TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií

Moderní metody zpracování signálů

Slepá separace signálů

Zbyněk Koldovský

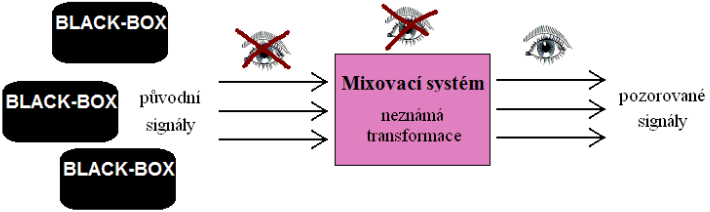
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů.

Část I

Slepá separace signálů

Úloha slepé separace signálů



- Pozorované signály jsou neznámou směsí neznámých původních signálů
- Úlohou slepé separace (BSS) je získání původních signálů
- Slepá identifikace spočívá v odhadu parametrů systému, který signály smíchal.

Lineární modely směsí

- Lineární model bez odrazů a zpoždění:

$$\mathbf{X} = \mathbf{AS}$$

- Konvolutorní model

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{d} \sum_{\tau=0}^{+\infty} a_{ij}(\tau) s_j(t-\tau)$$

- **S**, $s_j(t)$ - původní signály, $j = 1, \ldots, d$
  X, $x_i(t)$ - pozorované směsi signálů, $i = 1, \ldots, m$
  A - *mixovací* matice $m \times d$

Počet signálů d vs. počet senzorů m

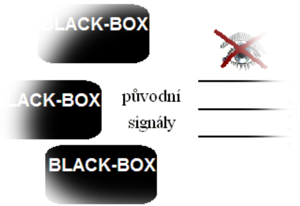
$m > d$ Přeurčený systém lze redukovat na určený $m = d$, smysl má spíše je-li uvažován aditivní šum $\mathbf{X} = \mathbf{AS} + \mathbf{N}$.

$m = d$ Úlohy hledání $\mathbf{A}$ nebo $\mathbf{S}$ nebo $\mathbf{A}^{-1}$ jsou ekvivalentní.

$$\mathbf{X} = \mathbf{AS} \qquad \mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}$$

$m < d$ Nedourčený systém, úlohy separace a identifikace jsou odlišné.

Metody slepé separace



Předpoklady o původních signálech **S**

- **S** jsou nezáporné: Rozklad **X** na nezáporné matice, NMF, NTD
- **S** jsou řídké: Rozklad **X** takový, aby **S** byly co nejvíce řídké (SCA)
- **S** jsou *nezávislé*: Analýza nezávislých komponent (ICA - Independent Component Analysis)

Část II

Analýza nezávislých komponent

Analýza nezávislých komponent - ICA

- Lineární model bez odrazů a zpoždění: $\mathbf{X} = \mathbf{AS}$
- Počet původních signálů je stejný jako počet signálů měřených $m = d$. Matice $\mathbf{A}$ je čtvercová $m \times m$
- Hledáme $\mathbf{A}$ nebo rovnou její inverzi $\mathbf{A}^{-1}$. Odhadovanou matici označíme $\mathbf{W}$. Ideálně chceme, aby

$$\mathbf{WX} \approx \mathbf{S}$$

- Hledáme matici $\mathbf{W}$ takovou, aby $\mathbf{WX}$ byly nezávislé.

Nejednoznačnost řešení

- Řešení není jednoznačné: můžeme změnit pořadí a škálu signálů **S** a zůstanou nezávislé.
- **W** je řešení kdykoliv platí

$$\mathbf{WA} = \mathbf{PD},$$

  kde **P** je permutační matice (změna pořadí signálů) a **D** je diagonální (mění škálu signálů).
- Je-li řešení až na tyto výjimky jednoznačné, říkáme, že je *v podstatě jednoznačné* (essentially unique).

Předzpracování (preprocessing) pomocí PCA

- Obecně platí: jsou-li signály nezávislé, pak jsou i nekorelované.
- Můžeme tedy signály **X** nejprve transformovat tak, aby byly nekorelované, čímž splníme nutnou (nikoliv však postačující) podmínku nezávislosti.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}\mathbf{X}$$

- Hlavní komponenty jsou nekorelované (viz. předchozí přednáška), můžeme tedy k výpočtu **B** použít PCA.
- Vzhledem k nejednoznačnosti, škálu (rozptyl) signálů můžeme normovat. Platit tedy bude

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Z}} = \frac{1}{N}\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{I}$$

Předzpracování (preprocessing) pomocí PCA

- Tuto vlastnost budou mít i signály

$$\mathbf{Y} = \mathbf{UZ}$$

kdykoliv $\mathbf{UU}^T = \mathbf{I}$ ($\mathbf{U}$ je ortogonální). Ověřte.

- ICA můžeme formulovat tak, že hledáme ortogonální $\mathbf{U}$ tak, aby $\mathbf{Y} = \mathbf{UZ}$ byly nezávislé.

Jak měřit nezávislost signálů?

