1. Приведите, если это возможно, пример множества A и отношения $R \subseteq A^2$, таких что R

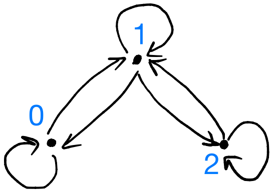
а) рефлексивно, симметрично, не транзитивно;

б) антисимметрично, транзитивно, не рефлексивно;

в) симметрично, транзитивно, не рефлексивно.

Множество A ={0,1,2}

а)

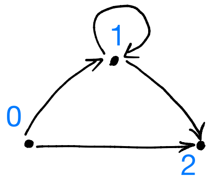


Рефлексивность: (0,0),(1,1),(2,2)∈R

Симметричность: (0,1),(1,0)∈R, (2,1),(1,2)∈R

Не транзитивность: (0,1),(1,2)∈R, но (0,2)∉R

б)

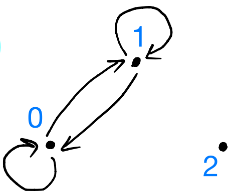


Антисимметричность: нет двойных стрелок

Транзитивность: (0,1),(1,2),(0,2)∈R, других путей между тремя точками из двух стрелок нет

Не рефлексивность: (0,0)∉R

в)



Симметричность: (0,1),(1,0)∈R

Транзитивность: (0,1),(1,0),(0,0),(1,1)∈R

Не рефлексивность: (2,2)∉R

2. Если P и Q иррефлексивны, то $P \cup Q$, $P \cap Q$ и P^{-1} таковы же.

1. Пусть PUQ = R не иррефлексивно, тогда ∃ x: (x,x)∈R. Т.к. R = PUQ, (x, x) б.о.о∈P. Но для P верно ∀x (x,x)∉P ⇒ противоречие, PUQ иррефлексивно.

2. Пусть P⋂Q = R не иррефлексивно, тогда ∃x: (x,x)∈R. Т.к. R = P⋂Q, (x,x)∈P. Но для P верно ∀x (x,x)∉P ⇒ противоречие, P⋂Q иррефлексивно.

3. Пусть P^-1 = R не иррефлексивно, тогда ∃x: (x,x)∈R. Т.к. R = P^-1, «перевернутая» пара (x,x)∈P. Но для P верно ∀x (x,x)∉P ⇒ противоречие, P^-1 иррефлексивно.

3*. Для любого ч. у. м. $\mathcal{A} = (A, \leq)$ найдется множество $S \subseteq \mathcal{P}(A)$, такое что $\mathcal{A} \cong (S, \subseteq)$. (Т. е. каждое ч. у. м. изоморфно некоторому семейству своих подмножеств, упорядоченному по включению.)

Определим гомоморфизм f: A -> P(A), который каждому элементу x∈A сопоставляет множество, содержащее все элементы A, меньшие или равные x

Тогда ∀x,y∈ A: x≤y f(x) = {x'∈A| x'≤x}, f(y) = {y'∈A| y'≤y}, при этом ∀x': x'≤x & x≤y => x'≤y => {x'∈A| x'≤x}⊆{y'∈A| y'≤y} => f(x)⊆f(y) => f уважает порядок => это изоморфизм, и искомое множество S получается применением f ко всем элементам A.

4. Найдите в ч. у. м. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ непустую цепь, где нет ни наибольшего, ни наименьшего элемента.

Цепь подразумевает сравнимость всех элементов, отсутствие наибольшего и наименьшего требует существования большего и меньшего элементов для каждого элемента. Такое может выполняется, если последовательность элементов уходит на бесконечность в обе стороны (как целые числа, например). Тогда за 0 возьмём какое-либо счетное подмножество N, чтобы к нему до бесконечности можно было прибавлять числа из N как элементы и убирать их же (например нечетные натуральные числа, обозначим как О, для «отрицательных» элементов будем исключать из него нечетные числа, для «положительных» элементов будем добавлять к нему четные числа).

Такая цепь будет выглядеть так:

... (О без 5, без 3, без 1), (О без 3, без 1), (О без 1), О, (О с 0), (О с 0, с 2), (О с 0, с 2, с 4),...

