TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií

Moderní metody zpracování signálů

Kvadratická kritéria pro porovnávání signálů

Zbyněk Koldovský

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů.

Náhodný signál

- Náhodná veličina je určena pravděpodobnostní hustotou $f(x)$

Náhodný signál

- Náhodná veličina je určena pravděpodobnostní hustotou $f(x)$
- Např. Gaussovo rozložení, rovnoměrné rozložení, Bernoulliovo rozložení, ...

Náhodný signál

- Náhodná veličina je určena pravděpodobnostní hustotou $f(x)$
- Např. Gaussovo rozložení, rovnoměrné rozložení, Bernoulliovo rozložení, ...
- Náhodný proces je posloupnost náhodných veličin

Náhodný signál

- Náhodná veličina je určena pravděpodobnostní hustotou $f(x)$
- Např. Gaussovo rozložení, rovnoměrné rozložení, Bernoulliovo rozložení, ...
- Náhodný proces je posloupnost náhodných veličin
- Např. slabě stacionární proces, Markovův proces, ...

Střední hodnota a rozptyl náhodného signálu

- Střední hodnota (stejnosměrná složka, DC)

$$\mathrm{E}[x] = \mu_x = \int_{\mathcal{R}} x f(x) dx \qquad \hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x[n]$$

Střední hodnota a rozptyl náhodného signálu

- Střední hodnota (stejnosměrná složka, DC)

$$\mathrm{E}[x] = \mu_x = \int_{\mathcal{R}} x f(x) dx \qquad \hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x[n]$$

- Střední hodnotu odhadujeme (váženým) aritmetickým průměrem. Průběh střední hodnoty odhadujeme pomocí průměrovacích filtrů (low-pass).

Střední hodnota a rozptyl náhodného signálu

- Střední hodnota (stejnosměrná složka, DC)

$$\mathrm{E}[x] = \mu_x = \int_{\mathcal{R}} x f(x) dx \qquad \hat{\mu}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n]$$

- Střední hodnotu odhadujeme (váženým) aritmetickým průměrem. Průběh střední hodnoty odhadujeme pomocí průměrovacích filtrů (low-pass).
- Rozptyl (variance, energie)

$$\mathrm{V}[x] = \sigma_x^2 = \int_{\mathcal{R}} (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

Střední hodnota a rozptyl náhodného signálu

- Střední hodnota (stejnosměrná složka, DC)

$$\mathrm{E}[x] = \mu_x = \int_{\mathcal{R}} x f(x) dx \qquad \hat{\mu}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n]$$

- Střední hodnotu odhadujeme (váženým) aritmetickým průměrem. Průběh střední hodnoty odhadujeme pomocí průměrovacích filtrů (low-pass).
- Rozptyl (variance, energie)

$$\mathrm{V}[x] = \sigma_x^2 = \int_{\mathcal{R}} (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

- Rozptyl odhadujeme (výběrový rozptyl)

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x[n] - \mu_x)^2 \overset{\mu_x=0}{=} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n]^2$$

Kritéria pro porovnávání signálů

Mějme dva signály x a y. Jak je spolu můžeme porovnat?

- Střední kvadratická vzdálenost, korelace, kovariance

Kritéria pro porovnávání signálů

Mějme dva signály x a y. Jak je spolu můžeme porovnat?

- Střední kvadratická vzdálenost, korelace, kovariance
- Další vzdálenosti (ℓ_1) a divergence (vzájemná informace, Itakura-Saito)

Kritéria pro porovnávání signálů

Mějme dva signály x a y. Jak je spolu můžeme porovnat?

- Střední kvadratická vzdálenost, korelace, kovariance
- Další vzdálenosti (ℓ_1) a divergence (vzájemná informace, Itakura-Saito)
- Vzdálenosti spekter, kepster (MFCC)

Kritéria pro porovnávání signálů

Mějme dva signály x a y. Jak je spolu můžeme porovnat?

