Technische Universität Dresden

Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik

Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie

Masterarbeit

Über den Einfluss hochfrequenter mechanischer Oszillationen auf das Schaltverhalten supraleitender PID-Regler auf Quantenbasis

Eine Fallstudie unter besonderer Berücksichtigung stochastischer Einflüsse

vorgelegt von:	Martin P. Mustermann
geboren am:	1. Januar 1912 in Dresden

zum Erlangen des akademischen Grades

Master of Science

(M. Sc.)

Betreuer:	Betreuer 1
	Betreuer 2
Verantwortlicher Hochschullehrer:	Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack
Tag der Einreichung:	2. Februar 2222

Bitte ersetzen Sie diese Seite vor dem Binden mit der Aufgabenstellung.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir am heutigen Tage dem Prüfungsausschuss der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik eingereichte Masterarbeit zum Thema

Über den Einfluss hochfrequenter mechanischer Oszillationen auf das Schaltverhalten supraleitender PID-Regler auf Quantenbasis

selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen sind, wurden als solche kenntlich gemacht.

Pirna, 1. Januar 2016 Martin P. Mustermann

Kurzfassung

An dieser Stelle fügen Sie bitte eine deutsche Kurzfassung ein.

Abstract

Please insert the English abstract here.

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie **5**

1.1 Erläuterung zur Brockett-Bedingung 5

1.2 Methode zur Lösung des Quadratmittelproblems 7

1.2.1 Gauß-Newton-Verfahren 8

1.2.2 Levenberg-Marquadt-Algorithmus 8

1.3 Erweiterung von PyTrajectory 9

Literaturverzeichnis **10**

Kapitel 1

Theorie

1.1 Erläuterung zur Brockett-Bedingung

In Anbetracht von der mathematische Beschreibung und dem Beweis für Brockett-Bedingung ist zuerst die Erklärung einiger mathematischen Terme notwendig.

Stetigkeit (engl.: continuous) [5, S.250]: Es sei $a \subseteq M$. Die Funktion $f : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt a stetig, wenn es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\delta > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \subseteq M$ mit $|x - a| < \delta$ gilt.

D.h. eine stetige Funktion erfüllt die Bedingung: wenn der Abstand zweier Elemente der Definitionsmenge infinitesimal ist, muss der Abstand ihrer entsprechenden Wertemenge auch infinitesimal sein.

Stetige Differenzierbarkeit (engl.: continuously differentiable) [12, S.256]: Eine differenzierbare Abbildung $\boldsymbol{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei stetig differenzierbar in E, wenn $\boldsymbol{f}'$ eine stetige Abbildung von E in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist, wobei E eine offene Menge und $L(X, Y)$ Raum linearer Abbildungen ist.

Klasse C^k (engl.: class C^k) [5, S.265]: Eine Funktion auf einer offenen Umgebung des Punktes p stetige Ableitungen bis zur Ordnung k besitzt.

Basierend auf die obige Definition hat eine Funktion von Klasse C^1 die Ableitung 1. Ordnung, die auch stetig ist.

Glatte Funktion (engl.: smooth function) [15, S.5]: Ein Synonym für C^∞ ist “Glatt”. Eine glatte Funktion ist nämlich eine Funktion mit stetigen Ableitungen zur unendlichen Ordnung.

Surjektiv (engl.: onto) [5, S.931]: Gegeben sei die Abbildung $f : X \to Y$. Betrachtet die Gleichung $f(x) = y$. Wenn die Gleichung für jedes $y \in Y$ eine Lösung $x \in X$ besitzt, d.h. $f(X) = Y$, dann heißt f genau dann *surjektiv*.

Falls jedes Element y der Wertemenge Y kann erreicht werden, dann ist diese Abbildung surjektiv.

Homotopie (engl.: homotopy) [,](noch nicht geschrieben wird.)

Häufungspunkt (engl.: limit point) [12, S.35]: Ein Punkt p ist ein *Häufungspunkt* der Menge E, wenn in jeder Umgebung von p ein Punkt $q \in E$ mit $q \neq p$ liegt.

Abgeschlossene Menge (engl.: closed set) [12, S.36]: E heißt abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von E in E liegt.

Beschränkte Menge (engl.: bounded set) [12, S.36]: E ist beschränkt, wenn eine reelle Zahl M und ein Punkt $q \in X$ existieren, sodass der Abstand von (p, q) kleiner als M für alle $p \in E$ gilt. X ist hier ein metrischer Raum, dessen Teilmenge E ist.

