TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií

Moderní metody zpracování signálů

Signály z více senzorů

Zbyněk Koldovský

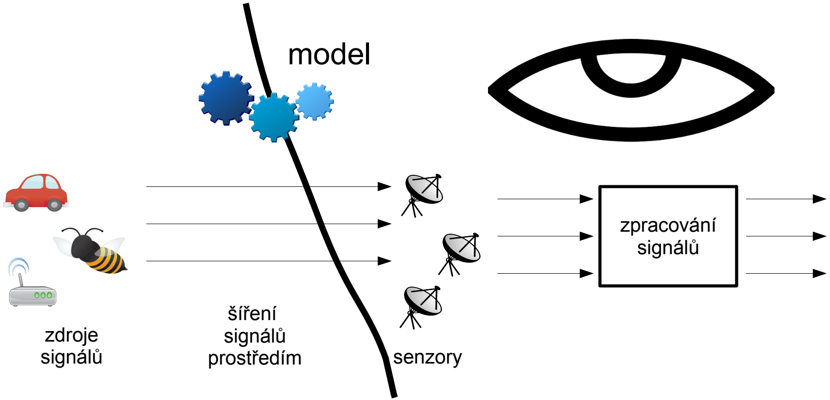
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů.

Část I

Signály z více senzorů

Šíření signálů



Vícekanálové (multi-channel) signály

- Použití více senzorů: signál pozorujeme nejen v čase ale i v prostoru

Vícekanálové (multi-channel) signály

- Použití více senzorů: signál pozorujeme nejen v čase ale i v prostoru
- Předpokládáme m senzorů

Vícekanálové (multi-channel) signály

- Použití více senzorů: signál pozorujeme nejen v čase ale i v prostoru
- Předpokládáme *m* senzorů
- $\mathbf{p}_i$ nechť označuje polohu *i*tého senzoru (vektor souřadnic)

Vícekanálové (multi-channel) signály

- Použití více senzorů: signál pozorujeme nejen v čase ale i v prostoru
- Předpokládáme *m* senzorů
- $\mathbf{p}_i$ nechť označuje polohu *i*tého senzoru (vektor souřadnic)
- Předpokládáme, že signály ze senzorů vzorkujeme synchronně.

Vícekanálové (multi-channel) signály

- Použití více senzorů: signál pozorujeme nejen v čase ale i v prostoru
- Předpokládáme m senzorů
- $\mathbf{p}_i$ nechť označuje polohu $i$tého senzoru (vektor souřadnic)
- Předpokládáme, že signály ze senzorů vzorkujeme synchronně.
- Aplikace: lokalizace zdroje, identifikace systému, separace signálů, zlepšování signálů (enhancement), dekonvoluce (dereverberace), ...

Signál z více senzorů - vektorový zápis

- Vzorek signálu (v časové oblasti)

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ \vdots \\ x_m[n] \end{bmatrix}$$

kde $x_i[n]$ je vzorek signálu z $i$tého senzoru, m je počet senzorů.

Signál z více senzorů - vektorový zápis

- Vzorek signálu (v časové oblasti)

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ \vdots \\ x_m[n] \end{bmatrix}$$

kde $x_i[n]$ je vzorek signálu z $i$tého senzoru, m je počet senzorů.

- Ve frekvenční oblasti

$$\mathbf{X}(\theta) = \begin{bmatrix} X_1(\theta) \\ \vdots \\ X_m(\theta) \end{bmatrix}$$

kde θ je frekvence.

Lineární modely šíření signálů

- Platí princip superpozice

Model bez zpoždění a odrazů

- Model předpokládá okamžité šíření signálů bez odrazů a aditivní šum

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n] + \mathbf{v}[n]$$

Model bez zpoždění a odrazů

- Model předpokládá okamžité šíření signálů bez odrazů a aditivní šum

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n] + \mathbf{v}[n]$$

- $\mathbf{s}[n]$ má d složek, tzv. zdrojové nebo též “originální” signály $s_1[n], \dots, s_d[n]$.