Очевидно, что каждый элемент имеет меньший и больший его, все элементы сравнимы, при этом так как элементов и с той и с другой стороны бесконечно много, нет ни наибольшего, ни наименьшего элемента цепи => это искомая цепь

5. Пусть в ч. у. м. $\mathcal{A} = (A, <)$ множество конечно A и $\max_< A = \{x\}$. Докажите, что элемент x наибольший в A.

max<A = {x} <=> x ∈ A & ∀ y ∈ A x ≮ y

x наибольший в A <=> x ∈ A & ∀ y ∈ A y ≤ x

Предположим, что x - не наибольший <=> тогда в A ∃y: y>x | x и y несравнимы

Первый случай противоречит x ∈ max<A, а при втором y входил бы в max<A, но оно состоит только из x => противоречие => посылка неверна, x - наибольший в A

6. Явно определите какой-либо *линейный* порядок на множестве $\mathbb{R}^2$.

a, b ∈ R^2, a = (xa, ya), b = (xb, yb). Определим сравнение так:

a = b <=> (ya = yb) & (xa = xb)

a < b <=> (ya < yb) | ((ya = yb) & (xa < xb))

a > b <=> (ya > yb) | ((ya = yb) & (xa > xb))

Таким образом любая пара чисел равна только себе, и любые две пары сравнимы.

Докажем транзитивность: a, b, c, a > b, b > c

=> ((ya > yb) | ((ya = yb) & (xa > xb))) & (yb > yc) | ((yb = yc) & (xb > xc)))

=> (ya > yb) & (yb > yc) | (ya > yb) & (yb = yc) & (xb > xc) | (ya = yb) & (xa > xb) & (yb > yc) | (ya = yb) & (xa > xb) & (yb = yc) & (xb > xc)

=> ya > yc | ya > yc | ya > yc | (ya = yc) & (xa > xc) => a > c - верно.

Остальное доказывается аналогично. Следовательно это порядок.

7*. Рассмотрим ч. у. м. $\mathcal{A} = ((-1,1), \leqslant)$ и $\mathcal{B} = ((-1,0) \cup (0,1), \leqslant)$, где $\leq$ означает естественный порядок вещественных чисел (ограниченный на соответствущее подмножество, например, на интервал $(-1,1) \subseteq \mathbb{R}$ в первом случае). Докажите, что $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$. (*Могут пригодиться сведения из курса анализа.*)

Представим такой изоморфизм как функцию f: A->B
Она должна обладать определенными свойствами:
- для сохранения обоих порядков она должна быть монотонной неубывающей,
- должна быть биективной, так как изоморфизм - взаимоодназначное соответствие
- $\lim_{x\to-1+0} f(x) = -1$, $\lim_{x\to1-0} f(x) = 1$ по предыдущим условиям

Рассмотрим возможность существования такой функции. По теореме Коши о промежуточных значениях функции непрерывной на интервале (у нас (-1,1)), она должна принимать все промежуточные значения между $f(-1)$ и $f(1)$, в т.ч. 0, но $\nexists a \in A$: f(a) = 0, т.к. $0 \notin B$ => противоречие, f не может существовать, а так как мы не добавляли к ее свойствам ничего, что не требуется от изоморфизма, это значит, что изоморфизм между A и B $\nexists$ => A $\not\cong$ B

8. Отношение S на множестве $\mathbb{N}^2$ обладает следующим свойством: $(a,b)S(c,d) \iff (ad = bc$ и $b \neq 0 \neq d)$ или $(a = c$ и $b = 0 = d)$. Верно ли, что S — отношение эквивалентности?

