每天起床头件事，先背一遍展开式

常见等价无穷小：

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$，$a^x - 1 \sim x\ln a$，$\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$

$1-\cos x \sim \sec x - 1 \sim \dfrac{1}{2}x^2$

$x - \sin x \sim \dfrac{1}{6}x^3$

$\tan x - x \sim \dfrac{1}{3}x^3$

$\tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$

斜渐近线$y = kx + b$，其中$k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$

带有皮亚诺余项的n阶泰勒公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

拉格朗日余项：$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

带有拉格朗日余项的n阶麦克劳林公式：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)$$

常见麦克劳林展开：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n-1})$$

求导公式:

(1) $\frac{dC}{dx}=0$(C为常数)

(2) $\frac{dx^{\alpha}}{dx}=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$为任一实数)

(3) $\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$

(4) $\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$

(5) $\frac{d\log_{a}x}{dx}=\frac{1}{x\ln a}\,(a>0,a\neq 1)$

(6) $\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x}$

(7) $\frac{da^{x}}{dx}=a^{x}\ln a\,(a>0,a\neq 1)$

(8) $\frac{de^{x}}{dx}=e^{x}$

(9) $\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^{2}x}=\sec^{2}x$

(10) $\frac{d\cot x}{dx}=-\frac{1}{\sin^{2}x}=-\csc^{2}x$

(11) $\frac{d\sec x}{dx}=\sec x\tan x$

(12) $\frac{d\csc x}{dx}=-\csc x\cot x$

(13) $\frac{d\arcsin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(14) $\frac{d\arccos x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(15) $\frac{d\arctan x}{dx}=\frac{1}{1+x^{2}}$

(16) $\frac{d\,\mathrm{arccot}\,x}{dx}=-\frac{1}{1+x^{2}}$

不定积分公式:

(1) $\int kdx=kx+C$ (k为常数)

(2) $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1)$

(3) $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

(4) $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C\ (a>0,a\neq -1)$

(5) $\int e^{x}dx=e^{x}+C$

(6) $\int\cos x dx=\sin x+C$

(7) $\int\sin x dx=-\cos x+C$

(8) $\int\sec^{2}x=\tan x+C$

(9) $\int\csc^{2}x\,dx=-\cot x+C$

(10) $\int\sec x\tan x dx=\sec x+C$

(11) $\int\csc x\cot x dx=-\csc x+C$

(12) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+C$

(13) $\int\frac{dx}{1+x^{2}}=\arctan x+C$

(14) $\int\sinh x dx=\cosh x+C$

(15) $\int\cosh x dx=\sinh x+C$

求导公式$plus$：

(1) $(a^{x})^{(n)}=a^{x}(\ln a)^{n}(a>0,a\neq 1)$

(2) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

(3) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

(4) $[\ln(1+x)]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^{n}}$

(5) $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n}n!}{(x+a)^{n+1}}$

不定积分公式$plus$：

(1) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\ (a\neq 0)$

(2) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C(a\neq 0)$

(3) $\int\sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$

(4) $\int\csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$

定积分公式:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$ (用于把极限化成定积分)

(2) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

$\frac{d}{dx}\int_v^u f(t)dt=\frac{d}{dx}\int_a^u f(t)dt-\frac{d}{dx}\int_a^v f(t)dt=u'f(u)-v'f(v)$，其中$u$、$v$是关于$x$的函数

(3) $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$

当$f(x)$为奇函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

当$f(x)$为偶函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$

$\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$

$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n}\ (n\text{为正偶数})\\ \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n}\ (n\text{为大于}1\text{的奇数})\end{cases}$

$\int_0^{\pi}\sin^n x dx=\int_0^{\pi}\cos^n x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx\ (n\text{为正偶数})$

$\int_0^{\pi}\cos^n x dx=0(n\text{为正奇数})$

(6)若$f(x)$的周期为T，则：

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{a+nT} f(x)dx = n\int_{0}^{T} f(x)dx$$

(7)$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)dx = (b-a)\int_{0}^{1} f(a+(b-a)x)dx$

(8)柯西－施瓦茨不等式：

若函数$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上可积，则$\left(\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{a}^{b} [f(x)]^2 dx\right)\left(\int_{a}^{b} [g(x)]^2 dx\right)$

定积分的应用公式：

一、求平面图形的面积

1、假设函数$f(x)$和$g(x)$均在$[a,b]$上连续，且$f(x) \leqslant g(x)$，由$y=f(x)$，$y=g(x)$及直线$x=a$，$x=b$所围平面图形的面积$S=\int_{a}^{b}[g(x)-f(x)]dx$