Model bez zpoždění a odrazů

- Model předpokládá okamžité šíření signálů bez odrazů a aditivní šum
$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n] + \mathbf{v}[n]$$
- $\mathbf{s}[n]$ má d složek, tzv. zdrojové nebo též "originální" signály $s_1[n], \ldots, s_d[n]$.
- **A** je matice $m \times d$.

Model bez zpoždění a odrazů

- Model předpokládá okamžité šíření signálů bez odrazů a aditivní šum

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n] + \mathbf{v}[n]$$

- $\mathbf{s}[n]$ má d složek, tzv. zdrojové nebo též “originální” signály $s_1[n], \ldots, s_d[n]$.
- $\mathbf{A}$ je matice $m \times d$.
- $\mathbf{v}[n]$ má rozměr jako $\mathbf{x}[n]$ a obsahuje signály, které nazýváme šum.

Model bez zpoždění a odrazů

- Model předpokládá okamžité šíření signálů bez odrazů a aditivní šum
$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n] + \mathbf{v}[n]$$
- $\mathbf{s}[n]$ má d složek, tzv. zdrojové nebo též “originální” signály $s_1[n], \ldots, s_d[n]$.
- $\mathbf{A}$ je matice $m \times d$.
- $\mathbf{v}[n]$ má rozměr jako $\mathbf{x}[n]$ a obsahuje signály, které nazýváme šum.
- Ve frekvenční oblasti

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{A}\mathbf{S}(\theta) + \mathbf{V}(\theta)$$

Příklad: EEG a EKG záznamy

- Typická vzorkovací frekvence je do 2 kHz

Příklad: EEG a EKG záznamy

- Typická vzorkovací frekvence je do 2 kHz
- Rychlost šíření signálu: rychlost světla

Příklad: EEG a EKG záznamy

- Typická vzorkovací frekvence je do 2 kHz
- Rychlost šíření signálu: rychlost světla
- Odrazy a zpoždění tedy můžeme zanedbat a modelovat signály pomocí okamžitého modelu.

Příklad: EEG a EKG záznamy

- Typická vzorkovací frekvence je do 2 kHz
- Rychlost šíření signálu: rychlost světla
- Odrazy a zpoždění tedy můžeme zanedbat a modelovat signály pomocí okamžitého modelu.
- Neznáme ovšem přesné skutečnosti o signálech $\mathbf{s}[n]$

Příklad: jeden signál $s_1[n]$

- Nechť $d = 1$, tedy pozorujeme jen jeden signál.

Příklad: jeden signál $s_1[n]$

- Nechť $d = 1$, tedy pozorujeme jen jeden signál.
- **A** má pouze jeden sloupec, který značíme **a** (steering vector).

Příklad: jeden signál $s_1[n]$

- Nechť $d = 1$, tedy pozorujeme jen jeden signál.
- **A** má pouze jeden sloupec, který značíme **a** (steering vector).
- Platí
$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{a}s[n] + \mathbf{v}[n]$$

Příklad: jeden signál $s_1[n]$

- Nechť $d = 1$, tedy pozorujeme jen jeden signál.
- **A** má pouze jeden sloupec, který značíme **a** (steering vector).
- Platí

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{a}s[n] + \mathbf{v}[n]$$

- Ve frekvenční oblasti

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{a}S(\theta) + \mathbf{V}(\theta)$$

(zde je **a** nezávislé na θ)

Model s jedním zpožděným signálem bez odrazů

- Model zpožděného signálu s aditivním šumem

$$x_i[n] = a_i s[n - D_i] + v_i[n]$$

tedy D_i je zpoždění signálu $s[n]$ na $i$tém senzoru.

Model s jedním zpožděným signálem bez odrazů

- Model zpožděného signálu s aditivním šumem

$$x_i[n] = a_i s[n - D_i] + v_i[n]$$

  tedy D_i je zpoždění signálu $s[n]$ na $i$tém senzoru.
- Tento model odpovídá signálu $s[n]$, který se šíří ideálním prostředím konečnou rychlostí a bez odrazů.

