

Syndrome Decoding

對稱通道的徵狀解碼

- Error pattern 誤差向量

- 接收的碼-傳送的碼 $\vec{y} - \vec{x} = \vec{e}$

- ◇ 徵狀 $\vec{s} = H\vec{y}^T = H\vec{e}^T$

- ◇ 一個(n,k)線性碼有 2^{n-k} 個可能的徵狀， 2^{n-k} 個陪集(coset)

- ◇ 因為徵狀是一個 $n-k \times 1$ 的矩陣(因為 H 是 $n-k \times n$ ， \vec{y}^T 是 $n \times 1$)

- ◇ 對一個固定的徵狀 \vec{s} ，集合 $\{\vec{e} \mid H\vec{e}^T = \vec{s}\}$ 形成線性碼 C 的一個陪集(coset)

例：線性碼 C_2 的同位檢查矩陣為 $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow n=5, n-k=2$

可能的徵狀有 $2^{n-k}=2^2=4$ 種為 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 記做 00, 10, 01, 11

徵狀	陪集領導							
00	00000	00011	00101	00110	11001	11010	11100	11111
01	00100	00111	00001	00010	11101	11110	11000	11011
10	01000	01011	01101	01110	10001	10010	10100	10111
11	10000	10011	10101	10110	01001	01010	01100	01111

每個陪集中，漢明重量最小的一個放在最前面，叫做陪集領導(coset leader)

陪集領導是發生機率最高的誤差向量

Step 1. 計算接收向量 \vec{y} 的徵狀 $\vec{s} = H\vec{y}^T$ 。

Step 2. 在標準陣列查表，找徵狀 \vec{s} 所在的列，以陪集領導作為估計的誤差向量 \vec{e} 。

Step 3. 以接收向量 \vec{y} 減去估計的誤差向量 \vec{e} ，就是估計的傳送向量 $\hat{x} = \vec{y} - \vec{e}$ 。

例：若接收到的是 $\vec{y} = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$ ，首先計算徵狀 $\vec{s} = H\vec{y}^T$

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

在標準陣列查表，徵狀 11 的陪集領導 10000 當作誤差向量 \vec{e}

$$\text{估計的傳送向量 } \hat{x} = \vec{y} - \vec{e} = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0] - [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$$

漢明碼的徵狀解碼

例：(7, 4)漢明碼 C_1 的同位檢查矩陣 $H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

行向量不能是 $\vec{0}$ ，假設有一行為 $\vec{0}$ ，當誤差向量

只錯在該行所對應的位元，則得到的徵狀是 $\vec{0}$ ，表示沒有錯

$$(\text{徵狀 } \vec{s} = H \vec{y}^T = H \vec{e}^T)$$

漢明碼的dmin是3，所以任兩行也不能相同

因為每一行有 3 個元素，若要每一行均相異，且非零向量，則行數最多有 $2^3 - 1 = 7$ 行

Step 1. 計算接收向量 \vec{y} 的徵狀 $\vec{s} = H\vec{y}^T$ 。

Step 2. 如果 $\vec{s} = \vec{0}$ ，則輸出 $\hat{x} = \vec{y}$ 。

Step 3. 如果 $\vec{s} \neq \vec{0}$ ，則 \vec{s} 是 H 的某一行，設 $\vec{s} = \vec{c}_i$ ，把 \vec{y} 的第 i 位元加 1 成為 \hat{x} 輸出。

如果誤差向量 $\vec{e} = \vec{0}$ ，則徵狀 $\vec{s} = \vec{0}$

$w_H(\vec{e})=1$ 且 \vec{e} 的第 i 個分量 $e_i \neq 0$ ，表示第 i 位元錯誤，則徵狀 \vec{s} 是 H 的第 i 行 \vec{c}_i

