TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií

Moderní metody zpracování signálů

Optimální filtry ve smyslu kvadratické vzdálenosti: Adaptivní filtry

Zbyněk Koldovský

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů.

Část I

Adaptivní filtry

Vstup, výstup, chyba

- Nechť $d[n]$ je jiný signál, který chceme získat filtrováním signálu $x[n]$.
- Chyba rozdílu

$$\begin{aligned} e[n] &= d[n] - y[n] \\ &= d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n. \end{aligned}$$

- Filtr w můžeme hledat optimalizací nějakého kritéria, např. kvadratického

$$\begin{aligned} J_n(\mathbf{w}) &= e[n]^2 \\ &= (d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n)^2 = d[n]^2 - 2d[n]\mathbf{w}^T \mathbf{x}_n + \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Gradient $J_n(\mathbf{w})$

- Gradient $J_n(\mathbf{w})$, tj. vektor parciálních derivací podle jednotlivých složek $\mathbf{w}$, lze zapsat vektorově

$$\triangle J_n(\mathbf{w}) = -2\mathbf{x}_n d(n) + 2\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^T\mathbf{w}.$$

- Zavedeme označení

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_n &= \mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^T\\ \mathbf{p}_n &= \mathbf{x}_n d[n],\end{aligned}$$

- Gradient můžeme zapsat jako

$$\triangle J_n(\mathbf{w}) = -2\mathbf{p}_n + 2\mathbf{R}_n\mathbf{w}.$$

Adaptivní LMS

- Cílem je průběžně měnit filtr w optimalizováním kritéria $J_n(\mathbf{w}_n) = |d[n] - \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}_n|^2$.
- LMS: metoda největšího spádu

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu \triangle J_n(\mathbf{w}_n),$$

  kde μ je délka kroku.
- Po dosazení

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu \mathbf{x}_n e[n],$$

  kde $e[n] = d[n] - y[n] = d[n] - \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}_n$.
- Normalizovaný LMS filtr:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu \frac{\mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x}_n\|^2} e[n].$$

RLS (Recursive Least Square)

- Optimalizujeme kritérium, které akumuluje chybový signál s exponenciálním zapomínáním

$$J_n^{\mathrm{RLS}}(\mathbf{w}_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} e_n[k]^2,$$

kde $0 < \lambda \leq 1$ a chybový signál je definovaný jako

$$e_n[k] = d[k] - \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}_k.$$

- Položením gradientu $J_n^{\mathrm{RLS}}(\mathbf{w}_n)$ rovno nule dostaneme normálovou rovnici

$$\Phi_n \mathbf{w}_n = \mathbf{z}_n,$$

kde Φ_n je obdobou $\mathbf{R}$ a $\mathbf{z}_n$ je obdobou $\mathbf{p}$

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T \quad \text{a} \quad \mathbf{z}_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} \mathbf{x}_k d[k].$$

RLS (Recursive Least Square)

- Algoritmus je odvozený tak, abychom $(\Phi_n)^{-1}$ a $\mathbf{z}_n$ nemuseli v každém kroku počítat znovu. Jsou počítány rekurzivně.
- Jeden krok algoritmu je počítán

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h}_n &= \mathbf{P}_{n-1}\mathbf{x}_n \\
\mathbf{k}_n &= \frac{\mathbf{h}_n}{\lambda + \mathbf{x}_n^T\mathbf{h}_n} \\
\xi[n] &= d[n] - \mathbf{w}_{n-1}^T\mathbf{x}_n \\
\mathbf{w}_n &= \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{k}_n\xi[n] \\
\mathbf{P}_n &= \lambda^{-1}\mathbf{P}_{n-1} - \lambda^{-1}\mathbf{k}_n\mathbf{x}_n^T\mathbf{P}_{n-1},
\end{aligned}
$$

kde $\mathbf{P}_n$ značí $(\Phi_n)^{-1}$. Algoritmus bývá inicializován $\mathbf{P}_0 = \delta\mathbf{I}$ a $\mathbf{w}_0 = [1, 0, \ldots, 0]^T$.

Adaptivní filtry ve frekvenční oblasti

- Prakticky: signály transformujeme okénkovou DFT (STFT - Short-Time Fourier Transform)

$$X(\theta, t) = \sum_{n=mR}^{mR+N-1} o(n-mR)x(n)e^{-i2\pi(n-mR)\theta/N},$$

  kde N je délka okénka, R je krok posunutí sousedních okének a $o(n)$ je okénkovací funkce.
- K parametru θ (frekvence, index frekvence) přibude t (čas, index časového okénka)
- Viz přednáška prof. Nobutaka Ono.

Příklad: Adaptivní LMS ve frekvenční oblasti

- Minimalizujeme

$$J(W(\theta), t) = |D(\theta, t) - \overline{W(\theta, t)}X(\theta, t)|^2$$

- Krok adaptivního LMS filtru je

$$W(\theta, t+1) = W(\theta, t) + \mu X(\theta, t)e(\theta, t),$$

  kde $e(\theta, t) = D(\theta, t) - \overline{W(\theta, t)}X(\theta, t)$.

- Adaptace filtru probíhá pro každou frekvenci nezávisle - paralelně.

Tento materiál vznikl v rámci projektu ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů,
který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.