Բովանդակություն

Ներածություն

Կառավարման էությունը կանոնավոր գործողությունների հաջորդականություն է, որն իրականացվում է ինչ-որ նպատակի հասնելու համար: Համակարգը, որում կառավարման բոլոր գործողությունները կատարվում են ավտոմատ սարքերի միջոցով, կոչվում է ավտոմատ կառավարման համակարգ:

Յուրաքանչյուր ավտոմատ կառավարման համակարգ անցողիկ պրոցեսում բնութագրվում է երկու հիմնական հատկություններով: Առաջինը դա համակարգի աշխատունակությունն է, որն ընդգրկում է կայունության հասակցողությունը և երկրորդը՝ անցողիկ պրոցեսի ընթացքի մարման հատկություններն են՝ կապված կարգավորման որակի հետ:

Համակարգը կայուն է, եթե վերջինս, որևէ արտաքին ազեցության հետևանքով դուրս բերվելով հավասարակշիռ վիճակից, այդ ազդեցությունը վերացնելուց հետո վերադառնում է իր նախկին հավասարակշիռ վիճակին:

Անկայուն համակարգը հավասարակշիռ վիճակից դուրս բերելու դեպքում այլևս չի վերադառնում հավասարակշիռ վիճակի:

Ավտոմատ կառավարման տեսության շատ խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտ է լինում որոշել արդյոք համակարգի բնութագրող հավասարման արմատները գտնվում են արմատների հարթության ձախակողմյան կիսահարթությունում, թե ոչ: Այսինքն, իմանալով համակարգի բնութագրող հավասարման արմատները, կարելի է գաղափար կազմել նրա կայունության մասին: Բնութագրիչ հավասարման արմատները գտնելու համար նախ անհրաժեշտ է կառուցել այդ հավասարումը: Սակայն նույնիսկ նրա առկայության դեպքում էլ ոչ միշտ է նպատակահարմար հաշվել բնութագրող հավասարման արմատները՝ այդ խնդրի լուծման մեծ աշխատատարության հետևանքով: Ներկայումս մշակված են կայունության որոշման հանրահաշվական և հաճախականային մի քանի չափանիշներ, որոնք հնարավորություն են տալիս առանց լուծելու բնութագրիչ հավասարումը, գաղափար կազմել համակարգի կայունության վերաբերյալ: Կայունության հանրահաշվական չափանիշները հնարավորություն են տալիս որոշել գծային համակարգի բնութագրող հավասարման գործակիցների միջև եղած այն կապը, որի դեպքում ապահովվում է համակարգի կայունությունը: Հաճախականային չափանիշները նույնպես օգտագործելով համակարգի բնութագրիչ հավասարումը տալիս են պատասխան նրա կայունության վերաբերյալ:

Այսպիսով, ավտոմատ կառավարման համակարգերի վերլուծության և սինթեզի բազմաթիվ խնդիրների լուծման համար շատ կարևոր է կառուցել համակարգի բնութագրիչ բազմնանդամը:

Դիպլոմային աշխատանքում խնդիր է դրված հետազոտել մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամի կառուցման մի քանի հանրահաշվական մեթոդներ, դրանց իրականացման համար կազմել մեքենայական ծրագրեր, որոնք հնարավորության կտան մեծ ճշտությամբ որոշել բնութագրիչ բազմանդամի գործակիցները, նույնիսկ վատ պայմանավորված մատրիցների համար:

Գլուխ 1. Տեսական հարցեր

1.1. Գծային հանրահաշվի թվային մեթոդներ

Գծային հանրահաշվի թվային մեթոդներից են գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման, հակադարձ մատրիցների որոշման, մատրիցների որոշիչների հաշվման, մատրիցների սեփական (բնութագրիչ) բազմանդամի, սեփական թվերի և սեփական վեկտորների որոշման մեթոդները: Նշված խնդիրների լուծման գոյություն ունեցող բազմաթիվ մեթոդների մեջ, սակայն, առանձնահատուկ տեղ են զբաղեցնում գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման համար նախատեսված մեթոդները, որոնք, սովորաբար, բաժանվում են երկու խմբի՝

- ճշգրիտ կամ ուղղակի մեթոդներ, որոնք թույլ են տալիս խնդիրների ճշգրիտ լուծումներն ստանալ վերջավոր թվով թվաբանական գործողություններ կատարելուց հետո (ինչպիսիք են Կրամերի, Գաուսի և այլոց մեթոդները),
- մոտավոր (մասնավորապես՝ կրկնողական) մեթոդներ, որոնց կիրառման արդյունքում խնդիրների լուծումներն ստացվում են որպես ինչ-որ անվերջ թվային հաջորդականությունների սահմաններ:

Շատ գիտատեխնիկական խնդիրներ հանգում են

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \tag{1.1.1}$$

($A = \left(a_{ij}\right) \in R^n$; $i,\ j = \overline{1,n}$; $X = \{x_1, \dots, x_n\}^T$, λ-ն ինչ-որ թվային պարամետր է) գծային համասեռ հանրահաշվական հավասարումների համակարգի ոչ զրոյական X լուծման և λ-ի այն արժեքների որոշմանը, որոնց դեպքում այդ լուծումը գոյություն ունի: Այդ դեպքում λ-ն կոչվում է A - մատրիցի սեփական կամ բնութագրիչ թիվ, իսկ X ոչ զրոյական լուծումը՝ λ սեփական թվին համապատասխան սեփական վեկտոր: Հայտնի է, որ $A \cdot X = \lambda \cdot X \Rightarrow (A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$ հավասարման ոչ զրոյական լուծման գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի տեղի ունենա հետևյալ պայմանը՝

$$det[A - \lambda \cdot E] = (-1)^n \cdot P(\lambda) =$$
$$= (-1)^n \cdot [\lambda^n + p_1 \cdot \lambda^{n-1} + p_2 \cdot \lambda^{n-2} + \cdots + p_n] = 0: \tag{1.1.2}$$

P(λ) = 0 արտահայտությունը կոչվում է A մատրիցի բնութագրիչ հավասարում, (իսկ դրա ձախ մասը՝ սեփական բազմանդամ), որի արմատները հենց A մատրիցի սեփական թվերն են: Պարզ է, որ դրանց թիվը հավասար է A մատրիցի կարգին, այսինքն n հատ է, ուստի և յուրաքանչյուր λ_i, $i = \overline{1, n}$ արժեքը դիտարկվող հավասարման մեջ տեղադրելու և այն X անհայտ վեկտորի նկատմամբ լուծելու դեպքում կստացվի համապատասխան սեփական վեկտորը: Իրական մատրիցի դեպքում, եթե λ_i-ն իրական թիվ է, ապա իրական է նաև համապատասխան սեփական վեկտորը, իսկ կոմպլեքս համալուծ սեփական թվերին համապատասխանում են կոմպլեքս համալուծ կոորդինատներով սեփական վեկտորներ: Սեփական վեկտորը համապատասխան համասեռ հավասարումների համակարգից որոշվում է ինչ-որ հաստատունի ճշտությամբ:

Այսպիսով, A մատրիցի սեփական թվերի և սեփական վեկտորների որոշման համար պետք է իրագործել հետևյալ աշխատանքային փուլերը՝

1) կառուցել A մատրիցի սեփական բազմանդամը,
2) լուծել ստացված հավասարումը և ստանալ A մատրիցի սեփական թվերի արժեքները,
3) որոշել համապատասխան սեփական վեկտորները:

Այս փուլերից յուրաքանչյուրի իրականացումը բավականաչափ բարդ հաշվողական խնդիր է և այստեղ ևս տարբերում են ճշգրիտ և մոտավոր մեթոդներ.

- «ճշգրիտ մեթոդներ» անվանումը կապված է այն հանգամանքի հետ, որ եթե A մատրիցի տարրերը տրվում են ճշգրիտ ձևով (ռացիոնալ թվեր են), և սովորական կոտորակների հետ հաշվողական գործողությունները կատարվում են նույնպես ճշգրիտ, ապա բնութագրիչ բազմանդամի գործակիցները, ինչպես նաև սեփական թվերն ու սեփական վեկտորները ևս հաշվարկվում են ճշգրիտ ձևով,
- մոտավոր մեթոդների օգտագործման դեպքում A մատրիցի սեփական թվերն ստացվում են անմիջականորեն, առանց բնութագրիչ բազմանդամին ուղղակիորեն դիմելու, որի դեպքում միաժամանակ հաշվարկվում են նաև համապատասխան սեփական վեկտորները: Մոտավոր մեթոդները կրում են կրկնողական բնույթ և, սովորաբար, օգտագործում են բազմաթիվ անգամ մատրիցը վեկտորով բազմապատկելու գործողությունը: Այս ընթացակարգերը բերում են որոշակի վեկտորների հաջորդականությունների, որոնց սահմանային արժեքները հենց սեփական վեկտորներն են, և

որոշակի թվային հաջորդականությունների, որոնց սահմանային արժեքներն էլ սեփական թվերն են: Մոտավոր մեթոդները, սովորաբար, թույլ են տալիս որոշելու մատրիցի որոշ (օրինակ, մոդուլով ամենամեծ) սեփական թվերը և դրանց համապատասխան սեփական վեկտորները և այս դեպքում ասում են, որ գործ ունեն «սեփական արժեքների մասնավոր հիմնախնդրի» հետ: Ճշգրիտ մեթոդները հնարավորություն են տալիս լուծելու նաև «սեփական արժեքների լրիվ հիմնախնդիրը», այսինքն որոշել ինչպես բոլոր սեփական թվերը, այնպես էլ բոլոր սեփական վեկտորները: Այս խնդիրը, երբեմն, հնարավոր է լինում լուծել նաև հատուկ կրկնողական մեթոդներով, որոնք ընդհանուր առմամբ առավել աշխատատար են, սակայն, ի տարբերություն ճշգրիտ մեթոդների, չեն օգտագործում մատրիցի բնութագրիչ հավասարման պարտադիր կառուցման ընթացակարգեր: Այս հանգամանքը հատկապես կարևոր է այն տեսակետից, որ բնութագրիչ հավասարման գործակիցների որոշման ընթացքում թույլ տրված թեկուզև չնչին սխալները երբեմն կարող են զգալի ազդեցություն ունենալ սեփական թվերի, ինչպես նաև համապատասխան սեփական վեկտորների որոշման ճշտության վրա: Եվ բացի այդ, մոտավոր մեթոդները ճշգրիտ մեթոդների նկատմամբ անհամեմատ պարզ են, ընդգրկում են միանման գործողություններ, ինչը հատկապես կարևոր է համակարգիչների օգտագործման տեսանկյունից:

1.2. Բնութագրիչ հավասարում

Տրված է A մատրիցը՝

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (1.2.1)$$

և հետևյալ վեկտոր-սյունը՝

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (1.2.2)$$

Եթե բազմապատկենք A մատրիցը x վեկտորով, արտադրյալը կստացվի վեկտոր –սյուն, որի տարրերը կնշանակենք y_i, $i=\overline{1,n}$: Եթե այս վեկտոր-սյան y_i տարրերը համեմատական են x վեկտոր-սյան համապատասխան տարրերին λ համեմատականության գործակցով, այսինքն եթե՝

$$y_i=\lambda x_i, \quad (i=\overline{1,n}),$$

ապա x վեկտոր-սյունը կոչվում է A մատրիցի սեփական վեկտոր, իսկ համեմատականության λ գործակիցը՝ A մատրիցի բնութագրիչ թիվ կամ սեփական արժեք:

Այսպիսով, եթե x-ը A մատրիցի սեփական վեկտորն է, իսկ λ-ն բնութագրիչ թիվը, ապա տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$Ax=\lambda x, \tag{1.2.3}$$

$$Ax-\lambda x=0,$$

$$(A-\lambda E)x=0, \tag{1.2.4}$$

որտեղ E-ն միավոր մատրից է, որի կարգը հավասար է A մատրիցի կարգին, իսկ 0-ն՝ զրայական վեկտոր-սյուն է, այսինքն նրա բոլոր տարրերը հավասար են 0-ի:

$x\neq 0$ պայմանի դեպքում (1.2.4) հավասարությունը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ նրա ձախ մասի որոշիչը հավասար կլինի 0-ի, այսինքն՝

$$|A-\lambda E|=0: \tag{1.2.5}$$

(1.2.5) հավասարումը կոչվում է A մատրիցի բնութագրիչ հավասարում, իսկ նրա ձախ մասը՝ $|A-\lambda E|$, բնութագրիչ բազմանդամ:

Ստանանք (1.2.5) հավասարումը բացված տեսքով:

Նախ՝

$$\lambda E=\lambda\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0\\0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&\cdots&0\\0&\lambda&0&0&\cdots&0\\0&0&\lambda&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&\lambda\end{bmatrix} \tag{1.2.6}$$

(1.2.5) հավասարումը ըստ մատրիցների հանրահաշվի, հաշվի առնելով (1.2.1)-ը, բացված տեսքով կլինի՝

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}-\lambda&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}-\lambda&\cdots&a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0: \tag{1.2.7}$$

(1.2.7) հավասարումը A մատրիցի բնութագրիչ հավասարումն է:

1.3. Բնութագրիչ թվեր կամ մատրիցի սեփական արժեքներ

Եթե (1.2.7) հավասարման ձախ մասը գրենք բացված տեսքով, ապա կստանանք հավասարում λ-ի նկատմամբ, որի աստիճանը հավասար կլինի A մատրիցի կարգին (այս դեպքում՝ n): Բնութագրիչ հավասարումը կգրենք հետևյալ տեսքով՝

$$(-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}A_1\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2}A_2\lambda^{n-2} +$$
$$+(-1)^{n-3}A_3\lambda^{n-3} + \cdots + (-1)A_{n-1}\lambda + A_n = 0, \qquad (1.3.1)$$

որտեղ

A_1- առաջին կարգի բոլոր գլխավոր անկյունագծային մինորների գումարն է,

A_2- երկրորդ կարգի բոլոր գլխավոր անկյունագծային մինորների գումարն է,

……………………………………….

A_n- n-րդ կարգի գլխավոր անկյունագծային մինորն է:

λ անհայտ մեծությունը, որը որոշվում է տրված հավասարությունից, ունի n հատ արժեք՝ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, որոնց մեջ կարող են լինել նաև հավասար արժեքներ:

Այսպիսով, n-րդ կարգի քառակուսային A մատրիցն ունի n հատ բնութագրիչ թիվ:

1.4. Սեփական վեկտոր

(1.3.1) բնութագրիչ հավասարման յուրաքանչյուր λ_i, $i = \overline{1,n}$ բնութագրիչ թվին, (1.2.3) հավասարման համաձայն, համապատասխանում է սեփական վեկտոր:

A մատրիցի λ_i սեփական արժեքին պատկանող սեփական վեկտոր կոչվում է այն ոչ 0-ական x վեկտոր-սյունը, որը բավարարում է (1.2.3) մատրիցային հավասարմանը՝

$$Ax = \lambda_i x \qquad (1.4.1)$$

$$(A - \lambda_i E)x = 0 \qquad (1.4.2)$$

Նշանակենք բնութագրիչ հավասարման λ_i արմատին համապատասխանող սեփական վեկտորը b_i, իսկ նրա տարրերը՝ $b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni}$, այսինքն՝

$$b_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ . \\ b_{ni} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,n}:$$

Վեկտորի տարրերը կոչվում են նրա կոորդինատներ, երբեմն նաև բաղադրիչներ:

λ_i բնութագրիչ թվին համապատասխանող սեփական վեկտորի կոորդինատների որոշման համար (1.4.2) հավասարումը գրենք բացված տեսքով՝

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_i & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}: \qquad (1.4.3)$$

Այս հավասարման ձախ մասի մատրիցները բազմապատկելուց հետո, հաշվի առնելով երկու վեկտորների հավասարության պայմանը, b_i սեփական վեկտորի b_{1i}, b_{2i}, …, b_{ni} կոորդինատների որոշման համար կստանանք գծային համասեռ հավասարումների համակարգ, որի ոչ զրոյական լուծման որոշման համար անհրաժեշտ է, որ համակարգի որոշիչը հավասար լինի 0-ի՝.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_i & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda_i \end{vmatrix} = 0: \qquad (1.4.4)$$

(1.4.3)-ում հերթով տեղադրելով $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, կստանանք n հատ սեփական վեկտորները:

1.5. Սեփական արժեքների լրիվ հիմնախնդիրը

Սեփական արժեքների լրիվ հիմնախնդիր ասելով հասկացվում է A մատրիցի բոլոր սեփական արժեքների, ինչպես նաև այդ սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորների փնտրման խնդիրը: A մատրիցի սեփական արժեքներ կոչվում են նրա բնութագրող $P(\lambda)$ բազմանդամի արմատները, այսինքն հետևյալ հավասարման արմատները՝

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \cdots - p_n] = 0: \qquad (1.5.1)$$

Սեփական վեկտորի տարրերի որոշման համար անհրաժեշտ է լուծել n փոփոխականներով n հատ համասեռ հավասարումների համակարգը: Ընդհանուր առմամբ, մատրիցի բոլոր սեփական վեկտորների հաշվարկման համար անհրաժեշտ է լուծել հետևյալ տեսքի n հատ համակարգ՝

$$(A-\lambda_i E)X_i=0, \qquad (1.5.2)$$

որտեղ $X_i=(x_{1i}\,,\ \cdots\ ,\ x_{ni})$ -ն A մատրիցի λ_i սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորն է:

Ընդհանուր դեպքում, բնութագրող $P(\lambda)$ բազմանդամի p_i գործակիցները հանդիսանում են A մատրիցի որոշիչի i-րդ կարգի բոլոր գլխավոր մինորների (այսինքն գլխավոր անկյունագծի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված մինորների) գումարները, վերցված $(-1)^{i-1}$ նշանով: i -ի յուրաքանչյուր արժեքի համար այդպիսի մինորների քանակը հավասար է n-ից i-ական զուգորդությունների քանակին, ուստի p_i գործակիցների անմիջական հաշվարկը պահանջում է մեծածավալ հաշվողական աշխատանքի կատարում:

Այդ պատճառով էլ բնական է հատուկ հաշվողական միջոցների ստեղծումը, որոնք հեշտացնում են մատրիցի սեփական թվերի և սեփական վեկտորների թվային մեթոդով որոշումը:

Ճշգրիտ մեթոդների մեծամասնությունը նախ կառուցում են մատրիցի սեփական բազմանդամը (այսինքն հաշվում են նրա $p_1, p_2, \dots, p_n$ գործակիցները), այնուհետև որոշում են դրա արմատները, ստանալով մատրիցի սեփական արժեքները, որից հետո որոշում են դրանց համապատասխանող սեփական վեկտորները: Ընդ որում, շատ մեթոդներում, օգտագործելով հաշվումների միջանկյալ արդյունքները, ստանում են մատրիցի հաշված սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները, առանց լուծելու վերևում նշված գծային համասեռ հանրահաշվական հավասարումների համակարգերը: Այս խմբի մեթոդները ստացել են ճշգրիտ մեթոդներ անվանումը այն պատճառով, որ մատրիցի տարրերի ճշգրիտ արժեքների (ռացիոնալ թվերի միջոցով) առկայության և հաշվողական գործընթացների ճշգրիտ (ըստ սովորական կոտորակների նկատմամբ կատարվող գործողություններին համապատասխանող կանոնների) իրականացման դեպքում այդպիսի մեթոդները բերում են սեփական բազմանդամի գործակիցների ճշգրիտ արժեքների որոշմանը, իսկ սեփական վեկտորների կոորդինատները ստացվում են արտահայտված համապատասխան սեփական արժեքներով:

Երկրորդ խմբի մեթոդներում մատրիցի սեփական արժեքները որոշվում են անմիջականորեն, առանց օգտագործելու սեփական բազմանդամը, ընդ որում, սովորաբար, միաժամանակ որոշվում են նաև համապատասխան սեփական վեկտորները: Այդպիսի մեթոդների հաշվողական սխեմաները ունեն կրկնողական բնույթ: Նրանցում օգտագործվում է մատրիցի բազմակի բազմապատկումը վեկտորով: Այդ տիպի սխեմաները սովորաբար հանգեցնում են վեկտորների հաջորդականության ստացմանը, որի սահմանային արժեքը սեփական վեկտորն է, և թվային հաջորդականության, որի սահմանային արժեքը համապատասխան սեփական արժեքն է: Ընդ որում, կրկնողական գործընթացի բնույթը էականորեն կախված է տվյալ մատրիցի համար Ժորդանի կանոնական տեսքի բնույթից, ինչպես նաև մատրիցի իրական կամ կոմպլեքս սեփական արժեքների առկայությունից: Այդ գործընթացի զուգամիտումը և դրա արագությունը որոշվում է տարբեր հարևան սեփական արժեքների մոդուլների հարաբերությամբ:

Որպես կանոն, կրկնողական մեթոդները թույլ են տալիս բավարար ճշտությամբ որոշել միայն առաջին (օրինակ՝ մոդուլով մեծագույն) սեփական արժեքները և նրանց համապատասխան սեփական վեկտորները: Այդ պատճառով այս խմբի մեթոդները ավելի հաճախ օգտագործվում են, այսպես կոչված, «*սեփական արժեքների մասնակի հիմնախնդրի*» լուծման համար, այսինքն՝ որոնելու նպատակով մատրիցի մեկ կամ մի քանի սեփական արժեքներն ու համապատասխան սեփական վեկտորները: Ճշգրիտ մեթոդները, թույլ են տալիս լուծել նաև «*սեփական արժեքների լրիվ հիմնախնդիրը*», այսինքն՝ թույլ են տալիս որոշել մատրիցի բոլոր սեփական արժեքներն ու համապատասխան սեփական վեկտորները: Սեփական արժեքների լրիվ հիմնախնդիրը որոշ դեպքերում կարող է լուծվել նաև հատուկ կրկնողական մեթոդներով: Այդ մեթոդները, իհարկե, ավելի աշխատատար են, քան ճշգրիտ մեթոդները կամ սեփական արժեքների մասնակի հիմնախնդրի լուծման մեթոդները: Նրանց գործնական կիրառումը հնարավոր դարձավ միայն արագագործ հաշվիչ տեխնիկայի ի հայտ գալու շնորհիվ: Սակայն սեփական արժեքների լրիվ հիմնախնդրի լուծման ճշգրիտ մեթոդների համեմատ կրկնողական մեթոդներն անկասկած ունեն մեկ կարևոր առավելություն, որը կապված է բոլոր սեփական արժեքների որոշման հնարավորության հետ, առանց կառուցելու մատրիցի սեփական բազմանդամը: Դա առավել կարևոր է կապված բազմանդամի գործակիցների հաշվման գործընթացում թույլ տրված սխալների հետ, որը կարող է բերել նրա արմատների, այսինքն՝ մատրիցի սեփական արժեքների (և նրանց համապատասխանող սեփական վեկտորների) ոչ ճշգրիտ որոշմանը: Բացի դրանից, կրկնողական մեթոդների խոշոր առավելությունը ճշգրիտ մեթոդների նկատմամբ կայանում է պահանջվող գործողությունների միօրինակության մեջ, որն առավել կարևոր է արագագործ հաշվիչ տեխնիկա օգտագործելիս:

Սեփական արժեքների լրիվ և մասնակի խնդիրները էականորեն տարբերվում են ինչպես լուծման մեթոդներով, այնպես էլ կիրառման բնագավառներով: Քանի որ սեփական արժեքների լրիվ հիմնախնդրի լուծումը, նույնիսկ ոչ մեծ չափսերով մատրիցի համար, սովորաբար կապված է մեծածավալ հաշվողական աշխատանքի հետ, այդ պատճառով այլ մեթոդներով սեփական արժեքների մասնակի հիմնախնդրի լուծման հնարավորությունը ունի գործնական մեծ արժեք:

1.6. Մատրիցի սեփական բազմանդամի որոշման մեթոդները

1.6.1. Լևերյեի մեթոդը

Այս մեթոդը դիտարկվող խնդրի լուծմանը նպատակաուղղված առաջին մեթոդներից մեկն է և, չնայած աչքի է ընկնում հաշվողական ընթացակարգերի իրականացման աշխատանքների մեծ ծավալով, այնուամենայնիվ, այն լայնորեն տարածված հանրանշանակ և պարզ տրամաբանությամբ օժտված մեթոդ է:

Բնութագրիչ հավասարման որոշման Լևերյեի մեթոդը հիմնված է հանրահաշվից հայտնի Նյուտոնի բանաձևերի՝

$$k \cdot p_k = S_k - p_1 \cdot S_{k-1} - p_2 \cdot S_{k-2} - \ldots - p_{k-1} \cdot S_1,\ k = \overline{1,n} \qquad (1.6.1.1)$$

օգտագործման վրա, որոնք կապ են հաստատում մատրիցի սեփական

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1 \cdot \lambda^{n-1} - p_2 \cdot \lambda^{n-2} - \cdots - p_n \qquad (1.6.1.2)$$

բազմանդամի $p_1, p_2, \ldots, p_n$ գործակիցների և նրա արմատների, այսինքն այդ մատրիցի սեփական $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ արժեքներից հետևյալ սիմետրիկ ֆունկցիաների միջև՝

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k,\ k = \overline{1,n}: \qquad (1.6.1.3)$$

Եթե հայտնի են $S_k,\ k = \overline{1,n}$ արժեքները, որոնք հեշտությամբ կարելի է որոշել, եթե հաշվի առնվի, որ

$$S_k = spA^k = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(k)}, \qquad (1.6.1.4)$$

որտեղ spA^k-ն A^k մատրիցի հետքն է, այսինքն A^k մատրիցի $a_{ii}^{(k)}$ անկյունագծային տարրերի գումարը, ապա Նյուտոնի բանաձևերը թույլ են տալիս անդրադարձ ընթացակարգերի օգնությամբ հաջորդաբար հաշվել մատրիցի սեփական բազմանդամի հետևյալ գործակիցները՝

$$
\begin{aligned}
&p_1 = S_1,\\
&p_2 = \frac{1}{2}\cdot(S_2 - S_1\cdot p_1),\\
&p_3 = \tfrac{1}{3}\cdot(S_3 - S_2\cdot p_1 - S_1\cdot p_2),\\
&.\ .\\
&p_n = \frac{1}{n}\cdot(S_n - S_{n-1}\cdot p_1 - S_{n-2}\cdot p_2 - \ \dots - S_1\cdot p_{n-1}):
\end{aligned}
\qquad (1.6.1.5)
$$

Այստեղ անենք մեկ կարևոր դիտողություն՝ կապված հաշվարկների ծավալի նշանակալից կրճատման հետ: Բանն այն է, որ այս կամ այն մատրիցի հետքը հաշվելու համար բավական է ունենալ միայն նրա անկյունագծային տարրերը: Ուստի, դժվար չէ համոզվել, որ այս նպատակին կարելի է հասնել հետևյալ ճանապարհով. նախ պետք է հաշվել A^k, $k=\overline{2,m}$ (որտեղ $m=\frac{n}{2}$, եթե n-ը զույգ է, և $m=\frac{n+1}{2}$, եթե n-ը կենտ է) մատրիցները, իսկ այնուհետև՝ A^{m+1}, A^{m+2}, ..., A^n մատրիցների անկյունագծային տարրերը, չհաշվելով ոչ անկյունագծայինները, որն էլ հենց պայմանավորում է հաշվարկների ծավալի կրճատումը: Սակայն, նույնիսկ այս պայմաններում, մեթոդը տառապում է մատրիցները մի շարք անգամ իրար բազմապատկելով պայմանավորված աշխատատարությամբ: Հիմնական առավելությունը հաշվարկային սխեմայի պարզ տրամաբանությունն է և արտակարգ իրավիճակների բացակայությունը:

Օրինակ.

Որոշել A մատրիցի բնութագրիչ հավասարումը.