Model s jedním zpožděným signálem bez odrazů

- Model zpožděného signálu s aditivním šumem

$$x_i[n] = a_i s[n - D_i] + v_i[n]$$

tedy D_i je zpoždění signálu $s[n]$ na *i*tém senzoru.

- Tento model odpovídá signálu $s[n]$, který se šíří ideálním prostředím konečnou rychlostí a bez odrazů.
- Šíří-li se signál jako rovinná vlna, zpoždění D_i jsou funkcí směru šíření:

$$D_i = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{p}_i}{c} + \text{const.}$$

kde $\mathbf{u} = [-\sin\vartheta\cos\phi, -\sin\vartheta\sin\phi, -\cos\vartheta]^T$ je jednotkový směrový vektor určený azimutem ϑ a elevací ϕ a c je rychlost šíření signálu.

Popis ve frekvenční oblasti

- Ve frekvenční oblasti

$$X_i(\theta) = a_i e^{-\mathrm{i}\theta D_i} S(\theta) + V_i(\theta)$$

Popis ve frekvenční oblasti

- Ve frekvenční oblasti

$$X_i(\theta) = a_i e^{-\mathrm{i}\theta D_i} S(\theta) + V_i(\theta)$$

- Vektorový zápis

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{b}(\theta) S(\theta) + \mathbf{V}(\theta)$$

kde

$$\mathbf{b}(\theta) = \begin{bmatrix} a_1 e^{-\mathrm{i}\theta D_1} \\ \vdots \\ a_m e^{-\mathrm{i}\theta D_m} \end{bmatrix}$$

(vektor **b** je závislý na θ)

Model zpožděného signálu: příklady

- Odhad směru příchodu signálu

Model zpožděného signálu: příklady

- Odhad směru příchodu signálu
- Lokalizace

Model zpožděného signálu: příklady

- Odhad směru příchodu signálu
- Lokalizace
- Radar, sonar, . . .

Konvolutorní model: s odrazy

- Konvolutorní model s aditivním šumem

$$x_i[n] = \sum_{k=1}^{d} \{a_{i,k} * s_k\}[n] + v_i[n]$$

Konvolutorní model: s odrazy

- Konvolutorní model s aditivním šumem

$$x_i[n] = \sum_{k=1}^{d} \{a_{i,k} * s_k\}[n] + v_i[n]$$

- Jinými slovy *k*tý signál doputuje na *i*tý senzor zfiltrovaný filtrem $f_{i,k}$ (odrazy, zpoždění, atp.)

Konvolutorní model: s odrazy

- Konvolutorní model s aditivním šumem

$$x_i[n] = \sum_{k=1}^{d} \{a_{i,k} * s_k\}[n] + v_i[n]$$

- Jinými slovy $k$tý signál doputuje na $i$tý senzor zfiltrovaný filtrem $f_{i,k}$ (odrazy, zpoždění, atp.)
- Ve frekvenční oblasti

$$X_i(\theta) = \sum_{k=1}^{d} A_{i,k}(\theta) S_k(\theta) + V_i(\theta)$$

Konvolutorní model: s odrazy

- Konvolutorní model s aditivním šumem

$$x_i[n] = \sum_{k=1}^{d} \{a_{i,k} * s_k\}[n] + v_i[n]$$

- Jinými slovy *k*tý signál doputuje na *i*tý senzor zfiltrovaný filtrem $f_{i,k}$ (odrazy, zpoždění, atp.)
- Ve frekvenční oblasti

$$X_i(\theta) = \sum_{k=1}^{d} A_{i,k}(\theta) S_k(\theta) + V_i(\theta)$$

- Vektorový zápis

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}(\theta) + \mathbf{V}(\theta)$$

kde $\mathbf{A}(\theta)$ je matice jejíž *ik*tý prvek je $A_{i,k}(\theta)$.

