Interrogation écrite n°10

NOM : Prénom : Note :

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

   Remarquons que
   $$\{X = Y\} = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \{X = n\} \cap \{Y = n\}$$
   Par σ-additivité,
   $$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\{X = n\} \cap \{Y = n\}\right)$$
   Par indépendance de X *et* Y*,*
   $$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (q^{n-1}p)^2$$
   en posant $q = 1 - p$. Par changement d'indice,
   $$\mathbb{P}(X = Y) = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{2-p}$$
   ∎

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Caculer la probabilité que X soit paire.

   Notons A *l'événement «*X *est paire». Alors* $A = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{X = 2n\}$. *Ainsi*
   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda)$$
   ∎

3. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée, les lancers étant indépendants. Calculer la probabilité de n'obtenir que des «pile».

   Notons P_n *l'événement «obtenir «pile» au* $n^{\text{ème}}$ *lancer». L'événement dont on recherche la probabilité est* $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. *Par continuité décroissante et indépendance des* F_n*,*
   $$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} F_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}(F_k) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$$
   ∎

4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X(X+1)}$.

   D'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

∎

5. On considère n urnes numérotées de 1 à n. L'urne numéro k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

   On notera U_k *l'événement «l'urne choisie est l'urne numéro k» et* B *l'événement la boule tirée est blanche. On recherche donc* P(B). *Comme* $\{U_k\}_{1\leq k\leq n}$ *est un système complet d'événements, on obtient avec après la formule des probabilités totales :*

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \mid U_k) P(U_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}$$

∎

6. Une urne A contient 1 boule rouge et 2 boules vertes tandis qu'une urne B contient 2 boules rouges et 1 boule verte. On choisit une urne au hasard et on pioche une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir pioché dans l'urne A sachant que la boule tirée est rouge ?

   Notons A *(resp.* B*) l'événement «on pioche dans l'urne* A *(resp.* B*)» et* R *(resp.* V*) l'événement «la boule piochée est rouge (resp. verte)». La probabilité recherchée est* $\mathbb{P}(A \mid R)$. *D'après la formule de Bayes*

$$\mathbb{P}(A \mid R) = \frac{\mathbb{P}(R \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(R)}$$

   Comme A *et* B *forment un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabibilités totales*

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R \mid B)\mathbb{P}(B)$$

   Finalement,

$$\mathbb{P}(R) = \frac{\mathbb{P}(R \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(R \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R \mid B)\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

∎