2、假设函数$f(y)$和$g(y)$均在$[a,b]$上连续，且$f(y) \leqslant g(y)$，由$x=f(y)$，$x=g(y)$及直线$y=a$，$y=b$所围平面图形的面积$S=\int_{a}^{b}[g(y)-f(y)]dy$

3、对于用参数方程表示的平面曲线，只需将上述公式中的x和y换成对应的参数方程，并根据原积分上下限计算参数变量的上下限同时替换上下限，求解积分即可

4、设曲线极坐标方程为$r=r(\theta)$，且$r(\theta) \geqslant 0$连续，$r=r(\theta)$与射线$\theta=\alpha$及$\theta=\beta$所围成的曲边扇形的面积$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta$

二、求立体体积

1、定积分求体积的原理：$V=\int_{a}^{b} S(x)dx$，其中$S(x)$为面积随x变化的函数

2、连续曲线$y=f(x)\,(f(x) \geqslant 0)$与直线$x=a$，$x=b(a<b)$及$x$轴所围成的曲边梯形绕$x$轴旋转一周形成的旋转体的体积$V=\pi\int_{a}^{b}[f(x)]^2 dx$

3、连续曲线$x=f(y)\,(f(y) \geqslant 0)$与直线$y=a$，$y=b(a<b)$及$y$轴所围成的曲边梯形绕$y$轴旋转一周形成的旋转体的体积$V=\pi\int_{a}^{b}[f(y)]^2 dy$

4、对于用参数方程表示的平面曲线，只需将上述公式中的x和y换成对应的参数方程，并根据原积分上下限计算参数变量的上下限同时替换上下限，求解积分即可

5、柱壳法：连续曲线$y=f(x)\,(f(x) \geqslant 0)$与直线$x=a$，$x=b(a<b)$及$x$轴所围成的曲边梯形绕$y$轴旋转一周形成的旋转体的体积$V=2\pi\int_{a}^{b} xf(x)dx$

三、求曲线的弧长

1、根据弧微分公式$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$得弧长公式$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

2、对于用参数方程表示的平面曲线，只需将弧微分公式中的x和y换成对应的参数方程，并根据原积分上下限计算参数变量的上下限同时替换上下限，求解积分即可

3、对于用极坐标方程表示的平面曲线，只需将极坐标方程改写为参数方程，结论为

$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$

四、求旋转体的侧面积

1、设$f(x)$有连续的导数，由曲线$y=f(x)\,(f(x)>0)$，$x=a$，$x=b$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周所形成的旋转体的侧面积$A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

2、设$f(y)$有连续的导数，由曲线$x=f(y)\,(f(y)>0)$，$y=a$，$y=b$及y轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周所形成的旋转体的侧面积$A=2\pi\int_a^b f(y)\sqrt{1+[f'(y)]^2}dy$

3、对于用参数方程表示的平面曲线，只需将弧微分公式中的x和y换成对应的参数方程，并根据原积分上下限计算参数变量的上下限同时替换上下限，求解积分即可

4、对于用极坐标方程表示的平面曲线，只需将极坐标方程改写为参数方程，结论为

$A=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$

五、求函数的平均值

连续函数$f(x)$在$[a,b]$上所取一切值的平均值$\overline{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

反常积分：

以下均设$F(x)$为$f(x)$的原函数

一、无穷区间的反常积分

(1) $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}F(b)-F(a)$

(2) $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx=F(b)-\lim\limits_{a\to-\infty}F(a)$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^c f(x)dx+\int_c^{+\infty}f(x)dx$，下略

二、无界函数的反常积分

(1)若函数$f(x)$在$(a,b]$上连续，且a为瑕点

$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx=F(b)-\lim\limits_{\varepsilon\to0}F(a+\varepsilon)$

(2)若函数$f(x)$在$[a,b)$上连续，且b为瑕点

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b+\varepsilon} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}F(b+\varepsilon)-F(a)$$

(3)若函数$f(x)$在$[a,c),(c,b]$内连续，且c为瑕点

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$，下略

微分方程通解求法：

一、一阶齐次线性微分方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$的通解为$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

二、一阶非齐次线性微分方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的通解为$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$

三、形如$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$的方程

1、$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$

令$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=x^*\\y=y^*\end{cases}$

令$X=x=x^*$，$Y=y=y^*$，原微分方程可化为齐次方程$\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}$

