

# DEVOIR SURVEILLÉ N°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

**1** Supposons que  $A > 0$ ,  $X \geq 0$  et  $X \neq 0$ . Il existe donc  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $X_{i_0} > 0$ . Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j}X_j \geq A_{i,i_0}X_{i_0} > 0$$

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Alors, par inégalité triangulaire,

$$|(AB)_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n |A_{i,k}| |B_{k,j}| = (|A||B|)_{i,j}$$

On en déduit que  $|AB| \leq |A||B|$ .

**2** Pour le produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz est  $|(X, Y)| \leq \|X\| \|Y\|$ . En prenant  $X = (|z_1|, \dots, |z_n|)^T$  et  $Y = (|w_1|, \dots, |w_n|)^T$ , on obtient bien l'inégalité voulue.

**3** On a alors  $|1 + z|^2 = (1 + |z|)^2$  ou encore  $(1 + z)(1 + \bar{z}) = 1 + 2|z| + |z|^2$ . Sachant que  $z\bar{z} = |z|^2$ , on obtient  $\operatorname{Re}(z) = |z| \geq 0$ . De plus,  $|z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$  donc  $\operatorname{Im}(z) = 0$ . Ceci signifie que  $z \in \mathbb{R}_+$ . Supposons maintenant que  $|z + z'| = |z| + |z'|$ . En divisant par  $|z| > 0$  et en posant  $\alpha = z'/z$ , on obtient  $|1 + \alpha| = 1 + |\alpha|$ . D'après ce qui précède,  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ .

**4** Comme les  $z_i$  ne sont pas tous nuls, on peut quitte à les réordonner, supposer que  $z_1 \neq 0$ . Notons alors  $\theta$  un argument de  $z_1$ . On a donc alors  $z_1 = e^{i\theta}|z_1|$ . Soit  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Par inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| \leq |z_1 + z_k| + \sum_{j=1, j \neq k}^n |z_j| \leq \sum_{j=1}^n |z_j|$$

Or, par hypothèse,  $\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| = \sum_{j=1}^n |z_j|$  donc

$$|z_1 + z_k| + \sum_{j=1, j \neq k}^n |z_j| = \sum_{j=1}^n |z_j|$$

puis  $|z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k|$ . Il existe donc  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  tel que  $z_k = \alpha z_1$  d'après la question précédente. On a alors  $|z_k| = \alpha |z_1|$  de sorte que

$$z_k = \alpha z_1 = \alpha e^{i\theta} |z_1| = e^{i\theta} |z_k|$$

**5** Il est clair que  $\chi_A = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$ . On en déduit que

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc = (a - d)^2 + 4bc$$

**6** D'après la question précédente,  $\Delta \geq 4bc > 0$ .  $\chi_A$  possède donc deux racines réelles distinctes  $\lambda$  et  $\mu$ . On peut supposer que  $\lambda < \mu$ . Ainsi  $A$  possède deux valeurs propres distinctes  $\lambda$  et  $\mu$  : elle est donc diagonalisable et semblable à  $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .

**7** Remarquons que  $\lambda = \frac{1}{2}(a + d - \sqrt{\Delta})$  et  $\mu = \frac{1}{2}(a + d + \sqrt{\Delta})$ . Comme  $\Delta > 0$ ,  $-\sqrt{\Delta} < \sqrt{\Delta}$  et  $\lambda < \mu$ . Par ailleurs,  $\lambda + \mu = a + d > 0$  donc  $-\lambda < \mu$ . Ainsi  $|\lambda| < \mu$ .

**8** Posons  $D = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . Il existe alors  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  telle que  $A = PDP^{-1}$ . On a alors  $A^k = PD^kP^{-1}$  et  $D^k = P^{-1}A^kP$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Les applications  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto PMP^{-1}$  et  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}MP$  sont linéaires donc continues ( $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est de dimension finie). On en déduit que la suite  $(A^k)$  converge si et seulement si la suite  $D^k$  converge. La suite  $(A^k)$  converge si et seulement si  $\mu \in ]-1, 1]$  et  $\lambda \in ]-1, 1]$ . Mais comme  $|\lambda| < \mu$ , si  $\mu < 1$ , la suite  $(A^k)$  converge vers la matrice nulle. On en déduit que  $(A^k)$  converge vers une matrice non nulle si et seulement si  $\mu = 1$  et dans ce cas, elle converge vers  $L = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ . Par invariance du rang par similitude,  $\text{rg}(L) = 1$ . De plus,  $L^2 = L$  donc  $L$  est une matrice de projecteur.