Kompakte Menge (engl.: compact set) [12, S.45]: (Satz, nicht Definition) Falls eine Menge E in $\mathbb{R}^k$ abgeschlossen und beschränkt, dann ist sie kompakt.

Ein sehr einfaches Beispiel der kompakten Menge E ist z.B. $[1, 2]$ mit 1 und 2 jeweils dem linken und rechten Häufungspunkt.

Niveaumenge (engl.: level set) [15, S.94]: Eine Niveaumenge einer Abbildung $f : N \to M$ ist die Submenge $f^{-1}(c) = \{p \in N \mid f(p) = c\}$ für einige $c \in M$.

Also die Niveaumenge $f^{-1}(c)$ besteht aus die Elemente der Definitionsmenge, deren Bildmenge eine Konstante c ist.

Distribution

Lefschetz-fixed-point-formula

Lokale Lipschitzstetigkeit (engl.: locally Lipschitz continuity) [2, S.553]: Lipschitz-Bedingung bezüglich y ist die Forderung $|f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x - y|$ für alle (x, t) und (y, t). Inzwischen ist L eine beliebige Konstante.

Das heißt, wenn die Ableitung der Funktion von f beschränkt ist, erfordert sie Lipschitz-Bedingung. Die Lipschitzstetigkeit ist stärker als Stetigkeit.

Ein nichtlineares Zustandsraummodell lässt sich durch Gl. 1.1 darstellen:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)), \quad t \geq 0, \quad \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, 0) = \boldsymbol{0} \tag{1.1}$$

mit $\boldsymbol{x}$ dem Systemzustand, $\boldsymbol{f}$ der nichtlinearen Zustandsfunktion, u der Eingangsgröße und $\boldsymbol{x}_0$ dem initialen Zustand.

Jetzt stellt sich die Frage: gibt es die Möglichkeit, dass das obere nichtlineare System um die Ruhelage $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ mit einer nichtlinearen Zustandsrückführung (nämlich hier u) asymptotisch stabilisierbar sein kann? Zum Antworten der Frage etabliert der amerikanische Mathematiker Roger W. Brockett das folgende berühmte Kriterium[1]:

Theorem 1.1 (Brockett-Bedingung[1]). *Betrachtet man das System* (1.1) *mit* $\boldsymbol{f}$ *stetig differenzierbar in der Umgebung von* $(\boldsymbol{x}_0, 0)$ *ist. Angenommen, dass* $(\boldsymbol{x}_0, 0)$ *in* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

asymptotisch stabil unter einer stetigen differenzierbaren Rückführung u ist, dann ist das Bild der Abbildung

$$(\boldsymbol{x}, u) \mapsto f(\boldsymbol{x}, u)$$

surjektiv zur offenen Menge, die 0 enthält.

Ein leicht verwirrender Punkt dieses Kriterium liegt in die Bedingungen von $\boldsymbol{f}$ und u in Gl. 1.1. Nach der Beschreibung des Theorems sind beide $\boldsymbol{f}$ und u *stetig differenzierbar*, und in dem Beweis zitiert Brockett eine stetig differenzierbare Lyapunov Funktion, die aber im Original *glatt* ist. (siehe [1, S.186] und [16, S.324].) In anderen Literaturen sind auch unterschiedliche Annahmen ermöglicht: [4] und [11] setzen $\boldsymbol{f}$ und u *stetig und zeitinvariant* als bekannt voraus, während in [14] und [3] bringen die Autoren strengeren Bedingung vor: *lokal lipschitz*. Im Buch vom argentinischen Mathematiker Eduardo D. Sontag [13] werden die Bedingung von $\boldsymbol{f}$ und u gleich wie Brockett (C^1). Eine noch strengere Voraussetzung werde von G. Oriolo und Y. Nakamura in [10] aufgestellt, dass $\boldsymbol{f}$ *stetig differenzierbar* und u *glatt* sein muss.

Zurück auf Brocketts Beweis?????????????????????????

