每天起床头件事，先背一遍展开式

作者：你不定积分没加C

QQ：2422706517

微信：ly2422706517

更新时间：2024年2月9日

工科数学分析基础1

常见等价无穷小：

x~$\sin x$~$\tan x$~$\arcsin x$~$\arctan x$~$e^{x}-1$~$\ln(1+x)$

$(1+x)^{\alpha}-1$~αx，$a^{x}-1$~$x\ln a$，$\log_{a}(1+x)$~$\dfrac{x}{\ln a}$

$1-\cos x$~$\sec x-1$~$\dfrac{1}{2}x^{2}$

$x-\sin x$~$\dfrac{1}{6}x^{3}$

$\tan x-x$~$\dfrac{1}{3}x^{3}$

$\tan x-\sin x$~$\dfrac{1}{2}x^{3}$

斜渐近线$y=kx+b$，其中$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$

带有皮亚诺余项的n阶泰勒公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n}+o((x-x_0)^{n})$$

拉格朗日余项：$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

带有拉格朗日余项的n阶麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)$$

常见麦克劳林展开：

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+o(x^{n})$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{n}}{n}+o(x^{n})$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+o(x^{n})$$

$$\arctan x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}+o(x^{2n-1})$$

求导公式:

(1) $\frac{dC}{dx}=0(C\text{为常数})$

(2) $\frac{dx^{\alpha}}{dx}=\alpha x^{\alpha-1}(\alpha\text{为任一实数})$

(3) $\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$

(4) $\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$

(5) $\frac{d\log_a x}{dx}=\frac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq 1)$

(6) $\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x}$

(7) $\frac{da^x}{dx}=a^x\ln a(a>0,a\neq 1)$

(8) $\frac{de^x}{dx}=e^x$

(9) $\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

(10) $\frac{d\cot x}{dx}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$

(11) $\frac{d\sec x}{dx}=\sec x\tan x$

(12) $\frac{d\csc x}{dx}=-\csc x\cot x$

(13) $\frac{d\arcsin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $\frac{d\arccos x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $\frac{d\arctan x}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$

(16) $\frac{d\,\mathrm{arccot}\,x}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$

不定积分公式:

(1) $\int kdx=kx+C\ (k\text{为常数})$

(2) $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1)$

(3) $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

(4) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\ (a>0,a\neq -1)$

(5) $\int e^x dx=e^x+C$

(6) $\int \cos x dx=\sin x+C$

(7) $\int \sin x dx=-\cos x+C$

(8) $\int \sec^2 x=\tan x+C$

(9) $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$

(10) $\int \sec x\tan x dx=\sec x+C$

(11) $\int \csc x\cot x dx=-\csc x+C$

(12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$

(13) $\int \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$

(14) $\int \sinh x dx=\cosh x+C$

(15) $\int \cosh x dx=\sinh x+C$

求导公式$plus$：

(1) $(a^{x})^{(n)}=a^{x}(\ln a)^{n}(a>0,a\neq 1)$

(2) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

(3) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

(4) $[\ln(1+x)]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^{n}}$

(5) $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n}n!}{(x+a)^{n+1}}$

不定积分公式$plus$：

(1) $\int\frac{dx}{x^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\ (a\neq 0)$

(2) $\int\frac{dx}{x^{2}+a^{2}}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C(a\neq 0)$

(3) $\int\sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$

(4) $\int\csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$

定积分公式:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_{0}^{1}f(x)dx$ (用于把极限化成定积分)

(2) $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(t)dt=f(x)$

$\frac{d}{dx}\int_{v}^{u}f(t)dt=\frac{d}{dx}\int_{a}^{u}f(t)dt-\frac{d}{dx}\int_{a}^{v}f(t)dt=u'f(u)-v'f(v)$，其中$u$、$v$是关于$x$的函数

(3) $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$

当$f(x)$为奇函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

当$f(x)$为偶函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$

$\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$

$\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n}xdx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n}\,(n\text{为正偶数})\\ \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\dots\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n}\,(n\text{为大于}1\text{的奇数})\end{cases}$

$\int_{0}^{\pi}\sin^{n}xdx=\int_{0}^{\pi}\cos^{n}xdx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}xdx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n}xdx$

若n为正偶数，则还有$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n}xdx$成立

$\int_{0}^{\pi}\cos^{n}xdx=0(n\text{为正奇数})$

(6)若$f(x)$的周期为T，则：

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$$

(7)$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx$

(8)柯西－施瓦茨不等式：

若函数$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上可积，则$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2 dx\right)$

