Зубарева Наталия
БПИ195

Вариант 10

ЗАДАЧА 7. Оценка дисперсии $\hat{\sigma}_x$, полученная путем обработки результатов 8 независимых наблюдений нормально распределенной случайной величины X, равна 5,75. С какой вероятностью можно утверждать, что среднее значение X заключено в интервале (25; 37,4), если середина этого интервала совпадает с выборочным средним значением X?

$n = 8$ - число испытаний, с.в. $X \sim N(m, \sigma^2)$, $\hat{\sigma} = 5.75$, $\bar{x} = (25 + 37.4)/2 = 31.2$, матожидание и дисперсия неизвестны. Надо найти: $P(25 < m < 37.4) = ?$

Построим доверительный интервал
$G(m, X) = (\bar{x} - m) \cdot \sqrt{n-1}/\sqrt{\hat{\sigma}} \sim t(n-1)$ - центральная статистика, распределение Стьюдента с 7 степенями свободы - по теореме Фишера
$P(t(n-1)(\alpha/2) < (\bar{x} - m) \cdot \sqrt{n-1}/\sqrt{\hat{\sigma}} < t(n-1)(1-\alpha/2)) =$
$= P(t(n-1)(\alpha/2) \cdot \sqrt{\hat{\sigma}}/\sqrt{n-1} - \bar{x} < -m < t(n-1)(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{\hat{\sigma}}/\sqrt{n-1} - \bar{x}) =$
$= P(\bar{x} - t(n-1)(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{\hat{\sigma}}/\sqrt{n-1} < m < \bar{x} - t(n-1)(\alpha/2) \cdot \sqrt{\hat{\sigma}}/\sqrt{n-1}) =$
$= P(\bar{x} - t(n-1)(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{\hat{\sigma}}/\sqrt{n-1} < m < \bar{x} + t(n-1)(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{\hat{\sigma}}/\sqrt{n-1}) =$
$= P(31.2 - t(n-1)(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{5.75}/\sqrt{7} < m < 31.2 + t(n-1)(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{5.75}/\sqrt{7}) = 1-\alpha$ искомая вероятность
Выразим квантили стьюдентовского распределения через границы интервала:
$31.2 - t(n-1)(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{5.75}/\sqrt{7} = 25$ $\quad t(n-1)(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{5.75}/\sqrt{7} = 6.2$ $\quad t(n-1)(1-\alpha/2) \approx 6.841...$
$31.2 + t(n-1)(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{5.75}/\sqrt{7} = 37.4$

найдём с помощью таблицы квантилей распределения Стьюдента с 7 степенями свободы $1-\alpha/2$:
$1 - \alpha/2 = 0.999878$
$\alpha = 0.000244$
$1 - \alpha = 0.999756$- вероятность попадания матожидания в искомый интервал
Ответ: $0.999756 \approx 1$

Этот ответ выглядит неправдоподобно и на семинаре сказали что надо делать с помощью интегрирования формулы плотности от одной границы (-6.841) до другой (6.841). Так вот ужас в том, что ответ получается такой же. Ну предположим вероятность 1. Так много вопросов и совсем никаких ответов.

Можно еще предположить что там опечатка и $\hat{\sigma}$ - среднеквадратическое отклонение. Тогда мы не будем брать из него корень и в итоге будет $1 - \alpha = 0.97541$ - более красиво?

(стоит заметить что здесь и далее квантили, поиск уровня квантили от ее значения и интегрирование плотности делается питоновыми скриптами)

ЗАДАЧА 8. Будем считать, что наблюдаемая в задаче №6 СВ имеет гауссовское распределение.
а) Постройте двусторонние доверительные интервалы уровня надёжности 0.99 для математического ожидания и дисперсии наблюдаемой случайной величины.
б) Проверьте на уровне значимости 0.05 гипотезу о том, что математическое ожидание наблюдаемой СВ равно 160, а дисперсия равна 25.

а) с.в. $X \sim N(m, \sigma^2)$. Неизвестны матожидание и дисперсия. Из задачи 6 возьмём оценки для них: $\bar{x} = 163.767$, $\hat{\sigma}^2 = 25.2$. $n = 116$. Требуется построить доверительные интервалы для m и σ^2 на уровне надежности $1 - \alpha = 0.99$. $\alpha = 0.01$ $\quad 1 - \alpha/2 = 0.995$

Сначала построим интервал для m:

$(\bar{x} - m)\cdot\sqrt{n-1}/\hat{\sigma} \sim t(n-1)$ - центральная статистика, имеет распределение Стьюдента с 115 степенями свободы - по теореме Фишера

$$P\left(t(n-1)(\alpha/2) < (\bar{x} - m)\cdot\sqrt{n-1}/\hat{\sigma} < t(n-1)(1-\alpha/2)\right) =$$
$$= P\left(t(n-1)(\alpha/2)\cdot\hat{\sigma}/\sqrt{n-1} - \bar{x} < -m < t(n-1)(1-\alpha/2)\cdot\hat{\sigma}/\sqrt{n-1} - \bar{x}\right) =$$
$$= P\left(\bar{x} - t(n-1)(1-\alpha/2)\cdot\hat{\sigma}/\sqrt{n-1} < m < \bar{x} - t(n-1)(\alpha/2)\cdot\hat{\sigma}/\sqrt{n-1}\right) =$$
$$= P\left(\bar{x} - t(n-1)(1-\alpha/2)\cdot\hat{\sigma}/\sqrt{n-1} < m < \bar{x} + t(n-1)(1-\alpha/2)\cdot\hat{\sigma}/\sqrt{n-1}\right) =$$
$$= P\left(163.767 - t(115)(1-\alpha/2)\cdot\sqrt{25.2}/\sqrt{115} < m < 163.767 + t(115)(1-\alpha/2)\cdot\sqrt{25.2}/\sqrt{115}\right) = 1-\alpha$$