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 4\\ 3 & 3 & 2\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 1 & 4\\ 3 & 3-\lambda & 2\\ 6 & 2 & 10-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

Որոշիչը բացված տեսքով գրելուց հետո, կունենանք.

$$(-1)^3\lambda^3 + (-1)^2 p_1\lambda^2 + (-1)p_2\lambda + p_3 = 0,$$

$$\lambda^3 - p_1\lambda^2 + p_2\lambda - p_3 = 0,$$

իսկ p_1, p_2, p_3 գործակիցները որոշվում են (1.6.1.5) բանաձևերից:

Գտնենք A մատրիցի աստիճանները և ստացված մատրիցների հետքերը:

$$A=\begin{bmatrix}5&1&4\\3&3&2\\6&2&10\end{bmatrix},\quad S_1=5+3+10=18,$$

$$A^2=\begin{bmatrix}5&1&4\\3&3&2\\6&2&10\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&1&4\\3&3&2\\6&2&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52&16&62\\36&16&38\\96&32&128\end{bmatrix},$$

$$S_2=52+16+128=196,$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}52&16&62\\36&16&38\\96&32&128\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&1&4\\3&3&2\\6&2&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}680&.&.\\.&160&.\\.&.&1728\end{bmatrix},$$

$$S_3=680+160+1728=2568:$$

(1.6.1.5) բանաձևերը կիրառելով, կստանանք.

$$p_0=1,$$

$$p_1=18,$$

$$p_2=\frac{1}{2}(p_1S_1-p_0S_2)=\frac{1}{2}(18\cdot18-1\cdot196)=64,$$

$$p_3=\frac{1}{3}(p_2S_1-p_1S_2+p_0S_3)=\frac{1}{3}(64\cdot18-18\cdot196+2568)=64:$$

Բնութագրիչ հավասարումը կլինի.

$$\lambda^3-18\lambda^2+64\lambda-64=0:$$

1.6.2. Ֆադդեևի մեթոդը

Լևերյեի մեթոդի հետաքրքիր ձևափոխություն է առաջարկել Դ. Կ. Ֆադդեևը: Այն ոչ միայն թույլ է տալիս հաշվել մատրիցի սեփական բազմանդամի գործակիցները, այլև հնարավորություն է տալիս արդյունավետ որոշել տվյալ մատրիցի հակադարձը, ինչպես նաև կարող է կիրառվել սկզբնական մատրիցի սեփական վեկտորների ստացման համար:

Առաջարկվում է A^2, A^3, …, A^n մատրիցների հաջորդականության փոխարեն գտնել այլ՝ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ մատրիցների հաջորդականություն, որը կկառուցվի հետևյալ կերպ՝.

$$\begin{array}{lll}A_1=A, & SpA_1=q_1, & B_1=A_1-q_1E\,,\\ A_2=AB_1, & \frac{SpA_2}{2}=q_2, & B_2=A_2-q_2E,\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n-1}=AB_{n-2}, & \frac{SpA_{n-1}}{n-1}=q_{n-1}, & B_{n-1}=A_{n-1}-q_{n-1}E,\\ A_n=AB_{n-1}, & \frac{SpA_n}{n}=q_n, & B_n=A_n-q_nE:\end{array}\qquad(1.6.2.1)$$

Ընդ որում, պարզվում է, ճիշտ կլինեն հետևյալ պնդումները.

1. $q_i = p_i$, $i = \overline{1,n}$,
2. B_n-ը զրոյական մատրից է,
3. եթե A մատրիցը հատուկ չէ, ապա

$$A^{-1} = \frac{B_{n-1}}{p_n}: \qquad (1.6.2.2)$$

Առաջին հավասարությունն ապացուցելու համար կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: $i = 1$ դեպքում առաջին պնդումն ակնհայտ է՝

$$p_1 = SpA = SpA_1 = q_1,$$

Ենթադրելով, որ տեղի ունի $q_i = p_i$ բոլոր $i = \overline{1, k-1}$ համար, ապացուցենք, որ $q_k = p_k$: Քանի որ, ըստ կառուցման

$$A_k = A^k - q_1A^{k-1} - q_2A^{k-2} - \ ... - q_{k-1}A,$$

իսկ ըստ ենթադրության, որ $q_i = p_i$ բոլոր $i = 1, 2, \ ... \ , \ k-1$ համար, ապա

$$A_k = A^k - p_1A^{k-1} - p_2A^{k-2} - \ ... - p_{k-1}A,$$

հետևաբար

$$kq_k = SpA_k = SpA^k - p_1SpA^{k-1} - p_2SpA^{k-2} - \ ... - p_{k-1}SpA =$$
$$= S_k - p_1S_{k-1} - p_2S_{k-2} - \ ... - p_{k-1}S_1:$$

Ըստ Նյուտոնի (1.6.1.1) բանաձևերի

$$S_k - p_1S_{k-1} - p_2S_{k-2} - \ ... - p_{k-1}S_1 = kp_k:$$

Ուստի, $kq_k = kp_k$, որն ապացուցում է առաջին պնդման ճշտությունը:

Երկրորդ պնդումն ապացուցելու համար կօգտվենք Համիլտոն-Կելի թեորեմից.

$$B_n = A_n - q_nE = A^n - p_1A^{n-1} - p_2A^{n-2} - \ ... - p_{n-1}A - p_nE = 0:$$

Ստուգենք վերջին պնդումը: Քանի որ $A_n = p_nE$, իսկ ըստ կառուցման $A_n = AB_{n-1}$, ապա

$$AB_{n-1} = p_nE$$

կամ

$$A^{-1} = \frac{1}{p_n}B_{n-1}:$$

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե A մատրիցը հատուկ է (detA = 0), ապա $C = (-1)^{n-1}B_{n-1}$ մատրիցը կլինի A մատրիցին կից մատրից, այսինքն

$$C = \left(A_{ij}\right)', \ \ i,j = \overline{1,n} \ ,$$

որտեղ A_{ij}-ով նշանակված է A մատրիցի a_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացումը:

Նկատենք, որ վերևում ապացուցված $A_n = p_nE$ հավասարությունը կարող է օգտագործվել հաշվումները ստուգելու նպատակով, նրանց ճշտության մասին կարելի է դատել ըստ սկալյար մատրիցից A մատրիցի շեղման չափի:

Ֆադդեևի մեթոդը թույլ է տալիս նաև արդյունավետ գտնել մատրիցի սեփական վեկտորները: Այդ նպատակով օգտագործվում են մատրիցի սեփական բազմանդամի կառուցման ժամանակ հաշվարկների միջանկյալ արդյունքները:

Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը՝

$$Q(\lambda) = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}B_1 + \lambda^{n-3}B_2 + \ \dots + +\lambda B_{n-2} + B_{n-1}: \qquad (1.6.2.3)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե սկզբնական A մատրիցի λ_1, λ_2, … , λ_n սեփական արժեքները տարբեր են, ապա $Q(\lambda_i)$, $i = \overline{1,n}$ մատրիցները զրոյական չեն: Այս դեպքում, պարզվում է, $Q(\lambda_i)$ մատրիցի ցանկացած ոչ զրոյական սյուն կարելի է ընդունել որպես A մատրիցի λ_i սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտոր: Իրոք,

$$(\lambda_i E - A)Q(\lambda_i) = (\lambda_i E - A)\left(\lambda_i{}^{n-1}E + \lambda_i{}^{n-2}B_1 + \lambda_i{}^{n-3}B_2 + \ \dots + \lambda_i B_{n-2} + B_{n-1}\right) =$$
$$= \lambda_i{}^{n}E + \lambda_i{}^{n-1}(B_1 - A) + \lambda_i{}^{n-2}(B_2 - AB_1) + \ \dots + \lambda_i(B_{n-1} - AB_{n-2}) - AB_{n-1} =$$
$$= (\lambda_i{}^{n} - p_1\lambda_i{}^{n-1} - p_2\lambda_i{}^{n-2} - \ \dots - p_n)E = 0,$$

քանի որ ըստ կառուցման $B_k - AB_{k-1} = -p_k E$, $i = \overline{1,n}$, իսկ λ_i-ն հանդիսանում է սեփական բազմանդամի արմատ: Ստացված հավասարությունից՝

$$(\lambda_i E - A)Q(\lambda_i) = 0$$

հետևում է, որ

$$(\lambda_i E - A)\bar{x} = \bar{0} \qquad (1.6.2.4)$$

կամ

$$A\bar{x} = \lambda_i \bar{x},$$

որտեղ $\bar{x}$-ը $Q(\lambda_i)$ մատրիցի ցանկացած սյուն է:

Այս մեթոդով A մատրիցի սեփական վեկտորների փնտրման ժամանակ կարիք չկա կառուցել ամբողջական $Q(\lambda_i)$ մատրիցը, բավական է յուրաքանչյուր λ_i , $i = \overline{1,n}$ համար սահմանափակվել միայն մեկ սյան հաշվարկով:

Օրինակ.

Որոշել A մատրիցի բնութագրիչ հավասարումը.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Բնութագրիչ հավասարումը կլինի՝

$$Q_3(\lambda) = \lambda^3 - p_1\lambda^2 - p_2\lambda - p_3 = 0$$

$$A_1 = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad p_1 = q_1 = 7.5,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -5.5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -4.5 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = AB_1 = \begin{bmatrix} -9 & -2 & -1.5 \\ -2 & -10.5 & -1 \\ -1.5 & -1 & -11.5 \end{bmatrix}, \quad p_2 = q_2 = -15.5,$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 6.5 & -2 & -1.5 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1.5 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = AB_2 = \begin{bmatrix} 9.5 & 0 & 0 \\ 0 & 9.5 & 0 \\ 0 & 0 & 9.5 \end{bmatrix}, \quad p_3 = q_3 = 9.5,$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

$$Q_3(\lambda) = \lambda^3 - 7.5\lambda^2 + 15.5\lambda - 9.5 = 0:$$

1.6.3. Դանիլևսկու մեթոդը

Սահմանում. m-րդ կարգի քառակուսային P մատրիցը կոչվում է A մատրիցին նման, եթե այն ներկայացված է հետևյալ տեսքով՝

$$P = S^{-1}AS, \tag{1.6.3.1}$$

որտեղ S-ը m-րդ կարգի ոչ հատուկ քառակուսային մատրից է:

Թեորեմ. Սկզբնական և նրան նման մատրիցների բնութագրիչ բազմանդամները համընկնում են:

Իրոք,

$$|P - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}AS - S^{-1}\lambda ES| = |S^{-1}(A - \lambda E)S| =$$
$$= |S^{-1}||A - \lambda E||S| = |A - \lambda E| \tag{1.6.3.2}$$

Դանիլևսկու մեթոդի գաղափարը կայանում է նրանում, որ A մատրիցը նմանության ձևափոխություններով բերվում է, այսպես կոչված, Ֆրոբենիուսի կանոնական տեսքի՝

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.6.3.3}$$

որի բնութագրիչ բազմանդամը կարելի է գրել նրա տեսքից:

Իրոք, P մատրիցի $D(\lambda) = |P - \lambda E|$ որոշիչը, հաջորդաբար, ըստ առաջին սյան տարրերի տարրալուծման արդյունքում կստանանք՝

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (p_1 - \lambda)(-\lambda)^{m-1} - p_2(-\lambda)^{m-2} - p_3(-\lambda)^{m-3} - \cdots + (-1)^{m+1}p_m =$$

$$= (-1)^m(\lambda^m - p_1\lambda^{m-1} - p_2\lambda^{m-2} - \cdots - p_{m-1}\lambda - p_m) = (-1)^m P(\lambda),$$

այսինքն, P մատրիցի առաջին տողի p_1, $p_{2,}$ ... p_m տարրերը հանդիսանում են իր սեփական բազմանդամի համապատասխան գործակիցները, հետևաբար և սկզբնական A մատրիցի սեփական բազմանդամի գործակիցները, քանի որ A մատրիցը P մատրիցի հետ կապված է $P = S^{-1}AS$ նմանության ձևափոխությամբ:

Այսպիսով, հիմնական խնդիրը հանգում է անհրաժեշտ S մատրիցը գտնելուն: Ա. Մ. Դանիլևսկին առաջարկել է այդ մատրիցը կառուցել հաջորդաբար, *m-1* նմանության ձևափոխությունների օգնությամբ, որոնք A մատրիցի տողերը սկսած վերջինից ձևափոխում են P մատրիցի համապատասխան տողերին:

Կախված A մատրիցի տարրերից, Դանիլևսկու մեթոդում կարիլի է հանդիպել երկու հնարավոր դեպքերի՝ կանոնավոր և ոչ կանոնավոր: Նախ դիտարկենք կանոնավոր դեպքը:

Ենթադրենք, որ A մատրիցի $a_{m,m-1}$ տարրը տարբեր է զրոյից: Այդ դեպքում A մատրիցի $(m-1)$-րդ սյան տարրերը բաժանելով այդ տարրի վրա, այնուհետև այդ սյան տարրերը՝ նախօրոք բազմապատկված $a_{m,i}$, $(i = 1, 2, \dots m-2, m)$ տարրով, եթե հանվեն մատրիցի i-րդ սյան համապատասխան տարրերից, ապա մատրիցի վերջին տողը կբերվի Ֆրոբենիուսի տեսքի: Անմիջականորեն կարելի է ստուգել, որ այդպիսի ձևափոխությունը համարժեք է A մատրիցը աջից բազմապատկելուն հետևյալ մատրիցով՝

$$M_{m-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{-a_{m1}}{a_{m,m-1}} & \frac{-a_{m2}}{a_{m,m-1}} & \cdots & \frac{1}{a_{m,m-1}} & \frac{-a_{mm}}{a_{m,m-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}: \quad (1.6.3.4)$$

Արդյունքում մատրիցի վերջին տողը կընդունի անհրաժեշտ տեսքը, սակայն, ընդհանրապես ասած, AM_{m-1} ձևափոխությունը A մատրիցի համար չի հանդիսանում նմանության ձևափոխություն: Այդ թերությունն ուղղել կարելի է ստացված մատրիցը ձախից բազմապատկելով M_{m-1}^{-1} մատրիցով, որը գոյություն ունի, քանի որ $|M_{m-1}| = = \frac{1}{a_{m,m-1}} \neq 0$: Անմիջականորեն կարելի է համոզվել, որ M_{m-1}^{-1} մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$M_{m-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,m-1} & a_{m,m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6.3.5)$$

Ակնհայտ է, որ $M_{m-1}^{-1}AM_{m-1}$ ձևափոխությունը չի փոխում AM_{m-1} մատրիցի վերջին տողը:

Այսպիսով, Դանիլևսկու մեթոդի առաջին քայլը կատարելու արդյունքում կստացվի հետևյալ տեսքի մատրից՝

$$M_{m-1}^{-1}AM_{m-1} = A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,m-1}^{(1)} & a_{1m}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2,m-1}^{(1)} & a_{2m}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-1,1}^{(1)} & a_{m-1,2}^{(1)} & \cdots & a_{m-1,m-1}^{(1)} & a_{m-1,m}^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.6.3.6)$$

Նշենք, որ M_{m-1}^{-1} և M_{m-1} մատրիցները, որոնցով համապատասխանաբար ձախից և աջից բազմապատկելու արդյուքում A մատրիցը ձևափոխվում է A_1 մատրիցի, ձևավորվում են անմիջականորեն A մատրիցի տեսքից:

Ենթադրենք, որ A_1 մատրիցի $a_{m-1,m-2}^{(1)}$ տարրը տարբեր է զրոյից: Այդ դեպքում Դանիլևսկու մեթոդի երկրորդ քայլը ամբողջությամբ նման է առաջինին և հանգում է A_1 մատրիցի ներքևից երկրորդ տողի Ֆրոբենիուսի տեսքի բերելուն (առանց փոխելու ներքևից առաջին տողը): Այդպիսի ձևափոխության արդյունքը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$M_{m-2}^{-1}M_{m-1}^{-1}AM_{m-1}M_{m-2} = M_{m-2}^{-1}A_1M_{m-2} =$$

$$= A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1,m-2}^{(2)} & a_{1,m-1}^{(2)} & a_{1m}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,m-2}^{(2)} & a_{2,m-1}^{(2)} & a_{2m}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (1.6.3.7)$$

որտեղ

$$M_{m-2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-1,1}^{(1)} & a_{m-1,2}^{(1)} & \cdots & a_{m-1,m-2}^{(1)} & a_{m-1,m-1}^{(1)} & a_{m-1,m}^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{m-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{-a_{m-1,1}^{(1)}}{a_{m-1,m-2}^{(1)}} & \frac{-a_{m-1,2}^{(1)}}{a_{m-1,m-2}^{(1)}} & \cdots & \frac{1}{a_{m-1,m-2}^{(1)}} & \frac{-a_{m-1,m-1}^{(1)}}{a_{m-1,m-2}^{(1)}} & \frac{-a_{m-1,m}^{(1)}}{a_{m-1,m-2}^{(1)}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}:$$

Ինչպես տեսնում ենք, M_{m-2}^{-1} և M_{m-2} մատրիցների ձևավորման կանոնը A_1 մատրիցի տեսքից ամբողջովին նման է M_{m-1}^{-1} և M_{m-1} մատրիցների ձևավորման կանոնին $A = A_0$ մատրիցի տեսքից: Նույն օրինաչափությունը պահպանվում է Դանիլևսկու մեթոդի հաջորդ քայլերում ևս:

Այսպիսով, եթե $a_{m,m-1} \neq 0$, $a_{m-1,m-2}^{(1)} \neq 0$, $a_{m-2,m-3}^{(2)} \neq 0, \dots$, $a_{2,1}^{(m-2)} \neq 0$, ապա Դանիլևսկու մեթոդի $(m-1)$ քայլից հետո կունենանք՝

$$M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{m-2}^{-1} M_{m-1}^{-1} A M_{m-1} M_{m-2} \dots M_2 M_1 = A_{n-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(m-1)} & a_{12}^{(m-1)} & \cdots & a_{1,m-2}^{(m-1)} & a_{1,m-1}^{(m-1)} & a_{1m}^{(m-1)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-2} & p_{m-1} & p_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P = S^{-1} A S: \qquad (1.6.3.8)$$

Այսպիսով, սկզբնական A մատրիցը ոչ հատուկ $S = M_{m-1} M_{m-2} \dots M_2 M_1$ մատրիցի միջոցով նմանության ձևափոխություն կատարելու արդյունքում կբերվի Ֆրոբենիուսի կանոնական տեսքի, որի առաջին տողի տեսքից անմիջականորեն կարելի է կառուցել A մատրիցի սեփական բազմանդամը:

Դիտարկենք ոչ կանոնավոր դեպքը:

Ենթադրենք, սկզբնական A մատրիցի տողերը, հաջորդաբար, Դանիլևսկու մեթոդով Ֆրոբենիուսի տեսքի բերելու գործընթացը հասցվել է մինչև k-րդ տողին, այսինքն իրականացվել է այդ մեթոդի (m-k) քայլը, բայց պարզվել է, որ A_{m-k} մատրիցի $a_{k,k-1}^{(m-k)} = 0$: Մեթոդի հաջորդ՝ (m-k+1)-րդ քայլը իրականացնել վերևում նկարագրված եղանակով անհնար է: Կախված A_{m-k} մատրիցի k-րդ տողի տարրերի մեջ $a_{k,k-1}^{(m-k)} = 0$ տարրից ձախ տեղադրված ոչ զրոյական տարրի առկայությունից, գործընթացի հետագա շարունակությունը հնարավոր է, օրինակ, հետևյալ երկու տարբերակներով: Ենթադրենք, այդպիսի տարր կա և այն տեղավորված է A_{m-k} մատրիցի i-րդ ($i<k-1$) սյունում: Այդ դեպքում գործընթացի շարունակությունը կարելի է բերել կանոնավոր դեպքին: Դրա համար բավարար է A_{m-k} մատրիցի i-րդ և (k-1)-րդ սյուները, ինչպես նաև նույն համարով տողերը փոխատեղել: Անմիջականորեն կարելի է ստուգել, որ այդպիսի ձևափախությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$TA_{m-k}T, \tag{1.6.3.9}$$

որտեղ՝

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & (i) & & & & & (k-1) & & & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 0 & & & \vdots & & & & & \vdots & & & & \\
0 & 1 & & & \vdots & & & & & \vdots & & & & \\
& & \ddots & & \vdots & & & & & \vdots & & & & \\
& & & 1 & \vdots & & & & & \vdots & & & & \\
& & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & & \vdots & 1 & & & & \vdots & & & & \\
& & & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & & & & \\
& & & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & & & \\
& & & & \vdots & & & & 1 & \vdots & & & & \\
& & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & & & & & & & & 1 & & & \\
& & & & & & & & & & & \ddots & & \\
& & & & & & & & & & & & 1 & 0 \\
& & & & & & & & & & & & 0 & 1
\end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ \\ (k-1) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \tag{1.6.3.10}$$

Հեշտությամբ կարելի է ստուգել նաև, որ $TA_{m-k}T$ ձևափոխությունը A_{m-k} մատրիցի համար հանդիսանում է նմանության ձևափոխություն: Իրոք, քանի որ տողերի կամ սյուների կրկնակի փոխատեղության արդյունքում ստացվում է սկզբնական մատրիցը, ապա $T^2 = E$, այսինքն՝ $T = T^{-1}$: Հետևաբար, $TA_{m-k}T$ ձևափոխությունը A_{m-k} մատրիցի համար հանդիսանում է նմանության ձևափոխություն: Իրականացնելով այսպիսի ձևափոխություն, կարելի է Դանիլովսկու մեթոդի հաջորդ քայլը իրականացնել ինչպես կանոնավոր դեպքում:

Այժմ դիտարկենք երկրորդ տարբերակը, որը կարող է առաջանալ ոչ կանոնավոր դեպքում, այսինքն ենթադրենք, որ՝

$$a_{k,1}^{(n-k)} = a_{k,2}^{(n-k)} = \dots = a_{k,k-1}^{(n-k)} = 0 :$$

Այդ դեպքում A_{m-k} մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$A_{m-k} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(m-k)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(m-k)} & a_{1,k}^{(m-k)} & \cdots & a_{1,m-1}^{(m-k)} & a_{1,m}^{(m-k)} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . & . \\ a_{k-1,1}^{(m-k)} & \cdots & a_{k-1,k-1}^{(m-k)} & a_{k-1,k}^{(m-k)} & \cdots & a_{k-1,m-1}^{(m-k)} & a_{k-1,m}^{(m-k)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k,k}^{(m-k)} & \cdots & a_{k,m-1}^{(m-k)} & a_{k,m}^{(m-k)} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_{m-k} & C_{m-k} \\ 0 & F_{m-k} \end{bmatrix}, \qquad (1.6.3.11)$$

որտեղ՝

$$B_{m-k} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(m-k)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(m-k)} \\ . & \cdots & . \\ a_{k-1,1}^{(m-k)} & \cdots & a_{k-1,k-1}^{(m-k)} \end{bmatrix},$$

$$C_{m-k} = \begin{bmatrix} a_{1,k}^{(m-k)} & \cdots & a_{1,m}^{(m-k)} \\ . & \cdots & . \\ a_{k-1,k}^{(m-k)} & \cdots & a_{k-1,m}^{(m-k)} \end{bmatrix},$$

$$F_{m-k} = \begin{bmatrix} a_{k,k}^{(m-k)} & \cdots & a_{k,m-1}^{(m-k)} & a_{k,m}^{(m-k)} \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & \cdots & . & . \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}:$$

Այդ դեպքում

$$|A_{m-k} - \lambda E| = |B_{m-k} - \lambda E_{k-1}| \cdot |F_{m-k} - \lambda E_{m-k+1}|, \qquad (1.6.3.12)$$

որտեղ հավասարման աջ կողմում E-ի ինդեքսները ցույց են տալիս միավոր մատրիցի չափսերը:

Քանի որ F_{m-k} մատրիցը Ֆրոբենիուսի մատրից է, ապա նրա բնութագրիչ բազմանդամը գրվում է ուղղակիորեն ըստ նրա առաջին տողի տեսքի: Նշանակում է $|A_{m-k} - \lambda E|$ բազմանդամը գտնելու համար բավական է Ֆրոբենիուսի կանոնական տեսքի բերել միայն k – 1 < n կարգի քառակուսային B_{m-k} մատրիցը: Այսպիսով, այս դեպքում սեփական բազմանդամի կառուցման գործընթացը նույնիսկ դառնում է ավելի պարզ:

Անհրաժեշտ գործողությունների քանակի պարզ հաշվարկով դժվար չէ համոզվել, որ Դանիլովսկու մեթոդը մատրիցի սեփական բազմանդամի կառուցման հայտնի մեթոդների մեջ հանդիսանում է արդյունավետներից մեկը: Սակայն, ինչպես և համարյա բոլոր ճշգրիտ մեթոդները, այն շատ զգայուն է միջանկյալ հաշվումների կատարման ժամանակ առաջացող սխալների նկատմամբ: Դանիլովսկու մեթոդում արդեն հայտնի պարզ եղանակով կարելի է որոշ չափով բարձրացնել հաշվումների հուսալիությունը, եթե մեթոդի (n - k + 1)-րդ քայլում նմանության ձևափոխության միջոցով $a_{k,k-1}^{(m-k)}$ տարրի տեղում տեղադրվի A_{m-k} մատրիցի այդ տարրից վերև և ձախ գտնվող մոդուլով մեծագույն տարրը: Հաշվումների ճշտության ստուգման նպատակով օգտակար է p_1 գործակցի ստացված արժեքը համեմատել մատրիցի հետքի հետ:

Օրինակ.