- Střední kvadratická vzdálenost, korelace, kovariance
- Další vzdálenosti (ℓ_1) a divergence (vzájemná informace, Itakura-Saito)
- Vzdálenosti spekter, kepster (MFCC)
- Rozdíly na základě modelu

Korelace

- Korelace signálů x a y je

$$R_{xy} = \mathrm{E}[x\overline{y}]$$

Korelace

- Korelace signálů x a y je

$$R_{xy} = \mathrm{E}[x\overline{y}]$$

- Odhadujeme (výběrová korelace)

$$\widehat{R}_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n]\overline{y[n]}$$

Korelace

- Korelace signálů x a y je

$$R_{xy} = \mathrm{E}[x\overline{y}]$$

- Odhadujeme (výběrová korelace)

$$\widehat{R}_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n]\overline{y[n]}$$

- Zápis pomocí vektorů

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix}$$

$$\widehat{R}_{xy} = \frac{1}{N}\mathbf{y}^H\mathbf{x}$$

Kovariance

- Kovariance je vlastně korelace vypočtená po odečtení středních hodnot ze signálů

$$C_{xy} = \mathrm{E}(x - \mu_x)(y - \mu_y)$$

Kovariance

- Kovariance je vlastně korelace vypočtená po odečtení středních hodnot ze signálů

$$C_{xy} = \mathrm{E}(x - \mu_x)(y - \mu_y)$$

- Výběrová kovariance

$$\widehat{C}_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x[n] - \widehat{\mu}_x)\overline{(y[n] - \widehat{\mu}_y)}$$

Kovariance

- Kovariance je vlastně korelace vypočtená po odečtení středních hodnot ze signálů

$$C_{xy} = \mathrm{E}(x - \mu_x)(y - \mu_y)$$

- Výběrová kovariance

$$\widehat{C}_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x[n] - \widehat{\mu}_x)\overline{(y[n] - \widehat{\mu}_y)}$$

- Korelace vs. kovariance: Platí

$$C_{xy} = R_{xy} - \mu_x\mu_y \qquad \widehat{C}_{xy} = \widehat{R}_{xy} - \widehat{\mu}_x\widehat{\mu}_y$$

a má-li některý ze signálu nulovou střední hodnotu (výběrový průměr), pak

$$C_{xy} = R_{xy} \qquad \widehat{C}_{xy} = \widehat{R}_{xy}$$

Rozptyl signálu vs. kovarince

- Rozptyl je vlastně kovariance signálu se sebou samým a to stejné platí i pro výběrové veličiny:

$$C_{xx} = \sigma^2 \qquad \widehat{C}_{xx} = \widehat{\sigma}^2$$

Rozptyl signálu vs. kovarince

- Rozptyl je vlastně kovariance signálu se sebou samým a to stejné platí i pro výběrové veličiny:

$$C_{xx} = \sigma^2 \qquad \widehat{C}_{xx} = \widehat{\sigma}^2$$

- Tato hodnota má význam energie (škály, hlasitosti apod.)

Normování

- Normováním signálu chceme dosáhnout toho, aby jeho střední hodnota byla 0 a rozptyl 1.

Normování

- Normováním signálu chceme dosáhnout toho, aby jeho střední hodnota byla 0 a rozptyl 1.
- V praxi odstraňujeme ze vzorků aritmetický průměr a normujeme výběrový rozptyl:

Normování

- Normováním signálu chceme dosáhnout toho, aby jeho střední hodnota byla 0 a rozptyl 1.
- V praxi odstraňujeme ze vzorků aritmetický průměr a normujeme výběrový rozptyl:
    1. Odečtení aritmetického průměru

$$x[n] \leftarrow x[n] - \widehat{\mu}_x$$

Normování

- Normováním signálu chceme dosáhnout toho, aby jeho střední hodnota byla 0 a rozptyl 1.
- V praxi odstraňujeme ze vzorků aritmetický průměr a normujeme výběrový rozptyl:
  1. Odečtení aritmetického průměru

$$x[n] \leftarrow x[n] - \widehat{\mu}_x$$

  2. Normování rozptylu

$$x[n] \leftarrow x[n]/\sqrt{\widehat{\sigma}^2} = x[n]/\sqrt{\widehat{C}_{xx}}$$