Skizze des Beweises *([1],[8]).* Falls die Ruhelage $(\boldsymbol{x}_0, 0)$ asymptotisch stabil ist, existiert es nach [16] eine glatte Lyapunov Funktion V, die eine sphärischer homotopy Niveaumenge $V^{-1}(c)$ (c eine kleine Konstante) hat. Wegen der Kompaktheit von $V^{-1}(c)$ ist die Richtung von $f(\boldsymbol{x}, u)$ *in* der Menge $R := \{\boldsymbol{x} : V(\boldsymbol{x}) \leq c\}$. Es existiert auch $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\|$ genügend klein, dass $f(\boldsymbol{x}, u) - \xi$ auch *in* R zeigt. Durch die Anwendung des Fixpunktsatz gilt es $f(\boldsymbol{x}, u) - \xi = 0$ (oder $f(\boldsymbol{x}, u) = \xi$) für einige $\boldsymbol{x}$ in R. Weil $\|\xi\|$ beliebig und sehr klein ist, bedeutet die obige Funktion, dass f lösbar in beliebiger Umgebung von 0 ist. □

1.2 Methode zur Lösung des Quadratmittelproblems

Das Quadratmittelproblem einer Funktionsvektor ist wie folgt definiert[7]:

Definition 1.1 (Quadratmittelproblem)**.** *Gegeben ist eine Funktionsvektor $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Eine Vektor $\boldsymbol{x}^*$ ist zu finden, dass die euklidische Norm der Funktionsvektor minimiert wird:*

$$\boldsymbol{x}^* = \min_{\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})|_2^2 = \min_{\boldsymbol{x}} \left(\sum_{i=1}^{m} (f_i(\boldsymbol{x}))^2 \right) \tag{1.2}$$

mit $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$.

1.2.1 Gauß-Newton-Verfahren

Sogenanntes Problem kann man mit verschieden Verfahren lösen. Eine typische Methode ist das Gauß-Newton-Verfahren, das durch die lineare Annäherung die nichtlineare Probleme löst. Mit der Ableitung 1. Ordnung der Funktion $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ wird das Iterationsverfahren mit linearer Konvergenzordnung konvergiert. Im Folgenden wird mit der Taylorentwicklung von $\boldsymbol{F}$ und f angefangen[9]:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) &= f(\boldsymbol{x}) + f'(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{h} \overset{f'=\mathbf{J}}{=} f(\boldsymbol{x}) + \mathbf{J}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{h} + o\left(\boldsymbol{h}^2\right) \approx \boldsymbol{g}(\boldsymbol{h}) \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) &= f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})^{\mathrm{T}}\cdot f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = (f+\mathbf{J}\boldsymbol{h})^{\mathrm{T}}(f+\mathbf{J}\boldsymbol{h}) \\ &= f^{\mathrm{T}}f + 2\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}f + \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\boldsymbol{h} \approx \boldsymbol{G}(\boldsymbol{h}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Das Symbol $\mathbf{J}$ steht für die Jacobian-Matrix. Nach der Ableitung des vorletzten Terms erhält man die 1.- und 2. Ableitung von $\boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{h}) = 2\mathbf{J}^{\mathrm{T}}f + 2\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\boldsymbol{h} \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{G}''(\boldsymbol{h}) = 2\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J} \tag{1.5}$$

Angenommen, dass $\boldsymbol{G}''$ positive definit ist[1]. Sei $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{h}_*) = \mathbf{0}$, ist $\boldsymbol{h}_*$ lokal Minimizer. Zur Berechnung die Schrittweite$\boldsymbol{h}$ lässt sich Gl. 1.4 verschwinden:

$$\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\right)\cdot\boldsymbol{h} = -\mathbf{J}^{\mathrm{T}}f \tag{1.6}$$

Der stationäre Punkt $\boldsymbol{x}^*$ wird aus der vorherige Punkt $\boldsymbol{x}_-$ und $\boldsymbol{h}_*$ berechnet:

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}_- + \boldsymbol{h}_* = \boldsymbol{x}_- - \left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\right)^{-1}\cdot\mathbf{J}^{\mathrm{T}}f \tag{1.7}$$

Linear Konvergenzordnung bedeutet, dass $\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_*\| \leqslant \alpha\,\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\|$ mit $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Eine weitere Beschränkung liegt darin, dass der Anfangsschätzwert $\boldsymbol{x}_0$ in der Näher von $\boldsymbol{x}_*$ sein muss. Aber manchmal fällt das GN-Verfahren solche Bedingungen. Daher wird in nächsten Abschnitt eine andere Methode vorgestellt, die obige Bedingungen erfüllt kann.

