Calcul différentiel

Dans tout ce chapitre,

- E, F, G désignent des $\mathbb{R}$**-espaces vectoriels de dimensions finies**;
- $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ désignent des **ouverts** respectifs de E et F.

1 Différentiabilité

1.1 Dérivabilité selon un vecteur

Définition 1.1 Dérivée selon un vecteur

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$, $a \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathrm{E}$. On dit que f est **dérivable en a selon le vecteur** v si l'application $\varphi_{a,v} : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0. Dans ce cas, on appelle **dérivée de f en a selon le vecteur** v le vecteur $\varphi'_{a,v}(0)$, que l'on note $\mathrm{D}_v f(a)$.

Remarque. Si on note $(f_1, \dots, f_n)$ les coordonnées de $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ dans une base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ de F (i.e. $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$), alors f est dérivable en a selon le vecteur v si et seulement si les f_i le sont. De plus,

$$\mathrm{D}_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_v f_i(a)\mathbf{f}_i$$

Exemple 1.1

L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$ est dérivable en tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ selon tout vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\mathrm{D}_{(u,v)} f(a, b) = 2(au + bv, av + bu)$$

Définition 1.2 Dérivées partielles dans une base

Soient $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ une base de E, $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ et $a \in \mathcal{U}$. On appelle **dérivées partielles** de f dans la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ les applications $\mathrm{D}_{\mathbf{e}_j} f$ **si elles sont définies**. On les note $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ ou $\partial_j f$.

Remarque. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$ et qu'on ne précise pas la base dans laquelle on considère les dérivées partielles, c'est qu'on considère implicitement la **base canonique** de $\mathbb{R}^p$.

Remarque. Si on note $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ les coordonnées de $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ dans une base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ de F (i.e. $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$), alors g admet des dérivées partielles en a dans la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ si et seulement si c'est également le cas pour les f_i. De plus,

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ \partial_j f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i(a)\mathbf{f}_i$$

Remarque. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, les variables d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{F}$ sont notées plus volontiers x et y que x_1 et x_2. Les dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ seront alors notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ plutôt que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ ou $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$.

De même, si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, les dérivées partielles dans la base canonique seront plutôt notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Méthode **Calculer des dérivées partielles**

Lorsque $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^n$, il est très aisé de calculer des dérivées partielles dans la base canonique. Il suffit de dériver chaque composante de la fonction par rapport à une variable les autres étant fixées.
Autrement dit, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est la dérivée de l'application $x_j \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$.

Exemple 1.2

L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$ admet des dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ en tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2(a, b) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2(b, a)$$

Exemple 1.3

On pose $\mathcal{U} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y^2 > 0\right\}$. L'application $f : (x, y, z) \in \mathcal{U} \mapsto (\ln(x + y^2), e^{xz})$ admet des dérivées partielles sur $\mathcal{U}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \left(\frac{1}{x + y^2}, ze^{xz}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \left(\frac{2y}{x + y^2}, 0\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (0, xe^{xz})$$

Exemple 1.4

Les applications $\pi_i : (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto x_i$ admettent des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^p$ et

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_p) = \delta_{i,j}$$

Attention ! Une fonction peut admettre des dérivées partielles sans être continue.

Exemple 1.5

Considérons la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

- Par opérations, f admet clairement des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$$

  donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

- Par contre, f n'est pas continue en $(0, 0)$ puisque, par exemple,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ f(t, t) = \frac{1}{2}$$

  Ainsi $(t, t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} (0, 0)$ mais $f(t, t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \neq f(0, 0)$.

Attention ! Une fonction peut même admettre des dérivées directionnelles selon tout vecteur sans être continue.

Exemple 1.6

Considérons la fonction

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

- Par opérations, f admet clairement des dérivées directionnelles selon tout vecteur en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $u = (h,k)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \ \frac{f(tu)-f(0,0)}{t} = \frac{hk^2}{h^2+t^2k^4} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} \dfrac{k^2}{h} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

  Donc f admet bien une dérivée directionnelle selon le vecteur u en $(0,0)$.

- Par contre, f n'est pas continue en $(0,0)$ puisque, par exemple,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \ f(t^2,t) = \frac{1}{2}$$

  Ainsi $(t^2,t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (0,0)$ mais $f(t^2,t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq f(0,0)$.

1.2 Différentiabilité

Notation 1.1 Négligeabilité

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. On suppose que $0_{\mathrm{E}} \in \mathcal{U}$. Ecrire que $f(h) \underset{h\to 0_{\mathrm{E}}}{=} o(h)$ signifie que $\lim\limits_{h\to 0_{\mathrm{E}}} \dfrac{f(h)}{\|h\|} = 0_{\mathrm{F}}$.

Remarque. Les normes que l'on choisit sur E et F n'importent pas car toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes.

Définition 1.3 Développement limité à l'ordre 1

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. Une écriture du type

$$f(a+h) \underset{h\to 0_{\mathrm{E}}}{=} c + \mathrm{L}(h) + o(h)$$

avec $c \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ s'appelle un **développement limité** de f à l'ordre 1 en a. Si un tel développement limité existe, il est unique i.e. le vecteur c et l'application linéaire L sont uniques.

Remarque. Ceci signifie que

$$\lim_{h\to 0_{\mathrm{E}}} \frac{f(a+h)-c-\mathrm{L}(h)}{\|h\|} = 0_{\mathrm{F}}$$

Définition 1.4 Différentiabilité en un point

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. On dit que f est **différentiable** en $a \in \mathcal{U}$ si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas, il existe une unique application linéaire $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que

$$f(a+h) \underset{h \to 0_{\mathrm{E}}}{=} f(a) + \mathrm{L}(h) + o(h)$$

Cette application linéaire s'appelle la **différentielle** de f en a et se note $\mathrm{d}f(a)$.

Remarque. La différentielle de f en a est également appelée l'**application linéaire tangente** à f en a.

Remarque. Par souci de lisibilité, l'image d'un vecteur v par la différentielle de f en a se notera $\mathrm{d}f(a)\cdot v$ plutôt que $\mathrm{d}f(a)(v)$.

Proposition 1.1

Si on note $(f_1, \dots, f_n)$ les coordonnées de $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ dans une base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ de F (i.e. $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$), alors f différentiable en a si et seulement si les f_i le sont. De plus,

$$\forall v \in \mathrm{E},\ \ \mathrm{d}f(a) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}f_i(a) \cdot v)\mathbf{f}_i$$

Exemple 1.7

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2,\ f((a,b)+(h,k)) = f(a,b) + 2(ah+bk, bh+ak) + (h^2+k^2, 2hk)$$

L'application

$$\mathrm{L} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (h,k) & \longmapsto & 2(ah+bk, bh+ak) \end{array} \right.$$

est bien linéaire et

$$(h^2+k^2, 2hk) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} o((h,k))$$

En effet, si l'on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme définie par $\|(u,v)\| = |u| + |v|$

$$\|(h^2+k^2, 2hk)\| = (|h|+|k|)^2 = \|(h,k)\|^2$$

de sorte que

$$\frac{\|(h^2+k^2, 2hk)\|}{\|(h,k)\|} = \|(h,k)\| \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que f est différentiable en (a, b) et que $\mathrm{d}f(a, b)$ est l'endomorphisme $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2(ah + bk, bh + ak)$.