Normování

- Normováním signálu chceme dosáhnout toho, aby jeho střední hodnota byla 0 a rozptyl 1.
- V praxi odstraňujeme ze vzorků aritmetický průměr a normujeme výběrový rozptyl:
  1. Odečtení aritmetického průměru

$$x[n] \leftarrow x[n] - \widehat{\mu}_x$$

  2. Normování rozptylu

$$x[n] \leftarrow x[n]/\sqrt{\widehat{\sigma}^2} = x[n]/\sqrt{\widehat{C}_{xx}}$$

- Po těchto krocích platí: $\widehat{\mu}_x = 0$ a $\widehat{\sigma}^2 = 1$ (ověřte si).

Korelační koeficient

- Definice:

$$\widehat{\rho}_{xy} = \frac{\widehat{C}_{xy}}{\sqrt{\widehat{C}_{xx}}\sqrt{\widehat{C}_{yy}}}$$

Je to vlastně kovariance normovaných signálů.

Korelační koeficient

- Definice:

$$\widehat{\rho}_{xy} = \frac{\widehat{C}_{xy}}{\sqrt{\widehat{C}_{xx}}\sqrt{\widehat{C}_{yy}}}$$

  Je to vlastně kovariance normovaných signálů.
- Vlastnosti

Korelační koeficient

- Definice:

$$\widehat{\rho}_{xy} = \frac{\widehat{C}_{xy}}{\sqrt{\widehat{C}_{xx}}\sqrt{\widehat{C}_{yy}}}$$

  Je to vlastně kovariance normovaných signálů.
- Vlastnosti
  - $0 \leq |\widehat{\rho}_{xy}| \leq 1$ (Schwarzova nerovnost)

Korelační koeficient

- Definice:

$$\widehat{\rho}_{xy} = \frac{\widehat{C}_{xy}}{\sqrt{\widehat{C}_{xx}}\sqrt{\widehat{C}_{yy}}}$$

  Je to vlastně kovariance normovaných signálů.
- Vlastnosti
  - $0 \leq |\widehat{\rho}_{xy}| \leq 1$ (Schwarzova nerovnost)
  - Je-li $|\widehat{\rho}_{xy}| = 1$ pak je x pouze násobkem y (a naopak).

Korelační koeficient

- Definice:

$$\widehat{\rho}_{xy} = \frac{\widehat{C}_{xy}}{\sqrt{\widehat{C}_{xx}}\sqrt{\widehat{C}_{yy}}}$$

  Je to vlastně kovariance normovaných signálů.
- Vlastnosti
  - $0 \leq |\widehat{\rho}_{xy}| \leq 1$ (Schwarzova nerovnost)
  - Je-li $|\widehat{\rho}_{xy}| = 1$ pak je x pouze násobkem y (a naopak).
  - Je-li $\widehat{\rho}_{xy} = 0$, pak říkáme, že jsou x a y nekorelované

Korelační koeficient

- Definice:

$$\widehat{\rho}_{xy} = \frac{\widehat{C}_{xy}}{\sqrt{\widehat{C}_{xx}}\sqrt{\widehat{C}_{yy}}}$$

  Je to vlastně kovariance normovaných signálů.
- Vlastnosti
  - $0 \leq |\widehat{\rho}_{xy}| \leq 1$ (Schwarzova nerovnost)
  - Je-li $|\widehat{\rho}_{xy}| = 1$ pak je x pouze násobkem y (a naopak).
  - Je-li $\widehat{\rho}_{xy} = 0$, pak říkáme, že jsou x a y nekorelované
- Je-li $\widehat{\rho}_{xy} = \pm 1$, pak x a y jsou lineárně závislé a nesou identickou informaci.

Korelační koeficient

- Definice:

$$\widehat{\rho}_{xy} = \frac{\widehat{C}_{xy}}{\sqrt{\widehat{C}_{xx}}\sqrt{\widehat{C}_{yy}}}$$

  Je to vlastně kovariance normovaných signálů.
- Vlastnosti
  - $0 \leq |\widehat{\rho}_{xy}| \leq 1$ (Schwarzova nerovnost)
  - Je-li $|\widehat{\rho}_{xy}| = 1$ pak je x pouze násobkem y (a naopak).
  - Je-li $\widehat{\rho}_{xy} = 0$, pak říkáme, že jsou x a y nekorelované
- Je-li $\widehat{\rho}_{xy} = \pm 1$, pak x a y jsou lineárně závislé a nesou identickou informaci.
- Je-li $\widehat{\rho}_{xy} \approx 0$, pak si x a y “jsou nejméně podobné.”

