TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií

Moderní metody zpracování signálů

Analýza hlavních komponent

Zbyněk Koldovský

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů.

Část I

Analýza hlavních komponent

Příklad 1

- Signál $s[n]$ je snímaný dvěma senzory (bez zpoždění a odrazů)

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{a}s[n]$$

kde

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Příklad 1

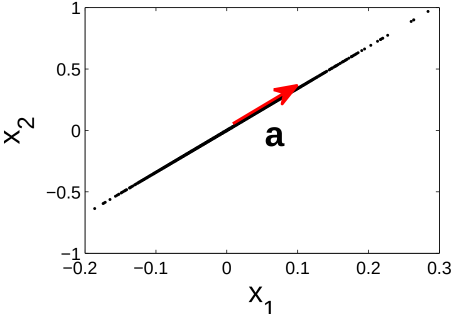
- Signál $s[n]$ je snímaný dvěma senzory (bez zpoždění a odrazů)

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{a}s[n]$$

kde

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

- `plot(x(1,:),x(2,:),'k.')`



Příklad 2

- Stejný signál s aditivním šumem

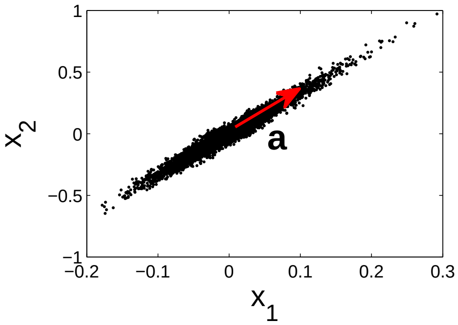
$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{a}s[n] + \mathbf{v}[n]$$

Příklad 2

- Stejný signál s aditivním šumem

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{a}s[n] + \mathbf{v}[n]$$

- `plot(x(1,:),x(2,:),'k.')`



Připomenutí: MVDR beamformer

- Výstup filtru **w**

$$y[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{a} s[n] + \mathbf{w}^T \mathbf{v}[n]$$

Připomenutí: MVDR beamformer

- Výstup filtru **w**

$$y[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{a} s[n] + \mathbf{w}^T \mathbf{v}[n]$$

- MVDR beamformer minimalizuje energii šumu na výstupu, tj. $\|\mathbf{w}^T \mathbf{v}[n]\|^2$, za podmínky $\mathbf{w}^T \mathbf{a} = 1$

$$\mathbf{w} = \arg\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{C}_v \mathbf{w} \quad \text{w.r.t.} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{a} = 1$$

kde $\mathbf{C}_v = \mathrm{E}[\mathbf{v}[n]\mathbf{v}[n]^T]$ je kovarianční matice šumu.

Připomenutí: MVDR beamformer

- Výstup filtru **w**

$$y[n] = \mathbf{w}^T\mathbf{x}[n] = \mathbf{w}^T\mathbf{a}s[n] + \mathbf{w}^T\mathbf{v}[n]$$

- MVDR beamformer minimalizuje energii šumu na výstupu, tj. $\|\mathbf{w}^T\mathbf{v}[n]\|^2$, za podmínky $\mathbf{w}^T\mathbf{a} = 1$

$$\mathbf{w} = \arg\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T\mathbf{C}_v\mathbf{w} \quad \text{w.r.t.} \quad \mathbf{w}^T\mathbf{a} = 1$$

  kde $\mathbf{C}_v = \mathrm{E}[\mathbf{v}[n]\mathbf{v}[n]^T]$ je kovarianční matice šumu.

- V našem příkladu $\mathbf{C}_v = \sigma_v^2\mathbf{I}$ (viz předchozí přednáška), pak

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \Longrightarrow y[n] = s[n] + \frac{\mathbf{a}^T}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{v}[n]$$