Exemple 1.8 Différentielle de l'inversion matricielle

On considère l'application $f : \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M}^{-1}$. On va montrer que f est différentiable sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.
Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 tel que $\mathrm{M}+\mathrm{H}$ est inversible pour tout $\mathrm{H} \in \mathcal{V}$.
Remarquons maintenant que

$$f(\mathrm{M}+\mathrm{H}) - f(\mathrm{M}) = (\mathrm{M}+\mathrm{H})^{-1} - \mathrm{M}^{-1} = (\mathrm{M}+\mathrm{H})^{-1}(\mathrm{I}_n - (\mathrm{M}+\mathrm{H})\mathrm{M}^{-1}) = -(\mathrm{M}+\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned} f(\mathrm{M}+\mathrm{H}) - f(\mathrm{M}) + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1} &= \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1} - (\mathrm{M}+\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1} \\ &= (\mathrm{M}+\mathrm{H})^{-1}((\mathrm{M}+\mathrm{H})\mathrm{M}^{-1} - \mathrm{I}_n)\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1} \\ &= f(\mathrm{M}+\mathrm{H})(\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1})^2 \end{aligned}$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ de sorte que

$$\|f(\mathrm{M}+\mathrm{H})(\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1})^2\| \leq \|f(\mathrm{M}+\mathrm{H})\|\|\mathrm{M}^{-1}\|^2\|\mathrm{H}\|^2$$

puis pour $\mathrm{H} \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|f(\mathrm{M}+\mathrm{H})(\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1})^2\|}{\|\mathrm{H}\|} \leq \|f(\mathrm{M}+\mathrm{H})\|\|\mathrm{M}^{-1}\|^2\|\mathrm{H}\|$$

f est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ [a] donc $\lim_{\mathrm{H}\to 0} f(\mathrm{M}+\mathrm{H}) = f(\mathrm{M})$ puis $\lim_{\mathrm{H}\to 0} \|f(\mathrm{M}+\mathrm{H})\| = \|f(\mathrm{M})\|$. On en déduit que

$$\lim_{\mathrm{H}\to 0} \frac{\|f(\mathrm{M}+\mathrm{H})(\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1})^2\|}{\|\mathrm{H}\|} = 0$$

ou encore

$$f(\mathrm{M}+\mathrm{H})(\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1})^2 \underset{\mathrm{H}\to 0}{=} o(\mathrm{H})$$

Finalement,

$$f(\mathrm{M}+\mathrm{H}) \underset{\mathrm{H}\to 0}{=} f(\mathrm{M}) - \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1} + o(\mathrm{H})$$

L'application $\mathrm{H} \mapsto -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1}$ est clairement linéaire : f est donc différentiable en M et $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ est l'application $\mathrm{H} \mapsto -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}\mathrm{M}^{-1}$.

[a] Classique : utiliser la formule de la comatrice.

Proposition 1.2

Si $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ est **différentiable** en $a \in \mathcal{U}$, alors

- f est **continue** en a ;
- f admet des dérivées en a selon tout vecteur $v \in \mathrm{E}$;
- $\forall v \in \mathrm{E},\ \mathrm{d}f(a) \cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$.

Définition 1.5 Différentiabilité sur un ouvert

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. On dit que f est **différentiable** sur $\mathcal{U}$ si f est diiférentiable en tout point de $\mathcal{U}$. L'application

$$\mathrm{d}f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \\ a & \longmapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array} \right.$$

s'appelle la **différentielle** de f sur $\mathcal{U}$.

Proposition 1.3 Cas particuliers

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$.

- Si f est **constante** sur $\mathcal{U}$, alors f est différentiable sur $\mathcal{U}$ et $\mathrm{d}f$ est **nulle** sur $\mathcal{U}$.
- Si f est la restriction à $\mathcal{U}$ d'une **application linéaire** de E dans F, alors f est différentiable sur $\mathcal{U}$ et pour tout $a \in \mathcal{U}$, $\mathrm{d}f(a) = f$.
- Si $\mathcal{U}$ est un intervalle ouvert de $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, alors f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ si et seulement si f est dérivable en a et, dans ce cas, $f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$ ou encore $\mathrm{d}f(a) \cdot h = f'(a)h$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.9

Les applications $\pi_i : (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto x_i$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathrm{d}\pi_i = \pi_i$.

1.3 Lien avec les dérivées partielles

Proposition 1.4 Lien entre différentielle et dérivées partielles

Soient $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ une base de E et $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. Si f est **différentiable** en a, alors f admet des **dérivées partielles** en a dans la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ et

$$\forall v \in \mathrm{E},\ \mathrm{d}f(a) \cdot v = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) \mathbf{e}_j^*(v)$$

ou plus simplement

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) \mathbf{e}_j^*$$

Remarque. On en déduit un lien entre les dérivées directionnelles et les dérivées partielles si la fonction est **différentiable**. En effet

$$\forall v \in \mathrm{E},\ \mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) \mathbf{e}_j^*(v)$$

Remarque. Dans le cas où $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, les formes linéaires $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_i$ sont souvent notées $\mathrm{d}x_i$. Dans ce cas, on peut écrire pour $f : \mathcal{U} \mapsto \mathrm{F}$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$,

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ \mathrm{d}x_i$$

Exemple 1.10

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a vu que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2(a, b) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2(b, a)$$

Comme f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{d}f(a, b) \cdot (h, k) = 2h(a, b) + 2k(b, a) = 2(ah + bk, bh + ak)$$

Attention ! Une fonction peut-être continue et admettre des dérivées selon tout vecteur sans pour autant être différentiable.

Exemple 1.11

Considérons la fonction

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

- Par opérations, f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Par ailleurs, on a classiquement $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ donc

  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ |f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|y|$$

  On en déduit que

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

  donc f est continue en $(0,0)$.

- Par opérations, f admet clairement des dérivées directionnelles selon tout vecteur en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $u = (h,k)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Alors

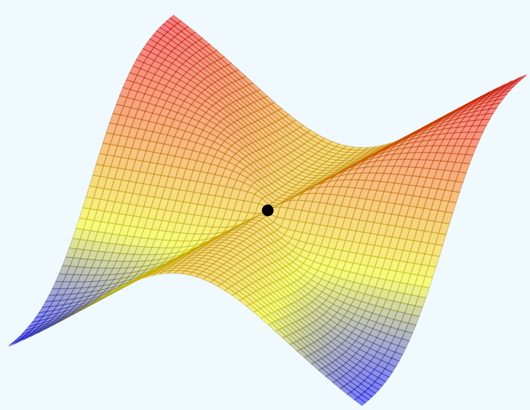
  $$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(tu) - f(0,0)}{t} = f(h,k) = f(u)$$

  Ainsi f admet une dérivée en $(0,0)$ selon le vecteur u et $\mathrm{D}_u f(0,0) = f(u)$.

- Si f était différentiable en $(0,0)$, alors on aurait

  $$\forall u = (h,k) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{D}_u f(0,0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = h\mathrm{D}_{(1,0)}f(0,0) + k\mathrm{D}_{(0,1)}f(0,0) = 0$$

  Mais, par exemple, $\mathrm{D}_{(1,1)}f(0,0) = \frac{1}{2} \neq (0,0)$.



Proposition 1.5 Matrice d'une différentielle dans un couple de bases

Soient $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ une base de E, $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ une base de F et $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. Notons $(f_1, \dots, f_n)$ les coordonnées de f dans la base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ (i.e. $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ g$).
Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$, alors la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est $\left(\partial_j f_i(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.

Définition 1.6 Matrice jacobienne

Supposons $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^p$. Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ est différentiable en a, la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ s'appelle la **matrice jacobienne** de f en a.

Exemple 1.12

L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2, xy)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Sa matrice jacobienne en un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Exemple 1.13

On pose $\mathcal{U} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y^2 > 0\right\}$. L'application $f : (x, y, z) \in \mathcal{U} \mapsto (\ln(x + y^2), e^{xz})$ est différentiable sur $\mathcal{U}$. Sa matrice jacobienne en un point $(x, y, z) \in \mathcal{U}$ est $\begin{pmatrix} \frac{1}{x+y^2} & \frac{2y}{x+y^2} & 0 \\ ze^{xz} & 0 & xe^{xz} \end{pmatrix}$.

1.4 Gradient d'une fonction numérique

Dans ce paragraphe, $\mathrm{F} = \mathbb{R}$.