1.2.2 Levenberg-Marquadt-Algorithmus

Der nach Kenneth Levenberg und Donald Marquardt benannte Algorithmus ist tatsächlich eine Mischung von Methode des steilsten Abstiegs und Gauß-Newton-Verfahren. Gl. 1.8 zeigt die detaillierte Form von Schrittweite $\boldsymbol{h}$[9][6]:

$$\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J} + \mu\mathbf{I}\right)\cdot\boldsymbol{h} = -\mathbf{J}^{\mathrm{T}}f \tag{1.8}$$

[1]Das ist ein Nachteil von Gauß-Newton-Verfahren. Die Positivdefinitkeit kann nicht immer gesichert werden

$\mathbf{I}$ ist die Einheitsmatrix, μ ist der Dämpfungsparameter.Aufgrund des Dämpfungparameters ist die Positivdefinitkeit der Matrix $\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J} + \mu\mathbf{I}$ gesichert. Falls μ groß ist(das passiert am Anfang der Iteration), ist die Darstellung von Schrittweite ähnlich wie Methode des steilsten Abstiegs, damit die Funktion bei $\boldsymbol{x}$ weit von Zielpunkt schnell konvergiert wird. Andernfalls bei kleines μ oder in der Umgebung von $\boldsymbol{x}_*$ die LM-Algorithmus drückt wie NM-Verfahren aus. Das heißt, in den letzten Schritte wird die Funktion auch schnell konvergiert.

1.3 Erweiterung von PyTrajectory

Pytrajectory ist ein Python Paket zur Trajektorie-Entwurf für nicht lineares System. Das Paket ist auf Python 2.Version entwickelt. Für weitere Informationen kann man Pytrajectory klicken.
Eine Aufgabe bei der Erweiterung von PyTrajectory liegt darin, die Gütefunktionalen und Parametern (insbesondere die Überführungszeit) zu berücksichtigen. Es ist gehofft, die Überführungszeit T nicht vom Nutzer explizit vorgegeben wird, sondern anhand der Systemgleichungen mit Levenberg-Marquadt-Methode automatisch optimiert wird. Anfangspunkt ist die Ansetzung der Zeittransformation von $t = t$ zum $t = k\tau$, womit k eine zusätzliche freie Parameter ist. Dann folgt die untere Gleichungtransformation:

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F\,(x, t) \tag{1.9}$$

$$\dot{x}_{new} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = k \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k \cdot F(x, t) = F_{new}\,(x, t) \tag{1.10}$$

Bei $k > 1$ verlangsamen das System, bei $k < 1$ beschleunigt es.

Literaturverzeichnis

[1] Brockett, R. W. et al.: *Asymptotic stability and feedback stabilization.* Differential geometric control theory, 27(1):181–191, 1983.

[2] Bronstein, I. N., J. Hromkovic, B. Luderer, H.-R. Schwarz, J. Blath, A. Schied, S. Dempe, G. Wanka, S. Gottwald, E. Zeidler et al.: *Taschenbuch der mathematik*, Bd. 1. Springer-Verlag, 2012.

[3] Colonius, F.: *Nichtlineare Kontrolltheorie Sommersemester 2012.* 2012.

[4] Coron, J.-M.: *Control and nonlinearity.* Nr. 136. American Mathematical Soc., 2007.

[5] Grosche, G., V. Ziegler, E. Zeidler und D. Ziegler: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik.* Springer-Verlag, 2003.

[6] Harrach, B. von: *Einführung in die Optimierung.* Vorlesungsskript der Universität Stuttgart, Stand, 2015.

[7] Knorrenschild, M.: *Numerische Mathematik: Eine beispielorientierte Einführung.* Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, 2017.

[8] Liberzon, D.: *Switching in systems and control.* Springer Science & Business Media, 2012.

[9] Madsen, K., H. B. Nielsen und O. Tingleff: *Methods for non-linear least squares problems.* 2004.

[10] Oriolo, G. und Y. Nakamura: *Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: Underactuated manipulators.* In: *Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on*, S. 2398–2403. IEEE, 1991.

[11] Orsi, R., L. Praly und I. Mareels: *Necessary conditions for stability and attractivity of continuous systems.* International Journal of Control, 76(11):1070–1077, 2003.

[12] Rudin, W.: *Analysis, 4.* Aufl. Oldenburg, München, Wien, 2009.

[13] Sontag, E. D.: *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*, Bd. 6. Springer Science & Business Media, 2013.

[14] Stern, R.: *Brockett's stabilization condition under state constraints.* Systems & control letters, 47(4):335–341, 2002.

[15] Tu, L. W.: *An introduction to manifolds.* Springer Science & Business Media, 2010.

[16] Wilson, F. W.: *The structure of the level surfaces of a Lyapunov function.* Journal of Differential Equations, 3(3):323–329, 1967.