Konvolutorní model: s odrazy

- Konvolutorní model s aditivním šumem

$$x_i[n] = \sum_{k=1}^{d} \{a_{i,k} * s_k\}[n] + v_i[n]$$

- Jinými slovy $k$tý signál doputuje na $i$tý senzor zfiltrovaný filtrem $f_{i,k}$ (odrazy, zpoždění, atp.)
- Ve frekvenční oblasti

$$X_i(\theta) = \sum_{k=1}^{d} A_{i,k}(\theta) S_k(\theta) + V_i(\theta)$$

- Vektorový zápis

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}(\theta) + \mathbf{V}(\theta)$$

  kde $\mathbf{A}(\theta)$ je matice jejíž iktý prvek je $A_{i,k}(\theta)$.
- Výhoda popisu ve frekvenční oblasti: soustava nezávislých modelů (pro každou frekvenci jeden).

Konvolutorní vs. model bez odrazů a zpoždění

- Model bez odrazů a zpoždění ve frekvenční oblasti

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{A}\mathbf{S}(\theta) + \mathbf{V}(\theta)$$

Konvolutorní vs. model bez odrazů a zpoždění

- Model bez odrazů a zpoždění ve frekvenční oblasti

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{A}\mathbf{S}(\theta) + \mathbf{V}(\theta)$$

- Konvolutorního model ve frekvenční oblasti

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}(\theta) + \mathbf{V}(\theta)$$

Konvolutorní vs. model bez odrazů a zpoždění

- Model bez odrazů a zpoždění ve frekvenční oblasti

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{AS}(\theta) + \mathbf{V}(\theta)$$

- Konvolutorního model ve frekvenční oblasti

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}(\theta) + \mathbf{V}(\theta)$$

- Rozdíl: **A** je/není závislá na frekvenci θ

Konvolutorní vs. model bez odrazů a zpoždění

- Model bez odrazů a zpoždění ve frekvenční oblasti

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{AS}(\theta) + \mathbf{V}(\theta)$$

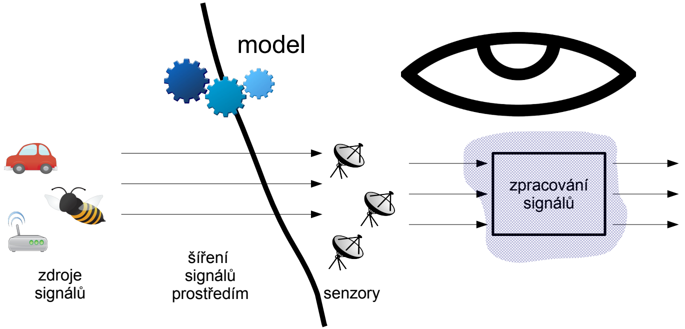
- Konvolutorního model ve frekvenční oblasti

$$\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}(\theta) + \mathbf{V}(\theta)$$

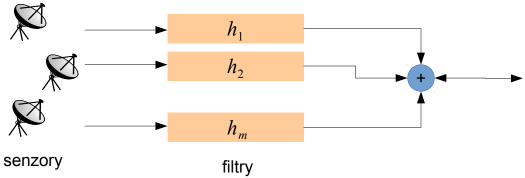
- Rozdíl: **A** je/není závislá na frekvenci θ
- Příklad konvolutorního modelu: akustické záznamy (ukázka)

Část II

Zpracování vícekanálových záznamů filtry

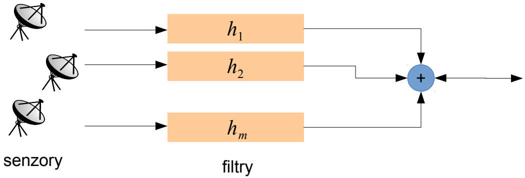

model
zdroje signálů
šíření signálů prostředím
senzory
zpracování signálů

MISO filtr (Multi-input single-output)



- Nazýváme též Filter-and-sum beamformer

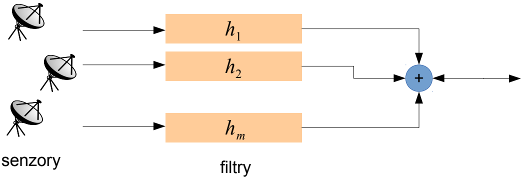
MISO filtr (Multi-input single-output)



