報告1

錯誤更正碼解碼方式

- Hard decision
  - 接收0或1
- Soft decision
  - 接收實數

錯誤更正碼的種類

- Block Codes 區段碼
  - Hamming Codes 漢明碼
- Convolution Codes 捲積碼
  - Tree Codes 樹碼
  - Trellis Codes 交織碼

- Concatenated Codes 鏈接碼
- Turbo Codes 渦輪碼
- LDPC Codes 低密度同位檢查碼

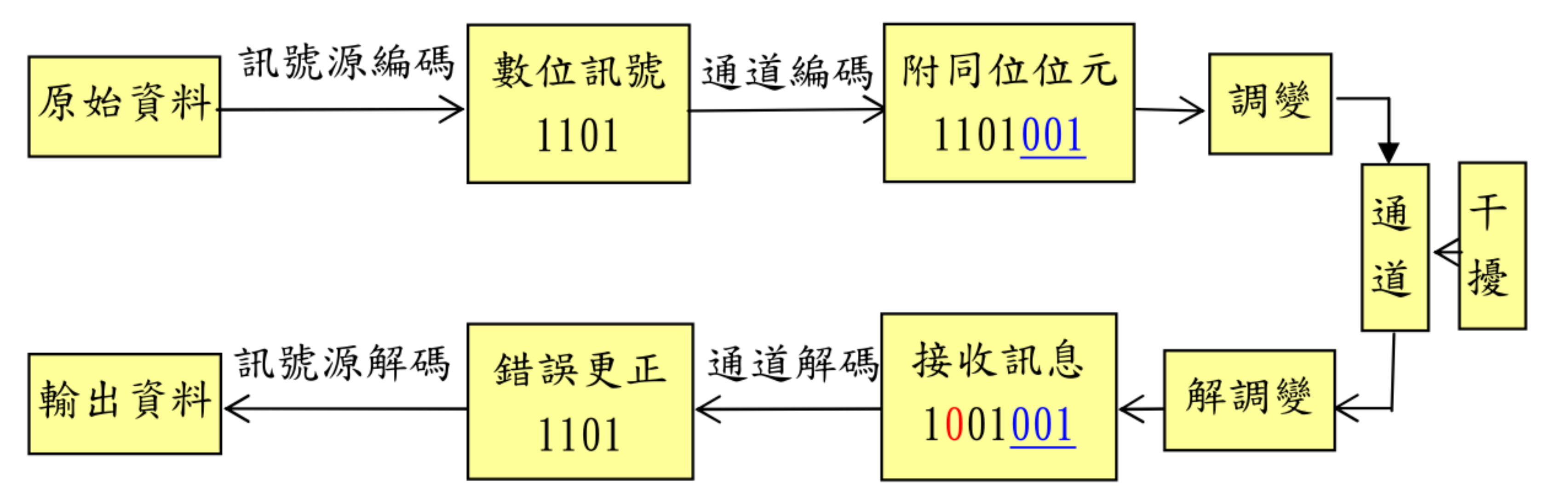
Linear Block Code 線性區段碼

- (n,k) : n位元訊息 k位元碼 n-k位元同位位元(parity bits)

  => k維向量空間

  => 子空間任兩碼相加仍為子空間的碼

- 編碼



Systematic Code 系統化碼

- 原始訊息有完整出現在編碼後的碼字中
- 同位位元 (parity bits/ redundant bits)

Code’s Rate 編碼率

- 編碼前/編碼後

Generator Matrix 生成矩陣

- 原始訊息 $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3, \cdots, m_k)$
- 生成矩陣

$$G = \begin{bmatrix} \vec{g_1} \\ \vec{g_2} \\ \vec{g_3} \\ \vdots \\ \vec{g_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1,n} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2,n} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdots & g_{3,n} \\ & & \vdots & & \\ g_{k,1} & g_{k,2} & g_{k,3} & \cdots & g_{k,n} \end{bmatrix}$$

- 生成碼

$$\underset{\vec{m} = (m_1, m_2, m_3, \cdots, m_k)}{\text{原始訊息}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{編碼器} \\ \text{生成矩陣 } G_{k\times n}\end{array}} \longrightarrow \underset{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)}{\text{碼字}}$$

Row Reduced Echelon Matrix
簡化列梯矩陣

- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
- 任何矩陣可化為RRE
- 任何線性碼有唯一RRE矩陣
- 任何線性碼是系統化碼

