Devoir à la maison n°03

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Définition et étude de la fonction dilogarithme

I.1 f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$. Il suffit donc de prouver que f et f' admettent des limites finies en 0.
Comme $\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t$, $\lim\limits_0 f = 1$.
Un calcul facile donne

$$\forall t \in]-\infty,0[\cup]0,1[,\ f'(t) = \frac{1}{t(1-t)} + \frac{\ln(1-t)}{t^2}$$

Or

$$\frac{1}{1-t} \underset{t\to 0}{=} 1+t+o(t)$$

et

$$\ln(1-t) \underset{t\to 0}{=} -t - \frac{t^2}{2} + o(t)$$

donc

$$f'(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$$

ou encore $\lim\limits_0 f' = \frac{1}{2}$.
On peut donc prolonger f en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.

I.2 L est continue sur $]-\infty,1[$ en tant que primitive de f sur cet intervalle. Il suffit donc de montrer que L admet une limite finie en 1, autrement dit que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge. Or $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} -\ln(1-t)$. Par croissances comparées, $f(t) \underset{t\to 1}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc f est intégrable sur $[0,1[$ par comparaison à une intégrale de Riemann convergente. Par conséquent, $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge et L admet bien une limite finie en 1 : L est donc prolongeable par continuité en 1.

I.3 D'après le théorème fondamental de l'analyse, L est une primitive de f sur $]-\infty,1[$. L est donc dérivable sur cet intervalle et $L' = f$.

I.4 Pour $t \in]0,1[$, $\ln(1-t) < 0$ donc $f(t) > 0$. Pour $t \in]-\infty,0[$, $\ln(1-t) > 0$ donc $f(t) > 0$. De plus, $f(0) = 1 > 0$. Ainsi $L' = f$ est strictement positive sur $]-\infty,1[$: L est donc strictement croissante sur $]-\infty,1[$.

I.5 Puisque $\lim\limits_{t\to-\infty} \ln(1-t) = +\infty$, $\frac{1}{t} \underset{t\to-\infty}{=} o(f(t))$. Or $\int_{-1}^{-\infty} \frac{dt}{t}$ diverge et f est positive. On en déduit donc que $\int_0^{-\infty} f(t)\,dt$ diverge. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$.

Partie II – Relations fonctionnelles et valeurs particulières

II.6 **II.6.a** On effectue le changement de variable $u = -\ln(1-t)$ i.e. $t = 1 - e^{-u}$. $u \mapsto 1 - e^{-u}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$. De plus, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = e^{-u}$ donc

$$\mathrm{L}(1) = \int_0^1 \frac{-\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1-e^{-u}} \cdot e^{-u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1}\,\mathrm{d}u$$

II.6.b Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par croissances comparées, $xe^{-kx} \underset{x\to+\infty}{=} o(1/x^2)$ donc l'intégrale définissant I_k converge. Par intégration par parties,

$$\mathrm{I}_k = -\frac{1}{k}\left[xe^{-kx}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,\mathrm{d}x$$

L'intégration par parties est légitime car $\lim_{x\to+\infty} xe^{-kx} = 0$ donc le crochet converge. De plus,

$$\mathrm{I}_k = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k^2}\left[e^{-kx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{k^2}$$

II.6.c Par convexité de exp, $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou encore $x \leq e^x - 1$. Puisque $e^x - 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$.

II.6.d Comme somme (finie) linéaire d'intégrales convergentes

$$\sum_{k=1}^n \mathrm{I}_k = \int_0^{+\infty} x\sum_{k=1}^n e^{-kx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}(1-e^{-nx})}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x(1-e^{-nx})}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$$

Par conséquent,

$$\mathrm{L}(1) - \sum_{k=1}^n \mathrm{I}_k = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$$

D'après la question précédente

$$0 \leq \mathrm{L}(1) - \sum_{k=1}^n \mathrm{I}_k \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$$

II.6.e En passant à la limite dans la question précédente,

$$\mathrm{L}(1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \mathrm{I}_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

II.7 **II.7.a** Posons $\varphi : x \mapsto \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) - \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2)$. Comme L est dérivable sur $]-1, 1[$, φ l'est également et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \varphi'(x) = \mathrm{L}'(x) - \mathrm{L}'(-x) - x\mathrm{L}'(x^2) = f(x) - f(-x) - 2xf(x^2)$$