Найдём квантиль: $t(115)(0.995) = 2.6192$

$$\left(163.767 - 2.6192\cdot\sqrt{25.2}/\sqrt{115};\ 163.767 + 2.6192\cdot\sqrt{25.2}/\sqrt{115}\right)$$

Доверительный интервал уровня 0.99 для матожидания: (162.541; 164.993)

Доверительный интервал для σ^2:

$\sum_{i=1}^{n}((x_i - \bar{x})/\sigma)^2 \sim \chi^2(n-1)$ - центральная статистика, имеет распределение хи-квадрат с 115 степенями свободы — по теореме Фишера

$$P\left(\chi^2(n-1)(\alpha/2) < \sum_{i=1}^{n}((x_i - \bar{x})/\sigma)^2 < \chi^2(n-1)(1-\alpha/2)\right) =$$
$$= P\left(\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)/\chi^2(n-1)(1-\alpha/2) < \sigma^2 < \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)/\chi^2(n-1)(\alpha/2)\right) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = n\cdot\hat{\sigma}^2\right] =$$
$$= P\left(n\cdot\hat{\sigma}^2/\chi^2(n-1)(1-\alpha/2) < \sigma^2 < n\cdot\hat{\sigma}^2/\chi^2(n-1)(\alpha/2)\right) =$$
$$= P\left(116\cdot 25.2/\chi^2(115)(1-\alpha/2) < \sigma^2 < 116\cdot 25.2/\chi^2(115)(\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

По таблице найдём квантили распределения хи-квадрат: $\chi^2(115)(0.995) = 157.808$, $\chi^2(115)(0.005) = 79.692$

$$(116\cdot 25.2/157.808;\ 116\cdot 25.2/79.692)$$

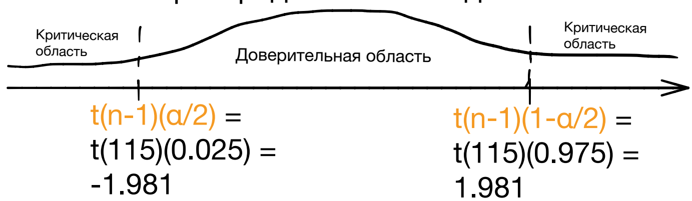
Доверительный интервал уровня 0.99 для дисперсии: (18.524; 36.681) б) На уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить гипотезы: $m = 160$, $\sigma^2 = 25$

Проверим сначала гипотезу для матожидания при неизвестной дисперсии:
H0 : m = 160 - основная простая гипотеза
H1 : m != 160 - альтернативная гипотеза

Тогда $T(X1,...Xn) = (\bar{x} - 160) * \sqrt{\cancel{n}/(\sigma^2 * \cancel{n}/(n-1))}$ = [несмещённая выборочная дисперсия: $\hat{\sigma}^2 * n/(n+1)$] $= (\bar{x} - 160) * \sqrt{n-1}/\hat{\sigma}$

T|H0 ~ t(n-1) - при верности основной гипотезы распределение Стьюдента с 115 степенями свободы - по т Фишера

Для H0 доверительный интервал:



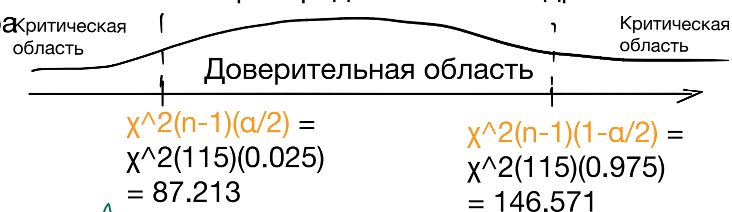
Теперь посчитаем T:
$(\bar{x} - 160) * \sqrt{n-1}/\hat{\sigma} = (163.767 - 160) * \sqrt{115}/\sqrt{25.2} = 8.047$ - вне доверительной области. H0 неверна. На уровне значимости 0.05 матожидание не равно 160.

Гипотеза для дисперсии при неизвестном матожидании:
H0: $\sigma^2 = 25$ - простая основная гипотеза
H1: σ^2 != 25 - альтернативная гипотеза

$T(X1,....Xn) = \Sigma(x_i - \bar{x})^2 /25$

T|H0 ~ $\chi^2(n-1)$ - при верности основной гипотезы распределение хи-квадрат с 115 степенями свободы - по т Фишера

Доверительная область:



Посчитаем T:

$\sum_{i=1}^{n}((x_i - \bar{x})^2 /25) = 1/25 * \sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2 = 1/25 * \hat{\sigma}^2 * n = 1/25 * 25.2 * 116 = 116.928$

- внутри доверительной области, H0 верна. На уровне значимости 0.05 дисперсия равна 25.
Ответ: гипотеза о матожидании = 160 не подтвердилась, гипотеза о дисперсии = 25 подтвердилась