**9** Dans ce cas,

$$\chi_B = X^2 - (2 - \alpha - \beta)X + (1 - \alpha)(1 - \beta) - \alpha\beta = X^2 - (2 - \alpha - \beta)X + 1 - \alpha - \beta = (X - 1)(X - (1 - \alpha - \beta))$$

Comme  $\alpha + \beta > 0$ ,  $\chi_B$  possède deux racines distinctes, à savoir 1 et  $1 - \alpha - \beta$  : elle est donc diagonalisable et semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha - \beta \end{pmatrix}$ . Or  $\text{Ker}(B - I_2) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}\right)$  et  $\text{Ker}(B - (1 - \alpha - \beta)I_2) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . On peut donc choisir  $S = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ .

**10** Comme  $B$  est à coefficients strictement positifs, ce qui précède montre que la suite  $(B^k)$  converge vers la matrice

$$\Lambda = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

**11** Tout d'abord,  $\|\cdot\|_\infty$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\|A\|_\infty = 0$ . Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^n |A_{i,j}| = 0$ . Comme tous les termes de ces sommes sont positifs, ils sont nuls. On en déduit que  $A = 0$ .

Soient maintenant  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors, comme  $|\lambda| \geq 0$ ,

$$\|\lambda A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |\lambda| |A_{i,j}| \right) = \max_{1 \leq i \leq n} \left( |\lambda| \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \right) = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \right) = |\lambda| \|A\|_\infty$$

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Par inégalité triangulaire,

$$\sum_{j=1}^n |A_{i,j} + B_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |B_{i,j}| \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$$

On en déduit que

$$\|A + B\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{i,j} + B_{i,j}| \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$$

On a bien prouvé que  $\|\cdot\|_\infty$  était une norme.

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n |(AB)_{i,j}| &= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |A_{i,k}| |B_{k,j}| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,k}| |B_{k,j}| \\
 &= \sum_{k=1}^n |A_{i,k}| \left( \sum_{j=1}^n |B_{k,j}| \right) \\
 &\leq \sum_{k=1}^n |A_{i,k}| \|B\|_\infty \\
 &= \|B\|_\infty \sum_{k=1}^n |A_{i,k}| \leq \|B\|_\infty \|A\|_\infty
 \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$ . La norme  $\|\cdot\|_\infty$  est donc sous-multiplicative.

**12** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ . Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Par inégalité triangulaire et en utilisant la question 2,

$$|(AB)_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n |A_{i,k}|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n |B_{k,j}|^2 \right)^{1/2}$$

On en déduit que

$$\|AB\|_2^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |(AB)_{i,j}|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( \sum_{k=1}^n |A_{i,k}|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |B_{k,j}|^2 \right) = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |A_{i,k}|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |B_{k,j}|^2 \right) = \|A\|_2^2 \|B\|_2^2$$

Puis  $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ .

**13** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\nu(A) = 0$ . Comme  $N$  est une norme  $S^{-1}AS = 0$  puis  $A = 0$ .

Soit  $(\lambda, A) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $\nu(\lambda A) = N(\lambda S^{-1}AS) = |\lambda| N(S^{-1}AS) = |\lambda| \nu(A)$ .

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ . Alors

$$\nu(A + B) = N(S^{-1}AS + S^{-1}BS) \leq N(S^{-1}AS) + N(S^{-1}BS) = \nu(A) + \nu(B)$$

Enfin,

$$\nu(AB) = N((S^{-1}AS)(S^{-1}BS)) \leq N(S^{-1}AS)N(S^{-1}BS) = \nu(A)\nu(B)$$

Donc  $\nu$  est également une norme sous-multiplicative sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**14** Les matrices  $A$  et  $S^{-1}AS$  sont semblables donc possèdent le même spectre. Ainsi  $\rho(A) = \rho(S^{-1}AS)$ .