- Nazýváme též Filter-and-sum beamformer
- Výstup je

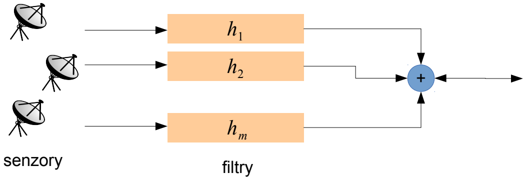
$$y[n] = h_1 * x_1[n] + \cdots + h_m * x_m[n]$$

MISO filtr (Multi-input single-output)



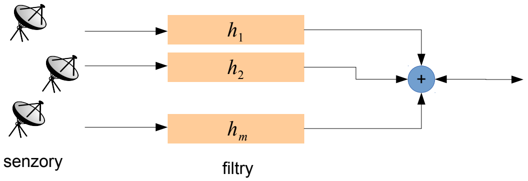
- Je to LTI systém. Jaká je jeho charakteristika?

MISO filtr (Multi-input single-output)



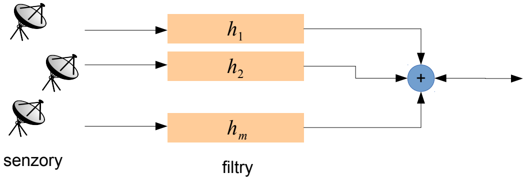
- Je to LTI systém. Jaká je jeho charakteristika?
- Srovnejte se situací, kdy máme jen jeden senzor: Pozorujeme na něm jeden signál $x[n]$ a můžeme se rovnou ptát co s ním provede zpracování filtrem.

MISO filtr (Multi-input single-output)



- Je to LTI systém. Jaká je jeho charakteristika?
- Srovnejte se situací, kdy máme jen jeden senzor: Pozorujeme na něm jeden signál $x[n]$ a můžeme se rovnou ptát co s ním provede zpracování filtrem.
- Máme-li více senzorů záleží nejen na filtrech $h_1, \ldots, h_m$, ale i na tom, jaké jsou souvislosti mezi signály, které pozorujeme na senzorech.

MISO filtr (Multi-input single-output)



- Je to LTI systém. Jaká je jeho charakteristika?
- Srovnejte se situací, kdy máme jen jeden senzor: Pozorujeme na něm jeden signál $x[n]$ a můžeme se rovnou ptát co s ním provede zpracování filtrem.
- Máme-li více senzorů záleží nejen na filtrech $h_1, \ldots, h_m$, ale i na tom, jaké jsou souvislosti mezi signály, které pozorujeme na senzorech.
- Jinými slovy: Charakteristiku MISO filtru je nutno definovat spolu s předpokládaným modelem signálů.

MISO filtr

- Výstup v časové oblasti

$$y[n] = \sum_{i=1}^{m} \{h_i * x_i\}[n]$$

MISO filtr

- Výstup v časové oblasti

$$y[n] = \sum_{i=1}^{m} \{h_i * x_i\}[n]$$

- Ve frekvenční oblasti

$$Y(\theta) = \sum_{i=1}^{m} H_i(\theta) X_i(\theta)$$

a vektorově

$$\mathbf{Y}(\theta) = \mathbf{H}(\theta)^T \mathbf{X}(\theta)$$

kde $\mathbf{H}(\theta) = [H_1(\theta), \ldots, H_m(\theta)]^T$.

Charakteristika MISO filtru

- Předpoklad: signál je rovinná harmonická vlna o frekvenci θ přicházející z nekonečna ve směru normálového vektoru **u** rychlostí c m/s a šíří se bez odrazů.