Příklad 2 - SNR pro případ $\mathbf{C}_v = \sigma_v^2 \mathbf{I}$

- Označíme $E[s[n]]^2 = \sigma_s^2$ a $E[v_i[n]]^2 = \sigma_v^2$

Příklad 2 - SNR pro případ $\mathbf{C}_v = \sigma_v^2 \mathbf{I}$

- Označíme $\mathrm{E}[s[n]]^2 = \sigma_s^2$ a $\mathrm{E}[v_i[n]]^2 = \sigma_v^2$
- SNR na *i*tém senzoru je

$$\mathrm{SNR}_i = \frac{a_i^2 \sigma_s^2}{\sigma_v^2}$$

Příklad 2 - SNR pro případ $\mathbf{C}_v = \sigma_v^2 \mathbf{I}$

- Označíme $\mathrm{E}[s[n]]^2 = \sigma_s^2$ a $\mathrm{E}[v_i[n]]^2 = \sigma_v^2$
- SNR na *i*tém senzoru je

$$\mathrm{SNR}_i = \frac{a_i^2 \sigma_s^2}{\sigma_v^2}$$

- SNR výstupu MVDR beamformeru je

$$\mathrm{SNR}_y = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_v^2} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \left(\mathrm{SNR}_1 + \mathrm{SNR}_2\right)$$

Příklad 2 - SNR pro případ $\mathbf{C}_v = \sigma_v^2 \mathbf{I}$

- Označíme $\mathrm{E}[s[n]]^2 = \sigma_s^2$ a $\mathrm{E}[v_i[n]]^2 = \sigma_v^2$
- SNR na *i*tém senzoru je

$$\mathrm{SNR}_i = \frac{a_i^2 \sigma_s^2}{\sigma_v^2}$$

- SNR výstupu MVDR beamformeru je

$$\mathrm{SNR}_y = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_v^2} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2}(\mathrm{SNR}_1 + \mathrm{SNR}_2)$$

- Co když **a** neznáme?

Příklad 2 - První hlavní komponenta

- První hlavní komponentu definujeme skrze

$$\mathbf{w}_1 = \arg \max_{\|\mathbf{w}\|=\mathbf{1}} \|\mathbf{w}^T \mathbf{x}\|^2 = \arg \max_{\|\mathbf{w}\|=\mathbf{1}} \mathbf{w}^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}$$

kde $\mathbf{C}_x = \mathrm{E}[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n]^T]$ je kovarianční matice signálů.

Příklad 2 - První hlavní komponenta

- První hlavní komponentu definujeme skrze

$$\mathbf{w}_1 = \arg\max_{\|\mathbf{w}\|=1} \|\mathbf{w}^T\mathbf{x}\|^2 = \arg\max_{\|\mathbf{w}\|=1} \mathbf{w}^T\mathbf{C}_x\mathbf{w}$$

kde $\mathbf{C}_x = \mathrm{E}[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n]^T]$ je kovarianční matice signálů.

- Řešením je vlastní vektor $\mathbf{C}_x$ příslušející největšímu vlastnímu číslu.

Příklad 2 - První hlavní komponenta

- První hlavní komponentu definujeme skrze

$$\mathbf{w}_1 = \arg \max_{\|\mathbf{w}\|=\mathbf{1}} \|\mathbf{w}^T\mathbf{x}\|^2 = \arg \max_{\|\mathbf{w}\|=\mathbf{1}} \mathbf{w}^T\mathbf{C}_x\mathbf{w}$$

kde $\mathbf{C}_x = \mathrm{E}[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n]^T]$ je kovarianční matice signálů.

- Řešením je vlastní vektor $\mathbf{C}_x$ příslušející největšímu vlastnímu číslu.
- V tomto příkladu

$$\mathbf{C}_x = \sigma_s^2\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \sigma_v^2\mathbf{I}$$

Příklad 2 - První hlavní komponenta

- První hlavní komponentu definujeme skrze

$$\mathbf{w}_1 = \arg\max_{\|\mathbf{w}\|=1} \|\mathbf{w}^T\mathbf{x}\|^2 = \arg\max_{\|\mathbf{w}\|=1} \mathbf{w}^T\mathbf{C}_x\mathbf{w}$$

kde $\mathbf{C}_x = \mathrm{E}[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n]^T]$ je kovarianční matice signálů.

- Řešením je vlastní vektor $\mathbf{C}_x$ příslušející největšímu vlastnímu číslu.
- V tomto příkladu

$$\mathbf{C}_x = \sigma_s^2\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \sigma_v^2\mathbf{I}$$

- Pokud by $\sigma_v^2 = 0$, pak

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

Příklad 2 - Druhá hlavní komponenta

- Druhou hlavní komponentu definujeme

$$\mathbf{w}_2 = \arg \max_{\|\mathbf{w}\|=1} \mathbf{w}^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}$$

za podmínky $\mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_1 = 0$.