**15**  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  donc  $A$  est trigonalisable.  $A$  est trigonalisable donc est semblable à une matrice triangulaire  $T$  dont on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les coefficients diagonaux. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^k$  est alors semblable à la matrice triangulaire  $T^k$  dont les coefficients diagonaux sont  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ . La question précédente permet d'affirmer que

$$\rho(A^k) = \rho(T^k) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i^k| = \left( \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \right)^k = \rho(T)^k = \rho(A)^k$$

De même,  $\alpha A$  est semblable à  $\alpha T$  donc

$$\rho(\alpha A) = \rho(\alpha T) = \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha \lambda_i| = |\alpha| \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = |\alpha| \rho(T) = |\alpha| \rho(A)$$

**16** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Notons  $X$  un vecteur propre associé et  $H$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont toutes les colonnes sont égales à  $X$ . Comme  $X \neq 0$ ,  $H \neq 0$ . De plus,  $AH = \lambda H$ . On en déduit que

$$|\lambda| N(H) = N(\lambda H) = N(AH) \leq N(A)N(H)$$

Comme  $N(H) > 0$ ,  $|\lambda| \neq N(A)$ . Par conséquent,

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda| \leq N(A)$$

**17** On peut déjà dire que  $D_\tau^{-1}TD_\tau$  est triangulaire supérieure comme produit de telles matrices. Ainsi

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j \implies (D_\tau^{-1}TD_\tau)_{i,j} = 0$$

De plus, pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i \leq j$ ,

$$(D_\tau^{-1}TD_\tau)_{i,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (D_\tau^{-1})_{i,k} T_{k,\ell} (D_\tau)_{\ell,j} = (D_\tau^{-1})_{i,i} T_{i,j} (D_\tau)_{j,j} = \tau^{j-i} T_{i,j}$$

**18** D'après la question précédente, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies \lim_{\tau \rightarrow 0} (D_\tau^{-1}TD_\tau)_{i,j} = 0$  et  $(D_\tau^{-1}TD_\tau)_{i,i} = T_{i,i}$ . On en déduit que  $\lim_{\tau \rightarrow 0} D_\tau^{-1}TD_\tau = \text{diag}(T_{1,1}, \dots, T_{n,n}) = L$ . De plus, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}^*$ , on a par inégalité triangulaire

$$\|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty - \|L\|_\infty \leq \|D_\tau^{-1}TD_\tau - L\|_\infty$$

donc

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty = \|L\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |T_{i,i}| = \rho(T)$$

Par définition de la limite, il existe donc  $\delta > 0$  tel que

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, |\tau| \leq \delta \implies \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon$$

**19** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $A$  est semblable à une matrice triangulaire  $T$ . On choisit alors  $\tau \in \mathbb{R}^*$  tel que  $|\tau| \leq \delta$  où  $\delta$  est défini dans la question précédente. On pose enfin  $N(M) = \|D_\tau^{-1}MD_\tau\|_\infty$  pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . La norme  $\|\cdot\|_\infty$  est sous-multiplicative d'après la question 11 donc  $N$  est également une norme sous-multiplicative d'après la question 13. La question précédente et la question 14 montrent alors que

$$N(A) = \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon$$

**20** Supposons que  $\rho(A) < 1$ . Soit alors  $\varepsilon > 0$  tel que  $\rho(A) + \varepsilon < 1$  (on peut par exemple prendre  $\varepsilon = \frac{1 - \rho(A)}{2}$ ). On choisit alors la norme  $N$  telle que précédemment. Par sous-multiplicativité,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, N(A^k) \leq N(A)^k \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k$$

Puisque  $0 \leq \rho(A) + \varepsilon < 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\rho(A) + \varepsilon)^k = 0$  puis  $\lim_{k \rightarrow +\infty} N(A^k) = 0$  i.e.  $(A^k)$  converge vers la matrice nulle.

Réciproquement supposons que  $(A^k)$  converge vers la matrice nulle. On se donne  $N$  une norme sous-multiplicative sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (par exemple la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ). D'après la question 16

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq \rho(A^k) \leq N(A^k)$$

On en déduit avec la question 15 que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(A)^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(A^k) = 0$$

Ceci implique que  $\rho(A) < 1$ .

**21** La matrice  $A$  étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

**22** Supposons que  $r = 0$ . Alors 0 est l'unique valeur propre de  $A$ .  $A$  étant diagonalisable,  $A$  est semblable à la matrice nulle :  $A$  est donc nulle. On en déduit par l'absurde que  $r > 0$ .