Գտնել A մատրիցի բնութագրիչ հավասարումը.

$$A = \begin{bmatrix} 2.2 & 1 & 0.5 & 2 \\ 1 & 1.3 & 2 & 1 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 1.6 \\ 2 & 1 & \mathbf{1.6} & 2 \end{bmatrix}$$

1-ին փուլ

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{1.6} & -\frac{1}{1.6} & \frac{1}{1.6} & -\frac{2}{1.6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.25 & -0.625 & 0.625 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1.6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = B_1^{-1} \cdot A \cdot B_1 = \begin{bmatrix} 1.575 & 0.6875 & 0.3125 & 1.375 \\ -1.5 & 0.05 & 1.25 & -1.5 \\ 1.45 & \mathbf{4.125} & 4.375 & 2.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}:$$

2-րդ փուլ

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1.45}{4.125} & \frac{1}{4.125} & -\frac{4.375}{4.125} & -\frac{2.81}{4.125} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3515 & 0.2424 & -1.0606 & -0.6812 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.45 & 4.125 & 4.375 & 2.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = B_2^{-1} \cdot D_1 \cdot B_2 = \begin{bmatrix} 1.3333 & 0.1667 & -0.4167 & 0.9067 \\ -\mathbf{4.3267} & 4.6667 & 7.1433 & -5.0133 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}:$$

3-րդ փուլ

$$B_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{-4.3267} & -\frac{4.6667}{-4.3267} & -\frac{7.1433}{-4.3267} & -\frac{-5.0133}{-4.3267} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2311 & 1.0786 & 1.651 & -1.1587 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_3^{-1} = \begin{bmatrix} -4.3267 & 4.6667 & 7.1433 & -5.0133 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_3 = B_3^{-1} \cdot D_2 \cdot B_3 = P = \begin{bmatrix} 6 & 0.2 & -12.735 & 2.7616 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}:$$

Ստացված P մատրիցի առաջին տողով որոշում են A մատրիցի բնութագրիչ հավասարման գործակիցները, որը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 - 0.2\lambda^2 + 12.735\lambda - 2.7616 = 0:$$

1.6.4. Կռիլովի մեթոդ

Նախորդ դարի 30-ականների սկզբին Ա. Ն. Կռիլովի կողմից առաջարկվեց մատրիցների սեփական արժեքների և սեփական վեկտորների փնտրման բավականին հարմար մեթոդ: Այդ մեթոդը սկիզբ դրեց աշխատանքների մի մեծ շարքի, որոնք նվիրված էին հետևյալ բնութագրիչ հավասարման

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.6.4.1)$$

ձևափոխմանը բազմանդամային տեսքի՝

$$(-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n) = 0: \qquad (1.6.4.2)$$

Այս մեթոդում Ա. Ն. Կռիլովը դիտարկում է հաստատուն գործակիցներով առաջին կարգի սովորական համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների կանոնական համակարգը՝ կապված սկզբնական A մատրիցի հետ։

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n\,, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n\,, \\ &. \; . \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \,: \end{aligned}$$

Այս համակարգի բնութագրիչ հավասարումն ունի (1.6.4.1) տեսքը։ Բնութագրիչ հավասարումների համակարգի արմատները հանդիսանում են A մատրիցի սեփական արժեքները։ Եթե առաջին կարգի հավասարումների այս համակարգը կարողանանք բերել հաստատուն գործակիցներով n-րդ կարգի մեկ դիֆերենցիալ հավասարման՝

$$y^{(n)} = p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y, \tag{1.6.4.3}$$

ապա ըստ դրա տեսքի կարող ենք հեշտությամբ գրել բնութագրիչ հավասարումը՝

$$\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \cdots - p_n = 0, \tag{1.6.4.4}$$

որի արմատները պետք է համընկնեն (1.6.4.1) հավասարման արմատների հետ։

Այսպիսով, ձևափոխելով առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը մեկ n-րդ կարգի հավասարման, կստանանք մաթեմատիկական նմուշ, որի տեսքով կարելի է անմիջապես գրել սկզբնական մատրիցի բնութագրիչ հավասարումը (1.6.4.2) բազմանդամի տեսքով։ Շատ դեպքերում այս եղանակը ոչ միայն հնարավոր է, այլև բավականին հարմար հաշվարկների համար։

Ա. Ն. Կռիլովը ցույց է տվել նաև այդ գաղափարի հանրահաշվական մեկնաբանության հնարավորությունը, թեև անձամբ դրա մշակմամբ չի զբաղվել։ Դիտարկենք այդպիսի հանրահաշվական նմուշի կառուցումը, որի տեսքից էլ կարող ենք անմիջապես գրել A մատրիցի $P(\lambda)$սեփական բազմանդամը կամ դրա բաժանարարը, ընդ որում, միջանկյալ հանրահաշվական ձևափոխությունների արդյունքները կարող են օգտագործվել նաև մատրիցի սեփական վեկտորների հաշվարկման համար։

Նախ բերենք որոշ անհրաժեշտ տեղեկություններ բարձրագույն հանրահաշվից, որոնք անհրաժեշտ են հետագա շարադրանքի համար։

$$(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ \ldots + a_m \tag{1.6.4.5}$$

բազմանդամն անվանենք A քառակուսային մատրիցի զրոյացնող բազմանդամ, եթե՝

$$f(A) \equiv a_0A^m + a_1A^{m-1} + \ldots + a_{m-1}A + a_mE = 0: \tag{1.6.4.6}$$

Զրոյական բազմանդամը զրոյացնում է ցանկացած մատրից: Դիտարկենք միայն *բերված* զրոյացնող բազմանդամները (ավագ անդամի մեկին հավասար գործակցով): Մատրիցների հանրահաշվում հայտնի է Համիլտոն-Կելիի թեորեմը, որի համաձայն եթե $P(\lambda)$-ն A մատրիցի սեփական բազմանդամն է, ապա $P(A)=0$, այսինքն, մատրիցը հանդիսանում է սեփական բազմանդամի արմատը: Այսպիսով, ցանկացած n-րդ կարգի քառակուսային մատրից ունի n-րդ աստիճանի զրոյացնող բազմանդամ և այն միակը չէ, քանի որ $P(\lambda)$-ին պատիկ ցանկացած բազմանդամը ևս կհանդիսանա զրոյացնող: A մատրիցը զրոյացնող բազմանդամների $f(\lambda)$ բազմությունից հատուկ առանձնացնում են ամենափոքր աստիճանի $\psi(\lambda)$ բազմանդամը: Այն կոչվում է մատրիցի մինիմալ բազմանդամ: Դիտարկենք նրա որոշ հատկություններ:

1. Եթե $f(A)=0$, ապա $f(\lambda)$ բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվում է A մատրիցի $\psi(\lambda)$ մինիմալ բազմանդամին:

   Իրոք,

   $$f(\lambda)=\psi(\lambda)Q(\lambda)+r(\lambda),$$

   որտեղ $r(\lambda)$բազմանդամն ունի $\psi(\lambda)$-ից փոքր աստիճան: Դա հնարավոր է միայն $r(\lambda)\equiv 0$ դեպքում:

2. Մատրիցի մինիմալ բազմանդամի բոլոր արմատները հանդիսանում են այդ մատրիցի սեփական արժեքները: Այս հատկությունն առաջինի ուղիղ հետևանքն է:

   Կարելի է ցույց տալ նաև, որ մատրիցի մինիմալ բազմանդամի արմատները մատրիցի իրարից տարբեր սեփական արժեքներն են:

3. Մատրիցի մինիմալ բազմանդամը միակն է:

Իրոք, եթե $\psi_1(\lambda)$-ն և $\psi_2(\lambda)$-ն A մատրիցի երկու մինիմալ բազմանդամներ են, ապա ավելի փոքր աստիճանի բազմանդամը՝

$$Q(\lambda)=\psi_1(\lambda)-\psi_2(\lambda)$$

կլինի այդ մատրիցի համար զրոյացնող բազմանդամ, իսկ դա կարող է լինել միայն $Q(\lambda)\equiv 0$ դեպքում, այսինքն $\psi_1(\lambda)\equiv\psi_2(\lambda)$, քանի որ բերված $\psi_1(\lambda)$ և $\psi_2(\lambda)$ բազմանդամներն ունեն ամենափոքր աստիճանը բոլոր այն բազմանդամներից, որոնց համար A մատրիցը հանդիսանում է արմատ:

Դիցուք, A քառակուսային մատրիցի հետ ունենք նաև նրա չափողականությանը համապատասխանող $\bar{c}\neq\bar{0}$ վեկտորը: Դիտարկենք բերված $g(\lambda)$ բազմանդամների բազմությունից այնպիսինները, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին՝

$$g(A)\bar{c} = \bar{0}: \tag{1.6.4.7}$$

Ակնհայտ է, որ այսպիսի $g(\lambda)$ բազմանդամների բազմությունն իր մեջ ներառում է արդեն դիտարկված $f(\lambda)$ բազմանդամների բազմությունը, որոնց համար A մատրիցը հանդիսանում է արմատ: Այդ բազմությանն են պատկանում, մասնավորապես, մատրիցի սեփական և մինիմալ բազմանդամները, բայց կարող են պատկանել նաև այնպիսի բազմանդամներ, որոնց համար $g(A) = \bar{0}$ պայմանը տեղի չունի: Այս բազմության բազմանդամներից հատուկ առանձնացնում են ամենափոքր աստիճանի $\varphi(\lambda)$ բազմանդամը, որն անվանում են A մատրիցի $\bar{c}$ վեկտորը զրոյացնող մինիմալ բազմանդամ: Ինչպես A մատրիցի $\psi(\lambda)$ մինիմալ բազմանդամի դեպքում, կարելի է ստուգել, որ A մատրիցի $\bar{c}$ վեկտորը զրոյացնող մինիմալ $\varphi(\lambda)$ բազմանդամն ունի մատրիցի մինիմալ բազմանդամին համարժեք հատկություններ:

1. Եթե $g(A)\bar{c} = \bar{0}$, ապա $g(\lambda)$ բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվում է A մատրիցի $\bar{c}$ վեկտորը զրոյացնող մինիմալ $\varphi(\lambda)$ բազմանդամին:
2. $\varphi(\lambda)$բազմանդամի բոլոր արմատները հանդիսանում են A մատրիցի սեփական արժեքներ: $\varphi(\lambda)$ բազմանդամի արմատներն, ընդհանուր առմամբ, կազմում են մատրիցի միմյանցից տարբեր սեփական արժեքների միայն մի մասը:
3. A մատրիցի $\bar{c}$ վեկտորը զրոյացնող մինիմալ բազմանդամը միակն է:

Դիտարկենք A սկզբնական քառակուսային մատրիցի չափողականությանը համապատասխանող $\bar{c}^{(0)} \neq \bar{0}$ կամայական վեկտորը: Հաճախ որպես $\bar{c}^{(0)}$ վեկտոր վերցնում են, օրինակ, $(1, 0, 0, \dots, 0)'$ վեկտորը: Այդ $\bar{c}^{(0)}$ վեկտորի միջոցով կազմենք վեկտորների $\bar{c}^{(1)} = \mathrm{A}\,\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(2)} = A\bar{c}^{(1)} = A^2\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(3)} = A^3\bar{c}^{(0)}$, … հաջորդականությունը, մինչև հանդիպելը առաջին վեկտորին (օրինակ$\bar{c}^{(m)} = A^m\bar{c}^{(0)}$), որը կլինի նախորդ գծորեն անկախ վեկտորների գծային կոմբինացիան, այսինքն, մինչև հետևյալ հավասարության տեղի ունենալը՝

$$q_1\bar{c}^{(m-1)} + q_2\bar{c}^{(m-2)} + \dots + q_m\bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(m)}, \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} q_i^2 > 0\right): \tag{1.6.4.8}$$

Ակնհայտ է, որ $m \leq n$, որտեղ n-ը $\bar{c}^{(0)}$ վեկտորի չափն է: Որպեսզի գործնականում որոշենք m թիվը և գտնենք գծային կոմբինացիայի համապատասխան $q_1, q_2, \dots, q_m$ գործակիցները, կարելի է վարվել հետևյալ կերպ:

Գրենք սահմանային հնարավոր ($m = n$) գծային կոմբինացիան՝

$$q_1\bar{c}^{(n-1)} + q_2\bar{c}^{(n-2)} + \cdots + q_n\bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(n)}$$

կոորդինատներով.

$$\begin{aligned} q_1c_1^{(n-1)} + q_2c_1^{(n-2)} + \cdots + q_nc_1^{(0)} &= c_1^{(n)}, \\ q_1c_2^{(n-1)} + q_2c_2^{(n-2)} + \cdots + q_nc_2^{(0)} &= c_2^{(n)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_1c_n^{(n-1)} + q_2c_n^{(n-2)} + \cdots + q_nc_n^{(0)} &= c_n^{(n)}: \end{aligned} \qquad (1.6.4.9)$$

Այստեղ $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \ldots, c_n^{(i)}$ թվերը $\bar{c}^{(i)}$, $i = \overline{1,n}$ վեկտորի համապատասխան կոորդինատներն են:

$q_1, q_2, \ldots, q_m$ գործակիցների որոշման համար ստանում ենք n հատ գծային հանրահաշվական հավասարումների անհամասեռ համակարգ: Այդ համակարգի որոշիչը՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1^{(n-1)} & \cdots & c_1^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n^{(n-1)} & \cdots & c_n^{(0)} \end{vmatrix}$$

կլինի 0-ից տարբեր միայն $\bar{c}^{(n-1)}, \bar{c}^{(n-2)}, \ldots, \bar{c}^{(0)}$ վեկտորների գծորեն անկախության դեպքում: Միայն այդ դեպքում ($m = n$) համակարգն ունի միակ $q_1, q_2, \ldots, q_n$ լուծում: Δ որոշիչի զրոյից տարբեր լինելը սովորաբար որոշում են գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը Գաուսի մեթոդով լուծելու միջոցով:

Եթե Գաուսի մեթոդի ուղիղ ընթացքի բոլոր n քայլերը հնարավոր է կատարել և համակարգը բերվում է եռանկյունաձև տեսքի՝

$$\begin{aligned} q_1 + b_{12}q_2 + b_{13}q_3 + \cdots + b_{1n}q_n &= g_1, \\ q_2 + b_{23}q_3 + \cdots + b_{2n}q_n &= g_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n &= g_n, \end{aligned} \qquad (1.6.4.10)$$

ապա դա վկայում է, որ $\Delta \neq 0$ և $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \ldots, \bar{c}^{(n-1)}$ վեկտորները գծորեն անկախ են: Այդ դեպքում վերջին համակարգից Գաուսի մեթոդի հետադարձ քայլերով հաջորդաբար կգտնենք դիտարկվող գծային կոմբինացիայի բոլոր $q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1$ գործակիցները:

Իսկ եթե հաջողվել է կատարել Գաուսի մեթոդի ուղիղ ընթացքի միայն առաջին m քայլերը, ապա գծորեն անկախ կլինեն միայն առաջին m՝ $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \ldots, \bar{c}^{(m-1)}$ վեկտորները:

Համապատասխան

$$q_1\bar{c}^{(m-1)} + q_2\bar{c}^{(m-2)} + \cdots + q_m\bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(m)}$$

գծային կոմբինացիան գրելով կոորդինատներով՝

$$q_1c_1^{(m-1)}+q_2c_1^{(m-2)}+\cdots+q_mc_1^{(0)}=c_1^{(m)},$$
$$q_1c_2^{(m-1)}+q_2c_2^{(m-2)}+\cdots+q_mc_2^{(0)}=c_2^{(m)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_1c_n^{(m-1)}+q_2c_n^{(m-2)}+\cdots+q_mc_n^{(0)}=c_n^{(m)}$$

և ընտրելով n գծային հանրահաշվական հավասարումներից m գծորեն անկախները (օրինակ, Գաուսի մեթոդով), կգտնենք փնտրվող $q_1, q_2, \dots, q_m$ գործակիցները:

Կառուցված գծային կոմբինացիան հենց կլինի այն հանրահաշվական նմուշը, որի տեսքով անմիջապես կարելի է գրել կամ մատրիցի սեփական բազմանդամը (m=n դեպքում), կամ նրա բաժանարարը (m<n դեպքում):

Դիտարկենք m=n դեպքը: Այս դեպքում, պարզվում է,

$$q_1\bar{c}^{(n-1)}+q_2\bar{c}^{(n-2)}+\cdots+q_n\bar{c}^{(0)}=\bar{c}^{(n)}$$

գծային կոմբինացիայի $q_1, q_2, \dots, q_n$ գործակիցները հավասար են սեփական

$$P(\lambda)=\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-\cdots-p_n$$

Բազմանդամի համապատասխան $p_1, p_2, \dots, p_n$ գործակիցներին, այսինքն $q_i=p_i$, $i=\overline{1,n}$:

Իրոք, Համիլտոն-Կելիի թեորեմի հիման վրա

$$P(A)=A^n-p_1A^{n-1}-p_2A^{n-2}-\cdots-p_nE=0:$$

Այս հավասարությունը բազմապատկելով $\bar{c}^{(0)}$ վեկտորով և հաշվի առնելով, որ

$$A^i\bar{c}^{(0)}=\bar{c}^{(i)},\ \ i=\overline{1,n},$$

կստանանք՝

$$p_1\bar{c}^{(n-1)}+p_2\bar{c}^{(n-2)}+\cdots+p_n\bar{c}^{(0)}=\bar{c}^{(n)}:$$

Մյուս կողմից,

$$q_1\bar{c}^{(n-1)}+q_2\bar{c}^{(n-2)}+\cdots+q_n\bar{c}^{(0)}=\bar{c}^{(n)}:$$

Նշանակում է.

$$(p_1-q_1)\bar{c}^{(n-1)}+(p_2-q_2)\bar{c}^{(n-2)}+\cdots+(p_n-q_n)\bar{c}^{(0)}=\bar{0}:$$

Քանի որ $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(n-1)}$ վեկտորները գծորեն անկախ են, ապա վերջին հավասարությունը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $p_i=q_i$, $i=\overline{1,n}$:

Այսպիսով, m=n դեպքում մեր կողմից կառուցված գծային կոմբինացիայի տեսքով կարելի է գրել A մատրիցի $P(\lambda)$ սեփական բազմանդամը: Լուծելով $P(\lambda)=0$ հավասարումը, կգտնենք այդ մատրիցի սեփական արժեքները:

m<n դեպքում կառուցված գծային կոմբինացիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$q_1\bar{c}^{(m-1)}+q_2\bar{c}^{(m-2)}+\cdots+q_m\bar{c}^{(0)}=\bar{c}^{(m)}:$$

Եթե հաշվի առնենք, որ $\bar{c}^{(i)}=A^i\bar{c}^{(0)}$, $i=\overline{1,m}$, ապա վերջին հավասարությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$(A^m-q_1A^{m-1}-q_2A^{m-2}-\cdots-q_mE)\bar{c}^{(0)}=\bar{0}$$

կամ

$$\varphi(A)\bar{c}^{(0)} = \bar{0},$$

որտեղ

$$\varphi(\lambda) = \lambda^m - p_1\lambda^{m-1} - p_2\lambda^{m-2} - \cdots - p_m:$$

Հետևաբար, գտնելով գծային կոմբինացիայի $q_1, q_2, \dots, q_m$ գործակիցները, կկառուցենք $\varphi(\lambda)$ բազմանդամը, որը կհանդիսանա A մատրիցի $\bar{c}^{(0)}$ վեկտորը զրոյացնող մինիմալ բազմանդամը (եթե գոյություն ունենար $g(A)\bar{c}^{(0)} = \bar{0}$ պայմանին բավարարող և $\varphi(\lambda)$ բազմանդամի աստիճանից փոքր աստիճան ունեցող $g(\lambda)$ բազմանդամ, ապա դա կհակասեր $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(m-1)}$ վեկտորների գծորեն անկախության պայմանին):

Այսպիսով, $m<n$ դեպքում կառուցված գծային կոմբինացիայի տեսքով կարող ենք գրել ոչ թե հենց A մատրիցի $P(\lambda)$ սեփական բազմանդամը, այլ միայն նրա $\varphi(\lambda)$ բաժանարարը: Լուծելով $\varphi(\lambda) = 0$ հավասարումը, կգտնենք մատրիցի սեփական արժեքների միայն մի մասը: Փոխելով սկզբնական $\bar{c}^{(0)}$ վեկտորը, կարելի է գտնել մնացած սեփական արժեքները:

Օրինակ.

Որոշել A մատրիցի բնութագրիչ հավասարումը.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c^{(1)} = A \cdot c^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$c^{(2)} = A \cdot c^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$c^{(3)} = A \cdot c^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 58 \\ 72 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 14 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 = -64 \\ 10 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 = -58, \\ 10 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 = -72 \end{cases}$$

$$p_1 = -3, \qquad p_2 = -14, \qquad p_3 = -8,$$

Բնութագրիչ հավասարումը կլինի՝

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 14\lambda - 8 = 0:$$

Գլուխ 2. Ալգորիթմացում և ծրագրային իրականացում

Դիպլոմային աշխատանքում մշակվել է ծրագիր, որը նախատեսված է մատրիցի սեփական բազմանդամի որոշման համար՝ հետևյալ մեթոդներով.

- Լևերյեի,
- Ֆադդեևի,
- Դանիլևսկու,
- Կռիլովի:

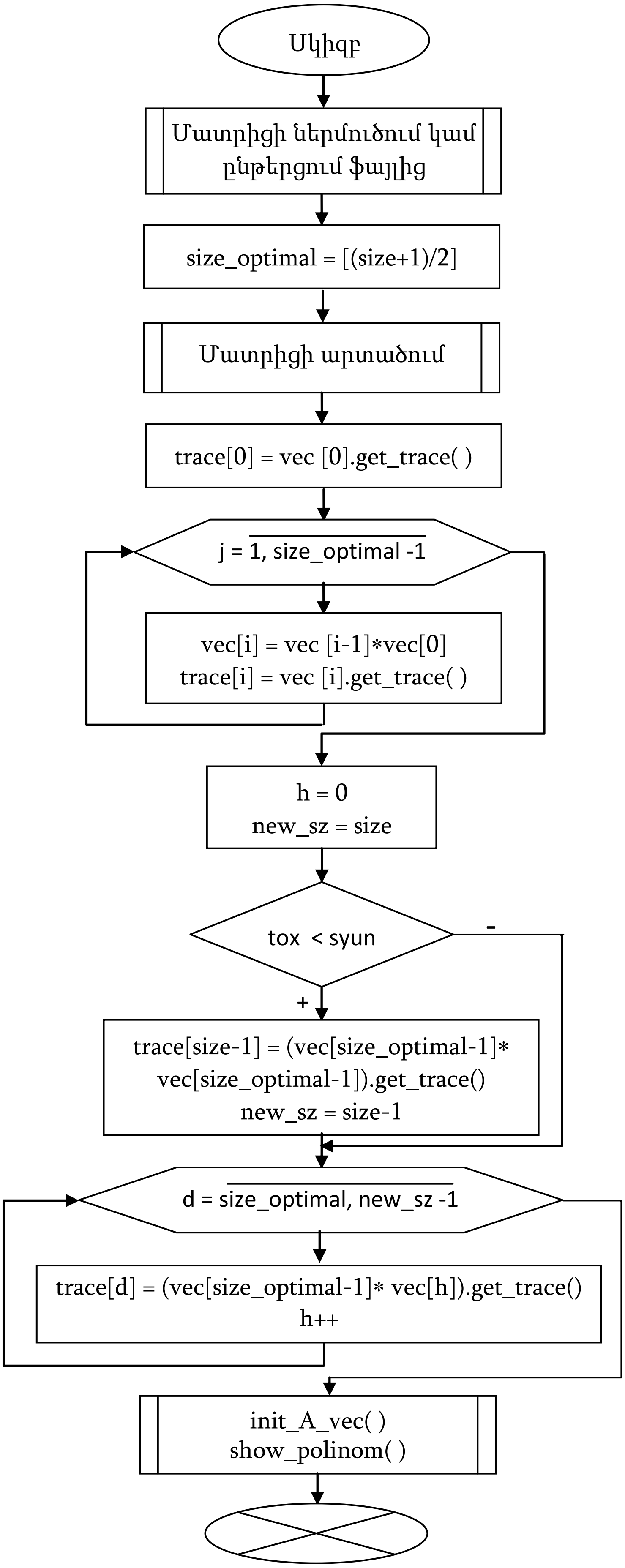
Մշակված ծրագրում մատրիցն արժեքավորվում է 2 ճանապարհով՝ ներմուծման և ֆայլից ընթերցման: Մշակվել է համապատասխան ֆունկցիա, որը պատասխանատու է տվյալների հատուկ նշված ձևաչափով ներմուծման համար:

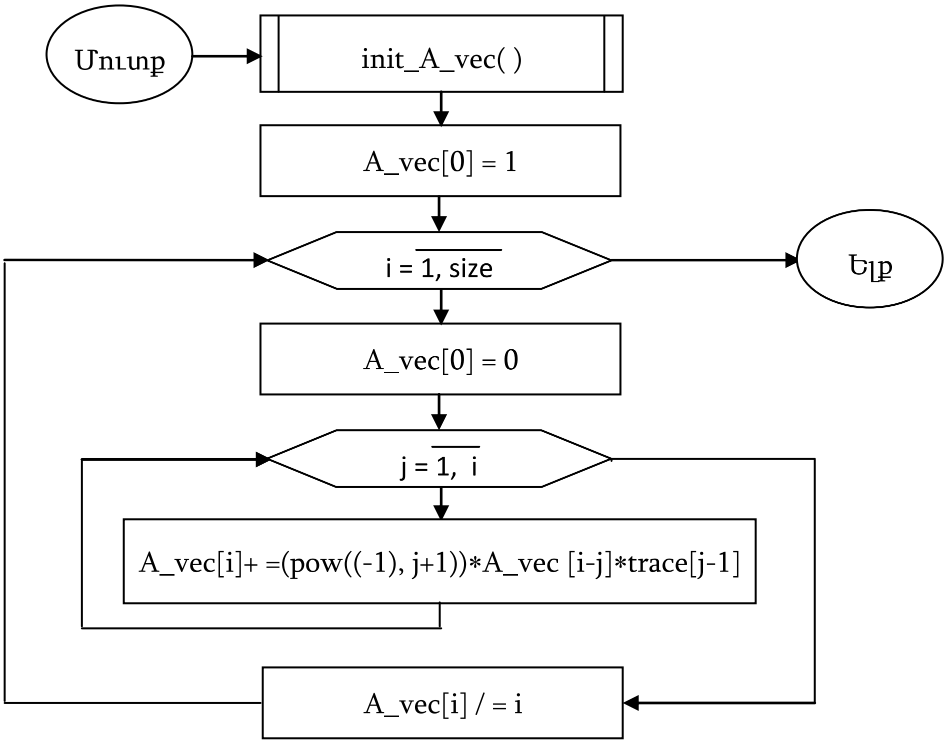
Ծրագիրն աշխատում է ինչպես C++ ծրագրավորման լեզվի հիմնական «double» տիպով, այնպես էլ մեր կողմից մշակված «NumDenom» տիպով, որը հնարավորություն է տալիս ցանկացած իրական թիվ ներկայացնել կոտորակի տեսքով և թվաբանական գործողությունները կատարել կոտորակների հետ՝ բացառելով ընթացքում կլորացումները: Անհրաժեշտության դեպքում կարելի է անցնել տասնորդական տեսքի՝ նշելով ստորակետից հետո նիշերի քանակը:

C++ ծրագրավորման լեզվում ամենամեծ ամբողջաթիվ տիպի սահմաններից դուրս աշխատելու համար, որի անհրաժեշտությունն առաջացել է կոտորակների հետ աշխատանքի ժամանակ, ստեղծվել է նոր՝ «BigInteger» տիպը:

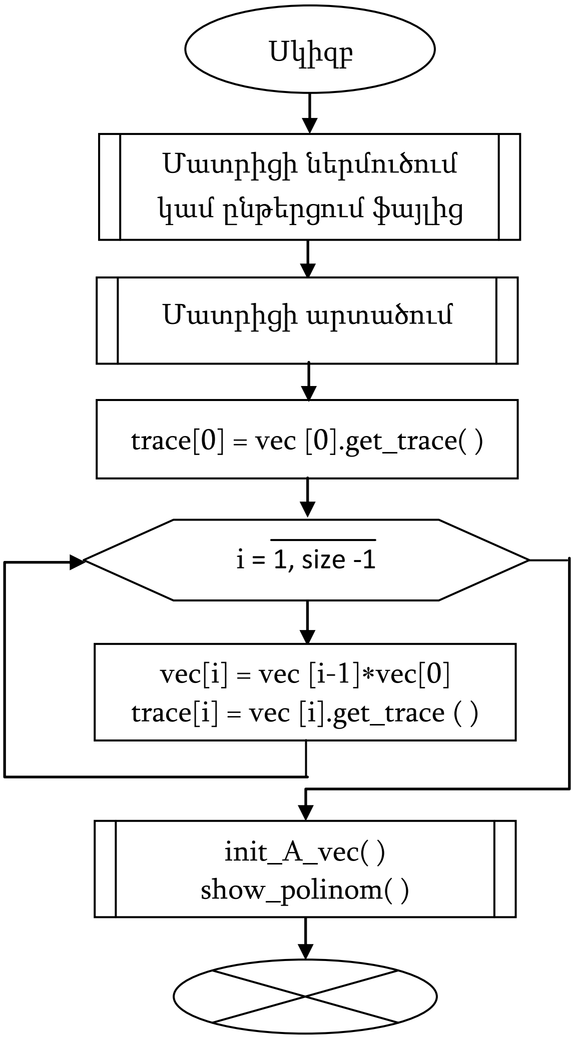
Տրված եղանակներով մատրիցի բնութագրիչ հավասարման ստացման ալգորիթմների բլոկ-սխեմաները հետևյալն են.

