数值传热问题

算法框架

以下所称的边界点均为实际存在的控制点，而非虚控制点

输入

考虑三种输入情况

- 所有边界控制点均为第一类边界条件
- 所有边界控制点均为第二类边界条件
- 边界点随机第一类或者第二类边界条件

如何存储边界条件数据

- 存储为8个vec放在一个hdf5文件中，4个size=n的u的vec，4个size=n的h的vec，默认边界u,h条件不随时间变化
- 存储初始温度为n^2的vec

如何判断该边界点为哪种边界条件?

- 计算算该边界点对应的系数矩阵元素时，考察他们的（是否为0是否不为0是否同时为0是否同时不为0）值然后来计算，系数矩阵规模为n^2

```
bb =    IP.f * IP.dt / (IP.rho * IP.c) + \
U1 * 2 * IP.k * (pow(IP.dt,2)) / (pow(IP.rho,2) * pow(IP.c,2) * (pow(IP.dl,4))) + \
U2 * 2 * IP.k * (pow(IP.dt,2)) / (pow(IP.rho,2) * pow(IP.c,2) * (pow(IP.dl,4))) + \
H1 * IP.dt / (IP.rho * IP.c * pow(IP.dl,2)) + \
H2 * IP.dt / (IP.rho * IP.c * pow(IP.dl,2));   \

printf("dt : %g\n",IP.dt);
printf("dl : %g\n",IP.dl);
printf("rho : %g\n",IP.rho);
printf("c : %g\n",IP.c);
printf("k : %g\n",IP.k);
printf("f : %g\n",IP.f);
printf("U1 : %g\n",U1);
printf("U2 : %g\n",U2);
printf("H1 : %g\n",H1);
printf("H2 : %g\n",H2);
printf("bb : %g\n",bb);
printf("\n");
VecSetValue(b,r,bb,INSERT_VALUES);
```

计算

- 设置时间步长为Δt，空间步长长宽相等为$\Delta x=\Delta y=\Delta l$，$\rho$，$c$，$k$ 均为已知进行设置

  -n 10 -dt 10 -dl 0.1 -rho 100 -c 1000 -k 10 -f 0 -maxIts 100

- 计算系数矩阵，为稀疏矩阵，最多有5个对角线有值

- 系数矩阵A
- 对于内部点，系数矩阵对应行有5个值，分别关联本身和周围4个点，对于该内部点对应的系数矩阵的行，值分别为$W\ E\ N\ S\ U$，整个迭代过程系数矩阵是不变的
- 系数矩阵具体计算过程（内部点和边界点）
  - 对于显式

$$u_P^{T+1} = Wu_W^T + Eu_E^T + Nu_N^T + Su_S^T + Pu_p^T + B$$
$$(u^{T+1} = Au^T + s)$$

$$W = \frac{a_W^0}{a_P^1} = \frac{k\Delta t}{\rho c\Delta^2 l} \qquad E = \frac{a_E^0}{a_P^1} = \frac{k\Delta t}{\rho c\Delta^2 l}$$
$$N = \frac{a_N^0}{a_P^1} = \frac{k\Delta t}{\rho c\Delta^2 l} \qquad S = \frac{a_S^0}{a_P^1} = \frac{k\Delta t}{\rho c\Delta^2 l}$$
$$P = \frac{a_P^0}{a_P^1} = 1 - 4\times\frac{k\Delta t}{\rho c\Delta^2 l} \qquad B = \frac{b}{a_P^1} = \frac{f\Delta t}{\rho c}$$
$$\text{如果遇到边界，对应项直接清零}(\text{系数矩阵中也没有它边界系数的位置})$$
$$\text{对于边界特别计算：} P = 1 - (N_i + 2N_u)\frac{k\Delta t}{\rho c\Delta^2 l}$$
$$B = \frac{f\Delta^2 l + \sum h}{\frac{\rho c\Delta^2 l}{\Delta t}} + 2\sum(Xu_X)$$
$$N_1, N_2\text{分别是该点条件数量 }: B = \frac{f\Delta t}{\rho c} + 2\sum_{i=1,2}\frac{k\Delta t}{\rho c\Delta^2 l}U_i + \sum_{i=1,2}\frac{\Delta t}{\rho c\Delta^2 l}H_i$$

$$!\text{注释：}$$
$$\text{第一类边界：计算得到的该项直接乘以}2\text{后移给}s\text{作为热源}(\text{因为边界的}\delta\text{只有一半})$$
$$\text{第二类边界：直接加热流项，有几条边相邻加几个对应的给}b$$