**23** Comme  $A$  est symétrique réelle, il existe une base orthonormée  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A$ . On note alors  $\lambda_k$  la valeur propre associée au vecteur propre  $X_k$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  unitaire. Alors  $X = \sum_{k=1}^n (X_k | X) X_k$ . Comme  $(X_1, \dots, X_n)$  est orthonormée,

$$X^T A X = \sum_{k=1}^n \lambda_k (X_k | X)^2 \leq \sum_{k=1}^n \mu (X_k | X)^2 = \mu \|X\|_2^2 = \mu$$

**24** Supposons qu'on ait égalité dans l'inégalité précédente. Alors

$$\sum_{k=1}^n (\mu - \lambda_k) (X | X_k)^2 = 0$$

Les termes de cette somme étant positifs,  $(\mu - \lambda_k) (X | X_k)^2 = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On en déduit que  $(\mu - \lambda_k) (X | X_k) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors

$$A X = \sum_{k=1}^n \lambda_k (X | X_k) X_k = \sum_{k=1}^n \mu (X | X_k) X_k = \mu X$$

**25** Soit  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  unitaire. Alors

$$|X^T A X| \leq |X^T| |A| |X| = |X|^T A |X|$$

car  $A$  est positive. De plus,

$$\|X\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |X_k|^2 = \sum_{k=1}^n X_k^2 = \|X\|_2^2 = 1$$

donc  $|X|$  est également unitaire. D'après la question précédente,  $|X|^T A |X| \leq \mu$ .

**26** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Notons  $X$  un vecteur propre unitaire associé à  $\lambda$ . D'après la question précédente,

$$|\lambda| = |X^T A X| \leq \mu$$

De plus, la question précédente montre aussi que  $\mu \geq 0$ . Ainsi, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ,  $|\lambda| \leq \mu = |\mu|$ . On en déduit que  $r = \mu$ .

**27** Soit  $X$  un vecteur propre de  $A$  unitaire associé à la valeur propre  $r$ . D'après la question **25** et la question précédente,

$$r = |r| = |X^T A X| \leq |X|^T A |X| \leq \mu = r$$

On en déduit notamment que  $|X|^T A |X| = r = \mu$ . D'après la question **24**,  $|X|$  est donc un vecteur propre associé à la valeur propre  $r$ .

Comme  $A > 0$  et  $|X| \geq 0$ , la question **1** montre que  $A|X| = r|X| > 0$ . On en déduit que  $|X| > 0$ .

**28** On a de plus,  $|AX| = |rX| = r|X| = A|X|$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a donc

$$\left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} X_j \right| = \sum_{j=1}^n A_{i,j} |X_j| = \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| |X_j|$$

D'après la question **4**,

$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{i,j} X_j = e^{i\theta} |A_{i,j}| |X_j| = e^{i\theta} A_{i,j} |X_j|$$

Comme  $A > 0$ , les  $A_{i,j}$  ne sont jamais nuls. Ainsi

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_j = e^{i\theta} |X_j|$$

Notamment,  $e^{i\theta} = \frac{X_1}{|X_1|} = \pm 1$ . On en déduit que  $X = \pm |X|$ .

**29** Supposons que  $\dim \text{Ker}(A - rI_n) > 1$ . On peut donc trouver deux vecteurs non nuls orthogonaux  $X$  et  $Y$  dans  $\text{Ker}(A - rI_n)$ . Les deux questions précédentes montrent que les coefficients de  $X$  sont tous strictement positifs ou tous strictement négatifs, de même que ceux de  $Y$ . On en déduit que  $(X | Y) = \sum_{k=1}^n X_k Y_k \neq 0$ , ce qui contredit le fait que  $X$  et  $Y$  sont orthogonaux. Ainsi  $\dim \text{Ker}(A - rI_n) = 1$ .

**30** Comme  $A$  est diagonalisable, la multiplicité de  $r$  est égale à la dimension du sous-espace propre  $\text{Ker}(A - rI_n)$ , à savoir 1.

Supposons que  $-r \in \text{Sp}(A)$ . Soit alors un vecteur  $X$  unitaire tel que  $AX = -rX$ . Alors  $X^T A X = -r$  puis  $|X^T A X| = r$ . De plus, d'après la question **25**, on a  $|X|^T A |X| = r$  et, comme  $X$  est encore unitaire,  $|X|$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $r$  d'après la question **24**. Comme  $X \notin \text{Ker}(A - rI_n)$ ,  $X \neq |X|$  i.e.  $|X| - X \neq 0$ . De plus,  $|X| - X \geq 0$  et  $A > 0$  donc  $A(|X| - X) > 0$  d'après la question **1**. Ainsi  $r(|X| + X) > 0$  i.e.  $|X| + X > 0$ . Ainsi, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_k + |X_k| > 0$ , ce qui entraîne  $X_k > 0$ . On en déduit que  $X = |X| \in \text{Ker}(A - rI_n)$  ce qui est absurde.

