Arbeitsblatt: Modulo-Rechnen

Ersetzt man beim Caesar-Code die Buchstaben durch Zahlen und beginnt für A bei 3, so wird B durch 4 ersetzt usw. Was passiert mit Y und Z? Eigentlich müsste dann Y mit 27 und Z mit 28 verschlüsselt werden. Tatsächlich wird Y mit 1 verschlüsselt und Z mit 2. Y entspricht also der 1 und Z entspricht der 2, aber auch der 27 und der 28. Für diese beiden Buchstaben nimmt man also den Rest, den man erhält, wenn man durch 26 (Anzahl der Buchstaben im Alphabet) dividiert. (Buchstabe 27 und 28 existieren ja nicht). Dies ist ein Beispiel für das sogenannte “Rechnen modulo 26”. Man schreibt dafür auch: $\boxed{27 \bmod 26 = 1}$. Dies heißt, wenn wir 27 durch 26 teilen, erhalten wir den Rest 1. Entsprechend ist $28 \bmod 26 = 2$, denn $28 : 26 = 1$ Rest 2.

Weitere Beispiele:

$$\begin{array}{rlrlr} 19 \bmod 4 = 3\ , & \text{denn} & 19 : 4 = 4 \text{ Rest } 3 & \text{oder} & 19 = 4 \cdot 4 + 3\ , \\ 5 \bmod 3 = 2\ , & \text{denn} & 5 : 3 = 1 \text{ Rest } 2 & \text{oder} & 5 = 1 \cdot 3 + 2\ , \\ 17 \bmod 6 = 5\ , & \text{denn} & 17 : 6 = 2 \text{ Rest } 5 & \text{oder} & 17 = 2 \cdot 6 + 5\ . \end{array}$$

Dies kann man auch allgemein definieren:

Definition: Teilt man eine natürliche Zahl a durch eine natürliche Zahl m, so erhält man einen Rest r. Für diesen Rest gilt $0 \leq r \leq m-1$. Die sogenannte Modulo-Funktion liefert zu gegebenen Zahlen a und m gerade diesen Rest r. Man schreibt auch:

$$a \bmod m = r\ .$$

Aufgaben:

1. Berechne
   a) 27 mod 4 b) 26 mod 5 c) 18 mod 3 d) 18 mod 7 e) 21 mod 9
   f) 37 mod 10 g) 100037 mod 10 h) 107 mod 4 i) 1 mod 2 j) 3 mod 2

2. (a) Es sei k irgendeine gerade Zahl. Berechne k mod 2.
   (b) Es sei k irgendeine ungerade Zahl. Berechne k mod 2.
   (c) Berechne 34 mod 4.
   (d) Berechne 134 mod 4.

3. (a) Vergleiche $25 \bmod 4$ und $(20 \bmod 4 + 5 \bmod 4) \bmod 4$
   (b) Vergleiche $25 \bmod 4$ und $(19 \bmod 4 + 6 \bmod 4) \bmod 4$
   (c) Vergleiche $26 \bmod 4$ und $(2 \bmod 4 \cdot 13 \bmod 4) \bmod 4$
   (d) Vergleiche $7^3 \bmod 4$ und $(7 \bmod 4)^3 \bmod 4$
   Dies sind Beispiele für die folgenden allgemeinen Regeln beim Modulo-Rechnen:

$$\begin{aligned} (a+b) \bmod m &= (a \bmod m + b \bmod m) \bmod m \\ (a-b) \bmod m &= (a \bmod m - b \bmod m) \bmod m \\ (a \cdot b) \bmod m &= (a \bmod m \cdot b \bmod m) \bmod m \\ (a^b) \bmod m &= (a \bmod m)^b \bmod m \end{aligned}$$

4. (a) Es sei n irgendeine natürliche Zahl, die mit den Ziffern $\ldots 34$ endet. Berechne $n \bmod 4$.
   (b) Wie kann man leicht überprüfen, ob eine Zahl durch 4 teilbar ist?

5. Es ist 10 Uhr am Vormittag (Mittwoch) und du hast in 50 Stunden einen Termin beim Zahnarzt und in 70 Stunden einen Computerkurs. Wann finden die Termine statt?