Devoir à la maison n°09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – ESIM 2002 – Idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Définitions

Un sous-groupe J de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est appelé un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \mathrm{M} \in \mathrm{J}, \mathrm{MA} \in \mathrm{J}$$

Un sous-groupe J de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est appelé un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \mathrm{M} \in \mathrm{J}, \mathrm{AM} \in \mathrm{J}$$

Si J est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite, on dit que J est un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I – Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit J un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.1 Montrer que si $\mathrm{I}_n \in \mathrm{J}$, alors $\mathrm{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.2 Montrer que si J contient une matrice inversible alors $\mathrm{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.3 On suppose que J n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit A une matrice de rang r (non nul) appartenant à J.

I.3.a Montrer que J contient la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I.3.b Montrer l'existence de $n-r+1$ matrices, notées A_1, A_2, …, A_{n-r+1}, toutes équivalentes à A et telles que la somme $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \cdots + \mathrm{A}_{n-r+1}$ soit une matrice inversible.

I.4 Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Partie II – Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II.1 Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On désigne par J_E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{J}_\mathrm{E} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Im}(\mathrm{M}) \subset \mathrm{E}\}$$

Montrer que J_E est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.2 Soient u une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ et v une application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^n$.
On suppose que $\mathrm{Im}(v)$ est contenue dans $\mathrm{Im}(u)$.
On fixe un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(u)$ dans $\mathbb{R}^p$.

II.2.a Justifier que l'application u induit un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im}(u)$.

II.2.b Soit $(e_1, e_2, \dots, e_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.
Justifier l'existence, pour tout i compris entre 1 et q, d'un unique élément ε_i de S tel que $u(\varepsilon_i) = v(e_i)$.

II.2.c En déduire l'existence d'une application linéaire w de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $v = u \circ w$.

II.2.d Soient A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$.
On suppose que $\mathrm{Im}(\mathrm{B})$ est contenue dans $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$.
Déduire de la question précédente qu'il existe une matrice C appartenant à $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B} = \mathrm{AC}$.

II.3 Soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\mathrm{Im}(\mathrm{A}) + \mathrm{Im}(\mathrm{B})$ contient $\mathrm{Im}(\mathrm{C})$.

II.3.a On désigne par $\mathrm{D} = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$ obtenue en juxtaposant les matrices A et B, c'est-à-dire que les n premières colonnes de D sont celles de A et les n dernières celles de B.
Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{D}) = \mathrm{Im}(\mathrm{A}) + \mathrm{Im}(\mathrm{B})$.

II.3.b En déduire l'existence d'une matrice W appartenant à $\mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{C} = \mathrm{DW}$.

II.3.c En déduire l'existence de deux matrices U et V appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{C} = \mathrm{AU} + \mathrm{BV}$.

II.4 Soit J un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.4.a Montrer qu'il existe $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{J}$ telle que $\forall \mathrm{M} \in \mathrm{J}, \mathrm{rg}(\mathrm{M}) \leq \mathrm{rg}(\mathrm{M}_0)$.
On note r le rang de M_0.

II.4.b Soit M un élément quelconque de J.
On suppose que $\mathrm{Im}(\mathrm{M})$ n'est pas contenue dans $\mathrm{Im}(\mathrm{M}_0)$.
En utilisant le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\mathrm{Im}(\mathrm{M}) + \mathrm{Im}(\mathrm{M}_0)$, montrer l'existence d'un élément de J de rang strictement supérieur à r.

II.4.c Déduire des questions précédentes que J est contenu dans $\mathrm{J}_{\mathrm{Im}(\mathrm{M}_0)}$.

II.4.d Montrer que $\mathrm{J} = \mathrm{J}_{\mathrm{Im}(\mathrm{M}_0)}$.

II.5 Quels sont les idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Partie III – Idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

III.1 Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On désigne par J^{E} le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{J}^{\mathrm{E}} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{E} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{M})\}$$

Montrer que J^{E} est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.2 On désigne par u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, v une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$.
On suppose que $\mathrm{Ker}(v)$ contient $\mathrm{Ker}(u)$.

III.2.a Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ telle que $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$. Montrer que $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$.

III.2.b Montrer qu'il existe une application linéaire w de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que $v = w \circ u$.

III.2.c Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Ker}(B)$ contient $\mathrm{Ker}(A)$.
Déduire de la question précédente qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ telle que $B = CA$.

III.3 Soient A, B et C trois matrices carrées d'ordre n telles que $\mathrm{Ker}(C)$ contient $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B)$.
Montrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre n, U et V, telles que $C = UA + VB$.

III.4 Déterminer les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.