Příklad 2 - Druhá hlavní komponenta

- Druhou hlavní komponentu definujeme

$$\mathbf{w}_2 = \arg \max_{\|\mathbf{w}\|=\mathbf{1}} \mathbf{w}^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}$$

  za podmínky $\mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_1 = 0$.

- Řešením je vlastní vektor $\mathbf{C}_x$ příslušející druhému největšímu vlastnímu číslu.

Příklad 2 - Druhá hlavní komponenta

- Druhou hlavní komponentu definujeme

$$\mathbf{w}_2 = \arg\max_{\|\mathbf{w}\|=1} \mathbf{w}^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}$$

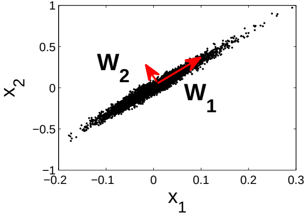
  za podmínky $\mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_1 = 0$.
- Řešením je vlastní vektor $\mathbf{C}_x$ příslušející druhému největšímu vlastnímu číslu.
- Pokud $\sigma_v^2 = 0$, pak $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$ a podmínka $\mathbf{w}_2^T \mathbf{a} = 0$ znamená, že druhá komponenta neobsahuje signál $s[n]$.

Příklad 2 - Druhá hlavní komponenta

- Druhou hlavní komponentu definujeme

$$\mathbf{w}_2 = \arg \max_{\|\mathbf{w}\|=1} \mathbf{w}^T \mathbf{C}_x \mathbf{w}$$

  za podmínky $\mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_1 = 0$.
- Řešením je vlastní vektor $\mathbf{C}_x$ příslušející druhému největšímu vlastnímu číslu.
- Pokud $\sigma_v^2 = 0$, pak $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$ a podmínka $\mathbf{w}_2^T \mathbf{a} = 0$ znamená, že druhá komponenta neobsahuje signál $s[n]$.
- `plot(x(1,:),x(2,:),'k.')`



Analýza hlavních komponent - PCA

- Formální definice: Hlavní komponenty vícerozměrného signálu $\mathbf{x}[n]$ jsou

$$\mathbf{z}[n] = \mathbf{V}^T \mathbf{x}[n]$$

kde sloupce $\mathbf{V}$ jsou normované vlastní vektory matice

$$\mathbf{C}_x = \mathrm{E}[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n]^T]$$

a seřazené podle velikosti příslušných vlastních čísel.

Vlastnosti PCA

- $\mathbf{C}_x$ je symetrická a positivně semidefinitní $\Longrightarrow$ vlastní čísla jsou reálná a nezáporná a vlastní vektory jsou na sebe kolmé.

Vlastnosti PCA

- $\mathbf{C}_x$ je symetrická a positivně semidefinitní $\Longrightarrow$ vlastní čísla jsou reálná a nezáporná a vlastní vektory jsou na sebe kolmé.
- To znamená, že

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$$

Vlastnosti PCA

- $\mathbf{C}_x$ je symetrická a positivně semidefinitní $\Longrightarrow$ vlastní čísla jsou reálná a nezáporná a vlastní vektory jsou na sebe kolmé.
- To znamená, že

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$$

- Ověřte, že $\mathbf{z}[n]$ jsou vzájemně nekorelované.

Vlastnosti PCA

- $\mathbf{C}_x$ je symetrická a positivně semidefinitní $\Longrightarrow$ vlastní čísla jsou reálná a nezáporná a vlastní vektory jsou na sebe kolmé.
- To znamená, že
$$\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$$
- Ověřte, že $\mathbf{z}[n]$ jsou vzájemně nekorelované.
- Jakou energii mají jednotlivé hlavní komponenty $\mathbf{z}[n]$?

PCA pomocí SVD

- Označme $\mathbf{X}$ matici, jejíž $n$tý sloupec je $\mathbf{x}[n]$.