**REMARQUE.** Je ne vois pas l'intérêt de parler de la multiplicité au début de la question mais peut-être ai-je raté quelque chose.

**31** Considérons  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $\chi_A = X^2 - 1$  donc  $\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}$ .

**32**  $r^p$  est la plus grande valeur propre de  $A^p$  et  $A^p$  est strictement positive donc  $\text{Ker}(A^p - r^p I_n)$  est de dimension 1, engendré par un vecteur strictement positif d'après les questions **28** et **29**. Comme  $A$  et  $I_n$  commutent  $A^p - r^p I_n = B(A - rI_n)$  avec  $B = \sum_{k=0}^{p-1} r^{p-1-k} A^k$ . Ainsi  $\text{Ker}(A - rI_n) \subset \text{Ker}(A^p - r^p I_n)$ . Comme  $\text{Ker}(A - rI_n)$  n'est pas nul, ces deux noyaux sont égaux.

**33** Supposons  $p$  impair. Si  $-r$  était valeur propre de  $A$ , alors  $(-r)^p = -r^p$  serait valeur propre de  $A^p$ , ce qui contredirait le fait que  $r^p$  est la seule valeur propre de  $A^p$  de module égal à  $r^p$ . Ainsi  $-r$  n'est pas valeur propre de  $A$ . Si  $p$  est pair,  $-r$  et  $r$  sont deux racines distinctes de  $X^p - r^p$  donc  $(X - r)(X + r)$  divise  $X^p - r^p$ . De plus,  $X - r$  et  $X + r$  sont premiers entre eux donc, d'après le lemme des noyaux,

$$\text{Ker}(A - rI_n) \oplus \text{Ker}(A + rI_n) \subset \text{Ker}(A^p - r^p I_n)$$

Comme  $\text{Ker}(A - rI_n)$  et  $\text{Ker}(A^p - r^p I_n)$  sont de dimension 1,  $\dim \text{Ker}(A + rI_n) = 0$  i.e.  $-r$  n'est pas valeur propre de  $A$ . Quel que soit le cas de figure,  $r$  est l'unique valeur propre de  $A$  de module égal à  $r$ .

**34** Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ . Il existe donc  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  non nul tel que  $AX = \lambda X$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|X_i| = \|X\|_\infty$ . Alors

$$\sum_{j=1}^n A_{i,j} X_j = \lambda X_i$$

ou encore

$$(\lambda - A_{i,i})X_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{i,j} X_j$$

Par inégalité triangulaire

$$|\lambda - A_{i,i}| |X_i| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{i,j}| |X_j|$$

Par définition de  $i$ ,

$$|\lambda - A_{i,i}| \|X\|_\infty \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{i,j}| \|X\|_\infty$$

Comme  $X \neq 0$ ,  $\|X\|_\infty > 0$  de sorte que

$$|\lambda - A_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{i,j}|$$

ce qui conclut.

**35** On procède comme indiqué dans l'énoncé. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A) = \text{Sp}(D^{-1}AD)$ . Posons  $C = D^{-1}AD$ . Alors  $C_{i,j} = X_i^{-1} A_{i,j} X_j$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . On applique alors la question précédente à  $C$ . Il existe donc  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que

$$|\lambda - C_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |C_{i,j}|$$

Ceci s'écrit encore

$$|\lambda - A_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n X_i^{-1} |A_{i,j}| X_j$$

On en déduit que

$$|\lambda - A_{i,i}| \leq X_i^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^n B_{i,j} X_j$$

Or  $BX = \rho(B)X$  donc, en particulier,

$$\sum_{j=1}^n B_{i,j} X_j = \rho(B) X_i$$

ou encore

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n B_{i,j} X_j = (\rho(B) - B_{i,i}) X_i$$

En reportant dans la dernière inégalité,

$$|\lambda - A_{i,i}| \leq \rho(B) - B_{i,i}$$

ce qui conclut.