Définition 1.7 Gradient

On suppose que E est un espace euclidien. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$, on appelle **gradient** de f en a, l'unique vecteur $\nabla f(a)$ de E tel que

$$\forall v \in \mathrm{E},\ \ \mathrm{d}f(a) \cdot v = \langle \nabla f(a), v \rangle$$

Remarque. On peut toujours munir un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d'une structure d'espace euclidien. En effet, si $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ est une base de E, l'application

$$(x, y) \in \mathrm{E}^2 \mapsto \sum_{k=1}^{p} \mathbf{e}_k^*(x)\mathbf{e}_k^*(y)$$

est un produit scalaire. De plus, $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ est alors une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Exemple 1.14 Gradient du carré de la norme

Soit E un espace euclidien. Posons $f : x \in \mathrm{E} \mapsto \|x\|^2$. Fixons $a \in \mathrm{E}$.

$$\forall h \in \mathrm{E},\ f(a + h) = f(a) + 2\langle a, h \rangle + \|h\|^2$$

donc

$$f(a + h) \underset{h \to 0_{\mathrm{E}}}{=} f(a) + 2\langle a, h \rangle + o(h)$$

Ainsi f est différentiable en a et $\nabla f(a) = 2a$.

Proposition 1.6 Coordonnées du gradient dans une base orthonormale

On suppose que E est un espace euclidien. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Les coordonnées de $\nabla f(a)$ dans une **base orthonormale** $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ de E sont les dérivées partielles de f dans cette base :

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) \mathbf{e}_j$$

Remarque. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$ est muni de son produit scalaire usuel, la base canonique est orthonormale. Par conséquent, si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$, alors

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \leq j \leq n}$$

Interprétation géométrique du gradient

Si $\nabla f(a) \neq 0_{\mathrm{E}}$, $\nabla f(a)$ est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale. Il suffit en effet de remarquer que pour tout vecteur v unitaire

$$\mathrm{D}_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle \leq \| \nabla f(a) \| \, \|v\| = \| \nabla f(a) \|$$

avec égalité si et seulement si v et $\nabla f(a)$ sont colinéaires et de même sens (inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité).

Exemple 1.15

Considérons l'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$. f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel de sorte que la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est orthonormale. Alors

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = (2x, 2y)$$

On peut retrouver la différentielle de f.

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \; \mathrm{d}f(x, y) \cdot (h, k) = \langle \nabla f(x, y), (h, k) \rangle = 2(xh + yk)$$

Exemple 1.16 Gradient et différentielle du déterminant

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ et on considère l'application $\det : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(\mathrm{M})$. Cette application est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car polynomiale en les coefficients de la matrice.
Fixons $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que $j \in [\![1, n]\!]$. En développant le $\det(\mathrm{M})$ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ colonne, on obtient

$$\det(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j} \, \mathrm{com}(\mathrm{M})_{i,j}$$

Comme chacun des coefficients $\mathrm{com}(\mathrm{M})_{i,j}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ est indépendant des coefficients $\mathrm{M}_{1,j}, \dots, \mathrm{M}_{n,j}$, on en déduit notamment que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \; \partial_{(i,j)} \det(\mathrm{M}) = \mathrm{com}(\mathrm{M})_{i,j}$$

où les $\partial_{(i,j)} \det$ désignent les dérivées partielles de det dans la base canonique $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme cette base est orthonormée,

$$\nabla \det(\mathrm{M}) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \mathrm{com}(\mathrm{M})_{i,j} \mathrm{E}_{i,j} = \mathrm{com}(\mathrm{M})$$

On peut alors retrouver la différentielle du déterminant :

$$\forall \mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \; \mathrm{d}(\det)(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = \langle \nabla \det(\mathrm{M}), \mathrm{H} \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{com}(\mathrm{M})^\top \mathrm{H})$$

2 Opérations sur les fonctions différentiables

Proposition 2.1 Combinaison linéaire

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. Si f et g sont différentiables en $a \in \mathcal{U}$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda\,\mathrm{d}f(a) + \mu\,\mathrm{d}g(a)$.

Proposition 2.2

Soient $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_p$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $f_1, \dots, f_p$ des applications de $\mathcal{U}$ à valeurs respectivement dans $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_p$ et $\mathrm{M} : \prod_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i \mapsto \mathrm{G}$ une application multilinéaire. Si $f_1, \dots, f_p$ sont différentiables en $a \in \mathcal{U}$, alors $\mathrm{M}(f_1, \dots, f_p)$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}(f_1, \dots, f_p))(a) = \mathrm{M}(\mathrm{d}f_1(a), f_2(a), \dots, f_p(a)) + \mathrm{M}(f_1(a), \mathrm{d}f_2(a), \dots, f_p(a)) + \dots + \mathrm{M}(f_1(a), \dots, f_{p-1}(a), \mathrm{d}f_p(a))$$

Remarque. De manière plus claire,

$$\forall h \in \mathrm{E},\ \mathrm{d}(\mathrm{M}(f_1, \dots, f_p))(a) \cdot h = \mathrm{M}(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h, f_2(a), \dots, f_p(a)) + \dots + \mathrm{M}(f_1(a), \dots, f_{p-1}(a), \mathrm{d}f_p(a) \cdot h)$$

Exemple 2.1

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. Posons $\varphi(x) = \langle f(x), x\rangle$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Comme f et Id_E sont différentiables sur E en tant qu'applications linéaires, φ est également différentiable sur E car le produit scalaire est bilinéaire. De plus, $\mathrm{d}f(x) = f$ et $\mathrm{d}\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}(x) = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ de sorte que

$$\forall (x, h) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{d}\varphi(x) \cdot h = \langle f(h), x\rangle + \langle f(x), h\rangle$$

Proposition 2.3 Composition

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathcal{V} \to \mathrm{G}$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$.

Remarque. Soient $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F et $\mathcal{G}$ une base de G. Si A est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et B est la matrice de $\mathrm{d}g(f(a))$ dans les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, alors BA est la matrice de $\mathrm{d}(g \circ f)(a)$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$.

Corollaire 2.1 Dérivée le long d'un arc

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\gamma : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ telles que $\gamma(\mathrm{I}) \subset \mathcal{U}$. Si γ est dérivable en $t \in \mathrm{I}$ et f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Exemple 2.2 Dérivée le long d'une droite

Si $\gamma(t) = x + th$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot h = \mathrm{D}_h f(\gamma(t))$.

Exemple 2.3

Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$ et $\gamma = (x_1, \dots, x_p)$, alors

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{j=1}^{p} x_j'(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))$$

Corollaire 2.2 Dérivées partielles d'une composée

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathcal{V} \to \mathrm{G}$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. On note $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ les dérivées partielles de f dans une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ de E et $\frac{\partial g}{\partial y_i}$ les dérivées partielles de g dans une base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ de F. Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et si g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ admet des dérivées partielles en a dans la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ et

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ \partial_j(g \circ f)(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i g(f(a)) \partial_j f_i(a)$$

où $(f_1, \dots, f_n)$ désignent les coordonnées de f dans la base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ (i.e. $f_i = \mathbf{f}_i^* \circ f$).

Méthode Règle de la chaîne

Soient $x_1, \dots, x_n$ sont des fonctions différentiables sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f est une fonction différentiable sur un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$. On suppose de plus que $(x_1, \dots, x_n)(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Alors

$$\forall j \in [\![1, m]\!],\ \frac{\partial f}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)) \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_m)$$

où on considère les dérivées partielles dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$.
Par abus de notation, on pourra tout simplement écrire

$$\forall j \in [\![1, m]\!],\ \frac{\partial f}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$$

à condition de bien comprendre ce que l'on manipule.