定积分的应用公式：

一、求平面图形的面积

1、假设函数$f(x)$和$g(x)$均在$[a,b]$上连续，且$f(x) \leqslant g(x)$，由$y=f(x)$，$y=g(x)$及直线$x=a$，$x=b$所围平面图形的面积$S=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$

2、假设函数$f(y)$和$g(y)$均在$[a,b]$上连续，且$f(y) \leqslant g(y)$，由$x=f(y)$，$x=g(y)$及直线$y=a$，$y=b$所围平面图形的面积$S=\int_a^b [g(y)-f(y)]dy$

3、对于用参数方程表示的平面曲线，只需将上述公式中的x和y换成对应的参数方程，并根据原积分上下限计算参数变量的上下限同时替换上下限，求解积分即可

4、设曲线极坐标方程为$r=r(\theta)$，且$r(\theta) \geqslant 0$连续，$r=r(\theta)$与射线$\theta=\alpha$及$\theta=\beta$所围成的曲边扇形的面积$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$

二、求立体体积

1、定积分求体积的原理：$V=\int_a^b S(x)dx$，其中$S(x)$为面积随x变化的函数

2、连续曲线$y=f(x)\,(f(x) \geqslant 0)$与直线$x=a$，$x=b(a<b)$及$x$轴所围成的曲边梯形绕$x$轴旋转一周形成的旋转体的体积$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$

3、连续曲线$x=f(y)\,(f(y) \geqslant 0)$与直线$y=a$，$y=b(a<b)$及$y$轴所围成的曲边梯形绕$y$轴旋转一周形成的旋转体的体积$V=\pi\int_a^b [f(y)]^2 dy$

4、对于用参数方程表示的平面曲线，只需将上述公式中的x和y换成对应的参数方程，并根据原积分上下限计算参数变量的上下限同时替换上下限，求解积分即可

5、柱壳法：连续曲线$y=f(x)\,(f(x) \geqslant 0)$与直线$x=a$，$x=b(a<b)$及$x$轴所围成的曲边梯形绕$y$轴旋转一周形成的旋转体的体积$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

反常积分：

以下均设$F(x)$为$f(x)$的原函数

一、无穷区间的反常积分

(1) $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} F(b) - F(a)$

(2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{a \to -\infty} F(a)$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$，下略

二、无界函数的反常积分(瑕积分)

(1)若函数$f(x)$在$(a,b]$上连续，且a为瑕点

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{\varepsilon \to 0} F(a+\varepsilon)$$

(2)若函数$f(x)$在$[a,b)$上连续，且b为瑕点

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{a}^{b+\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} F(b+\varepsilon) - F(a)$$

(3)若函数$f(x)$在$[a,c),(c,b]$内连续，且c为瑕点

$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$，下略

微分方程通解求法：

一、一阶齐次线性微分方程$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$的通解为$y = Ce^{-\int P(x)dx}$

二、一阶非齐次线性微分方程$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$的通解为$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$

三、形如$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$的方程

1、$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

令$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x = x^* \\ y = y^* \end{cases}$

令$X = x - x^*$，$Y = y - y^*$，原微分方程可化为齐次方程$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}$

2、$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

令$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$，则$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$

令$v = a_2x + b_2y$，则$\frac{dv}{dx} = a_2 + b_2\frac{dy}{dx}$

四、伯努利方程$y' + P(x)y = Q(x)y^n$：

$y' + P(x)y = Q(x)y^n \Leftrightarrow y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$

令$z = y^{1-n}$，则$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$，这是一个关于$z$的一阶线性微分方程

五、某些可降阶的微分方程：

1、不显含未知函数y的微分方程$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0$：令$z = y^{(k)}$，换元后方程降了$k$阶

2、不显含自变量x的微分方程$F\left(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$：令$z = y'$，$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$，

$y''' = \frac{d\left(\frac{dz}{dy}z\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx}z + \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} = \frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dy}\frac{dy}{dx}z + \frac{dz}{dy}z' = \frac{d^2z}{dy^2}z^2 + \frac{dz}{dy}z'$，以此类推，换元后方程降了一阶

六、二阶常系数齐次线性微分方程：

设二阶常系数齐次线性微分方程$y'' + py' + qy = 0$的特征方程为$r^2 + pr + q = 0$，两个根为r_1，r_2

(1) $p^2 - 4q > 0$

$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$，$r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$，通解为$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

(2) $p^2 - 4q = 0$

$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$，通解为$y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$

(3) $p^2 - 4q < 0$

$r_1 = \frac{-p + \sqrt{4q - p^2}\,i}{2}$，$r_2 = \frac{-p - \sqrt{4q - p^2}\,i}{2}$