Duel Code 對偶碼

- 向量 $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n)$ 滿足 $p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\cdots+p_nx_n=0$ 的集合
- 以 $C^{\perp}$(讀作 C perp)來表示，叫做 C 的對偶碼

Parity-Check Matrix
同位檢查矩陣

- 矩陣 $\mathrm{H}=\begin{bmatrix}\vec{h}_1\\ \vec{h}_2\\ \vec{h}_3\\ \vdots\\ \vec{h}_{n-k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_{11} & h_{12} & h_{13} & \cdots & h_{1,n}\\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & h_{2,n}\\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & \cdots & h_{3,n}\\ & & \vdots & & \\ h_{n-k,1} & h_{n-k,2} & h_{n-k,3} & \cdots & h_{n-k,n}\end{bmatrix}$ 滿足 $\mathrm{H}\vec{x}^{T}=\vec{0}$
- H是 C perp 的生成矩陣，是 C 的同位檢查矩陣
- 每個(n,k)線性碼都有唯一 n-k×n RRE同位檢查矩陣

生成矩陣與同位檢查矩陣的轉換

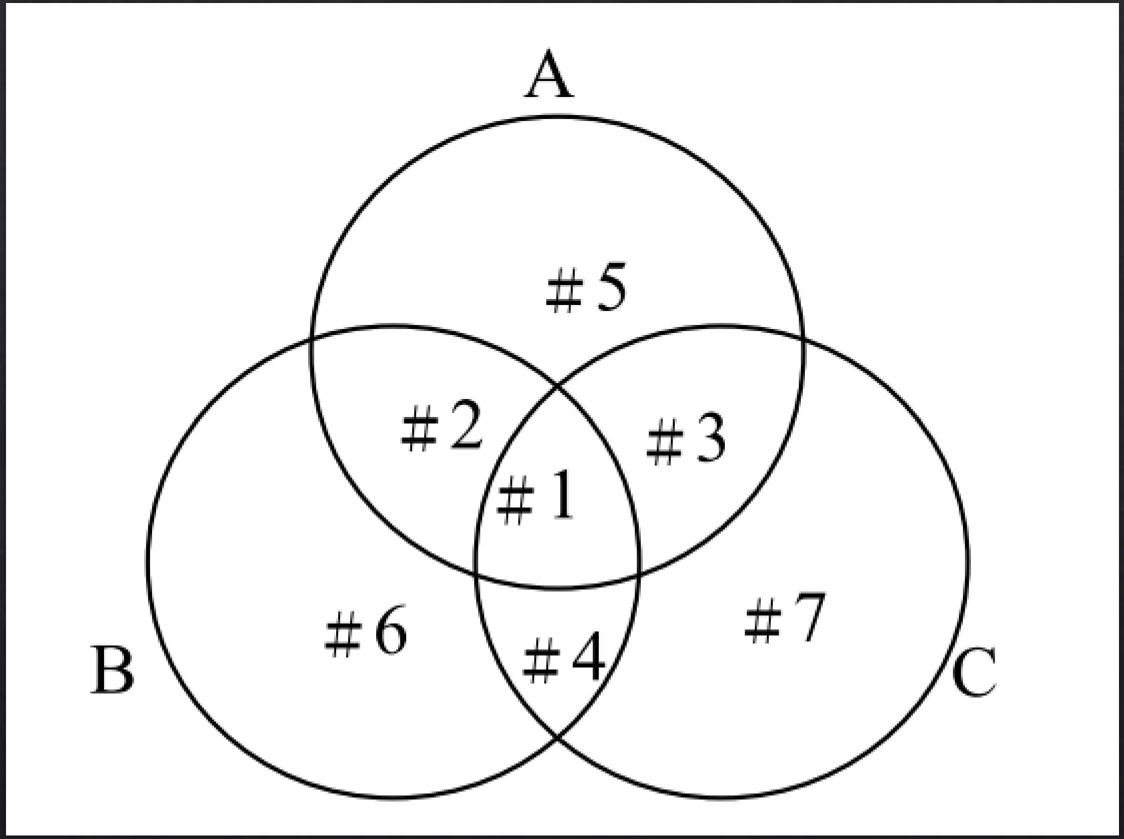
- 將生成矩陣轉為 $[I_k \vdots A]$ 的形式
  - 先換成RRE，再做列運算、行重排