Exemple 2.4 Coordonnées polaires

Soit f différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall (r,\theta)\in\mathbb{R}^2,\ g(r,\theta)=f(x(r,\theta),y(r,\theta))$$

avec

$$x(r,\theta)=r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y(\theta)=r\sin\theta$$

D'après la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)\\
&= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\\
\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))\frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)\\
&= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))
\end{aligned}$$

Inversement, pour $r\neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta)) &= \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta)) &= \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)
\end{aligned}$$

Exemple 2.5 Gradient en coordonnées polaires

Soit f différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall (r,\theta)\in\mathbb{R}^2,\ g(r,\theta)=f(x(r,\theta),y(r,\theta))$$

avec

$$x(r,\theta)=r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y(\theta)=r\sin\theta$$

On a montré précédemment que, pour $r\neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\\
\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))+\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))
\end{aligned}$$

En notant R la matrice de rotation d'angle θ, on a donc

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\\ \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\end{pmatrix}=\mathrm{R}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla} f(x(r,\theta),y(r,\theta))$$

Ainsi en posant

$$\mathbf{u}_\theta=(\cos\theta,\sin\theta) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{v}_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta)$$

les coordonnées de $\boldsymbol{\nabla} f(x(r,\theta),y(r,\theta))$ dans la base orthonormé $(\mathbf{u}_\theta,\mathbf{v}_\theta)$ sont

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta),\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right)$$

3 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

3.1 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 3.1 Application de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si elle est différentiable sur $\mathcal{U}$ et si $\mathrm{d}f$ est continue sur $\mathcal{U}$.

Théorème 3.1 Classe $\mathcal{C}^1$ et dérivées partielles

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si et seulement si

- f admet des dérivées partielles (dans une certaine base de E) en tout point de $\mathcal{U}$;
- ces dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{U}$.

Attention ! Une fonction peut-être différentiable sans qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^1$. Notamment, les dérivées partielles d'une application différentiable ne sont pas nécessairement continues.

Exemple 3.1

Considérons la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f est différentiable en $(0, 0)$ mais ses dérivées partielles n'y sont pas continues.

- Si l'on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},\ f(x, y) = \|(x, y)\|^2 \sin\left(\frac{1}{\|(x, y)\|^2}\right)$$

Comme sin est bornée, il est clair que $f(x, y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} o((x, y))$. Ainsi f est bien différentiable en $(0, 0)$ et $\mathrm{d}f(0, 0)$ est nulle.

- Tout d'abord, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

De plus,

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$
$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = y \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Pourtant,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 2y \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) - \frac{2}{y} \cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

donc $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$ et $y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, y)$ n'admettent pas de limite en 0 car la fonction $t \mapsto t \sin(1/t^2)$ admet une limite nulle en 0 mais la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} \cos(1/t^2)$ n'admet pas de limite en 0. Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'admettent pas de limite en $(0, 0)$. A fortiori, elles n'y sont pas continues.

Proposition 3.1 Intégrale curviligne

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Alors

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t$$

Corollaire 3.1 Applications constantes

On suppose $\mathcal{U}$ **connexe par arcs**. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. Alors f est constante sur $\mathcal{U}$ si et seulement si $\mathrm{d}f$ est nulle sur $\mathcal{U}$.

3.2 Applications de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$)

On peut définir des dérivées partielles de dérivées partielles.

Définition 3.2 Dérivées partielles d'ordre k

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. On appelle **dérivée partielle d'ordre** k dans une base de E une dérivée partielle de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_{k-1}}}\left(\cdots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}\right)\right)\right) = \partial_{j_k}\left(\partial_{j_{k-1}}\left(\cdots\left(\partial_{j_1} f\right)\right)\right)$$

que l'on notera plus simplement

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k}\partial x_{j_{k-1}}\cdots\partial x_{j_1}} = \partial_{j_k}\partial_{j_{k-1}}\partial_{j_1} f$$

Remarque. A priori, l'ordre des indices compte. Dans la définition, on dérive d'abord par rapport à la $j_1^{\text{ème}}$ coordonnée, puis par rapport à la $j_2^{\text{ème}}$ coordonnée, ..., et enfin par rapport à la $j_k^{\text{ème}}$ coordonnée.

Remarque. $\partial_i(\partial_i f)$ se note plus simplement $\partial_i^2 f$. De manière générale, $\partial_i^k f = \partial_i(\partial_i(\dots(\partial_i f)))$ (k dérivées partielles).

Remarque. $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ se note plus simplement $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. De manière générale, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_i^k} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)\right)$ (k dérivées partielles).

Exemple 3.2

Soit $f : (x, y) \mapsto xy^3 \ln(x^2+y)$ définie sur l'ouvert $\mathcal{U} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y > 0\right\}$. Alors f admet des dérivées partielles dans la base canonique en tout point de $\mathcal{U}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^3 \ln(x^2 + y) + \frac{2x^2y^3}{x^2 + y}$$
$$\forall (x, y) \in \mathcal{U},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3xy^2 \ln(x^2 + y) + \frac{xy^3}{x^2 + y}$$

Ces dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{U}$ et pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{6xy^3}{x^2 + y} - \frac{4x^3y^3}{(x^2 + y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x, y) = \frac{6x^2y^2}{x^2 + y} - \frac{2x^2y^3}{(x^2 + y)^2} + 3y^2 \ln(x^2 + y) + \frac{y^3}{x^2 + y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) = \frac{6x^2y^2}{x^2 + y} - \frac{2x^2y^3}{(x^2 + y)^2} + 3y^2 \ln(x^2 + y) + \frac{y^3}{x^2 + y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6xy \ln(x^2 + y) + \frac{6xy^2}{x^2 + y} - \frac{xy^3}{(x^2 + y)^2}$$

On constate notamment que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, ce qui n'est pas évident a priori même si ce n'est pas le fruit du hasard...

Définition 3.3 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) sur $\mathcal{U}$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$ si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 3.3

Toute application polynomiale sur $\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.2 Schwarz

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$. Alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$$

Attention ! L'hypothèse que f est de classe $\mathcal{C}^2$ est primordiale.

Exemple 3.4

Soit en effet

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Tout d'abord, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en $(x, y) \neq (0, 0)$ par opérations et en $(0, 0)$ (taux d'accroissement). De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$$

Comme $f(x, y) = -f(y, x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe également en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

A l'aide de taux d'acroissement, on montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ existent et que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = -1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = 1$$

Ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$$

Le théorème de Schwarz permet en particulier d'affirmer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Opérateurs différentiels

Hormis le gradient, on peut définir d'autres opérateurs différentiels.

- Si $f = (f_1, \dots, f_n)$ est un **champ de vecteurs** différentiable, autrement dit une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on peut définir sa **divergence** :

$$\mathbf{div}\, f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i$$

Par exemple, si $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ est un champ électrique,

$$\mathbf{div}\, \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- Si $f = (f_x, f_y, f_z)$ est un champ de vecteurs différentiable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, on peut définir son **rotationnel** :

$$\mathbf{rot}\, f = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

- Si f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on peut définir son **laplacien** :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f$$

Par exemple, si $V = (V_x, V_y, V_z)$ est un potentiel,

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Exercice 3.1

1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbf{div}(\nabla f) = \Delta f$$

2. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbf{rot}(\nabla f) = 0$$

3. Soit $f = (f_x, f_y, f_z)$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\, f) = \nabla(\mathbf{div}\, f) - \Delta f_x - \Delta f_y - \Delta f_z$$

3.3 Opérations

Proposition 3.2 Combinaison linéaire

Soient $f : \mathcal{U} \to F$ et $g : \mathcal{U} \to F$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$.

Proposition 3.3

Soient $F_1, \dots, F_p$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $f_1, \dots, f_p$ des applications de $\mathcal{U}$ à valeurs respectivement dans $F_1, \dots, F_p$ et $M : \prod_{i=1}^{p} F_i \mapsto G$ une application multilinéaire. Si $f_1, \dots, f_p$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$, alors $M(f_1, \dots, f_p)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$.

Proposition 3.4 Composition

Soient $f : \mathcal{U} \to F$ et $g : \mathcal{V} \to G$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ et g est différentiable sur $\mathcal{V}$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$.