记$r_1 = \alpha + \beta i$，$r_2 = \alpha - \beta i$，通解为$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

七、二阶常系数非齐次线性微分方程：

设二阶常系数非齐次线性微分方程$y''+py'+qy=f(x)$的一个特解为y^*，对应的齐次方程的通解为Y，特征方程为$r^2+pr+q=0$，两个根为r_1，r_2，则方程的通解$y=y^*+Y$

(1)$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$，其中λ是常数，$P_m(x)$是x的一个m次多项式

那么二阶常系数非齐次线性微分方程具有形如$y^*=x^kR_m(x)e^{\lambda x}$的特解

当λ和r_1与r_2均不相等时，$k=0$

当λ和r_1与r_2其中之一相等时，$k=1$

当$\lambda=r_1=r_2$时，$k=2$

$R_m(x)$是x的一个m次多项式，可设$R_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$带入方程后通过对比系数法求解

(2)$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$，其中$\lambda$、$\omega$为常数，$\omega\neq0$，$P_l(x)$、$Q_n(x)$分别是$x$的$l$次、$n$次多项式，且仅有一个可为0

那么二阶常系数非齐次线性微分方程具有形如$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}\sin\omega x]$的特解

当$\lambda+\omega i$不是齐次方程的特征方程的根时，$k=0$

当$\lambda+\omega i$是齐次方程的特征方程的根时，$k=1$

$R_m^{(1)}(x)$、$R_m^{(2)}(x)$是x的m次多项式，其中$m=\max\{l,n\}$，仍通过待定系数带入原方程后对比系数求解

八、欧拉方程$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x)$：

若$x>0$，令$x=e^t$；若$x<0$，令$x=-e^t$，下以$x>0$为例：

引用微分算子符号$D=\dfrac{d}{dt}$，则$xy'=Dy$，$x^2y''=D(D-1)$，$x^3y'''=D(D-1)(D-2)y$，……

变换后得到关于$y(t)$的常系数线性微分方程

九、降解法

考虑n阶变系数齐次微分方程$\dfrac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=0$

先通过各种方法(包括猜)求出一个特解y_1，再令$y=y_1\cdot z$，即可求得通解

微分方程通解的结构；

1、齐次方程通解结构定理

若$y_1,y_2,\cdots,y_n$是齐次方程的n个特解，那么它的线性组合$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$是齐次方程的通解

2、非齐次方程通解结构定理

若$y_1,y_2,\cdots,y_n$是对应的齐次方程的n个特解，$\bar{y}$是是非齐次方程的一个特解，那么

$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n+\bar{y}$是非齐次方程的通解

3、几句口诀

非齐次方程的一个解减去非齐次方程的另一个解等于对应的齐次方程的解

非齐次方程的解加上齐次方程的解仍然是非齐次方程的解

工科数学分析基础 2

常见级数：

1、调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$发散

2、p级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$，当$p\leqslant 1$时发散，当$p>1$时收敛

3、$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}=\frac{\ln 2}{2^p}+\frac{\ln 3}{3^p}+\cdots+\frac{\ln n}{n^p}+\cdots$，当$p\leqslant 1$时发散，当$p>1$时收敛

常数项级数的性质：

1、级数的每一项同乘常数k后，敛散性不变；且若级数收敛于S，则后来的级数收敛于kS

2、两收敛级数相加(减)后，得到的级数仍收敛，且收敛于两级数收敛值的和(差)

3、级数去掉、增加或改变有限项后，级数敛散性不变

4、对收敛级数任意加括号后所得级数仍收敛且收敛值不变

5、级数收敛 $\Rightarrow$ 级数项的极限为0；级数项的极限不为0 $\Rightarrow$ 级数发散

正项级数的敛散判别法：

一、正项级数收敛的基本定理

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列$\{S_n\}$有上界

二、比较判别法

1、原始形式

设有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且$u_n\leqslant v_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散

2、极限形式

设有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，则

(1)当$0<l<+\infty$时，两个级数敛散性相同

(2)当$l=0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散

(3)当$l=+\infty$时，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=l=0$，参考(2)

三、比值判别法

对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则

(1)当$\rho<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

(2)当$\rho>1$或$\rho=+\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散

(3)当$\rho=1$时，比值判别法失效，无法利用此方法判断敛散性

四、根值判别法

对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则

(1)当$\rho<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

(2)当$\rho>1$或$\rho=+\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散

(3)当$\rho=1$时，根值判别法失效，无法利用此方法判断敛散性

五、积分判别法

设函数非负函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续且单减，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$与反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$敛散性相同