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 同位檢查矩陣即是 $[-A^T \vdots I_{n-k}]$ 在做逆行重排

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(7,4) Hamming Code 漢明碼



Hamming Distance , Weight
漢明距離，漢明重量

- Hamming Weight : 向量非零分量的個數
- Hamming Distance : 兩向量不相等分量個數

- Minimum distance
  - C是一個向量子空間 若 $\vec{x},\vec{y}\in C,\vec{x}\neq\vec{y}$，則 $\vec{x}-\vec{y}\in C,\vec{x}-\vec{y}\neq\vec{0}$ $d_{min}(C)=w_{min}(C)$
  - 同位檢查矩陣行向量線性相依個數的最小值

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Syndrome Decoding
對稱通道的徵狀解碼

- Error pattern 誤差向量
  - 傳送的碼-接收的碼 $\vec{y} - \vec{x} = \vec{e}$
- 徵狀 $\vec{s} = H\vec{y}^T = H\vec{e}^T$
- 一個(n,k)線性碼有 2^{n-k} 個可能的徵狀，2^{n-k} 個陪集(coset)
  - 陪集領導 coset leader : 每個陪集中hamming weight最小的
  - 陪集成員=陪集領導+最上層碼

Syndrome Decoding
對稱通道的徵狀解碼

- Ex. 同位檢查矩陣

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

徵狀	陪集領導							
00	00000	00011	00101	00110	11001	11010	11100	11111
01	00100	00111	00001	00010	11101	11110	11000	11011
10	01000	01011	01101	01110	10001	10010	10100	10111
11	10000	10011	10101	10110	01001	01010	01100	01111

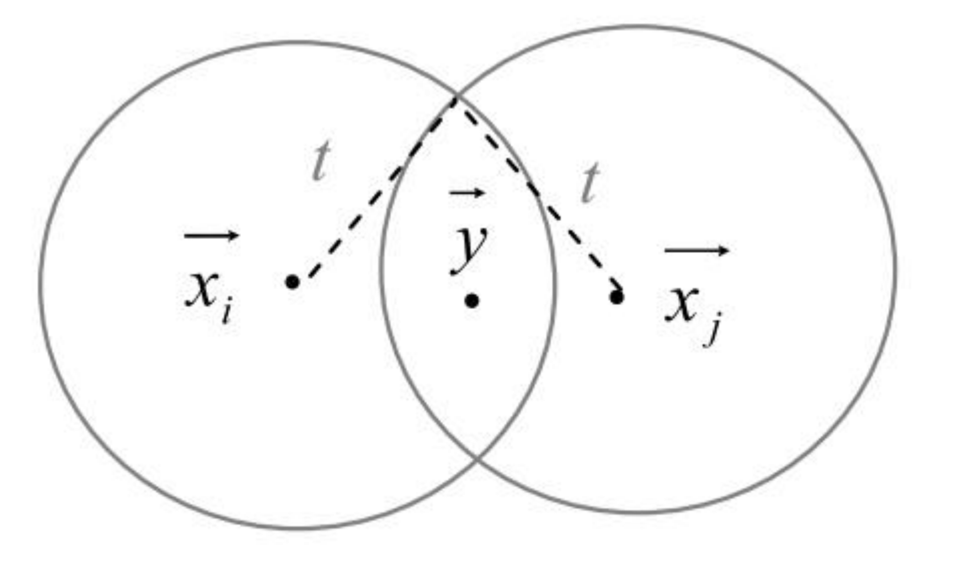
- 更正步驟：計算徵狀=>陪集領導當作誤差=>減去誤差

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \vec{y} - \vec{e} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0] - [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

Hamming Geometry
漢明幾何

- 要修正t位元的錯誤，dmin >= 2t+1



漢明碼的徵狀解碼

- 同位檢查矩陣每一行相異，任兩行和為另一行
- 徵狀碼不為零的項表示碼的第幾位錯誤
- 解碼演算法：

*Step 1.*計算接收向量 $\vec{y}$ 的徵狀 $\vec{s} = H\vec{y}^{\mathrm{T}}$ 。

*Step 2.*如果 $\vec{s} = \vec{0}$ ，則輸出 $\hat{x} = \vec{y}$ 。

*Step 3.*如果 $\vec{s} \neq \vec{0}$，則 $\vec{s}$ 是 H 的某一行，設 $\vec{s} = \vec{c_i}$ ，把 $\vec{y}$ 的第 i 位元加 1 成為 $\hat{x}$ 輸出。

