每天起床头件事，先背一遍展开式

常见级数：

1、调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$发散

2、p级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$，当$p\leqslant 1$时发散，当$p>1$时收敛

3、$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}=\frac{\ln 2}{2^p}+\frac{\ln 3}{3^p}+\cdots+\frac{\ln n}{n^p}\cdots$，当$p<1$时发散，当$p>1$时收敛

作者：你不定积分没加C

常数项级数的性质：

1、级数的每一项同乘常数k后，敛散性不变；且若级数收敛于S，则后来的级数收敛于kS

2、两收敛级数相加(减)后，得到的级数仍收敛，且收敛于两级数收敛值的和(差)

3、级数去掉、增加或改变有限项后，级数敛散性不变

4、对收敛级数任意加括号后所得级数仍收敛且收敛值不变

5、级数收敛 $\Rightarrow$ 级数项的极限为0；级数项的极限不为0 $\Rightarrow$ 级数发散

正项级数的敛散判别法：

一、正项级数收敛的基本定理

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列$\{S_n\}$有上界

二、比较判别法

1、原始形式

设有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且$u_n\leqslant v_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散。简记为：大收小收，小散大散

2、极限形式

设有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，则

(1)当$0<l<+\infty$时，两个级数敛散性相同

(2)当$l=0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散

(3)当$l=+\infty$时，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=l=0$，参考(2)

三、比值判别法

对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则

(1)当$\rho<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

(2)当$\rho>1$或$\rho=+\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散

(3)当$\rho=1$时，比值判别法失效，无法利用此方法判断敛散性

四、根值判别法

对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则

(1)当$\rho<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

(2)当$\rho>1$或$\rho=+\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散

(3)当$\rho=1$时，根值判别法失效，无法利用此方法判断敛散性

五、积分判别法

设函数非负函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续且单减，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$与反常积分$\int_{1}^{+\infty}f(x)dx$敛散性相同

交错级数的敛散判别法：

一、莱布尼茨判别法

若交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0)$满足如下条件，则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛

(1)数列$\{u_n\}$单调递减，即$u_{n+1}\leqslant u_n$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

二、若级数的绝对值级数收敛，则级数收敛

三、若用比值判别法或根值判别法判断出级数的绝对值级数发散，则级数发散

函数项级数：

一、幂级数：

(1)阿贝尔定理：

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则对满足$|x| < |x_0|$的一切$x$，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛；如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处$(x_0 \neq 0)$处发散，则对满足$|x| < |x_0|$的一切$x$，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散

(2)幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛性有且仅有三种可能

1、存在正数R，当$|x| < R$时，幂级数绝对收敛；当$|x| > R$时，幂级数发散

2、除$x = 0$外，幂级数处处发散，此时$R = 0$

3、对任何x，幂级数都绝对收敛，此时记$R = +\infty$

(3)收敛半径计算法

1、在幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$中，若$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，或者$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，则$R = \frac{1}{\rho}$

2、一般地，若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$的收敛半径为$\sqrt[k]{R}$

(4)幂级数的和函数的性质

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数为$S(x)$，则

1、$S(x)$在$(-R,R)$内连续

2、$S(x)$在$(-R,R)$内可导，且有逐项求导公式$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

3、$S(x)$在$(-R,R)$内可积，且有逐项积分公式$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

4、2和3求导积分后得到的幂级数的收敛半径与原幂级数相同

常见的麦克劳林级数：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \ (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_n \ (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \ (x \in R)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} \ (x \in R)$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!}\ (x\in R)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{n}}{n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n}}{n}\ (-1<x\leqslant 1)$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\cdots=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}\ (-1<x<1)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

2023.3.13更新