Devoir surveillé n°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★★ **E3A PSI 2020**

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel λ, on pose $\mathrm{I}(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\, \mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

1. Justifier qu'il existe au plus un réel λ tel que $\mathrm{I}(\lambda)$ converge.

2. Pour tout réel x, on pose $\mathrm{H}_\lambda(x) = \int_a^x (\lambda - f(t))\, \mathrm{d}t$.

Démontrer que, si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\mathrm{I}(\lambda)$ existe et $\mathrm{I}(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$.

3. On suppose désormais que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique.

a. Montrer que pour tout réel x :

$$\mathrm{H}_\lambda(x+\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(x) = \lambda\mathrm{T} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, \mathrm{d}t$$

b. Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour la quelle la suite $(\mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

c. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée sur $\mathbb{R}$.

d. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $\mathrm{I}(\lambda)$ converge.

e. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$\mathrm{A}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{t}\, \mathrm{d}t$$

a. Justifier que A_n et B_n sont bien définies.

b. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.

c. Démontrer que la suite $(\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

d. A l'aide d'un changement de variable et de la question **3**, déterminer un équivalent de B_n lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 ★★★ **Norme $\|.\|_p$**

Pour $p \in \mathbb{R}_+^*$, on convient que $0^p = 0$ et on pose

$$\forall x \in \mathbb{K}^n,\ \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, on posera $x.y = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$.

1. Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\|.\|_p$ vérifie les propriétés de séparation et d'homogénéité.

2. Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

a. En utilisant la concavité de ln, montrer que pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $uv \leq \dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q}$.

b. En déduire que pour $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, $\|x.y\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$. On pourra d'abord traiter le cas où $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.

3. Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $\|.\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire. On pourra remarquer que pour $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$,

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k||x_k + y_k|^{p-1}$$

4. **a.** Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.

b. Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $p < q$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_q \leq \|x\|_p$, puis déterminer $\sup\limits_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|x\|_q}{\|x\|_p}$.

5. **a.** Soit $(p, q, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. Montrer que pour $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$

$$\|x.y\|_r \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

b. Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $p < q$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|x\|_q$$

puis déterminer $\sup\limits_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|x\|_p}{\|x\|_q}$.

6. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Montrer que $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p \to +\infty} \|x\|_p$.

Exercice 3 ★★ **ESTP 1982**

On considère une suite réelle (a_n) *strictement positive* et *bornée*. On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

1. Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$. On pose $u_n = \frac{a_n}{2^n}\mathrm{P}(n)\mathrm{Q}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

2. On pose alors pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$,

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}\mathrm{P}(n)\mathrm{Q}(n)$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

3. On suppose maintenant la suite (a_n) positive et non strictement positive. Donner une condition necessaire et suffisante portant sur la suite (a_n) afin que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définisse encore un produit scalaire sur E.

4. On suppose maintenant $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et l'on désigne par N_1 la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ correspondant à cette suite particulière (a_n). Cette norme est-elle équivalente à la norme N_2 définie par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \sup_{x\in[0,1]} |\mathrm{P}(x)|$$

Problème 1 – EPITA PT-TSI 2018

Dans ce problème, on étudie la convergence et la valeur d'intégrales de la forme suivante :

$$\mathrm{I}(f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} \, \mathrm{d}t$$

où f désigne une fonction continue de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ que l'on précisera par la suite.

Partie I –

On suppose dans cette partie que f est définie par $f(t) = \dfrac{\mathrm{P}(t)}{t^2+1}$ avec P polynomiale.

I.1 On suppose dans cette question que $\mathrm{P}(t) = 1$ i.e. $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$.

I.1.a Justifier la convergence de l'intégrale $\mathrm{I}(f)$.

I.1.b Calculer la valeur de $\mathrm{I}(f)$ à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

I.2 On suppose dans cette question que $\mathrm{P}(t) = t$ i.e. $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$. Justifier la convergence et déterminer la valeur de $\mathrm{I}(f)$.

I.3 On suppose dans cette question que $\mathrm{P}(t) = t^2$ i.e. $f(t) = \dfrac{t^2}{t^2+1}$. Justifier la convergence et déterminer la valeur de $\mathrm{I}(f)$.

I.4 Que peut-on dire de $\mathrm{I}(f)$ lorsque $\mathrm{P}(t) = t^n$ avec $n \geq 3$?

Partie II –

On suppose dans cette partie que f est définie par $f(t) = e^{-t}$.

II.5 Justifier la convergence de $\mathrm{I}(f)$.

II.6 Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, \mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u} \, \mathrm{d}u + \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

II.7 Justifier que $h : u \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{e^{-u} - 1}{u}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

II.8 En déduire la valeur de $\mathrm{I}(f)$.

II.9 Déterminer la convergence et la valeur de

$$\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} \, \mathrm{d}u$$