TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií

Moderní metody zpracování signálů

Optimální filtry ve smyslu kvadratické vzdálenosti

Zbyněk Koldovský

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů.

Část I

Minimalizace kvadratické vzdálenosti

Vstup, výstup, chyba

- $x[n]$ je vstupní, pro jednoduchost reálný, signál
- Signál zpracováváme FIR filtrem w délky L, výstup je

$$\begin{aligned} y[n] &= w[0]x[n] + w[1]x[n-1] + \cdots + w[L-1]x[n-L] \\ &= \sum_{k=0}^{L-1} w[k]x[n-k]. \end{aligned}$$

- Vektorový zápis

$$y[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n$$

kde

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-L] \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[L] \end{bmatrix},$$

Vstup, výstup, chyba

- Nechť $d[n]$ je jiný signál, který chceme získat filtrováním signálu $x[n]$.
- Chyba rozdílu

$$\begin{aligned} e[n] &= d[n] - y[n] \\ &= d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n. \end{aligned}$$

- Filtr w můžeme hledat optimalizací nějakého kritéria, např. kvadratického

$$\begin{aligned} J_n(\mathbf{w}) &= e[n]^2 \\ &= (d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n)^2 = d[n]^2 - 2d[n]\mathbf{w}^T \mathbf{x}_n + \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Gradient $J_n(\mathbf{w})$

- Gradient $J_n(\mathbf{w})$, tj. vektor parciálních derivací podle jednotlivých složek $\mathbf{w}$, lze zapsat vektorově

$$\triangle J_n(\mathbf{w}) = -2\mathbf{x}_n d(n) + 2\mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}.$$

- Zavedeme označení

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n &= \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \\ \mathbf{p}_n &= \mathbf{x}_n d[n], \end{aligned}$$

- Gradient můžeme zapsat jako

$$\triangle J_n(\mathbf{w}) = -2\mathbf{p}_n + 2\mathbf{R}_n \mathbf{w}.$$

Least Mean Square

- Položíme-li $\triangle J_n(\mathbf{w})$ roven nule, dostáváme rovnici

$$\mathbf{R}_n \mathbf{w} = \mathbf{p}_n$$

- Matice $\mathbf{R}_n$ má hodnost 1, takže nemá inverzi.
- Definujeme nové kritérium zprůměrováním $J_n(\mathbf{w})$ přes interval $n = 1, \ldots, N$

$$J_{\mathrm{LMS}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} J_n(\mathbf{w}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e[n]^2.$$

- Gradient $J_{\mathrm{LMS}}(\mathbf{w})$ je průměr gradientů $J_n(\mathbf{w})$

$$\triangle J_{\mathrm{LMS}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \triangle J_n(\mathbf{w})$$

Least Mean Square

- Takže

$$\triangle J_{\mathrm{LMS}}(\mathbf{w}) = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{w}$$

kde

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^T = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{x}_n d[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{p}_n.$$

- Matice **R** již může mít inverzi (je-li interval $n = 1, \ldots, N$ dostatečně dlouhý). Proto

$$\mathbf{w}_{\mathrm{LMS}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}.$$

Co jsou prvky R?

- Auto-kovariance x

$$\mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n-i+1]x[n-j+1] = \widehat{C}_{xx}[i-j]$$

- Platí tedy (až na koncové efekty)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \widehat{C}_{xx}[0] & \widehat{C}_{xx}[1] & \widehat{C}_{xx}[2] & \dots & \widehat{C}_{xx}[L-1] \\ \widehat{C}_{xx}[1] & \widehat{C}_{xx}[0] & \widehat{C}_{xx}[1] & \dots & \widehat{C}_{xx}[L-2] \\ \widehat{C}_{xx}[2] & \widehat{C}_{xx}[1] & \widehat{C}_{xx}[0] & \dots & \widehat{C}_{xx}[L-3] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \widehat{C}_{xx}[L-1] & \widehat{C}_{xx}[L-2] & \widehat{C}_{xx}[L-3] & \dots & \widehat{C}_{xx}[0] \end{pmatrix}$$

Co jsou prvky R?

- Matici **R** lze též zapsat jako

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{X}^T$$

kde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x[1] & x[2] & \dots & \dots & x[N] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x[1] & \dots & \dots & x[N-1] & x[N] & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x[1] & \dots & x[N-L] & \dots & \dots & \dots & x[N] \end{bmatrix}$$

- **R** je Toeplitzovská (diagonálně konstatní), symetrická a positivně semidefinitní (má reálná nezáporná vlastní čísla).

Co jsou prvky p?

- Cross-kovariance

$$\mathbf{p}_j = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n-j+1]d[n]$$

- Lze zapsat

$$\mathbf{p}_j = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{d}$$

kde

$$\mathbf{d} = \left[d[1], d[2], \ldots, d[N]\right]^T$$

Řešení soustavy $\mathbf{R}\mathbf{w}_{\mathrm{LMS}} = \mathbf{p}$

- Řešení soustavy $\mathbf{R}\mathbf{w}_{\mathrm{LMS}} = \mathbf{p}$ vyžaduje $\mathcal{O}(L^3)$ operací
- Levinson-Durbinův algoritmus využívá toeplitzovskou strukturu **R** a počítá pomocí rekurze řešení pro všechny délky filtru $1, \ldots, L$ přičemž složitost je $\mathcal{O}(L^2)$.
- Rovněž paměťové nároky jsou řádově nižší, protože neukládáme do paměti celou matici **R**, pouze jeden její řádek (sloupec).

Příklad: vzájemné zpoždění signálů

- Předpoklad: d je zpožděný signál x plus neznámá změna (šum, filtr,. . .)
$$d[n] = x[n - D] + \nu[n]$$
- Hledáme filtr takový, aby $h * x$ byl co nejvíce podobný $d[n]$.
- Ideální výsledek:
$$h[n] = \delta[n - D]$$
Jinými slovy h zpozdí x o D vzorků.

Část II

Wienerův filtr

Wienerův filtr

- Předpoklad: x a d jsou slabě stacionární (jejich auto-kovarianční funkce (a tedy spektrum) se v čase nemění).
- Kritérium definujeme jako

$$J(\mathbf{w}) = E[e[n]^2].$$

  Díky stacionaritě je toto kritérium nezávislé na n (na čase).
- Gradient $J(\mathbf{w})$ položíme roven nule, takže

$$\mathbf{w}_{\mathrm{wiener}} = \arg\min_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p},$$

  kde

$$\mathbf{R} = E\left[\mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T\right]$$

$$\mathbf{p} = E\left[\mathbf{x}_n d[n]\right].$$

LMS vs. Wienerův filtr

- Porovnejte definice **R** a **p** pro LMS a Wienerův filtr

$$\mathbf{R} = E\left[\mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T\right] \qquad \mathbf{R} = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{X}^T$$

- Jsou-li x a d stacionární, pak

$$\mathbf{w}_{\mathrm{LMS}} \xrightarrow{N \to +\infty} \mathbf{w}_{\mathrm{wiener}}$$

- Pokud signály nejsou stacionární, nelze nic obecně usoudit.