交错级数的敛散判别法:

一、莱布尼茨判别法

若交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\,(u_n>0)$满足如下条件，则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛

(1)数列$\{u_n\}$单调递减，即$u_{n+1}\leqslant u_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

二、若级数的绝对值级数收敛，则级数收敛

三、若用比值判别法或根值判别法判断出级数的绝对值级数发散，则级数发散

函数项级数：

一、幂级数：

(1)阿贝尔定理：

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=x_0$处$(x_0\neq 0)$处收敛，则对满足$|x|<|x_0|$的一切$x$，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛；如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=x_0$处$(x_0\neq 0)$处发散，则对满足$|x|>|x_0|$的一切$x$，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散

(2)幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛性有且仅有三种可能

1、存在正数R，当$|x|<R$时，幂级数绝对收敛；当$|x|>R$时，幂级数发散

2、除$x=0$外，幂级数处处发散，此时$R=0$

3、对任何x，幂级数都绝对收敛，此时记$R=+\infty$

(3)收敛半径计算法

1、在幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$中，若$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，或者$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则$R=\frac{1}{\rho}$

2、一般地，若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$的收敛半径为$\sqrt[k]{R}$

(4)幂级数的和函数的性质

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数为$S(x)$，则

1、$S(x)$在$(-R,R)$内连续

2、$S(x)$在$(-R,R)$内可导，且有逐项求导公式$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

3、$S(x)$在$(-R,R)$内可积，且有逐项积分公式$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

4、2和3求导积分后得到的幂级数的收敛半径与原幂级数相同

常见的麦克劳林级数：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\ (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (x\in R)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (x\in R)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\ (x\in R)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\ (-1<x\leqslant 1)$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\ (-1<x<1)$$ (这仅是收敛区间，收敛域与α的值有关)

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

傅里叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

1、狄利克雷定理：

设函数$f(x)$是$[-\pi,\pi]$上的分段单调函数，除有限个第一类间断点外都是连续的，则$f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上处处收敛，且收敛于

(1) $f(x)$，当x为$f(x)$的连续点

(2) $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$，当x为$f(x)$的间断点

2、周期为2π的函数的展开：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx，\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx，\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

特别的，当函数为奇函数时，$a_0=0$，$a_n=0$，$b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx$

3、周期为$2l$的函数的展开：

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx，\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx，\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

特别的，当函数为奇函数时，$a_0=0$，$a_n=0$，$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

当函数为偶函数时，$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$，$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$，$b_n=0$

4、在$[-l,l]$上有定义的函数的展开

同周期为$2l$的函数的展开，但根据狄利克雷定理，此级数在$x=\pm l$处收敛于$\frac{1}{2}[f(-l+0)+f(l+0)]$

5、在$[0,l]$上有定义的函数的展开

(1)作偶延拓，展成余弦级数，$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$

$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$，$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$

(2)作奇延拓，展成正弦级数，$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$

$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

利用定义判断二元函数在(x_0,y_0)可微的方法：

①求出(x_0,y_0)处的两个偏导数$f_x{}'(x_0,y_0)$和$f_y{}'(x_0,y_0)$，若偏导数不存在，则不可微

②求极限$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_x{}'(x_0,y_0)\Delta x-f_y{}'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

若极限等于0则可微，若极限不等于0或者极限不存在则不可微

注：对②的解释：

$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$\Delta z-A\Delta x-B\Delta y=o(\rho)$

若可微，则$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-A\Delta x-B\Delta y}{\rho}=0$

即$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_x{}'(x_0,y_0)\Delta x-f_y{}'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$

多元函数全微分的叠加原理：

n元函数$z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全微分等于它的n个偏微分之和，即

$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n$

连续、可偏导及可微的关系：

(1)可微 $\Rightarrow$ 连续且可偏导

(2)偏导连续 $\Rightarrow$ 可微

(3)连续和可偏导无蕴含关系

隐函数存在定理：

如果$n+1$元函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$满足条件

(1)在点$P(x_1^0,x_2^0,\cdots x_n^0,y_0)$的某一邻域内具有连续偏导数$F_y{}'$，$F_{x_i}{}'(i=1,2,\cdots,n)$

(2)$F(x_1^0,x_2^0,\cdots x_n^0,y_0)=0$

(3)$F_y{}'(x_1^0,x_2^0,\cdots x_n^0,y_0)\neq 0$

那么在点$P(x_1^0,x_2^0,\cdots x_n^0,y_0)$的某一邻域内，能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的n元函数