4 Tangence et orthogonalité

4.1 Vecteurs tangents

Définition 4.1 Vecteur tangent à une partie

Soient X une partie de E et $\in$ X. On dit que $v \in E$ est **tangent** à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Notation 4.1

On note $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.

Remarque. Si $x \in \mathring{X}$, alors tout vecteur est tangent à X en x i.e. $T_x X = E$.
Soit $v \in E$. Comme $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset X$. Posons $\varepsilon = \dfrac{r}{\|v\| + 1}$. Alors $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto x + tv$ est bien à valeurs dans $B(x, r) \subset X$, $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Exemple 4.1 Vecteurs tangents à la sphère unité

On suppose que E est un espace euclidien. Soit $S = \{x \in E, \ \|x\| = 1\}$. Donnons-nous $x \in S$.
Soit v un vecteur tangent à S en x. Alors il existe $\gamma : \ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. L'application $\varphi = \|\gamma\|^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle$ est donc constante égale à 1. Par bilinéarité du produit scalaire, φ est dérivable en 0 et

$$0 = \varphi'(0) = 2\langle \gamma'(0), \gamma(0) \rangle = \langle v, x \rangle$$

Ainsi $v \in \operatorname{vect}(x)^\perp$.
Réciproquement soit $v \in \operatorname{vect}(x)^\perp$.

- Posons $\varepsilon = \dfrac{\|x\|}{\|v\| + 1}$. Alors,

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \ \|x + tv\| \geq \|x\| - |t|\|v\| > |x| - \varepsilon\|v\| = \frac{\|x\|}{\|v\| + 1} \geq 0$$

  donc $\gamma : \ t \mapsto \dfrac{x + tv}{\|x + tv\|}$ est bien défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ à valeurs dans S.

- Comme $\|x\| = 1$, $\gamma(0) = x$.

- Comme $\|x\| = 1$ et $\langle x, v \rangle = 0$, $\|x + tv\| = \sqrt{1 + t^2\|v\|^2}$. L'application $\varphi : \ t \mapsto x + tv$ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = v$ et l'application $\psi : \ t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2\|v\|^2}}$ est également dérivable en 0 et $\psi'(0) = 0$. Par opérations, γ est dérivable en 0 et

$$\gamma'(0) = \varphi(0)\psi'(0) + \varphi'(0)\psi(0) = v$$

Ainsi v est bien tangent à S en x.
Par double inclusion, $T_xS = \operatorname{vect}(x)^\perp$.

Remarque. De manière générale, si $x \in S(a, r)$ (sphère de centre a et de rayon r), $T_xS(a, r) = \operatorname{vect}(x - a)^\perp$.

Proposition 4.1 Cas du graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \ \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable sur Ω. Notons X le graphe de f, c'est-à-dire

$$X = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3$$

Alors pour tout $a \in \Omega$, les vecteurs tangents à X en a sont les vecteurs $(v, \ df(a) \cdot v) = (v, D_v f(a))$ où $v \in E$.

Remarque. Notamment, $\left(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\right)$ et $\left(0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$ sont des vecteurs tangents à X en a.

Plan tangent

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable sur Ω. L'ensemble des vecteurs tangents en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (avec $(x_0, y_0) \in \Omega$) au graphe de f est le plan vectoriel

$$\mathrm{P} = \operatorname{vect}\left(\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\right)$$

On appelle **plan affine tangent** en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ au graphe de f le plan affine $\mathcal{P} = (x_0, y_0, z_0) + \mathrm{P}$. On obtient une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \mathcal{P} &\iff (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \operatorname{vect}\left(\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\right) \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & 1 & 0 \\ y - y_0 & 0 & 1 \\ z - f(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\end{aligned}$$

On peut également remarquer que $\mathcal{P}$ est le plan passant par (x_0, y_0, z_0) et de vecteur normal $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$.

Remarque. On notera l'extrême similitude de cette équation avec l'équation de la tangente au graphe d'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un point $(x_0, f(x_0))$, à savoir

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Exemple 4.2

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x^2 + y^2$. Le plan affine tangent au graphe de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ admet pour équation

$$z = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

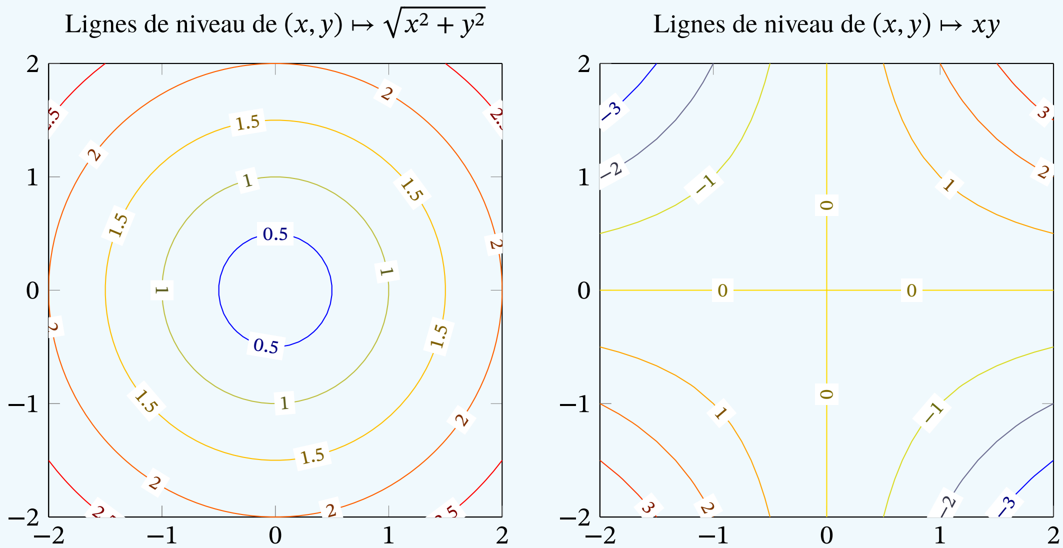
4.2 Lignes de niveau

Définition 4.2 Ligne de niveau

Soit $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau $k \in \mathbb{R}$ de f l'ensemble

$$\mathrm{E}_k = \{x \in \mathcal{U},\ f(x) = k\}$$

Exemple 4.3



Proposition 4.2 Vecteurs tangents à une ligne de niveau

Soient $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, X une ligne de niveau de g et $x \in X$ tel que $dg(x) \neq 0$. Alors $T_xX = \operatorname{Ker} dg(x)$.

Proposition 4.3 Gradient et ligne de niveau

On suppose E euclidien. Soient $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, X une ligne de niveau de g et $x \in X$ tel que $\nabla g(x) \neq 0$. Alors $T_xX = \operatorname{vect}(\nabla g(x))^\perp$.

Exemple 4.4 Plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$

Si X est une surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $g(x,y,z) = 0$ i.e.

$$X = \{(x,y,z) \in \mathcal{U},\ g(x,y,z) = 0\}$$

alors le plan affine tangent à X en (x_0,y_0,z_0) est

$$(x_0,y_0,z_0) + \operatorname{vect}(\nabla g(x_0,y_0,z_0))^\perp = (x_0,y_0,z_0) + \operatorname{vect}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)^\perp$$

Il a donc pour équation

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Remarque. Notamment X est le graphe d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors X est la ligne de niveau 0 de l'application $g : (x,y,z) \mapsto f(x,y) - z$. On en déduit que le plan affine tangent à X en un point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ est le plan passant par ce point et de vecteur normal

$$\nabla g(x_0,y_0,f(x_0,y_0)) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,f(x_0,y_0)), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,f(x_0,y_0)), \frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,f(x_0,y_0))\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

5 Optimisation des fonctions numériques

Dans tout ce paragraphe, $\mathrm{F} = \mathbb{R}$.

5.1 Point critique

Définition 5.1 Point critique

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$, on dit que a est un **point critique** de f si $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathrm{E}^*}$.