Լևերյեի ալգորիթմի բլոկ-սխեմա. 1-ին իրականացում





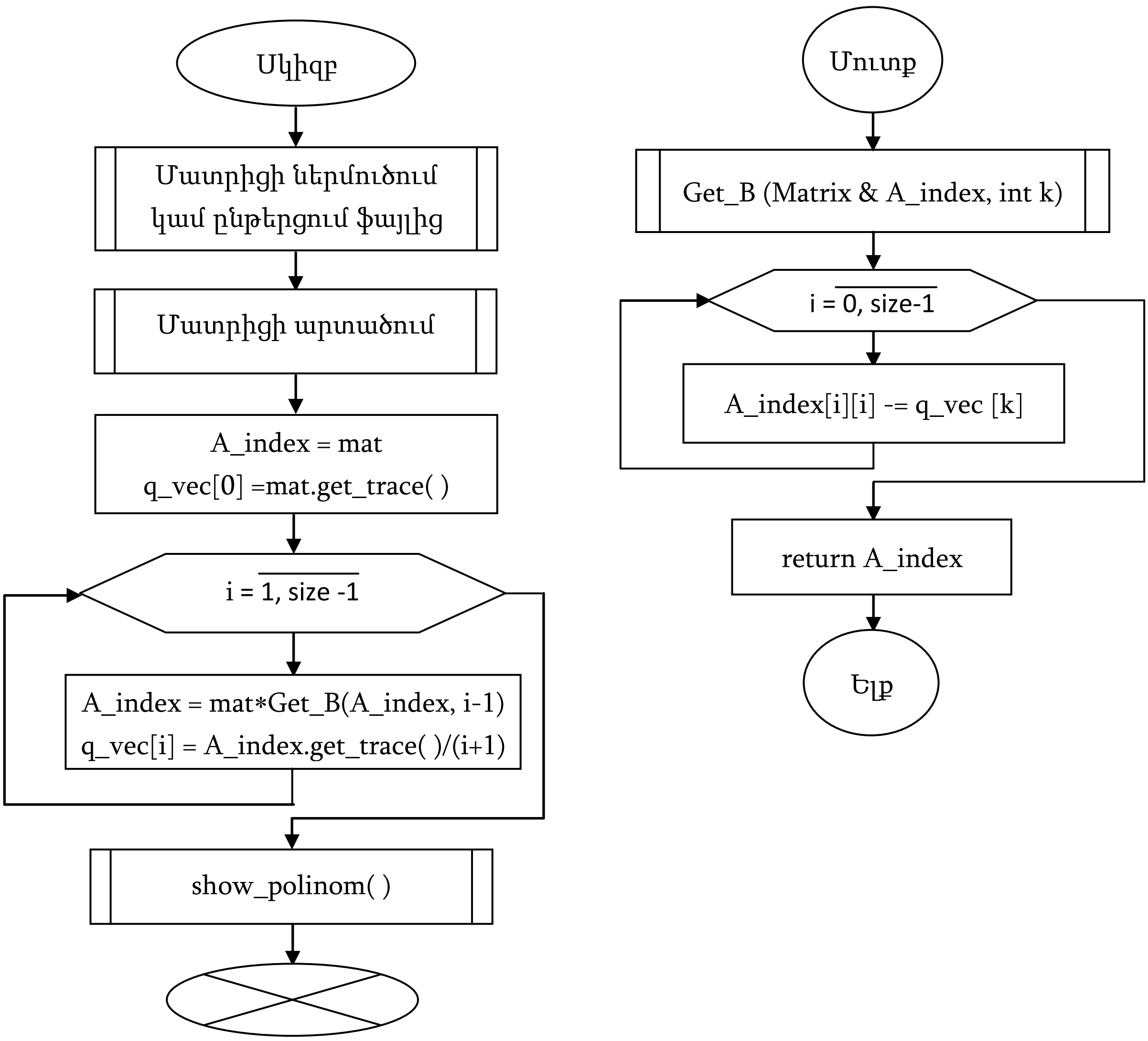
Լևերյեի ալգորիթմի բլոկ-սխեմա. 2-րդ իրականացում



Ալգորիթմում օգտագործված ֆունկցիաներն են՝

- get_trace () – վերադարձնում է մատրիցի հետքը
- show_polinom() – արտածում է բնութագրիչ հավասարումը համապատասխան տեսքով

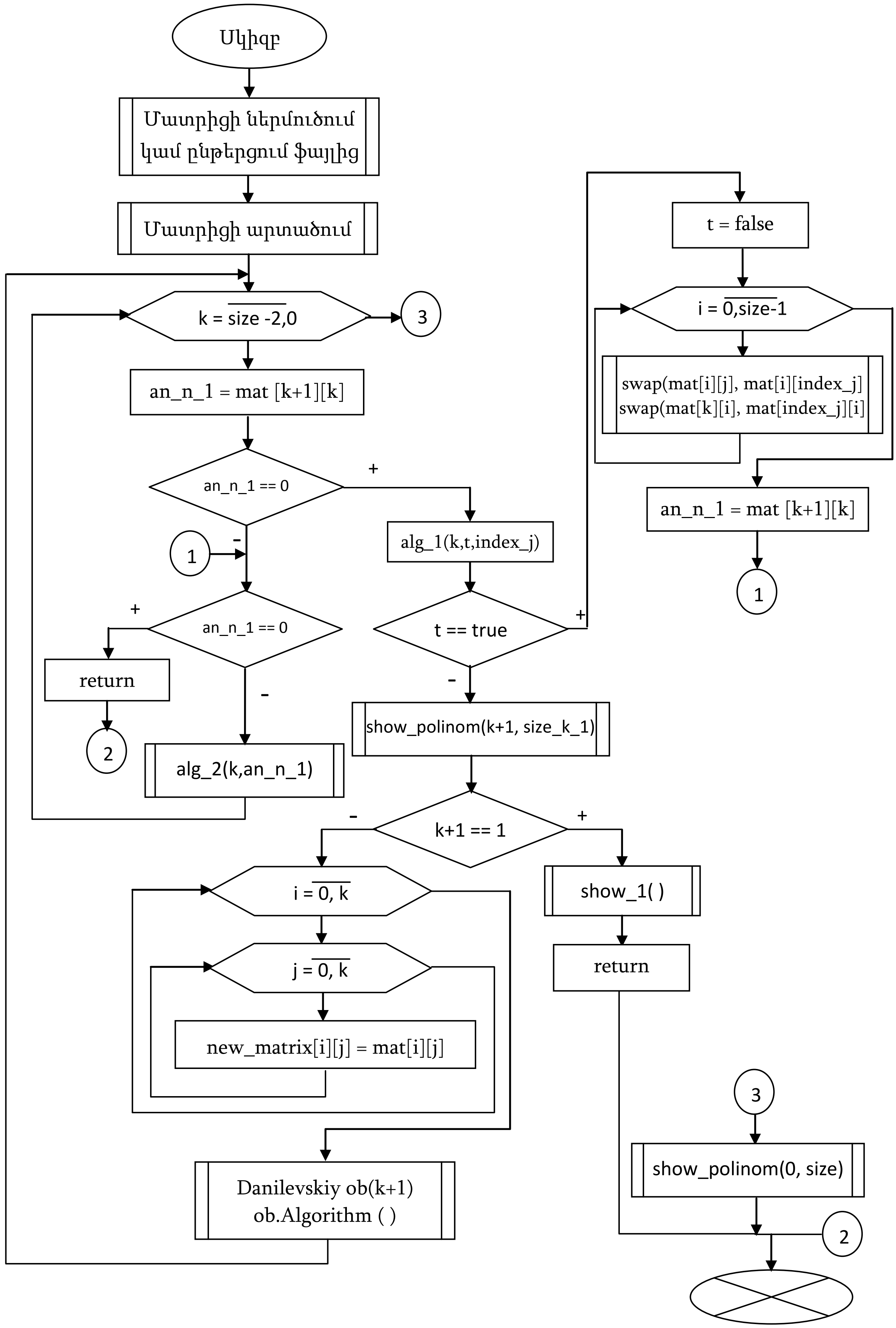
Ֆադդեևի ալգորիթմի բլոկ-սխեմա

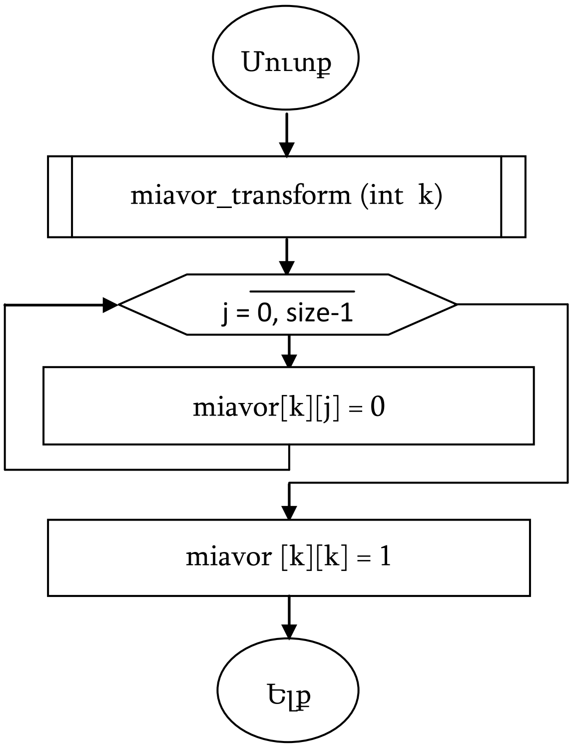


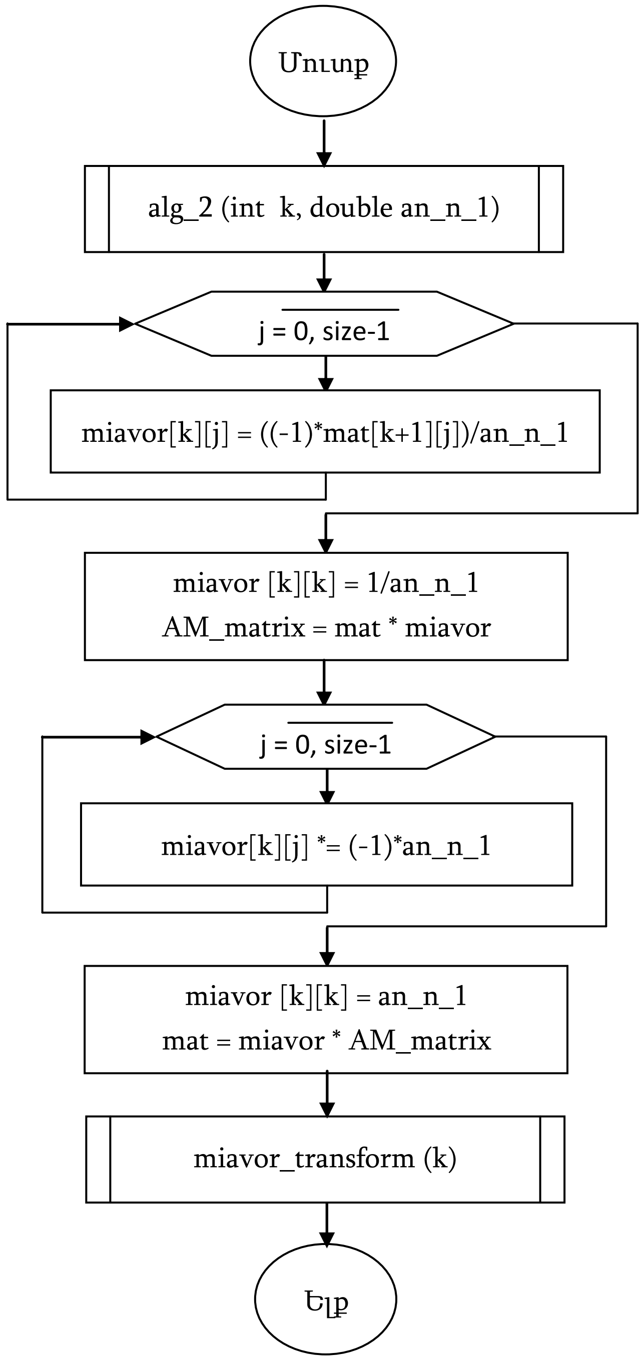
Ալգորիթմում օգտագործված ֆունկցիաներն են՝

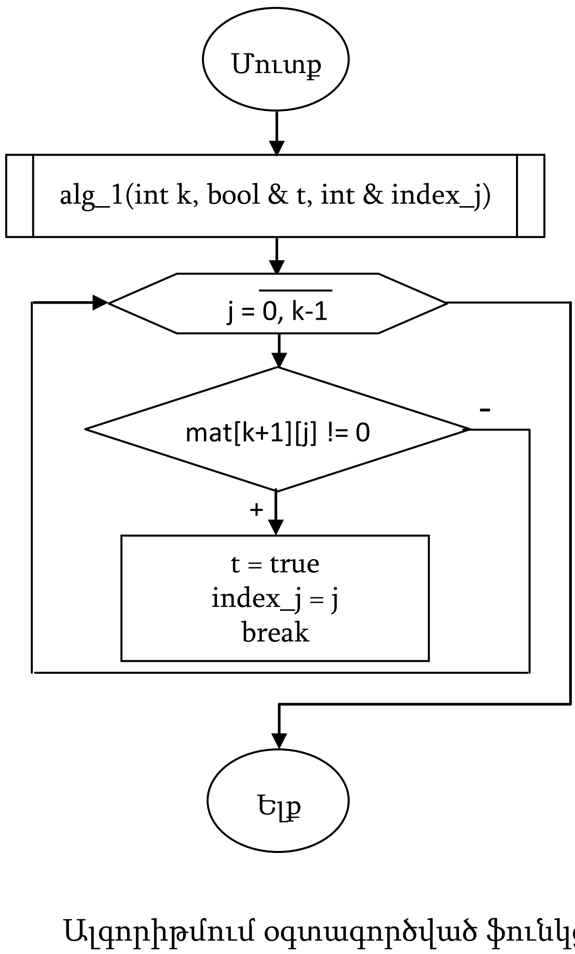
- show_polinom() – արտածում է բնութագրիչ հավասարումը համապատասխան տեսքով
- get_trace () – վերադարձնում է մատրիցի հետքը

Դանիլևսկու ալգորիթմի բլոկ-սխեմա





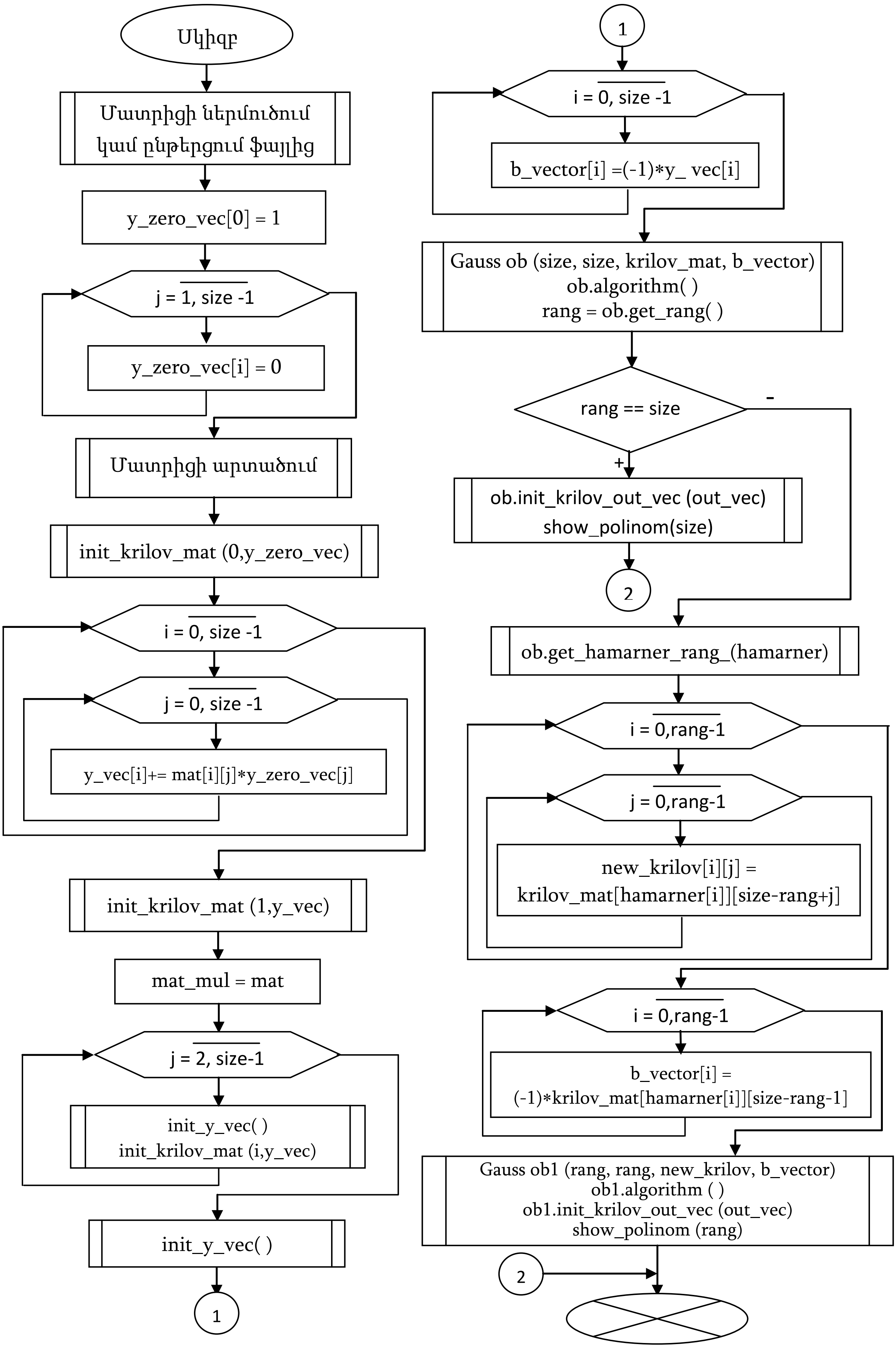


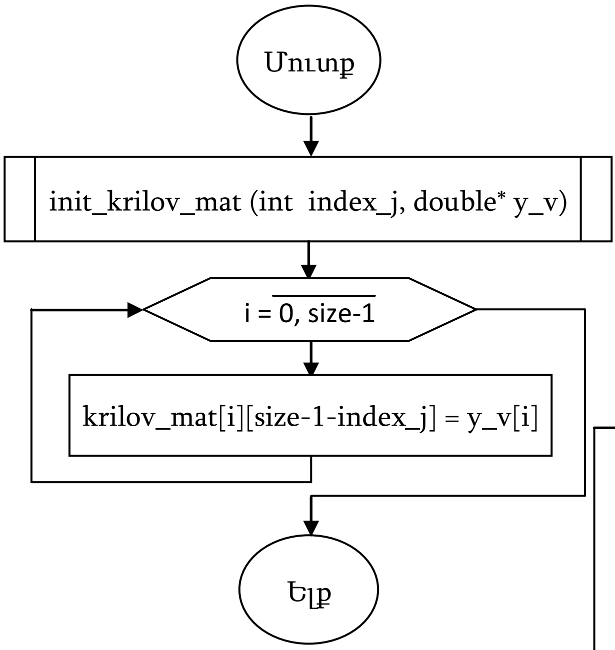


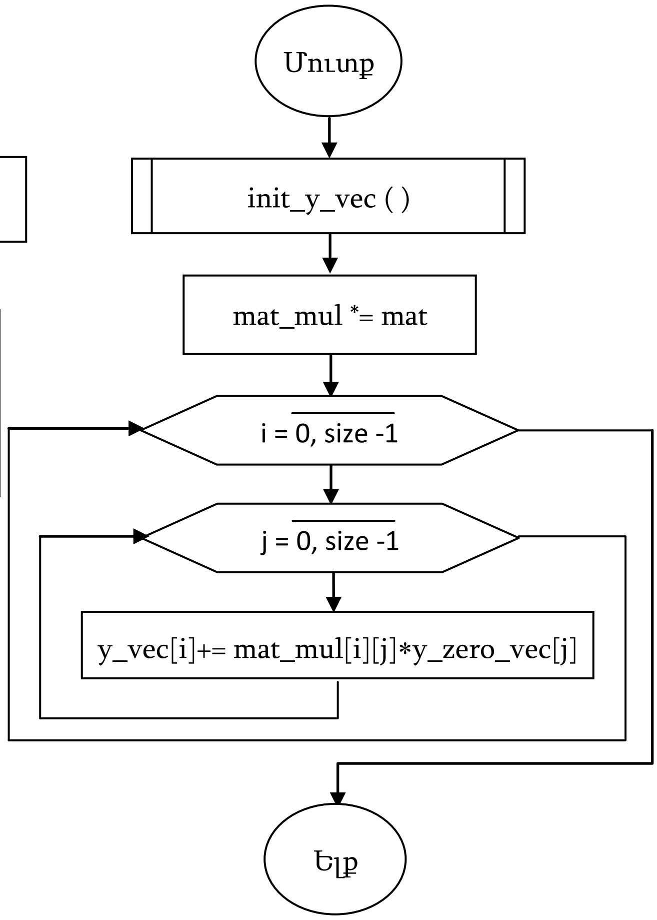
Ալգորիթմում օգտագործված ֆունկցիաներն են՝

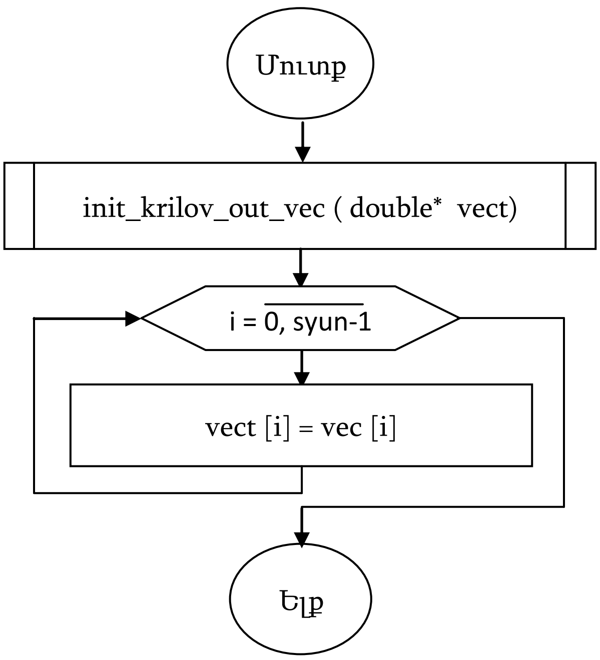
- show_1 () – արտածում է -μ կամ +μ
- show_polinom (int index, int d) – արտածում է բնութագրիչ հավասարումը համապատասխան տեսքով

Կռիլովի ալգորիթմի բլոկ-սխեմա





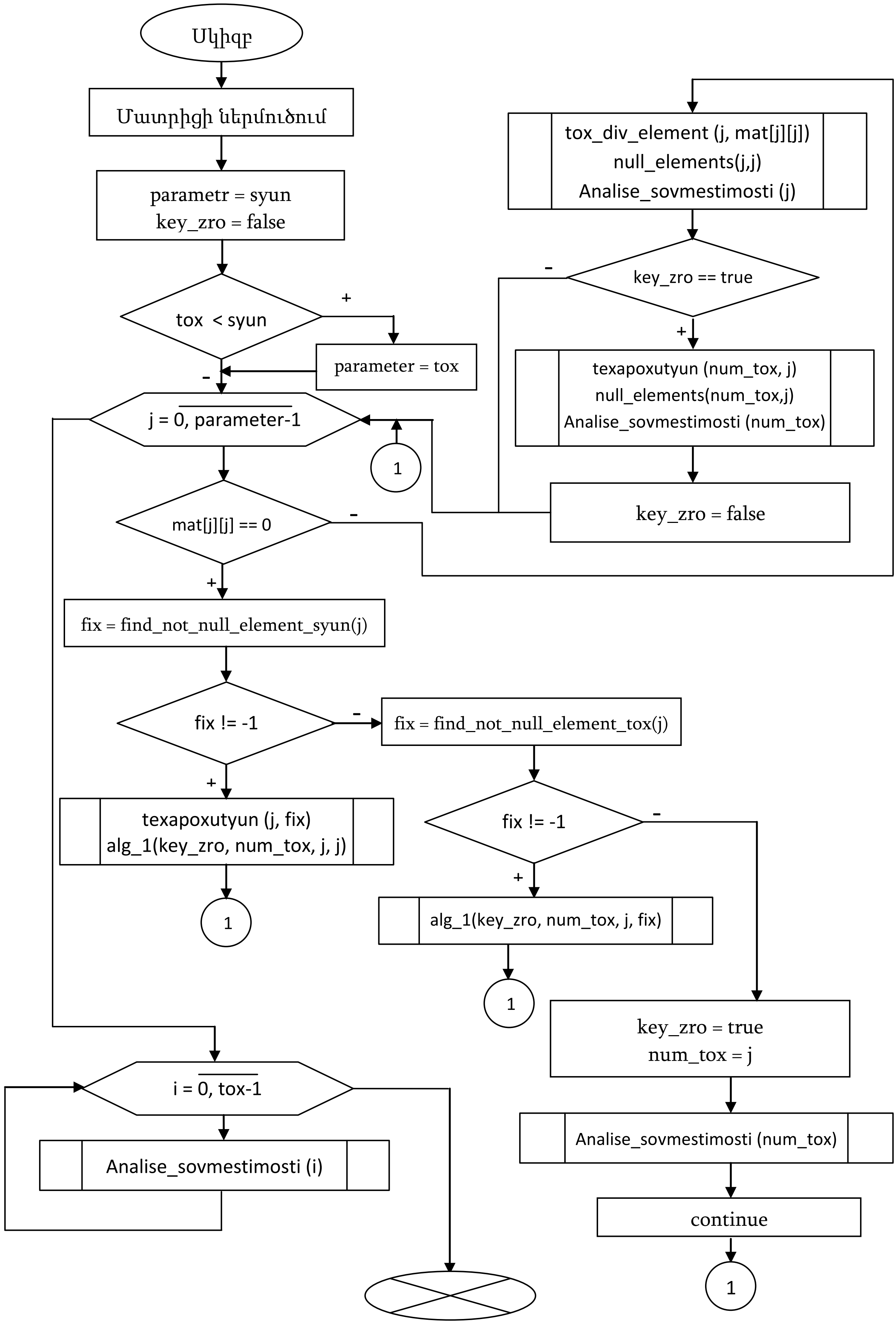


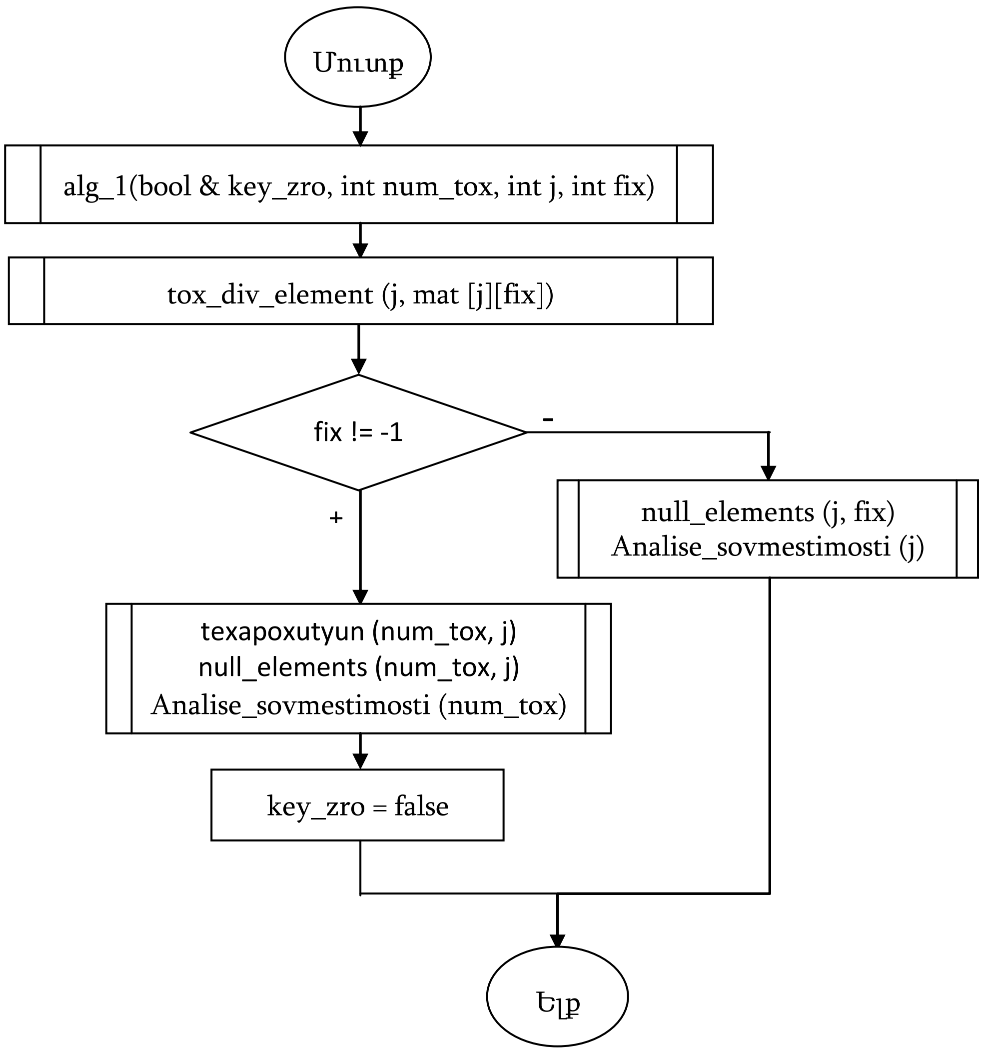


Ալգորիթմում օգտագործված ֆունկցիաներն են՝

- get_rang () – վերադարձնում է մատրիցի ռանգը
- get_hamarner_rang_(int* p)–p միաչափ զանգվածը արժեքավորում է մատրիցի գծորեն անկախ տողերի համարներով
- show_polinom (int chap) – կախված chap-ի արժեքից արտածում է կա՛մ բնութագրիչ հավասարումը, կա՛մ բաժանարարը