O kvadratické vzdálenosti

- Kvadratická vzdálenost dvou čísel:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

a v komplexním oboru

$$|x - y|^2 = (x - y)\overline{(x - y)} = |x|^2 - \overline{x}y - x\overline{y} + |y|^2$$

O kvadratické vzdálenosti

- Kvadratická vzdálenost dvou čísel:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

a v komplexním oboru

$$|x-y|^2 = (x-y)\overline{(x-y)} = |x|^2 - \overline{x}y - x\overline{y} + |y|^2$$

- Pro signály platí analogie: průměr přes všechny vzorky. Např.

$$\frac{1}{N}\sum_n (x[n]-y[n])^2 = \frac{1}{N}\sum_n x[n]^2 - 2\frac{1}{N}\sum_n x[n]y[n] + \frac{1}{N}\sum_n y[n]^2$$

O kvadratické vzdálenosti

- Kvadratická vzdálenost dvou čísel:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

a v komplexním oboru

$$|x-y|^2 = (x-y)\overline{(x-y)} = |x|^2 - \overline{x}y - x\overline{y} + |y|^2$$

- Pro signály platí analogie: průměr přes všechny vzorky. Např.

$$\frac{1}{N}\sum_n (x[n]-y[n])^2 = \frac{1}{N}\sum_n x[n]^2 - 2\frac{1}{N}\sum_n x[n]y[n] + \frac{1}{N}\sum_n y[n]^2$$

- Na obou signálech je závislý pouze prostřední člen (výběrová korelace).

Normovaná kvadratická vzdálenost

Jsou-li signály normované, pak

$$\frac{1}{N}\sum_n (x[n]-y[n])^2 = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_n x[n]^2}_{=1} - 2\underbrace{\frac{1}{N}\sum_n x[n]y[n]}_{\widehat{\rho}_{xy}} + \underbrace{\frac{1}{N}\sum_n y[n]^2}_{=1},$$

tedy

$$\frac{1}{N}\sum_n (x[n]-y[n])^2 = 2(1-\widehat{\rho}_{xy}).$$

Normovaná kvadratická vzdálenost je úměrná korelačnímu koeficientu.

Příklad: Diskrétní Fourierova Transformace (DFT)

- Definice

$$X[k] = \sum_{n=1}^{N} x[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}(n-1)(k-1)}$$

Příklad: Diskrétní Fourierova Transformace (DFT)

- Definice

$$X[k] = \sum_{n=1}^{N} x[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}(n-1)(k-1)}$$

- Definujeme-li signál y_k jako komplexní harmonický signál o frekvenci $f_k = \frac{2\pi}{N}(k-1)$

$$y_k[n] = e^{if_k(n-1)}.$$

Platí, že $\widehat{\mu}_{y_k} = 0$ (ověřte) a můžeme napsat

$$X[k] = N \cdot \widehat{R}_{xy_k} = N \cdot \widehat{C}_{xy_k}.$$

DFT tedy můžeme interpretovat jako korelace signálu x s komplexními harmonickými signály o frekvencích $f_1, \ldots, f_N$.

Křížová (Cross) kovariance

- Dále budeme pro jednoduchost předpokládat, že $\widehat{\mu}_x = 0$ a $\widehat{\mu}_y = 0$.

