

Moderní metody zpracování signálů

Optimální filtry ve smyslu kvadratické vzdálenosti: Adaptivní filtry

Zbyněk Koldovský



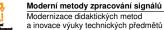












2/9



Adaptivní filtry







Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů

Vstup, výstup, chyba

- Nechť d[n] je jiný signál, který chceme získat filtrováním signálu x[n].
- Chyba rozdílu

$$e[n] = d[n] - y[n]$$

= $d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n$.

 Filtr w můžeme hledat optimalizací nějakého kritéria, např. kvadratického

$$J_n(\mathbf{w}) = e[n]^2$$

= $(d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n)^2 = d[n]^2 - 2d[n]\mathbf{w}^T \mathbf{x}_n + \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}.$







Gradient $J_n(\mathbf{w})$

Gradient $J_n(\mathbf{w})$, tj. vektor parciálních derivací podle jednotlivých složek \mathbf{w} , lze zapsat vektorově

$$\triangle J_n(\mathbf{w}) = -2\mathbf{x}_n d(n) + 2\mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}.$$

Zavedeme označení

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T$$

 $\mathbf{p}_n = \mathbf{x}_n d[n],$

Gradient můžeme zapsat jako

$$\triangle J_n(\mathbf{w}) = -2\mathbf{p}_n + 2\mathbf{R}_n\mathbf{w}.$$







Adaptivní LMS

- Cílem je průběžně měnit filtr w optimalizováním kritéria $J_n(\mathbf{w}_n) = |d[n] - \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}_n|^2.$
- LMS: metoda největšího spádu

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu \triangle J_n(\mathbf{w}_n),$$

kde μ je délka kroku.

Po dosazení

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu \mathbf{x}_n \mathbf{e}[n],$$
kde $\mathbf{e}[n] = d[n] - \mathbf{v}[n] = d[n] - \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}_n.$

Normalizovaný LMS filtr:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu \frac{\mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x}_n\|^2} e[n].$$







RLS (Recursive Least Square)

 Optimalizujeme kritérium, které akumuluje chybový signál s exponenciálním zapomínáním

$$J_n^{\mathrm{RLS}}(\mathbf{w}_n) = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} e_n[k]^2,$$

kde $0 < \lambda \le 1$ a chybový signál je definovaný jako

$$e_n[k] = d[k] - \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}_k.$$

 Položením gradientu J_n^{RLS}(w_n) rovno nule dostaneme normálovou rovnici

$$\Phi_n \mathbf{w}_n = \mathbf{z}_n$$

kde Φ_n je obdobou **R** a **z**_n je obdobou **p**

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T \quad \text{a} \quad \mathbf{z}_n = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} \mathbf{x}_k d[k].$$







RLS (Recursive Least Square)

- Algoritmus je odvozený tak, abychom $(\Phi_n)^{-1}$ a \mathbf{z}_n nemuseli v každém kroku počítat znovu. Jsou počítány rekurzivně.
- Jeden krok algoritmu je počítán

$$\mathbf{h}_{n} = \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{x}_{n}$$

$$\mathbf{k}_{n} = \frac{\mathbf{h}_{n}}{\lambda + \mathbf{x}_{n}^{T} \mathbf{h}_{n}}$$

$$\xi[n] = d[n] - \mathbf{w}_{n-1}^{T} \mathbf{x}_{n}$$

$$\mathbf{w}_{n} = \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{k}_{n} \xi[n]$$

$$\mathbf{P}_{n} = \lambda^{-1} \mathbf{P}_{n-1} - \lambda^{-1} \mathbf{k}_{n} \mathbf{x}_{n}^{T} \mathbf{P}_{n-1},$$

kde \mathbf{P}_n značí $(\Phi_n)^{-1}$. Algoritmus bývá inicializován $\mathbf{P}_0 = \delta \mathbf{I}$ a $\mathbf{w}_0 = [1, 0, \dots, 0]^T$.







Adaptivní filtry ve frekvenční oblasti

 Prakticky: signály transformujeme okénkovou DFT (STFT -Short-Time Fourier Transform)

$$X(\theta,t) = \sum_{n=mR}^{mR+N-1} o(n-mR)x(n)e^{-i2\pi(n-mR)\theta/N}$$

kde N je délka okénka, R je krok posunutí sousedních okének a o(n) je okénkovací funkce.

- K parametru θ (frekvence, index frekvence) přibude t (čas, index časového okénka)
- Viz přednáška prof. Nobutaka Ono.







Příklad: Adaptivní LMS ve frekvenční oblasti

Minimalizujeme

$$J(W(\theta),t) = |D(\theta,t) - \overline{W(\theta,t)}X(\theta,t)|^2$$

Krok adaptivního LMS filtru je

$$W(\theta, t + 1) = W(\theta, t) + \mu X(\theta, t)e(\theta, t),$$

kde
$$e(\theta, t) = D(\theta, t) - \overline{W(\theta, t)}X(\theta, t)$$
.

Adaptace filtru probíhá pro každou frekvenci nezávisle paralelně.