Проверим свойства отношения эквивалентности:

Рефлексивность
(a,b)S(a,b) <=> ab=ab & b≠0 | a=a & b=0 <=> b≠0 | b=0 верно

Транзитивность
(a,b)S(c,d) & (c,d)S(e,f) => (a,b)S(e,f) <=>
(ad=bc & b≠0≠d | a=c & b=0=d) & (cf=de & f≠0≠d | e=c & f=0=d) => (af=be & b≠0≠f | a=e & b=0=f) <=>
(ad=bc & cf=de & b≠0≠d≠f | ... | ... | a=c & e=c & b=0=d=f) => (af=be & b≠0≠f | a=e & b=0=f) <=> (c=ad/b=de/f & b≠0≠d≠f | a=c=e & b=0=d=f) => (af=be & b≠0≠f | a=e & b=0=f) <=>
(a/b=e/f & b≠0≠f | a=e & b=0=f) => (af=be & b≠0≠f | a=e & b=0=f) <=>

!(af=be & b≠0≠f | a=e & b=0=f) | (af=be & b≠0≠f | a=e & b=0=f) верно

Симметричность
(a,b)S(c,d) & (c,d)S(a,b) <=>
(ad=bc & b≠0≠d | a=c & b=0=d) & (cb=da & b≠0≠d | a=c & b=0=d) <=>
ad=bc & b≠0≠d & cb=da & b≠0≠d | ad=bc & b≠0≠d & a=c & b=0=d |
a=c & b=0=d & cb=da & b≠0≠d | a=c & b=0=d & a=c & b=0=d <=>

ad=bc & b≠0≠d | a=c & b=0=d <=> (a,b)S(c,d) верно

Ответ: S - отношение эквивалентности

9. Пусть R — бинарное отношение на множестве A. Когда R является и частичным порядком, и отношением эквивалентности одновременно?

Вспомним требования к порядкам и отношению эквивалентности:
Строгий частичный порядок: иррефлексивность, транзитивность
Нестрогий частичный порядок: рефлексивность, транзитивность, антисимметричность
Эквивалентность: рефлексивность, транзитивность, симметричность

Таким образом, если R - строгий порядок и отношение эквивалентности, то выполнено
$\forall x\ (x,x)\in R\ \&\ \forall x\ (x,x)\notin R \Rightarrow \nexists x \Rightarrow A = \varnothing$

Если R - нестрогий порядок и отношение эквивалентности, то выполнено
$(\forall x,y\ (x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R)\ \&\ ((x,y),(y,x)\in R \Rightarrow x=y) \Rightarrow (x,y)\in R \Rightarrow x=y$

Ответ: строгий порядок, являющийся отношением эквивалентности, существует только на пустом множестве, а нестрогий порядок, являющийся отношением эквивалентности, устроен так, что любой элемент множества сравним только с собой (на графе это бы выглядело как отдельные точки с петлями в себя).

10*. Отношение E на множестве $2^{\mathbb{N}}$ определяется так: fEg тогда и только тогда, когда $f = g \circ \sigma$ для некоторой биекции $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (т.е. f является перестановкой последовательности g). Докажите, что:

а) E — отношение эквивалентности;

б) множество $2^{\mathbb{N}}/E$ счетно.

а) проверим свойства отношения эквивалентности:

Симметричность
$fEg \Leftrightarrow f=g\circ\partial \Leftrightarrow g=f\circ\partial^{-1}$ (так как ∂ - биекция, то и ∂^{-1} тоже) $\Leftrightarrow gEf$ верно

Рефлексивность
$f=f\circ id \Leftrightarrow fEf$ верно

Транзитивность
$fEg\ \&\ gE\mu \Leftrightarrow f=g\circ\partial\ \&\ g=\mu\circ\partial' \Leftrightarrow f=\mu\circ\partial\circ\partial'$ (∂,∂' - биекции $\Rightarrow \partial\circ\partial'$ - тоже) $\Leftrightarrow fE\mu$ верно

Следовательно E - отношение эквивалентности

б) Множество $2^{\mathbb{N}}$ - это множество функций ß из множества $\mathbb{N}$ в множество {0,1}. Их можно представить как последовательности из 0 и 1 (на месте n стоит ß(n))
Тогда E сопоставляет последовательность с ее перестановками, то есть в один класс эквивалентности попадают последовательности, в которых равны количества каждого вида цифр => каждый класс однозначно задается парой натуральных чисел: числом нулей и числом единиц => $|2^{\mathbb{N}}/E| \sim \mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N} \Rightarrow 2^{\mathbb{N}}/E$ счетно