Interrogation écrite n°06

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer le polynôme minimal de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   On remarque que $A^2 = 3A$ *donc* $X^2 - 3X = X(X-3)$ *est un polynôme annulateur de* A. *Ainsi* π_A *divise* $X(X-3)$. *Par conséquent,* $\pi_A = X$ *ou* $\pi_A = X - 3$ *ou* $\pi_A = X(X-3)$. *Mais comme* $A \neq 0$, $\pi_A \neq X$ *et comme* $A \neq 3I_3$, $\pi_A \neq X - 3$. *Par conséquent,* $\pi_A = X(X-3)$. ∎

2. Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^x}$. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors* $(1/n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante de limite nulle. D'après le critère spécial des séries alternées,* $\sum f_n(x)$ *converge. Ainsi* $\sum f_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+^*$.

   Notons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n$. *Soit* $a > 0$. *Toujours d'après le critère spéciale,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, +\infty[,\ |R_n(x)| \leq f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(a)$$

   Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|R_n\|_\infty \leq f_{n+1}(a)$$

   Or $\lim_{n\to+\infty} f_{n+1}(a) = 0$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = 0$. *La suite* (R_n) *converge uniformément vers la fonction nulle sur* $[a, +\infty[$ *de sorte que* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $[a, +\infty[$. ∎

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme $\mathrm{D} : \mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}' \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

   Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}^{n+1} = 0$. *Ainsi* $\mathrm{D}^{n+1} = 0$. *On en déduit que* π_D *divise* X^{n+1}. *Or* $\mathrm{D}^n(\mathrm{X}^n) = n! \neq 0$ *donc* $\mathrm{D}^n \neq 0$ *et* π_D *ne divise pas* X^n. *On en déduit que* $\pi_\mathrm{D} = \mathrm{X}^{n+1}$. ∎

4. Soit $f_n : x \mapsto e^{-nx}$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$? Justifier.

   Première méthode. *Supposons que* (f_n) *converge uniformément sur* $\mathbb{R}_+^*$. *D'après le théorème de la double limite, on aurait alors*

   $$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to0^+} f_n(x) = \lim_{x\to0^+} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

   et donc $1 = 0$. *Ainsi* (f_n) *ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}_+^*$.
   Deuxième méthode. *On montre que* (f_n) *converge simplement vers la fonction nulle sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Mais* $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = 1$ *donc* (f_n) *ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.* ∎

5. On pose $f_n : x \mapsto \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

   Tout d'abord, $f_n(0) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{R}$. *De plus, pour* $x \in \mathbb{R}^*$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2nx}{n^2x^2} = \dfrac{2}{nx}$ *de sorte que* $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. *Ainsi* (f_n) *converge simplement vers la fonction nulle sur* $\mathbb{R}$.
   Par contre, $f_n(1/n) = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Par conséquent,* $(f_n(1/n))$ *ne converge vers* 0 *et* (f_n) *ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}$. ∎