Semaine du 19/02

1 Cours

Probabilités

Ensembles dénombrables Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble st fini ou dénombrable si et seulement s'il est en biejction avec une partie de $\mathbb{N}$. Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Univers probabilisé Tribu. Stabilité par passage au complémentaire, intersection et union finie ou dénombrable. Espace probabilisable. Probabilité sur un espace probabilisable. Continuité croissante/décroissante. Si (A_n) est une suite d'événements, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$. Evénements négligeables/presque sûrs. Une union finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable. Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre. Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ indexée par Ω et de somme 1. Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable. Probabilité définie sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.

Probabilité conditionnelle et indépendance Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes. Evénéments indépendants. Si A et B sont indépendants, A et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants.

Variables aléatoires Définition d'une variable aléatoire discrète. Loi d'une variable aléatoire. Image d'une variable aléatoire. Si $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y}$, alors $f(\mathrm{X}) \sim f(\mathrm{Y})$. Lois usuelles : loi géométrique, loi de Poisson (plus les lois usuelles de première année). Couples de variables aléatoires : loi conjointe, loi marginale, loi conditionnelle. Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe. Variables aléatoires indépendantes. Notation $\mathrm{X} \perp\!\!\!\perp \mathrm{Y}$. Si $\mathrm{X} \perp\!\!\!\perp \mathrm{Y}$, alors $f(\mathrm{X}) \perp\!\!\!\perp g(\mathrm{Y})$. Lemme des coalitions. Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.

Espérance, variance, covariance Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite d'espérance finie si $\mathbb{E}(|\mathrm{X}|) < +\infty$. Notation $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^1$. Espérance des lois usuelles. Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Formule de transfert. Espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes. Formule d'antirépartition : pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} > n)$ (égalité dans $[0, +\infty]$). Notation : si X est une variable aléatoire réelle, on dit que $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^2$ si $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2) < +\infty$. Si $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^2$, alors $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^1$. Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2, alors $\mathrm{XY} \in \mathrm{L}^1$ et $\mathbb{E}(\mathrm{XY})^2 \leq \mathbb{E}(\mathrm{X}^2)\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)$. Variance d'une variable aléatoire réelle $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^2$: $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}((\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))^2)$. Ecart-type. Formule de König-Huygens : $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2$. $\mathbb{V}(a\mathrm{X} + b) = a^2\mathbb{V}(\mathrm{X})$. Variance des lois usuelles. Covariance de deux variables aléatoires X et Y dans L^2 : $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathbb{E}((\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}))) = \mathbb{E}(\mathrm{XY}) - \mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{Y})$. Covariance de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme, cas de variables aléatoires deux à deux indépendantes (théorème de Pythagore).

Inégalités classiques Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

Fonctions génératrices Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Fonctions génératrices des lois usuelles. Deux variables aléatoires ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance si et seulement si $\mathrm{G_X}$ est dérivable en 1 et, dans ce cas, $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}_\mathrm{X}'(1)$. Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Intégrales à paramètres

Interversion limite/intégrale et série/intégrale Théorème de convergence dominée : cas discret et cas continu. Théorème d'intégration terme à terme.

2 Méthodes à maîtriser

- Savoir récupérer les lois marginales à partir de la loi conjointe.
- Reconnaître un cas concret de loi géométrique : temps d'attente du premier succès lors d'une répétion d'épreuves de Bernoulli indépendantes.
- Partitionner un événement pour en calculer la probabilité.
- Appliquer la formule des probabilités totales : bien souvent, les énoncés donnent des probabilités conditionelles.
- Appliquer la formule de transfert pour calculer l'espérance de $f(\mathrm{X})$: seule la loi de X est nécessaire, pas besoin de la loi de $f(\mathrm{X})$.
- Calculer une variance : appliquer la formule de transfert pour calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$.

- Utiliser les fonctions génératrices pour déterminer une loi. Exemple classique : somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson.
- Utiliser les fonctions génératrices pour calculer l'espérance.
- Utiliser le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite d'une suite d'intégrales (dans le cas où on ne peut pas appliquer le théorème pour les suites de fonctions convergeant uniformément sur un segment).
- Exprimer une intégrale sous forme d'une somme de série : écrire l'intégrande sous forme d'une somme de série de fonctions (typiquement à l'aide d'un développement en série entière) et appliquer le théorème d'intégration terme à terme (dans le cas où on ne peut appliquer le théorème pour les séries de fonctions convergeant uniformément sur un segment).

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 19, 25, 26, 96, 110