- Potřebujeme definovat kritérium, které budeme optimalizovat vzhledem k **U**.

$$\mathbf{U}^* = \arg \min_{\mathbf{U}, \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}} J(\mathbf{UZ})$$

- Existují tři hlavní způsoby:
  - Vzájemná informace **Y**
  - Vzájemná diagonalizace kovariančních matic bloků **X**
  - Vzájemná diagonalizace cross-kovariančních matic **X**

Vzájemná informace

- Vzájemná informace (multiinformace):

$$I(\mathbf{Y}) = \int_{\mathbb{R}^d} \ln \frac{f_{y_1,\dots,y_d}(y_1,\dots,y_d)}{\prod_{i=1}^d f_{y_i}(y_i)} f_{y_1,\dots,y_d}(y_1,\dots,y_d) dy_1,\dots,dy_d$$

- Platí

$$I(\mathbf{Y}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{Y} \text{ jsou nezávislé}$$

- Matici **U** hledáme minimalizací vzájemné informace

$$\mathbf{U}^* = \arg\min_{\mathbf{U}} I(\mathbf{UZ})$$

- Vlastnost vzájemné informace: pro **U** ortogonální platí

$$I(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{d} \underbrace{H(y_i)}_{\text{entropie}} + \text{const.}$$

$\Longrightarrow$ minimalizujeme entropie signálů.

Vzájemná diagonalizace kovariančních matic

- Kovarianční matice *k*tého bloku signálů je

$$\mathbf{C}_k = \frac{1}{M}\mathbf{X}_k\mathbf{X}_k^T$$

kde $\mathbf{X}_k$ je *k*tý blok $\mathbf{X}$ a M jeho délka.

- Platí

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{A} \quad \underbrace{\frac{\mathbf{S}_k\mathbf{S}_k^T}{N}}_{\text{kov. matice } \mathbf{S}_k} \quad \mathbf{A}^T$$

- $\mathbf{S}$ jsou nezávislé, takže jejich kovarianční matice jsou diagonální.
- Proto hledáme $\mathbf{W}$ tak, aby kovarianční matice $\mathbf{W}\mathbf{X}_k$ byly diagonální.

Vzájemná diagonalizace cross-kovariančních matic

- Cross-kovarianční matice je definována

$$\mathbf{C}[\tau] = \frac{1}{N}\mathbf{X}[n]\mathbf{X}^T[n+\tau]$$

  kde $\mathbf{X}^T[n+\tau]$ značí matici $\mathbf{X}$ posunutou o τ vzorků.
- Platí

$$\mathbf{C}[\tau] = \mathbf{A}\underbrace{\frac{\mathbf{S}[n]\mathbf{S}^T[n+\tau]}{N}}_{\text{kov. matice } \mathbf{S}}\mathbf{A}^T$$

- **S** jsou nezávislé, takže jejich kovarianční matice jsou diagonální.
- Proto hledáme **W** tak, aby cross-kovarianční matice **WX** byly diagonální.

Rekonstrukce signálů pomocí ICA

- Získání signálů, které byly původně nezávislé, z jejich směsi.
- Analýza dat - objevení skrytých (nezávislých) komponent
- Zpracování pomocí separace a rekonstrukce
  1. Data separujeme na nezávislé komponenty

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}\mathbf{X}$$

  2. Určíme, které komponenty (ne)chceme. Nežádoucí komponenty vynulujeme (nebo nějak zpracujeme).
  3. Rekonstruujeme původní data

$$\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Y}$$

Část III

Slepá separace nedourčených směsí

Nedourčené směsi

- Nedourčená směs
$$\mathbf{X} = \mathbf{AS}$$
kde **A** je obdélníková $m \times d$, kde $m < d$.
- **A** nelze invertovat. Určit **A** (identifikace) a **S** (separace) jsou odlišné úlohy.

Slepá identifikace A pomocí rozkladu tenzoru

- Tenzor $\mathcal{X}$: 3 (a více) rozměrné pole s prvky X_{ijk}
- Zvolíme tenzor tak, že $\mathcal{X}_{:,:,k} = \mathbf{R}_k$, kde $\mathbf{R}_k$ je kovarianční matice $k$tého bloku signálů $\mathbf{X}$.
- $\mathcal{X}$ má rozměry $m \times m \times M$

Struktura tenzoru $\mathcal{X}$

- Z modelu vyplývá: $\mathbf{R}_k = \mathbf{A}\,\mathrm{diag}[\mathbf{c}_k]\,\mathbf{A}^T$
- Z toho plyne

$$X_{ijk} = \sum_{f=1}^{d} A_{if} A_{jf} C_{kf},$$

  kde sloupce $\mathbf{C}$ jsou $\mathbf{c}_k$, $k = 1, \ldots, d$.
- Snažíme se tedy najít matice **A** a **C**, aby model $\mathcal{X}$ co nejlépe odpovídal $\mathcal{X}$ spočtenému z dat.

Algoritmy

- Matice **A** a **C** hledáme minimalizací

$$\|\mathcal{X} - \mathcal{I} \times_1 \mathbf{A} \times_2 \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \times_3 \mathbf{C}\|^2$$

- Alternating Least-Squares (ALS), Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt, ...

Literatura

- A. Hyvärinen, J. Karhunen, and E. Oja, *Independent Component Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 2001.
- Te-Won Lee, *Independent Component Analysis: Theory and Applications*, MA: Kluwer, Boston, 237 pp., 1998.
- P. Comon and C. Jutten, *Handbook of Blind Source Separation: Independent Component Analysis and Applications*, Academic Press, Elsevier Ltd., 859 pp., 2010.

Tento materiál vznikl v rámci projektu ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů,
který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.