$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，且$\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{F_{x_i}{}'}{F_y{}'}$，$i=1,2,\cdots,n$

求函数方程组所确定的隐函数的导数：

设函数方程组$\begin{cases}x=f(u,v)\\y=g(u,v)\end{cases}$确定$u$和$v$为$x$和$y$的隐函数

方程组两边对x求导得：

$$\begin{cases}1=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\\0=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}，利用克莱默法则求得\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1&\dfrac{\partial f}{\partial v}\\0&\dfrac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u}&\dfrac{\partial f}{\partial v}\\\dfrac{\partial g}{\partial u}&\dfrac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix}}，\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u}&1\\\dfrac{\partial g}{\partial u}&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u}&\dfrac{\partial f}{\partial v}\\\dfrac{\partial g}{\partial u}&\dfrac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix}}$$

同理，两边对y求导，利用克莱默法则可求得$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$

求多元函数的梯度

我们把n元函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$处的梯度记为$\boldsymbol{grad}\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$或$\nabla f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

梯度是一个向量，$\boldsymbol{grad}\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0}$

求方向导数：

如果函数$f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$处可微，则函数在该点沿任一方向$\vec{l}$的方向导数都存在，且$f(x,y)$

在点$P(x_0,y_0)$处沿$\vec{l}=(m,n)$的方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Bigg|_{(x_0,y_0)}=f_x{}'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y{}'(x_0,y_0)\cos\beta$，其中

$\cos\alpha$，$\cos\beta$是向量$\vec{l}$的方向余弦，$\cos\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$

方向导数和梯度的关系：

记$\vec{l}$的单位向量为$\vec{e}_l$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x{}'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y{}'(x_0,y_0)\cos\beta=\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)\cdot\vec{e}_l$$

$$=|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)|\cdot|\vec{e}_l|\cdot\cos\theta=|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)|\cos\theta$$

上式表明函数在某点的方向导数为梯度在该方向上的投影，当$\theta=0$时，方向导数有最大值，最大值为梯度的模$|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$

向量值函数的微分法：

设有n元m维向量值函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(\boldsymbol{x}))^T$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}^0$处对自变量$x_i$的偏导数$\left.\frac{\partial\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0}=\left(\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i},\frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_i},\cdots,\frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right)^T$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}^0$处的导数为一个矩阵，记作$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$或$\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x}^0)$或$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\frac{\partial f_1}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\\frac{\partial f_2}{\partial x_1}&\frac{\partial f_2}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{\partial f_n}{\partial x_1}&\frac{\partial f_n}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0}=\begin{bmatrix}\mathbf{grad}\ f_1(\boldsymbol{x}^0)^T\\\mathbf{grad}\ f_2(\boldsymbol{x}^0)^T\\\vdots\\\mathbf{grad}\ f_n(\boldsymbol{x}^0)^T\end{bmatrix}$$

向量值函数的复合微分法：

设有n元l维向量值函数$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(g_1(\boldsymbol{x}),g_2(\boldsymbol{x}),\cdots,g_l(\boldsymbol{x}))^T$

有l元m维向量值函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})=(f_1(\boldsymbol{u}),f_2(\boldsymbol{u}),\cdots,f_m(\boldsymbol{u}))^T$

若$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))=(f_1(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})),f_2(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})),\cdots,f_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})))^T$

则$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}^0$处的导数$D\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^0)\cdot D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0))\cdot D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0)$

求n元函数的海森$(Hesse)$阵

设有n元函数$f(\boldsymbol{x})$，记其在$\boldsymbol{x}$处的$Hesse$阵为$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}&\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}&\cdots&\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}&\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

多元函数的泰勒公式：

设有n元函数$f(\boldsymbol{x})$，其在$\boldsymbol{x}^0$处的具有佩亚诺余项的二阶泰勒展开为

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}^0)+Df(\boldsymbol{x}^0)^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^T\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|^2)$$

对于二元函数$f(x,y)$，其在(x_0,y_0)处的具有佩亚诺余项的二阶泰勒展开为

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)+$$
$$\frac{1}{2!}(x-x_0,y-y_0)\begin{bmatrix} f_{xx}''(x_0,y_0) & f_{xy}''(x_0,y_0) \\ f_{yx}''(x_0,y_0) & f_{yy}''(x_0,y_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{bmatrix}+o(\rho^2),$$

其中，$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

偏导数在几何中的应用：

(1)求切向量、切线

设空间曲线Γ的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t)\end{cases}$，$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$

曲线在t_0对应的(x_0,y_0,z_0)处的切向量$\vec{s}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$，切线方程为$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