  - 对于隐式

$$Pu_P^{T+1}-Wu_W^{T+1}-Eu_E^{T+1}-Nu_N^{T+1}-Su_S^{T+1}=u_P^T+B$$
$$(Au^{T+1}=u^T+s)$$

$$W=\frac{a_W^1}{a_P^0}=\frac{k\Delta t}{\rho c\Delta^2 l}\qquad E=\frac{a_E^1}{a_P^0}=\frac{k\Delta t}{\rho c\Delta^2 l}$$
$$N=\frac{a_N^1}{a_P^0}=\frac{k\Delta t}{\rho c\Delta^2 l}\qquad S=\frac{a_S^1}{a_P^0}=\frac{k\Delta t}{\rho c\Delta^2 l}$$
$$P=\frac{a_P^1}{a_P^0}=1+\frac{4k\Delta t}{\rho c\Delta^2 l}\qquad B=\frac{b}{a_P^0}=\frac{f\Delta t}{\rho c}$$
$$\text{如果遇到边界，对应项直接清零(系数矩阵中也没有它边界系数的位置)}$$
$$\text{特别计算：}B=\frac{f\Delta^2 l+\sum h+2\sum(Xu_X)}{\frac{\rho c\Delta^2 l}{\Delta t}}$$
$$N_1,N_2\text{分别是该点条件数量 }:B=\frac{f\Delta t}{\rho c}+2N_1\frac{k\Delta^2 t}{\rho^2c^2\Delta^4 l}U+N_2\frac{1\Delta t}{\rho c\Delta^2 l}H$$

$$!\text{注释：}$$
$$\text{第一类边界：计算得到的该项直接乘以2后移给}s\text{作为热源(因为边界的}\delta\text{只有一半)}$$
$$\text{第二类边界：直接加热流项，有几条边相邻加几个对应的给}b$$

  - 如果处于边界，矩阵中没有边界系数的位置，所以作为热源项，放入 b 中，
  - 对于边界点第一类边界，计算时注意δ只按一半算，对应行只有3~4个值的位置，边界值按热源算放b中
  - 对于边界点第二类边界，计算时只有3个或者4个值，热流放右向量b中
- 迭代计算
  - 对于显式现在我们有系数矩阵A，T_0时刻的已知温度 u_0 ，可以根据$u_1=Au_0+s$ 来计算 T_1 时刻的温度
  - 对于隐式现在我们有系数矩阵A，T_0时刻的已知温度 u_0 ，可以求解$Au_1=u0+s$ 来计算 T_1 时刻的温度
  - 整个迭代过程中A 和 b 是不变的

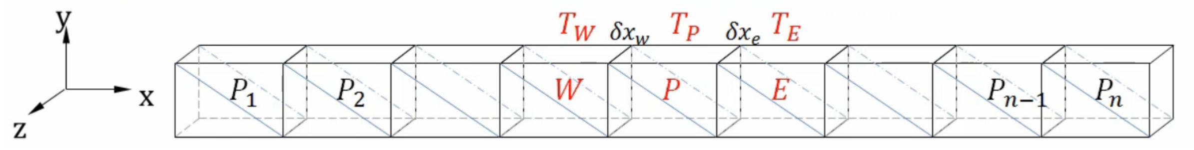
生成输入

- 指定4个边界均为指定g（-gl 10 -gr 20 -gt 30 -gb 50）
- 指定4个边界均为指定h (-hl...)
- 指定4个边界均为随机值g（-gl = -1)
- 指定4个边界均为随机值h (-l = -1)
- 指定4个边界均为随机g or h值 (-rdm = 1)
- 指定f值 (-f =10)
- 指定u0值 (-u0 = 300)
-

数学推导

在边界处，计算系数时，δ 是内部值的一半

显式一维问题



$$\rho c(T_p^1 - T_p^0)\Delta x = k(\frac{T_E^0 - T_P^0}{\delta x_e} - \frac{T_P^0 - T_W^0}{\delta x_w})\Delta t + f\Delta x\Delta t$$