Գաուսի-Ժորդանի ալգորիթմի բլոկ-սխեմա





Ալգորիթմում օգտագործված ֆունկցիաներն են՝

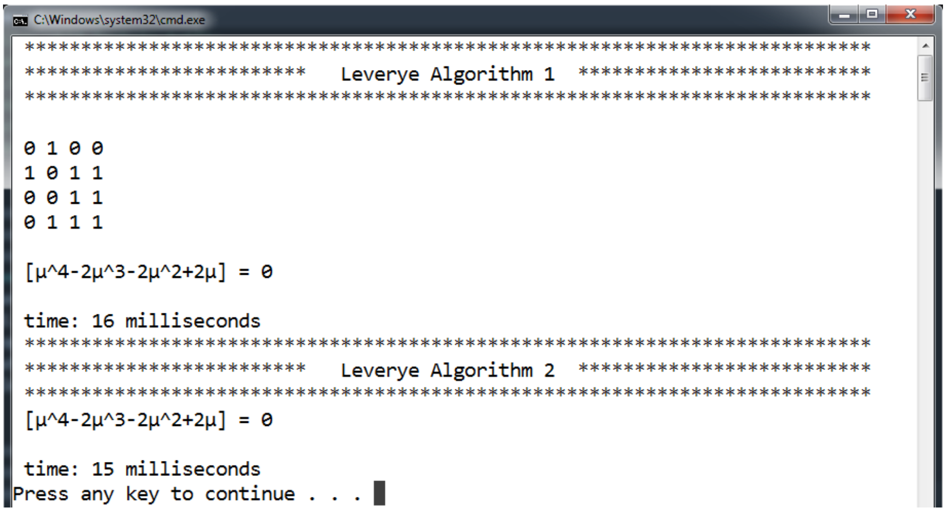
- texapoxutyun () –մատրիցի տրված համարներով տողերը փոխարինում է մեկը մյուսով,
- find_not_null_element_syun() –վերադարձնում է տրված սյան մեջ տրված ինդեքսից ներքև ոչ զրոյական տողի համարը, իսկ եթե գոյություն չունի՝ -1,
- find_not_null_element_tox() - վերադարձնում է տրված տողի տրված ինդեքսից աջ գտնվող ոչ զրոյական սյան համարը, իսկ եթե գոյություն չունի՝ -1,
- tox_div_element()-մատրիցի տրված համարի տողը բաժանում է տրված տարրի վրա,
- analise_sovmestimosti()–ստուգում է ընդլայնված մատրիցը համատեղ է, թե ոչ,
- null_elements()–կատարելով տարրական ձևափոխություններ՝ տարրին համապատասխան սյան մեջ, նրանից ներքև և վերև տարրերը զրոյացնում է:

C++ լեզվով գրված մեքենայական ծրագիրը ներկայացված են հավելվածում:

Գլուխ 3. Ծրագրի փորձարկումները և արդյունքների համեմատական վերլուծությունը

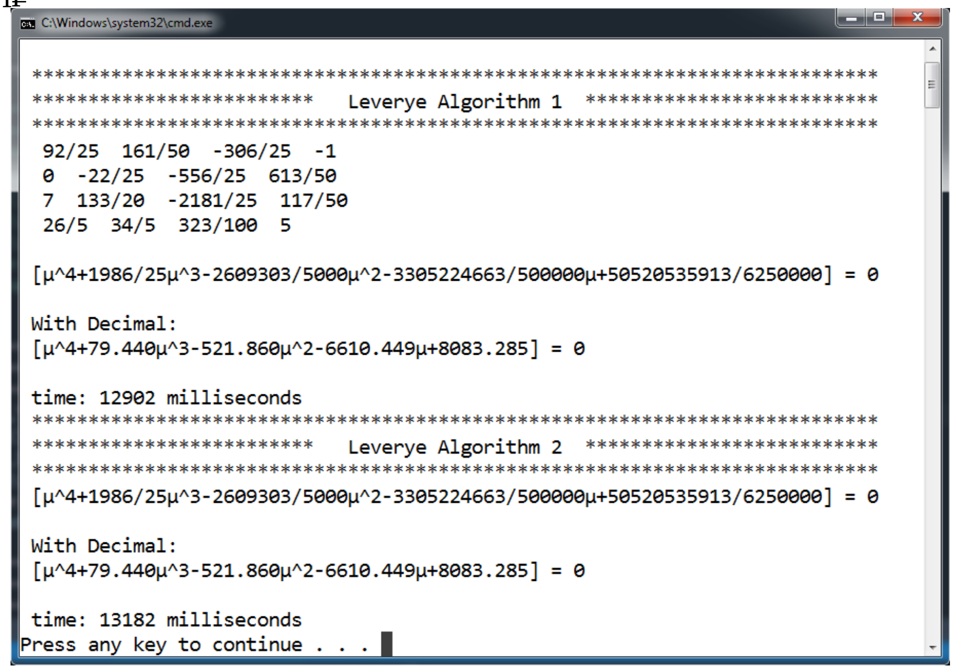
Նշված ալգորիթմերով ստացված բնութագրիչ բազմանդամի ծրագրային պատուհանները հետևյալն են:

Նկ. 3.1-ում բերված է Լևերյեի մեթոդը տրված «double» տիպով աշխատելու դեպքում: Տրվում է սկզբնական մատրիցը, արդյունքում ստացվում է մատրիցի սեփական բազմանդամը և ալգորիթմի աշխատանքի համար ծախսված ժամանակը: Այս դեպքում ունենք ալգորիթմի 2 իրականացում:



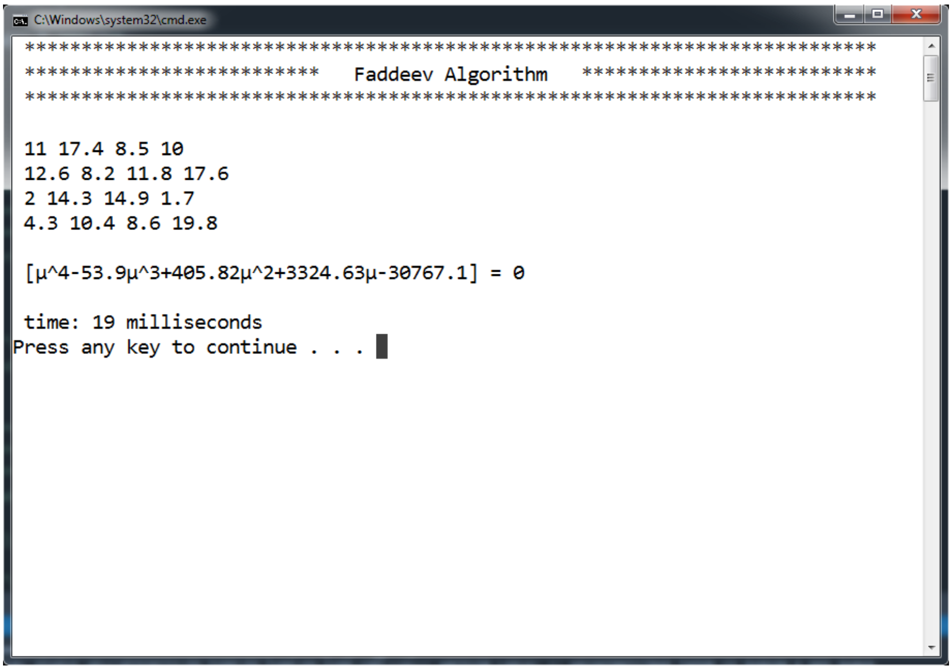
Նկ. 3.1 Լևերյեի ալգորիթմ («double» տիպ)

Նկ. 3.2-ում բերված է Լևերյեի մեթոդը տրված «NumDenom» տիպով աշխատելու դեպքում:

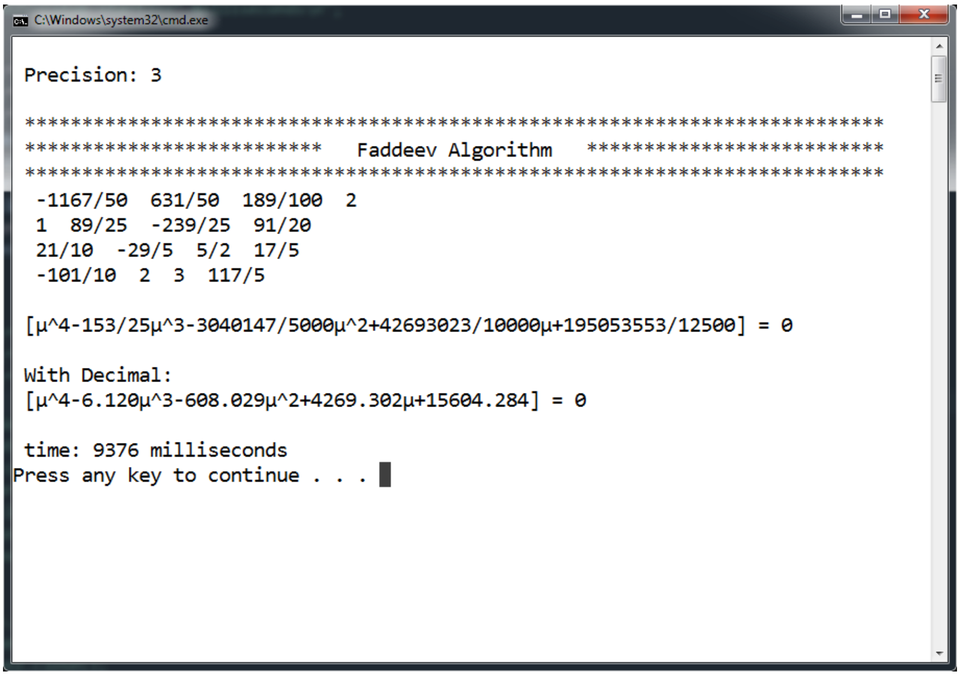


Նկ. 3.2 Լևերյեի ալգորիթմ («NumDenom» տիպ)

Այստեղ բերված է խնդրի լուծումը Ֆադդեևի մեթոդով՝ «double» տիպով (նկ. 3.3) և «NumDenom» տիպով (նկ. 3.4) աշխատելու դեպքում:



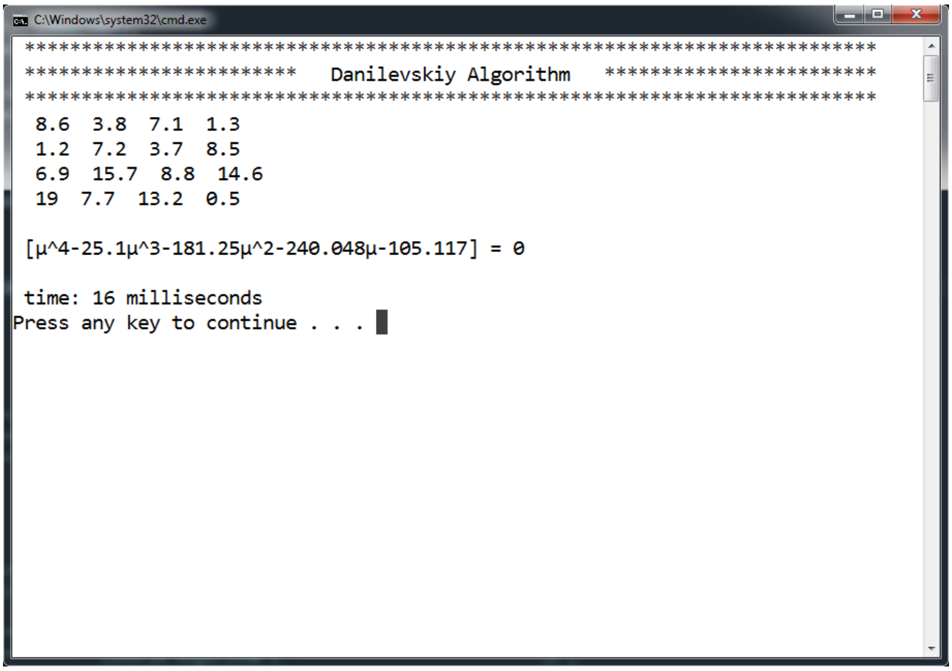
Նկ. 3.3 Ֆադդեևի ալգորիթմ («double» տիպ)



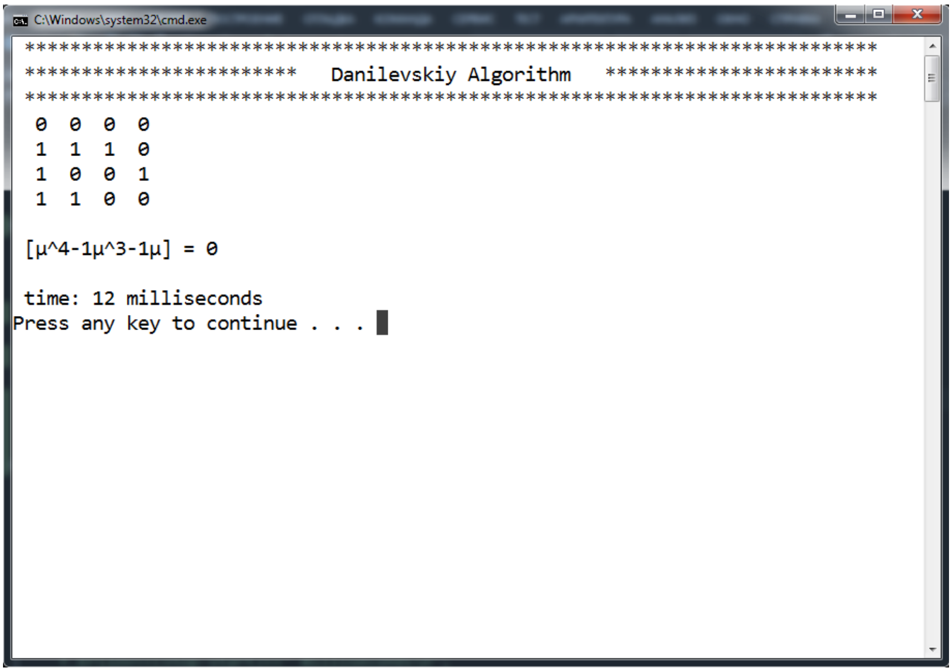
Նկ. 3.4 Ֆադդեևի ալգորիթմ («NumDenom» տիպ)

Խնդրի լուծումը Դանիլևսկու մեթոդով՝ «double» տիպով (նկ. 3.5-3.7) և «NumDenom» տիպով (նկ. 3.8-3.10) աշխատելու դեպքում:

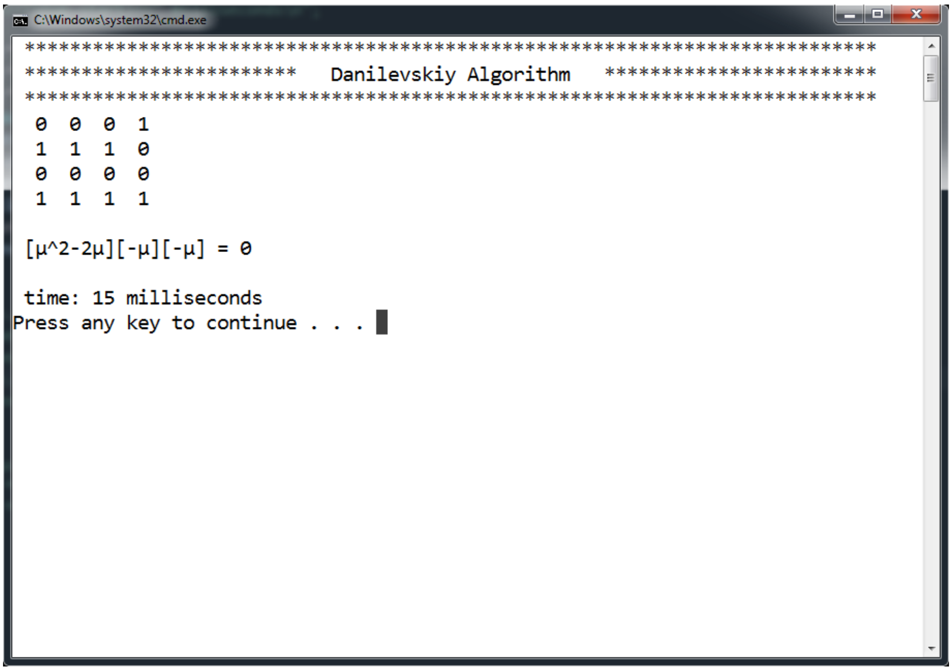
Խնդրի լուծումը ներկայացված է կանոնավոր և ոչ կանոնավոր դեպքերի համար:



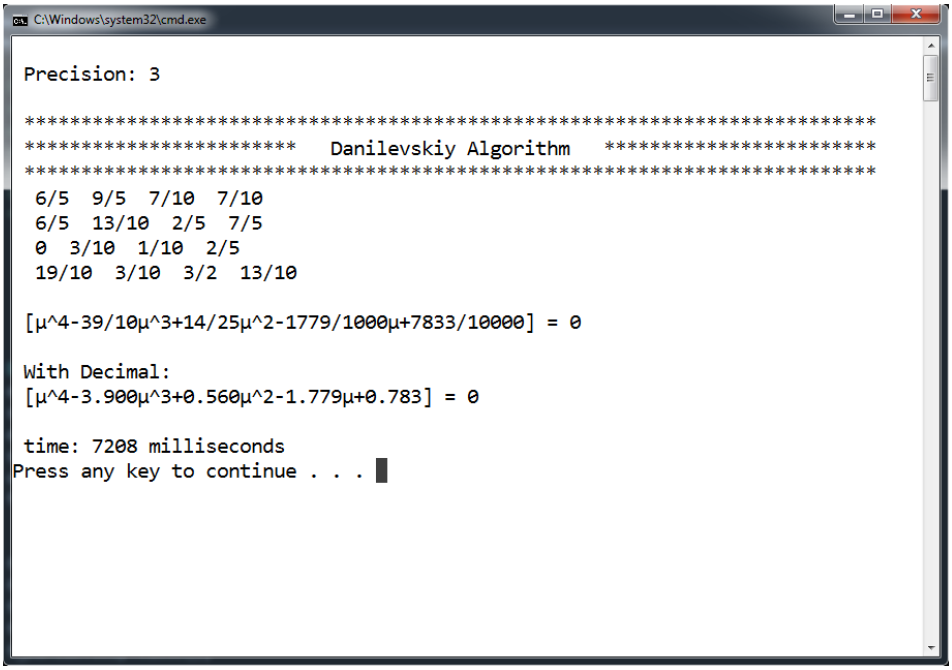
Նկ. 3.5 Դանիլևսկու ալգորիթմը կանոնավոր դեպքում («double» տիպ)



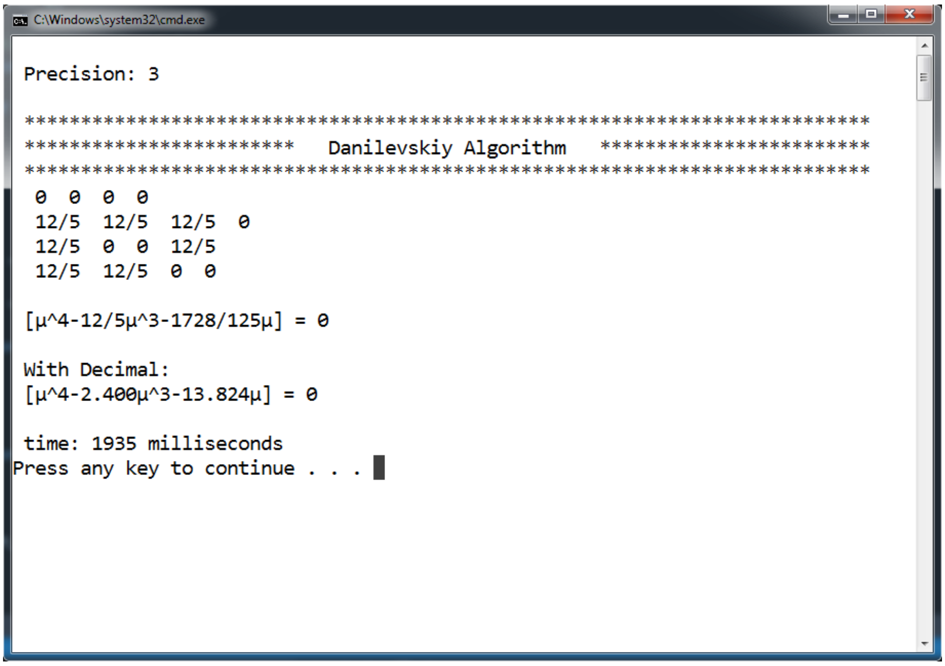
Նկ. 3.6 Դանիլևսկու ալգորիթմը 1-ին ոչ կանոնավոր դեպքում («double» տիպ)



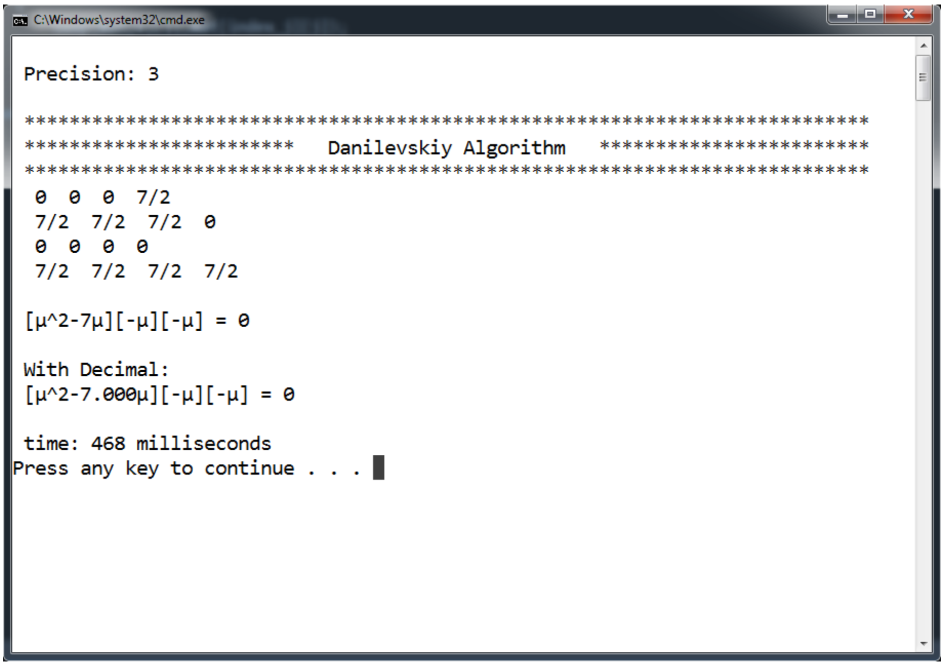
Նկ. 3.7 Դանիլևսկու ալգորիթմը 2-րդ ոչ կանոնավոր դեպքում («double» տիպ)



Նկ. 3.8 Դանիլևսկու ալգորիթմը կանոնավոր դեպքում («NumDenom» տիպ)



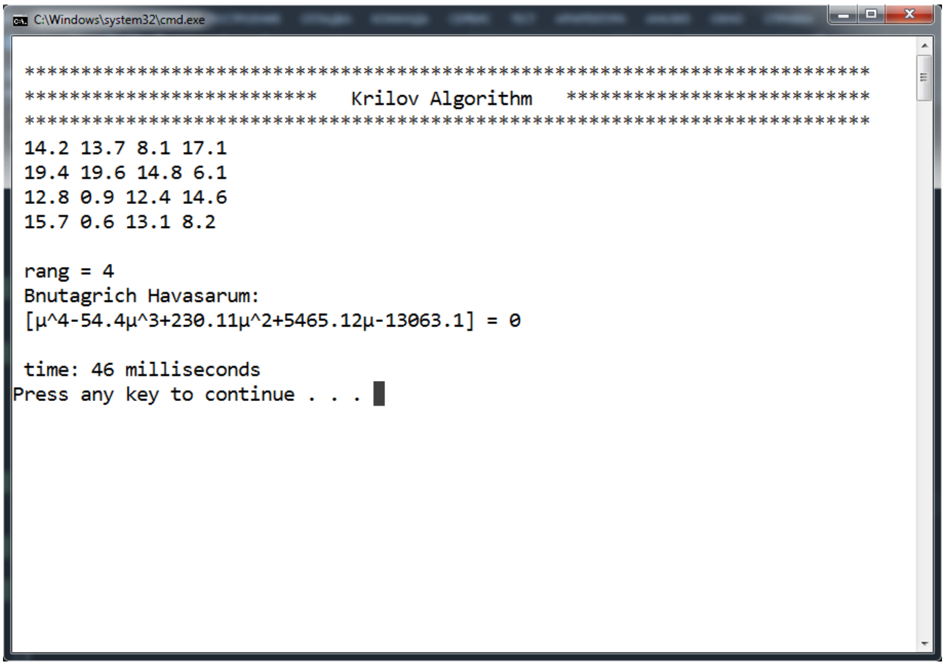
Նկ. 3.9 Դանիլևսկու ալգորիթմը 1-ին ոչ կանոնավոր դեպքում («NumDenom» տիպ)



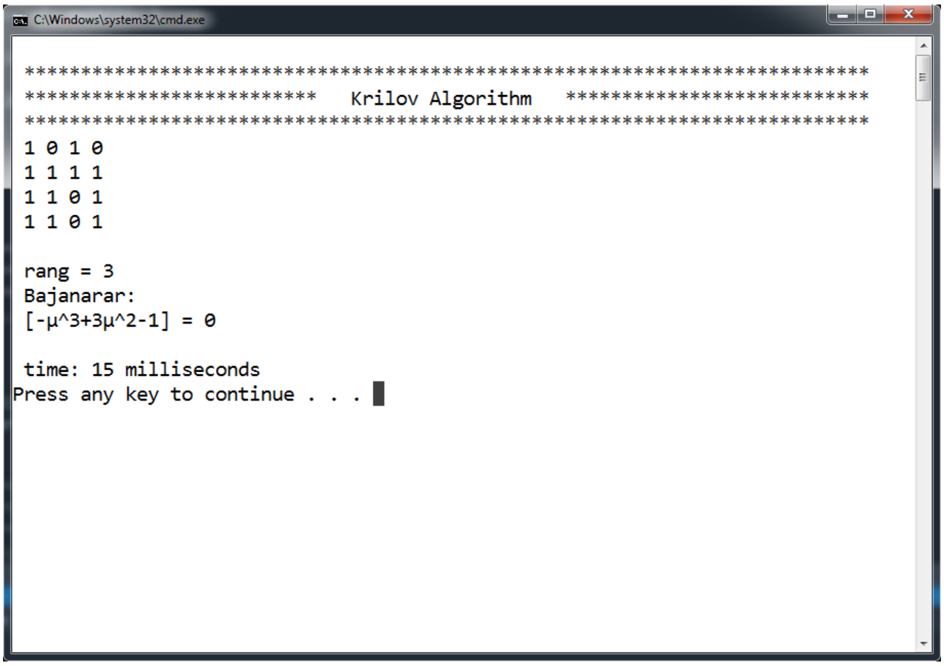
Նկ. 3.10 Դանիլևսկու ալգորիթմը 2-րդ ոչ կանոնավոր դեպքում («NumDenom» տիպ)

Այստեղ բերված է խնդրի լուծումը Կռիլովի մեթոդով՝ «double» տիպով (նկ. 3.11-3.12) և «NumDenom» տիպով (նկ.3.13-3.14) աշխատելու դեպքում:

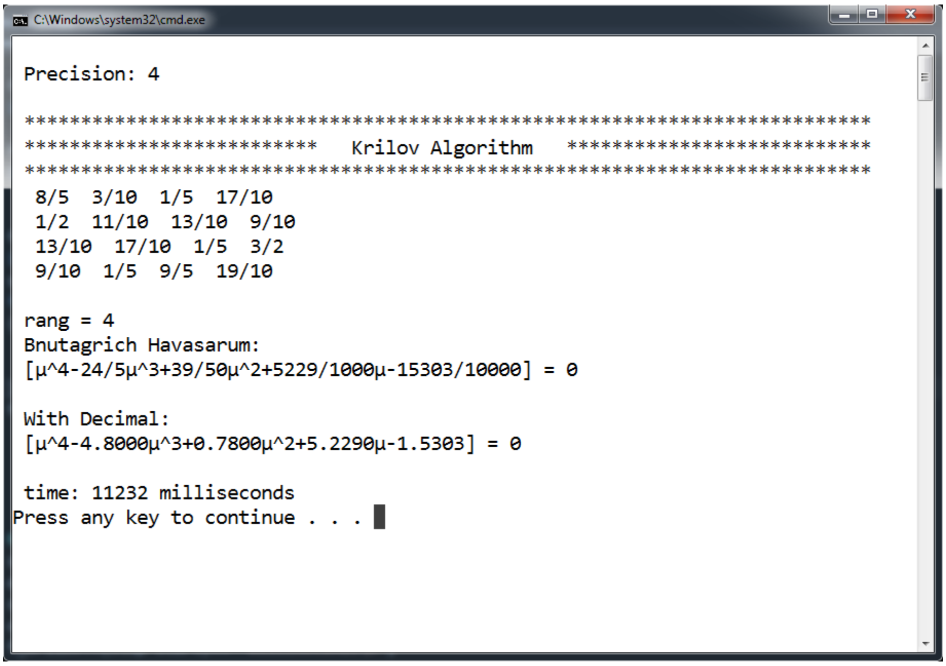
Խնդրի լուծումը կրկին ներկայացված է կանոնավոր և ոչ կանոնավոր դեպքերի համար:



Նկ. 3.11 Կռիլովի ալգորիթմը կանոնավոր դեպքում («double» տիպ)

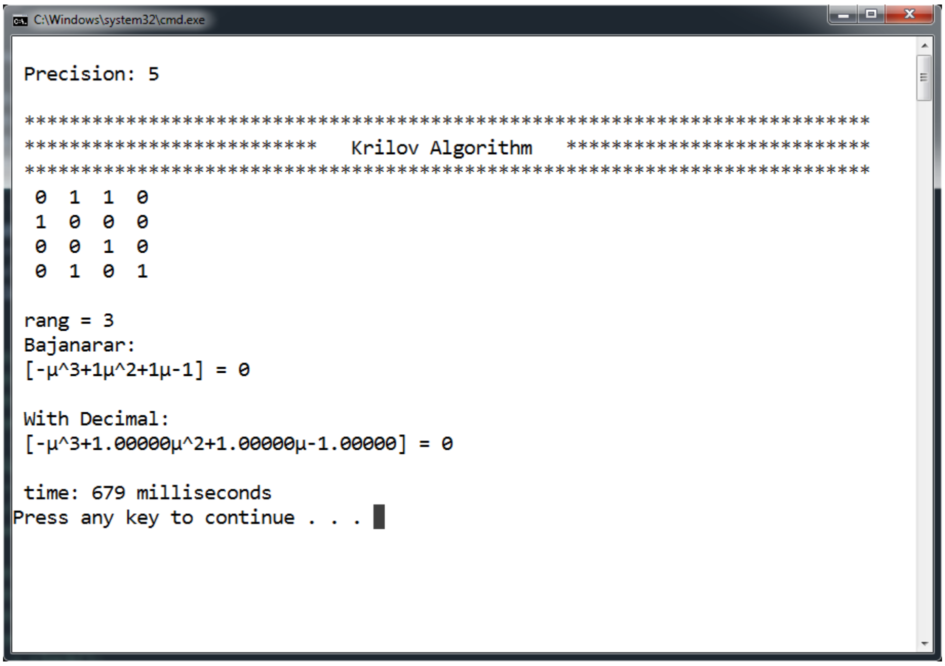


Նկ. 3.12 Կռիլովի ալգորիթմը ոչ կանոնավոր դեպքում («double» տիպ)



```
C:\Windows\system32\cmd.exe

Precision: 4

***************************************************************************
**************************   Krilov Algorithm   ***************************
***************************************************************************
 8/5  3/10  1/5  17/10
 1/2  11/10  13/10  9/10
 13/10  17/10  1/5  3/2
 9/10  1/5  9/5  19/10

rang = 4
Bnutagrich Havasarum:
[µ^4-24/5µ^3+39/50µ^2+5229/1000µ-15303/10000] = 0

With Decimal:
[µ^4-4.8000µ^3+0.7800µ^2+5.2290µ-1.5303] = 0

time: 11232 milliseconds
Press any key to continue . . .
```

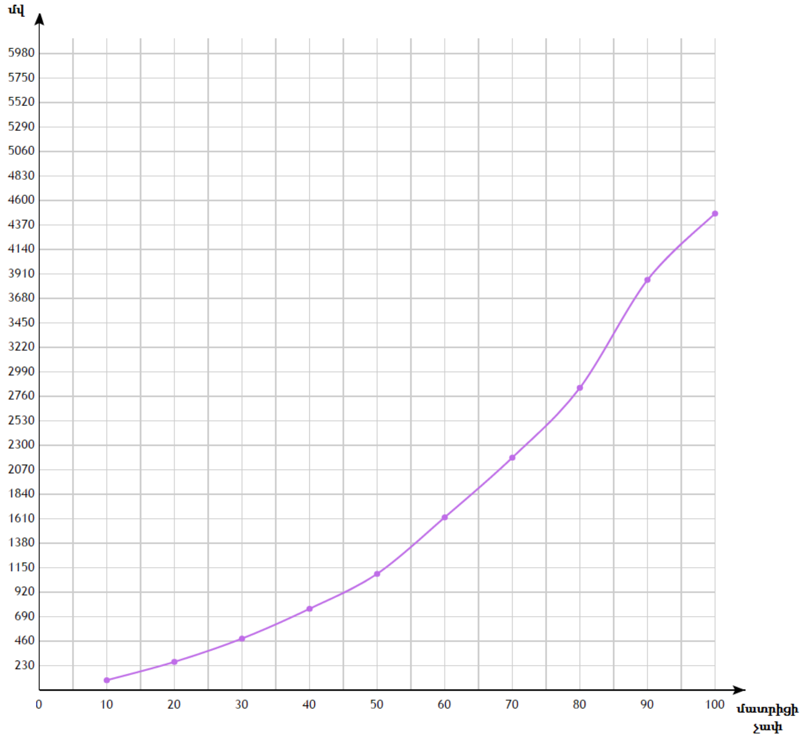
Նկ. 3.13 Կռիլովի ալգորիթմը կանոնավոր դեպքում («NumDenom» տիպ)



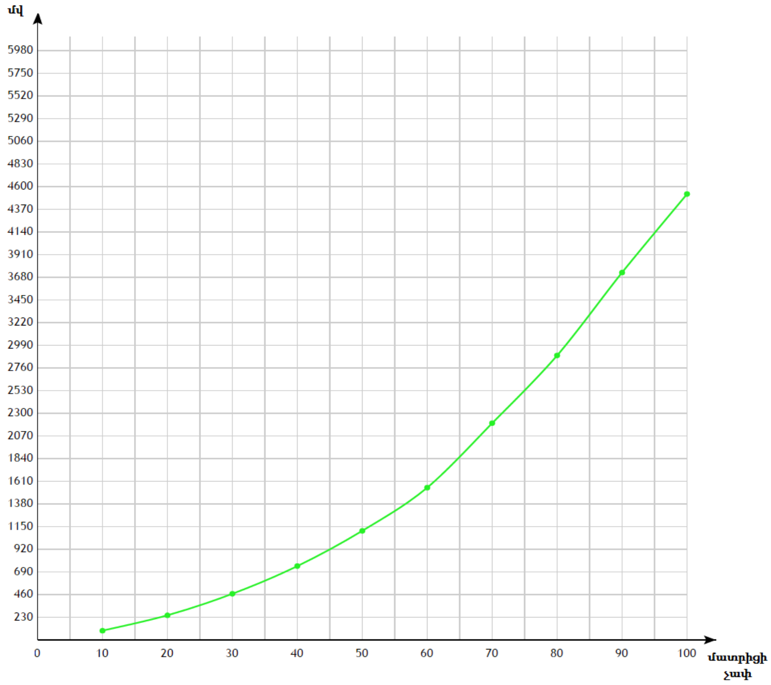
```
C:\Windows\system32\cmd.exe

Precision: 5

***************************************************************************
**************************   Krilov Algorithm   ***************************
***************************************************************************
 0  1  1  0
 1  0  0  0
 0  0  1  0
 0  1  0  1

rang = 3
Bajanarar:
[-µ^3+1µ^2+1µ-1] = 0

With Decimal:
[-µ^3+1.00000µ^2+1.00000µ-1.00000] = 0

time: 679 milliseconds
Press any key to continue . . .
```

Նկ. 3.14 Կռիլովի ալգորիթմը ոչ կանոնավոր դեպքում («NumDenom» տիպ)

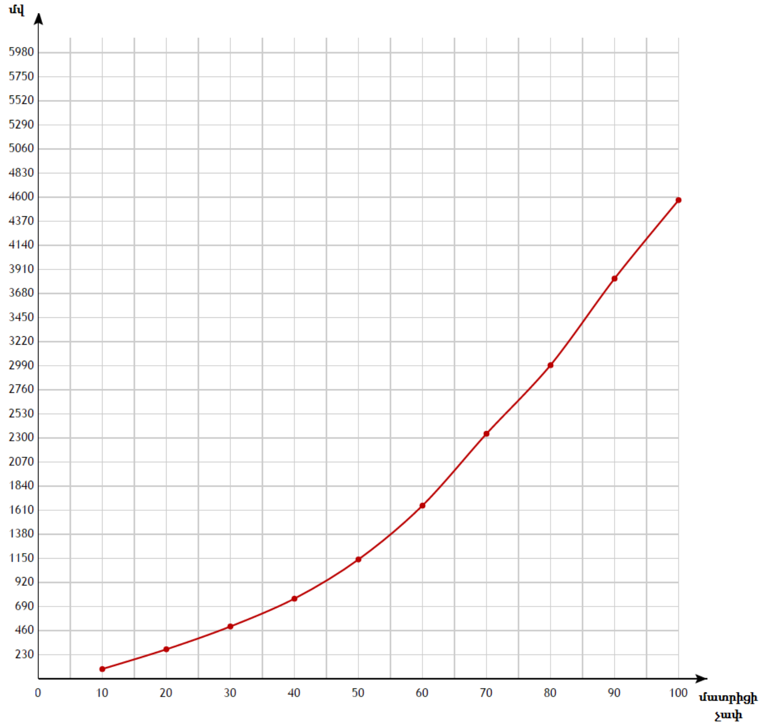
Աշխատանքում դիտարկվել են օրինակներ, որոնց համար բերված են ալգորիթմի իրականացման ժամանակի կախումը մատրիցի չափից պատկերող գրաֆիկները «double» տիպի դեպքում:



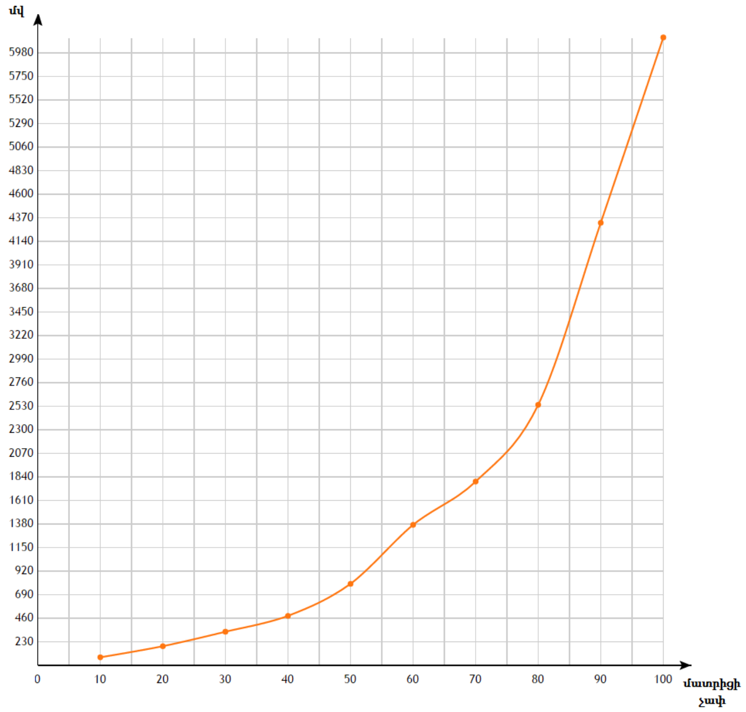
Նկ. 3.15 Լևերյեի ալգորիթմ, 1-ին իրականացում



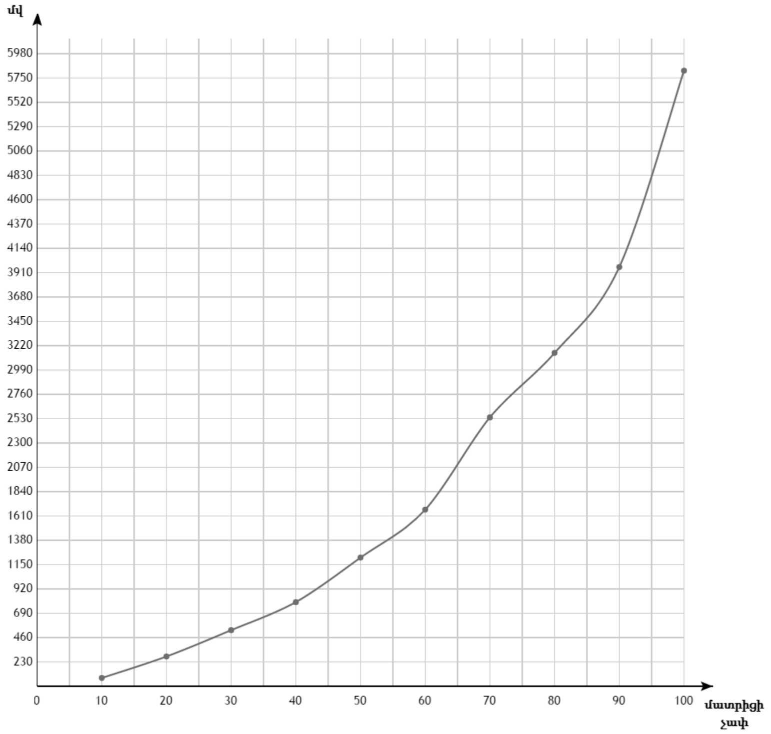
Նկ. 3.16 Լևերյեի ալգորիթմ, 2-րդ իրականացում



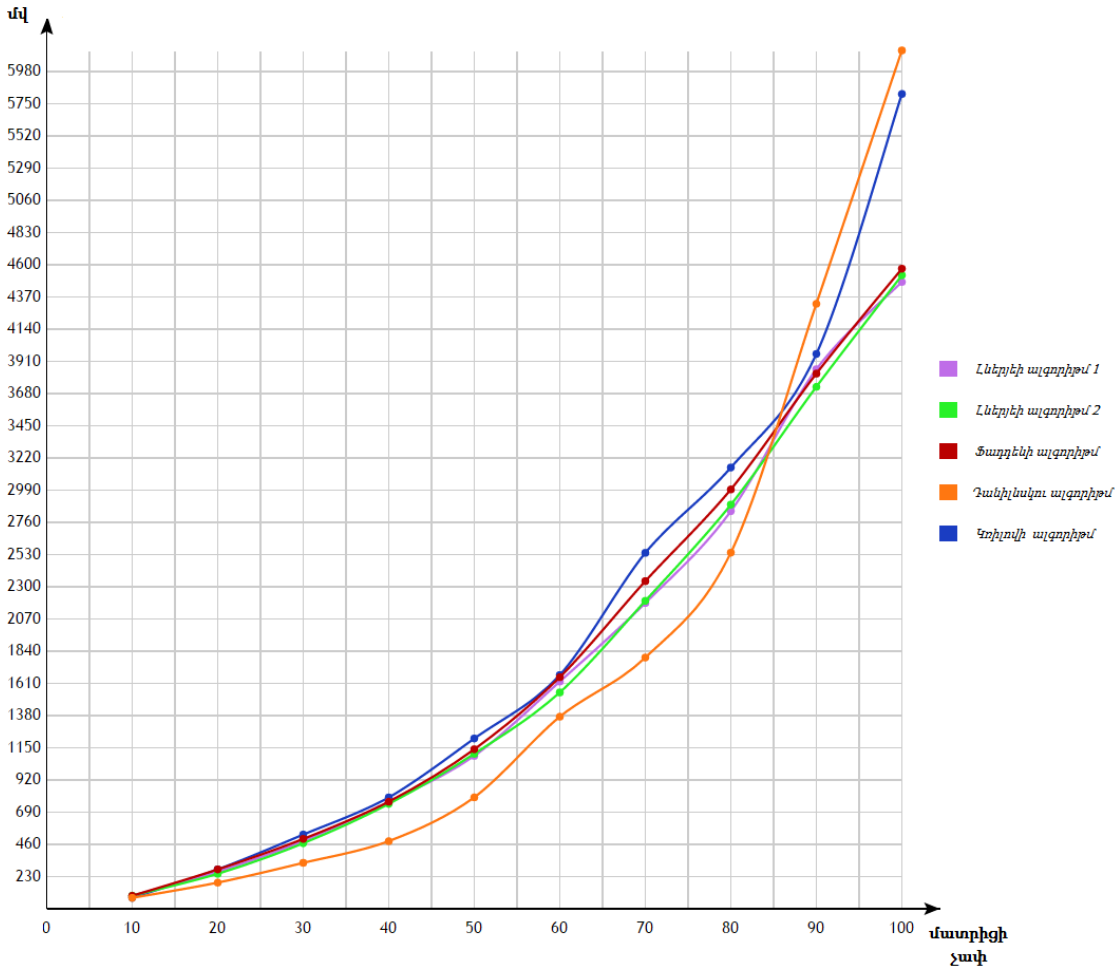
Նկ. 3.17 Ֆադդեևի ալգորիթմ



Նկ. 3.18 Դանիլևսկու ալգորիթմ



Նկ. 3.19 Կռիլովի ալգորիթմ

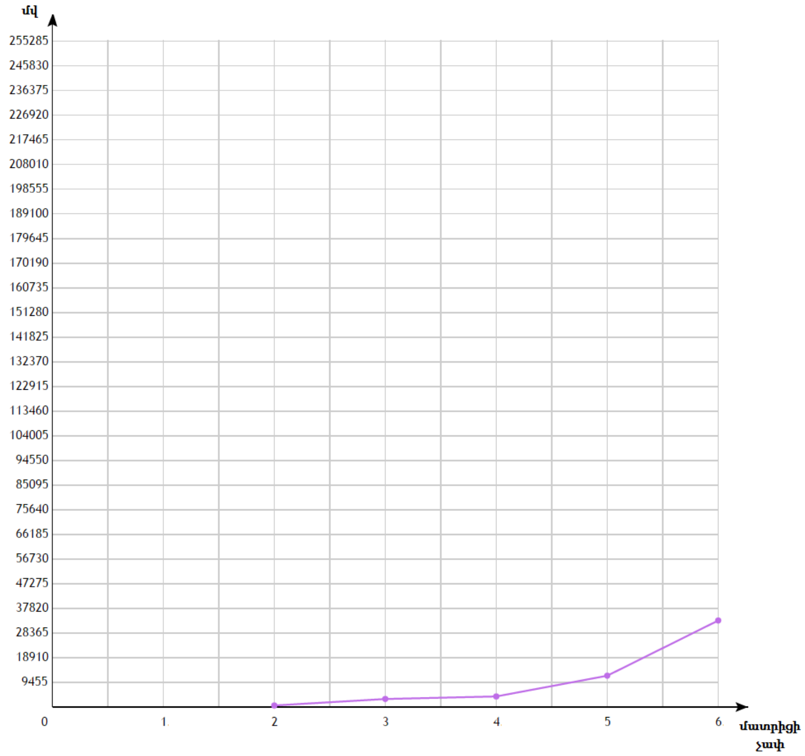


Նկ. 3.20 Համեմատական գրաֆիկ

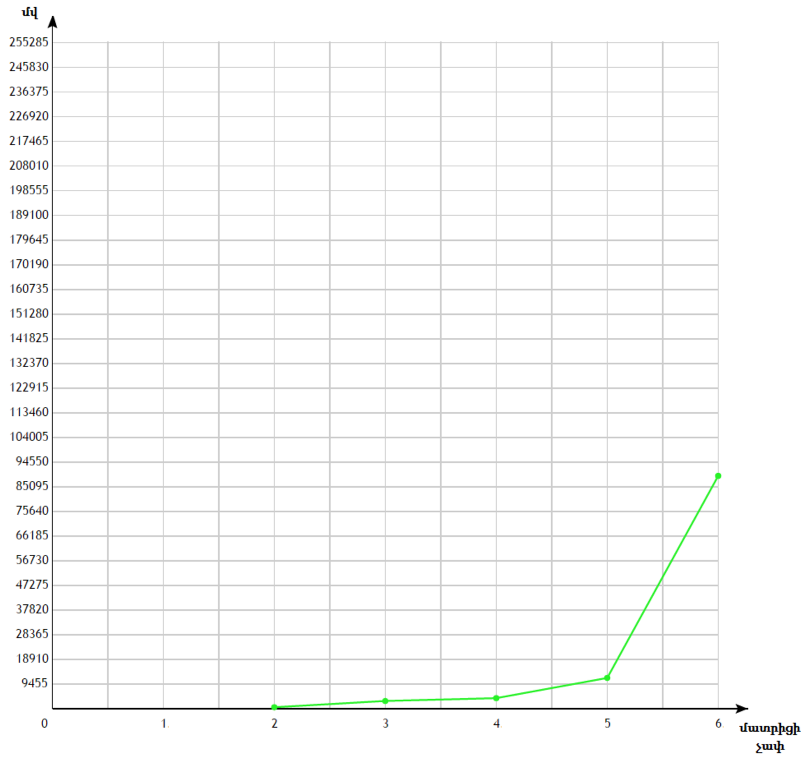
Աղ. 3.1 Ալգորիթմների իրականացման ժամանակը «double» տիպի դեպքում

Մատրիցի չափը	Ժամանակը, միլիվայրկյան				
	Լևերյե 1	Լևերյե 2	Ֆադդեև	Կռիլով	Դանիլևսկի
10	93	94	93	78	78
20	265	250	281	281	187
30	484	468	499	530	328
40	764	749	765	795	483
50	1092	1107	1139	1216	796
60	1623	1545	1654	1669	1372
70	2184	2199	2340	2542	1794
80	2839	2886	2995	3151	2543
90	3853	3728	3822	3962	4321
100	4477	4524	4571	5819	6130

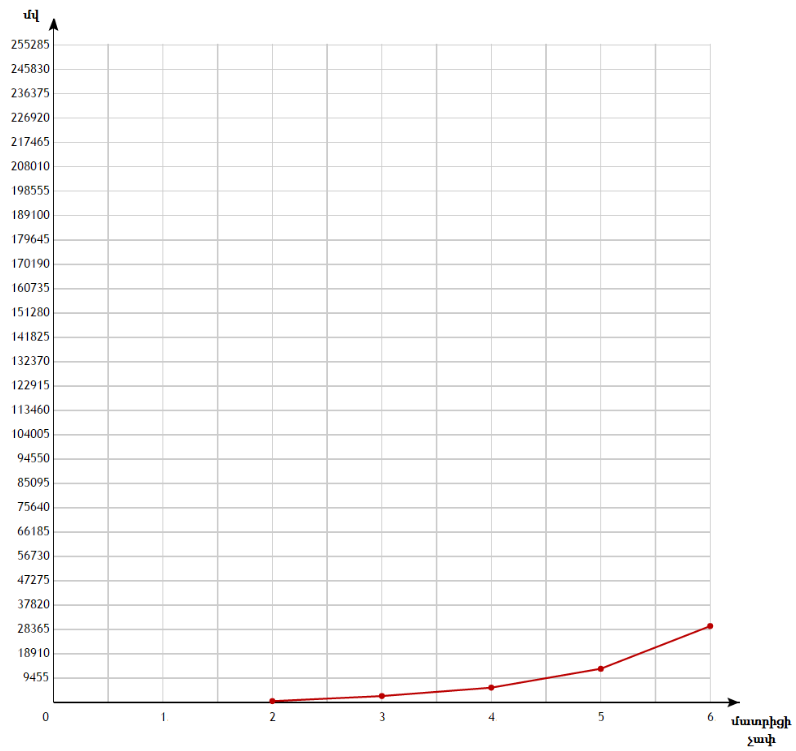
Ալգորիթմի իրականացման ժամանակի կախումը մատրիցի չափից պատկերող գրաֆիկները «*NumDenom*» տիպի դեպքում:



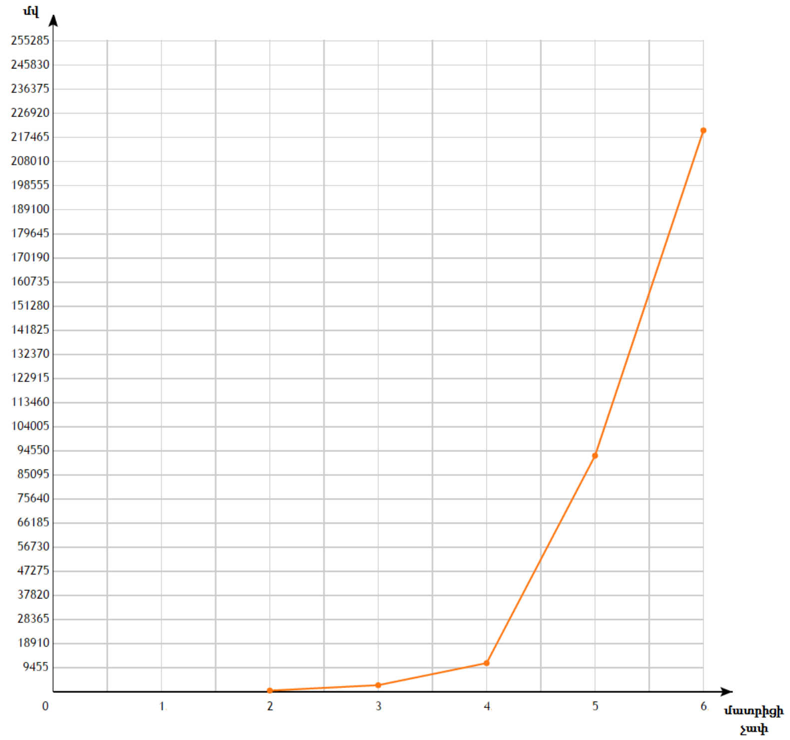
Նկ. 3.21 Լևերյեի ալգորիթմ, 1-ին իրականացում



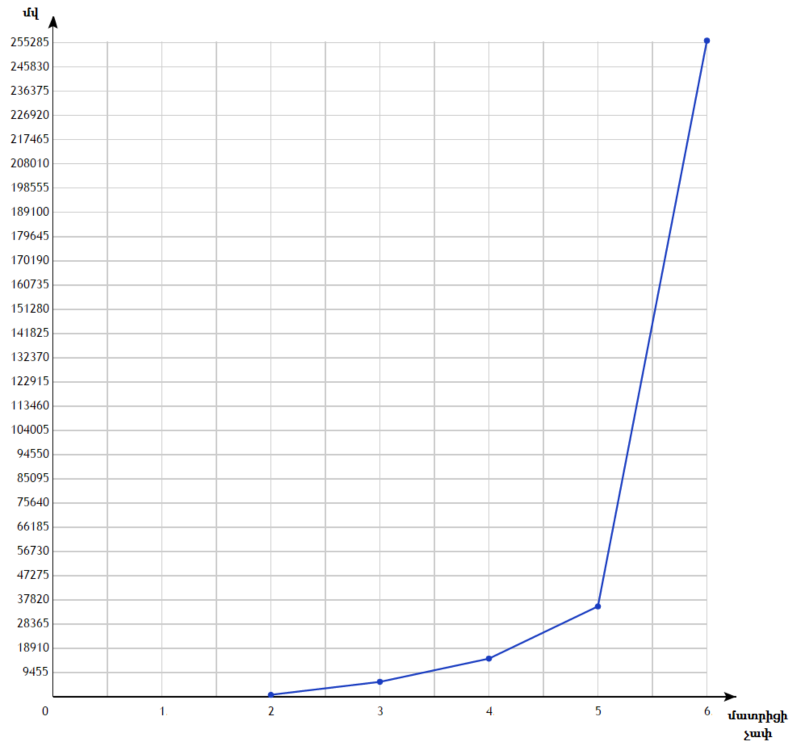
Նկ. 3.22 Լևերյեի ալգորիթմ, 2-րդ իրականացում