(2)求切平面、法线

设曲面S的方程为$F(x,y,z)=0$，则曲面在(x_0,y_0,z_0)处的：

(1)切平面方程为$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$

(2)法线方程为$\dfrac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$

多元函数的无条件极值：

(1)二元函数

设(x_0,y_0)是函数$f(x,y)$的驻点，记$A=f_{xx}''(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}''(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}''(x_0,y_0)$

若$AC-B^2>0$，则$f(x_0,y_0)$是极值，且当$A<0$时为极大值，当$A>0$时为极小值

若$AC-B^2<0$，则$f(x_0,y_0)$不是极值

若$AC-B^2=0$，无法判断$f(x_0,y_0)$是不是极值

(2)二元以上的函数

设$\boldsymbol{x}^0$是n元函数$f(\boldsymbol{x})$的驻点，$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)$是函数$f(\boldsymbol{x})$在点$\boldsymbol{x}^0$处的$Hesse$阵，则

若$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)$是正定矩阵，则$f(\boldsymbol{x}^0)$是极小值

若$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)$是负定矩阵，则$f(\boldsymbol{x}^0)$是极大值

若$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)$是不定矩阵，则$f(\boldsymbol{x}^0)$不是极值

若$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)$是半正定矩阵或半负定矩阵，无法判断$f(x_0,y_0)$是不是极值

多元函数的条件极值(拉格朗日乘数法)：

以三元函数为例，下总结在约束条件$\varphi(x,y,z)=0$下，求目标函数$f(x,y,z)$极值的方法

构造拉格朗日函数$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$，其中$\lambda$为拉格朗日乘子

令$\begin{cases} L_x=f_x{}'(x,y,z)+\lambda\varphi_x{}'(x,y,z)=0 \\ L_y=f_y{}'(x,y,z)+\lambda\varphi_y{}'(x,y,z)=0 \\ L_z=f_z{}'(x,y,z)+\lambda\varphi_z{}'(x,y,z)=0 \\ L_\lambda=\varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$

解上述方程得x_0，y_0，z_0及λ，则点(x_0,y_0,z_0)就是函数$f(x,y,z)$在约束条件$\varphi(x,y,z)=0$的可能极值点

以上方法也可以推广到更多自变量，更多约束的情况。例如再加上约束$\psi(x,y,z)=0$，则可以构造拉格朗日函数$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$，其中$\lambda$、$\mu$为拉格朗日乘子

二重积分的几何意义：

设$f(x,y)$是D上的非负连续函数，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$表示以$D$为底，以曲面$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积；当$f(x,y)$在$D$的某些区域上为正，在$D$的某些区域上为负，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$表示这些区域上曲顶柱体体积的代数和

求解二重积分的方法：

1、直接求解：

若积分区域为x型域$D=\{(x,y)|\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$

则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$

若积分区域为y型域$D=\{(x,y)|\psi_1(x)\leqslant x\leqslant\psi_2(x),a\leqslant y\leqslant b\}$

则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}f(x,y)dx$

2、换元法：

作变换$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$，$J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0$

则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v))\,|J|dudv$

3、极坐标换元法

作极坐标变换$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，把$D_{r\theta}$看作$\theta$型域

(1)若极点在D的外部，$D_{r\theta}=\{(r,\theta)|r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$

则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(2)若极点在D的边界，$D_{r\theta}=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$

则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r_1(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(3)若极点在D的内部，$D_{r\theta}=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant r(\theta),0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$

则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

4、简化计算

(1)积分区域D关于x轴对称

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0，f(x,-y)=-f(x,y)\\2\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma，f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$，其中$D_1$是$D$在$x$轴的上半部分

(2)积分区域D关于y轴对称

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0，f(-x,y)=-f(x,y)\\2\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma，f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}$，其中$D_1$是$D$在$y$轴的上半部分

(3)积分区域D关于原点对称

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0，f(-x,-y)=-f(x,y)\\2\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma，f(-x,-y)=f(x,y)\end{cases}$，其中$D_1$是$D$由过原点的直线均分出的一半部分

(4)轮换对称性

积分区域D关于直线$y=x$对称时，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)d\sigma$

利用二重积分求解曲面的面积：

曲面$\pi:z=z(x,y)$的面积$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,d\sigma$，其中$D_{xy}$是$\pi$在$Oxy$面上的投影域

同理，我们可以把π向Oyz和Oxz上投影，有类似的结论

三重积分的几何意义：

当$f(x,y,z)=1$时，$\iiint\limits_V dV$表示空间区域V的体积

当$f(x,y,z)\neq 1$时，$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$没有几何意义，但是有物理意义，若$f(x,y,z)$为空间区域$V$的密度，则$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$表示$V$的质量