$$a_P^1 T_P^1 = a_E^0 T_E^0 + a_W^0 T_W^0 + a_P^0 T_P^0 + f\Delta x$$

$$a_P^1 = \frac{\rho c\Delta x}{\Delta t}$$

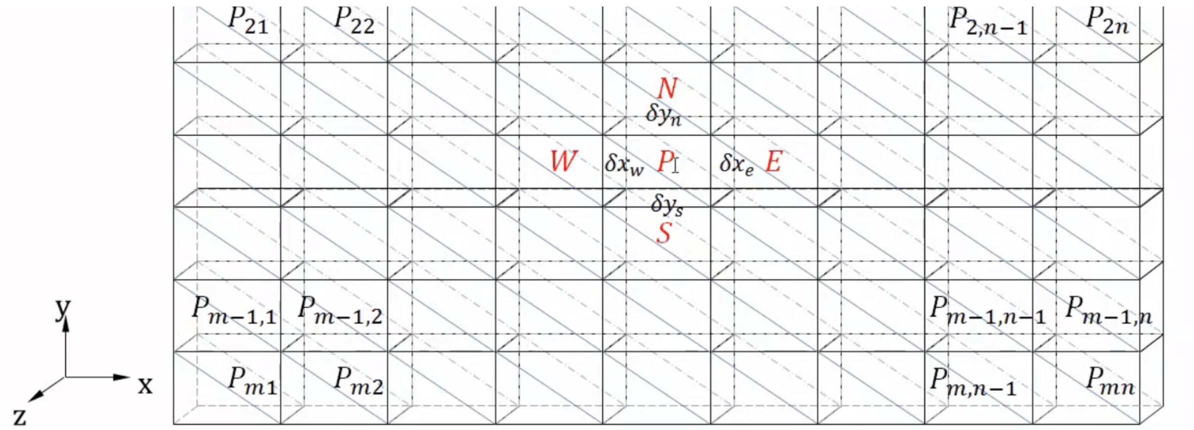
$$a_E^0 = \frac{k}{\delta x_w}$$

$$a_W^0 = \frac{k}{\delta x_e}$$

$$a_P^0 = \frac{\rho c\Delta x}{\Delta t} - \frac{k}{\delta x_e} - \frac{k}{\delta x_w}$$

$$We\ have:\ a_p^1 = a_E^0 + a_W^0 + a_P^0$$

显式二维问题



$$\rho c\Delta x\Delta y(T_p^1 - T_p^0) = k(\frac{T_E^0 - T_P^0}{\delta x_e} - \frac{T_P^0 - T_W^0}{\delta x_w})\Delta y\Delta t + k(\frac{T_N^0 - T_P^0}{\delta y_n} - \frac{T_P^0 - T_S^0}{\delta y_s})\Delta x\Delta t + f\Delta x\Delta y\Delta t$$

$$a_P^1 T_P^1 = a_E^0 T_E^0 + a_W^0 T_W^0 + a_N^0 T_N^0 + a_S^0 T_S^0 + a_P^0 T_P^0 + b$$

$$b = f\Delta x\Delta y$$

$$a_P^1=\frac{\rho c\Delta x\Delta y}{\Delta t}$$
$$a_E^0=\frac{k\Delta y}{\delta x_w}$$
$$a_W^0=\frac{k\Delta y}{\delta x_e}$$
$$a_N^0=\frac{k\Delta x}{\delta y_n}$$
$$a_S^0=\frac{k\Delta x}{\delta y_s}$$
$$a_P^0=\frac{\rho c\Delta x\Delta y}{\Delta t}-\frac{k\Delta y}{\delta x_w}-\frac{k\Delta y}{\delta x_e}-\frac{k\Delta x}{\delta y_n}-\frac{k\Delta x}{\delta y_s}$$
$$We\ have:\ a_p^1=a_E^0+a_W^0+a_N^0+a_S^0+a_P^0$$

隐式二维问题

$$\rho c\Delta x\Delta y(T_p^1-T_p^0)=k(\frac{T_E^1-T_P^1}{\delta x_e}-\frac{T_P^1-T_W^1}{\delta x_w})\Delta y\Delta t+k(\frac{T_N^1-T_P^1}{\delta y_n}-\frac{T_P^1-T_S^1}{\delta y_s})\Delta x\Delta t+f\Delta x\Delta y\Delta t$$
$$a_P^1T_P^1=a_E^1T_E^1+a_W^1T_W^1+a_N^1T_N^1+a_S^1T_S^1+a_P^0T_P^0+b$$
$$b=f\Delta x\Delta y$$
$$a_E^1=\frac{k\Delta y}{\delta x_w}$$
$$a_W^1=\frac{k\Delta y}{\delta x_e}$$
$$a_N^1=\frac{k\Delta x}{\delta y_n}$$
$$a_S^1=\frac{k\Delta x}{\delta y_s}$$
$$a_P^0=\frac{\rho c\Delta x\Delta y}{\Delta t}$$
$$a_P^1=\frac{\rho c\Delta x\Delta y}{\Delta t}+\frac{k\Delta y}{\delta x_w}+\frac{k\Delta y}{\delta x_e}+\frac{k\Delta x}{\delta y_n}+\frac{k\Delta x}{\delta y_s}$$
$$We\ have:\ a_p^1=a_E^1+a_W^1+a_N^1+a_S^1+a_P^0$$

