1. Существует ли граф:

а) с 8 вершинами, 23 ребрами и вершиной степени 1;

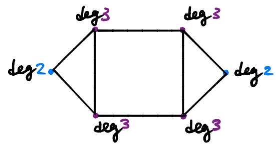
б) со степенной последовательностью $(3, 3, 3, 3, 2, 2)$?

а) Выкинем из графа вершину с deg = 1, тогда рёбер станет 22, а вершин 7, в оставшемся графе по лемме о рукопожатиях должно выполняться

$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2 \cdot 22 = 44$, но там 7 вершин, каждая максимально может быть связана с 6 вершинами, то есть $\max \sum_{x \in V} \deg(x) = 7 \cdot 6 = 42 < 44$ => противоречие, такой граф $\nexists$

Ответ: не существует

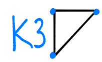
б) да, вот пример такого графа:



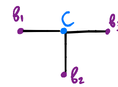
Ответ: существует

2*. С точностью до изоморфизма опишите все графы, где любые два ребра имеют общую вершину.

Сначала отдельно рассмотрим частный случай - K3.



В нем 3 вершины и 3 ребра, каждые два ребра имеют общую вершину.
Заметим, что для других циклов, например K4 это уже не выполняется.



Теперь рассмотрим графы, где есть центральная вершина (назовём ее C) и n других вершин (назовём их множество B), множество рёбер E = {r - ребро | CrB, в∈B} => любые два рёбра имеют общую вершину C => такие графы искомые. Докажем, что других графов, удовлетворяющих условию нет: возьмём какую-нибудь вершину в1∈B и соединим ее с в2∈B. Тогда рёбра Crв3 (в3 любая вершина∈B, отличная от в1 и в2), и в1rв2 не имеют общих вершин => такие графы не искомые.

Также заметим, что и к K3, и к описанным ниже графам можно прибавлять вершины, не связанные ни с какими другими (одинокие), и получать новые графы.

Ответ: K3; графы, в которых есть центральная вершина, из которой исходят все рёбра; графы, получаемые из всех вышеописанных добавлением одиноких вершин.

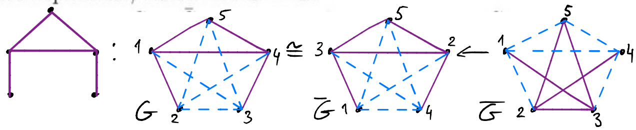
3. Допустим, что в графе G 400 вершин, причем каждая имеет степень 201. Докажите, что в G есть подграф, изоморфный K_3.

□

Выберем какую-нибудь вершину в1 и связанную с ней в2. Остальные вершины разделим на 2 множества: C = {c - вершина| ∃r - ребро: crв1} и H = {н - вершина| ∄r - ребро: нrв1}. Т.к. у в1 степень 201 и всего вершин 400, |C| = 200, |H| = 198. У в2 тоже степень 201, кроме в1 она связана еще с 200 вершинами, 200 > 198 = |H| => какая-то вершина c1, которую с в2 соединяет ребро, которая лежит в C. Но она также соединена ребром с в1 => цикл в1-c1-в2 - искомый подграф, изоморфный K3. ■

4. Постройте граф G на 5 или более вершинах, такой что $G \cong \bar{G}$.

Пример такого графа на 5 вершинах:



5*. Пусть G — граф на 100 вершинах, причем $G \cong \bar{G}$. Может ли быть так, что в G ровно одна вершина степени 50?

Предположим, в $G \exists!$ вершина a: deg(a) = 50, тогда
1) в $\bar{G}$ по изоморфизму должна быть ! вершина c: deg(c) = 50 - образ a,
2) в $\bar{G}$ должна быть ! вершина d: deg(d) = 49 (вершины, которые не исходят из a),
3) в G по изоморфизму должна быть ! вершина b: deg(b) = 49 - прообраз d
Если в графе $G \exists$ ребро r: arb, то, по изоморфизму, в $\bar{G} \exists$ ребро r: crd (так как a,b,c,d - !)
Аналогично, если в $G \nexists$ ребро r: arb, его нет и в $\bar{G}$. Но, по определению графа дополнения, ситуация должна быть обратной: нет ребра, если есть в исходном; есть ребро, если нет в исходном графе => противоречие, условие невыполнимо.
Ответ: нет, не может

6. Из некоторых семи человек каждый имеет хотя бы трех братьев (среди этих семерых). Докажите, что любые двое среди них — братья.

$\square$

Строгая постановка задачи: граф на 7 вершинах, степень каждой из которых ≥ 3 - связен, т.е. имеет ровно 1 компоненту связности.
Предположим, что в графе > 1 компоненты связности, например 2. Так как степень каждой вершины ≥ 3, в каждой компоненте должно быть минимум 3+1 = 4 вершины, но тогда всего в графе не меньше 2*4 = 8 вершин > 7, => противоречие, граф связен. $\blacksquare$

7. Города некоторой страны обладают таким свойством: если их как-либо разбить на две непустые группы, в разных группах всегда найдутся два города, соединенные дорогой. Докажите, что из любого города можно по дорогам добраться до любого другого. (Будем обозначать возможность добраться как соединенность путём)

$\square$

Предположим обратное: $\exists$ пара городов a и в, не соединённых путём. Разобьем города на группы A = {x - город | $\exists$ p - путь: apx} и B = {x - город | $\exists$ p - путь: вpx}.
Если $A \cap B = x \neq \varnothing$, то $\exists$ путь p1: ap1x и $\exists$ путь p2: вp2x, тогда $\exists$ путь ap1xp2в, соединяющий a и в, что противоречит предположению, значит $A \cap B = \varnothing$. Но тогда $\exists$ разбиение городов на 2 группы, такие что $\nexists$ 2 города из разных групп соединенные путём (а тем более дорогой) => противоречие условию => a и в соединены путём $\blacksquare$

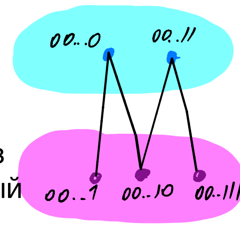
8. Вершинами графа $B_{n,r}$ служат всевозможные двоичные слова длины n. Две вершины-слова смежны, если они различаются ровно в r разрядах. Связен ли граф $B_{1000,400}$?