三重积分的计算：

1、先一后二法

把V向Oxy面作投影D_{xy}，则$V=\{(x,y,z)|z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\in D_{xy}\}$

则$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\iint\limits_{Dxy} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

同理，可以把V向Oyz和Oxz面作投影，有类似的结论

2、先二后一法

$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\int_a^b dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$，其中$D_z$是竖坐标为$z$的平面截$V$所得到的平面闭区域

3、换元法

作变换$\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$，$J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0$

则$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_V f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|dudvdw$

4、柱面坐标换元法

作变换$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$，则$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V_{r\theta z}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdrd\theta dz$

5、球面坐标换元法

作变换$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$

则$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V_{r\theta z}} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

6、简化计算

(1)积分域V关于Oxy面对称时

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\begin{cases}0，f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\\ 2\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV，f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

其中D_1是D在Oxy面上面的部分

(2)积分域V关于Oyz面对称时

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\begin{cases}0，f(-x,y,z)=-f(x,y,z)\\ 2\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV，f(-x,y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

其中D_1是D在Oyz面上面的部分

(3)积分域V关于Oxz面对称时

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\begin{cases}0，f(x,-y,z)=-f(x,y,z)\\ 2\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV，f(x,-y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

其中D_1是D在Oxz面上面的部分

(4)轮换对称性

当V关于平面$y=x$对称时

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\iiint\limits_V f(y,x,z)dV$$

当V关于平面$z=y$对称时

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\iiint\limits_V f(x,z,y)dV$$

当V关于平面$x=z$对称时

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\iiint\limits_V f(z,y,x)dV$$

以下讨论的曲线积分均以二元函数为例，在空间上的三元函数的曲线积分有类似的结论

第一型曲线积分的几何意义：

当$f(x,y)=1$时，$\int_L f(x,y)ds$表示曲线L的长度

当$f(x,y)\neq 1$时，$\int_L f(x,y)ds$表示以Ozy平面上的曲线段L为准线，母线平行于z轴，高度为$f(x,y)$的柱面的面积。且有物理意义，若$f(x,y)$为直线L的线密度，则$\int_L f(x,y)ds$表示曲线L的质量

利用曲线参数方程计算第一型曲线积分：

若曲线L的参数方程为$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$

如果曲线L的方程为$y=y(x)$，则可将x当作参数，得到L的参数方程$\begin{cases}x=x\\y=y(x)\end{cases}(a\leqslant x\leqslant b)$

从而$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx$

同理曲线L的方程为$x=x(y)\,(a\leqslant y\leqslant b)$，有类似的结论

第一型曲面积分的几何意义：

当$f(x,y,z)=1$时，$\iint\limits_S f(x,y,z)dS$表示曲面$S$的面积

当$f(x,y,z)\neq 1$时，$\iint\limits_S f(x,y,z)dS$没有几何意义，但有物理意义，若$f(x,y,z)$表示曲面$S$的面密度，则$\iint\limits_S f(x,y,z)dS$表示曲面$S$的质量

利用“投影法”计算第一型曲面积分

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_{Dxy} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^{2\prime}(x,y)+z_y^{2\prime}(x,y)}dxdy$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_{Dxz} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x^{2\prime}(x,z)+y_z^{2\prime}(x,z)}dxdz$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_{Dyz} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^{2\prime}(y,z)+x_z^{2\prime}(y,z)}dydz$$

其中Dxy，Dxz，Dyz是曲面S分别在Oxy，Oxz，Oyz上的投影

多元数量值函数积分在物理上的应用

以下仅以空间中的实心立体为例，所求物体为一条曲线或者一个曲面，则需要把三重积分改为第一型曲线积分或第一型曲面积分

1、求静矩

对空间中的密度为$\rho(x,y,z)$的实心立体V而言：

对Oxy面的静矩$M_{xy}=\iiint\limits_{V} z\cdot\rho(x,y,z)dV$

对Oyz面的静矩$M_{yz}=\iiint\limits_{V} x\cdot\rho(x,y,z)dV$

对Oxz面的静矩$M_{xz}=\iiint\limits_{V} y\cdot\rho(x,y,z)dV$

对于平面、曲面或曲线，计算静矩时，要将三重积分换成二重积分、曲面积分和曲线积分

需要特别指出的是，对于平面上的面或曲线，要计算对坐标轴的静矩，而不是对坐标面的静矩

2、求质心

$$\begin{cases} \overline{x}=\dfrac{M_{yz}}{m}=\dfrac{\iiint\limits_{V} x\cdot\rho(x,y,z)dV}{\iiint\limits_{V}\rho(x,y,z)dV} \\ \overline{y}=\dfrac{M_{xz}}{m}=\dfrac{\iiint\limits_{V} y\cdot\rho(x,y,z)dV}{\iiint\limits_{V}\rho(x,y,z)dV} \\ \overline{z}=\dfrac{M_{xy}}{m}=\dfrac{\iiint\limits_{V} z\cdot\rho(x,y,z)dV}{\iiint\limits_{V}\rho(x,y,z)dV} \end{cases}$$

