每天起床头件事，先背一遍展开式

常见级数：

1、调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$发散

2、p级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}=1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}+\cdots$，当$p\leqslant 1$时发散，当$p>1$时收敛

3、$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^p}=\dfrac{\ln 2}{2^p}+\dfrac{\ln 3}{3^p}+\cdots+\dfrac{\ln n}{n^p}\cdots$，当$p<1$时发散，当$p>1$时收敛

常数项级数的性质：

1、级数的每一项同乘常数k后，敛散性不变；且若级数收敛于S，则后来的级数收敛于kS

2、两收敛级数相加(减)后，得到的级数仍收敛，且收敛于两级数收敛值的和(差)

3、级数去掉、增加或改变有限项后，级数敛散性不变

4、对收敛级数任意加括号后所得级数仍收敛且收敛值不变

5、级数收敛 $\Rightarrow$ 级数项的极限为0；级数项的极限不为0 $\Rightarrow$ 级数发散

正项级数敛散性的判别法：

一、正项级数收敛的基本定理

正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列$\{S_n\}$有上界

二、比较判别法

1、原始形式

设有正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，且$u_n\leqslant v_n$，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散。简记为：大收小收，小散大散

2、极限形式

设有正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$，则

(1)当$0<l<+\infty$时，两个级数敛散性相同

(2)当$l=0$时，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散

(3)当$l=+\infty$时，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=l=0$，参考(2)

三、比值判别法

对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则

(1)当$\rho<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

(2)当$\rho>1$或$\rho=+\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散

(3)当$\rho=1$时，比值判别法失效，无法利用此方法判断敛散性

四、根值判别法

对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则

(1)当$\rho<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

(2)当$\rho>1$或$\rho=+\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散

(3)当$\rho=1$时，根值判别法失效，无法利用此方法判断敛散性

五、积分判别法

设函数非负函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续且单减，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$与反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$敛散性相同

交错级数的敛散判别法:

一、莱布尼茨判别法

若交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0)$满足如下条件，则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛

(1)数列$\{u_n\}$单调递减，即$u_{n+1}\leqslant u_n$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

二、若级数的绝对值级数收敛，则级数收敛

三、若用比值判别法或根值判别法判断出级数的绝对值级数发散，则级数发散

2023.3.9更新