2、$a_1b_2-a_2b_1=0$

令$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

令$v=a_2x+b_2y$，则$\frac{dv}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}$

四、伯努利方程$y'+P(x)y=Q(x)y^n$：

$y'+P(x)y=Q(x)y^n \Leftrightarrow y^{-n}y'+P(x)y^{1-n}=Q(x)$

令$z=y^{1-n}$，则$z'+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$，这是一个关于z的一阶线性微分方程

五、某些可降阶的微分方程：

1、不显含未知函数y的微分方程$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)})=0$：令$z=y^{(k)}$，换元后方程降了$k$阶

2、不显含自变量x的微分方程$F(y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$：令$z=y'$，$y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}z$，

$y'''=\frac{d\left(\frac{dz}{dy}z\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx}z+\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}=\frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dy}\frac{dy}{dx}z+\frac{dz}{dy}z'=\frac{d^2z}{dy^2}z^2+\frac{dz}{dy}z'$，以此类推，换元后方程降了一阶

六、二阶常系数齐次线性微分方程：

设二阶常系数齐次线性微分方程$y''+py'+qy=0$的特征方程为$r^2+pr+q=0$，两个根为r_1，r_2

(1) $p^2-4q>0$

$r_1=\dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$，$r_2=\dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$，通解为$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

(2) $p^2-4q=0$

$r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}$，通解为$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$

(3) $p^2-4q<0$

$r_1=\dfrac{-p+\sqrt{4q-p^2}\,i}{2}$，$r_2=\dfrac{-p-\sqrt{4q-p^2}\,i}{2}$

记$r_1=\alpha+\beta i$，$r_2=\alpha-\beta i$，通解为$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

七、二阶常系数非齐次线性微分方程：

设二阶常系数非齐次线性微分方程$y''+py'+qy=f(x)$的一个特解为y^*，对应的齐次方程的通解为Y，特征方程为$r^2+pr+q=0$，两个根为r_1，r_2，则方程的通解$y=y^*+Y$

(1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$，其中λ是常数，$P_m(x)$是x的一个m次多项式

那么二阶常系数非齐次线性微分方程具有形如$y^*=x^kR_m(x)e^{\lambda x}$的特解

当λ和r_1与r_2均不相等时，$k=0$

当λ和r_1与r_2其中之一相等时，$k=1$

当$\lambda=r_1=r_2$时，$k=2$

$R_m(x)$是x的一个m次多项式，可设$R_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$带入方程后通过对比系数法求解

(2) $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$，其中$\lambda$、$\omega$为常数，$\omega\neq0$，$P_l(x)$、$Q_n(x)$分别是$x$的$l$次、$n$次多项式，且仅有一个可为0

那么二阶常系数非齐次线性微分方程具有形如$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}\sin\omega x]$的特解

当$\lambda+\omega i$不是齐次方程的特征方程的根时，$k=0$

当$\lambda+\omega i$是齐次方程的特征方程的根时，$k=1$

$R_m^{(1)}(x)$、$R_m^{(2)}(x)$是x的m次多项式，其中$m=\max\{l,n\}$，仍通过待定系数带入原方程后对比系数求解

八、欧拉方程$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x)$：

若$x>0$，令$x=e^t$；若$x<0$，令$x=-e^t$，下以$x>0$为例：

引用微分算子符号$D=\dfrac{d}{dt}$，则$xy'=Dy$，$x^2y''=D(D-1)$，$x^3y'''=D(D-1)(D-2)y$，……

变换后得到关于$y(t)$的常系数线性微分方程

九、降解法

考虑n阶变系数齐次微分方程$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=0$

先通过各种方法(包括猜)求出一个特解y_1，再令$y=y_1\cdot z$，即可求得通解

微分方程通解的结构;

1、齐次方程通解结构定理

若$y_1,y_2,\cdots,y_n$是齐次方程的n个特解，那么它的线性组合$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$是齐次方程的通解

2、非齐次方程通解结构定理

若$y_1,y_2,\cdots,y_n$是对应的齐次方程的n个特解，$\bar{y}$是是非齐次方程的一个特解，那么

$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n+\bar{y}$是非齐次方程的通解

3、几句口诀

非齐次方程的一个解减去非齐次方程的另一个解等于对应的齐次方程的解

非齐次方程的解加上齐次方程的解仍然是非齐次方程的解

2023.3.1更新