Charakteristika MISO filtru

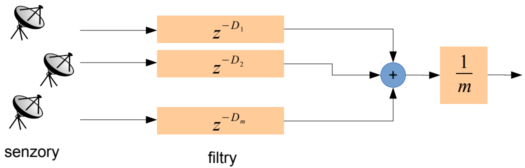
- Předpoklad: signál je rovinná harmonická vlna o frekvenci θ přicházející z nekonečna ve směru normálového vektoru $\mathbf{u}$ rychlostí c m/s a šíří se bez odrazů.
- Charakteristická funkce:

$$\Psi(\theta, \vartheta, \phi) = \sum_{k=1}^{m} e^{-\mathrm{i}\theta M_k} H_k(\theta)$$

kde $M_k = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{p}_k}{c} f_s$ a

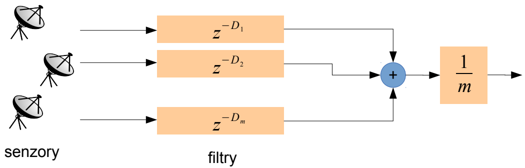
$$\mathbf{u} = -\begin{bmatrix} \sin\vartheta\cos\phi \\ \sin\vartheta\sin\phi \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Příklad: Delay-and-sum beamformer



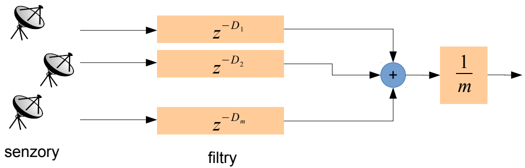
- Signál na *k*tém senzoru je zpožděn o D_k vzorků.

Příklad: Delay-and-sum beamformer



- Signál na *k*tém senzoru je zpožděn o D_k vzorků.
- Tedy $h_k[n] = \frac{1}{m}\delta[n + D_k]$, $H_k(\theta) = \frac{1}{m}e^{\mathrm{i}\theta D_k}$.

Příklad: Delay-and-sum beamformer



- Signál na *k*tém senzoru je zpožděn o D_k vzorků.
- Tedy $h_k[n] = \frac{1}{m}\delta[n + D_k]$, $H_k(\theta) = \frac{1}{m}e^{\mathrm{i}\theta D_k}$.
- Charakteristická funkce:

$$\Psi(\theta, \vartheta, \phi) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} e^{-\mathrm{i}\theta M_k} e^{\mathrm{i}\theta D_k} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} e^{\mathrm{i}\theta(D_k - M_k)}$$

Charakteristika MISO filtru v reálném prostředí

- Výše definovaná charakteristika předpokládá ideální prostředí a opomíjí skutečnou polohu zdroje.

Charakteristika MISO filtru v reálném prostředí

- Výše definovaná charakteristika předpokládá ideální prostředí a opomíjí skutečnou polohu zdroje.
- Odezva MISO filtru v reálném prostředí na signál $s[n]$ je

$$\Psi(\theta) = \sum_{k=1}^{m} F_k(\theta) H_k(\theta)$$

kde $F_k(\theta)$ je frekvenční charakteristika impulzní odezvy prostředí mezi zdrojem signálu $s[n]$ a $k$tým senzorem.

Charakteristika MISO filtru v reálném prostředí

- Výše definovaná charakteristika předpokládá ideální prostředí a opomíjí skutečnou polohu zdroje.
- Odezva MISO filtru v reálném prostředí na signál $s[n]$ je

$$\Psi(\theta) = \sum_{k=1}^{m} F_k(\theta) H_k(\theta)$$

  kde $F_k(\theta)$ je frekvenční charakteristika impulzní odezvy prostředí mezi zdrojem signálu $s[n]$ a $k$tým senzorem.
- Navíc bychom mohli započítat i frekvenční a směrovou charakteristiku senzorů

Část III

Optimální vícekanálové filtry

MISO filtr délky 1

- Výstupem je lineární kombinace signálů ze senzorů

$$y[n] = w_1 x_1[n] + \cdots + w_m x_m[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n]$$

MISO filtr délky 1

- Výstupem je lineární kombinace signálů ze senzorů

$$y[n] = w_1 x_1[n] + \cdots + w_m x_m[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n]$$