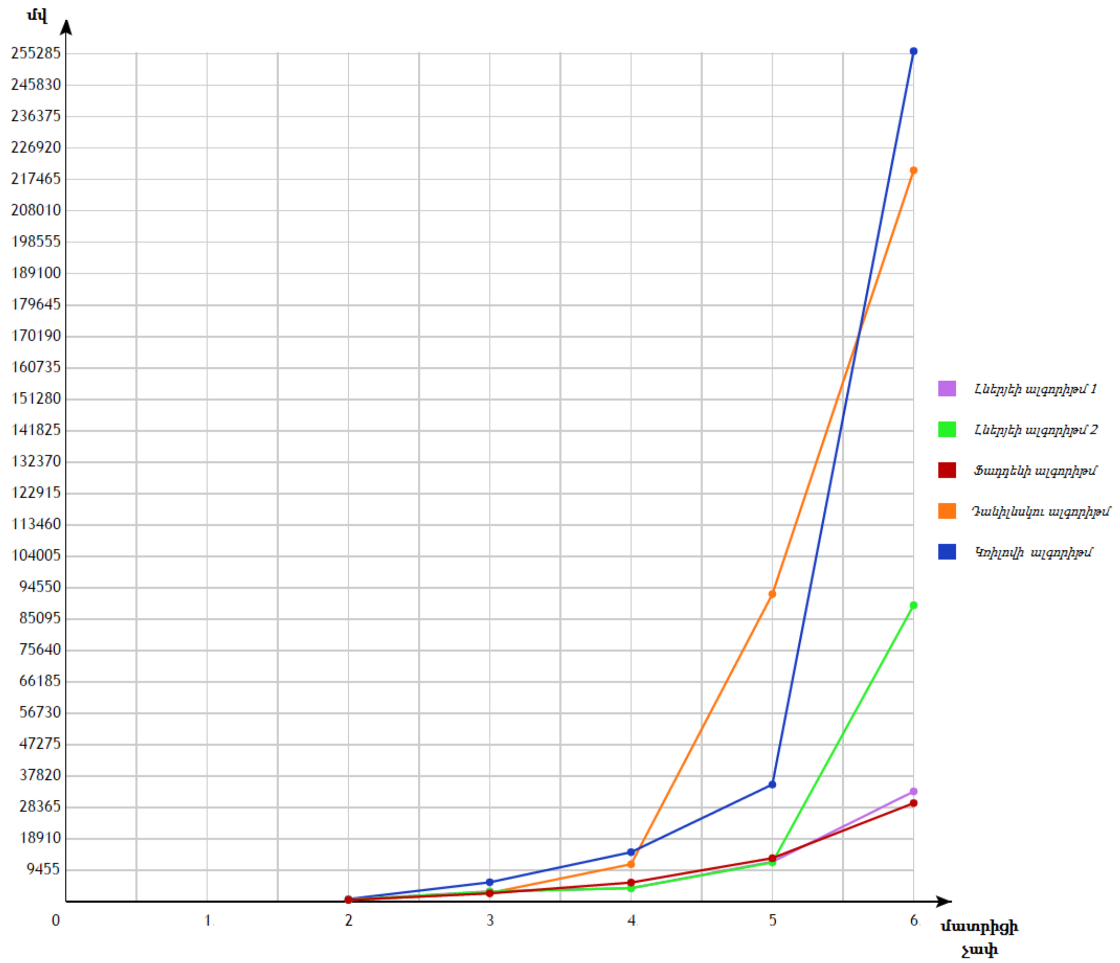
Նկ. 3.23 Ֆադդեևի ալգորիթմ



Նկ. 3.24 Դանիլևսկու ալգորիթմ



Նկ. 3.25 Կռիլովի ալգորիթմ



Նկ. 3.26 Համեմատական գրաֆիկ

Աղ. 3.2 Ալգորիթմների իրականացման ժամանակը « NumDenom » տիպի դեպքում

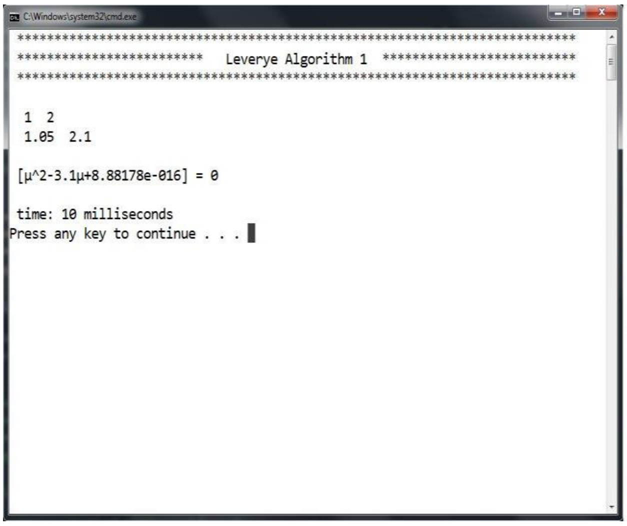
Մատրիցի չափը	Ժամանակը, միլիվայրկյան				
	Լևերյե 1	Լևերյե 2	Ֆադդեև	Կռիլով	Դանիլևսկի
2	593	562	499	766	468
3	3074	2979	2480	5819	2605
4	4056	4056	5741	14883	11263
5	11996	11793	13088	35287	92602
6	33166	89263	29655	256121	220207

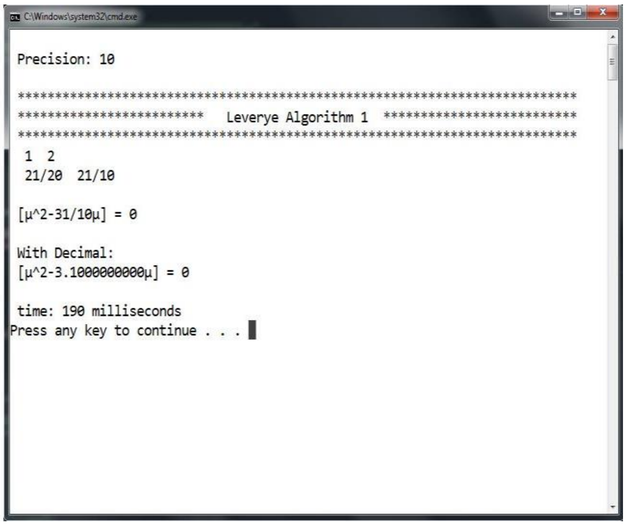
Ստորև բերված են MatLab, WolframAlpha ծրագրային փաթեթների և «double», «NumDenom», տիպերով աշխատող համապատասխան մեթոդների միջոցով մի շարք մատրիցների սեփական բազմանդամների որոշման խնդիրների արդյունքները:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 \\
1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 & 343 & 512 & 729 & 1000 \\
1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 & 2401 & 4096 & 6561 & 10000 \\
1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 & 7776 & 16807 & 32768 & 59049 & 100000 \\
1 & 64 & 729 & 4096 & 15625 & 46656 & 117649 & 262144 & 531441 & 1000000 \\
1 & 128 & 2187 & 16384 & 78125 & 279936 & 823543 & 2097152 & 4782969 & 10000000 \\
1 & 256 & 6561 & 65536 & 390625 & 1679616 & 5764801 & 16777216 & 43046721 & 100000000 \\
1 & 512 & 19683 & 262144 & 1953125 & 10077696 & 40353607 & 134217728 & 387420489 & 1000000000 \\
1 & 1024 & 59049 & 1048576 & 9765625 & 60466176 & 282475249 & 1073741824 & 3486784401 & 10000000000
\end{bmatrix}
$$

	MATLAB	double type	NumDenom type
P_0	1.0	1.0	1.0000
P_1	-10405071317.0	-1.04051e+010	-10405071317.0000
P_2	454532678053932032.0	4.54533e+017	454532678053931926.0000
P_3	-210123652839551117819904.0	-2.10124e+023	-210123652839547514505768.0000
P_4	2008118672331088021447245824.0	2.00813e+027	2009118672327861665097958720.0000
P_5	-7217406368989821671209403678 72.0	4.08725e+031	-72174063684984823554023835648 0.0000
P_6	177931431392971973636303251046 40.0	2.87515e+041	1779314312085377422245271142 4000.0000
P_7	-5434404282036996036733590254 3872.0	2.12877e+051	-5434404261604804655538440601 6000.0000
P_8	2848163094615105201788857981 3376.0	1.65471e+061	2848163053680019057435213824 0000.0000
P_9	-1933558201997590266360256004096.0	1.33376e+071	-1933559184840698775903488000 00.0000
P_{10}	6658583301365575456898678784.0	1.10571e+081	6658606584104736522240000000.0000

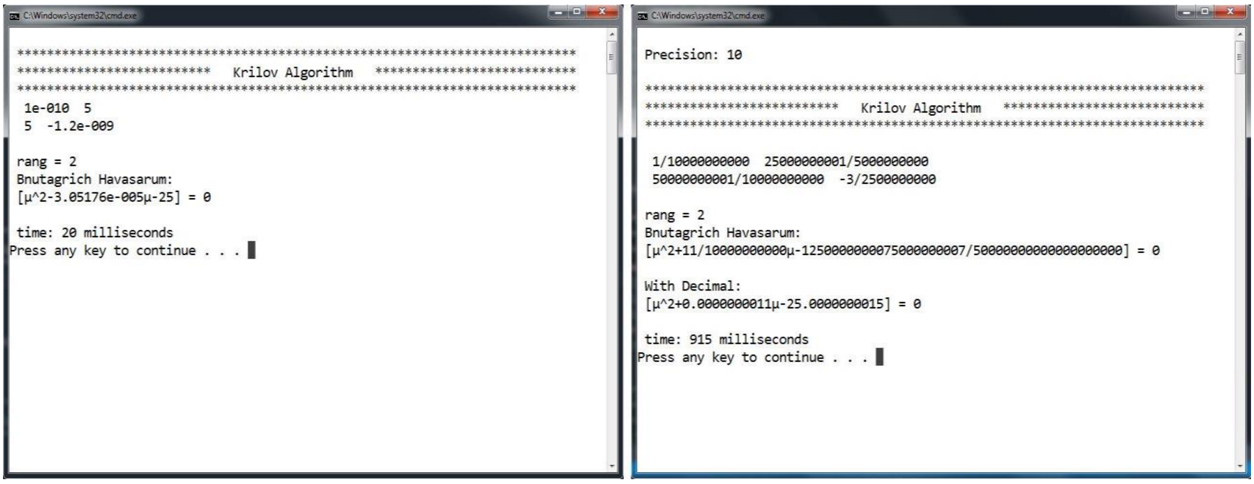
Նկ. 3.27 MATLAB ծրագրային փաթեթի և «double», «NumDenom» տիպերով ալգորիթմների իրականացման արդյունքները





MATLAB	[1.0, -3.1, -0.0000000000000013766765505351939523531222242303]
WolframAlpha	[1.0, -3.1, -1.37668×10^{-15}]
double type	[1.0, -3.1, 8.88178e-016]
NumDenom type	[1.0, -3.1000000000, 0]

Նկ. 3.28 MATLAB, WolframAlpha ծրագրային փաթեթների և «double», «NumDenom» տիպերով ալգորիթմների իրականացման արդյունքները



double type	[1.0, -3.05176e-005, -25]
NumDenom type	[1.0, 0.0000000011, -25.0000000015]

Նկ. 3.29 «double» և «NumDenom» տիպերով ալգորիթմների իրականացման արդյունքները

Ստորև ներկայացված փորձարկումներում դիտարկվել են այնպիսի մատրիցներ, որոնց համար վերոհիշյալ ալգորիթմները չեն հանգում ոչ կանոնական դեպքերի:

Փորձարկում 1 - Դիտարկվել են 10 - 100 չափանի մատրիցներ, որոնց տարրերը հիշողության մեջ պահվում են որպես «double» տիպի փոփոխականներ (նկ. 3.20):

Մեթոդներն ըստ արագության նվազման հերթականության.

10 – 85 չափանի մատրիցների դեպքում.

1. Դանիլևսկու մեթոդ,
2. Լևերյեի մեթոդ,
3. Ֆադդենի մեթոդ,
4. Կռիլովի մեթոդ;

86 – 100 չափանի մատրիցների դեպքում.

1. Լևերյեի մեթոդ,
2. Ֆադդենի մեթոդ,
3. Կռիլովի մեթոդ,
4. Դանիլևսկու մեթոդ:

Փորձարկում 2 - Դիտարկվել են 2 - 6 չափանի մատրիցներ, որոնց տարրերը հիշողության մեջ պահվում են որպես «NumDenom» տիպի փոփոխականներ (նկ. 3.26):

Մեթոդներն ըստ արագության նվազման հերթականության.

<u>2 չափանի մատրիցների դեպքում</u>.

1. Դանիլևսկու մեթոդ,
2. Ֆադդեևի մեթոդ,
3. Լևերյեի մեթոդ,
4. Կռիլովի մեթոդ;

<u>3 չափանի մատրիցների դեպքում</u>.

1. Ֆադդեևի մեթոդ,
2. Դանիլևսկու մեթոդ,
3. Լևերյեի մեթոդ,
4. Կռիլովի մեթոդ;

<u>4 չափանի մատրիցների դեպքում</u>.

1. Լևերյեի մեթոդ,
2. Ֆադդեևի մեթոդ,
3. Դանիլևսկու մեթոդ,
4. Կռիլովի մեթոդ;

<u>5 չափանի մատրիցների դեպքում</u>.

1. Լևերյեի մեթոդ,
2. Ֆադդեևի մեթոդ,
3. Կռիլովի մեթոդ,
4. Դանիլևսկու մեթոդ;

<u>6 չափանի մատրիցների դեպքում</u>.

1. Ֆադդեևի մեթոդ,
2. Լևերյեի մեթոդ,
3. Դանիլևսկու մեթոդ,
4. Կռիլովի մեթոդ:

Գլուխ 4. Բնապահպանություն և Կենսագործունեության անվտանգություն

Բնապահպանություն

4.1. Մթնոլորտի աղտոտման խնդիրները

Ժամանակակից քաղաքակրթությունը չտեսնված <<ճնշում>> է գործադրում բնության վրա: Արդյունաբերական թափոններով բնական միջավայրի աղոտոտումը վնասակար ազդեցություն է գործում մարդկանց, կենդանիների, բույսերի, հողի, շենքերի և շինությունների վրա, իջեցնում է մթնոլորտի թափանցիկությունը, բարձրացնում է օդի խոնավությունը, մեծացնում է մառախլապատ օրերի թիվը, փոքրացնում է տեսանելիությունը, առաջ է բերում մետաղական կառույցների կոռոզիա:

Շրջակա միջավայրի աղտոտման տակ հարկ է հասկանալ միջավայրի հատկությունների (քիմիական, մեխանիկական, ֆիզիկական, կենսաբանական և դրանց հետ կապված տեղեկատվական) փոփոխությունը, որոնք տեղի են ունենում բնական կամ արհեստական գործընթացների արդյունքում և հանգեցնում են միջավայրի ֆունկցիայի վատթարացմանը՝ ցանկացած կենսաբանական կամ տեխնոլոգիական օբյեկտի առումով: Իր գործունեության մեջ օգտագործելով շրջակա միջավայրի զանազան տարրեր՝ մարդը փոխում է դրանց որակը: Հաճախ այդ փոփոխությունները արտահայտվում են աղտոտման ոչ բարենպաստ ձևերով: Իրենց մասշտաբներով մարդածին փոփոխությունները համադրելի են դառնում բնականների հետ, իսկ մի շարք դեպքերում անգամ գերազանցում են դրանց:

Աղտոտման բնական գործընթացները բնության մեջ անտիպոդներ ունեն, որոնք ընդունակ են չեզոքացնել բնական աղտոտման ազդեցությունը, իսկ մարդու ստեղծած շատ նյութեր տարասեռ են բնականների համեմատությամբ: Աղտոտման բնական աղբյուրները սովորաբար հեռու են մարդու բնակության վայրերից, այնինչ մարդածինները տեղադրված են խիտ բնակչությամբ շրջաններում:

Մթնոլորտն աղտոտող նյութերը բազմաթիվ տասնամյակների ընթացքում նշանակալի վնաս էին հասցնում շրջակա միջավայրին: Ըստ երևույթին դրանց վնասակար ազդեցության հետ հարկ կլինի հաշվի նստել նաև ապագայում:

Բնակչության և արդյունաբերական արտադրության հետագա աճը անխուսափելիորեն կհանգեցնեն աղտոտման վտանգի մեծացմանը:

Այն հիմնական աղտոտող նյութերի, որոնց պարունակությունը կանոնակարգվում է ստանդարտներով, հանդիսանում են ծծումբի երկօքսիդը (SO_2), ազոտի օքսիդները (SO և NO_2), ածխածնի մոնօքսիդ (CO), գազային ածխաջրածիններ (HC), ինչպես նաև՝ ծծմբաջրածինը (H_2S), ծծմբաածխածինը (CS_2), ամոնիակը (NH_3), զանազան հալոգենապարունակող գազեր:

Գոյություն ունի գազային աղտոտիչների ձևավորման երեք հիմնական աղբյուրներ՝

1. վառելանյութերի այրում,
2. արդյունաբերական արտադրական գործընթացներ,
3. բնական աղբյուրներ:

Վառելանյութի այրման արդյունքում է առաջանում ծծմբի երկօքսիդի ամբողջ զանգվածի 78 տոկոսը: Ածխաջրածինները, որոնց առաջ գալու վտանգը կայանում է նրանում, որ դրանք միջանկյալ նյութեր են հանդիսանում օզոնի ձևավորման գործընթացում, մթնոլորտ մուտք են գործում վառելիքի այրման և նավթամթերքների վերամշակման դեպքում, բացի դրանից, շատ գիտնականների գնահատականների՝ բնական աղբյուրներից ամեն տարի անջատվում է 117 մլն. տոննա ածխաջրածին, իսկ մարդածին աղբյուրներից՝ 100 մլն. տոննա: Սակայն քաղաքների օդային ավազանում առկա ածխաջրածինները հիմնականում իրենցից ներկայացնում են այրման արդյունքներ:

Ծծմբի օքսիդների նշանակալի քանակություն մթնոլորտ է նետվում սուլֆիդային հանքերից, պղնձի, կապարի և ցինկի արտադրության ժամանակ, ինչպես նաև՝ նավթամթերքների մաքրման գործընթացում: SO_2-ի արտանետումների մեծ մասը կապված է տեխնոլոգիական գործընթացներին անհրաժեշտ ջերմության ստացման համար վառելիքի այրման հետ: Առաջացած SO_2 գազերը սովորաբար օգտագործվում են ծծմբական թթվի արտադրության համար:

Ծծմբի օքսիդները առաջանում են թղթի և ցելյուլոզային զանգվածի արտադրության ժամանակ՝ ծծումբ պարունակող նյութերի այրման հետևանքով:

Ածխաջրածիններով մթնոլորտի աղտոտումը տեղի է ունենում քիմիական ձեռնարկություններից, նավթավերամշակող և մետալուրգիական գործարաններից: Ածխաջրածինները անջատվում են պլաստմասսաների, ներկանյութերի, սննդային հավելանյութերի, պեսցիդների արտադրության, ինչպես նաև՝ կաուչուկների և նավթաքիմիական նյութերի վերամշակման ժամանակ:

Մթնոլորտ նետվող քիմիական նյութերի թվում պարունակվում է թունավոր նյութերի բավականաչափ մեծ քանակություն: Ներկայումս վտանգավոր աղտոտող նյութերի թվին են դասվում սնդիկի գոլորշիները, վինիլքլորիդը և բենզոլը, որոնց պարունակությունը մթնոլորտում ենթակա է հատուկ վերահսկողության:

Ամեն տարի անածո վառելիքի մեծ քանակություն է այրվում կաթսայատներում՝ ջեռուցման համար: Կաթսայատները էկոլգիական տեսանկյունից <<ամենակեղտոտ>> վառելիքի՝ քարածխի և մազութի, ամենախոշոր սպառողներն են: Այդ պատճառով էներգետիկան ըստ այրվող վառելիքի քանակի և որակի հանդիսանում է ծծմբի երկօքսիդի միակ աղբյուրը, ինչպես նաև դիսպերս աղտոտումների և ազոտի օքսիդի գլխավոր աղբյուրը:

Գազային աղտոտիչները առաջանում են գազի այրման գործընթացում, իսկ դիսպերսները՝ մեխանիկական փոշին, կարող է դուրս փչվել կոնվեյերով ածխի բեռնաթափման և փոխադրման ժամանակ, ինչպես նաև՝ վառելիքային մոխրի հեռացման և պահեստավորման ժամանակ: Ածխի փոշիացումը տեղի է ունենում քամային էրոզիայի արդյունքում: Բնական ածխի փոշիացումը՝ որպես վառելիք, հանդիսանում է առավել արդյունավետ: Թեև բնական գազը դիտարկվում է որպես համեմատաբար մաքուր վառելիք, նրա այրման ժամանակ նույնպես ձևավորվում են աղտոտիչները՝ ազոտի օքսիդները, ածխածնի օքսիդները, ածխաջրածինները:

Մթնոլորտի աղտոտման ևս մեկ ոչ պակաս կարևոր աղբյուր է հանդիսանում պինդ քաղաքային թափոնների այրումը: Բոլոր քաղաքակիրթ երկրներում այդ նպատակի համար գոյություն ունեն աղբայրման վառարաններ, որոնց կառուցվածքը կախված է թափոնների բաղադրություններից:

Ծխային արտանետումները բաղկացած են այրման համեմատաբար անվնաս գազային արգասիքներից՝ ածխածնի երկօքսիդ, ջուր, իներտ ազոտ: Սակայն դրանց ավելցուկը կարող է հանգեցնել շլեյֆային մառախուղի ձևավորմանը: Ուստի ծխային արտանետումների որսման համար օգտագործում են զանազան ֆիլտրեր և փոշեորսիչներ:

Ներքին այրման շարժիչների արտանետումներով պայմանավորված շրջակա միջավայրի աղտոտումը վերջին տարիներին ավելի ու ավելի սևեռուն ուշադրության են արժանանում մարդու առողջությանն սպառնացող աճող վտանգի պատճառով:

Մթնոլորտում ածխաթթու գազի պարունակության մեծացումը տանում է Երկրի ջերմաստիճանի բարձրացման: CO_2-ի պարունակության մեծացման դեպքում կարելի է սպասել Երկրի միջին ջերմաստիճանի բարձրացում, թեև այդ պարամետրերի միջև կախումը բավականաչափ բարդ է: Դատելով հետազոտությունների արդյունքներից՝ CO_2-ի մոտավոր կրկնապատկում տեղի կունենա մոտ 2041 թվականին, ինչի արդյունքում մոլորակի ջերմաստիճանը կբարձրանա 2-3 աստիճանով: Բևեռային շրջաններում ջերմաստիճանի բարձրացումը կարող է մի քանի անգամ գերազանցել տվյալ արժեքը:

Ջերմաստիճանի փոփոխության վրա մարդածին ազդեցության հիմնախնդիրը դեռևս մնում է քննարկման փուլում: Իհարկե, չի կարելի այդ ազդեցությունը հանգեցնել միայն <<թերմոստատում ջերմաստիճանի բարձրացման>>, քանի որ ջերմաստիճանի գլոբալ բաշխումը կապված է մթնոլորտային զանգվածների տեղափոխման հետ:

Ջերմաստիճանի փոփոխության ժամանակ ջրային գոլորշու պարունակությունը նույնպես կարող է փոխվել: Այսպիսով, մթնոլորտում CO_2-ի խտության փոփոխման վերջնական արդյունք կարող են դառնալ բարդ կլիմայական գործընթացները, որոնք կապված են ինչպես ջերմաստիճանի, այնպես էլ՝ տեղումների ձևավորման գործընթացում:

Առաջներում ենթադրվում էր, որ տրանսպորտային և ավիացիայի արտանետած ազոտի օքսիդները հանդիսանում են օզոնի շերտի քայքայման հիմնական պատճառը: Սակայն քանակական չափումները ցույց տվեցին, որ այդ աղբյուրը չնչին է բնականների համեմատությամբ: Մարդկային գործունեության արգասիքներից օզոնային շերտի համար առավել վտանգավոր են հանդիսանում ֆրեոնները և դրան նման նյութերը: Նրանք արհեստական ծագում ունեն և լայնորեն կիրառվում են սառնարանային հարմարանքներում, տարբեր աէրոզոլերում:

Օզոնը կազմում է մթնոլորտի աննշան մասը՝ մեկ միլիոներրորդական մասից պակաս՝ և' ծավալով, և' զանգվածով: Նրա հիմնական մասը՝ մինչև 90 տոկոս, կենտրոնացված է ստրատոսֆերայում: Մնացած 10 տոկոսը կենտրոնացված են մթնոլորտի ավելի ցածր շերտերում: Այստեղ օզոնը արդեն հանդես է գալիս որպես մթնոլորտի օդի վտանգավոր աղտոտիչ: Այն ազդում է շնչառական ուղիների վրա, գրգռում է աչքերը, խախտում է բուսականության աճը և այլն: Շնչառության համար օգտագործվող օդում նրա կոնցենտրացիան չպետք է գերազանցի 150-200 կգ/*մ*^{3}-ը:

Օզոնը առաջ է գալիս էլեկտրական լիցքերի արդյունքում, սակայն շատ ավելի կարևոր են հանդիսանում միջնորդ նյութերի մասնակցությամբ ֆոտոքիմիական ռեակցիաները (ազոտի օքսիդները կամ ածխաջրածինները):

Մեծ քաղաքներում արդյունաբերական և ավտոմոբիլային արտանետումների արդյունքում, որոնք փոխազդում են մեկը մյուսի և այլ գազերի հետ, առաջանում են բարդ քիմիական միացություններ, առաջ է գալիս ֆոտոքիմիական սմոգ՝ թունամշուշ, որն ունի օզոնի բարձր խտություն: Կապված այն բանի հետ, որ օզոնային շերտի էկոլոգիական դերը գլոբալ մասշտաբով շատ մեծ է, շատ երկրներ անցել են անհապաղ գործնական քայլերի: Արդեն 1978 թ. ԱՄՆ-ը, Կանադան և Սկանդինավյան երկրները արգելեցին ֆրեոնների կիրառումը աէրոզոլային բալոններում և սառնարանային տեղակայանքներում, որտեղ դրա անհրաժեշտություն չկա:

Եզրափակելով՝ նշենք, որ դեռևս մեր գիտելիքները բավական չեն, որպեսզի որոշենք մթնոլորտում օզոնի քանակության տատանումների հիմնական պատճառները և բացատրենք նրա մեխանիզմը: Այդ պատճառով ցանկացած կանխատեսումներ հարկ է ընդունել որպես ենթադրական:

Կենսագործունեության անվտանգություն

4.2. Օպերատորի աշխատանքային պայմանների ապահովումը

Հաշվիչ կենտրոնում աշխատանքի ժամանակ օպերատորների և ծրագրավորողների վրա վնասակար ազդեցություն կարող են ունենալ հետևյալ գործոնները.