Remarque. a est un point critique de f si et seulement si toutes les dérivées partielles de f en a sont nulles.

Remarque. Si E est un espace euclidien (on peut toujours le supposer), a est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(a) = 0_{\mathrm{E}}$.

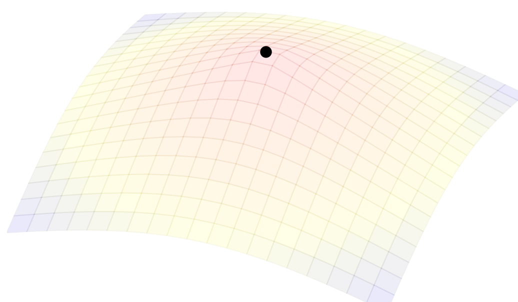
Exemple 5.1

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$. Puisque $\nabla f(x, y) = 2(x, y)$, l'unique point critique de f est $(0, 0)$.

Rappel **Extremum local**

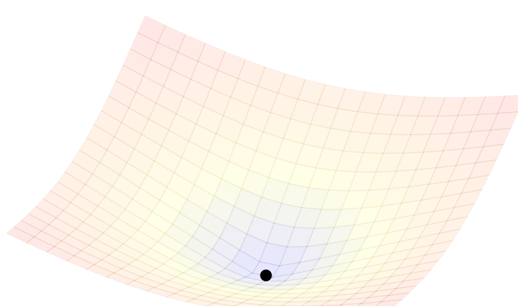
On dit que $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ admet un **maximum local** en $a \in \mathrm{D}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

- $\mathrm{B}(a, \varepsilon) \subset \mathrm{D}$;
- $\forall x \in \mathrm{B}(a, \varepsilon),\ f(x) \leq f(a)$.



On dit que $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ admet un **minimum local** en $a \in \mathrm{D}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

- $\mathrm{B}(a, \varepsilon) \subset \mathrm{D}$;
- $\forall x \in \mathrm{B}(a, \varepsilon),\ f(x) \geq f(a)$.



Si D est **ouvert**, il existe toujours $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(a, \varepsilon) \subset \mathrm{D}$. De manière générale, on ne parle d'extremum local en $a \in \mathrm{D}$ que si a est un point **intérieur** à D.

Proposition 5.1 Condition nécessaire d'existence d'un extremum local

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Si f est différentiable en a et admet un **extremum local** en a, alors a est un **point critique** de f.

Attention ! La réciproque est fausse. Considérons $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$. Alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \nabla f(x, y) = 2(x, -y)$$

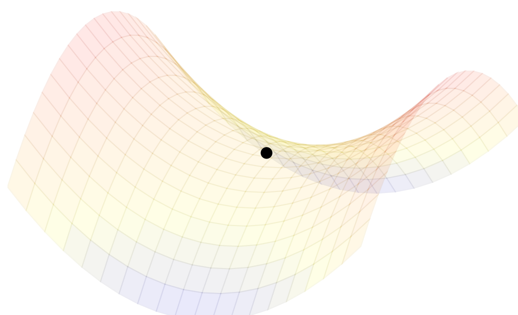
Ainsi $(0, 0)$ est bien l'unique point critique de f. Cepdendant

$$\forall \varepsilon > 0,\ f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0 = f(0, 0)$$

donc f n'admet pas de maximum local en $(0, 0)$ et

$$\forall \varepsilon > 0,\ f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0 = f(0, 0)$$

donc f n'admet pas non plus de minimum local en $(0, 0)$.
La fonction f n'admet donc pas d'extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$ (et donc pas non plus d'extrema globaux) comme la représentation graphique suivante permet de s'en convaincre.



Méthode **Recherche d'extrema globaux**

Soit D une partie de E (non nécessairement ouverte). Les extrema globaux d'une fonction f à valeurs réelles sur un domaine D sont

- soit atteints sur $\mathrm{D} \setminus \mathring{\mathrm{D}}$;
- soit atteints sur $\mathring{\mathrm{D}}$, auquel cas ce sont des extrema locaux et donc **nécessairement** atteints en des points critiques de f.

Exemple 5.2

On recherche les extrema globaux de $f \mapsto xy(1-x-y)$ sur

$$\mathrm{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\right\}$$

- Tout d'abord, D est compact et f est continue donc f admet bien un minimum global et un maximum global sur D.
- On remarque d'abord que f est nulle sur la frontière de D (puisqu'alors $x=0$, $y=0$ ou $x+y=1$). De plus, f est clairement positive sur D donc $\min\limits_{\mathrm{D}} f = 0$ et ce minimum est atteint en tout point de D.
- Recherchons les points critiques de f sur $\mathring{\mathrm{D}}$. On résout le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} y(1-2x-y) = 0 \\ x(1-x-2y) = 0 \end{cases}$$

Puisque l'on se situe sur la frontière de D, $x > 0$ et $y > 0$ donc le système équivaut à

$$\begin{cases} 1-2x-y = 0 \\ 1-x-2y = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(1/3, 1/3)$ qui appartient bien à D. Comme $f(1/3,1/3) > 0$, le maximum de f ne peut être atteint sur la frontière de D. Ce maximum global est donc un maximum local qui ne peut être atteint qu'en l'unique point critique $(1/3,1/3)$ de f sur $\mathring{\mathrm{D}}$. On en déduit que $\max\limits_{\mathrm{D}} f = f(1/3,1/3) = 1/27$.

5.2 Optimisation sous contrainte

Proposition 5.2

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{X} \subset \mathcal{U}$. Si la restriction de f à X admet un extremum local en $x \in \mathrm{X}$ et si f est différentiable en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ est nulle sur $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$.

Théorème 5.1 Extrema liés

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $\mathrm{X} = g^{-1}(\{0\})$. Si la restriction de f à X admet un extremum local en $x \in \mathrm{X}$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$.

Remarque. Si E est un espace euclidien, alors la condition « $\mathrm{d}f(x)$ colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$» équivaut à la condition «$\nabla f(x)$ colinéaire à $\nabla g(x)$».

Méthode **Extrema locaux sous contrainte**

Pour déterminer les extrema locaux d'une fonction f soumis à la contrainte $g(x) = 0$, on résout le système

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

sous réserve que $\nabla f(x) \neq 0$.

Exemple 5.3

Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ et P le plan d'équation $x + 2y + 3z = 7$. Dans la suite, on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. On souhaite déterminer le minimum éventuel de f sur P.
Justifions déjà l'existence de ce minimum. Remarquons déjà que $\mathrm{P} = g^{-1}(\{0\})$ avec $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x + 2y + 3z - 1$. Notamment P est fermé car g est continue. Posons $\mathrm{K} = [-7, 7]^3$. Il est clair que K est compact donc $\mathrm{K} \cap \mathrm{P}$ est fermé comme intersection d'un compact et d'un fermé. Ainsi f admet un minimum sur $\mathrm{K} \cap \mathrm{P}$. De plus, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{K}$, $f(x, y, z) > f(7, 0, 0)$ et $(7, 0, 0) \in \mathrm{P}$. Ceci justifie que le minimum de f sur $\mathrm{K} \cap \mathrm{P}$ est bien le minimum de f sur P : la restriction de f à P admet donc un minimum en $(a, b, c) \in \mathrm{P}$.
f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z)$. g est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla g(x, y, z) = (1, 2, 3) \neq (0, 0, 0)$. D'après le théorème des extrema liés, $\nabla f(a, b, c)$ est colinéaire à $\nabla g(a, b, c)$ i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b, c) = \lambda(1, 2, 3)$. Mais comme $(a, b, c) \in \mathrm{P}$, $a + 2b + 3c = 7$ i.e. $\lambda = \frac{1}{2}$. Ainsi le minimum de la restriction de f à P est atteint en $\frac{1}{2}(1, 2, 3)$: il vaut $f\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$.