- Příklad: pozorujeme jeden signál šířící se bez zpoždění a odrazů. Pak je výsledek zpracování

$$y[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{a} s[n] + \mathbf{w}^T \mathbf{v}[n]$$

MISO filtr délky 1

- Výstupem je lineární kombinace signálů ze senzorů

$$y[n] = w_1 x_1[n] + \cdots + w_m x_m[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n]$$

- Příklad: pozorujeme jeden signál šířící se bez zpoždění a odrazů. Pak je výsledek zpracování

$$y[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{a} s[n] + \mathbf{w}^T \mathbf{v}[n]$$

- SNR výstupu je

$$\frac{(\mathbf{w}^T \mathbf{a})^2 \mathrm{E}[s[n]]^2}{\mathbf{w}^T \mathrm{E}[\mathbf{v}[n]\mathbf{v}[n]^T]\mathbf{w}}$$

MISO filtr délky 1

- Výstupem je lineární kombinace signálů ze senzorů

$$y[n] = w_1 x_1[n] + \cdots + w_m x_m[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n]$$

- Příklad: pozorujeme jeden signál šířící se bez zpoždění a odrazů. Pak je výsledek zpracování

$$y[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{a} s[n] + \mathbf{w}^T \mathbf{v}[n]$$

- SNR výstupu je

$$\frac{(\mathbf{w}^T \mathbf{a})^2 \mathrm{E}[s[n]]^2}{\mathbf{w}^T \mathrm{E}[\mathbf{v}[n]\mathbf{v}[n]^T]\mathbf{w}}$$

- Definujeme kovarianční matici šumu: $\mathbf{C} = \mathrm{E}[\mathbf{v}[n]\mathbf{v}[n]^T]$

Minimum Variance Distortionless (MVDR) beamformer

- Chceme minimální energii šumu na výstupu a zároveň zachovat původní intenzitu signálu. Tedy

$$\mathbf{w} = \arg\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} \quad \text{w.r.t.} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{a} = 1$$

kde $\mathbf{C} = \mathrm{E}[\mathbf{v}[n]\mathbf{v}[n]^T]$ (kovarianční matice šumu)

Minimum Variance Distortionless (MVDR) beamformer

- Chceme minimální energii šumu na výstupu a zároveň zachovat původní intenzitu signálu. Tedy

$$\mathbf{w} = \arg\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} \quad \text{w.r.t.} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{a} = 1$$

  kde $\mathbf{C} = \mathrm{E}[\mathbf{v}[n]\mathbf{v}[n]^T]$ (kovarianční matice šumu)

- Řešením je

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\mathbf{a}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}$$

Minimum Variance Distortionless (MVDR) beamformer

- Chceme minimální energii šumu na výstupu a zároveň zachovat původní intenzitu signálu. Tedy

$$\mathbf{w} = \arg\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} \quad \text{w.r.t.} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{a} = 1$$

  kde $\mathbf{C} = \mathrm{E}[\mathbf{v}[n]\mathbf{v}[n]^T]$ (kovarianční matice šumu)

- Řešením je

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\mathbf{a}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}$$

- Je-li $\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{I}$, pak

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

MISO filtr délky L: Vektorový zápis v časové oblasti

- Vektorový zápis MISO FIR filtru délky L

$$
\widetilde{\mathbf{x}}[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ \vdots \\ x_1[n-L+1] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m[n-L+1] \end{bmatrix} \qquad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1[1] \\ \vdots \\ h_1[L] \\ h_2[1] \\ \vdots \\ \vdots \\ h_m[L] \end{bmatrix}
$$

Platí

$$
y[n] = \mathbf{h}^T \widetilde{\mathbf{x}}[n]
$$

Vektorový zápis zpracování celého záznamu

- Datová matice $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1[1] & \dots & \dots & x_1[N] \\ 0 & x_1[1] & \dots & x_1[N-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_1[N-L+1] \\ x_2[1] & \dots & \dots & x_2[N] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_m[N-L+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}}[1] & \dots & \widetilde{\mathbf{x}}[N] \end{bmatrix}$$

