

DEVOIR À LA MAISON N°19

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – CCINP Maths I MP

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Le problème est constitué de trois parties indépendantes dans une large mesure.

I Algorithmique : calcul de zêta aux entiers pairs

La suite des nombres de Bernoulli notée $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$b_0 = 1, \quad \forall n \geq 1, \quad b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$$

Leonhard Euler (1707-1783) a démontré la formule suivante qui exprime les nombres $\zeta(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} b_{2k}}{(2k)!}$$

Dans cette partie (informatique pour tous), on se propose de programmer le calcul des nombres de Bernoulli b_n afin d'obtenir des valeurs exactes de $\zeta(2k)$.

Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python. On sera très attentif à la rédaction du code notamment à l'indentation.

1 Ecrire une fonction `factorielle(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

2 On considère la fonction Python suivante `binom(n, p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$:

Combien de multiplications sont effectuées lorsque l'on exécute `binom(30, 10)` ?

Expliquer pourquoi il est possible de réduire ce nombre de multiplications à 20 ? Quel serait le type du résultat renvoyé si l'on remplaçait la dernière ligne de la fonction `binom` par

`return factorielle(n) / (factorielle(p) * factorielle(n - p))` ?

3 Démontrer que, pour $n \geq p \geq 1$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$$

En déduire une fonction récursive `binom_rec(n, p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

- 4 Ecrire une fonction non récursive `bernoulli(n)` qui renvoie une valeur approchée du nombre rationnel b_n . On pourra utiliser librement une fonction `binomial(n, p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Par exemple, `bernoulli(10)` renvoie 0,075 757 575 757 575 76 qui est une valeur approchée de $b_{10} = \frac{5}{66}$.

II Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

- 5 Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.
- 6 Démontrer que la fonction ζ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ puis qu'elle est décroissante.
- 7 La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?
- 8 Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
- 9 Soit $x > 1$. On pose :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

Démontrer que :

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

- 10 Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n . On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x} \right)_{(a,b) \in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}$$

On pourra considérer la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{(a, b) \in A, ab = n\}$.

III Produit eulérien

Soit $s > 1$ un réel fixé. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}.$$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. On note alors $a \mid b$.

- 11 Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^s}$.
- 12 Soient a_1, a_2, \dots, a_n dans \mathbb{N}^* des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par récurrence sur n que :

$$(a_1 \mid N, a_2 \mid N, \dots, a_n \mid N) \iff a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \mid N$$

Le résultat persiste-t-il si les entiers a_1, a_2, \dots, a_n sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?

- 13** En déduire que si a_1, a_2, \dots, a_n sont des entiers de \mathbb{N}^* premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[X \in a_1\mathbb{N}^*], \dots, [X \in a_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants.
On pourra noter (b_1, \dots, b_r) une sous-famille de (a_1, \dots, a_n) .

On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_n .

- 14** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$$

- 15** Soit ω dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge.

On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

- 16** Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $\ell \geq \zeta(s)$.
Conclure.