Křížová (Cross) kovariance

- Dále budeme pro jednoduchost předpokládat, že $\widehat{\mu}_x = 0$ a $\widehat{\mu}_y = 0$.
- Kovariance x a posunutého y o τ vzorků

$$\widehat{C}_{xy}[\tau] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x[n] \overline{y[n+\tau]}$$

Křížová (Cross) kovariance

- Dále budeme pro jednoduchost předpokládat, že $\widehat{\mu}_x = 0$ a $\widehat{\mu}_y = 0$.
- Kovariance x a posunutého y o τ vzorků

$$\widehat{C}_{xy}[\tau] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n]\overline{y[n+\tau]}$$

- Vektorový zápis pomocí vektorů doplněných o nuly, např.

$$\mathbf{x}[k] = \left[\underbrace{0,\ldots,0}_{k}, x[1], x[2], \ldots, x[N-k]\right]^T,$$

pak $\widehat{C}_{xy}[\tau] = \frac{1}{N}\mathbf{y}^H\mathbf{x}[k]$.

Auto-kovariance

- Kovariance x se svým posunutím o τ vzorků

$$\widehat{C}_{xx}[\tau] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n]\overline{x[n+\tau]}$$

Auto-kovariance

- Kovariance x se svým posunutím o τ vzorků

$$\widehat{C}_{xx}[\tau] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n]\overline{x[n+\tau]}$$

- $\widehat{C}_{xx}[0]$ je rozptyl x

Auto-kovariance

- Kovariance x se svým posunutím o τ vzorků

$$\widehat{C}_{xx}[\tau] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n]\overline{x[n+\tau]}$$

- $\widehat{C}_{xx}[0]$ je rozptyl x
- Magnitudové spektrum signálu je určené jeho auto-kovariancí ve smyslu

$$|X(\theta)|^2 = \mathrm{DTFT}[\widehat{C}_{xx}](\theta)$$

a naopak!

Náznak důkazu: Uvažujte DTFT nekonečné auto-korelace nekonečného signálu (zvolte $N = 1$), proveďte substituci $m = n + \tau$ a upravte.

Příklad: kovarianční matice

- Kovarianční matice EKG nebo EEG signálů z různých epoch

Příklad: kovarianční matice

- Kovarianční matice EKG nebo EEG signálů z různých epoch
- Kovarianční matice EKG nebo EEG signálů z jednotlivých svodů

Příklad: kovarianční matice

- Kovarianční matice EKG nebo EEG signálů z různých epoch
- Kovarianční matice EKG nebo EEG signálů z jednotlivých svodů
- Auto-kovarianční matice bílého šumu

Příklad: kovarianční matice

- Kovarianční matice EKG nebo EEG signálů z různých epoch
- Kovarianční matice EKG nebo EEG signálů z jednotlivých svodů
- Auto-kovarianční matice bílého šumu
- Auto-kovarianční matice řečového signálu

Příklad: vzájemné zpoždění signálů

- Předpoklad: *y* je zpožděný signál *x* plus neznámá změna (šum, filtr,. . .)

$$y[n] = x[n - D] + \nu[n]$$

Příklad: vzájemné zpoždění signálů

- Předpoklad: y je zpožděný signál x plus neznámá změna (šum, filtr,...)

$$y[n] = x[n - D] + \nu[n]$$

- Kontrastní funkce pro výpočet zpoždění D

Příklad: vzájemné zpoždění signálů

- Předpoklad: y je zpožděný signál x plus neznámá změna (šum, filtr,. . .)

$$y[n] = x[n - D] + \nu[n]$$

- Kontrastní funkce pro výpočet zpoždění D
  - Křížová kovariance $\widehat{C}_{xy}[\tau]$

Příklad: vzájemné zpoždění signálů

- Předpoklad: y je zpožděný signál x plus neznámá změna (šum, filtr,...)

$$y[n] = x[n - D] + \nu[n]$$

- Kontrastní funkce pro výpočet zpoždění D
  - Křížová kovariance $\widehat{C}_{xy}[\tau]$
  - GCC-PHAT: Inverzní Fourierova transformace

$$G(\theta) = \frac{X(\theta)\overline{Y(\theta)}}{|X(\theta)||Y(\theta)|}$$

Metoda synchronizovaného průměrování

1. Zvolíme referenční signál
2. Odhadneme vzájemné časové posunutí signálů vzhledem k referenčnímu signálu
3. Signály posuneme tak, aby byly časově synchronizované s referenčním signálem
4. Spočteme průměrnou hodnotu synchronizovaných signálů