Vektorový zápis zpracování celého záznamu

- Datová matice **X**

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1[1] & \dots & \dots & x_1[N] \\ 0 & x_1[1] & \dots & x_1[N-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_1[N-L+1] \\ x_2[1] & \dots & \dots & x_2[N] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_m[N-L+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}}[1] & \dots & \widetilde{\mathbf{x}}[N] \end{bmatrix}$$

- Řádkový vektor **y** obsahující všechny vzorky $y[n]$ můžeme zapsat jako

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}^T \mathbf{X}$$

Vektorový zápis zpracování celého záznamu

- Datová matice **X**

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1[1] & \dots & \dots & x_1[N] \\ 0 & x_1[1] & \dots & x_1[N-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_1[N-L+1] \\ x_2[1] & \dots & \dots & x_2[N] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_m[N-L+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}}[1] & \dots & \widetilde{\mathbf{x}}[N] \end{bmatrix}$$

- Řádkový vektor **y** obsahující všechny vzorky $y[n]$ můžeme zapsat jako

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}^T \mathbf{X}$$

- Pro $m = 1$ je značení shodné s předchozími přednáškami.

Optimální vícekanálový LMS filtr

- Nechť **d** je řádkový vektor obsahující vzorky cílového signálu, tj. $\mathbf{d} = [d[1], \ldots, d[N]]$.

Optimální vícekanálový LMS filtr

- Nechť **d** je řádkový vektor obsahující vzorky cílového signálu, tj. $\mathbf{d} = [d[1], \ldots, d[N]]$.
- Hledáme MISO filtr délky L takový, který minimalizuje kvadratickou vzdálenost mezi **d** a **y**, tj.
  $\|\mathbf{y} - \mathbf{d}\|^2 = \|\mathbf{h}^T\mathbf{X} - \mathbf{d}\|^2$.

Optimální vícekanálový LMS filtr

- Nechť $\mathbf{d}$ je řádkový vektor obsahující vzorky cílového signálu, tj. $\mathbf{d} = [d[1], \ldots, d[N]]$.
- Hledáme MISO filtr délky L takový, který minimalizuje kvadratickou vzdálenost mezi $\mathbf{d}$ a $\mathbf{y}$, tj. $\|\mathbf{y} - \mathbf{d}\|^2 = \|\mathbf{h}^T\mathbf{X} - \mathbf{d}\|^2$.
- Řešením je

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$$

kde

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{X}^T \qquad \mathbf{p} = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{d}^T$$

Optimální vícekanálový LMS filtr

- Nechť $\mathbf{d}$ je řádkový vektor obsahující vzorky cílového signálu, tj. $\mathbf{d} = [d[1], \ldots, d[N]]$.
- Hledáme MISO filtr délky L takový, který minimalizuje kvadratickou vzdálenost mezi $\mathbf{d}$ a $\mathbf{y}$, tj. $\|\mathbf{y} - \mathbf{d}\|^2 = \|\mathbf{h}^T\mathbf{X} - \mathbf{d}\|^2$.
- Řešením je

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$$

kde

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{X}^T \qquad \mathbf{p} = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{d}^T$$

- Složením výrazů dostaneme

$$\mathbf{h} = (\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1}\mathbf{X}\mathbf{d}^T$$

Optimální vícekanálový LMS filtr - příklady

- Filtr potlačující zdroj signálu v daném směru nebo pozici

Optimální vícekanálový LMS filtr - příklady

- Filtr potlačující zdroj signálu v daném směru nebo pozici
- Separace - filtr, který propouští zvolený zdroj a potlačuje zdroj jiný

Literatura

- I. Tashev, *Sound Capture and Processing: Practical Approaches*, John Wiley & Sons Ltd., 2009.
- H. L. Van Trees, *Optimum Array Processing*, Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory, John Wiley & Sons Ltd., New York, 2002.

Tento materiál vznikl v rámci projektu ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů,
který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.