一般通道的徵狀解碼

- 根據機率分布找出最有可能的陪集領導
- 演算法: *Step 1.*計算接收向量$\vec{y}$的徵狀$\vec{s}=H\vec{y}^{T}$。

  *Step 2.*在徵狀$\vec{s}$所對應的陪集中找到出現機率 $p(\vec{e})$最大的一個向量，叫做$\overrightarrow{e_0}$。

  *Step 3.*把接收向量$\vec{y}$減去估計的誤差向量$\overrightarrow{e_0}$，作為估計的傳送向量$\hat{x}=\vec{y}-\overrightarrow{e_0}$。
- 缺點
  - 在碼長的時候，Step2 的 機率難找
  - 在碼長n相當大時，會有很大部分誤差向量被忽略

存疑通道的徵狀解碼

- F : 發生機率穩定誤差向量的集合　　E : 發生機率高誤差向量的集合
- E是F的子集合
- 解碼器輸出x 或 ?(存疑符號erasure symbol)
- 建立表格有 2^{n-k} 個$(\vec{s}, f(\vec{s}))$，其中 $f(\vec{s})="?"$ ，當 $\vec{e} \in E$ ，算出 $\vec{s} = H\vec{e}^{T}$ 修改表格 $(\vec{s}, f(\vec{s}))=(\vec{s}, \vec{e})$
- 解碼演算法 :

*Step 1.*計算接收向量 $\vec{y}$ 的徵狀 $\vec{s} = H\vec{y}^{T}$ 。

*Step 2.*若 $f(\vec{s}) \neq "?"$，則輸出 $\hat{x} = \vec{y} - f(\vec{s})$ 。

*Step 3.*若 $f(\vec{s})="?"$，輸出"?" 。

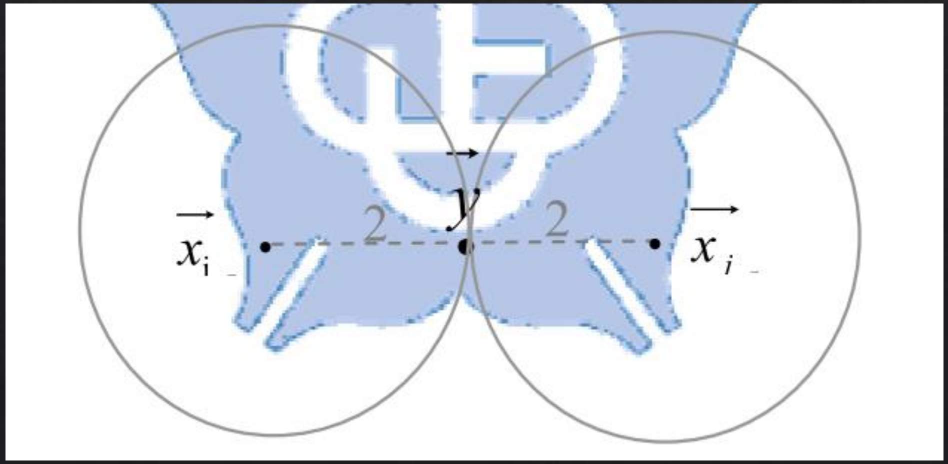
- Ex:

C 是一個(7, 3)碼，其同位檢查矩陣 H= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

可以找到四行線性相依 (例如第四五六七行的和為 0)，所以 $d_{min}(C)= w_{min}(C)=4$。

$4 \geq 2t+1$ $t \leq 1$ 所以可更正一個錯誤。

- C中兩個漢明距離是4的碼xi xj，接收到y
  可偵測兩個錯，更正一個錯



小結

線性碼是具有線性的區段碼，通道編碼時，附加的多餘位元與原始訊息位元存在著線性關係。傳送過程可能因為通道雜訊而造成接收的資料有錯誤，解碼器利用同位檢查矩陣，以特定的解碼演算法，可以把錯誤儘量的更正過來。徵狀解碼演算法是線性碼的一種高效能的查表(table lookup)解碼方法。因為碼是線性的，查找表格可以簡化縮小。在 2.2 節介紹的各種徵狀解碼演算法中，最簡單的是漢明碼的徵狀解碼。