1. անբավարար լուսավորվածությունը,

2. անբավարար ջերմաստիճանը,
3. անբավարար օդափոխությունը,
4. աղմուկը
5. խոնավությունը,
6. հոսանքահարումը և այլն:

Նշված գործոնների լավագույն ձևով ապահովումը հանդիսանում է աշխատանքի արտադրողականության արդյունավետության բարձրացման, ինչպես նաև աշխատող մարդու զարգացման կարևոր խթան մարդ-մեքենա-միջավայր համակարգում: Արտադրության մեքենայացումն ու ավտոմատացումը մարդու գործունեությունը վերածեց օպերատորային ֆունկցիաների: Մարդ-օպերատոր հանդիսանում է մարդ-մեքենա համակարգի ամենակարևոր կենդանի օղակը, որն ընդունակ է կառավարելու, վերահսկելու և ծրագրավորելու մնացած օղակների գործունեությունը: Մարդն` ընկալելով սարքավորումներից եկող ինֆորմացիան, վերծանում է դրանք, ընդունում որոշումներ և իրականացնում համապատասխան գործողություններ:

Տվյալ պայմաններն անհրաժեշտ են որպեսզի նա կարողանա լիովին կենտրոնանալ և կատարել իր աշխատանքները:

Լուսավորվածություն

ԷՀՄ-ի շահագործման սենյակներում անհրաժեշտ է ունենալ լավ լուսավորվածություն օպերատորներին նորմալ պայմաններ ապահովելու համար քանի որ անբավարար լուսավորվածության դեպքում գերլարվում է օպերատորի տեսողական օրգանները, խախտվում է նյարդային համակարգը: Լուսավորվածության համակարգի ճիշտ կազմակերպման համար հարկավոր է հաշվի առնել լույսի աղբյուրների պայծառությունը, սենյակում դրանց բաշխումը, լուսամփոփների գույնը, տիպը և այլն:

ԷՀՄ-ի շահագործման սենյակներում պետք է նախատեսել արհեստական լուսավորվածության համակարգ: Լուսամփոփների տեղադրման ժամանակ պետք է խուսափել օպերատորի վրա լույսի ուղղվածությունից: Լավագույն լուսավորվածություն կարելի է ստանալ, եթե լույսի աղբյուրները տեղադրել առաստաղի վրա և ներքևից ծածկել կիսաթափանցիկ նյութով: Նման լուսավորվածությունը համարյա չի ստեղծում ստվերներ և փայլեր: Օպերատորի սենյակում լուսավորվածության կազմակերպման ժամանակ պետք է հաշվի առնել սենյակի պատերի գույնի ճիշտ ընտրումը: Սենյակի պատերի գույնի ընտրման ժամանակ պետք է հաշվի առնել, որ տաք երանգների գույները մեծացնում են օպերատորի աշխատունակությունը: Սառը երանգների գույները պասիվացնում են օպերատորին:

Ջերմաստիճան

Շրջապատի ջերմաստիճանը նկատելի կերպով ազդում է օպերատորի աշխատունակության վրա: Օպերատորի սենյակի ջերմաստիճանը կարգավորելու համար օգտագործում են կալորիֆեր (օդը տաքացնելու և սառեցնելու համար): Առավել նպաստավոր ջերմաստիճան է համարվում +18÷24°C ամռանը և +15÷22°C ձմռանը: Սահմանված է, որ +30°C-ի դեպքում օպերատորի աշխատունակությունը զգալիորեն ընկնում է, թուլանում է ռեակցիան: +11°C-ի դեպքում մարդու վերջույթներն սկսում են սառել, փայտանալ, դա թույլատրելի նվազագույն ջերմաստիճանն է: +50°C-ի դեպքում կարող է աշխատել մեկ ժամից ոչ ավել:

Օդափոխություն

Օպերատորի սենյակում օդափոխությունը կազամկերպվում է բնական և արհեստական (մեխանիկական) եղանակներով:

Օպերատորի սենյակում արհեստական կամ մեխանիկական օդափոխությունն իրականացնում է օդափոխիչների և այլ սարքավորումների միջոցով: Մեխանիկական օդափոխության հիմնական էլեմենտներն են հանդիսանում օդի ընդունիչ սարքերը, օդատար խողովակները, օդափոխիչները, օդահաղորդիչները, օդախոնավացուցիչ սարքերը, օդազտիչ սարքերը և օդատաչացուցիչները: Օդահաղորդիչները անհրաժեշտ են օդի տեղաշարժման, արտադրական տեղամասերով նրա բաշխման, ինչպես նաև կեղտոտված օդը դուրս մղելու համար: Օդատաքացուցիչները նախատեսված են արտադրական տեղամաս ներս մղվող օդը տաքացնելու համար:

Բնական օդափոխության ժամանակ պետք է օպերատորի սենյակում լինեն անհրաժեշտ քանակությամբ պատուհաններ:

Խոնավություն

Խոնավությունը պետք է համաձայնության մեջ լինի ջերմաստիճանի հետ:

20÷28℃ ջերմաստիճանի դեպքում միջավայրի թույլատրելի խոնավությունը փոփոխվում է 70%-ից մինչև 30 %: Ինչքան բարձր է ջերմաստիճանը, այնքան ցածր պետք է լինի խոնավությունը:

Աղմուկներ

Լսողության համար տհաճ զգացողություն առաջացնող յուրաքանչյուր ոչ ցանկալի ձայն հանդիսանում է որպես աղմուկ: Օպերատորի սենյակում որպես աղմուկի աղբյուր հանդիսանում են քոմփյութերի հովացուցիչների ձայնը, օդափոխիչ համակարգերի ձայնը: Օպերատորի աշխատունակության վրա զգալի ազդեցություն են ունենում աղմուկները: Աղմուկը ազդելով լսողության օրգանների վրա խախտում է նյարդային և սիրտանոթային համակրգերը, առաջացնում են քնի խանգարում, արյան ճնշման խախտում, ուշադրության թուլացում, որի հետևանքով ընկնում է արտադրողականությունը: Աղմուկի մակարդակի նվազեցման համար անհրաժեշտ է մեկուսացնել աղմուկի առաջացման աղբյուրները: Ինչպես նաև գոյություն ունեն անյատական պաշտպանության միջոցներ, այն դեպքում, եթե գոյություն ունեցող մեթոդներով աղմուկի մակարդակը չի նվազեցվում պահանջվող չափով: Դրանցից են ականջի ներդիրները և հատուկ ականջակալները: Աղմուկի դեմ պայքարը իրագործվում է մի շարք մեթոդներով:

Հոսանքահարում

Հաշվիչ կենտրոններում էլեկտրական հոսանքի սխալ օգտագործումը, պաշտպանական միջոցների բացակայությունը կարող է դառնալ դժբախտ պատահարների պատճառ: Հոսանքահարման հիմնական պատճառներն են՝

Հոսանքի հաղորդումը քոմփյութերի այն մասերին, որոնք նորմալ պայմաններում հոսանքի տակ չպետք է լինեն: Դա կարող է տեղի ունենալ մեկուսիչների խափանման, քայքայման կամ այլ պատճառներով:

Զանազան նպատակներով հոսանքատար չմեկուսացված՝ բաց հաղորդիչների օգտագործումը և դրանց հպվելու հնարավորության առկայությունը:

Աշխատանքի սխալ կազմակերպումը, ցածր կարգապահությունը, սարքավորումների օգտագործման կարգի խախտումները և այլն:

Էլեկտրական հոսանքի վտանգավոր ազդեցությունից ազատվելու հիմնական միջոցներից է հուսալի օգտագործումը:

Գլուխ 5. Տնտեսագիտական հիմնավորում

Մատրիցի սեփական բազմանդամի կառուցման որոշ Եղանակների ծրագրային իրականացման փաթեթի ինքնարժեքի և միավորի գնի հաշվարկը

Ժամանակակից տնտեսական պայմաններում ցանկացած գործունեություն առընչվում է տնտեսական հարցերի հետ: Նոր տեխնիկայի, տեխնոլոգիական պրոցեսների, տեխնիկատնտեսական հիմնավորման համար, մասնավորապես մեր աշխատանքի պայմաններում կարևորագույն տնտեսական հիմնահարցերից է ինքնարժեքի որոշումը:

Արտադրանքի կամ ծառայությունների ինքնարժեքը՝ դա արտադրանքի (ծառայությունների) արտադրության և իրացման վրա կատարված բոլոր ծախսերի գումարն է դրամական արտահայտությամբ:

Արտադրանքի ինքնարժեքի մեջ իրենց արտահայտությունն են գտնում սպառված շրջանառու ֆոնդերը, հիմնական ֆոնդերի մաշվածության մասը (ամորտիզացիան), կենդանի աշխատանքի մի մասը, որը աշխատողներին վճարում է աշխատավարձի ձևով:

Արտադրանքի ինքնարժեքի մեջ մտնող ծախսերը դասակարգվում են ըստ տնտեսկան տարրերի և ըստ կալկուլյացիոն հոդվածների:

Ներկայումս կիրառվում է ծախսերի ըստ կալկուլյացիոն հիմնական հոդվածների հետևյալ դասակարգումը՝

1. Հումք և նյութերի ծախսի որոշումը
2. Համալրող առարկաներ:
3. Էներգիա և վառելանյութ՝ տեխնոլոգիական նպատակների համար:
4. Աշխատողների հիմնական աշխատավարձ:
5. Աշխատողների լրացուցիչ աշխատավարձ:
6. Սարքավորումների շահագործման և պահպանման ծախսեր:
7. Ընդհանուր և տնտեսական ծախսերի հաշվարկ:
8. Վերադիր ծախսերի հաշվարկ:

Լրիվ ինքնարժեք (1-7 կետերի գումարը):

Ծրագրային փաթեթը, որի ինքնարժեքն ու միավորի գինը ենթակա է որոշման, իրենից ներկայացնում է՝ մատրիցի սեփական թվերի որոշման մեթոդների ծրագրային փաթեթը:

Հաշվարկի համար ելքային տվյալներ են հանդիսանում՝

- արտադրվող ծրագրային փաթեթի քանակը՝ ընդունել 100 միավոր:
- ծրագրային փաթեթի մեջ մտնող համալրող առարկաների քանակն ու անվանացանկը;
- ժամանակի ամփոփ նորմերը, աշխատանքի կարգն ու աշխատավարձի ձևերը,
- ժամավճարային և գործարքային պարգևատրման չափերը (28%),
- լրացուցիչ աշխատավարձի չափերը (16%),
- սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի դրույքաչափերը(2.4%),
- ընդհանուր արտադրական ծախսերի դրույքաչափը(94%),
- ընդհանուր տնտեսական ծախսերի դրույքաչափը (132%)

1.Հումք և նյութերի ծախսի որոշումը

Հիմնական հումք և նյութերի արժեքը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Cm = \Sigma gmi*Pmi,$$

որտեղ՝ gmi –i-րդ տեսակի նյութի ծախսն է, կգ/գ, Pmi -1կգ/գ i-րդ տեսակի նյութի գինը՝ դրամ:

Տվյալ գործոնը բացակայում է ներկայացված ծրագրի ստեղծման գործընթացում:

2. Համալրող առարկաների ծախսի հաշվարկ

Գնված բաղադրիչների և կիսաֆաբրիկատների արժեքը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$C_{пк} = \sum M_{пkj}*P_{пkj},$$

որտեղ՝ $M_{пkj}$ j-րդ տեսակի գնված բաղադրիչների քանակն է, հատ, $P_{пkj}$ j-րդ գնված բաղադրիչի գինը, դրամ: Հաշվարկի արդյունքները բերված են աղյուսակ 1-ում:

Աղյուսակ 1

Բաղադրիչի անվանումն ու տեսակը	Մեկ սարքին ընկնող քանակ.հատ	Միավորի գինը.դրամ	Մեկ սարքին ընկնող արժեք.դրամ
Գրիչ	1	100	100
Թուղթ	250	5	1250
Կրիչ	1	3500	3500
Համակարգիչ	1	300000	300000
Ինտերնետ	1	6000	6000
Ընդամենը			310850

Ընդամենը՝ 310850*100= 31085000դրամ:

3. Էլեկտրաէներգիայի ծախսի հաշվարկ

Ուժային սարքավորումները և հաստոցները աշխատեցնելու համար էլեկտաէներգիայի տարեկան ծախսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Է=W \cdot U_Է$$

որտեղ՝ W-ն էլեկտրաէներգիայի տարեկան ծախսն է, $U_Է$-ն 1 կվ/ժ էլեկտրաէներգիայի արժեքն է (40 դրամ, ըստ գործարանային գների)

$$W=N_{տհ}F_hK_բK_մ/Ղ_1Ղ_2$$

որտեղ՝ Nտհ.-ն հաստոցների էլեկտրաշարժիչների ընդհանուր հզորությունն է N=1կՎտ, F_h -ն հաստոցների աշխատաժամանակի տարեկան իրական ֆոնդն է - 25 օր, Kբ -ն հաստոցների բեռնվածության միջին գործակիցն է - 0.9, $K_մ$ –ն կորուստներն է ցանցում - 0.8, $Ղ_1$ -ը միաժամանակ աշխատող հաստոցների շարժիչի Օ.Գ.Գ. - 0.95, $Ղ_2$-ը շարժիչի Օ.Գ.Գ.-ն է - 0.9, Kբ.=0.9, Kմ =0.8, Ղ1=0.95, Ղ2=0.9, W=1000/0.95*0.9 = 1169,5կՎտ/ժ, Է= 1169,5*40≈46780 դրամ/ամսական և 46780*12=561360 դրամ/տարեկան:

4. Աշխատողների հիմնական աշխատավարձի հաշվարկը

Աշխատողների հիմնական աշխատավարձի մեջ մտնում են՝

- գործարքային դրույքաչափերով աշխատավարձ,

● ժամավճարային աշխատավարձ,

● պարգևավճար:

Գործարքային աշխատավարձն ըստ տարիֆային համակարգի որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Ա_{հիմ.} = Ժ_{դ.} * Ա_{արտ.},$$

որտեղ՝ $Ժ_{դ.}$-ն ժամային դրույքաչափն է, $Ա_{արտ.}$-ն արտադրանքի աշխատատարությունը, ժամային նորմը: Հաշվարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 2-ում:

Աղյուսակ 2

Գործառու-յթի հաջոր-դական.	Վճարման ձև	Աշխատանքի կարգը	Ժամանա-կային նորմ	Ժամային դրույք	Տարիֆային ֆոնդ
Նախապատ-րաստում	Գործարքա-պարգևա-վճարային	4	30	3500	105000
Մշակում	Գործարքա-պարգևա-վճարային	3	27	5000	135000
Կարգավորում	Գործարքա-պարգևա-վճարային	4	25	5000	125000
Տեղակայում	Գործարքա-պարգևա-վճարային	4	25	4500	112500
Ընդամենը					477500

Պարգևատրման չափը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Պ = Ա_{հիմ} * Պ_{դ}/100\%,$$

որտեղ՝ $Պ_{դ}$ -պարգևատրման դրույքաչափ, %

Պ = 477500*28/100% = 133700 դրամ:

Ընդամենը հիմնական աշխատավարձը կկազմի՝

477500+133700=611200 դրամ/ամսական կամ՝

611200 *12= 7334400 դրամ/տարեկան:

5. Աշխատողների լրացուցիչ աշխատավարձի հաշվարկը

Լրացուցիչ աշխատավարձի մեջ մտնում են՝ հերթական և լրացուցիչ գործողումների, արձակուրդների վճարները, պետական հանձնարարականների կատարման հետ կապված ծախսերը և այլն: Լրացուցիչ աշխատակիցների լրացուցիչ աշխատավարձը հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով`

$$Ա_{լր.} = ԸԱ_{հիմ.} * Ա_{լր.դ}/100,$$

որտեղ` $ԸԱ_{լր.դ}$ – Ընդհանուր հիմնական աշխատավարձն է, իսկ $Ա_{լր.դ}$-ն լրացուցիչ աշխատավարձի դրույքաչափն է,%:

$$Ա_{լր.} =(477500+133700)*16/100 = 97792 \text{ դրամ/ամսական կամ}$$

$$97792*12=1173504 \text{ դրամ/տարեկան:}$$

6. Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի հաշվարկը

Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի թվին են պատկանում ամորտիզացիոն, ընթացիկ վերանորոգման, տրանզիտորային միջոցների, գործիքների և հարմարանքների վերանորոգման և այլ ծախսերը: Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի թվին են պատկանում ամորտիզացիոն, ընթացիկ վերանորոգման, տրանզիստորային միջոցների, գործիքների և հարմարանքների վերանորոգման և այլ ծախսերը:

6.1 Հիմնական միջոցների ամորտիզացիա

Հիմնական արտադրական միջոցների տարեկան ամորտիզացիան ($Ա_Տ$) հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով`

$$Ա_Տ=Հ_Ս/Ն,$$

որտեղ $Հ_Ս$-ն հիմնական միջոցների սկզբնական արժեքն է, Ն-ն հիմնական միջոցների օգտակար գործունեության ժամկետն է:

Աղյուսակ 3

Հիմնական միջոցի անվանումն ու տեսակը	Հիմնական միջոցի սկզբնական արժեքը	Ամորտիզացիոն հատկացումներ	
		ՀՄ օգտակար գործողության ժամկետ, տարի	Ամորտիզացիոն ծախս
Արտադրական շենքեր, շինություններ	321 000 000	20	16050000
Սարքավորումներ	46 250 000	5	9250000
Ընդամենը			25300000

Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի գումարը որոշվում է հետևյալ կերպ՝

$$Ծ_{\text{պ.շ.}} = Ա_{\text{հիմ}} * Ծ_{\text{պ.շ.դ.}}/100,$$

որտեղ՝ $Ծ_{\text{պ.շ.դ.}}$ - սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի դրույքաչափն է, $Ա_{\text{հիմ.}}$–աշխատողների տարեկան հիմնական աշխատավարձը:

$$Ծ_{\text{պ.շ.}} =7334400* 0,024=176025.6 \text{ դրամ:}$$

Սարքավորումների ընթացիկ վերանորոգման ծախսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Ծ_{\text{ը.վ.}} = Ա_{\text{հիմ}} * Ծ_{\text{ը.վ.դ.}}/100,$$

որտեղ՝ $Ծ_{\text{ը.վ.դ.}}$ - սարքավորումների ընթացիկ վերանորոգման դրույքաչափն է:

$$Ծ_{\text{ը.վ.}} = 7334400 * 0,05=366720 \text{ դրամ:}$$

Աղյուսակ 4

Ծախսի անվանումը	Դրույքաչափը	Տարեկան ծախսը
Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսեր	2.4%	176025.6
Սարքավորումների ընթացիք վերանորոգում	5%	366720
Սարքավորումների ամորտիզացիա	-	25300000
Ընդամենը		25842745.6

7. Ընդհանուր և տնտեսական ծախսերի հաշվարկը

Ընդհանուր արտադրական ծախսերի մեջ մտնում են առանձին արտադրական կառույցների, ամորտիզացիոն, պահպանման և ընթացիկ վերանորոգման, խնայողությունների և հայտնագործությունների, վերահսկողական և այլ աշխատանքների հետ կապված ծախսերը: Այս ծախսերը որոշվում են հետևյալ բանաձևով՝

ԸԱԾ = $Ա_{հիմ}$* % ԸԱԾ/100,

որտեղ՝ % ԸԱԾ- Ընդհանուր արտադրական ծախսերի տոկոսն է %:

ԸԱԾ = 7334400*94/100 = 6894336 դրամ:

Ընդհանուր տնտեսավարման ծախսերի մեջ մտում են ձեռնարկության ընդհանուր կառավարման-ադմինիստրատիվ՝ գործարանը կառավարող անձնակազմի աշխատավարձի, գործուղման, տպագրական, փոստային-հեռագրային ծախսերը և այլ ծախսեր: Այն որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

ԸՏԾ = $Ա_{հիմ}$* %/ ԸՄԾ/100,

որտեղ՝ %ԸՏԾ - Ընդհանուր տնտեսավարման ծախսերի տոկոսն է %:

ԸՏԾ = 7334400*132/100 = 9681408 դրամ:

8.Վերադիր ծախսերի հաշվարկը

Վերադիր ծախսերի մեջ մտնում են փաթեթավորման, արտադրանքի տեղափոխման, գովազդի և այլ ծախսեր: Այն հաշվարկվում է հետևյալ կերպ՝

ԱԱԾ = $Ի_{ուծ.}$*% ԱԱԾ,

որտեղ՝ $Ի_{ուծ.}$ –ուղղակի ծախսերն են :

ԱԱԾ = 83780280*2,4/100 = 2010727 դրամ:

9. Սարքի ընդհանուր ինքնարժեքի կալկուլացիան

Լրիվ Ինքնարժեքի կալկուլացիան բերված է աղյուսակ 5-ում:

Աղյուսակ 5

N	Ծախսերի հոդվածի անվանումը	գումարը, դրամ
1.	Հումք և նյութերի ծախսի որոշումը	-
2.	Համալրող առարկաների ծախսի հաշվարկ	31085000

3.	Էլեկտրաէներգիայի ծախսի հաշվարկ	561360
4.	Հիմնական աշխատավարձի հաշվարկ	7334400
5.	Լրացուցիչ աշխատավարձի հաշվարկ	1173504
6.	Սարքավորումների պահպանման և շահագործման ծախսերի հաշվարկ	25842745.6
7.	Ընդհանուր և տնտեսական ծախսերի հաշվարկ	16575744
8.	Վերադիր ծախսերի հաշվարկ	2010727
	Լրիվ ինքնարժեք	84583480.6

Ծրագրային փաթեթի միավորի լրիվ ինքնարժեքը կկազմի՝

$Ի_{լրիվ}$=84583480.6/100=845834.81 դրամ:

9. Շահույթի և միավորի գնի հաշվարկը

Ծրագրային փաթեթի գնի հաշվարկը իրականացվում է արտադրական ծախսերին ուղված մեթոդով: Ձեռնարկության գինն իր մեջ ընդգրկում է ձեռնարկության շահույթն ու լրիվ ինքնարժեքը: Ձեռնարկության շահույթի հաշվարկն իրականացվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Շ = Ի_{լրիվ} * \%Շ/100,$$

որտեղ՝ $Ի_{լրիվ}$ – ծրագրային փաթեթի լրիվ ինքնարժեքն է, %Π – ձեռնարկության շահույթի դրույքաչափը, %

Շ = 845834.81 *17/100 = 143791.9177 դրամ.

Ձեռնարկության գնի հաշվարկը իրականացվում է հետևյալ կերպ՝

$$Գ_{ձեռ} = Ի_{լրիվ} + Շ;$$

$Գ_{ձեռ}$ = 845834.81 +143791.9177= 989626.7277 ≈ 989630 դրամ:

Ծրագրային փաթեթի բացթողնման գինը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$Գ_{բաց.} = Գ_{ձեռ} + ԱԱՀ,$$

որտեղ՝ $Գ_{բաց.}$– ծրագրային փաթեթի բացթողնման գինն է, ԱԱՀ-ն ավելացված արժեքի հարկը (20%):

$Գ_{բաց.}$ = 989630 + 989630*20/100 ≈ 1187556 դրամ:

Այսպիսով, կատարված հաշվարկների արդյունքում ստացանք, որ ծրագրային փաթեթի միավորի լրիվ ինքնարժեքը կկազմի 845834.81 դրամ, իսկ գինը՝ 1187556 դրամ:

Եզրակացություն

Դիտարկվել են մատրիցի սեփական բազմանդամի գործակիցների որոշման հետևյալ 4 մեթոդները.

- Լևերյեի,
- Ֆադդեևի,
- Կռիլովի,
- Դանիլևսկու:

Ալգորիթմների իրագործման ընթացքում կլորացման երևույթը ամբողջությամբ վերացնելու նպատակով ստեղծվել է «NumDenom» տիպը, որի շնորհիվ հնարավոր է դառնում մատրիցի տարրերը ներկայացնել սովորական կոտորակների տեսքով, ինչպես նաև սահմանվել են բոլոր թվաբանական գործողությունները՝ պահպանելով կոտորակների հետ թվաբանական գործողությունների համար սահմանված համապատասխան օրենքները: Սահմանվել են նաև կոտորակների համեմատման օրենքները, առանց որի անհնար կլիներ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար որոշելու խնդիրը Էվկլիդեսի ալգորիթմով իրականացնել: Պարզ է, որ կոտորակների հետ թվաբանական բոլոր գործողությունները կատարելով հնարավոր է դառնում ճշգրիտ լուծումների ստացումը, կամ որ նույնն է, մեքենայական կլորացման երևույթի բացառումը:

Կատարվել է նաև Լևերյեի ալգորիթմի 2-րդ իրականացումը, որը նախ հաշվել է A^k, k=2, …, m (որտեղ m=n/2, եթե n-ը զույգ է, և m=(n+1)/2, եթե n-ը կենտ է) մատրիցները, իսկ այնուհետև $A^{(m+1)}$, $A^{(m+2)}$, … A^n մատրիցների անկյունագծային տարրերը՝ չհաշվելով ոչ անկյունագծայինները, որն էլ հենց պայմանավորում է հաշվարկների ծավալի կրճատումը: Սակայն մատրիցների կիրառված չափերի դեպքում տարբերությունը չնչին է ալգորիթմի իրականացման արագության տեսանկյունից: Չի բացառվում, որ շատ ավելի մեծ չափերով մատրիցների դեպքում տարբերությունը կլինի շոշափելի:

Թեև վերոհիշյալ ալգորիթմները «NumDenom» տիպի տվյալների դեպքում մի քանի անգամ դանդաղագործ են համեմատած «double» տիպի տվյալների դեպքում նույն ալգորիթմների աշխատանքի, ինչպես նաև արագության տեսանկյունից շատ անգամ զիջում են MatLab և WolframAlpha ծրագրայի փաթեթներին դիտարկված խնդիրը լուծելու հարցում, այնուամենայնիվ բազմաթիվ վատ պայմանավորված մատրիցների դեպքում, ի տարբերություն MatLab և WolframAlpha ծրագրային փաթեթների կամ սույն ալգորիթմների «double» տիպով իրականացման դեպքի, ստացվում են ճշգրիտ արդյունքներ՝ կոտորակային տեսքով, որոնք կարող են ներկայացվել տասնորդական կոտորակներով օգտագործողի կողմից որոշվող նիշերի ճշտությամբ:

Կարևոր է նաև մեկ այլ առանձնահատկություն՝ տիպի գերլցման խնդիրը, քանի որ որպես «NumDenom» տիպի բաղադրիչներ՝ համարիչ և հայտարար, հիշողության մեջ պահելու համար չեն օգտագործվել C++ ծրագրավորմանն լեզվի կողմից առաջարկվող հիմնական տիպերը, այլ ստեղծել եմ նոր՝ «BigInteger» տիպը, որի հիմքում ընկած է հետևյալ գաղափարը.

- ամբողջ թիվ կազմող յուրաքանչյուր թվանշան ներկայացվում է որպես միաչափ զանգվածի տարր,
- թվաբանական գործողությունները կատարվում են միաչափ զանգվածների տարրերի հետ՝ պահպանելով գործողությունների համար սահմանված համապատասխան օրենքները,

«BigInteger» տիպի համար սահմանել եմ նաև թվերի համեմատման օպերատորները, առանց որոնց անհնար կլիներ «NumDenom» տիպով պահվող տվյալների դեպքում վերը նշված մեթոդների ալգորիթմացումը: Ակներև է այն հանգամանքը, որ «NumDenom» տիպի գերլցման երևույթը կախված է միայն օպերատիվ հիշողության ծավալից:

Գրականության ցանկ

1. Սիմոնյան Ս. Հ. Հաշվողական մեթոդների կիրառական տեսություն: ՀՊՃՀ: Երևան, 2009: 202 էջ:
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том 2. М.: Физматлит, 1959, 620с.
3. Бьёрн Страуструп "Язык программирования C++", Бином, 2004, 369 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 5-е изд. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
5. Джесс Либерти, Брэдли Л. Джонс "Освой самостоятельно C++ за 21 день", 819 с.
6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. Часть I. Минск, “Вышэйшая школа ”: 1972, 584стр.
7. Лафоре Р."Объектно-ориентированное программирование в C++"
8. Лузин Н. Н., “О методе академика А. Н. Крылова составления векового уравнения”, Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук, 1931, № 7, 903–958
9. Стенли Б. Липпман, Жози Лажойе, Барбара Э. Му "Язык программирования C++. Базовый курс" (5-е издание)
10. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970, 564 с.
11. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры
12. Bruce Eckel "Thinking in C++"
13. The Art of Computer Programming, 1: Fundamental Algorithms (3rd ed.), Addison-Wesley Professional, ISBN 0-201-89683-4.
14. The Art of Computer Programming, 2: Seminumerical Algorithms (3rd ed.), Addison-Wesley Professional, ISBN 0-201-89684-2.
15. The Art of Computer Programming, 3: Sorting and Searching (2nd ed.), Addison-Wesley Professional, ISBN 0-201-89685-0.
16. The Art of Computer Programming, 4A: Combinatorial Algorithms, Addison-Wesley Professional, ISBN 0-201-03804-8.
17. http://www.cleverstudents.ru/
18. http://mathhelpplanet.com/
19. http://www.mathnet.ru/
20. http://www.mathprofi.ru/
21. https://matrixcalc.org/

Հավելված