Exemple 5.4

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On pose $\varphi : x \in \mathrm{E} \mapsto \langle f(x), x\rangle$. On a déjà montré que φ était de classe $\mathcal{C}^1$ sur E est que $\nabla f(x) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.
La sphère unité S de E est compacte et f est continue donc la restriction de f à S admet un maximum en un point $u \in \mathrm{S}$. Remarquons que $\mathrm{S} = g^{-1}(\{0\})$ avec $g : x \in \mathrm{E} \mapsto \|x\|^2 - 1$. De plus, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{d}g(x) = 2x$. Notamment, g ne s'annule pas sur S.
D'après le théorème des extrema liés, $\mathrm{d}f(u)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(u)$ i.e. $f(u)$ est colinéaire à u : u est donc un vecteur propre de f. On peut alors prouver le théorème spectral par récurrence sur la dimension de E.

5.3 Hessienne

Définition 5.2 Matrice hessienne

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle **matrice hessienne** de f au point $x \in \mathcal{U}$ la matrice

$$\mathrm{H}_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Remarque. En vertu du théorème de Schwarz, la matrice hessienne est une matrice **symétrique réelle**. Notamment, le théorème spectral permet d'affirmer qu'elle est orthodiagonalisable.

Proposition 5.3 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et $x \in \mathcal{U}$. Alors

$$f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{H}_f(x)\cdot h, h\rangle + o\left(\|h\|^2\right)$$

Remarque. On munit implicitement $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on identifie $\mathrm{H}_f(x)$ à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé.

Remarque. En identfiant les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le développement limité à l'ordre 2 peut également s'écrire :

$$f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top \mathrm{H}_f(x) h + o\left(\|h\|^2\right)$$

Proposition 5.4 Condition nécessaire pour un extremum local

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Si f admet un **extremum local** en $x \in \mathcal{U}$, alors x est un **point critique** de f. De plus,

- si f admet un **minimum local** en x, alors $\mathrm{H}_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$;
- si f admet un **maximum local** en x, alors $-\mathrm{H}_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Remarque. Dans le cas $n = 2$, si x est un point critique de f tel que $\det(\mathrm{H}_f(x)) < 0$, f ne peut admettre un extremum local en x car $\mathrm{H}_f(x)$ possède alors deux valeurs propres non nulles de signes opposés.

Proposition 5.5 Condition suffisante pour un extremum local

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et $x \in \mathcal{U}$.

- Si x est un point critique de f et si $\mathrm{H}_f(x) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un **minimum local strict** en x.
- Si x est un point critique de f et si $-\mathrm{H}_f(x) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un **maximum local strict** en x.

Remarque. Dire que f admet un **minimum local strict** en x, signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall h \in \mathrm{B}(0,\varepsilon) \setminus \{0\},\ f(x+h) > f(x)$$

Dire que f admet un **maximum local strict** en x, signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall h \in \mathrm{B}(0,\varepsilon) \setminus \{0\},\ f(x+h) < f(x)$$

Exercice 5.1

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det(\mathrm{A}) > 0$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) > 0$.

Remarque. Dans le cas $n = 2$,

$$\mathrm{H}_f(x) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff \left(\det(\mathrm{H}_f(x)) > 0 \text{ ET } \mathrm{tr}(\mathrm{H}_f(x)) > 0\right)$$
$$-\mathrm{H}_f(x) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff \left(\det(\mathrm{H}_f(x)) > 0 \text{ ET } \mathrm{tr}(\mathrm{H}_f(x)) < 0\right)$$

Méthode **Recherche d'extrema locaux**

Pour déterminer les extrema locaux d'une application f sur un ouvert, on peut procéder de la manière suivante.

1. On recherche les points critiques de f.
2. Pour chaque point critique a, on considère la matrice hessienne $\mathrm{H}_f(a)$:
   - si $\mathrm{H}_f(a)$ ne possède que des valeurs propres strictement positives, f admet un minimum local en a ;
   - si $\mathrm{H}_f(a)$ ne possède que des valeurs propres strictement négatives, f admet un maximum local en a ;
   - si $\mathrm{H}_f(a)$ possède des valeurs propres strictement positives et des valeurs propres strictement négatives, f n'admet pas d'extremum local en a.
3. Si $\mathrm{H}_f(a)$ ne possède que des valeurs propres de même signe dont la valeur propre nulle, on étudie le signe de $f(x)-f(a)$ pour x au voisinage de a. Pour simplifier, on pose généralement $u = x - a$ et on étudie le signe de $f(a+u) - f(a)$ pour u au voisinage de 0_{E}.

Exemple 5.5

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2$. f est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

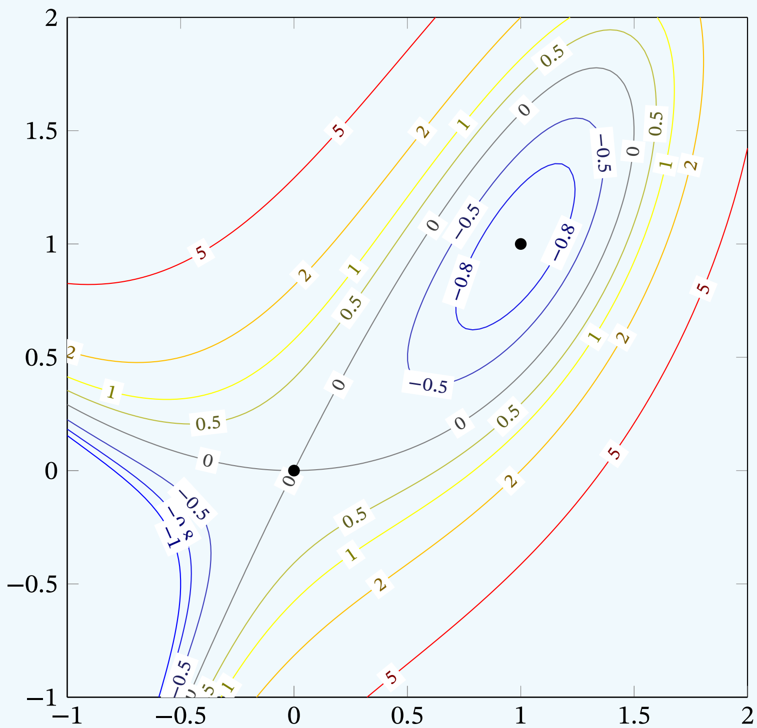
Les points critiques de f sont les solutions du système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$. On en déduit que les points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

De manière générale, $\mathrm{H}_f(x,y) = \big(12x \quad -6-6 \quad 6 \big)$.

Notamment, $\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$. Alors $\det(\mathrm{H}_f(0,0)) = -36 < 0$ donc $\mathrm{H}_f(0,0)$ admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés. Ainsi $\mathrm{H}_f(0,0) \notin \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ et $-\mathrm{H}_f(0,0) \notin \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$. Par conséquent, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

Par ailleurs, $\mathrm{H}_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ donc $\det(\mathrm{H}_f(0,0)) = 36 > 0$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{H}_f(0,0)) = 18 > 0$. On en déduit que $\mathrm{H}_f(0,0) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi f admet un minimum local strict en $(1,1)$.

Le tracé des lignes de niveau de f permet sans doute de mieux comprendre la situation.