第一类边界条件

边界值给出边界温度，即虚控制体的题温度，根据以上公式即可求解

计算系数矩阵时，注意由于边界虚控制体的中心在边界面上，所以 δ 是内部点的一半

计算完边界值，作为热源放入方程中！！！！！

第二类边界条件显式

对于二维边界的左边界值

$$由于\ h=k\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$有\ \rho c\Delta x\Delta y(T_p^1-T_p^0)=(k\frac{T_E^0-T_P^0}{\delta x_e}+h_w)\Delta y\Delta t+k(\frac{T_N^0-T_P^0}{\delta y_n}-\frac{T_P^1-T_S^1}{\delta y_s})\Delta x\Delta t+f\Delta x\Delta y\Delta t$$

$$a_P^1T_P^1 = a_E^0T_E^0 + a_W^0T_W^0 + a_N^0T_N^0 + a_S^0T_S^0 + a_P^0T_P^0 + b$$
$$b = f\Delta x\Delta y + h_w; \qquad h_w\text{可以随时间变化，也可以是常量}$$
$$a_P^1 = \frac{\rho c\Delta x\Delta y}{\Delta t}$$
$$a_E^0 = \frac{k\Delta y}{\delta x_w}$$
$$a_W^0 = 0$$
$$a_N^0 = \frac{k\Delta x}{\delta y_n}$$
$$a_S^0 = \frac{k\Delta x}{\delta y_s}$$
$$a_P^0 = \frac{\rho c\Delta x\Delta y}{\Delta t} - \frac{k\Delta y}{\delta x_w} - \frac{k\Delta x}{\delta y_n} - \frac{k\Delta x}{\delta y_s}$$
$$We\ have:\ a_p^1 = a_E^0 + a_W^0 + a_N^0 + a_S^0 + a_P^0$$

上下左右边界同理

对于顶点，若所在的两个边界都是第二类边界，即接受两个热流流入

例如 左上角

$$\text{有}\ \rho c\Delta x\Delta y(T_p^1 - T_p^0) = (k\frac{T_E^0 - T_P^0}{\delta x_e} + h_w)\Delta y\Delta t + (kh_n - \frac{T_P^1 - T_S^1}{\delta y_s})\Delta x\Delta t + f\Delta x\Delta y\Delta t$$
$$a_P^1T_P^1 = a_E^0T_E^0 + a_W^0T_W^0 + a_N^0T_N^0 + a_S^0T_S^0 + a_P^0T_P^0 + b$$
$$b = f\Delta x\Delta y + h_w + h_n; \qquad h_w, h_n\text{可以随时间变化，但本项目用常量}$$
$$a_P^1 = \frac{\rho c\Delta x\Delta y}{\Delta t}$$
$$a_E^0 = \frac{k\Delta y}{\delta x_w}$$
$$a_W^0 = 0$$
$$a_N^0 = 0$$
$$a_S^0 = \frac{k\Delta x}{\delta y_s}$$
$$a_P^0 = \frac{\rho c\Delta x\Delta y}{\Delta t} - \frac{k\Delta y}{\delta x_w} - \frac{k\Delta x}{\delta y_s}$$
$$We\ have:\ a_p^1 = a_E^0 + a_W^0 + a_N^0 + a_S^0 + a_P^0$$

第二类边界条件隐式

$$\text{有}\ \rho c\Delta x\Delta y(T_p^1 - T_p^0) = (k\frac{T_E^1 - T_P^1}{\delta x_e} + h_w)\Delta y\Delta t + k(\frac{T_N^1 - T_P^1}{\delta y_n} - \frac{T_P^1 - T_S^1}{\delta y_s})\Delta x\Delta t + f\Delta x\Delta y\Delta t$$
$$a_P^1T_P^1 = a_E^1T_E^1 + a_W^1T_W^1 + a_N^1T_N^1 + a_S^1T_S^1 + a_P^0T_P^0 + b$$
$$b = f\Delta x\Delta y + h_e + h_w + h_n + h_s(h\text{最多只有两个非零项})$$

$$a_E^1 = \frac{k\Delta y}{\delta x_w}$$

$$a_W^1 = \frac{k\Delta y}{\delta x_e}$$

$$a_N^1 = \frac{k\Delta x}{\delta y_n}$$

$$a_S^1 = \frac{k\Delta x}{\delta y_s}$$

$$a_P^0 = \frac{\rho c\Delta x\Delta y}{\Delta t}$$

$$a_P^1 = \frac{\rho c\Delta x\Delta y}{\Delta t} + \frac{k\Delta y}{\delta x_w} + \frac{k\Delta y}{\delta x_e} + \frac{k\Delta x}{\delta y_n} + \frac{k\Delta x}{\delta y_s}$$

$$We\ have:\ a_p^1 = a_E^1 + a_W^1 + a_N^1 + a_S^1 + a_P^0$$