PCA pomocí SVD

- Označme $\mathbf{X}$ matici, jejíž $n$tý sloupec je $\mathbf{x}[n]$.
- SVD - Singular Value Decomposition

PCA pomocí SVD

- Označme $\mathbf{X}$ matici, jejíž *n*tý sloupec je $\mathbf{x}[n]$.
- SVD - Singular Value Decomposition
- Rozklad

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}\Sigma\mathbf{G}^T$$

kde $\mathbf{H}$ a $\mathbf{G}$ jsou ortogonální matice a Σ je diagonální.

PCA pomocí SVD

- Označme $\mathbf{X}$ matici, jejíž $n$tý sloupec je $\mathbf{x}[n]$.
- SVD - Singular Value Decomposition
- Rozklad

  $$\mathbf{X} = \mathbf{H}\Sigma\mathbf{G}^T$$

  kde $\mathbf{H}$ a $\mathbf{G}$ jsou ortogonální matice a Σ je diagonální.
- Sloupce $\mathbf{H}$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{C}_x$.

PCA pomocí SVD

- Označme $\mathbf{X}$ matici, jejíž $n$tý sloupec je $\mathbf{x}[n]$.
- SVD - Singular Value Decomposition
- Rozklad
$$\mathbf{X} = \mathbf{H}\Sigma\mathbf{G}^T$$
kde $\mathbf{H}$ a $\mathbf{G}$ jsou ortogonální matice a Σ je diagonální.
- Sloupce $\mathbf{H}$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{C}_x$.
- Diagonální prvky Σ jsou singulární čísla $\mathbf{X}$ a jsou rovny odmocninám vlastních čísel $\mathbf{C}_x$.

PCA pomocí SVD

- Označme $\mathbf{X}$ matici, jejíž $n$tý sloupec je $\mathbf{x}[n]$.
- SVD - Singular Value Decomposition
- Rozklad

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}\Sigma\mathbf{G}^T$$

  kde $\mathbf{H}$ a $\mathbf{G}$ jsou ortogonální matice a Σ je diagonální.
- Sloupce $\mathbf{H}$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{C}_x$.
- Diagonální prvky Σ jsou singulární čísla $\mathbf{X}$ a jsou rovny odmocninám vlastních čísel $\mathbf{C}_x$.
- Řádky matice $\Sigma\mathbf{G}^T$ jsou hlavní komponenty. Ověřte.

Dekompozice a rekonstrukce signálů pomocí PCA

1. Nechť $\mathbf{X}$ značí signály (v řádcích).
2. Spočítáme matici vlastních vektorů $\mathbf{V}$ kovarianční matice $\mathbf{X}$ pomocí `eig`
3. Spočítáme hlavní komponenty (dekompozice)

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V}^H \mathbf{X}$$

4. Určíme, které komponenty (ne)chceme. Nežádoucí komponenty vynulujeme nebo nějak zpracujeme. Změněná data označíme $\widetilde{\mathbf{Z}}$.
5. Rekonstruujeme původní data

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{V}\widetilde{\mathbf{Z}}$$

Kontrola: Pokud v rámci kroku 4 neprovedeme žádné změny, výsledkem jsou původní data, tedy $\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}$.

Redukce dimenze pomocí PCA

1. Spočítáme hlavní komponenty (dekompozice); nechť jsou uspořádané od největších po nejmenší.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V}^H \mathbf{X}$$

2. Určíme, kolik hlavních komponent zachováme. Označme jejich počet R.
3. Redukujeme dimenzi dat: $\mathbf{Z}_{\mathrm{red}} = \mathbf{Z}_{1:R,:}$, což je stejné jako $\mathbf{V}_{\mathrm{red}} = \mathbf{V}_{:,1:R}$ a $\mathbf{Z}_{\mathrm{red}} = \mathbf{V}_{\mathrm{red}}^H \mathbf{X}$.
4. Rekonstruovaná (redukovaná) data jsou rovna

$$\mathbf{X}_{\mathrm{red}} = \mathbf{V}_{\mathrm{red}} \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}$$

Platí: $\mathbf{X}_{\mathrm{red}}$ jsou nejlepší aproximací $\mathbf{X}$ o dimenzi R ve smyslu kvadratické vzdálenosti, tj. $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\mathrm{red}}\|_F^2$.

Aplikace

- Určení podprostoru, který obsahuje šum (Noise Subspace).
- Redukce dimenze dat
- Příklady: EKG, MFCC, ...

Tento materiál vznikl v rámci projektu ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů,
který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.