Exemple 5.6

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2(x-y)^2 - x^4 - y^4$. f est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

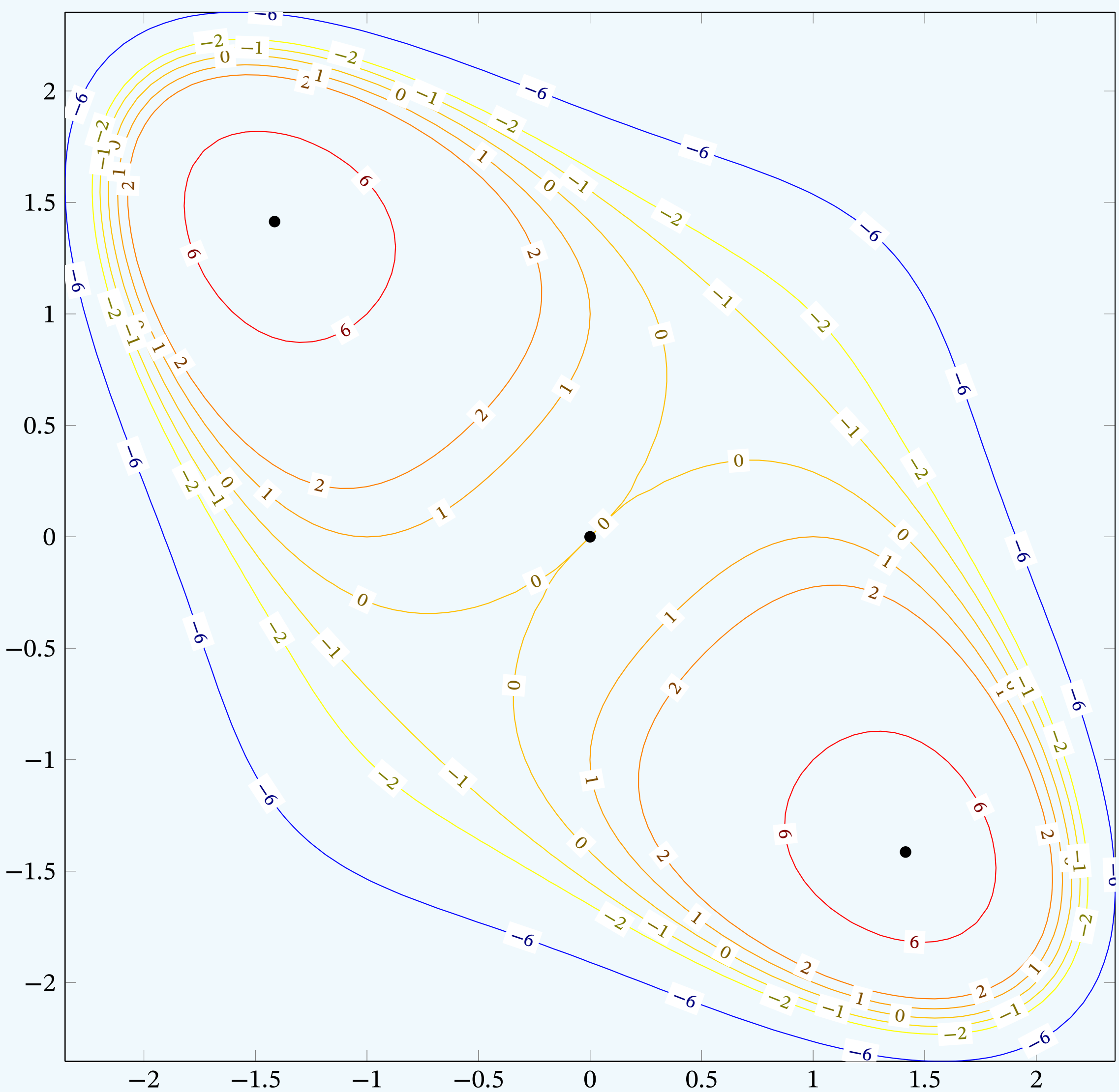
Les points critiques de f sont les solutions du système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} 4(x-y) - 4x^3 = 0 \\ 4(y-x) - 4y^3 = 0 \end{cases}$. On prouve sans trop de peine que les points critiques sont $(\sqrt{2}, -sqrt2)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(0,0)$.

De manière générale, $\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4-12x^2 & -4 \\ -4 & 4-12y^2 \end{pmatrix}$.

Notamment $\mathrm{H}_f(\sqrt{2}, -sqrt2) = \mathrm{H}_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -20 \end{pmatrix} = \mathrm{M}$. Alors $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = -4 < 0$ et $\det(\mathrm{M}) = 384 > 0$. Ainsi $-\mathrm{M} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et f admet des maxima locaux (et même globaux) en $(\sqrt{2}, -sqrt2)$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Par contre, $\mathrm{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ de sorte que $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_f(0,0)) = \{0, 8\}$. On ne peut pas conclure directement. Néanmoins, on remarque que $f(t,t) = -2t^4 < 0 = f(0,0)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$ et $f(t,-t) = 8t^2 - 2t^4 = 2t^2(4-t^2) > 0 = f(0,0)$ pour $t \in]-2, 0[\cup]0, 2[$. Ainsi f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

Le tracé des lignes de niveau de f permet de mieux comprendre la situation.



6 Equations aux dérivées partielles

Equations aux dérivées partielles

On appelle **équation aux dérivées partielles** ou, de manière abrégée, EDP une équation dont l'inconnue est une fonction de deux variables (ou plus) faisant intervenir les dérivées partielles de cette fonction. Citons quelques exemples classiques en physique.

- $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$ est une EDP d'inconnue $y(x,t)$. On l'appelle l' **équation des ondes** à une dimension ou encore **équation des cordes vibrantes**. La fonction $y(x,t)$ représente la position verticale du point d'abscisse x d'une corde vibrante à l'instant t par rapport à sa position au repos.

- $\boxed{\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}}$ est une EDP d'inconnue $\mathrm{T}(x,t)$. On l'appelle **équation de la chaleur**. La fonction $\mathrm{T}(x,t)$ représente la température au point d'abscisse x à l'instant T dans un milieu unidimensionnel dans lequel la chaleur se propage par conduction.

Résoudre une EDP sur un ouvert U signifie rechercher toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (si l'EDP ne fait intervenir que des dérivées partielles premières) ou de classe $\mathcal{C}^2$ sur U (si l'EDP fait intervenir des dérivées partielles secondes) vérifiant l'équation.

Exemple 6.1

- Les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sont les fonctions $(x,y) \mapsto \mathrm{C}(y)$ où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de $\frac{\partial f}{\partial y} = xy$ sont les fonctions $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}xy^2 + \mathrm{C}(x)$ où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6.2

Les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ sont les fonctions $(x,y) \mapsto \mathrm{C}(x) + \mathrm{D}(y)$ où C et D sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On peut résoudre certaines EDP par changement de variables.

Exemple 6.3

Pour résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'EDP $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, on procède au changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = x + 2y \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} x = 2u - v \\ y = v - u \end{cases}$. Posons alors $g(u,v) = f(2u - v, v - u)$ pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ de sorte que $f(x,y) = g(x+y, x+2y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, par abus de notation,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}$$

L'EDP initiale équivaut donc à $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$. Les solutions de cette EDP sont les fonctions $g : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathrm{C}(v)$ où C est une application de classe $\mathcal{C}^1$. On en déduit que les solutions de l'EDP initiale sont les fonctions $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathrm{C}(x + 2y)$ où C est une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Résolution de l'équation des ondes à une dimension

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'EDP $\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$ (avec $c \neq 0$). Pour cela, on procède au changement de variable $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$ i.e. on cherche donc y de classe $\mathcal{C}^2$ sous la forme $y(x,t) = g(u,v) = g(x-ct, x+ct)$. Les expressions des dérivées partielles premières s'obtiennent par composition :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial v} = -c\frac{\partial g}{\partial u} + c\frac{\partial g}{\partial v}$$

On en déduit les dérivées partielles secondes (on utilise le théorème de Schwarz) :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -c\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right) + c\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

L'équation initiale équivaut donc à $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$. On a vu précédemment que les solutions de cette EDP étaient les fonctions $(u,v) \mapsto \mathrm{C}(u) + \mathrm{D}(v)$ avec C, D de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'EDP initiale sont donc les fonctions $(x,y) \mapsto \mathrm{C}(x-ct) + \mathrm{D}(x+ct)$ avec C, D de classe $\mathcal{C}^2$. Les deux termes correspondent à des ondes se propageant avec la même célérité mais en sens inverse.