Notamment, $\varphi'(0) = 0$ et pour tout $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$,

$$\varphi'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} + x \cdot \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \frac{-\ln((1-x)(1+x)) + \ln(1-x^2)}{x} = 0$$

Ainsi φ' est nulle sur $]-1, 1[$ et donc φ est constante sur $]-1, 1[$. Par ailleurs, L est continue sur $[-1, 1]$ donc φ l'est également. Par continuité, φ est constante sur $[-1, 1]$. Or $\varphi(0) = 0$ car $\mathrm{L}(0) = 0$ donc φ est nulle sur $[-1, 1]$. Par conséquent,

$$\forall x \in [-1,1],\ \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) = \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2)$$

II.7.b En prenant $x = 1$, on obtient

$$\mathrm{L}(1) + \mathrm{L}(-1) = \frac{1}{2}\mathrm{L}(1)$$

donc

$$\mathrm{L}(-1) = -\frac{1}{2}\mathrm{L}(1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

II.8 **II.8.a** On raisonne comme à la question précédente en posant $\psi : x \mapsto L(x) + L(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$. A nouveau, ψ est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \psi'(x) = L'(x) - L'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = f(x) - f(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$$

Ainsi ψ est constante sur $]0,1[$. On note C cette constante.
Par continuité de L en 0 et 1,

$$\lim_{x\to0^+} L(x) + L(1-x) = L(0) + L(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

De plus, $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to0^+}{\sim} -x\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x)\ln(1-x) = 0$ par croissances comparées. On en déduit que $\lim\limits_{0} \psi = \dfrac{\pi^2}{6} = C$.

II.8.b En prenant $x = \dfrac{1}{2}$,

$$2L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

donc

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2(2)$$

Partie III – Une équation différentielle

On considère les équations différentielles

$$\mathcal{E} :\ xy'' + y' = \frac{1}{1-x}$$

et

$$\mathcal{E}' :\ xz' + z = \frac{1}{1-x}$$

III.9 Les solutions sur $]0,1[$ de l'équation homogène $xz' + z = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie que f est une solution particulière de $\mathcal{E}'$ sur $]0,1[$. Les solutions de $\mathcal{E}'$ sur $]0,1[$ sont donc les fonctions $x \mapsto f(x) + \dfrac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On montre de la même manière que les solutions de $\mathcal{E}'$ sur $]-\infty,1[$ sont de cette forme.

III.10 Via le changement de variable $z = y'$, on montre que les solutions de $\mathcal{E}$ sur $]0,1[$ sont les primitives des solutions de $\mathcal{E}'$ sur cet intervalle, c'est-à-dire les fonctions de la forme

$$x \mapsto L(x) + \lambda\ln(x) + \mu \qquad \text{avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

De la même manière les solutions de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty,1[$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto L(x) + \lambda\ln(-x) + \mu \qquad \text{avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

III.11 Soit g une éventuelle solution de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty,1[$. Il existe donc $(\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in]0,1[,\ g(x) = L(x) + \lambda_1\ln(x) + \mu_1$$
$$\forall x \in]-\infty,1[,\ g(x) = L(x) + \lambda_2\ln(x) + \mu_2$$

Comme g doit être deux fois dérivable en 0 et a fortiori continue en 0, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Le même argument de continuité montre alors que $\mu_1 = \mu_2$. Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]-\infty,1[,\ g(x) = L(x) + \mu$$

Réciproquement, soit $\mu \in \mathbb{R}$. Ce qui précède montre que $g : x \mapsto L(x) + \mu$ est bien solution de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty,1[$ et sur $]0,1[$. On a donc

$$\forall x \in]-\infty,0[\cup]0,1[,\ xg''(x) + g'(x) = \frac{1}{1-x}$$

Mais L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et $L' = f$. Or f est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ donc L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty,1[$. Notamment, g'' et g' sont continues en 0 de même que $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ donc

$$\forall x \in]-\infty,1[,\ xg''(x) + g'(x) = \frac{1}{1-x}$$

et g est bien solution de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty,1[$.
Pour récapituler, les solutions de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty,1[$ sont exactement les fonctions $L + \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.