre en défaut l'un des théorèmes d'«interversion» : par exemple, les f_n sont continues mais f ne l'est pas.

3 Questions de cours

Banque CCP Exos 91, 9, 10, 11, 12