Devoir à la maison n°04

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 On sait que la convergence absolue d'une intégrale impropre implique sa convergence. On en déduit que $E \subset E'$.

2 Supposons E non vide. Soit $a \in E$. Soit également $x \in [a, +\infty[$. Comme λ est à valeurs positives, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|f(t)e^{-\lambda(t)x}| \leq |f(t)e^{-\lambda(t)a}|$$

Par hypothèse, $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)a}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ également i.e. $x \in E$.
On a donc montré que pour tout $a \in E$, $[a, +\infty[\subset E$, ce qui signifie que E est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

3 On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Soit $a \in E$.

- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est continue sur $[a, +\infty[$.
- Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+$,
$$|f(t)e^{-\lambda(t)x}| \leq |f(t)e^{-\lambda(t)a}|$$
et $t \mapsto |f(t)e^{-\lambda(t)a}|$ est intégrale sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que $\mathrm{L}f$ est continue sur $\bigcup_{a\in E}[a, +\infty[= E$.

4 Si f est positive, pour tout $x \in E$, les fonctions $t \mapsto |f(t)e^{-\lambda(t)x}|$ et $t \mapsto e^{-\lambda(t)x}$ sont égales donc $E = E'$.

5 Dans les trois cas de figure suivants, la fonction f est positive donc $E = E'$.

5.a Comme λ est croissante et non majorée, $\lim\limits_{+\infty} \lambda = +\infty$.

- On en déduit que $\int_0^{+\infty} \lambda'(t)\,\mathrm{d}t$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $t \mapsto -\frac{1}{x}e^{-\lambda(t)x}$ est une primitive de $t \mapsto \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x}$ et
$$\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{x}e^{-\lambda(t)x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
On en déduit que $\int_0^{+\infty} \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x}\,\mathrm{d}t$ diverge si $x < 0$ et converge si $x > 0$.

On peut alors conclure que $E = E' = \mathbb{R}_+^*$.
Remarque. On peut aussi affirmer que si $x > 0$,

$$\mathrm{L}f(x) = \frac{e^{-\lambda(0)x}}{x}$$

5.b Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in [x, +\infty[\cap\mathbb{R}_+$,

$$e^{t\lambda(t)}e^{-\lambda(t)x} = e^{\lambda(t)(t-x)} \geq 1$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{t\lambda(t)}e^{-\lambda(t)x}\,\mathrm{d}t$ diverge. Ainsi $\mathrm{E} = \mathrm{E}' = \varnothing$.

5.c Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $t \in [-x, +\infty[\cap\mathbb{R}_+$,

$$0 \leq \frac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}e^{-x\lambda(t)} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Or $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on peut dire au choix que $1/(1+t^2) \underset{t\to+\infty}{\sim} 1/t^2$ ou que arctan admet une limite finie en $+\infty$), donc $x \in \mathrm{E}$. Finalement $\mathrm{E} = \mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ **6.a** Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \geq 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

  et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $x \in \mathrm{E}$.
- Si $x > 0$, on remarque que $\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-xt^2}t^2$ donc, quitte à poser $u = t^2$, $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} = +\infty$. On peut alors par exemple minorer $t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ par 1 au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve que $x \notin \mathrm{E}$.

En conclusion, $\mathrm{E} = \mathbb{R}_+$. Par ailleurs,

$$\mathrm{L}f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{+\infty} \arctan - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

6.b Posons $\varphi(x,t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -\frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at^2}$$

  Or $e^{-at^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc $t \mapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que $\mathrm{L}f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et a fortiori dérivable) sur $\bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*} [a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

6.c Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On sait de plus que

$$(\mathrm{L}f)'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que

$$\mathrm{L}f(x) - (\mathrm{L}f)'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$$

En effectuant le changement de variable $u = t\sqrt{x}$ (licite car linéaire),

$$\mathrm{L}f(x) - (\mathrm{L}f)'(x) = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{x}}$$

en posant $\mathrm{A} = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$. Comme A est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non constamment nulle sur $\mathbb{R}_+$, $\mathrm{A} > 0$.

Remarque. Avec l'égalité précédente et la continuité de $\mathrm{L}f$ en 0, $\lim_{0^+}(\mathrm{L}f)' = -\infty$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, $\lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{L}f(x) - \mathrm{L}f(0)}{x-0} = -\infty$ et donc $\mathrm{L}f$ n'est pas dérivable en 0.

6.d D'après ce qui précède, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(t) = e^{-t}(\mathrm{L}f(t) - (\mathrm{L}f)'(t)) = \frac{\mathrm{A}e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

Si l'on se donne $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on peut alors écrire

$$g(x) - g(y) = \mathrm{A} \int_y^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$$

Comme $\mathrm{L}f$ est continue en 0, g l'est également et $\lim_{y \to 0^+} g(y) = g(0) = \mathrm{L}f(0) = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ converge puisque $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. On en déduit que $\lim_{y \to 0^+} \int_y^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$.
On obtient alors l'égalité voulue en faisant tendre y vers 0^+ dans l'égalité initiale.

6.e Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq g(x) \leq e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \frac{\pi e^{-x}}{2}$$

donc $\lim_{+\infty} g = 0$. Avec la question précédente, on obtient la convergence et l'égalité

$$\mathrm{A} \int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Par le changement de variable $u = \sqrt{t}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\ \mathrm{d}t = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{A}$$

et donc $\mathrm{A}^2 = \frac{\pi}{4}$. Comme $\mathrm{A} > 0$, $\mathrm{A} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.