Заметим инвариантность: при изменении r разрядов
(сумма цифр нового слова) mod2 = r mod2 + (сумма цифр старого слова) mod2,
то есть при r = 400 чётность суммы не меняется => каждое слово связано только с теми словами, чётность суммы в которых такая же, путей между словами разной чётности нет => в графе 2 компоненты связности - четные и нечетные слова
Ответ: граф несвязен

9. Докажите, что в каждом дереве на $2n$ вершинах можно найти n попарно несмежных вершин.

По опр. дерево не содержит циклов, в т.ч. нечетных => по критерию двудольности графа любое дерево - двудольный граф. Тогда для 2n вершин мы можем разбить их на 2 группы либо по n вершин в каждой, либо на k < n в одной и l > n в другой.
В первом случае каждая группа - это n попарно несмежных вершин, во втором в группе с l вершинами содержится n попарно несмежных вершин, ч.т.д.

10. Является ли булев куб B_n двудольным графом?



Куб Bn аналогичен графу из задачи 8 с r = 1, то есть слова связаны только со словами, чётность которых отличается. Тогда, если разделить вершины на 2 множества слов с четными и нечетными суммами соответственно, каждое ребро будет соединять вершины из разных множеств (определение двудольности) => граф Bn двудольный
Ответ: да, является

11. Можно ли на плоскости выбрать 26 различных прямых и 43 различные точки таким образом, что каждая из этих прямых содержит ровно 7 (выбранных) точек, а каждая точка лежит ровно на 4 прямых?

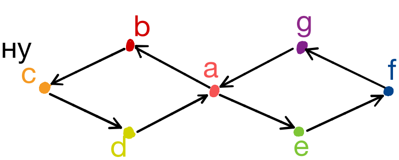
Построим двудольный граф, поделив вершины на 2 группы: прямые и точки, вершины соединены ребром <=> точка принадлежит прямой.
Найдем число рёбер по числу и степеням прямых: |E| = 26*7 = 182, и точек: |E| = 43*4 = 172. Числа должны совпадать, но они разные => противоречие, такой граф $\nexists$
Ответ: нет, нельзя

12. В классах «А» и «Б» вместе 26 учеников. Каждый ученик одного класса подрался с некоторыми учениками другого (но ни с кем дважды). Всего было 169 драк. Сколько учеников может быть в каждом классе?

Построим двудольный граф, группы - классы А и Б. Максимизируем число драк: пусть каждый ученик класса А дрался с каждым учеником класса Б, тогда
$|E| = |A|*(26-|A|) = 26|A| - |A|^2$, иЗ кУрСа аНаЛизА известно, что максимум такая функция принимает в |A| = -26/2*(-1) = 13, ее максимальное значение (вау) = 169.
Значит, максимизация необходима, каждый дрался с каждым и |A| = |Б| = 13.
Ответ: в каждом классе 13 учеников

13. Пусть из любой вершин орграфа G порядка $\geqslant 2$ в любую другую ведет ровно один простой (ориентированный) путь. Обязательно ли полустепень исхода каждой вершины в G равна 1?

Приведём пример такого графа на 7 вершинах.
Видно, что он соответствует условию. Рассмотрим вершину а: ее полустепень исхода = 2. Получается контрпример.
Ответ: нет



14*. Докажите, что в любом турнире есть простой (ориентированный) путь, включающий все вершины. Обозначим это утверждение как $\ast$

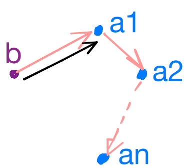
□

Докажем по индукции. Пусть n - количество вершин в графе
База: для $n = 3$ утверждение верно
Предположим, что для n вершин $\ast$ верно, тогда рассмотрим граф G с $n+1$ вершиной:
Выберем вершину b и рассмотрим $G - b$. В нем n вершин (обозначим их a_1, a_2, ... a_n),

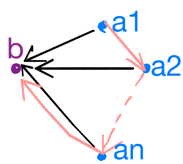
Выберем вершину b и рассмотрим G без b. В нем n вершин, по предположению индукции для него верно $\ast \Rightarrow \exists$ простой путь $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n$

Рассмотрим варианты расположения рёбер относительно вершины b
1. если $\exists\, r$ - ребро: $b r a_1$, то $b \to a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n$ - искомый путь в G
2. если $\nexists\, i$: $\exists$ ребро r: $b r a_i$, то $\exists$ ребро r: $a_n r b$, тогда путь $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n \to b$ -искомый
3. если $\exists\, i$: $\exists$ ребро r: $b r a_i$, то выберем наименьшее такое i и тогда $\exists$ ребро r: $a_{i-1} r b$, тогда путь $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_{i-1} \to b \to a_i \to \ldots \to a_n$ - искомый путь в G

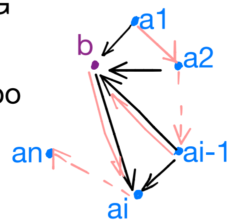
Случай 1: есть ребро из b в a_1



Случай 2: нет рёбер исходящих из b



Случай 3: есть ребро из b в a_i



Таким образом индукционный переход доказан $\Rightarrow$ по принципу индукции $\ast$ верно ■