3、求转动惯量

对空间中的立体V：

对x轴的转动惯量$I_x=\iiint\limits_{V}(y^2+z^2)\cdot\rho(x,y,z)dV$

对y轴的转动惯量$I_y=\iiint\limits_{V}(x^2+z^2)\cdot\rho(x,y,z)dV$

对z轴的转动惯量$I_z=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)\cdot\rho(x,y,z)dV$

4、求一个物体对一个质点的引力

$$\begin{cases} F_x = \iiint\limits_V G\dfrac{m_0\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dV \\ F_y = \iiint\limits_V G\dfrac{m_0\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dV \\ F_z = \iiint\limits_V G\dfrac{m_0\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dV \end{cases}$$

对于平面、曲面或曲线时，要将三重积分换成二重积分、曲面积分和曲线积分

需要特别指出的是，对于平面上的面或曲线，要计算对坐标轴的静矩和转动惯量，而不是对坐标面的

第二型曲线积分的物理意义：

$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$表示力$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$沿直线$L$做的功

第二型曲线积分没有几何意义

第二型曲线积分的计算：

1、利用参数方程计算

设直线L的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}(t{:}\alpha\to\beta)$，$t=\alpha$对应$L$的起点$A$，$t=\beta$对应$L$的终点$B$

则$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$

2、利用格林公式

闭合曲线L所围成的区域为单连通区域，则$\int_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$，其中$L$是$D$的逆时针边界曲线

3、利用斯托克斯公式

设L为分段光滑的空间有向闭曲线，S为L围成的有向曲面

则有$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$，规定$\dfrac{\partial}{\partial x}$与$Q$“相乘”时，得$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，以此类推

4、利用积分与路径无关

设D为平面上的单连通区域，以下四个命题等价

①设L为D内一条分段光滑闭合曲线，有$\oint_L Pdx+Qdy=0$

②$\int_L Pdx+Qdy$的值在D内与路径无关，仅与起点和终点有关

③$Pdx+Qdy$在D内是某个二元函数$f(x,y)$的全微分，即$df(x,y)=Pdx+Qdy$

④$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$在$D$内成立

第二型曲面积分的物理意义：

$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$表示流速$v(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$的密度为1的不可压缩流体，在单位时间内通过曲面$S$流向指定侧的流量

第二型曲面积分没有几何意义

第二型曲面积分的计算：

1、利用“投影法”计算第二型曲面积分

对于第二型曲面积分$I=\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$

取$\vec{A}=(P(x,y,z(x,y)),Q(x,y,z(x,y)),R(x,y,z(x,y)))$，$\vec{n}=(-z_x{}',-z_y{}',1)$

则$I=\pm\iint\limits_{Dxy}\vec{A}\cdot\vec{n}dxdy$，其中$Dxy$为$S$在$Oxy$面上的投影，当$S$取上侧时为“+”号，当$S$取下侧时为“−”号

同理可以向Oyz、Ozx面上投影

2、分别计算

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+\iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx+\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$$

3、利用高斯公式

设V是由分片光滑的闭曲面S围成的单连通区域，则有

$$\oiint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

原函数、全微分方程：

若$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，那么$Pdx+Qdy$是某个二元函数$u(x,y)$的全微分，此时称$u$为$Pdx+Qdy$的一个原函数，$u(x,y)+C$是其原函数的一般表达式，且$u(x,y)=\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$，其中$(x_0,y_0)$是$P$、$Q$定义域内任取的一点

向量场$\vec{A}=(P,Q,R)$的散度$div\vec{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$，是一个数

向量场$\vec{A}=(P,Q,R)$的旋度$rot\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$，是一个向量

当$div\vec{A}=0$时，我们称向量场$\vec{A}$为无源场

当$rot\vec{A}=0$时，我们称向量场$\vec{A}$为无旋场

当向量场$\vec{A}$即为无源场，又为无旋场时，向量场$\vec{A}$为调和场